Мукачівський державний університет
Міністерство освіти і науки України
Інститут математики
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ПАГІРЯ МИХАЙЛО МИХАЙЛОВИЧ

УДК 517.5

ДИСЕРТАЦІЯ

УЗАГАЛЬНЕННЯ КЛАСИЧНИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ ТА НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

01.01.01 — математичний аналіз

111 — Математика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико–математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень.
Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ________________ М. М. Пагіря

Науковий консультант:
Макаров Володимир Леонідович
доктор фізико–математичних наук,
професор, академік НАН України

Мукачево–2018

АНОТАЦІЯ

Пагіря М. М. Узагальнення класичних ланцюгових дробів та наближення функцій. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико–математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — "Математичний аналіз" (111 — Математика). — Мукачівський державний університет Міністерства науки і освіти України, Мукачево, Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

В дисертаційній роботі розглянуто питання наближення функцій однієї змінної ланцюговими дробами. Зокрема в дисертаційній роботі досліджено задачу інтерполяції функцій ланцюговими дробами та задачу розвинення функцій в ланцюгові дроби, а також розглянуто задачу інтерполяції функціонала інтегральним ланцюговим C–дробом.

В роботі доведено нові оцінки для залишкових членів функціональних ланцюгових дробів комплексної змінної та інтерполяційних ланцюгових дробів дійсної змінної з поліноміальними елементами. Досліджено задачі наближення функцій інтерполяційним ланцюговим дробом Тіле та інтерполяційним ланцюговим C–дробом. Отримано двосторонні оцінки залишкових членів інтерполяційних ланцюгових дробів функцій комплексної змінної, доведено збіжність інтерполяційних процесів, обґрунтовано оцінки залишкових членів інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле та інтерполяційного ланцюгового C–дробу функцій дійсної змінної. Розглянуто задачу інтерполяції функціонала, заданого на множині континуальних вузлів, інтегральним ланцюговим C–дробом. Отримано необхідні та достатні умови розв'язності розглядуваної задачі. Доведено, що у частинному випадку інтегральний ланцюговий дріб містить в собі інтерполяційний C–дріб.

Розглянуто теорію квазі–обернених інтерполяційних ланцюгових дроби типу Тіле та типу C–дробу. Отримано двосторонні оцінки залишкового члена інтерполяційних ланцюгових дробів таких типів для функцій ком-

плексної та дійсної змінних, доведено збіжності інтерполяційних процесів. Введено в розгляд новий тип обернених різниць — обернені різниці 2–го типу, обґрунтовано їх симетричність та інші властивості.

Вперше досліджено функціональні інтерполяційні ланцюгові дроби типу Тіле та типу С–дробу. Доведено двосторонні оцінки залишкових членів функціональних інтерполяційних ланцюгових дробів та збіжність інтерполяційних процесів. Введено в розгляд узагальнення обернених різниць — обернені g–різниці. Обґрунтовано властивості обернених g–різниць.

Запропоновано новий тип інтерполяційних ланцюгових дробів — квазі–обернені функціональні інтерполяційні ланцюгові дроби типу Тіле та типу С–дробу. Ланцюгові дроби таких типів узагальнюють квазі–обернені інтерполяційні ланцюгові дроби. Доведено оцінки залишкових членів та збіжності інтерполяційних процесів. Введено в розгляд новий об'єкт — обернені g–різниці 2–го типу, які узагальнюють обернені різниці 2–го типу. Обґрунтовано симетричність таких різниць.

Отримано нові властивості обернених похідних Тіле, встановлено правила оберненого диференціювання за Тіле. Доведена теорема про обернену похідну Тіле многочлена та раціональної функції. Обґрунтовано рівноцінність різних способів розвинення функції в правильний ланцюговий С–дріб. Встановлено області збіжності розвинення деяких функцій в ланцюгові дроби, апріорні та апостеріорні оцінки.

Вперше введено в розгляд обернені похідні 2–го типу та встановлено властивості такого типу обернених похідних, отримано формулу типу Тіле. Встановлено взаємозв'язки між оберненими похідними Тіле, оберненими похідними 2–го типу та звичайними похідними функції. Доведено теорема про обернену похідну 2–го типу многочлена та раціональної функції. Отримано розвинення деяких функцій в квазі–обернений ланцюговий дріб Тіле. Обґрунтовано можливість розвинення функції в квазі–обернений ланцюговий С–дріб, збіжність такого розвинення до функції, апостеріорні оцінки.

Розглянуто приклади розвинення функцій в квазі–обернені ланцюгові дроби, встановлено області збіжності отриманих розвинень.

Обґрунтовано нове поняття — обернена g–похідної, яка є узагальненням оберненої похідної Тіле. Доведено властивості таких обернених похідних, отримано функціональну формула типу Тіле та розвинення функцій в функціональні ланцюгові дроби. Узагальненням обернених похідних 2–го типу є обернені g–похідні 2–го типу, які вперше введена до розгляду. Доведено властивості обернених g–похідних 2–го типу, функціональну формула типу Тіле, яка ґрунтується на обернених g–похідних 2–го типу. Отримано представлення деяких функцій функціональними квазі–оберненими ланцюговими дробами.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичне та прикладне значення і можуть бути використанні для подальшого розвитку теорії наближення функцій дійсної та комплексної змінних ланцюговими дробами. Їх можна також використати для розв'язання задач обчислювальної математики, фізики, механіки, розробці програмного забезпечення тощо.

Ключові слова: інтерполяційні ланцюгові дроби, обернені різниці, функціонал, інтегральний ланцюговий С–дріб, обернені похідні, правила оберненого диференціювання, розвинення функцій в ланцюгові дроби, область збіжності, залишковий член, апріорні та апостеріорні оцінки.

ABSTRACT

Pahirya M.M. Generalization of classical continued fractions and function approximation, Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of the Doctor of Sciences in Physics and Mathematics in Speciality 01.01.01 — Mathematical analysis (111 — Mathematics). — Mukachevo State University of Ministry of Education and Science of Ukraine, Mukachevo, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2018.

The problem of interpolation functions by continued fraction, the problem of expansion functions in continued fractions and the problem of interpolation functional by integral continued C–fraction are investigated in the thesis.

New estimates for the remainders of the functional continued fractions of a complex variable and interpolation continued fractions of a real variable with polynomial elements have been proved. Problems of approximation of functions by Thiele interpolation continued fraction and interpolation continued C–fraction have been investigated. Estimates of the remainders of the interpolation continued fractions of the functions of the complex variable have been obtained, the convergence of interpolation processes have been proved.

The problem of interpolation of a functional by an integral continued C-fraction if its value is known on the set of continual nodes has been studied. The necessary and sufficient conditions for its solvability have been obtained.

The quasi–reciprocal interpolation continued fractions of Thiele type and C–fractions type have been considered. Estimates of remainders of interpolation continued fractions following types have been received, the convergence of interpolation processes has been proved. The new type of reciprocal differences — reciprocal differences of the 2nd type have been introduced, their properties have been proved.

Functional interpolation continued fractions and quasi–reciprocal functional interpolation continued fractions have been proposed for the first time. Estimates of the remainders of functional interpolation continued fractions and convergence of interpolation processes have been proved. The reciprocal g– difference and the reciprocal g–difference of the 2nd type have been introduced. Properties of reciprocal g–differences and reciprocal g–difference of the 2nd type have been proved.

New properties of Thiele reciprocal derivatives have been obtained, rules of reciprocal differentiation by Thiele have been established. The equivalence of different ways of expansion a function in a regular C–fraction has been proved.

Areas of convergence of expansion of some functions in continued fraction, a priori and a posteriori estimates, have been established.

For the first time the reciprocal derivatives of the 2nd type have been introduced, the properties of such a type of reciprocal derivatives and Thiele type formula have been obtained. Relationships between the reciprocal derivatives of Thiele and the ordinary derivatives of the function have been established. The possibility of expansion of a function in a quasi–reciprocal continued C–fraction, convergence of such expansion to function, a posteriori estimation have been proved.

A new notations — an reciprocal g–derivative and reciprocal g–derivative of the 2nd type have been introduced. Properties of such reciprocal derivatives and functional formulas of the Thiele type have been proved.

Keywords: interpolation continued fractions, reciprocal difference, functional, integral continued C–fraction, reciprocal derivatives, rules of reciprocal differentiation, expansion of functions in continued fractions, convergence region, remainder, a priori and a posteriori estimates.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Пагіря М. М. Наближення функцій ланцюговими дробами. — Ужгород, Гражда, 2016. — 412 с.

2. Пагіря М. М. Деякі типи інтерполяційних ланцюгових дробів // Комп'ютерна математ. Оптимізація обчислень: Збір. наук. праць. НАН України, Ін–т кібернетики ім. В. М. Глушкова. — Т. 1. — Київ: Ін-т кібернетики ім. В. М.Глушкова НАН України, 2001. — С. 328–333.

3. Пагіря М. М. Про ефективність наближення функцій деякими типами інтерполяційних ланцюгових дробів // Мат. методи та фіз.–мех. поля. — 2003. — Т. 46. — № 4. — С. 57–64.

4. Пагіря М. М. Задача інтерполяції функцій ланцюговими дробами // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2005. — Вип. 10–11. — С. 77–87.

5. Пагіря М. М., Свида Т. С. Задача інтерполяції функцій двовимірними ланцюговими дробами // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 6. — С. 842–851.

6. Пагіря М. М., Кацала Р. А. Розвинення деяких функцій у ланцюгові дроби // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2007. — Вип. 14–15. — С. 107–116.

7. Пагіря М. М. Еквівалентні інтерполяційному багаточлену ланцюгові дроби // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2008. — Вип. 16. — С. 127–134.

8. Пагіря М. М. Оцінка залишкового члена інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, №. 11. — С. 1548–1554.

9. Пагіря М. М. Обернений ланцюговий дріб Тіле // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2008. — Вип. 17. — С. 179–192.

10. Пагіря М. М., Кацала Р. А. Еквівалентність двох методів побудови правильних ланцюгових C–дробів // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 7. — С. 1005–1009.

11. Пагіря М. М. Обернені похідні 2–го типу та їх властивості // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2009. — Вип. 18. — С. 99–105.

12. Пагіря М. М., Кацала Р. А. Властивості обернених похідних // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 5.— С. 708–713.

13. Пагіря М. М. Функціональні ланцюгові дроби типу Тіле // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2010. — Вип. 20. — С. 98–110.

14. Пагіря М. М., Кацала Р. А. Зв'язки обернених похідних другого типу з похідними та оберненими похідними // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2011. — Вип. 22, № 1. — С. 102–110.

15. Пагіря М. М. Наближення функцій інтерполяційними функціональними ланцюговими дробами // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2012. — Вип. 23, № 1. — С. 89–98.

16. Пагіря М. М. Оцінка залишкових членів квазі–обернених інтерполяційних ланцюгових дробів // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2013. — Вип. 24, № 2. — С. 130–137.

17. Пагіря М. М. Оцінка залишкового члена інтерполяційного ланцюгового C–дробу // Укр. мат. журн. — 2014. — **66**, № 6. — С. 806–814.

18. Пагіря М. М. Розвинення функцій комплексної змінної в квазі–обернений ланцюговий дріб типу Тіле // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2014. — Вип. 25, № 2. — С. 131–144.

19. Пагіря М. М. Дві властивості обернених похідних Тіле // Теор. наближ. ф–й та суміжні питання: Зб. праць Ін–ту математики НАН України. — 2015. – Т. 12, № 4. — С. 226–234.

20. Пагіря М. М. Розвинення функції $z \ln z$ в ланцюговий дріб // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2015. — Вип. 2 (27). — С. 123–136.

21. Пагіря М. М. Обернені похідні 2–го типу многочлена та раціональної функції // Математ. пробл. механіки та обчис. матем.: Зб. праць Ін–ту математики НАН України, 2015. — Т. 12, № 5. – С. 132–139.

22. Пагіря М.М. Зображення функцій $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z, \sin z, \cos z$ ланцюговими дробами // Укр. мат. журн. — 2018. — **70**, № 5. — С. 682–698.

23. Макаров В. Л., Пагіря М. М. Інтерполяція функціоналів інтегральними ланцюговими С–дробами // Доп. НАН України. 2018. № 3. С. 12–21.

24. Pahirya M. M. Some new aspects of Thiele interpolation continued fraction // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. — 2001. — Vol. IX. — P. 21–29.

25. Pahirya M. M. Interpolation function of non–Thiele continued fractions // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. — 2002. — Vol. X. — P. 59–62.

26. Pahirya M. M. The problem of interpolation function of Thiele continued fraction (Some Examples) // Communication in the Analytic Theory of

Continued Fractions. — 2007. — Vol. XV. — P. 34–39.

27. Pahirya M. M. Expansion of function $z \ln z$ in the quasi–reciprocal continued fraction // International Journal of Advanced Research in Mathematics. — 2016. — Vol. 7. — P. 1–9.

28. Pahirya M. M. A reciprocal g–derivatives of 2–nd type and its properties // International Journal of Advanced Research in Mathematics. — 2017. — Vol. 8. — P. 1–11.

29. Pahirya M. M. Multidimensional Interpolating Continued Fractions // Український математичний конгрес, (Київ, 21–23 серпня 2001). — Теор. набл. та гармон.аналіз, секція 10, Тези доповідей. — С. 42.

30. Пагіря М. М., Крижановська І. В. Про побудову деяких типів інтерполяційних ланцюгових дробів // Міжнародна школа–семінар "Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування", (Ужгород, 19–24 серпня 2002). Тези доповідей.— С. 42–44.

31. Пагіря М. М., Свида Т. С. Наближення функцій інтерполяційними ланцюговими дробами та їх узагальненнями // Міжнародна конференція "Шості Боголюбовські читання", (Чернівці, 25–29 серпня 2003). Тези доповідей. — С. 166.

32. Пагіря М. М., Свида Т. С. Наближення функцій інтерполяційними ланцюговими дробами та їх узагальненнями // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька, (Дрогобич, 27 вересня– 1 жовтня 2004). Тези доповідей. — С. 159.

33. Пагіря М. М. Задача наближення функцій інтерполяційними ланцюговими дробами // Conference "Functional Methods in Approximation Theory, Operator Theory, Stochastic Analysis and Statistics", (Kyiv,October 1–5, 2004). Abstracts. — P. 93.

34. Пагіря М. М. Наближення функцій ланцюговими дробами // Міжнародна наукова конференція "Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування", (Ужгород, 18–23 вересня 2006). Тези доповідей.

— С. 76–77.

35. Пагіря М. М. Задача наближення функцій ланцюговими дробами // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька, (Дрогобич, 24–28 вересня 2007). Тези доповідей. — С. 214.

36. Пагіря М. М., Кацала Р. А. Розвиток функцій у ланцюговий дріб // Сучасні проблеми механіки і математики, (Львів, 25–29 травня 2008). Тези доповідей. Т. 3. — С. 81–83.

37. Пагіря М. М. Наближення функцій однієї та двох змінних ланцюговими дробами та їх узагальненнями // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування", (Мелітополь, 16–21 червня 2008) Тези доповідей. — С. 88.

38. Пагіря М. М. Наближення функцій ланцюговими дробами // Conference "Functional Methods in Approx. Theory and Operator Theory III", (Світязь, 22–26 серпня 2009). Abstracts. — P. 69–70.

39. Пагіря М. М. Наближення функцій ланцюговими дробами // Український математичний конгрес. (Київ, 27–29 серпня 2009). — htpp://www.imath.kiev.ua/~congress2009 /Abstracts/Pahirya.pdf

40. Пагіря М. М., Кацала Р. А. Про два підходи до побудови правильних ланцюгових C–дробів та деякі властивості обернених похідних // International Conference on Complex Analysis, (Lviv, May 31–June 5, 2010). Abstracts. — P. 103–104.

41. Пагіря М. М. Наближення функцій функціональними ланцюговими дробами // International Conference in Modern Analysis. (Donetsk, June 20–23, 2011). Abstracts. — P. 84.

42. Пагіря М. М. Деякі способи наближення функцій ланцюговими дробами // Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", (Кам'янець–Подільський, 28 травня–3 червня, 2012). Тези доповідей. — С. 79–80.

43. Пагіря М. М. Наближення функцій інтерполяційними функціональ-

ними ланцюговими дробами // International Conference dedicate to the 120th anniversary of Stefan Banach. (L'viv, September 17–21, 2012). Abstracts of report. — P. 172.

44. Пагіря М. М. Функціональні ланцюгові дроби // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування", (Ужгород–Ченадієво, 27–29 вересня 2012). Матеріали конференції. — С. 64.

45. Пагіря М. М. Інтерполяція функцій ланцюговими дробами // Міжнародна математична конференція "Боголюбовські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування", Севастополь, 23–30 червня 2013). Тези доповідей. — С. 258.

46. Пагіря М. М. Деякі підходи до наближення функцій комплексної змінної ланцюговими дробами // VII Міжнародна конференція імені академіка І.І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика", (Київ, 9–10 жовтня 2014). Матеріали конференції. — С. 74–75.

47. Pahirya M. M. Approximation of functions of complex variables by continued fractions // International V. Skorobohatko mathematical conference, (Drohobych, August 25–28, 2015). Abstracts. — P. 115.

48. Пагіря М. М. Деякі підходи до інтерполяції функцій ланцюговими дробами // VIII Міжнародна конференція імені академіка І.І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика", (Київ, 8–9 жовтня 2015). Матеріали конференції. — С. 67–68.

49. Пагіря М. М. Наближення функцій комплексної змінної ланцюговими дробами // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування", (Ужгород, 19–21 травня 2016). Тези доповідей. — С. 104.

50. Pahirya M. M. Expansion function of complex variable in the continued fraction // 24–th International conference on finite or infinite dimensional complex analysis and application,(Jaipur, India, August 22–26, 2016). Abstracts. — P. 87.

51. Пагіря М. М. Деякі підходи до розвинення функцій в ланцюгові дроби // Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", (Слов'янськ, 28 травня–3 червня, 2017). Тези доповідей.— С. 76.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\circ$	—	композиція
$[\cdot]$	—	ціла частина числа
$\|\| \cdot \|\|$	—	норма
$\square$	—	кінець доведення теореми, леми, твердження
$\mathbb{C}$	—	поле комплексних чисел
$\overline{\mathbb{C}}$	—	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
$d_{\mathcal{R}}$	—	діаметр компактної множини $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$
$d_{\mathcal{Z}}$	—	діаметр компактної множини $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$
$\mathbf{deg}\, P_n(z)$	—	степінь многочлена $P_n(z)$
$\mathbf{Int}\, D$	—	внутрішність множини D
${}^{(n)}f(z)$	—	обернена похідна Тіле функції n–го порядку
${}^{(n)}f_g(z)$	—	обернена g–похідна функції n–го порядку
${}^{[n]}f_g(z)$	—	обернена g–похідна 2–го типу функції n–го порядку
${}^{\{n\}}f(z)$	—	обернена похідна 2–го типу функції n–го порядку
$F(a, b; c; z)$	—	гіпергеометричний ряд
$g(z)$	—	базис–функція
H_n	—	$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$
$H_k^{(n)}$	—	визначник Ганкеля k–го порядку
$\mathbb{K}(z)$	—	поле раціональних функцій
$\mathbb{L}_0$	—	поле формальних рядів Лорана
$\mathcal{L}(f)$	—	розвинення функції $f(z)$ в ряд Лорана
$\mathbb{N}$	—	множина натуральних чисел
$\mathbb{N}_0$	—	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{N}_2$	—	$\mathbb{N} \backslash \{1\}$

$P_n(z)$	— многочлен $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$
$R^{[L/M]}(z)$	— апроксиманта Паде
$\mathbb{R}$	— поле дійсних чисел
$\mathbb{R}_+$	— множина додатних дійсних чисел
$\mathcal{R}$	— компакт в полі дійсних чисел $\mathbb{R}$
S_n^*	— $2H_n + \ln(c + z_*), c \neq 0$
S_n^0	— $2H_n + 1$
$\bar{S}_n$	— $2H_n + \ln z_*$
$\mathcal{I}$	— нескінченна матриця інтерполяційних вузлів
X	— множина інтерполяційних вузлів в $\mathcal{R}$
X_{test}	— множина псевдовипадкових точок в $\mathcal{R}$
$\mathbb{Z}$	— множина цілих чисел
$\mathbb{Z}_0^-$	— $\{0, -1, -2, \ldots .\}$
$\mathcal{Z}$	— компакт в полі комплексних чисел $\mathbb{C}$
$\mathbf{Z}$	— множина інтерполяційних вузлів в $\mathcal{Z}$
Z_{test}	— множина псевдовипадкових точок в $\mathcal{Z}$
ІЛД	— інтерполяційний ланцюговий дріб
ІнтЛД	— інтегральний ланцюговий дріб
ІФЛД	— інтерполяційний функціональний ланцюговий дріб
С–ІЛД	— інтерполяційний ланцюговий дріб типу С – дробу
С–ІнтІЛД	— інтегральний інтерполяційний ланцюговий дріб типу С–дробу
С–КІЛД	— квазі–обернений інтерполяційний ланцюговий дріб типу С–дробу
С–КЛД	— квазі–обернений ланцюговий дріб типу С – дробу
С–КФІЛД	— квазі–обернений функціональний інтерполяційний ланцюговий дріб типу С–дробу

С–КФЛД	—	квазі–обернений функціональний ланцюговий дріб типу С–дробу
С–ФЛД	—	функціональний ланцюговий дріб типу С–дробу
ОІФЛД	—	обернений інтерполяційний функціональний ланцюговий дріб
ОФЛД	—	обернений функціональний ланцюговий дріб
Т–ІЛД	—	інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле
Т–КІЛД	—	квазі–обернений інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле
Т–КЛД	—	квазі–обернений ланцюговий дріб типу Тіле
Т–КФІЛД	—	квазі–обернений функціональний інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле
Т–КФЛД	—	квазі–обернений функціональний ланцюговий дріб типу Тіле
Т–ЛД	—	ланцюговий дріб Тіле
Т–ФІЛД	—	функціональний інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле
Т–ФЛД	—	функціональний ланцюговий дріб типу Тіле
ФЛД	—	функціональний ланцюговий дріб
ФРЛ	—	формальний ряд Лорана
ФСР	—	формальний степеневий ряд

ВСТУП

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена дослідженню наближення функцій ланцюговими дробами, зокрема досліджуються задачі інтерполяції функцій дійсної та комплексної змінних, які задані на компакті, ланцюговими дробами, задача інтерполяції функціонала інтегральним ланцюговим C–дробом на множині континуальних вузлів, задачі розвинення функцій в ланцюгові дроби та інші супровідні задачі. При дослідження задачі інтерполяції функцій поряд із інтерполяційними ланцюговими дробами Тіле вводяться в розгляд інші типи інтерполяційних ланцюгових дробів: C–дроби, квазі–обернені типу Тіле та типу C–дробу, функціональні і квазі–обернені функціональні дроби; отримані оцінки залишкових членів; обґрунтована збіжність інтерполяційних процесів до функції. При дослідженні задачі розвинення функції в ланцюгові дроби, запропоновані деякі аналоги формули Тіле, які ґрунтуються на введених в дисертації обернених похідних 2–го типу, обернених g–похідних та обернених g–похідних 2–го типу; доведені властивості розглянутих нових типів обернених похідних; отримані розвинення функцій в ланцюгові дроби нових типів; встановлені області збіжності розвинень, апріорні та апостеріорні оцінки.

Актуальність розглянутих в дисертації задач полягає в тому, що поряд із многочленами, узагальненими многочленами та сплайнами ланцюгові дроби використовуються для обчислення значень функцій [10, 45, 59, 60, 69, 94, 103, 120, 138, 139, 162]. Ланцюгові дроби тісно пов'язані з раціональними апроксимаціями [125, 132] та апроксимантами Паде [6, 17, 141], ортогональними многочленами [149]. Одним із узагальнень ланцюгових дробів є гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД), які запропоновані В. Я. Скоробогатьком [12, 104]. ГЛД можна використовувати в задачах наближення функцій багатьох змінних. Теорія ГЛД, двовимірних ланцюгових дробів, інтегральних ланцюгових дробів розглянута в монографіях Д. І. Боднара [11], Х. Й. Кучмінської [40], М. О. Недашковського [66], М. С. Сявавка [108], статтях Т. М. Антонової, О. М. Сусь [2], Н. П. Гоєнко, В. П. Гладуна, О. С. Манзій [19], С. М. Возної [14], М. М. Бубняк [123], Р. І. Дмитришина [29] та інших.

Наближення функцій многочленами та їх різноманітними узагальненнями належить до найбільш вивчених методів наближення функцій. Фундаментальні результати містяться в працях Н. І. Ахієзера [3], В. К. Дзядика [26], М. П. Корнейчука [33], Л. Коллатца, В. Крабса [38], В. Л. Макорова, В. В. Хлобистова, Л. А. Яновича [51, 56, 160], П.–Ж. Лорана [64], І. П. Натансона [65], С. М. Нікольського [68], О. І. Степанця [105], О. П. Тімана [109], Е. Чейні [128] та інших. Інтерполяція функцій многочленами досліджувалася в монографіях О. О. Гельфонда [18], А. А. Привалова [95], Дж. Л. Уолша [111], К. Йордана [148] та висвітлюється у літературі [4, 5, 7, 16, 24, 37, 42, 62, 102, 129, 134, 176, 184]. В якості апарату наближення використовуються сплайн–функції [32, 34, 52], раціональні функції та апроксимації Паде [6,20,67,100]. Існують також інші підходи в задачах наближення функцій. Так в монографії В. Л. Рвачова, В. О. Рвачова [98] розроблені методи так званих атомарних функцій, а в монографії О. М. Литвина [44] викладено теорію інтерлінації та інтерфлетації функцій багатьох змінних.

Задачі інтерполяції функцій ланцюговими дробами досліджувалися в роботах Ю. М. Вронського [144,145], Т. Н. Тіле [188], Н. Е. Ньорлунда [164], Ф. Е. Гілдебранда [139], Ф. М. Ларкіна [155], Х. Й. Кучмінської, В. Семашко, С. М. Возної [15, 40, 151], С. С. Хлопоніна [117, 118], Л. В. Зарудняка [30], Й. Тайн, К. Чжао, П. Ці [186,187,190] та інших. Задачі екстраполяції функцій ланцюговими дробами та апроксимантами Паде розглянуті в монографіях К. Брежінскі, М. Р. Заглія [126] та А. Сіді [182].

Враховуючи чудові властивості ланцюгових дробів: стійкість щодо збурень, двосторонні наближення і т.д, подальші дослідження раніше розглянутих інтерполяційних ланцюгових дробів, а також побудова та дослідження інших типів інтерполяційних ланцюгових дробів становлять певний науковий інтерес.

Існує декілька методів розвинення функцій у ланцюгові дроби. Історично першим із них був метод Лагранжа (1776), який полягав у відшукані розв'язку диференціального рівняння Ріккаті у вигляді ланцюгового дробу. Якщо функція задовольняє рівняння Ріккаті при певних коефіцієнтах, то отримаємо розвинення функції в ланцюговий дріб. Метод Лагранжа разом із власними дослідженнями викладено О. М. Хованським в монографії [116, 152]. Узагальнення методу Лагранжа міститься роботах С. Санієлевіча [178], К. Купера, С. Купера, В. Джонса [130], Е. Меркеса, В. Скотта [161], А. Стокеса [183]. За допомогою методу Лагранжа та його узагальнень отримані розвинення багатьох функцій в ланцюгові дроби Ж. Лагранжем, Л. Ойлером, Й. Г. Ламбертом та іншими авторами [131]. Однак не для всіх функцій, наприклад $\sin z, \cos z, \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$, диференціальні рівняння Ріккаті знайдено. Інший метод отримання розвинення функції у правильний ланцюговий С–дріб пов'язаний із розвиненням функції в степеневий ряд і передбачає обчислення чотирьох визначників Ганкеля для знаходження кожного коефіцієнта ланцюгового дробу [6, 25, 104, 131]. Ще один спосіб побудови відповідного степеневому ряду ланцюгового δ–дробу розглянуто в роботах Л. Ланге [154] та К. Балтуса, С. Купера, К. Кравіотто, Дж. МакКейба [121]. Аналогом формули Тейлора в теорії ланцюгових дробів є формула Т. Н. Тіле (1909) [188], яка дозволяє отримати коефіцієнти розвинення функції в ланцюговий дріб рекурентно знаходячи обернені похідні Тіле функції. Формула Тіле та властивості обернених похідних досліджувалися в монографії Н. Е. Ньорлунда (1924) [164], в роботах П. Д. Клеменса (1947) [150], Г. Салзера (1946, 1962) [179, 180], Д. Якобса (1966) [146] та Тайна (2000) [186]. Обґрунтування нових властивостей обернених похідних Тіле, отримання нових розвинень функції в ланцюгові дроби, введення в розгляд обернених похідних інших типів, встановлення їх властивостей, обґрунтування нових аналогів формул типу Тіле та отримання за допомогою них розвинень функцій в ланцюгові дроби є актуальним напрямком дослідження в теорії функцій.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано на кафедрі машинобудування, природничих дисциплін та інформаційних технологій Мукачівського державного університету згідно із науково–дослідною темою "Наближення функцій однієї змінної ланцюговими дробами та конструктивні методи дослідження задач теорії диференціальних рівнянь", номера державної реєстрації 0113U008236, 0116U008704.

Мета і завдання дослідження. Основна мета дисертаційного дослідження — це вивчення властивостей відомих та побудова нових інтерполянт у вигляді ланцюгового дробу, розробка і вдосконалення способів розвинення функцій в ланцюгові дроби.

Об'єктом дослідження є функціональні ланцюгові дроби над полем $\mathbb{C}$ в задачах інтерполяції функції та у задачах розвинення функцій в ланцюгові дроби.

Предмет дослідження є апроксимативні властивості інтерполяційних ланцюгових дробів, оцінки залишкових членів, способи розвинення функцій в ланцюгові дроби, області збіжності розвинень, апріорні та апостеріорні оцінки.

Завдання дослідження:

1. Знайти та обґрунтувати формулу залишкового члена для інтерполяційного функціонального ланцюгового дробу дійсної змінної, елементи якого є многочлени.

2. Встановити оцінки знаменників підхідних дробів інтерполяційних

функціональних ланцюгових дробів комплексної змінної.

3. Отримати оцінки залишкових членів інтерполяційних ланцюгових дробів Тіле, C–дробу, квазі–обернених типу Тіле та типу C–дробу, функціональних та квазі–обернених функціональних типу Тіле та типу C–дробу комплексної та дійсної змінних.

4. Дослідити задачу інтерполяції функціоналів інтегральними ланцюговими C–дробами на множині континуальних вузлів, встановити необхідні та достатні умови розв'язності задачі та показати, що в частинному випадку такий інтегральний ланцюговий дріб містить в собі інтерполяційний ланцюговий C–дріб.

5. Дослідити властивості обернених поділених різниць 2–го типу, обернених поділених g–різниць, обернених поділених g–різниць 2–го типу.

6. Встановити взаємозв'язки між оберненими похідними Тіле та похідними функції. Довести теорему про обернену похідну Тіле многочлена та раціональної функції. Отримати розвинення функцій ланцюговий дріб Тіле та правильний ланцюговий C–дріб. Обґрунтувати апріорні та апостеріорні оцінки. Визначити області збіжності отриманих розвинень.

7. Дослідити властивості обернених похідних 2–го типу, обґрунтувати формулу типу Тіле для квазі–обернених ланцюгових дробів, з'ясувати взаємозв'язки між оберненими похідними Тіле, оберненими похідними 2–го типу та похідними функції, визначити значення оберненої похідної 2–го типу многочлена та раціональної функції, отримати розвинення функцій в квазі–обернені ланцюгові дроби, знайти області збіжності розвинень, апріорні та апостеріорні оцінки.

8. Обґрунтувати властивості обернених g–похідних, отримати аналог формули Тіле для функціональних ланцюгових дробів та розвинення функцій в ланцюгові дроби такого типу.

9. Дослідити властивості обернених g–похідних 2–го типу, отримати аналог формули Тіле для квазі–обернених функціональних ланцюгових

дробів та розвинення функцій.

Методи дослідження. Використовується апарат математичного та функціонального аналізу, теорії функцій комплексної змінної, аналітичної теорії ланцюгових дробів.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають в наступному:

1. Отримано оцінки знаменників підхідних дробів функціональних ланцюгових дробів загального вигляду та функціональних ланцюгових дробів з частинними знаменниками рівними одиниці, коли елементи ланцюгових дробів є функції комплексної змінної.

2. Знайдено та обґрунтовано формулу залишкового члена інтерполяційного функціонального ланцюгового дробу елементи якого є многочленами від дійсної змінної.

3. Для різних типів інтерполяційних ланцюгових дробів, зокрема дробів Тіле, С–дробів, квазі–обернених типу Тіле та типу С–дробів, функціональних та квазі–обернених функціональних типу Тіле та типу С–дробу:

– обґрунтовано формули знаходження коефіцієнтів за значеннями інтерпольованої функції на множині вузлів;

– доведено формули залишкових членів для інтерполювання функцій комплексної змінної, якщо коефіцієнти ланцюгових дробів задовольняють умови або типу Слєшинського–Прінґсгейма, або типу Пейдона–Уолла та збіжність інтерполяційних процесів;

– обґрунтовано формули залишкових членів для інтерполяції функцій дійсної змінної.

4. Досліджено задачу інтерполяції функціонала, який заданий на множині континуальних вузлів, інтегральним ланцюговим С–дробом, доведено необхідні та достатні умови розв'язності розглядуваної задачі, показано, що у частинному випадку інтегральний ланцюговий дріб містить в собі інтерполяційний ланцюговий С–дріб.

5. Введено в розгляд обернені різниці 2–го типу, обернені g–різниці та обернені g–різниці 2–го типу, доведено симетричність розглянутих обернених різниць, встановлено властивості та рекурентні формули.

6. Встановлено нові властивості обернених похідних Тіле, доведено теорему про обернену похідну Тіле многочлена та раціональної функції, отримано розвинення функцій у ланцюгові дроби Тіле та правильні ланцюгові C–дроби, знайдено області збіжності розвинень, апріорні та апостеріорні оцінки.

7. Введено в розгляд обернені похідні 2–го типу, обґрунтовано властивості та формула типу Тіле для квазі–обернених ланцюгових дробів, доведено теорему про обернену похідну 2–го типу многочлена та раціональної функції, отримано розвинення функцій в квазі–обернені ланцюгові дроби, встановлено області збіжності розвинень, апріорні та апостеріорні оцінки.

8. Спираючись на введені в розгляд обернені g–похідні та встановлені властивості, обґрунтовано функціональна формула типу Тіле за допомогою якої отримано розвинення функцій у функціональні ланцюгові дроби.

9. Введено в розгляд обернені g–похідні 2–го типу, доведено рекурентні формули їх обчислення, властивості та функціональна формула типу Тіле для квазі–обернених функціональних ланцюгових дробів, отримано розвинення функцій в ланцюгові дроби такого вигляду.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи носять теоретичний характер і можуть бути використані при подальших дослідженнях в теорії ланцюгових дробів. Результати роботи мають і прикладне значення в теорії наближення функцій. Їх можна також використати в теоретичних дослідженнях математичного та комплексного аналізу, диференціальних рівнянь та обчислювальної математики. Практичне значення полягає у тому, що розроблені автором алгоритми можуть бути імплементовані у сучасне математичне забезпечення ЕОМ, у тій частині, що стосується наближення функцій.

Особистий внесок здобувача. Всі результати отримані здобувачем самостійно, а у роботах, які опубліковані у співавторстві, внесок всіх авторів є рівноцінним.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на:

— Українському математичному конгресі – 2001 (до 200–річчя з дня народження М. В. Остроградського), Київ, 21–23 серпня 2001;

— Міжнародній школі–семінарі "Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування", (до 75–річчя з дня народження проф. В. Я. Скоробогатька), Ужгород, 19–24 серпня 2002;

— Міжнародній конференція "Шості Боголюбовські читання", Чернівці, 25–29 серпня 2003;

— Міжнародній математичний конференції ім. В. Я. Скоробогатька, Дрогобич, 27 вересня– 1 жовтня 2004;

— Конференції "Functional Methods in Approximation Theory, Operator Theory, Stochastic Analysis and Statistics", Київ, 1–5 жовтня, 2004;

— Міжнародній науковій конференція "Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування", Ужгород, 18–23 вересня, 2006;

— Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька, Дрогобич, 24–28 вересня, 2007;

— Конференції "Сучасні проблеми механіки і математики", Львів, 25–29 травня 2008;

— Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування", Мелітополь, 16–21 червня 2008;

— Міжнародній науковій конференції "Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III", Світязь, 22–26 серпня 2009;

— Українському математичному конгресі –2009 (до 100–річчя від дня народження Миколи М. Боголюбова), Київ, 27–29 серпня 2009;

— International Conference on Complex Analysis, Львів, 31 травня – 5 червня, 2010;

— International Conference in Modern Analysis, Донецьк, 20–23 червня, 2011;

— Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування", присвяченій 70–річчю з дня народження члена–кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007), Кам'янець–Подільський, 28 травня–3 червня, 2012;

— International Conference dedicate to the 120th anniversary of Stefan Banach, Львів, 17–21 вересня, 2012;

— Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування" присвяченій 70–річчю професора В. В. Маринця, Ужгород, 27–29 вересня 2012;

— Міжнародній конференції "Боголюбовські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75–річчя з дня народження академіка НАН України А. М. Самойленка, Севастополь, 23–30 червня 2013;

— VII Міжнародній конференції імені академіка І. І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика", Київ, 9–10 жовтня 2014;

— International V. Skorobohatko mathematical conference, Дрогобич, 25–28 серпня, 2015;

— VIII Міжнародній конференції імені академіка І. І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика", Київ, 8–9 жовтня 2015;

— Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування" присвяченій 70–річчю академіка НАН України М. О. Перестюка, Ужгород, 19–21 травня 2016;

— 24–th International conference on finite or infinite dimensional complex analysis and application, Jaipur, India, August 22–26, 2016;

— Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", Слов'янськ, 28 травня – 3 червня, 2017;

— семінарах кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики Ужгородського національного університету (керівник семінару проф. Маринець В. В.);

— семінарах кафедри машинобудування, природничих дисциплін та інформаційних технологій Мукачівського держ. університету (керівники семінару проф. Мигалина Ю. В., доц. Питьовка О. Ю., доц. Кабацій В. М.);

— семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України, 8 червня 2007, 19 листопада 2010, 22 лютого, 20 грудня 2013, 27 березня 2014, 16 жовтня 2015, 15 квітня 2016, 10 лютого 2017 (керівники семінару член.–кор. НАН України, проф. О. І. Степанець, проф. А. С. Романюк);

— семінарі "Сучасний аналіз" в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, 14 грудня 2014 року, (керівники семінару проф. І. О. Шевчук, проф. О. О. Курченко, проф. В. М. Радченко);

— семінарі з аналітичної теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів, 23 березня 2014, 19 лютого, 14 травня 2015, (керівники семінару проф. Д. І. Боднар, док. фіз.–мат. наук Х. Й. Кучмінська);

— Львівському міжвузівському семінарі з теорії аналітичних функцій, 16 березня 2017, (керівник семінару проф. Скасків О. Б.);

— міжвузівському семінарі по теорії функцій в Дніпропетровському національному університеті імені Олеся Гончара, 18 березня 2015, (керівник семінару член.–кор. НАН України, проф. В. П. Моторний);

— на виїзному засіданні Бюро відділення математики НАН України і секції математики та математичного моделювання Західного наукового центру НАН України і МОН України, 24–25 листопада 2010 року, м. Ужгород.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в монографії [92] та в 29 наукових статтях [50, 70–91, 93, 168–172], із них 16 статей у виданнях, внесених до переліку фахових видань із фізико–математичних наук [50,72–74,76,77,79,81,83–86,88–91], 3 — у співавторстві, 6 робіт у виданнях, внесених до міжнародних науково–метричних баз [75,78,80,82,87,93], 3 — у співавторстві, та 5 робіт у закордонних виданнях [168–172].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із переліку умовних позначень, вступу, семи розділів, списку літератури 191 найменування. Повний обсяг роботи становить 372 сторінок друкованого тексту.

Висловлюю щиру подяку науковому консультанту доктору фізико–математичних наук, професору, академіку НАН України Володимиру Леонідовичу Макарову та співавторам опублікованих статей.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Всі твердження, які увійшли в дану роботу і не належать автору, наведені із зазначенням авторства і відповідним посиланням на джерело.

Ланцюгові (неперервні) дроби мають свою давню історію. Бурхливий розвиток теорії ланцюгових дробів в XVI–XIX століттях тісно пов'язаний з іменами Валліса, Галуа, Гаусса, Гейне, Гюйгенса, Лагерра, Лагранжа, Ламберта, Лапласа, Лежандра, Ойлера, Паде, Пуанкаре, Рімана, Стілтьєса, Фробеніуса, Чебишова, Якобі та багатьох інших. Ланцюгові дроби широко використовуються в теорії чисел [115, 143, 165, 166, 181]. Аналітичній теорії ланцюгових дробів присвячені монографії [25, 106, 157, 158, 174, 175, 189].

1.1. Ланцюгові дроби

Термін неперервний дріб (fractionum continuarum – лат.) ввів у розгляд у 1737 році Л. Ойлер [133]. Термін ланцюговий дріб походить від німецького терміну "Kettenbrüch" [174].

Нехай $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{C}$ — комплексні числа, $n \in \mathbb{N}_0$, $w \in \mathbb{C}$ — комплексна змінна. Добре відомо [25, с. 31], що композиція дробово–лінійних перетворень (перетворень Мебіюса)

$$S_n(w) = s_0 \circ s_1 \circ \cdots \circ s_n(w),\ s_n(w) = \frac{a_n + c_n w}{b_n + d_n w},\ a_n d_n - b_n c_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N}_0\,,$$

в залежності від значення коефіцієнтів a_n, b_n, c_n, d_n може породжувати на комплексній площині: а) скінченну суму $S_n(0) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $d_n = 0$, $c_n = b_n = 1$;

б) скінченний добуток $S_n(1) = \prod_{k=1}^{n} c_k$, $a_n = d_n = 0$, $b_n = 1$; в) підхідний дріб

$$S_n(0) = a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}, \quad c_0 = b_0 = 1, d_0 = c_n = 0, d_n = 1, \ n \in \mathbb{N}.$$

Сукупність дробово–лінійних відображень $\{s_n(w)\}$ буде утворювати групу, якщо в якості групової операції розглядати композицію відображень $\{s_n(w)\}$ [119, с. 46], [140, с. 302], [163, с. 151].

Означення 1.1 ([25, с. 37], [141, с. 474]). Ланцюговим дробом називається впорядкована пара $\Big(\big\{\{a_n\}, \{b_n\}\big\}; \{f_n\}\Big)$, де $\{a_n : a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}\}$ та $\{b_n : b_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0\}$ — задані послідовності комплексних чисел, $\{f_n \ : \ f_n \in \overline{\mathbb{C}}, n \in \mathbb{N}_0\}$ — послідовність з розширеної комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$, яка визначається наступним чином

$$f_n = S_n(0), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad S_0(w) = s_0(w), \quad S_n(w) = S_{n-1}(s_n(w)), \tag{1.1а}$$

$$s_0(w) = b_0 + w, \quad s_n(w) = \frac{a_n}{b_n + w}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.1б}$$

Зауваження 1.1. Умова $a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$, забезпечує існування нетривіальних, відмінних від константи перетворень Мебіюса.

Алгоритм ланцюгового дробу — це функція $\mathbf{K}$, яка визначена співвідношеннями (1.1а)–(1.1б), і відображає пару $\big\{\{a_n\}, \{b_n\}\big\}$ в послідовність $\{f_n\}$. Числа a_n та b_n називаються, відповідно, n–м частинним чисельником та n–м частинним знаменником і мають спільну назву елементи. Дріб a_n/b_n називається n–ю ланкою ланцюгового дробу. Число із розширеної комплексної площини

$$S_n(0) = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots \, + \cfrac{a_n}{b_n}}}$$

називається n–м підхідним дробом або n–м наближенням.

В літературі з теорії ланцюгових дробів та їх узагальнень введено різні скорочені записи підхідних дробів. Надалі будемо використовувати такі скорочені записи для n–го підхідного дробу

$$f_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}, \quad f_n = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}\ , \quad f_n = b_0 + \mathbf{K}_{i=1}^{n}(a_i/b_i).$$

Коли послідовності $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$ містять нескінченну кількість елементів, то ланцюговий дріб $\big(\{\{a_n\},\{b_n\}\};\{f_n\}\big)$ називається нескінченним ланцюговим дробом. Такий ланцюговий дріб скорочено будемо записувати наступним чином

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} + \cdots\ , \qquad b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b_i}, \qquad b_0 + \mathbf{K}(a_i/b_i).$$

Збіжність ланцюгового дробу до $f \in \overline{\mathbb{C}}$ означає прямування елементів послідовності $\{f_n\}$ до f, коли $n \to \infty$, тобто $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. В цьому випадку будемо використовувати записи

$$f = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} + \cdots\ ,$$

або

$$f = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b_i}\ . \tag{1.2}$$

Означення 1.2 ([131, с. 52]). Ланцюговий дріб $f(z)$ з n–м підхідним дробом $f_n(z)$ називається рівномірно збіжним на компактній підмножині

$\mathcal{Z}$ області D якщо: **(A)** знайдеться таке $N_{\mathcal{Z}} \in \mathbb{N}$, що $f_n(z)$ голоморфна (аналітична) в деякій області функція, яка містить $\mathcal{Z}$ для всіх $n \geqslant N_{\mathcal{Z}}$; **(B)** для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $N_\varepsilon > N_{\mathcal{Z}}$, що $\sup_{z\in K} |f_{n+m}(z) - f_n(z)| < \varepsilon$, $n \geqslant N_\varepsilon$, $m \in \mathbb{N}_0$.

Теорема 1.1 ([152, с. 39]). *Рівномірна збіжність ланцюгового дробу вигляду*

$$\frac{c_1}{1} \underset{+}{} \frac{c_2 z}{1} \underset{+}{} \frac{c_3 z}{1} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{c_n z}{1} \underset{+}{} \cdots, \quad c_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N},$$

в області D достатня для того, щоб цей ланцюговий дріб збігався в області D до тієї функції $f(z)$, яка розвинена в цей ланцюговий дріб.

Означення 1.3. N–м залишком ланцюгового дробу $\mathbf{K}(a_i/b_i)$ називається ланцюговий дріб вигляду

$$\underset{i=N+1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} \frac{a_i}{b_i} = \frac{a_{N+1}}{b_{N+1}} \underset{+}{} \frac{a_{N+2}}{b_{N+2}} \underset{+}{} \frac{a_{N+3}}{b_{N+3}} \underset{+}{} \cdots, \quad N \in \mathbb{N}_0. \tag{1.3}$$

В цьому випадку n–й чисельник, n–й знаменник та n–й підхідний дріб N–го залишку позначимо $A_n^{(N)}, B_n^{(N)}, f_n^{(N)}$. Якщо залишок (1.3) збіжний, то його значення позначимо $f^{(N)}$.

Зауваження 1.2 ([131, с. 24]). Послідовність $\{f^{(N)}\}$ залишків збіжного ланцюгового дробу може не збігатися взагалі, а якщо вона збіжна, то її границя рівна 0 у дуже спеціальному випадку. Це є головною відмінністю між збіжними ланцюговими дробами та рядами або нескінченними добутками для яких, як добре відомо, виконуються співвідношення $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i = 0,\ \lim_{n\to\infty} \prod_{i=n+1}^{\infty} p_i = 1$.

Означення 1.4. Ланцюгові дроби $b_0 + \mathbf{K}(a_i/b_i)$ та $d_0 + \mathbf{K}(c_i/d_i)$ називаються еквівалентними, якщо вони мають одну і ту ж послідовність підхідних дробів, тобто, якщо $f_n = b_0 + \mathbf{K}_{i=1}^n (a_i/b_i)$ і $f_n^* = d_0 + \mathbf{K}_{i=1}^n (c_i/d_i)$, то $f_n = f_n^*$. В цьому випадку записують $b_0 + \mathbf{K}(a_i/b_i) \equiv d_0 + \mathbf{K}(c_i/d_i)$.

Теорема 1.2 ([25, с. 50]). *Ланцюгові дроби* $b_0+\mathbf{K}(a_i/b_i)$ *і* $d_0+\mathbf{K}(c_i/d_i)$ *еквівалентні тоді і тільки тоді, якщо існує послідовність таких комплексних чисел* $\{r_i : r_0 = 1, r_i \neq 0,\ i \in \mathbb{N}\}$*, що*

$$d_0 = b_0,\ c_i = r_{i-1}r_i a_i,\ d_i = r_i b_i, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Співвідношення (1.4) визначають еквівалентні перетворення ланцюгових дробів. За припущенням всі $a_i \neq 0$, $i \in \mathbb{N}$. Якщо r_i вибрати наступним чином $r_i = \prod\limits_{k=1}^{i} a_k^{(-1)^{i+1-k}}$, то отримаємо еквівалентний ланцюговий дріб з частинними чисельниками рівними 1, тобто $b_0 + \mathbf{K}(a_i/b_i) \equiv b_0 + \mathbf{K}(1/d_i)$, де $d_1 = b_1/a_1$, $d_{2i} = (b_{2i}a_1a_3 \ldots a_{2i-1}) \cdot (a_2a_4 \ldots a_{2i})^{-1}$, $d_{2i+1} = (b_{2i+1}a_2a_4 \ldots a_{2i}) \times (a_1a_3 \ldots a_{2i+1})^{-1}$, $i \in \mathbb{N}$. Якщо розглядаються ланцюгові дроби вигляду $\mathbf{K}(1/d_i)$, то в загальному випадку нічого не втрачається.

Якщо припустити додатково, що $b_i \neq 0, i \in \mathbb{N}$, то еквівалентними перетвореннями ланцюговий дріб можна звести до ланцюгового дробу із частинними знаменниками рівними одиниці, тобто $b_0+\mathbf{K}(a_i/b_i) \equiv b_0+\mathbf{K}(c_i/1)$, де $r_i = 1/b_i,\ i \in \mathbb{N},\ c_1 = a_1/b_1,\ c_i = a_i/(b_{i-1}b_i)\ i \in \mathbb{N}_2$. Ланцюговий дріб вигляду $\mathbf{K}(c_i/1)$ в загальному випадку буде еквівалентний ланцюговому дробу $\mathbf{K}(a_i/b_i)$ лише у випадку, якщо виконуються умови $b_i \neq 0, i \in \mathbb{N}$.

Якщо розглядати два ланцюгові дроби вигляду

$$f_1 = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots, \quad f_2 = \frac{b_0}{1} + \frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \cdots$$

і поставити задачу про встановлення умов їх еквівалентності, то, як показано в монографії О. М. Хованського [116, с. 23–25], у загальному випадку без додаткових припущень не можна визначити c_i та d_i, $i \in \mathbb{N}$, через $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$, або навпаки a_i, b_i, $i \in \mathbb{N}$, через $c_1, c_2, \ldots, d_1, d_2, \ldots$.

Означення 1.5. Ланцюговий дріб вигляду $g = d_0 + \mathbf{K}(c_i/d_i)$ з підхідними дробами $g_n = d_0 + \mathbf{K}_{i=1}^{n}(c_i/d_i), n \in \mathbb{N}_0$, називається оберненим ланцюговим дробом до (1.2), якщо для будь якого значення $n \in \mathbb{N}_0$ має місце співвідношення $f_n \cdot g_n = g_n \cdot f_n = 1$.

Один ланцюговий дріб можна отримати з іншого ланцюгового дробу за рахунок стиску або розтягу.

Означення 1.6. Ланцюговий дріб $b_0^* + \mathbf{K}(a_i^*/b_i^*)$ з n–м підхідним дробом $f_n^* = b_0^* + \mathbf{K}_{i=1}^n(a_i/b_i)$ називається стиском (згортком) ланцюгового дробу $b_0 + \mathbf{K}(a_i/b_i)$ з n–м підхідним дробом $f_n = b_0 + \mathbf{K}_{i=1}^n(a_i/b_i)$, якщо послідовність підхідних дробів $\{f_n^*\} \subset \{f_n\}$.

Якщо ланцюговий дріб є стиском іншого ланцюгового дробу, то останній називається розтягом (розширенням) першого.

Загальний випадок стиску (розтягу) ланцюгових дробів розглянуто в монографії У. Джоунса, В. Трона [25, с. 56–58]. Тут розглянемо два спеціальні випадки стиску.

Означення 1.7. Ланцюговий дріб $b_0^* + \mathbf{K}(a_k^*/b_k^*)$ з n–м підхідним дробом f_n^* називається парною частиною ланцюгового дробу $b_0 + \mathbf{K}(a_k/b_k)$ з n–м підхідним дробом f_n, якщо $f_n^* = f_{2n}, n \in \mathbb{N}_0$.

Теорема 1.3 ([25, с. 59]). *Ланцюговий дріб $b_0 + \mathbf{K}(a_n/b_n)$ має парну частину тоді і тільки тоді, коли $b_{2k} \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. При виконанні вказаних умов, елементи парної частини $b_0^* + \mathbf{K}(a_n^*/b_n^*)$ (з точністю до еквівалентних перетворень) будуть рівні*

$$
\begin{aligned}
&b_0^* = b_0, \quad a_1^* = a_1 b_2, \quad b_1^* = a_2 + b_1 b_2, \quad a_2^* = -a_2 a_3 b_4, && \\
&a_n^* = -a_{2n-2} a_{2n-1} b_{2n-4} b_{2n}, && n = 3, 4, \dots, \\
&b_n^* = a_{2n-1} b_{2n} + a_{2n} b_{2n-2} + b_{2n-2} b_{2n-1} b_{2n}, && n \in \mathbb{N}_2.
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Парна частина ланцюгового дробу $b_0 + \mathbf{K}(a_n/b_n)$ запишеться у вигляді

$$
b_0 + \frac{a_1 b_2}{a_2 + b_1 b_2} - \frac{a_2 a_3 b_4}{a_3 b_4 + a_4 b_2 + b_2 b_3 b_4} - \frac{a_4 a_5 b_2 b_6}{a_5 b_6 + a_6 b_4 + b_4 b_5 b_6} - \dots -
$$

$$
- \frac{a_{2n-2} a_{2n-1} b_{2n-4} b_{2n}}{a_{2n-1} b_{2n} + a_{2n} b_{2n-2} + b_{2n-2} b_{2n-1} b_{2n}} - \dots .
$$

Означення 1.8. Ланцюговий дріб $b_0^* + \mathbf{K}(a_n^*/b_n^*)$ з n–м підхідним дробом f_n^* називається непарною частиною ланцюгового дробу $b_0 + \mathbf{K}(a_n/b_n)$ з n–м підхідним дробом f_n, якщо $f_n^* = f_{2n+1}, n \in \mathbb{N}_0$.

Теорема 1.4 ([25, с. 60]). *Для ланцюгового дробу $b_0 + \mathbf{K}(a_n/b_n)$ непарна частина існує тоді і тільки тоді, коли $b_{2k+1} \neq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$. Елементи непарної частини $b_0^* + \mathbf{K}(a_n^*/b_n^*)$ (з точністю до еквівалентних перетворень) будуть рівні*

$$
\begin{aligned}
&b_0^* = (a_1 + b_0 b_1)/b_1,\ a_1^* = -a_1 a_2 b_3/b_1,\ b_1^* = a_2 b_3 + a_3 b_1 + b_1 b_2 b_3,\\
&a_n^* = -a_{2n-1} a_{2n} b_{2n-3} b_{2n+1}, && n \in \mathbb{N}_2,\\
&b_n^* = a_{2n} b_{2n+1} + a_{2n+1} b_{2n-1} + b_{2n-1} b_{2n} b_{2n+1}, && n \in \mathbb{N}_2.
\end{aligned}
$$

Непарна частина ланцюгового дробу $b_0 + \mathbf{K}(a_n/b_n)$ запишеться у вигляді

$$
\frac{a_1 + b_0 b_1}{b_1} - \frac{a_1 a_2 b_3/b_1}{a_2 b_3 + a_3 b_1 + b_1 b_2 b_3} - \frac{a_3 a_4 b_1 b_5}{a_4 b_5 + a_5 b_3 + b_3 b_4 b_5} - \cdots -
$$

$$
- \frac{a_{2n-1} a_{2n} b_{2n-3} b_{2n+1}}{a_{2n} b_{2n+1} + a_{2n+1} b_{2n-1} + b_{2n-1} b_{2n} b_{2n+1}} - \cdots .
$$

Означення 1.9. Ланцюговим C–дробом називається ланцюговий дріб вигляду $c_0 + \mathbf{K}(c_n z^{\alpha_n}/1)$, де $c_n \in \mathbb{C}, c_n \neq 0, \alpha_n, n \in \mathbb{N}$. Якщо $\alpha_n = 1$ для всіх значень n, то ланцюговий дріб $c_0 + \mathbf{K}(c_n z/1)$ називається правильним ланцюговим C–дробом.

Якщо коефіцієнти правильного ланцюгового C–дробу $c_n \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, то маємо ланцюговий S–дріб або ланцюговий дріб Стілтьєса.

Нехай $b_0 + \mathbf{K}(a_i/b_i)$ та $\{f_n\}$, відповідно, ланцюговий дріб і послідовність підхідних дробів. Послідовності підхідних дробів $\{f_n\}$ ставлять у відповідність послідовності комплексних чисел $\{P_n\}$ та $\{Q_n\}$, які визначаються системою лінійних різницевих рівнянь другого порядку (формули Валліса) [25, с. 32]:

$$
\begin{aligned}
&P_{-1} = 1,\ P_0 = b_0,\ Q_{-1} = 0,\ Q_0 = 1,\\
&P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}, \quad Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Числа P_n та Q_n називаються, відповідно, n–м канонічним чисельником та n–м канонічним знаменником (іноді просто чисельником та знаменником) підхідного дробу. Мають місце наступні дві теореми.

Теорема 1.5 ([25, с. 39–40]). *Якщо P_n, Q_n, f_n, відповідно, n–й чисельник, n–й знаменник та n–й підхідний дріб ланцюгового дробу $b_0 + \mathbf{K}(a_i/b_i)$, $\{S_n\}$ — послідовність перетворень визначена (1.1a), то*

$$S_n(w) = \frac{P_n + P_{n-1}w}{Q_n + Q_{n-1}w}, \quad P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n \neq 0, \tag{1.7}$$

$$f_n = S_n(0) = \frac{P_n}{Q_n}, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.8}$$

$$P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n = (-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n} a_k\ . \tag{1.9}$$

Співвідношення (1.9) називається детермінантною формулою. Зауважимо, що P_n та Q_n однозначно визначаються не формулами (1.7) та (1.8), а рекурентними рівняннями (1.6). Із детермінантної формули безпосередньо випливає, що якщо $Q_{n-1}Q_n \neq 0$, то різниця між сусідніми підхідними дробами буде рівна

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n} a_i}{Q_nQ_{n-1}}\ . \tag{1.10}$$

Теорема 1.6 ([25, с. 40]). *Нехай $\{P_n\}$, $\{Q_n\}$ — послідовності комплексних чисел такі, що $P_{-1} = 1, P_0 = b_0, Q_{-1} = 0, Q_0 = 1, P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Тоді для довільного n однозначно визначений ланцюговий дріб $b_0 + \mathbf{K}(a_i/b_i)$ з n–м чисельником P_n і n–м знаменником Q_n. Крім того,*

$$b_0 = P_0,\ a_1 = P_1 - P_0Q_1,\ b_1 = Q_1,\ a_n = \frac{P_{n-1}Q_n - P_nQ_{n-1}}{P_{n-1}Q_{n-2} - P_{n-2}Q_{n-1}},$$

$$b_n = \frac{P_nQ_{n-2} - P_{n-2}Q_n}{P_{n-1}Q_{n-2} - P_{n-2}Q_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Для знаходження значення n–го підхідного дробу f_n ланцюгового дробу $b_0 + \mathbf{K}(a_i/b_i)$ використовують наступні алгоритми:

а) **Прямий рекурентний алгоритм**. Алгоритм полягає у безпосередньому використані формул Валліса (1.6) і знаходженні $f_n = P_n/Q_n$.

б) **Обернений рекурентний алгоритм**. Алгоритм, який запропонований П. Діріхле, ґрунтується на наступній процедурі обчислень "від кінця до початку" підхідного дробу f_n

$$G_{n+1}^{(n)} = 0,\ G_k^{(n)} = \frac{a_k}{b_k + G_{k+1}^{(n)}},\ k = n, n-1, \ldots, 1, f_n = \frac{P_n}{Q_n} = b_0 + G_1^{(n)}. \quad (1.11)$$

Якщо ввести позначення $G_k^{(n)} = P_k^{(n)}/Q_k^{(n)}$, то проміжні чисельник $P_k^{(n)}$ та знаменник $Q_k^{(n)}$ можна визначати за допомогою рекурентних формул

$$\begin{aligned}
&P_{n+1}^{(n)} = 0,\ Q_{n+1}^{(n)} = 1, \quad P_n^{(n)} = a_n, \quad Q_n^{(n)} = b_n,\\
&Q_k^{(n)} = b_k \cdot Q_{k+1}^{(n)} + P_{k+1}^{(n)}, \quad P_k^{(n)} = a_k \cdot Q_{k+1}^{(n)}, \quad k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0.
\end{aligned}$$

Крім двох наведених алгоритмів також використовують алгоритм частинних сум ряду Ойлера–Мінділнґа [25, с. 46], [158, с. 7] та алгоритм матричного розвинення [162, с. 110]. В [122,135] показано, що обернений рекурентний алгоритм (1.11) чисельно більш стійкий ніж прямий рекурентний алгоритм (1.6).

За допомогою тотожності Ойлера [116, с. 27] степеневий ряд $S(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots$, $c_i \in \mathbb{C}, c_i \neq 0, i \in \mathbb{N}_0$, можна записати рівноцінним ланцюговим дробом, тобто подати у вигляді

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^n \equiv c_0 + \frac{c_1 z}{1} + \frac{-c_2 z/c_1}{1 + c_2 z/c_1} + \cdots + \frac{-c_m z/c_{m-1}}{1 + c_m z/c_{m-1}} + \cdots.$$

Частинна сума степеневого ряду $S_n(z)$ рівна підхідному дробу $f_n(z)$ ланцюгового дробу в правій частині тотожності, а тому характери збіжності чи розбіжності ланцюгового дробу і ряду однакові. Якщо $R_{n,m}(z)$ — раціональна функція, де $n, m \in \mathbb{N}, n < m$, то за допомогою методу В. І. Вісковатова можна побудувати еквівалентний ланцюговий дріб [116, с. 31]. Модифікація методу Вісковатова запропонована в роботі [127].

Збіжності ланцюгових дробів один із найбільш досліджених напрямків в теорії ланцюгових дробів, який активно розвивається [25, 41, 157, 174, 175, 189]. Наведемо декілька теорем, на які будемо спиратися в подальшому.

Теорема 1.7 (Слєшинського–Прінґсгейма, [157, с. 30]). *Ланцюговий дріб* $b_0+\mathbf{K}(a_n/b_n)$ *збігається, якщо для* $n \in \mathbb{N}$ *виконується нерівність* $|b_n| \geqslant |a_n| + 1$. *При цих умовах нерівність* $|f_n| < 1 + |b_0|$ *має місце для всіх підхідних дробів* f_n *і значення ланцюгового дробу* $|f| \leqslant 1 + |b_0|$.

Теорема 1.8 (Ворпіцького, [157, с. 35]). *Нехай для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *частинні чисельники* a_n *ланцюгового дробу* $\mathbf{K}(a_n/1)$ *задовольняють нерівність*

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{4}\ . \tag{1.12}$$

Тоді ланцюговий дріб $\mathbf{K}(a_n/1)$ *збігається, всі підхідні дроби* f_n *належать кругу* $|w| < \frac{1}{2}$ *і значення ланцюгового дробу* f *належить кругу* $|w| \leqslant \frac{1}{2}$.

В застосуваннях ланцюгових дробів поряд із питанням існування границі послідовності підхідних дробів не менш важливе місце посідає питання оцінки швидкості збіжності підхідних дробів до цієї границі. Розглянемо апріорну оцінку похибок апроксимації $|f - f_n| \leqslant \lambda_n$, де λ_n — оцінка, яку можна знайти до початку обчислення підхідних дробів, і апостеріорну оцінку похибок апроксимації $|f - f_n| \leqslant M_n|f_n - f_{n-1}|$, де оцінка $M_n|f_n - f_{n-1}|$ може бути визначена тільки після обчислення підхідних дробів f_n та f_{n-1} [131, 157, 158].

Теорема 1.9 (Трона–Грега–Уорнера [136]). *Припустимо, що ланцюговий* S*–дріб* $\mathbf{K}(a_m z/1)$ *збіжний до* $f(z)$, *де* $z = \rho e^{2\alpha i}$, $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$. *Тоді*

$$|f(z) - f_n(z)| \leqslant \frac{2a_1\rho}{\cos\alpha}\prod_{k=2}^{n}\frac{\sqrt{1+4a_k\rho/\cos^2\alpha}-1}{\sqrt{1+4a_k\rho/\cos^2\alpha}+1}\,, \quad n \in \mathbb{N}_2. \tag{1.13}$$

Теорема 1.10 (Джоунса–Трона, [131, с. 141], [147]). *Якщо елементи ланцюгового дробу* $\mathbf{K}(a_m/1)$ *задовольняють умову* $|a_m| \leqslant \frac{1}{4} - \varepsilon$, *де*

$0 < \varepsilon \leqslant 1/4$, *$f_n$ — n–й підхідний дріб ланцюгового дробу* $\mathbf{K}(a_m/1)$, *то цей ланцюговий дріб збігається до скінченної границі f і має місце нерівність*

$$|f - f_n| \leqslant \frac{1 - 2\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{\varepsilon}} \big|f_n - f_{n-1}\big|, \qquad n \in \mathbb{N}_2. \tag{1.14}$$

Теорема 1.11 (Хенрічі-Пфлюгера [142]). *Нехай ланцюговий S-дріб $\mathbf{K}(a_m z/1)$, який збігається для будь–якого $z \in R = \{z : |\arg z| < \pi\}$ до функції $f(z)$, яка голоморфна в R, то для будь–яких $z \in R$ і $n \in \mathbb{N}_2$ має місце оцінка*

$$|f(z) - f_n(z)| \leqslant \begin{cases} |f_n(z) - f_{n-1}(z)|, & \textit{якщо} \ \ |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \left|\dfrac{f_n(z) - f_{n-1}(z)}{\sin(\arg z)}\right|, & \textit{якщо} \ \ \frac{\pi}{2} < |\arg z| < \pi. \end{cases} \tag{1.15}$$

Інші апріорні оцінки для ланцюгових дробів наведені в статті [159].

1.2. Інтерполяція функцій многочленами

Нехай $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ — компакт, $\mathbf{C}(\mathcal{Z})$ — простір неперервних на $\mathcal{Z}$ функцій із рівномірною (чебишовською) нормою ($||f||_{\mathbf{C}(\mathcal{Z})} = \max\limits_{z \in \mathcal{Z}} |f(z)|$). Функція $f(z) \in \mathbf{C}(\mathcal{Z})$ визначена своїми значеннями в точках множини

$$\mathbf{Z} = \{z_i : z_i \in \mathcal{Z}, z_i \neq z_j, i, j = \overline{0, n}\},\ w_i = f(z_i), \quad i = \overline{0, n}, \tag{1.16}$$

і наближається функцією $F(z; a_0, a_1, \ldots, a_n)$, де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ є деякі параметри. Якщо параметри $a_0, a_1, \ldots, a_n$ визначаються з умови

$$f(z_i) = F(z_i; a_0, a_1, \ldots, a_n), \quad z_i \in \mathbf{Z}, \qquad i = \overline{0, n}, \tag{1.17}$$

то точки z_i називаються вузлами інтерполяції, а такий спосіб наближення функції — інтерполяцією або інтерполюванням. Умови (1.17) називають інтерполяційними умовами. Залишковим членом називається величина $R_n(z; f) = f(z) - F(z; a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Коли інтерполяційну функцію вибирають у вигляді лінійної комбінації функцій із деякої заданої сукупності функцій $\{\varphi_k\}$, тобто $F(z; a_0, a_1, \ldots, a_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, \varphi_k(z)$, то маємо лінійну інтерполяцію, а функцію $F(z; a_0, a_1, \ldots, a_n)$ називають узагальненим інтерполяційним многочленом. В протилежному випадку маємо нелінійну інтерполяцію.

В просторі $\mathbf{C}(\mathcal{Z})$ вибирається така скінченна (зліченна) сукупність функцій $\{\varphi_i(z)\}$, що скінченна підмножина функцій лінійно незалежна.

Означення 1.10 ([124, с. 92]). Множину $\{\varphi_i(z) : \varphi_i(z) \in \mathbf{C}(\mathcal{Z})\}$ називають комплексною системою функцій Чебишова розмірності $(n+1)$ на компакті $\mathcal{Z}$, якщо функції $\{\varphi_i(z)\}$ комплексно–значні на $\mathcal{Z}$, лінійний простір $\mathbf{span}\{\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots, \varphi_n(z)\} = \big\{c_0\varphi_0(z) + c_1\varphi_1(z) + \cdots + c_n\varphi_n(z),$ $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}\big\}$ над $\mathcal{Z}$ буде $(n+1)$–вимірним підпростором в $\mathbf{C}(\mathcal{Z})$ і довільний елемент із лінійного простору $\mathbf{span}\{\varphi_0(z), \ldots, \varphi_n(z)\}$, який має $(n+1)$ різних нулів, тотожно рівний нулю.

Теорема 1.12 ([16, с. 197], [95, кн.1, с. 30]). *Для того, щоб для довільної функції $f(z) \in \mathbf{C}(\mathcal{Z})$ існував узагальнений інтерполяційний многочлен для довільного набору вузлів необхідно і досить, щоб $\{\varphi_i(z)\}$ була системою функцій Чебишова на $\mathcal{Z}$. При виконанні цих умов узагальнений інтерполяційний многочлен єдиний.*

Приклади систем функцій Чебишова наведені в монографії А. А. Привалова [95, Кн.1, с. 22–24]. У випадку, коли $\varphi_i(z) = z^i,\ i = \overline{0, n}$, то отримуємо інтерполяційний многочлен у формі Лагранжа

$$L_n(z; f) = \sum_{i=0}^{n} f(z_i) \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{z - z_k}{z_i - z_k}.$$

Інтерполяційний многочлен також можна записати у формі Ньютона. Нехай $[z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{i+k}; f]$ — поділена різниця k–го порядку функції $f(z)$, яка побудована за значеннями функції на множині інтерполяційних вузлів $\mathbf{Z}$. Поділені різниці обчислюють за рекурентним співвідношенням

$$[z_i, \ldots, z_{i+k}; f] = \frac{[z_{i+1}, \ldots, z_{i+k}; f] - [z_i, \ldots, z_{i+k-1}; f]}{z_{i+k} - z_i},\ [z_i; f] = f(z_i), \quad (1.18)$$

де $k=\overline{1,n},\ i=\overline{0,n-k}$.

Теорема 1.13 ([7, с. 109]). *Поділена різниця k–го порядку може бути подана у вигляді відношення двох визначників*

$$[z_0,z_1,\ldots,z_k;f]=\begin{vmatrix}1 & z_0 & z_0^2 & \cdots & z_0^{n-1} & w_0\\ 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^{n-1} & w_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^{n-1} & w_n\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & z_0 & z_0^2 & \cdots & z_0^{n-1} & z_0^n\\ 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^{n-1} & z_1^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^{n-1} & z_n^n\end{vmatrix}.$$

Теорема 1.14 ([7, с. 109]). *Якщо функція дійсної змінної $f(x)$ визначена на компакті $\mathcal{R}\subset\mathbb{R}$, то $[x,x_0,\ldots,x_{n-1};f]=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi),$ де $\xi\in\mathbf{Int}\,\mathcal{R}$.*

Теорема 1.15 ([57, с. 336]). *Якщо функція комплексної змінної $f(z)$ аналітична на компакті $\mathcal{Z}\subset\mathbb{C}$, який обмежений замкненою жордановою кривою $\partial\mathcal{Z}$, множина вузлів $\mathbf{Z}\subset\mathcal{Z}$, то $[z_0,z_1,\ldots,z_n;f]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathcal{Z}}\frac{f(\xi)d\xi}{\omega_{n+1}(\xi)}$.*

Многочлен

$$N_n(z;f)=[z_0;f]+\sum_{i=1}^{n}[z_0,z_1,\ldots,z_i;f]\prod_{j=0}^{i-1}(z-z_j) \tag{1.19}$$

називається інтерполяційним многочленом у формі Ньютона.

Теорема 1.16 ([7, Т.1,с. 90]). *Якщо $f(x)\in\mathbf{C}^{(n)}(\mathcal{R})$, де $\mathcal{R}\subset\mathbb{R}$ – компакт, і існує $f^{(n+1)}(x)$, то для довільного $x\in\mathcal{R}$*

$$f(x)-N_n(x;f)=\frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),\quad \omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),\ \xi\in\mathbf{Int}\,\mathcal{R}.$$

Якщо $f(z)$ є аналітична функція комплексної змінної на компакті $\mathcal{Z}\subset\mathbb{C}$, який обмежений замкненою жордановою кривою $\partial\mathcal{Z}$, множина інтерполяційних вузлів $\mathbf{Z}\subset\mathbf{Int}\,\mathcal{Z}$, то залишковий член рівний [95, с. 68]

$$f(z)-N_n(z;f)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathcal{Z}}\frac{\omega_{n+1}(z)}{\omega_{n+1}(\xi)}\frac{f(\xi)\mathrm{d}\,\xi}{z-\xi}.$$

Маємо нескінчену матрицю інтерполяційних вузлів

$$\mathcal{I}=\begin{pmatrix} z_0^{(0)} & & & & & \\ z_0^{(1)} & z_1^{(1)} & & & & \\ z_0^{(2)} & z_1^{(2)} & z_2^{(2)} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ z_0^{(n)} & z_1^{(n)} & z_2^{(n)} & \dots & z_n^{(n)} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad z_i^{(k)} \in \mathcal{Z},\ i=\overline{0,k},\ k\in\mathbb{N}_0. \quad (1.20)$$

Розглянемо інтерполяційний ряд Лагранжа

$$L[f]=\sum_{n=0}^{\infty} L_n(z;f)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} f(z_i^{(n)}) \prod_{k=0,\,k\neq i}^{n} \frac{z-z_k^{(n)}}{z_i^{(n)}-z_k^{(n)}}.$$

Інтерполяційний ряд Лагранжа функції $f(z)$ називається рівномірно збіжним на компакті $\mathcal{Z}$, якщо $\max\limits_{z\in\mathcal{Z}}|f(z)-L_n(z;f)|\to 0,$ коли $n\to\infty$. Але рівномірна збіжність інтерполяційного ряду Лагранжа не завжди має місце. В 1901 році К. Рунге показав [177], що у випадку інтерполяції на проміжку $[-5,5]$ функції $y=1/(1+x^2)$ на рівномірній сітці $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{-5\leqslant x\leqslant 5}|f(x)-L_n(x;f)|\to\infty$. В своїй роботі С. Н. Бернштейн [8] довів, що для функції $y=|x|$ у випадку інтерполяції на рівномірні сітці відрізку $[-1,1]$ значення $L_n(x;f)$ між вузлами інтерполяції необмежено зростають для $n\to\infty$.

Добре відомо [18, с. 52], що якщо $f(z)$ є ціла функція, то послідовність інтерполяційних многочленів $\{L_n(z;f)\}$, які побудовані за значеннями $f(z)$ у вузлах $(n+1)$–го рядка матриці $\mathcal{T}$, рівномірно збігається на $\mathcal{Z}$ до $f(z)$.

Для неперервних функцій дійсного аргументу, які мають неперервні похідні як завгодно високих порядків не гарантується збіжність інтерполяційного ряду Лагранжа для довільного розташуванні вузлів.

Теорема 1.17 (Фабера, [65, с. 515]). *Яка б не була матриця вузлів, знайдеться на $\mathcal{R}\subset\mathbb{R}$ неперервна функція $f(x)$ така, що послідовність інтерполяційних многочленів $\{L_n(x;f)\}$ не збігається рівномірно до $f(x)$.*

Теорема 1.18 (Марцінкевича, [65, с. 519]). *Якщо функція $f(x)$ неперервна на $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$, то знайдеться така матриця вузлів, для якої відповідний інтерполяційний процес збігається рівномірно.*

Побудувати таку матрицю вузлів досить складно і для кожної функції, взагалі кажучи, існує своя матриця вузлів. Дослідженням задач збіжності, поточкової та рівномірної, послідовності інтерполяційних многочленів Лагранжа в різноманітних функціональних просторах присвячена велика кількість робіт, серед яких відзначимо роботи школи А. А. Привалова [95].

У випадку функції комплексної змінної також розглядається інтерполяційна задача Абеля–Гончарова [31], яка полягає в наступному: для аналітичної в області $D \subset \mathbb{C}$ функції $f(z)$ потрібно знайти многочлен $Q_n(z)$ степеня не вище n, який в точках $\{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ задовольняє інтерполяційні умови $Q_n(z_0) = f(z_0)$, $Q_n'(z_1) = f'(z_1)$, ..., $Q_n^{(n)}(z_n) = f^{(n)}(z_n)$.

1.3. N–точкова апроксимація Паде

Нехай за інтерполяційну функцію вибрана раціональна функція [184]

$$R^{[L/M]}(z) = \frac{P^{[L/M]}(z)}{Q^{[L/M]}(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_L z^L}{1 + b_1 z + \cdots + b_M z^M},$$

де $\mathbf{deg}\ P^{[L/M]} \leqslant L$, $\mathbf{deg}\ Q^{[L/M]} \leqslant M$.

Означення 1.11. Функція $R^{[L/M]}(z)$, значення якої на деякій множині точок збігаються із значеннями функції $f(z)$, називається N–точковою апроксимантою Паде або раціональною інтерполянтою.

Раціональна функція $R^{[L/M]}(z)$ повністю визначається із $N = L+M+1$ інтерполяційних умов $R^{[L/M]}(z_i) = f(z_i)$, $i = \overline{0, L+M}$, які породжують систему $(L+M+1)$–го лінійного алгебричного рівняння відносно невідомих $a_0, a_1, \ldots, a_L$, $b_1, b_2, \ldots, b_M$.

Якщо система має єдиний розв'язок, то коефіцієнти чисельника і знаменника функції $R^{[L/M]}(z)$ визначаються однозначно з точністю до множника. В протилежному випадку говорять про вироджену систему.

Теорема 1.19 ([6, с. 290–291]). *У невиродженому випадку N–точкова апроксиманта Паде $R^{[L/M]}(z)$, яка відповідає вузлам $z_0, \dots, z_{L+M}$ (серед яких, можливо, є і однакові) визначається наступними формулами*

$$R^{[L/M]}(z) = \frac{P^{[L/M]}(z)}{Q^{[L/M]}(z)},$$

де

$$P^{[L/M]}(z) = \begin{vmatrix} f_{M,L+1} & \cdots & f_{M,L+M} & \sum\limits_{j=M}^{L} f_{M,j} \prod\limits_{k=0}^{j-1}(z-z_k) \\ f_{M-1,L+1} & \cdots & f_{M-1,L+M} & \sum\limits_{j=M-1}^{L} f_{M-1,j} \prod\limits_{k=0}^{j-1}(z-z_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{0,L+1} & \cdots & f_{0,L+M} & \sum\limits_{j=0}^{L} f_{0,j} \prod\limits_{k=0}^{j-1}(z-z_k) \end{vmatrix},$$

$$Q^{[L/M]}(z) = \begin{vmatrix} f_{M,L+1} & \cdots & f_{M,L+M} & \prod\limits_{k=0}^{M-1}(z-z_k) \\ f_{M-1,L+1} & \cdots & f_{M-1,L+M} & \prod\limits_{k=0}^{M-2}(z-z_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{0,L+1} & \cdots & f_{0,L+M} & 1 \end{vmatrix}, \quad f_{i,j} = [z_i, \dots, z_j; f].$$

Залишковий член має вигляд

$$Q^{[L/M]}(z)f(z) - R^{[L/M]}(z) = \prod_{k=0}^{L+M}(z-z_k)\times$$

$$\times \begin{vmatrix} f_{M,L+1} & f_{M,L+2} & \cdots & f_{M,L+M} & [z_M, z_{M+1}, \dots, z_{L+M}, z; f] \\ f_{M-1,L+1} & f_{M-1,L+2} & \cdots & f_{M-1,L+M} & [z_{M-1}, z_M, \dots, z_{L+M}, z; f] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{0,L+1} & f_{0,L+2} & \cdots & f_{0,L+M} & [z_0, z_1, \dots, z_{L+M}, z; f] \end{vmatrix}.$$

Для однозначного визначення всіх символів у формулах вважається, що коли $j < i$, то $f_{i,j} = 0$, $\sum\limits_{k=i}^{j} S_k = 0$, $\prod\limits_{k=i}^{j} S_k = 1$.

Формули, які визначають N–точкову апроксинту Паде, досить громіздкі і з обчислювальної точки зору мало придатні. Для знаходження раціональної інтерполяції одним із ефективних вважається алгоритм Кронекера [6, с. 293–295]. Інший підхід до побудови раціональної інтерполяції пов'язаний із використанням ланцюгових дробів.

1.4. Інтерполяція функцій ланцюговими дробами

Вважається, що у 1909 році Т. Н. Тіле в своїй книзі [188, с. 129–138] вперше використав ланцюгові дроби для інтерполяції функцій. Однак в 1811 році Ю. М. Вронський в роботі [144, с. 249–250] розглядає представлення функції однієї змінної ланцюговим дробом вигляду

$$f(x) = A_0 + \frac{\varphi(x)}{A_1} \underset{+}{} \frac{\varphi(x+\xi)}{A_2} \underset{+}{} \frac{\varphi(x+2\xi)}{A_3} \underset{+}{} \frac{\varphi(x+3\xi)}{A_4} \underset{+}{} \cdots,$$

де ξ — параметр, а $\varphi(x)$ є функція, яка перетворюється в нуль в точці 0. Вронський пропонує визначати невідомі коефіцієнти $A_0, A_1, \ldots,$ в термінах значення функції f в точках $0, -\xi, -2\xi, \ldots$. В своїй книзі [145, с. 56–64] Вронський повертається до цієї задачі і вказує спосіб знаходження коефіцієнтів розглядуваного ланцюгового дробу.

Нехай компакт $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$, $d_{\mathcal{Z}} = \mathbf{diam}\ \mathcal{Z} = \sup_{z_1, z_2 \in \mathcal{Z}} |z_1 - z_2|$, задані значення функції $f(z)$ в точках множини $\mathbf{Z} \subset \mathcal{Z}$.

Розглянемо послідовність дробово–лінійних перетворень $\{v_k(z)\}$ вигляду [139, с. 495]

$$f(z) = v_0(z),\ v_k(z) = v_k(z_k) + \frac{z - z_k}{v_{k+1}(z)}, \quad z_k \in \mathbf{Z}, \quad k = \overline{0, n}, \tag{1.21}$$

та послідовність $\{V_k(z)\}$, де $V_0(z) = v_0(z)$, $V_k(z) = v_0 \circ v_1 \circ \cdots \circ v_k(z)$, $k = \overline{1, n}$. Тоді

$$f(z) = V_{n+1}(z) = v_0(z_0) + \frac{z - z_0}{v_1(z_1)} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{z - z_{n-1}}{v_n(z_n)} \underset{+}{} \frac{z - z_n}{v_{n+1}(z)}. \tag{1.22}$$

Позначимо через $b_k = v_k(z_k),\ k = \overline{0,n}$. Отримаємо представлення функції $f(z)$ ланцюговим дробом

$$f(z) = b_0 + \frac{z - z_0}{b_1} + \frac{z - z_1}{b_2} + \cdots + \frac{z - z_{n-1}}{b_n} + \frac{z - z_n}{v_{n+1}(z)}\ . \qquad (1.23)$$

Розглянемо скінченний ланцюговий дріб

$$D_n^{(T)}(z) = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{z - z_{k-1}}{b_k}. \qquad (1.24)$$

Скориставшись прямим (1.6) (або обернений (1.11)) рекурентним алгоритмом поставимо у відповідність ланцюговому дробу (1.24) відношення двох многочленів від змінної z, тобто

$$D_n^{(T)}(z) = \frac{P_n^{(T)}(z)}{Q_n^{(T)}(z)} = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{z - z_{k-1}}{b_k}. \qquad (1.25)$$

Означення 1.12. Якщо ланцюговий дріб (1.25) задовольняє інтерполяційну умову $f(z_i) = D_n^{(T)}(z_i), z_i \in \mathbf{Z}, i = \overline{0,n}$, то він називається інтерполяційним ланцюговим дробом Тіле (Т–ІЛД).

Теорема 1.20 ([162, с. 110]). *Т–ІЛД $D_n^{(T)}(z)$ є раціональна функція. Степені многочленів канонічних чисельника та знаменника задовольняють нерівності* $\mathbf{deg}\, P_n^{(T)}(z) \leqslant [(n+1)/2]$, $\mathbf{deg}\, Q_n^{(T)}(z) \leqslant [n/2]$

Невідомі коефіцієнти $b_k,\ k = \overline{0,n}$, Т–ІЛД (1.25) можна знайти: через обернені поділені різниці (або обернені різниці); за допомогою рекурентного співвідношення у вигляді ланцюгового дробу. Другий спосіб відшукання коефіцієнтів ланцюгового дробу розглянуто у пункті 2.3.

Розглянемо перший спосіб. У співвідношенні (1.22) введемо позначення [139, с. 496] $v_k(z) = \varphi_k[z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}, z; f]$, а тоді

$$b_k = \varphi_k[z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}, z_k; f]. \qquad (1.26)$$

З (1.21) отримуємо:

$$\varphi_0[z; f] = f(z), \quad \varphi_1[z_0, z; f] = \frac{z - z_0}{\varphi_0[z; f] - \varphi_0[z_0; f]} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)},$$

$$\varphi_2[z_0, z_1, z; f] = \frac{z - z_1}{\varphi_1[z_0, z; f] - \varphi_1[z_0, z_1; f]},$$

і у загальному випадку

$$\varphi_k[z_0, \ldots, z_{k-1}, z; f] = \frac{z - z_{k-1}}{\varphi_{k-1}[z_0, \ldots, z_{k-2}, z; f] - \varphi_{k-1}[z_0, \ldots, z_{k-1}; f]}, k = \overline{3, n}.$$

Звідки отримуємо

$$\varphi_k[z_0, \ldots, z_k; f] = \frac{z_k - z_{k-1}}{\varphi_{k-1}[z_0, \ldots, z_{k-2}, z_k; f] - \varphi_{k-1}[z_0, \ldots, z_{k-1}; f]}, \tag{1.27}$$

де $k = \overline{1, n}$. Величина $\varphi_k[z_0, \ldots, z_k; f]$, $k = \overline{1, n}$, називається k–ю оберненою поділеною різницею. Легко переконатися, що якщо коефіцієнти Т–ІЛД (1.25) визначаються за допомогою співвідношення (1.26), то ланцюговий дріб буде інтерполяційним.

Із (1.27) випливає, що обернена поділена різниця $\varphi_k[z_0, \ldots, z_{k-1}, z_k; f]$, $k \geqslant 2$, симетрична відносно двох аргументів z_{k-1} та z_k. Розглянемо лінійну комбінацію обернених поділених різниць

$$\rho_k[z_0, \ldots, z_k; f] = \sum_{i=0}^{[k/2]} \varphi_{k-2i}[z_0, \ldots, z_{k-2i}; f], \tag{1.28}$$

яку назвемо k–ю оберненою різницею. Із (1.28) випливає, що

$$\varphi_k[z_0, \ldots, z_k; f] = \rho_k[z_0, \ldots, z_k; f] - \rho_{k-2}[z_0, \ldots, z_{k-2}; f]\,. \tag{1.29}$$

З (1.28) та (1.29) отримуємо рекурентну формулу для обчислення обернених різниць

$$\rho_k[z_0, \ldots, z_k; f] = \frac{z_k - z_{k-1}}{\rho_{k-1}[z_0, \ldots, z_{k-2}, z_k; f] - \rho_{k-1}[z_0, \ldots, z_{k-2}, z_{k-1}; f]} + \\ + \rho_{k-2}[z_0, \ldots, z_{k-2}; f], \qquad k = \overline{2, n},$$

$$\rho_0[z_0; f] = f(z_0), \qquad \rho_1[z_0, z_1; f] = \frac{z_1 - z_0}{f(z_1) - f(z_0)}.$$

Коефіцієнти Т–ІЛД (1.25) визначаються через обернені різниці наступним чином:

$$\begin{aligned} &b_0 = \rho_0[z_0; f], \qquad b_1 = \rho_1[z_0, z_1; f], \\ &b_k = \rho_k[z_0, \ldots, z_k; f] - \rho_{k-2}[z_0, \ldots, z_{k-2}; f], \qquad k = \overline{2, n}. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Обчислення обернених різниць зручно виконувати за допомогою таблиці

$$
\begin{array}{cccccc}
z_0 & w_0 & & & & \\
 & & \rho_1[z_0, z_1; f] & & & \\
z_1 & w_1 & & \rho_2[z_0, z_1, z_2; f] & & \\
 & & & & \ddots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \rho_n[z_0, \ldots, z_n; f] \\
 & & & & \iddots & \\
z_{n-1} & w_{n-1} & & \rho_2[z_{n-2}, z_{n-1}, z_n; f] & & \\
 & & \rho_1[z_{n-1}, z_n; f] & & & \\
z_n & w_n & & & &
\end{array}
$$

Обернені різниці можуть бути визначені через вузли та значення функції у вузлах наступним чином [62, с. 52–53], [162, с. 110–111]:

$$
\rho_\mu[z_0, \ldots, z_\mu; f] = \frac{\begin{vmatrix} 1 & w_0 & z_0 & z_0 w_0 & \cdots & z_0^{k-1} & z_0^{k-1} w_0 & z_0^k w_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_\mu & z_\mu & z_\mu w_\mu & \cdots & z_\mu^{k-1} & z_\mu^{k-1} w_\mu & z_\mu^k w_\mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & w_0 & z_0 & z_0 w_0 & \cdots & z_0^{k-1} & z_0^{k-1} w_0 & z_0^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_\mu & z_\mu & z_\mu w_\mu & \cdots & z_\mu^{k-1} & z_\mu^{k-1} w_\mu & z_\mu^k \end{vmatrix}}, \tag{1.31}
$$

$$
\rho_\nu[z_0, \ldots, z_\nu; f] = \frac{\begin{vmatrix} 1 & w_0 & z_0 & z_0 w_0 & \cdots & z_0^{k-2} w_0 & z_0^{k-1} & z_0^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_\nu & z_\nu & z_\nu w_\nu & \cdots & z_\nu^{k-2} w_\nu & z_\nu^{k-1} & z_\nu^k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & w_0 & z_0 & z_0 w_0 & \cdots & z_0^{k-2} w_0 & z_0^{k-1} & z_0^{k-1} w_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_\nu & z_\nu & z_\nu w_\nu & \cdots & z_\nu^{k-2} w_\nu & z_\nu^{k-1} & z_\nu^{k-1} w_\nu \end{vmatrix}}, \tag{1.32}
$$

де $\mu = 2k, \nu = 2k - 1$.

Із формул (1.31)–(1.32) безпосередньо випливає, що обернена різниця $\rho_k[z_0, \ldots, z_k; f], k = \overline{1, n}$, симетрична відносно аргументів $z_0, \ldots, z_k$.

Задача інтерполяції функцій ланцюговими дробами досліджувалася в роботах інших математиків. Ньорлунд в своїй книзі [164, с. 415–455] розглядає питання інтерполяції функцій многочленом та інтерполяційним ланцюговим дробом Тіле, встановлює взаємозв'язки між оберненими різницями та розділеними різницями. Аналогічні дослідження проведені в роботах Й. Тайн [185, 186]. В статті К. Чжао, Й. Тайн [190] розглядається блокова змішана інтерполяція типу Ньютона. При такому підході множина інтерполяційних вузлів розбивається на підмножини (блоки) і за значеннями функції в точках кожної підмножини будується або інтерполяційний многочлен, або ланцюговий дріб. Інтерполянтом слугує їх лінійна комбінація. Аналогічний підхід запропонований у випадку розгляду блокової змішаної задачі Лагранжа–Тіле в роботі К. Чжао, Й. Тайн [191]. В роботі Й. Тайн, П. Ці [187] розглядається узагальнення методу Невілла для інтерполяції ланцюговими дробами Тіле. Наближення функцій за допомогою приєднаного інтерполяційного ланцюгового дробу вивчалося в статті С. М. Возної, Х. Й. Кучмінської [15]. В роботах Л. В. Зарудняка, С. С. Хлопоніна [30], [117], [118, с. 73–83] досліджувалася задача інтерполяції функцій ланцюговими дробами з поліноміальними елементами .

В своїй статті Ф. М. Ларкін [155] розглядає узагальнення методу Невілла–Айткена в задачі раціональної інтерполяції. Також запропоновані методи трикутника та ромба, які не передбачають обчислення в явному вигляді ані обернених скінчених різниць, ані обернених різниць. В роботі Р. Пацон, П. Ґоннет, Й. ван Дин [167] розглянуто метод раціональної інтерполяції функцій із заданим чисельником та знаменником. За інтерполяційні вузли вибиралися або корені з одиниці, або чебишовські вузли, запропонований метод, який спирається на швидке перетворення Фур'є матриць.

Узагальнення інтерполяційних ланцюгових дробів Тіле для n–дробів здійснено в роботі П. Лаврі, А. Билтгіла [156]. Векторно–значна раціональна інтерполянта типу Тіле досліджувалася в роботах П. Р. Ґрейвс–

Морріса [137].

Нехай функція дійсної змінної $f(x)$ на компакті $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$ має полюси α_i кратності $r_i, i = \overline{1, s}$, де $\sum_{i=1}^{s} r_i = m$, які відмінні від інтерполяційних вузлів $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Нехай $q(z) = \phi(x)(x - \alpha_1)^{r_1}(x - \alpha_2)^{r_2} \ldots (x - \alpha)^{r_s}$, де $\phi(x)$ — такий многочлен, що $\mathbf{deg}\, q - \mathbf{deg}\, \phi = m$, $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$. Нехай функція $F(x) = f(x)q(x) \in \mathbf{C}^{(n)}(\mathcal{R})$ і має похідну $(n+1)$–го порядку. Тоді залишковий член Т–ІЛД має вигляд [62, с. 126–127], [162, с. 116–117]

$$f(x) - D_n^{(T)}(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{n!\, Q_n^{(T)}(x)\, q(x)} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left[f(x) Q_n^{(T)}(x) q(x) \right] \Big|_{x=\xi}, \quad \xi \in \mathrm{Int}\mathcal{R}.$$

Якщо функція $f(z)$ аналітична в $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$, то [164, с. 435]

$$f(z) - D_n^{(T)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\xi)\, Q_n^{(T)}(\xi)\, \omega_{n+1}(\xi)\, \vartheta_n(z)}{(\xi - z)\, Q_n^{(T)}(z)\, \omega_{n+1}(z)\, \vartheta_n(\xi)}\, d\xi,$$

де $\vartheta_n(z)$ є многочлен того ж степеня, що і знаменник Т–ІЛД $Q_n^{(T)}(z)$.

Узагальненням теорії інтерполяції функцій дійсної (комплексної) змінної на функціонали та оператори в абстрактних просторах присвячена велика кількість робіт, зокрема монографії В. Л. Макарова, В. В. Хлобистова, Л. А. Яновича [51, 56]. Інтерполяція інтегральними ланцюговими дробами була вперше розглянута в роботі Б. Р. Михальчука [63], узагальнення результатів цієї роботи містяться в статті В. Л. Макарова, В. В. Хлобистова, Б. Р. Михальчука [55]. Інший клас інтерполяційних інтегральних ланцюгових дробів вивчався в спільній статті В. Л. Макарова, І. І. Демківа [46]. Цей клас відрізняється від інтегральних ланцюгових дробів, які вивчалися в попередніх роботах тим, що n–й поверх дробів містить не однократний, а n–кратний інтеграл. Інтерполяційні операторні ланцюгові дроби в банахових просторах досліджувалися в статті В. Л. Макарова, В. В. Хлобистова, І. І. Демківа [53]. Природним узагальненням класичного ланцюгового дробу Тіле є інтерполяційний інтегральний ланцюговий дріб типу Тіле. Інтерполяційний інтегральний ланцюговий дріб розглянуто в роботах В. Л. Макарова та І. І. Демківа [47, 48]. В статті В. Л. Макарова, І. І. Демківа [49] досліджується абстрактний інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле, який є узагальненням раніше розглянутим різними авторами інтерполяційних ланцюговим дробів. Зокрема, як частинний випадок такий абстрактний ланцюговий дріб містить в собі типи інтерполяційних ланцюгових дробів, які розглядаються в дисертаційній роботі. Але способи побудови елементів ланцюгових дробів відрізняються від способів побудови інтегральних ланцюгових дробів. Крім того, коло досліджуваних задач у вище перерахованих роботах та дисертації також відрізняється. Основна увага в дисертаційній роботі в задачах інтерполяції функцій зосереджена на оцінках залишкових членів та доведенні збіжності інтерполяційних процесів.

1.5. Функції однієї комплексної змінної

Наведемо основні твердження з теорії функцій комплексної змінної, яка задана в області $G \subset \mathbb{C}$.

Якщо існує границя $\lim\limits_{z \to z_0, z \in G} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, то вона називається похідною функції $f(z)$ в точці $z_0 \in G$, а функція диференційованою в точці.

Коли похідна функції в точці $z_0 \in G$ скінченна, то функція називається моногенною. Якщо $f(z)$ має неперервну похідну в деякому околі точки z_0, то вона називається аналітичною (голоморфною) в точці. Функція диференційована (моногенна, аналітична) в області $G \subset \mathbb{C}$, якщо в кожній точці області вона диференційована (моногенна, аналітична). Функція $f(z)$, яка аналітична на всій комплексній площині $\mathbb{C}$, називається цілою. Функція $f(z)$, яка визначена в розширеній комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$, називається аналітичною на нескінченності, якщо функція $g(z) = f(1/z)$ аналітична в точці $z = 0$. Так як сума, різниця, добуток і частка (в припущені відмінності від нуля дільника) аналітичних функцій буде також функція аналітична, то множина $A(G)$ аналітичних функцій в області G є кільцем.

Теорема 1.21 (Коші, [43, с. 63]). *Якщо функція $f(z)$ аналітична в області G і неперервна в $\overline{G}$, то вона має в кожній точці G похідні всіх порядків, причому n–а похідна задається формулою*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}, \qquad \text{де } C \text{— границя області } G.$$

Із теореми Коші випливає: **(A)** всяка функція комплексної змінної, яка аналітична в деякій області G, нескінченно раз диференційовна у вказаній області; **(B)** похідна довільного порядку від аналітичної в області G функції $f(z)$ буде аналітична в цій області.

Теорема 1.22 ([13, с. 203], [57, с. 224], [58, Т. 1,с. 297]). *Аналітичну в області G функцію $f(z)$ можна в околі кожної точки $z_* \in G$ подати степеневим рядом*

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_*)^n, \tag{1.33}$$

радіус збіжності якого не менший за віддаль d від точки z_* до границі області G.

Означення 1.13. Якщо коефіцієнти степеневого ряду (1.33) обчислюються за допомогою формули

$$c_n = \frac{1}{2\pi\, i}\int\limits_{\partial K_r} \frac{f(\xi)d\,\xi}{(\xi - z_*)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_*)}{n!}, \tag{1.34}$$

де $\partial K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_*| = r\}, r < d, K_r \subset D$, то ряд називається степеневим рядом Тейлора функції f.

Теорема 1.23 (Лорана, [13, с. 219], [119, с. 112]). *Довільну аналітичну в кільці $V_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant r < |z - z_*| < R \leqslant \infty\}$ функцію $f(z)$ можна розвинути в цьому кільці в суму збіжного ряду*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_*)^n, \tag{1.35}$$

де

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{f(\xi)d\xi}{(z-\xi)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \Gamma_\rho = \{z : |z - z_*| = \rho\}, \quad r < \rho < R.$$

Означення 1.14. Точка $a \in \mathbb{C}$ називається ізольованою особливою точкою функції $f(z)$, якщо існує такий проколений окіл цієї точки, тобто кільце $V_{0,R} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < R\}$ з нульовим внутрішнім радіусом, в якому функція $f(z)$ аналітична.

Нехай маємо розвинення (1.35) функції $f(z)$ в кільці $V_{0,R}$. Точка $z = a$ буде усувною особливою точкою функції f, якщо в розвиненні (1.35) відсутня головна частина, тобто члени з від'ємними степенями. Якщо в розвинені (1.35) головна частина містить скінченну кількість членів, то точка $z = a$ називається полюсом. При цьому, якщо $c_{-1} = c_{-2} = \ldots = c_{n-1} = 0$, а $c_n \neq 0$, то число n називається порядком полюса. У випадку, коли в розвинені (1.35) головна частина містить нескінченне число членів, то точка $z = a$ називається суттєво особливою точкою.

Означення 1.15 ([21, с. 39]). Особлива точка називається критичною точкою, якщо при обході вздовж замкненої жорданової кривої γ, яка охоплює особливу точку, функція змінює своє значення. В протилежному випадку особлива точка — некритична.

Означення 1.16 ([107, с. 305]). Аналітична функція $f(z)$ називається алгебричною, якщо існує многочлен $P(w, z)$ від незалежних змінних z та w, що для довільного z маємо $P(f(z), z) = 0$.

Означення 1.17 ([21, с. 40]). Якщо в деякому околі точки z_* алгебрична функція $f(z)$ має розвинення $f(z) = a_0 + a_1(z-z_*)^{\frac{1}{n}} + a_2(z-z_*)^{\frac{2}{n}} + \cdots$, то точка $z = z_*$ називається критичною алгебричною точкою.

Означення 1.18 ([21, с. 40]). Якщо в деякому околі точки z_* алгебрична функція $f(z)$ має розвинення $f(z) = a_{-m}(z-z_*)^{-\frac{m}{n}} + a_{-m+1}(z-z_*)^{-\frac{m-1}{n}} + \cdots + a_{-1}(z-z_*)^{-\frac{1}{n}} + a_0 + a_1(z-z_*)^{\frac{1}{n}} + a_2(z-z_*)^{\frac{2}{n}} + \cdots$, то точка $z = z_*$

називається критичним полюсом.

Означення 1.19. Критичні алгебричні точки, полюси та критичні полюси називаються алгебричними особливими точками.

Означення 1.20 ([58, с. 176]). Аналітична в області G функція $f(z)$ називається однолистою, якщо вона в різних точках області приймає різні значення, тобто $f(z_1) \neq f(z_2)$, якщо $z_1 \neq z_2, z_1, z_2 \in G$.

З означення випливає, що однолиста функція здійснює бієктивне відображення області $G \subset \mathbb{C}$ в область $D \subset \mathbb{C}$.

Означення 1.21 ([96, с. 226]). Мероморфною функцією називається однозначна функція комплексної змінної $f(z)$, яка не має в скінченній частині комплексної площини інших особливих точок крім полюсів.

Нехай $D \subset \mathbb{C}$ відкрита однозв'язна область.

Означення 1.22 ([131, с. 52]). Послідовність $\{f_n(z)\}$ мероморфних функцій в області D називається рівномірно обмеженою на компактній підмножині $K \subset D$, якщо існують такі числа N_K та B_K, що $\sup\limits_{z \in K} |f_n(z)| \leqslant B_K$, коли $n \geqslant N_K$.

Означення 1.23 ([131, с. 52]). Послідовність $\{f_n(z)\}$ мероморфних в області D функцій називається рівномірно збіжною на компакті $K \subset D$ якщо: **(A)** знайдеться таке $N_K \in \mathbb{N}$, що для всіх $n \geqslant N_K$ $f_n(z)$ голоморфна (аналітична) в деякій області, яка містить K; **(B)** для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $N_\varepsilon > N_K$, що $\sup\limits_{z \in K} |f_{n+m}(z) - f_n(z)| < \varepsilon$, $n \geqslant N_\varepsilon$, $m \in \mathbb{N}_0$.

1.6. Розвинення функції в степеневий ряд Тейлора

Функція $f(z)$ на компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ може бути наближена іншою функцією. До таких наближень відносяться розвинення функцій в степеневий ряд Тейлора, ряд Лорана, апроксимації Паде, розвинення функцій в ланцюговий дріб тощо.

Згідно із теоремою Абеля [58, с. 283], степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_*)^n \tag{1.36}$$

абсолютно збігається в середині круга $K_{R,z_*} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_*| < R\}$ та розбігається ззовні круга. При цьому, в довільному замкненому крузі $\bar{K}_{r,z_*} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_*| \leqslant r, r < R\}$ степеневий ряд збігається рівномірно. Радіус збіжності степеневого ряду R визначається за допомогою формули Коші–Адамара ([119, с. 97]) $R = 1 \big/ \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$.

Теорема 1.24 ([58, с. 322]). *На границі* $\Gamma = \{z : |z - z_*| = R\}$ *круга збіжності степеневого ряду* (1.36) *знаходиться принаймні одна особлива точка функції* $\varphi(z)$ *– суми степеневого ряду.*

Оскільки степеневий ряд (1.36) є рядом аналітичних функцій і рівномірно збігається в середині круга K_{R,z_*}, то згідно із теоремою Веєрштраса [58, с. 265] сума степеневого ряду $\varphi(z)$ буде функція аналітична і похідна цієї функції n–го порядку може бути отримана шляхом почленного диференціювання степеневого ряду (1.36). Крім того, степеневі ряди утворені із похідних членів степеневого ряду (1.36) також рівномірно збігаються в K_{r,z_*} і мають той же радіус збіжності R. Степеневі ряди зручно додавати, віднімати та множити за правилом Коші [13, с. 208].

Якщо функція $f(z)$ аналітична в крузі K_{R,z_*}, то в околі точки $z \in K_{R,z_*}$ має місце розвинення функції f в степеневий ряд $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_*)^n$, де c_n визначені в (1.34), таке розвинення єдине. Степеневий ряд рівномірно збігається до функції $f(z)$ в крузі K_{R,z_*} і називається рядом Тейлора функції $f(z)$ в околі точки z_*. Аналітичну в $\mathcal{Z}$ функцію в околі точки $z_* \in \mathcal{Z}$ можна подати формулою Тейлора $f(z) = P_n(z) + R_n(z)$, де

$$P_n(z) = c_0 + c_1(z - z_*) + c_2(z - z_*)^2 + \cdots + c_n(z - z_*)^n, \quad c_k = \frac{f^{(k)}(z_*)}{k!}, \tag{1.37}$$

а залишковий член R_n має вигляд

$$R_n(z) = \frac{(z - z_*)^{n+1}}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)(\xi - z_*)^{n+1}},$$

де C— замкнений контур, який лежить в $\mathcal{Z}$. Функція $P_n(z)$ називається многочленом Тейлора. Многочлен $P_n(z)$ можна отримати також іншим шляхом, якщо припустити, що всі вузли інтерполяційного многочлена у формі Ньютона (1.19) прямують до одного й того ж значення z_*, то отримаємо многочлен (1.37) [58, с. 448], [57, с. 335]. Многочлен є зручним інструментом для обчислення наближеного значення функції.

Відомо, що розвинення функцій [9, 103, 131, 140] $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\sin z = = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $\operatorname{sh} z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, збігаються для всіх $z \in \mathbb{C}$. Розвинення функцій $\ln(1 + z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$, $(1 + z)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (\alpha - i)}{n!} z^n$, збігаються в крузі $|z| < 1$.

Зауваження 1.3. Розвинення багатозначних функцій $\operatorname{Ln}(1+z)$, $(1+z)^\alpha$ мають місце для тих однозначних гілок функцій, для яких $\operatorname{Ln}(1+z)\big|_{z=0} = 0$, $(1 + z)^\alpha\big|_{z=0} = 1$.

Функції $\operatorname{tg} z, \operatorname{th} z$ подаються степеневими рядами [23, с. 49], [113, с. 537]

$$\operatorname{tg} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(4^n - 1)|B_{2n}|}{(2n)!} z^{2n-1}, \qquad \operatorname{th} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(4^n - 1)B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1},$$

які збігаються для $|z| < \pi/2$, а функції $\operatorname{ctg} z, \operatorname{cth} z$ мають розвинення в степеневий ряд

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n |B_{2n}|}{(2n)!} z^{2n-1}, \qquad \operatorname{cth} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1},$$

які збігаються для $|z| < \pi$. Числа Бернуллі B_m визначаються за рекурсією $B_0 = 1$, $B_m = \frac{-1}{m+1} \sum\limits_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k+1} B_{m-k}$, $m \in \mathbb{N}$.

1.7. Формальні степеневі ряди та ряди Лорана. Відповідні ланцюгові дроби

Означення 1.24 ([140, с. 9]). Формальним степеневим рядом (ФСР) над полем $\mathbb{C}$ називається послідовність $\{c_n | c_n \in \mathbb{C}\}$, яка записана у вигляді

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \,. \tag{1.38}$$

Зауваження 1.4. В означені не робиться ніяких припущень відносно збіжності ФСР (1.38) і не ставиться у відповідність ФСР ніяких значень.

Відносно операції додавання ФСР утворюють абелеву групу, а відносно операції множення за правилом Коші ФСР утворюють абелеву напівгрупу з одиницею [140].

Означення 1.25. Формальним рядом Лорана (ФРЛ) над полем $\mathbb{C}$ називають послідовність $\{c_n \,|\, c_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}\}$, яка записана у вигляді

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \,, \tag{1.39}$$

де всі коефіцієнти c_n з від'ємними індексами крім скінченного числа рівні нулю.

З означення випливає, що ФРЛ L може бути поданий у вигляді

$$L = c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + c_{m+2} z^{m+2} + \cdots \,, \qquad c_m \neq 0.$$

Очевидно, що якщо $m \geqslant 0$, то ФРЛ буде ФСР. ФРЛ (1.39) можна додавати та множити за правилом Коші.

Теорема 1.25 ([140, с. 53]). *Формальні ряди Лорана над полем $\mathbb{C}$ утворюють поле формальних рядів Лорана $\mathbb{L}_0$.*

Роль нейтрального елемента в полі $\mathbb{L}_0$ відносно операції додавання виконує ФРЛ, всі коефіцієнти якого рівні нулю, а роль нейтрального елемента відносно операції множення виконує ФРЛ, всі коефіцієнти якого, крім $c_0 = 1$, рівні нулю.

Для кожного ФРЛ $L \in \mathbb{L}_0$ можна визначити величину

$$\lambda(L) = \begin{cases} m, & L(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k z_k, \qquad c_m \neq 0, \\ \infty, & L(z) = 0. \end{cases}$$

Нехай $f(z)$ є мероморфна функція в початку координат. Розвинення функції $f(z)$ в ряд Лорана позначимо через $\mathcal{L}(f(z))$.

Означення 1.26. Говорять, що послідовність мероморфних в початку координат функцій $\{R_n(z)\}$ відповідна ФРЛ L, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(L - \mathcal{L}(R_n(z))) = \infty.$$

Оскільки всяка мероморфна в початку координат функція f має єдине розвинення у ФРЛ, то взаємно–однозначне відображення $\mathcal{L}$ буде вкладенням поля $\mathcal{M}$ всіх мероморфних в початку координат функцій в поле $\mathbb{L}_0$. Порядок відповідності $R_n(z)$ ФРЛ L визначається так $\nu_n = \lambda(L - \mathcal{L}(R_n(z)))$.

Означення 1.27. Ланцюговий дріб $\mathbf{K}(a_n(z)/b_n(z))$ називається відповідним ФРЛ L, якщо кожний підхідний дріб $f_n(z)$ є мероморфна в початку координат функція і послідовність підхідних дробів $\{f_n(z)\}$ відповідна L.

В $\mathbb{L}_0$ може бути визначена норма $||L|| = 2^{-\lambda(L)}$, $L \in \mathbb{L}_0$, та метрика $\rho(L_1, L_2) = ||L_1 - L_2||$, для всіх $L_1, L_2 \in \mathbb{L}_0$. Кільце ФРЛ $\mathbb{L}_0$ буде поповненням $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ відносно метрики ρ.

Теорема 1.26 ([25, с. 157]). ***(A)*** *Для даної послідовності* $\{R_n(z)\}$ *мероморфних в початку координат функцій існує такий ФРЛ* L*, що послідовність* $\{R_n(z)\}$ *буде відповідна* L *тоді і тільки тоді, коли*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(\mathcal{L}(R_{n+1}(z)) - \mathcal{L}(R_n(z))) = \infty. \tag{1.40}$$

(B) *Якщо* (1.40) *виконується, то* L*, якому* $\{R_n(z)\}$ *буде відповідна, визначається однозначно.*

(C) *Якщо послідовність* $\{\lambda(\mathcal{L}(R_{n+1}(z)) - \mathcal{L}(R_n(R_n(z)))\}$ *монотонно прямує до* ∞, *то порядок відповідності* $\{R_n(z)\}$ *визначається наступним чином* $\nu_n = \lambda(\mathcal{L}(R_{n+1}(z)) - \mathcal{L}(R_n(R_n(z)))$.

Теорема 1.27 ([25, с. 158]). *Нехай* $\{a_n(z)\}$ *та* $\{b_n(z)\}$ *— послідовності мероморфних в початку координат функцій,* $a_n(z) \not\equiv 0$, $n \in \mathbb{N}$. *Нехай* L_0 *— ФРЛ і* $\{L_n\}$ *— послідовність ФРЛ, які рекурентно визначаються наступним чином:*

$$L_{n+1} = \mathcal{L}(a_{n+1}(z))/(L_n - \mathcal{L}(b_n(n))), \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.41}$$

при умові, що

$$L_n \neq \mathcal{L}(b_n(z)), \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.42}$$

Тоді

(A) *ланцюговий дріб* $b_0(z) + \mathbf{K}(a_i(z)/b_i(z))$ *відповідний* L_0, *якщо*

$$\begin{aligned} \lambda(\mathcal{L}(b_n(z))) + \lambda(\mathcal{L}(b_{n-1}(z))) &< \lambda(\mathcal{L}(a_n(z))), \qquad n \in \mathbb{N}, \\ \lambda(L_n) + \lambda(\mathcal{L}(b_{n-1}(z))) &< \lambda(\mathcal{L}(a_n(z))), \qquad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Якщо умови (1.42) *та* (1.43) *виконуються, то порядок відповідності* n*–го підхідного дробу* $f_n(z)$ *буде рівний*

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \lambda(\mathcal{L}(a_1(z))) - \lambda(L_1), \\ \nu_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \lambda(\mathcal{L}(a_k(z))) - 2\sum_{k=1}^{n} \lambda(\mathcal{L}(b_k(z))) - \lambda(L_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(B) *Якщо у випадку означення послідовності* $\{L_n\}$ *за допомогою* (1.41) *трапиться, що* $L_k \neq \mathcal{L}(b_k(z))$ *для* $0 \leqslant k \leqslant m-1$ *і* $L_m = \mathcal{L}(b_m(z))$, *то*

$$L_0 = \mathcal{L}\left(b_0 + \frac{a_1(z)}{b_1(z)} \underset{+}{} \frac{a_2(z)}{b_2(z)} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{a_m(z)}{b_m(z)}\right).$$

Із теорем 1.26 та 1.27 як наслідок випливає наступне твердження.

Теорема 1.28 ([25, с. 161]). ***(A)*** *Кожний ланцюговий C–дріб*

$$1 + \frac{a_1 z^{\alpha_1}}{1} \underset{+}{} \frac{a_2 z^{\alpha_2}}{1} \underset{+}{} \frac{a_3 z^{\alpha_3}}{1} \underset{+}{} \cdots, \qquad a_n \neq 0, \tag{1.44}$$

де $\alpha_n \in \mathbb{N}$, *відповідний однозначно визначеному ФСР вигляду*

$$L_0 = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots . \tag{1.45}$$

Порядок відповідності підхідного дробу $f_n(z)$ *буде рівний* $\nu_n = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k$.
(B) *Нехай дано ФСР* (1.45). *Тоді: (B1) або існує ланцюговий С–дріб* (1.44), *який відповідний* (1.45); *(B2) або скінченний ланцюговий С–дріб*

$$f_m(z) = 1 + \frac{a_1 z^{\alpha_1}}{1} + \frac{a_2 z^{\alpha_2}}{1} + \dots + \frac{a_m z^{\alpha_m}}{1},\ a_k \neq 0,\ k = \overline{1, m}, \tag{1.46}$$

такий, що

$$L_0 = \mathcal{L}(f_m). \tag{1.47}$$

У випадку (B2) L_0 *є розвиненням раціональної функції* f_m *в точці* $z = 0$.
(C) *Якщо* L_0 *є розвинення в ряд Тейлора раціональної функції* $f(z)$ *в точці* $z = 0$, *то існує скінченний ланцюговий С–дріб* $f_m(z)$ *вигляду* (1.46), *що виконуеться співвідношення* (1.47).

Відомо [25, теорема 7.1], що правильний ланцюговий С–дріб $\mathbf{K}(a_n z/1)$ є відповідний однозначно визначеному ФСР (1.38). Порядок відповідності n–го підхідного дробу $f_n(z)$ дорівнює $\nu_n = n + 1$ і такий правильний ланцюговий С–дріб єдиний.

Означення 1.28. Визначником Ганкеля $H_k^{(n)}$ порядку k, який пов'язаний з ФСР (1.38), називається визначник вигляду

$$H_0^{(n)} = 1,\ H_k^{(n)} = \begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{n+k-1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} & c_{n+3} & \dots & c_{n+k} \\ c_{n+2} & c_{n+3} & c_{n+4} & \dots & c_{n+k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+k-1} & c_{n+k} & c_{n+k+1} & \dots & c_{n+2k-2} \end{vmatrix}, \tag{1.48}$$

де $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$, $c_n = 0$, коли $n < 0$.

Теорема 1.29 ([25, с. 220]). ***(A)*** *Якщо для заданого ФСР* (1.45) *існує правильний ланцюговий C–дріб*

$$1 + \underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} \frac{a_n z}{1}, \qquad a_n \neq 0, \tag{1.49}$$

який відповідний L в точці $z = 0$, то

$$H_k^{(1)} \neq 0, \quad H_k^{(2)} \neq 0, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{1.50}$$

і

$$a_1 = H_1^{(1)},\ a_{2m} = -\frac{H_{m-1}^{(1)} H_m^{(2)}}{H_m^{(1)} H_{m-1}^{(2)}},\ a_{2m+1} = -\frac{H_{m+1}^{(1)} H_{m-1}^{(2)}}{H_m^{(1)} H_m^{(2)}},\ m \in \mathbb{N}. \tag{1.51}$$

(B) *Якщо співвідношення* (1.50) *виконуються, то правильний ланцюговий C–дріб* (1.49)*, коефіцієнти якого $a_n, n \in \mathbb{N}$, визначаються за формулами* (1.51) *буде відповідним ФСР* (1.45).

Коефіцієнтів правильного ланцюгового C–дробу можна також визначити за алгоритмом часток і різниць (QD–схема Рутісгаузера) [101].

Теорема 1.30 ([25, с. 183]). *Нехай $1+\mathbf{K}(a_n z/1)$ є правильний ланцюговий C–дріб, такий, що $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $(a_n \neq 0)$. Тоді:* ***(A)*** *ланцюговий дріб $1+\mathbf{K}(a_n z/1)$ збігається до мероморфної функції $f(z)$;* ***(B)*** *збіжність буде рівномірна на кожній компактній підмножині $\mathcal{Z}$ множини $\mathbb{C}$, яка не містить полюсів $f(z)$;* ***(C)*** *функція $f(z)$ голоморфна в точці $z = 0$ і $f(0) = 1$.*

Теорема 1.31 ([25, с. 184]). *Нехай $1 + \mathbf{K}(a_n z/1)$ – правильний ланцюговий C–дріб, такий, що $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$, де a – комплексна константа. Нехай $R_a = \{z\ :\ |\arg(az+1/4)| < \pi\}$. Тоді:* ***(A)*** *ланцюговий дріб збігається до функції $f(z)$, яка мероморфна в R_a;* ***(B)*** *збіжність буде рівномірна на кожній компактній підмножині $\mathcal{Z}$ із R_a, яка не містить полюсів $f(z)$;* ***(C)*** *функція $f(z)$ голоморфна в точці $z = 0$.*

Теорема 1.32 ([25, с. 182]). *Нехай $\{f_n(z)\}$ є послідовність мероморфних в початку координат функцій, яка відповідна ФСР (1.38), нехай D є область, яка містить початок координат. Тоді: **(A)** $\{f_n(z)\}$ збігається рівномірно на кожній компактній підмножині з D тоді і тільки тоді, коли $\{f_n(z)\}$ рівномірно обмежена на кожній такій підмножині; **(B)** якщо $\{f_n(z)\}$ збігається рівномірно на кожній компактній підмножині із D, то функція $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$ буде голоморфною на D, а $L = \mathcal{L}(f)$ буде рядом Тейлора для $f(z)$ в точці $z = 0$.*

1.8. Апроксимації Паде

Означення 1.29 ([131, с. 59]). Апроксимантою Паде функції $f(z)$ порядку $[L, M]$ називається нескоротна раціональна функція

$$R^{[L,M]}(z) = P^{[L,M]}(z)/Q^{[L,M]}(z),$$

де $Q^{[L,M]}(0) = 1$, яка задовольняє співвідношення

$$P^{[L,M]}(z) = \sum_{i=0}^{L} a_i z^i, \quad Q^{[L,M]}(z) = \sum_{i=0}^{M} b_i z^i, \qquad a_i, b_i \in \mathbb{C},$$

$$\lambda\Big(fQ^{[L,M]} - P^{[L,M]}\Big) \geqslant L + M + 1.$$

Якщо функція $f(z)$ подана степеневим рядом $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, то коефіцієнти многочлена знаменника $Q^{[L,M]}(z)$ визначаються із системи лінійних алгебричних рівнянь [6, с. 13]

$$\begin{pmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \cdots & c_L \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & c_{L-M+4} & \cdots & c_{L+1} \\ c_{L-M+3} & c_{L-M+4} & c_{L-M+5} & \cdots & c_{L+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_L & c_{L+1} & c_{L+2} & \cdots & c_{L+M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_M \\ b_{M-1} \\ b_{M-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{L+1} \\ c_{L+2} \\ c_{L+3} \\ \vdots \\ c_{L+M} \end{pmatrix}, \qquad (1.52)$$

де $c_j = 0$, якщо $j < 0$, а коефіцієнти чисельника $P^{[L,M]}(z)$ визначаються за допомогою рекурентних співвідношень

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0, \\ a_1 &= c_1 + b_1 c_0, \\ a_2 &= c_2 + c_1 b_1 + b_2 c_0, \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_L &= c_L + \sum_{i=1}^{\min\{L,M\}} b_i c_{L-i}. \end{aligned} \tag{1.53}$$

Рівняння (1.52)–(1.53) називаються рівняннями Паде. Коли система (1.52) має розв'язок, ці рівняння визначають коефіцієнти чисельника та знаменника апроксиманти Паде $R^{[L,M]}(z)$.

Двовимірний масив раціональних функцій

$$\begin{matrix} R^{[0,0]}(z) & R^{[0,1]}(z) & R^{[0,2]}(z) & \ldots \\ R^{[1,0]}(z) & R^{[1,1]}(z) & R^{[1,2]}(z) & \ldots \\ R^{[2,0]}(z) & R^{[2,1]}(z) & R^{[2,2]}(z) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

називають таблицею Паде для ФСР L.

Означення 1.30. Апроксиманта Паде $R^{[L,M]}(z) = P^{[L,M]}(z)/Q^{[L,M]}(z)$ називається нормальною, якщо $\mathbf{deg}\ P^{[L,M]} = L$, $\mathbf{deg}\ Q^{[L,M]} = M$, $\lambda\Big(fQ^{[L,M]} - P^{[L,M]}\Big) = L + M + 1$.

Означення 1.31. Кажуть, що ФСР L та його таблиця Паде будуть нормальними, якщо кожна апроксимація Паде нормальна.

В нормальній таблиці Паде східчаста послідовність апроксимацій

$$\begin{matrix} R^{[0,0]}(z) & & & \\ R^{[1,0]}(z) & R^{[1,1]}(z) & & \\ & R^{[2,1]}(z) & R^{[2,2]}(z) & \\ & & R^{[3,2]}(z) & \ddots \\ & & & \ddots \end{matrix}$$

утворює підхідні дроби правильного ланцюгового C–дробу.

Теорема 1.33 ([25, с. 191]). ***(A)*** *Нехай*

$$L_0 = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i z^i \tag{1.54}$$

ФСР, для якого всі апроксимації Паде із східчастої послідовності

$$R^{[0,0]}(z), R^{[1,0]}(z), R^{[1,1]}(z), R^{[2,1]}(z), R^{[2,2]}(z), R^{[3,2]}(z), \dots, \tag{1.55}$$

нормальні. Тоді існує правильний ланцюговий C–дріб

$$1 + \frac{a_1 z}{1} \underset{+}{} \frac{a_2 z}{1} \underset{+}{} \frac{a_2 z}{1} \underset{+}{} \cdots, \quad a_n \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.56}$$

підхідні дроби якого задовольняють умову

$$f_{2L}(z) = R^{[L,L]}(z),\ f_{2L+1}(z) = R^{[L+1,L]}(z), \qquad L \in \mathbb{N}_0. \tag{1.57}$$

(B) *Нехай ФСР* L_0*, який визначений* (1.54)*, відповідає правильний ланцюговий C–дріб* (1.56)*. Тоді для кожної апроксимації Паде із* (1.55) *ФСР* L_0 *мають місце рівності* (1.57) *і* $\mathbf{deg}\ P^{[L,M]}(z) = L$, $\mathbf{deg}\ Q^{[L,M]}(z) = M$.

1.9. Диференціальне рівняння Ріккаті. Метод Лагранжа

Аналітична теорія диференціальних рівнянь [21] вивчає диференціальні рівняння, розв'язки (інтеграли) яких є аналітичними функціями комплексної змінної. Зокрема, вивчаються інтеграли таких диференціальних рівнянь в яких невідома функція $w = w(z)$ та її похідні входять алгебрично в диференціальне рівняння, а коефіцієнти цієї алгебричної функції є аналітичними функціями незалежної змінної. У випадку диференціального рівняння першого порядку рівняння має вигляд $P(w', w, z) = 0$, де P — многочлен відносно w' та w.

Означення 1.32 ([21, с. 45]). Особливі точки інтегралів диференціального рівняння, положення яких не залежить від початкових даних, які визначають інтеграл, називаються нерухомими особливими точками. Особливі точки, положення яких залежить від початкових даних, називаються рухомими особливими точками.

Теорема 1.34 (Пенлеве, [21, с. 54]). *Диференціальне рівняння першого порядку, яке є алгебричним відносно невідомої функції та її похідної, не може мати в інтегралах рухомі трансцендентні та суттєво особливі точки.*

Зауваження 1.5. Означення трансцендентної особливої точки та суттєво особливої точки можна знайти в літературі [22], [43].

Диференціальне рівняння Ріккаті комплексної змінної має вигляд

$$w'(z) = A(z) + B(z)w(z) + C(z)w^2(z), \tag{1.58}$$

де $A(z), B(z), C(z)$— деякі функції від z.

З теореми Пенлеве випливає, що диференціальне рівняння Ріккаті має лише нерухомі критичні точки. Критичними точками диференціального рівняння Ріккаті можуть бути лише полюси або алгебричні критичні точки. Відомо, що диференціальне рівняння (1.58) інваріантне відносно довільного дробово–лінійного перетворення [61, с. 88].

Найпершим підходом до розвинення функцій у ланцюговий дріб був метод Лагранжа відшукання розв'язку диференціального рівняння Ріккаті, який, спираючись на теорему Пенлеве, можна застосувати і до рівняння комплексної змінної [60, с. 294–295], [116, с. 81–82], [152, с. 76–77], [153].

Нехай задано диференціальне рівняння Ріккаті вигляду

$$(\alpha + \alpha' z)zw' + (\beta + \beta' z)w + \gamma w^2 = \delta z, \tag{1.59}$$

де $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \delta$ є деякі комплексні сталі. Згідно із методом Лагранжа розв'язок диференціального рівняння (1.59) задається у вигляді ланцюгового дробу

$$w(z)=\cfrac{\delta z}{\alpha+\beta+}\,\cfrac{[(\alpha+\beta)(\alpha'+\beta')+\gamma\delta]z}{2\alpha+\beta\qquad+}\,\cfrac{(\alpha\alpha'-\alpha\beta'+\alpha'\beta+\gamma\delta)z}{3\alpha+\beta\qquad+}$$

$$+\cfrac{[(2\alpha+\beta)(2\alpha'+\beta')+\gamma\delta]z}{4\alpha+\beta\qquad+}\,\cfrac{(4\alpha\alpha'-2\alpha\beta'+2\alpha'\beta+\gamma\delta)z}{5\alpha+\beta\qquad+\cdots+}$$

$$+\cfrac{[(n\alpha+\beta)(n\alpha'+\beta')+\gamma\delta]z}{2n\alpha+\beta\qquad+}\,\cfrac{(n^2\alpha\alpha'-n\alpha\beta'+n\alpha'\beta+\gamma\delta)z}{(2n+1)\alpha+\beta\qquad+\cdots}. \tag{1.60}$$

Румунський математик С. Санієлевіч застосував метод Лагранжа до більш загального диференціального рівняння [178]:

$$(1+\eta'z)(1+\eta z)zw'+(\beta+\beta'z-\eta\eta'z^2)w+\gamma w^2=\delta z(1+\eta z), \tag{1.61}$$

де $\eta, \eta', \beta, \beta', \gamma, \delta$ є деякі сталі. Розв'язок диференціального рівняння (1.61) також задається у вигляді ланцюгового дробу

$$\gamma w(z)=-\beta(1+\eta z)+\cfrac{[m\gamma-\beta(1-\nu)](\eta'-\eta)z}{1-\beta\qquad+}\,\cfrac{(m\gamma-\beta+\nu)(\eta'-\eta)z}{(2-\beta)(1+\eta z)\qquad+}$$

$$+\cfrac{[m\gamma+(1-\beta)(2-\nu)](\eta'-\eta)z}{3-\beta\qquad+}\,\cfrac{[m\gamma+2(1-\beta+\nu)](\eta'-\eta)z}{(4-\beta)(1+\eta z)\qquad+}$$

$$+\cdots+\cfrac{[m\gamma+n(n-1-\beta+\nu)](\eta'-\eta)z}{(2n-\beta)(1+\eta z)\qquad+}$$

$$+\cfrac{[m\gamma+(n-\beta)(n+1-\nu)](\eta'-\eta)z}{2n+1-\beta\qquad+\cdots}, \tag{1.62}$$

де $m=\delta/(\eta'-\eta)$, $\nu=(\beta'+\eta'-\beta\eta)/(\eta'-\eta)$, $\eta'\neq\eta$.

Якщо в диференціальному рівнянні (1.61) замінимо z на z^k, то отримаємо диференціальне рівняння

$$(1+\eta'z^k)(1+\eta z^k)\frac{zw'}{k}+(\beta+\beta'z^k-\eta\eta'z^{2k})w+\gamma w^2=\delta z^k(1+\eta z^k), \tag{1.63}$$

розв'язок якого подається у вигляді

$$\gamma w(z)=-\beta(1+\eta z^k)+\cfrac{[m\gamma-\beta(1-\nu)](\eta'-\eta)z^k}{1-\beta\qquad+}$$

$$+\frac{(m\gamma-\beta+\nu)(\eta'-\eta)z^k}{(2-\beta)(1+\eta z^k)}+\frac{[m\gamma+(1-\beta)(2-\nu)](\eta'-\eta)z^k}{3-\beta}+$$

$$+\frac{[m\gamma+2(1-\beta+\nu)](\eta'-\eta)z^k}{(4-\beta)(1+\eta z^k)}+\dots+\frac{[m\gamma+n(n-1-\beta+\nu)](\eta'-\eta)z^k}{(2n-\beta)(1+\eta z^k)}+$$

$$+\frac{[m\gamma+(n-\beta)(n+1-\nu)](\eta'-\eta)z^k}{2n+1-\beta}+\cdots. \tag{1.64}$$

Таким чином, якщо функція $f(z)$ в деякій області $G \in \mathbb{C}$ задовольняє диференціальне рівняння Ріккаті або (1.59), або (1.61), або (1.63), то розвинення цієї функції в ланцюговий дріб буде мати відповідно вигляд або (1.60), або (1.62), або (1.64).

Майже всі диференціальні рівняння, які використовувалися для розвинення функцій у ланцюговий дріб Лагранжем, Ойлером, Ламбертом та іншими математиками, є частинними випадками основного диференціального рівняння (1.59).

Використання ланцюгових дробів до відшукання розв'язків диференціального рівняння Ріккаті вигляду $xA(x)y' = xB(x) + C(x)y + D(x)y^2$, де A, B, C є многочлени, розглянуто в роботі [183]. Результати цієї роботи та роботи [161] узагальнені в статті [130].

1.10. Гіпергеометричний ряд та ланцюгові дроби Гаусса

Диференціальне рівняння $z(1-z)w'' + (-c + (1+a+b)z)w' + abw = 0$, яке називається гіпергеометричним диференціальним рівнянням, диференціальним рівнянням Гаусса, має розв'язком гіпергеометричний ряд

$$w(z) = F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\,n!} z^n, \tag{1.65}$$

де $a, b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-$,$(a)_0 = 1, (a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1)$— символ Похгаммера. Степеневий ряд (1.65) збігається в крузі $|z| < 1$.

Теорема 1.35 ([25, с. 199]). *Нехай* $\{d_n\}$ *— послідовність комплексних чисел, елементи якої визначаються наступним чином*

$$d_{2k-1}=\frac{-(a+k-1)(c-b+k-1)}{(c+2k-2)(c+2k-1)}, d_{2k}=\frac{-(b+k)(c-a+k)}{(c+2k-1)(c+2k)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

де a, b, c *— такі сталі, що* $d_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. *Тоді:* ***(A)*** *правильний ланцюговий* C*–дріб*

$$1+\underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}}\left(d_n z/1\right) \tag{1.66}$$

збіжний до функції $f(z)$, *яка мероморфна в області*

$$D=\{z \mid 0<\arg(z-1)<2\pi\};$$

(B) *збіжність буде рівномірна на кожній компактній підмножині з* D, *яка не містить полюсів функції* $f(z)$; ***(C)*** *функція* $f(z)$ *голоморфна в точці* $z=0$ *і* $f(0)=1$; ***(D)*** *для всіх* z, *таких, що* $|z|<1$,

$$f(z)=F(a,b;c;z)/F(a,b+1;c+1;z), \tag{1.67}$$

а, отже, $f(z)$ *є аналітичним продовженням для функції правої частини рівності* (1.67) *в площині з розрізом* D.

Ланцюговий дріб (1.66) називається ланцюговим дробом Гаусса.

Якщо замість c підставити $c-1$ і взяти $b=0$, то з теореми 1.35 випливає наступне твердження.

Наслідок 1.1 ([25, с. 200]). *Нехай* a *та* b *такі комплексні числа, що послідовність* $\{d_n\}$, *де* $d_{2k-1}=-\frac{(a+k-1)(c+k-2)}{(c+2k-3)(c+2k-2)}$, $d_{2k}=-\frac{k(c-a+k-1)}{(c+2k-2)(c+2k-1)}$, $k \in \mathbb{N}$, *не містить нульових комплексних чисел. Тоді:* ***(A)*** *для всіх* z, *що належать одиничному кругу* $|z|<1$, $F(a,1;c;z)=1\big/\big(1+\mathbf{K}(d_n/1)\big)$;
(B) *ланцюговий дріб збігається до мероморфної в області* D

Багато елементарних та спеціальних функцій можуть бути подані через гіпергеометричний ряд, звідки і отримують розвинення функцій у ланцюговий дріб [25, 45, 103, 131].

Розвинення відношення гіпергеометричних рядів в ланцюговий дріб також отримують із диференціального рівняння Ріккаті. Так в роботі [161] розв'язок рівняння $z^m w'(z) = z\,A(z) + B(z)w(z) + C(z)w^2(z)$, $m \in \mathbb{N}$, де $A(z), B(z), C(z)$ є аналітичні функції в $z = 0$ і $B(0), C(0)$ не рівні одночасно нулю, задається у вигляді ланцюгового C–дробу $\mathbf{K}(d_n z^{k_n}/1)$.

1.11. Формула Тіле

Формула Тіле є аналогом формули Тейлора в теорії ланцюгових дробів [188]. Із результатів пункту 1.4 випливає, що Т–ІЛД (1.25) може бути записаний у вигляді

$$D_n^{(T)}(z) = \rho_0 + \frac{z - z_0}{\rho_1} \; + \frac{z - z_1}{\rho_2 - \rho_0} + \frac{z - z_2}{\rho_3 - \rho_1} + \cdots + \frac{z - z_{n-1}}{\rho_n - \rho_{n-1}}.$$

Згідно із (1.31)–(1.32) обернена різниця k–го порядку $\rho_k[z_0, z_1, \ldots, z_k; f]$, $k = \overline{1, n}$, є симетричною функцією своїх аргументів $z_0, z_1, \ldots, z_n$.

Означення 1.33. Якщо існує границя (скінченне число, або нескінченність) оберненої різниці k–го порядку $\rho_k[z_0, z_1, \ldots, z_k; f]$, коли вузли $z_0, z_1, \ldots, z_k \to z_*$, де $z_* \in \mathcal{Z}$, то граничне значення називається оберненою похідною Тіле k–го порядку функції $f(z)$ в точці z_* і позначається ${}^{(k)}f(z_*)$.

Таким чином ${}^{(k)}f(z_*) = \lim\limits_{z_0, z_1, \ldots, z_k \to z_*} \rho_k[z_0, z_1, \ldots, z_k; f]$, $k \in \mathbb{N}$. Зокрема

$$ {}^{(1)}f(z_*) = {}^{\backprime}f(z_*) = \lim_{z_0, z_1 \to z_*} \frac{z_1 - z_0}{f(z_1) - f(z_2)} = \frac{1}{f'(z_*)}\,. \tag{1.68}$$

Обернені похідні Тіле вищих порядків функції обчислюють за рекурентною формулою [188, с. 138–139]

$$\begin{aligned} &{}^{(k)}f(z_*) = k\,{}^{\backprime}\big({}^{(k-1)}f(z_*)\big) + {}^{(k-2)}f(z_*), \qquad k \in \mathbb{N}_2, \\ &{}^{(0)}f(z_*) = f(z_*),\ {}^{\backprime}f(z_*) = 1/f'(z_*). \end{aligned} \tag{1.69}$$

Із (1.30) та (1.69) маємо, що

$$
\begin{aligned}
&b_0(z_*) = f(z_*), \quad b_1(z_*) = {}^{\backprime}f(z_*), \\
&b_n(z_*) = n\,{}^{\backprime}\left({}^{(n-1)}f(z_*)\right) = {}^{(n)}f(z_*) - {}^{(n-2)}f(z_*), \quad n \in \mathbb{N}_2.
\end{aligned}
\tag{1.70}
$$

Якщо зробити припущення, що функція $f(z)$ в деякому околі точки z_* має обернені похідні до n–го порядку включно, то отримуємо аналог формули Тейлора в теорії ланцюгових дробів — формулу Тіле [188]

$$
f(z) = b_0(z_*) + \frac{z - z_*}{b_1(z_*)} \underset{+}{} \frac{z - z_*}{b_2(z_*)} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{z - z_*}{b_n(z_*)} \underset{+}{} \frac{z - z_*}{R_n(z)}, \tag{1.71}
$$

де згідно із (1.22) $R_n(z) = v_{n+1}(z)$.

Якщо в деякому околі точки $z = z_*$ функція $f(z)$ має нескінченну кількість відмінних від нуля обернених похідних Тіле, то отримаємо розвинення функції у ланцюговий дріб Тіле (Т–ЛД)

$$
f(z) = b_0(z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty} \frac{z - z_*}{b_n(z_*)}. \tag{1.72}
$$

Обернені похідні Тіле володіють наступними властивостями, які безпосередньо випливають із властивостей обернених різниць [162, с. 114–115]

Нехай A, B, C, D — сталі. При $n \in \mathbb{N}_0$ мають місце формули

$$
{}^{(2n)}(Cf(z)) = C \cdot {}^{(2n)}f(z)\ , \qquad {}^{(2n+1)}(Cf(z)) = \tfrac{1}{C} \cdot {}^{(2n+1)}f(z)\ , \tag{1.73}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}^{(2n)}(f(z) + C) = {}^{(2n)}f(z) + C, \qquad {}^{(2n+1)}(f(z) + C) = {}^{(2n+1)}f(z)\ , \\
&{}^{(2n)}\!\left(\frac{1}{f(z)}\right) = \frac{1}{{}^{(2n)}f(z)}\ , \qquad {}^{(2n)}\!\left(\frac{A + Bf(z)}{C + Df(z)}\right) = \frac{A + B\,{}^{(2n)}f(z)}{C + D\,{}^{(2n)}f(z)}\ .
\end{aligned}
\tag{1.74}
$$

РОЗДІЛ 2
ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ ТІЛЕ ТА ТИПУ С–ДРОБУ

2.1. Функціональні ланцюгові дроби

Розглянемо означення та теореми, які будуть використовуватися далі.

Означення 2.1. Ланцюговий дріб

$$D(z) = b_0(z) + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(z)}{b_i(z)}, \tag{2.1}$$

де $b_0(z), a_i(z), b_i(z) \in C(\mathcal{Z})$, $a_i(z) \not\equiv 0$, $i \in \mathbb{N}$, назвемо функціональним ланцюговим дробом (ФЛД) над полем $\mathbb{C}$.

Канонічні чисельник $P_n(z)$ та знаменник $Q_n(z)$ n–го підхідного дробу

$$D_n(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = b_0(z) + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n} \frac{a_i(z)}{b_i(z)} \tag{2.2}$$

можна визначити або за формулами Валліса (1.6), або за допомогою оберненого рекурентного алгоритму (1.11).

Означення 2.2. Канонічні чисельник $P_k^{(n)}(z)$ і знаменник $Q_k^{(n)}(z)$ ланцюгового дробу вигляду

$$\frac{P_k^{(n)}(z)}{Q_k^{(n)}(z)} = b_k(z) + \mathop{\mathrm{K}}_{i=k+1}^{n} \frac{a_i(z)}{b_i(z)}$$

назвемо проміжним чисельником та проміжним знаменником k–го залишку ланцюгового дробу (2.2).

Теорема 2.1 (Формули Ойлера–Міндінґа). *Проміжний чисельник $P_k^{(n)}(z)$ та проміжний знаменник $Q_k^{(n)}(z)$ k-го залишку підхідного дробу*

(2.2) *визначаються через його елементи за допомогою формул*

$$P_k^{(n)}(z)=B_k^{[n]}(z)\Big(1+\sum_{i=k}^{n-1}X_i(z)+\sum_{i_1=k}^{n-3}X_{i_1}(z)\sum_{i_2=i_1+2}^{n-1}X_{i_2}(z)+\dots+$$

$$+\sum_{i_1=k}^{n+1-2s}X_{i_1}(z)\sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2s}X_{i_2}(z)\cdots\sum_{i_s=i_{s-1}+2}^{n-1}X_{i_s}(z)\Big),\quad s=\left[\tfrac{n+1-k}{2}\right], \tag{2.3a}$$

$$Q_k^{(n)}(z)=B_{k+1}^{[n]}(z)\Big(1+\sum_{i=k+1}^{n-1}X_i(z)+\sum_{i_1=k+1}^{n-3}X_{i_1}(z)\sum_{i_2=i_1+2}^{n-1}X_{i_2}(z)+\dots+$$

$$+\sum_{i_1=k+1}^{n+1-2t}X_{i_1}(z)\sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2t}X_{i_2}(z)\cdots\sum_{i_t=i_{t-1}+2}^{n-1}X_{i_t}(z)\Big),\quad t=\left[\tfrac{n-k}{2}\right],$$

де

$$X_i(z)=\frac{a_{i+1}(z)}{b_i(z)b_{i+1}(z)},\ i=\overline{k,n-1},\quad B_k^{[n]}(z)=\prod_{i=k}^{n}b_i(z),\ k=\overline{0,n}. \tag{2.4}$$

Зауваження 2.1. В книзі О.Перрона [174, с. 5–7] формули Ойлера–Міндінґа доведено за допомогою формул Валісса (1.6). В роботі [70] (див. також [92, с. 55–57]) наведено ще одне доведення цих формул за допомогою оберненого рекурентного алгоритма.

Із теореми 2.1 випливає, що

$$P_n(z)=B_0^{[n]}(z)\Bigg(1+\sum_{i=0}^{n-1}X_i(z)+\sum_{i_1=0}^{n-3}X_{i_1}(z)\sum_{i_2=i_1+2}^{n-1}X_{i_2}(z)+\dots+$$

$$+\sum_{i_1=0}^{n+1-2r}X_{i_1}(z)\sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2r}X_{i_2}(z)\cdots\sum_{i_r=i_{r-1}+2}^{n-1}X_{i_r}(z)\Bigg),\quad r=\left[\tfrac{n+1}{2}\right], \tag{2.5}$$

$$Q_n(z)=B_1^{[n]}(z)\Bigg(1+\sum_{i=1}^{n-1}X_i(z)+\sum_{i_1=1}^{n-3}X_{i_1}(z)\sum_{i_2=i_1+2}^{n-1}X_{i_2}(z)+\dots+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{n+1-2m}X_{i_1}(z)\sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2m}X_{i_2}(z)\cdots\sum_{i_m=i_{m-1}+2}^{n-1}X_{i_m}(z)\Bigg),\quad m=\left[\tfrac{n}{2}\right]. \tag{2.6}$$

Перетворимо (2.5)–(2.6). Для цього зробимо позначення

$$R_{k,s}^{[n]}(z) = \sum_{i_1=s}^{n+1-2k} X_{i_1}(z) \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2k} X_{i_2}(z) \cdots \sum_{i_k=i_{k-1}+2}^{n-1} X_{i_k}(z), \qquad (2.7)$$

де $k = \overline{1,s}, s \in \{m, r\}$. Легко бачити, що $R_{k,s}^{[n]}(z)$ задовольняє рекурентне співвідношення

$$R_{k,s}^{[n]}(z) = \sum_{i=s}^{n+1-2k} X_i(z)\, R_{k-1,i+2}^{[n]}(z), \quad R_{0,s}^{[n]}(z) = 1. \qquad (2.8)$$

Тоді (2.5) та (2.6) запишуться у вигляді

$$P_n(z) = B_0^{[n]}(z) \sum_{i=0}^{r} R_{i,0}^{[n]}(z), \quad Q_n(z) = B_1^{[n]}(z) \sum_{i=0}^{m} R_{i,1}^{[n]}(z). \qquad (2.9)$$

Лема 2.1. *Якщо частинні чисельники $a_i(z)$ та знаменники $b_i(z)$ підхідного функціонального ланцюгового дробу (2.2) задовольняють нерівності*

$$0 < |a_i(z)| \leqslant \delta, \qquad 0 < \gamma \leqslant |b_i(z)|, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (2.10)$$

для всіх значень $z \in G \subset \mathbb{C}$, то

$$\left|R_{k,s}^{[n]}(z)\right| \leqslant \omega^k\, C_{n+1-s-k}^{k}, \quad \omega = \delta/\gamma^2, \qquad k = \overline{1,s}. \qquad (2.11)$$

Доведення. Доведемо лему за індукцією. З умов леми для $k = 1$ маємо

$$\left|R_{1,s}^{[n]}(z)\right| \leqslant \sum_{i=s}^{n-1} |X_i(z)| < \omega\, C_{n-s}^{1}.$$

Отже нерівність (2.11) виконується. Зробивши припущення, що нерівність виконується для $k = t-1$. З (2.8) та умов леми для $k = t$ маємо, що

$$\left|R_{t,s}^{[n]}(z)\right| \leqslant \sum_{i=s}^{n+1-2t} |X_i(z)| \left|R_{t-1,i+2}^{[n]}(z)\right| < \sum_{i=s}^{n+1-2t} \omega\, \omega^{t-1}\, C_{n-i-t}^{t-1} =$$

$$= \omega^t \sum_{i=s}^{n+1-2t} C_{n-i-t}^{t-1} = \omega^t\, C_{n-s-t+1}^{t}.$$

Нерівність (2.11) виконується і в цьому випадку, а отже воно виконується для довільного k. $\square$

Теорема 2.2. *Якщо частинні чисельники та знаменники підхідного дробу* (2.2) *для довільних значень* $z \in G$ *задовольняють умови* (2.10), *то*

$$
\begin{gathered}
|Q_n(z)| < \left|B_1^{[n]}(z)\right| \kappa_{n+1}(\omega), \\
\kappa_n(\omega) = \frac{(1+\sqrt{1+4\omega})^n - (1-\sqrt{1+4\omega})^n}{2^n\sqrt{1+4\omega}}.
\end{gathered} \tag{2.12}
$$

Доведення. Із співвідношення (2.9) та леми 2.1 випливає, що

$$
|Q_n(z)| \leqslant \left|B_1^{[n]}(z)\right| \sum_{i=0}^{[n/2]} \left|R_{i,1}^{[n]}(z)\right| \leqslant \left|B_1^{[n]}(z)\right| \sum_{i=0}^{[n/2]} \omega^i\, C_{n-i}^i.
$$

Скориставшись тотожністю із комбінаторики [99, с. 81], отримаємо твердження теореми. □

Теорема 2.3. *Якщо при виконанні умов* (2.10) *леми 2.1 має місце співвідношення* $\gamma \geqslant \delta+1$, *то знаменник* $Q_n(z)$ *підхідного дробу* (2.2) *задовольняє нерівність*

$$
|Q_n(z)| \geqslant \begin{cases} \dfrac{\delta^{n+1}-1}{\delta-1}, & \text{для} \;\; \delta \neq 1, \\ \\ n+1, & \text{для} \;\; \delta = 1. \end{cases} \tag{2.13}
$$

Доведення. Із умови теореми випливає, що $|Q_1(z)| = |b_1(z)| \geqslant \delta + 1$. Далі $|Q_2(z)| = |b_2(z)b_1(z) + a_2(z)| \geqslant |Q_1(z)||b_2(z)| - |a_2(z)| \geqslant |Q_1(z)|(1+ +\delta)-\delta = |Q_1(z)|+\delta(|Q_1(z)|-1) \geqslant |Q_1(z)|+\delta^2$, звідки $|Q_2(z)|-|Q_1(z)| \geqslant \delta^2$. З формул Валліса (1.6) та умов теореми випливає, що $|Q_s(z)| \geqslant |Q_{s-1}(z)|+ +\delta(|Q_{s-1}(z)| - |Q_{s-2}(z)|)$. За індукцією маємо, що $|Q_s(z)| - |Q_{s-1}(z)| \geqslant \delta^s$. Тоді

$$
|Q_n(z)| = \sum_{i=2}^{n}(|Q_i(z)| - |Q_{i-1}(z)|) + |Q_1(z)| \geqslant \sum_{i=0}^{n} \delta^i = \begin{cases} \dfrac{\delta^{n+1}-1}{\delta-1}, \; \delta \neq 1, \\ \\ n+1, \qquad \delta = 1. \end{cases}
$$

Нерівність (2.13) доведено. □

Теорема 2.4. ***(A)*** *Якщо частинні чисельники $a_i(z), i = \overline{2,n}$, скінченного ФЛД*

$$D_n(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = a_0(z) + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n} \frac{a_i(z)}{1} \tag{2.14}$$

для всіх $z \in G$ задовольняють умову типу Пейдона–Уолла

$$|a_i(z)| \leqslant t(1-t), \qquad \text{де} \quad 0 < t \leqslant \tfrac{1}{2}, \tag{2.15}$$

то канонічний знаменник $Q_n(z)$ ФЛД (2.14) задовольняє нерівність

$$|Q_n(z)| \geqslant \Omega_n(t), \tag{2.16}$$

де

$$\Omega_n(t) = \begin{cases} \dfrac{(1-t)^{n+2} - t^{n+2}}{(1-t)^{n+1} - t^{n+1}}, & \text{якщо} \quad 0 < t < \tfrac{1}{2}, \\ \dfrac{n+2}{2(n+1)}, & \text{якщо} \quad t = \tfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.17}$$

(B) *Якщо для всіх $z \in G$ частинні чисельники $a_i, i = \overline{2,n}$, ФЛД (2.14) задовольняють умову (2.15) і крім того $|a_1(z)/a_0(z)| \leqslant t(1-t)$, то канонічний чисельник $P_n(z)$ задовольняє нерівність*

$$|P_n(z)| \geqslant |a_0(z)|\, \Omega_{n+1}(t). \tag{2.18}$$

Доведення. Для доведення теореми, поряд із ФЛД (2.14) розглянемо скінченний ланцюговий дріб

$$f_n = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n} \frac{-\,t(1-t)}{1}\,. \tag{2.19}$$

Нехай $f_k^{(n)}, A_k^{(n)}, B_k^{(n)}$, відповідно, k–й залишок, частинні чисельник та знаменник k–го залишку n–го підхідного дробу ланцюгового дробу (2.19)

$$f_k^{(n)} = \frac{A_k^{(n)}}{B_k^{(n)}} = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{i=k+1}^{n} \frac{-\,t(1-t)}{1}, \qquad k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0. \tag{2.20}$$

Легко бачити, що мають місце рекурентні співвідношення

$$
\begin{aligned}
&f_k^{(n)} = 1 + \frac{-\,t(1-t)}{f_{k+1}^{(n)}}, \qquad B_k^{(n)} = B_{k+1}^{(n)} - t(1-t)B_{k+2}^{(n)},\\
&A_k^{(n)} = B_{k-1}^{(n)}, \qquad\qquad k = n-2, n-3, \ldots, 1, 0,\\
&f_n^{(n)} = 1,\ A_n^{(n)} = 1,\ B_n^{(n)} = 1,\ A_{n-1}^{(n)} = 1 - t(1-t),\ B_{n-1}^{(n)} = 1.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Доведемо, що

$$
B_k^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-k+1} t^i (1-t)^{n-k+1-i}\ . \tag{2.22}
$$

Коли $k = n, n-1$, то маємо $B_n^{(n)} = 1 = (1-t) + t, \quad B_{n-1}^{(n)} = 1 - t(1-t) = = (1-t)^2 + (1-t)t + t^2$. Зробимо припущення, що (2.22) має місце, коли $k = n, n-1, \ldots, s+1$. Тоді, для $k = s$ із (2.21) випливає, що

$$
B_s^{(n)} = B_{s+1}^{(n)} - t(1-t)B_{s+2}^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-s} t^i(1-t)^{n-s-i} -
$$

$$
-t(1-t)\sum_{i=0}^{n-s-1} t^i(1-t)^{n-s-1-i} = \sum_{i=0}^{n-s+1} t^i(1-t)^{n-s+1-i}\ .
$$

Таким чином, формула (2.22) виконується для довільному k.

Якщо $t = \frac{1}{2}$, то з (2.22) маємо, що

$$
B_k^{(n)} = \frac{n-k+2}{2^{n-k+1}}. \tag{2.23}
$$

Нехай $0 < t < \frac{1}{2}$. В (2.22) зробимо заміну $t = 1/\theta$, де $\theta > 2$. Тоді

$$
B_k^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-k+1} t^i(1-t)^{n-k+1-i} = \sum_{i=0}^{n-k+1} \frac{1}{\theta^i}\,\frac{(\theta-1)^{n-k+1-i}}{\theta^{n-k+1-i}} =
$$

$$
= \frac{1}{\theta^{n-k+1}} \sum_{i=0}^{n-k+1} (\theta-1)^{n-k+1-i} = \frac{1}{\theta^{n-k+1}}\,\frac{(\theta-1)^{n-k+2}-1}{\theta-2}\ .
$$

Повернувшись до t маємо, що

$$
B_k^{(n)} = \frac{(1-t)^{n-k+2} - t^{n-k+2}}{1-2t}\ . \tag{2.24}
$$

Через $\mathcal{D}_k^{(n)}(z)$ позначимо k–й залишок ланцюгового дробу (2.14)

$$\mathcal{D}_k^{(n)}(z) = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{i=k+1}^{n} \frac{a_i(z)}{1}, \qquad k = n-1, n-2, \ldots, 0, \qquad \mathcal{D}_n^{(n)}(z) = 1.$$

Має місце рекурентне співвідношення

$$\mathcal{D}_k^{(n)}(z) = 1 + \frac{a_{k+1}(z)}{\mathcal{D}_{k+1}^{(n)}(z)}, \qquad k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0. \tag{2.25}$$

Доведемо наступну нерівність

$$|\mathcal{D}_k^{(n)}(z)| \geqslant f_k^{(n)} \ . \tag{2.26}$$

При $k = n, n-1$ із (2.15) випливає, що

$$|\mathcal{D}_n^{(n)}(z)| = 1 = f_n^{(n)}, \quad |\mathcal{D}_{n-1}^{(n)}(z)| \geqslant \left|1 - \frac{|a_n(z)|}{1}\right| \geqslant 1 - \frac{t(1-t)}{1} = f_{n-1}^{(n)}.$$

Припустимо, що нерівність (2.26) виконується для $k = s+1$. Тоді у випадку, коли $k = s$ із рекурентного співвідношення (2.25) випливає:

$$|\mathcal{D}_s^{(n)}(z)| = \left|1 + \frac{a_s(z)}{\mathcal{D}_{s+1}^{(n)}(z)}\right| \geqslant \left|1 - \frac{|a_n(z)|}{|\mathcal{D}_{s+1}^{(n)}(z)|}\right| \geqslant 1 - \frac{t(1-t)}{f_{s+1}^{(n)}} = f_s^{(n)}.$$

Отже, нерівність (2.26) виконується для довільному k.

Так як

$$D_n(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = a_0(z)\left(1 + \frac{a_1(z)/a_0(z)}{\mathcal{D}_1^{(n)}(z)}\right),$$

то $|Q_n(z)| \geqslant f_1^{(n)}, |P_n(z)| \geqslant |a_0(z)|\, f_0^{(n)}$. Враховуючи (2.20), (2.21), (2.23) та (2.24) отримуємо (2.16) та (2.18). $\square$

Умова $|a_n| \leqslant t(1-t)$, де $0 < t \leqslant \frac{1}{2}, a_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, досліджувалася в роботі Дж. Ф. Пейдона та Г. С. Уолла [173] для ланцюгових дробів вигляд $\big(1 + \mathbf{K}(a_n/1)\big)^{-1}$. При $t = \frac{1}{2}$ вказана умова еквівалентна умові Ворпіцького (1.12). Аналогічна твердження для гіллястих ланцюгових дробів доведено в монографії Д. І. Боднара [11, с. 93,теорема 3.14].

2.2. Залишковий член інтерполяційного ланцюгового дробу дійсної змінної

Із множини скінченних функціональних ланцюгових дробів вигляду (2.2) виокремимо клас інтерполяційних функціональних ланцюгових дробів (ІФЛД), тобто таких ланцюгових дробів, які в точках множини (1.16) задовольняють інтерполяційну умову

$$f(z_i) = D_l(z_i) = b_0(z_i) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{l} \frac{a_k(z_i)}{b_k(z_i)}, \quad i = \overline{0,n}, \quad l = l(n). \tag{2.27}$$

Встановимо формулу залишкового члена ІФЛД у випадку, коли $f(x)$ функція дійсної змінної. Нехай $f(x)$ задана своїми значеннями на множині інтерполяційних вузлів

$$X = \{x_i \ : \ x_i \in \mathcal{R} \subset \mathbb{R}, x_i \neq x_j, i \neq j, \ i,j = \overline{0,n}\}, \tag{2.28}$$

та наближається ланцюговим дробом вигляду

$$D_l(x) = \frac{P_l(x)}{Q_l(x)} = b_0(x) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{l} \frac{a_k(x)}{b_k(x)}. \tag{2.29}$$

В точках множини X виконується інтерполяційна умова

$$D_l(x_i) = f(x_i), \qquad i = \overline{0,n}. \tag{2.30}$$

Теорема 2.5. *Нехай функція $f(x)$ визначена на компакті $\mathcal{R}$ і за значеннями в точках множини X інтерполюється ІФЛД (2.29), частинні чисельники $a_i(x)$ та знаменники $b_i(x)$ якого є многочлени від змінної x і виконуються наступні умови:* ***(A)*** *функція $f(x) = f_1(x)/\omega_m(x)$, де $\omega_m(x) = \prod_{s=1}^{p}(x-\mu_s)^{k_s}, \sum_{s=1}^{p} k_s = m, \mu_s$— точки розриву 2–го роду функції $f(x)$ на $\mathcal{R}$, а функція $f_1(x) \in \mathbf{C}^{(n)}(\mathcal{R})$ і має похідну $(n+1)$–го порядку;* ***(B)*** *степінь многочлена канонічного чисельника $P_l(x)$ задовольняє нерівність $\mathbf{deg}\,\big(P_l(x) \times \omega_m(x)\big) \leqslant n$;* ***(C)*** *вузли інтерполяції не збігаються з* *полюсами функції, тобто* $\mu_i \neq x_j, i = \overline{1,p}, j = \overline{0,n}$, *де* $x_j \in X$. *Тоді для довільного значення* $x \in \Gamma = \mathcal{R} \backslash \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p\}$ *існує така точка* $\xi \in \mathbf{Int}\, \mathcal{R}$, *що*

$$f(x) - D_l(x) = \frac{\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)}{(n+1)!\, Q_l(x)\, \omega_m(x)} \frac{\mathrm{d}^{n+1}(f_1(x) Q_l(x))}{\mathrm{d}\, x^{n+1}}\bigg|_{x=\xi}. \tag{2.31}$$

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію

$$G(x) = f_1(x)\, Q_l(x) - \omega_m(x)\, P_l(x) - \lambda(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n),$$

де λ є деякий параметр. Згідно із першою умовою теореми функція $G(x)$ має неперервні похідні до n–го порядку включно і існує похідна $(n+1)$–го порядку. В силу (2.30) $G(x_i) = 0,\ i = \overline{0,n}$. Параметр λ визначимо таким чином, щоб функція $G(x)$ була рівна нулеві в деякій точці $x^* \in \Gamma$. Виберемо λ наступним чином $\lambda = \frac{f_1(x^*)\, Q_l(x^*) - \omega_m(x^*)\, P_l(x^*)}{(x^* - x_0)(x^* - x_1) \cdots (x^* - x_n)}$. Функція $G(x)$ перетворюється в нуль у $(n+2)$–х точках $x_0, x_1, \ldots, x_n, x^*$, де $x^* \in \Gamma$, а отже, згідно із узагальненою теоремою Ролля [4, с. 223], знайдеться така точка $\xi \in \mathbf{Int}\, \mathcal{R}$, що $G^{(n+1)}(\xi) = 0$. Так як за припущенням теореми $\mathbf{deg}\ (P_l(x)\, \omega_m(x)) \leqslant n$, то маємо

$$G^{(n+1)}(\xi) = \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}\, x^{n+1}} [f_1(\xi)\, Q_l(\xi)] - \lambda\, (n+1)! = 0.$$

Отже

$$G(x^*) = f_1(x^*) Q_l(x^*) - \omega_m(x^*) P_l(x^*) - \frac{\prod_{k=0}^{n}(x^* - x_k)}{(n+1)!} \frac{\mathrm{d}^{n+1}\, (f_1(\xi)\, Q_l(\xi))}{\mathrm{d}\, x^{n+1}} = 0.$$

Поділимо останню рівність на $Q_l(x^*)\, \omega_m(x^*)$. В силу довільності x^*, отримуємо співвідношення (2.31). □

Зауваження 2.2. За допомогою теореми 2.5 встановлюються оцінки залишкових членів для цілого класу ІФЛД в яких частинні чисельники та знаменники многочлени [92, с. 65–68].

2.3. Інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле

Розглянемо Т–ІЛД (1.25). Вкажемо ще один спосіб визначення коефіцієнтів Т–ІЛД. Оскільки із інтерполяційної умови випливає рівність

$$w_m = D_n^{(T)}(z_m) = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{m} \frac{z_m - z_{k-1}}{b_k}, \qquad m = \overline{0, n}, \tag{2.32}$$

то для $m = \overline{0,3}$ маємо формули для визначення коефіцієнтів b_0, b_1, b_2, b_3:

$$b_0 = w_0,\ b_1 = \frac{z_1 - z_0}{w_1 - w_0},\ b_2 = \frac{z_2 - z_1}{\frac{z_2 - z_0}{w_2 - w_0} - \frac{z_1 - z_0}{w_1 - w_0}},\ b_3 = \frac{z_3 - z_2}{\frac{z_3 - z_1}{\frac{z_3 - z_0}{w_3 - w_0} - \frac{z_1 - z_0}{w_1 - w_0}} - \frac{z_2 - z_1}{\frac{z_2 - z_0}{w_2 - w_0} - \frac{z_1 - z_0}{w_1 - w_0}}}.$$

Формули для коефіцієнтів b_2 та b_3 можна переписати наступним чином

$$b_2 = \frac{z_2 - z_1}{-b_1} \underset{+}{} \frac{z_2 - z_0}{w_2 - b_0}, \quad b_3 = \frac{z_3 - z_2}{-b_2} \underset{+}{} \frac{z_3 - z_1}{-b_1} \underset{+}{} \frac{z_3 - z_0}{w_3 - b_0}.$$

Теорема 2.6. *Коефіцієнти Т–ІЛД* (1.25) *визначаються через значення функції $f(z)$ в інтерполяційних вузлах $\mathbf{Z}$ за допомогою рекурентного співвідношення у вигляді ланцюгового дробу*

$$b_0 = w_0,\ b_m = \frac{z_m - z_{m-1}}{-b_{m-1}} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{z_m - z_1}{-b_1} \underset{+}{} \frac{z_m - z_0}{w_m - b_0}, \quad m = \overline{1, n}. \tag{2.33}$$

Доведення. Доведемо (2.33) за індукцією. Коли $m = 2, 3$, то (2.33) виконується. Припустимо, що формула (2.33) вірна для $m = j - 1$. Тоді при $m = j$ співвідношення (2.32) набуває вигляду

$$w_j = b_0 + \frac{z_j - z_0}{b_1 + \mathop{\mathbf{K}}_{k=2}^{j}((z_j - z_{k-1})/b_k)}. \tag{2.34}$$

Зробимо позначення $S = b_1 + \mathbf{K}_{k=2}^{j}((z_j - z_{k-1})/b_k)$. Співвідношення (2.34) запишеться у вигляді $w_j = b_0 + (z_j - z_0)/S$. Звідси

$$S = \frac{z_j - z_0}{w_j - b_0}. \tag{2.35}$$

Ланцюговий дріб $D_{j-1}^{(T)}(z) = b_1 + \mathbf{K}_{k=2}^{j}((z - z_{k-1})/b_k)$ буде Т–ІЛД, який побудований за значеннями функції в інтерполяційних вузлах $z_1, z_2, \ldots, z_j$ і за припущенням індукції його коефіцієнти визначаються за формулою (2.33). Зокрема

$$b_j = \frac{z_j - z_{j-1}}{-b_{j-1}} + \cdots + \frac{z_j - z_2}{-b_2} + \frac{z_j - z_1}{S - b_1}. \tag{2.36}$$

Підставивши (2.35) в (2.36) отримаємо

$$b_j = \frac{z_j - z_{j-1}}{-b_{j-1}} + \cdots + \frac{z_j - z_1}{-b_1} + \frac{z_j - z_0}{w_j - b_0}.$$

Отже, формула (2.33) вірна всіх $m = \overline{1, n}$. □

Вперше формула (2.33) без обґрунтування була наведена в роботі В. Семашко, Х. Й. Кучмінської [151].

Легко бачити, що Т–ІЛД (1.25) є ФЛД з частинними чисельниками $a_k(z) = z - z_{k-1}$ та знаменниками $b_k(z) = b_k$. Чисельник $P_n^{(T)}(z)$ та знаменник $Q_n^{(T)}(z)$ ланцюгового дробу (1.25) можуть бути подані за допомогою формул Ойлера–Міндінґа (2.3), де $X_k(z) = (z - z_k)/(b_k\, b_{k+1}), k = \overline{0, n-1}$.

Теорема 2.7. ***(A)*** *Нехай для функції $f(z)$, яка визначена на компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ і задана значеннями на множині $\mathbf{Z}$, побудований Т–ІЛД (1.25), коефіцієнти якого задовольняють умову типу Слєшинського–Прінґсгейма*

$$|b_k| \geqslant \beta \geqslant d_{\mathcal{Z}} + 1, \ \text{де}\ d_{\mathcal{Z}} \neq 1, \ d_{\mathcal{Z}} = \mathbf{diam}\, \mathcal{Z}, \quad k = \overline{1, n}. \tag{2.37}$$

(B) *Нехай існує підмножина $\mathscr{Z} \subset \mathcal{Z} \backslash \mathbf{Z}$, що в кожній точці $z_* \in \mathscr{Z}$ частинний знаменник $v_{n+1}(z_*)$ ланцюгового дробу (1.23) задовольняє нерівність*

$$|v_{n+1}(z_*)| \geqslant \beta \geqslant d_{\mathcal{Z}} + 1. \tag{2.38}$$

Тоді

$$\frac{\min_{z_* \in \mathscr{Z}} \prod_{i=0}^{n} |z_* - z_i|}{\left|B_1^{[n]}\right|^2 b_{n+1}^*\, \kappa_{n+2}(\omega)\, \kappa_{n+1}(\omega)} \leqslant \max_{z_* \in \mathscr{Z}} |f(z_*) - D_n^{(T)}(z_*)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(d_{\mathcal{Z}}-1)^2 \max_{z_*\in\mathscr{Z}} \prod_{i=0}^{n} |z_*-z_i|}{((d_{\mathcal{Z}})^{n+2}-1)\,((d_{\mathcal{Z}})^{n+1}-1)}, \tag{2.39}$$

де $b_{n+1}^* = \min_{z_*\in\mathscr{Z}} |v_{n+1}(z_*)|$, $\omega = d_{\mathcal{Z}}/\beta^2$, *величини* $B_1^{[n]}$ *та* $\kappa_n(\omega)$ *визначені, відповідно, в* (2.4) *та* (2.12).

Доведення. За допомогою прямого (1.6) або оберненого (1.11) рекурентних алгоритмів можна поставити у відповідність ланцюговому дробу (1.23) відношення двох многочленів, тобто

$$f(z) = \frac{P_{n+1}^{(*)}(z)}{Q_{n+1}^{(*)}(z)} = b_0 + \frac{z-z_0}{b_1} \underset{+}{} \cdots + \frac{z-z_{n-1}}{b_n} \underset{+}{} \frac{z-z_n}{v_{n+1}(z)}. \tag{2.40}$$

Нехай коефіцієнти b_i, $i=\overline{0,n}$, ланцюгового дробу (2.40) визначаються з інтерполяційної умови, тобто збігаються із коефіцієнтами Т–ІЛД (1.25). Із формули (1.10) випливає, що

$$f(z) - D_n^{(T)}(z) = \frac{P_{n+1}^{(*)}(z)}{Q_{n+1}^{(*)}(z)} - \frac{P_n^{(T)}(z)}{Q_n^{(T)}(z)} = (-1)^n \frac{(z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_n)}{Q_{n+1}^{(*)}(z)\; Q_n^{(T)}(z)}.$$

Оцінимо цю різницю за абсолютним значенням у точці $z_* \in \mathscr{Z}$,

$$\left| f(z_*) - D_n^{(T)}(z_*) \right| = \frac{|z_*-z_0|\,|z_*-z_1|\cdots|z_*-z_n|}{|Q_{n+1}^{(*)}(z_*)|\,|Q_n^{(T)}(z_*)|}.$$

Із теорем 2.2 та 2.3 випливає, що $\frac{(d_{\mathcal{Z}})^{n+1}-1}{d_{\mathcal{Z}}-1} \leqslant \left|Q_n^{(T)}(z_*)\right| \leqslant \left|B_1^{[n]}\right| \kappa_{n+1}(\omega)$. Із нерівності (2.38) та тих же теорем отримуємо $\frac{(d_{\mathcal{Z}})^{n+2}-1}{d_{\mathcal{Z}}-1} \leqslant \left|Q_{n+1}^{(*)}(z_*)\right| \leqslant$ $\leqslant \left|B_1^{[n]}\right| \, |b_{n+1}(z_*)|\, \kappa_{n+2}(\omega)$. Тоді нарешті маємо (2.39). □

Зауваження 2.3. Для $d_{\mathcal{Z}} = 1$ нерівність (2.39) набуде вигляду

$$\frac{\min\limits_{z_*\in\mathscr{Z}} \prod\limits_{i=0}^{n} |z_*-z_i|}{|B_1^{[n]}|\, b_{n+1}^*\, \kappa_{n+2}(\omega)\, \kappa_{n+1}(\omega)} \leqslant \max_{z_*\in\mathscr{Z}} |f(z_*) - D_n^{(T)}(z_*)| \leqslant \frac{\max\limits_{z_*\in\mathscr{Z}} \prod\limits_{i=0}^{n} |z_*-z_i|}{(n+1)\,(n+2)}.$$

Зауваження 2.4. В підрозділі додатку Б.1 (стор. 337) наведені числові приклади інтерполяції функцій комплексної змінної, які ілюструють теорему 2.7.

Розглянемо питання збіжності інтерполяційного процесу Тіле. Нехай задана нескінченна трикутна матриця вузлів $\mathcal{I}$, яка визначена в (1.20)

Теорема 2.8. ***(A)*** *Нехай функція $f(z)$ визначена на $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$.* ***(B)*** *Нехай для кожного фіксованого n:* ***(B1)*** *коефіцієнти Т–ІЛД* (1.25)*, який побудований за значеннями функції у вузлах $(n+1)$–го рядка матриці інтерполяційних вузлів* (1.20)*, задовольняють умову $|b_k^{(n)}| \geqslant \beta \geqslant d_{\mathcal{Z}}+1,\ k=\overline{1,n}$;* ***(B2)*** *існує така множина $\mathscr{Z} \subset \mathcal{Z}\backslash\mathcal{I}$, що для довільного $z_* \in \mathscr{Z}$ частинний знаменник $v_{n+1}(z)$ ланцюгового дробу* (1.23) *задовольняє нерівність $\left|v_{n+1}(z_*)\right| \geqslant \beta \geqslant d_{\mathcal{Z}}+1$. Тоді $\lim_{n\to\infty}\max_{z_*\in\mathscr{Z}}|f(z_*)-D_n^{(T)}(z_*)|=0$.*

Доведення. Нехай $d_{\mathcal{Z}} \neq 1$. При фіксованому n з теореми 2.7 випливає, що

$$\max_{z_*\in\mathscr{Z}}\left|f(z_*)-D_n^{(T)}(z_*)\right| < \frac{(d_{\mathcal{Z}}-1)^2\,\max_{z_*\in\mathscr{Z}}\prod_{i=0}^{n}|z_*-z_i|}{((d_{\mathcal{Z}})^{n+2}-1)\,((d_{\mathcal{Z}})^{n+1}-1)} <$$
$$< \frac{(d_{\mathcal{Z}}-1)^2\,(d_{\mathcal{Z}})^{n+1}}{((d_{\mathcal{Z}})^{n+2}-1)\,((d_{\mathcal{Z}})^{n+1}-1)}.$$

З останньої нерівності маємо, що границя для $n\to\infty$ рівна нулю.

Аналогічно, коли $d_{\mathcal{Z}} = 1$, маємо $\max\limits_{z_*\in\mathscr{Z}}\left|f(z_*)-D_n^{(T)}(z_*)\right| < \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Знову границя буде рівна нулю, коли $n\to\infty$. □

2.4. Залишковий член інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле дійсної змінної

В теоремі 2.5 встановлена оцінка залишкового члена ІФЛД для випадку, коли частинні чисельники $a_k(x)$ та знаменники $b_k(x)$ ланцюгового дробу є многочлени, а функція $f(x)$ має полюси деякої кратності в області інтерполювання $\mathcal{R}\subset\mathbb{R}$. Якщо функція $f(x)\in\mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$, інтерполюється Т–ІЛД, то канонічні чисельник $P_n(x)$ та знаменник $Q_n(x)$ ланцюгового дробу (2.29) є многочлени і $\mathbf{deg}\ P_n(x)\leqslant n$. Формула (2.31) набуває вигляду

$$f(x)-\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)}{(n+1)!\,Q_n(x)}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left[f(x)Q_n(x)\right]\Big|_{x=\xi},\ \xi\in\mathbf{Int}\,\mathcal{R}. \quad (2.41)$$

Канонічний знаменник $Q_n^{(T)}(x)$ Т–ІЛД (2.29) визначається через елементи дробу $a_i, b_i, i=\overline{1,n}$, за допомогою формули Ойлера–Міндінґа (2.6)

$$Q_n^{(T)}(x)=B_1^{[n]}(x)\Big(1+\sum_{i=1}^{n-1}X_i(x)+\sum_{i_1=1}^{n-3}X_{i_1}(x)\sum_{i_2=i_1+2}^{n-1}X_{i_2}(x)+$$

$$+\cdots+\sum_{i_1=1}^{n+1-2l}X_{i_1}(x)\sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2l}X_{i_2}(x)\cdots\sum_{i_l=i_{l-1}+2}^{n-1}X_{i_l}(x)\Big),\qquad l=[n/2]\,. \quad (2.42)$$

Очевидно, що кількість доданків в одинарній сумі (2.42) рівна $(n-1)$, у подвійній сумі — $\frac{(n-3)(n-2)}{2!}$, у потрійній сумі — $\frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{3!}$. Якщо скористатися формулою [97, с. 598] $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\cdots(i+m)=\frac{1}{m+2}\,n(n+1)(n+2)\cdots(n+m+1)$, то легко можна показати, що в k–й сумі (2.42) кількість доданків буде рівна $\frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k}(n-2k+i)$. Крім того, канонічний знаменник $Q_n^{(T)}(x)$ можна подати у вигляді (2.9).

Згідно із формулою Лейбніца похідної m-го порядку від добутку двох функцій, із формули (2.9) маємо, що

$$\left(Q_n^{(T)}(x)\right)^{(m)}=\sum_{j=0}^{m}\mathrm{C}_m^j\left(B_1^{[n]}(x)\right)^{(m-j)}\sum_{k=0}^{l}\left(R_{k,1}^{[n]}(x)\right)^{(j)},$$

а тоді

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}\,x^{n+1}}\left[f(x)\,Q_n^{(T)}(x)\right]=f^{(n+1)}(x)\,Q_n^{(T)}(x)+\sum_{m=1}^{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^m\,f^{(n+1-m)}(x)\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{m}\mathrm{C}_m^j\big(B_1^{[n]}(x)\big)^{(m-j)}\sum_{k=0}^{l}\left(R_{k,1}^{[n]}(x)\right)^{(j)}\,. \quad (2.43)$$

Крім того, із (2.8) випливає наступна рекурентна формула

$$\left(R_{k,1}^{[n]}(x)\right)^{(m)}=\sum_{j=1}^{n+1-2k}\sum_{i=0}^{m}\mathrm{C}_m^i\,X_j^{(i)}(x)\left(R_{k-1,j+2}^{[n]}(x)\right)^{(m-i)}\,. \quad (2.44)$$

Теорема 2.9. *Нехай функція $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$. За значеннями функції $f(x)$ в точках множини (2.28) побудований T–ІЛД. Тоді залишковий член T–ІЛД задовольняє нерівність*

$$\left| f(x) - \frac{P_n^{(T)}(x)}{Q_n^{(T)}(x)} \right| \leqslant \frac{\prod_{k=0}^{n} |x - x_k|}{(n+1)!\,|Q_n^{(T)}(x)|}\, f^*\,(b^*)^n \Big(\kappa_{n+1}(\omega) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{l} \mathrm{C}_{n+1}^{m} \frac{1}{\beta^{2m}} \sum_{i=0}^{l-m} \frac{\omega^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n - 2(m+i) + j) \Big)\ , \tag{2.45}$$

де $b^* = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |b_i|$, $f^* = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant l} \max\limits_{x \in \mathcal{R}} \left| f^{(n+1-i)}(x) \right|$, $\beta = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |b_i|$, $\omega = \alpha/\beta^2$, $l = [n/2]$, $\alpha = d_{\mathcal{R}}$, *величина* $\kappa_n(\omega)$ *визначена в* (2.12).

Доведення. В формулі (2.44) у цьому випадку $X_j(x) = (x - x_j)/(b_j\, b_{j+1})$, $Y_j = X_j'(x) = 1/(b_j b_{j+1})$, $j = \overline{1, n-1}$, і $X_j^{(k)}(x) \equiv 0$, коли $k \geqslant 2$. Формула (2.44) набуває вигляду

$$(R_{k,1}^{[n]}(x))^{(m)} = \sum_{j=1}^{n+1-2k} \Big(X_j(x) (R_{k-1,j+2}^{[n]}(x))^{(m)} + m Y_j (R_{k-1,j+2}^{[n]}(x))^{(m-1)} \Big). \tag{2.46}$$

З (2.7) маємо, що

$$\big(R_{k,1}^{[n]}(x) \big)^{(m)} = 0, \qquad \text{коли} \qquad k < m. \tag{2.47}$$

Згідно із теоремою 1.20 $\mathbf{deg}\ Q_n^{(T)}(x) \leqslant l, l = [n/2]$. Крім того, $B_1^{[n]}$ не залежить від x. Формула (2.43) може бути записана наступним чином

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}\, x^{n+1}} \big[f(x)\, Q_n^{(T)}(x) \big] = f^{(n+1)}(x)\, Q_n^{(T)}(x) +$$

$$+ B_1^{[n]} \sum_{m=1}^{l} \mathrm{C}_{n+1}^{m}\, f^{(n+1-m)}(x) \sum_{k=m}^{l} \big(R_{k,1}^{[n]}(x) \big)^{(m)}. \tag{2.48}$$

Знайдемо похідні $\big(R_{k,1}^{[n]}(x) \big)^{(m)}$, коли $k = \overline{m, l}$. Коли $k = m$ з (2.46) з урахуванням (2.47) отримаємо

$$\big(R_{m,1}^{[n]}(x) \big)^{(m)} = \sum_{i_1=1}^{n+1-2m} m\, Y_{i_1} \big(R_{m-1, i_1+2}^{[n]}(x) \big)^{(m-1)} =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n+1-2m} m\, Y_{i_1} \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2m} (m-1)\, Y_{i_2} \left(R^{[n]}_{m-2,i_2+2}(x)\right)^{(m-2)} = \cdots =$$

$$= m! \sum_{i_1=1}^{n+1-2m} Y_{i_1} \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2m} Y_{i_2} \cdots \sum_{i_m=i_{m-1}+2}^{n-1} Y_{i_m} \, .$$

Позначимо через

$$M^{[n,0]}_{m,t} = \sum_{j_1=t}^{n+1-2m} Y_{j_1} \sum_{j_2=j_1+2}^{n+3-2m} Y_{j_2} \ldots \sum_{j_m=j_{m-1}+2}^{n-1} Y_{j_m}, \; M^{[n,0]}_{0,t} = R^{[n]}_{0,t} = 1, \; m \geqslant 1. \quad (2.49)$$

Легко бачити, що має місце співвідношення $M^{[n,0]}_{m,t} = \sum_{j=t}^{n+1-2m} Y_j \; M^{[n,0]}_{m-1,j+2}$, а тоді $\left(R^{[n]}_{m,1}(x)\right)^{(m)} = m!\, M^{[n,0]}_{m,1}$. При $k = m+1$ із співвідношення (2.46) маємо

$$\left(R^{[n]}_{m+1,1}(x)\right)^{(m)} = \sum_{i=1}^{n-1-2m} \Big(X_i(x) \big(R^{[n]}_{m,i+2}(x)\big)^{(m)} + m\, Y_i \left(R^{[n]}_{m,i+2}(x)\right)^{(m-1)} \Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1-2m} \Big(X_i(x)\, m!\, M^{[n,0]}_{m,i+2} + m\, Y_i \left(R^{[n]}_{m,i+2}(x)\right)^{(m-1)} \Big) = \cdots =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n-1-2m} \big(X_{i_1}(x)\, m!\, M^{[n,0]}_{m,i_1+2} + m\, Y_{i_1} \sum_{i_2=i_1+2}^{n+1-2m} \big(X_{i_2}(x)\, (m-1)!\, M^{[n,0]}_{m-1,i_2+2} +$$

$$+ (m-1)\, Y_{i_2} \sum_{i_3=i_2+2}^{n+3-2m} \big(X_{i_3}(x)\, (m-2)!\, M^{[n,0]}_{m-2,i_3+2} + (m-2)\, Y_{i_3} \times$$

$$\times \sum_{i_4=i_3+2}^{n+5-2m} \big(\cdots + 2 Y_{i_{m-1}} \sum_{i_m=i_{m-1}+2}^{n-3} \big(X_{i_m}(x)\, M^{[n,0]}_{1,i_m+2} + Y_{i_m}\, R^{[n]}_{1,i_m+2}(x) \big) \cdots \big)\big)\big)\big).$$

Позначимо через

$$M^{[n,1]}_{m+1,t}(x) = \sum_{j_1=t}^{n-1-2m} \big(X_{j_1}(x)\; M^{[n,0]}_{m,j_1+2} + Y_{j_1} \sum_{j_2=j_1+2}^{n+1-2m} \big(X_{j_2}(x)\, M^{[n,0]}_{m-1,j_2+2} +$$

$$+ Y_{j_2} \sum_{j_3=j_2+2}^{n+3-2m} \big(\cdots + Y_{j_{m-1}} \sum_{j_m=j_{m-1}+2}^{n-3} \big(X_{j_m}(x) M^{[n,0]}_{1,j_m+2} + Y_{j_m}\, R^{[n]}_{1,i_m+2}(x) \big) \cdots \big)\big)\big).$$

Легко бачити, що

$$M_{m+1,t}^{[n,1]}(x) = \sum_{j=t}^{n-1-2m} \big(X_j\, M_{m,j+2}^{[n,0]} + Y_j\, M_{m,j+2}^{[n,1]}(x)\big),\ M_{1,t}^{[n,1]}(x) = R_{1,t}^{[n]}(x), \quad (2.50)$$

а тоді $\big(R_{m+1,1}^{[n]}(x)\big)^{(m)} = m!\, M_{m+1,1}^{[n,1]}(x)$.

Скориставшись методом повної математичної індукції з (2.46) можна довести, що $\big(R_{m+s,1}^{[n]}(x)\big)^{(m)} = m!\, M_{m+s,1}^{[n,s]}(x),\ s = \overline{1, l-m}$, де

$$M_{m+s,t}^{[n,s]}(x) = \sum_{j=t}^{n+1-2(m+s)} \big(X_j\, M_{m+s-1,j+2}^{[n,s-1]}(x) + Y_j\, M_{m+s-1,j+2}^{[n,s]}(x)\big), \quad (2.51)$$

$$M_{s,t}^{[n,s]}(x) = R_{s,t}^{[n]}(x)\ .$$

Формула (2.48) набуває вигляду

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}\, x^{n+1}}\big[f(x)\, Q_n^{(T)}(x)\big] = f^{(n+1)}(x)\, Q_n^{(T)}(x) +$$

$$+B_1^{[n]} \sum_{m=1}^{l} \mathrm{C}_{n+1}^{m}\, f^{(n+1-m)}(x)\, m! \sum_{k=m}^{l} M_{k,1}^{[n,k-m]}(x)\ .$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}^{n+1}\big[f(x)Q_n^{(T)}(x)\big]}{\mathrm{d}x^{n+1}}\right| \leqslant f^{*}\Big(\big|Q_n^{(T)}(x)\big| + (b^{*})^{n} \sum_{m=1}^{l} C_{n+1}^{m} m! \sum_{k=m}^{l} |M_{k,1}^{[n,k-m]}(x)|\Big). \quad (2.52)$$

Згідно з теоремою 2.2 виконується нерівність

$$\Big|Q_n^{(T)}(x)\Big| \leqslant (b^{*})^{n} \kappa_{n+1}(\omega). \quad (2.53)$$

Знайдемо оцінки $|M_{k,1}^{[n,k-m]}(x)|$, коли $k = \overline{m,l}$. При $k = m$ із (2.49) випливає, що $\big|M_{m,i+2}^{[n,0]}(x)\big| \leqslant \frac{1}{m!\,\beta^{2m}} \prod_{j=1}^{m}(n-1-i-2m+j)$. Коли $k = m+1$, то із формули (2.50) отримуємо

$$\big|M_{m+1,i+2}^{[n,1]}(x)\big| \leqslant \sum_{j=i+2}^{n-1-2m} \big(|X_j(x)|\, |M_{m,j+2}^{[n,0]}(x)| + |Y_j| |M_{m,j+2}^{[n,1]}(x)|\big). \quad (2.54)$$

Коли $m=0$, то з (2.54) маємо $|M^{[n,1]}_{1,i+2}(x)|=|R^{[n]}_{1,i+2}(x)|\leqslant\frac{\alpha}{\beta^2}(n-i-2)$. Для $m=1$ з нерівності (2.54) випливає, що

$$|M^{[n,1]}_{2,i+2}(x)|\leqslant\sum_{j=i+2}^{n-3}\big(|X_j|\,|M^{[n,0]}_{1,j+2}(x)|+|Y_j|\,|M^{[n,1]}_{1,j+2}(x)|\big)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2\alpha}{\beta^4}\sum_{j=i+2}^{n-3}(n-j-2)=\frac{\alpha}{\beta^4}(n-i-4)(n-i-3).$$

За індукцією доведемо, що виконується нерівність

$$\big|M^{[n,1]}_{k,i+2}(x)\big|\leqslant\frac{\alpha}{(k-1)!\,\beta^{2k}}\prod_{j=1}^{k}(n-i-2k+j-1)\ ,\quad k=\overline{1,l}. \tag{2.55}$$

У випадку $k=1,2$ формула (2.55) виконується. Зробимо припущення, що формула має місце для $k=t$. Тоді, коли $k=t+1$, з (2.54) отримуємо

$$\big|M^{[n,1]}_{t+1,i+2}(x)\big|\leqslant\sum_{j=i+2}^{n-1-2t}\big(|X_j|\,|M^{[n,0]}_{t,j+2}(x)|+|Y_j||M^{[n,1]}_{t,j+2}(x)|\big)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=i+2}^{n-1-2t}\Big(\frac{\alpha}{\beta^2}\,\frac{1}{t!\,\beta^{2t}}\prod_{s=1}^{t}(n-j-2t+s-1)+\frac{1}{\beta^2}\,\frac{\alpha}{(t-1)!\,\beta^{2t}}\times$$

$$\times\prod_{s=1}^{t}(n-j-2t+s-1)\Big)=\frac{\alpha\,(t+1)}{t!\beta^{2(t+1)}}\sum_{j=1}^{n-i-2(t+1)}\prod_{s=1}^{t}(j+s-1)=$$

$$=\frac{\alpha}{t!\,\beta^{2(t+1)}}\prod_{j=1}^{t+1}(n-i-2(t+1)+j-1),$$

тобто формула (2.55) має місце і в цьому випадку.

За індукції покажемо, що вірна нерівність

$$\big|M^{[n,s]}_{m+s,i+2}(x)\big|\leqslant\frac{\alpha^s}{m!\,s!\,\beta^{2(m+s)}}\prod_{t=1}^{m+s}(n-i-2(m+s)+t-1), s=\overline{0,l-m}. \tag{2.56}$$

При $s=0,1$ формула (2.56) виконується. Зробимо припущення, що дана формула виконується, коли $s=k$. Тоді для $s=k+1$ із (2.51) випливає, що

$$\big|M^{[n,k+1]}_{m+k+1,i+2}(x)\big|\leqslant\sum_{j=i+2}^{n-1-2(m+k)}\big(|X_j||M^{[n,k]}_{m+k,j+2}(x)|+|Y_j||M^{[n,k+1]}_{m+k,j+2}(x)|\big). \tag{2.57}$$

Коли $m = 0$, то з (2.51) отримуємо

$$\left|M_{k+1,i+2}^{[n,k+1]}(x)\right| = \left|R_{k+1,i+2}^{[n]}(x)\right| \leqslant \frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!\,\beta^{2(k+1)}}\prod_{j=1}^{k+1}(n-i-2(k+1)+j-1).$$

Для $m = 1$ з (2.57) маємо, що

$$\left|M_{k+2,i+2}^{[n,k+1]}(x)\right| \leqslant \sum_{j=i+2}^{n-3-2k}\big(|X_j|\,|M_{k+1,i+2}^{[n,k]}(x)| + |Y_j||M_{k+1,i+2}^{[n,k+1]}(x)|\big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=i+2}^{n-3-2k}\Big(\frac{\alpha}{\beta^2}\,\frac{\alpha^k}{k!\,\beta^{2(k+1)}}\prod_{t=1}^{k+1}(n-j-2(k+1)+t-1) + \frac{1}{\beta^2}\frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!\beta^{2(k+1)}}\times$$

$$\times\prod_{t=1}^{k+1}(n-i-2(k+1)+t-1)\Big) = \frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!\,\beta^{2(k+2)}}\prod_{j=1}^{k+2}(n-i-2(k+2)+j-1).$$

Коли $m = 2$, то

$$\left|M_{k+3,i+2}^{[n,k+1]}(x)\right| \leqslant \sum_{j=i+2}^{n-5-2k}\big(|X_j|\,|M_{k+2,i+2}^{[n,k]}(x)| + |Y_j||M_{k+2,i+2}^{[n,k+1]}(x)|\big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=i+2}^{n-5-2k}\Big(\frac{\alpha}{\beta^2}\,\frac{\alpha^k}{k!\,2!\,\beta^{2(k+2)}}\prod_{t=1}^{k+2}(n-j-2(k+2)+t-1) + \frac{1}{\beta^2}\frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!\beta^{2(k+1)}}\times$$

$$\times\prod_{t=1}^{k+2}(n-i-2(k+2)+t-1)\Big) = \frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!\,2!\beta^{2(k+3)}}\prod_{j=1}^{k+3}(n-i-2(k+3)+j-1).$$

Зробимо припущення, що (2.56) виконується для $m = t$. Тоді, коли $m = t+1$ з (2.57) маємо

$$\left|M_{k+t+2,i+2}^{[n,k+1]}(x)\right| \leqslant \sum_{j=i+2}^{n-3-2(k+t)}\big(|X_j|\,|M_{k+t+1,j+2}^{[n,k]}(x)| + |Y_j|\,|M_{k+t+1,j+2}^{[n,k+1]}(x)|\big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=i+2}^{n-3-2(k+t)}\Big(\frac{\alpha}{\beta^2}\,\frac{\alpha^k}{k!\,(t+1)!\beta^{2(k+t+1)}}\prod_{p=1}^{k+t+1}(n-j-2(k+t+1)+p-1)+$$

$$+\frac{1}{\beta^2}\frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!t!\beta^{2(k+t+1)}}\prod_{p=1}^{k+t+1}(n-i-2(k+t+1)+p-1)\Big) =$$

$$= \frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!\,(t+1)!\,\beta^{2(k+t+2)}} \prod_{j=1}^{k+t+2} (n-i-2(k+t+2)+j-1).$$

Формула (2.56) вірна і в цьому випадку, отже вона вірна для довільних s та m. Із (2.56) випливає, що

$$\left|M^{[n,s]}_{m+s,1}(x)\right| \leqslant \frac{\alpha^s}{m!\,s!\,\beta^{2(m+s)}} \prod_{p=1}^{m+s} (n-2(m+s)+p). \tag{2.58}$$

З (2.41),(2.52), (2.53) та (2.58) випливає (2.45). □

Зауваження 2.5. Приклади, які ілюструють теорему 2.9, наведені в підрозділі Б.2 додатку на сторінці 340.

Теорема 2.10. *Якщо функція* $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$, *за значеннями функції в точках множини* X *побудований Т–ІЛД* (1.25), *частинні чисельники та знаменники якого задовольняють умову типу Слєшинського–Прінгсгейма, тобто* $0 < |x - x_{i-1}| \leqslant \alpha$, $|b_i| \geqslant \alpha + 1$, $i = \overline{1, n}$, *то має місце оцінка: а) якщо* $\alpha \neq 1$

$$\left|f(x) - \frac{P_n^{(T)}(x)}{Q_n^{(T)}(x)}\right| \leqslant \frac{\alpha^{n+1}(\alpha-1)}{(n+1)!\,(\alpha^{n+1}-1)} \cdot f^*\,(b^*)^n \Bigg(\kappa_{n+1}(\omega) + $$

$$+ \sum_{m=1}^{l} \mathrm{C}^m_{n+1} \frac{1}{\beta^{2m}} \sum_{i=0}^{l-m} \frac{\omega^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n-2(m+i)+j)\Bigg)\ , \tag{2.59}$$

б) якщо $\alpha = 1$

$$\left|f(x) - \frac{P_n^{(T)}(x)}{Q_n^{(T)}(x)}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!} \cdot f^*\,(b^*)^n \Bigg(\kappa_{n+1}(\omega) + $$

$$+ \sum_{m=1}^{l} \mathrm{C}^m_{n+1} \frac{1}{\beta^{2m}} \sum_{i=0}^{l-m} \frac{\omega^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n-2(m+i)+j)\Bigg)\ , \tag{2.60}$$

де $\alpha, \omega, \beta, b^*, f^*$ *визначені в умові теореми 2.9.*

Доведення. Згідно з теоремою 2.3 має, що $|Q_n^{(T)}(x)| \geqslant \frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}$, коли $\alpha \neq 1$, або $|Q_n^{(T)}(x)| \geqslant n+1$, коли $\alpha = 1$. Тоді із теореми 2.9 отримуємо нерівності (2.59) та (2.60). □

Зауваження 2.6. В дисертаційній роботі не проводився порівняльний аналіз якості наближення розглянутих типів інтерполяційних ланцюгових дробів з іншими методами інтерполяції функцій, наприклад інтерполяційними многочленами. Однак, в підрозділі Б.3 додатку (стор. 343) наведені результати числових експериментів інтерполяції функцій комплексної змінної Т–ІЛД та інтерполяційного многочлена у формі Ньютона.

2.5. Інтерполяційний ланцюговий дріб типу С–дробу

Визначимо послідовності $\{v_k(z)\}$ та $\{V_k(z)\}$ наступним чином

$$f(z) = v_0(z), \quad v_0(z) = v_0(z_0) + v_1(z)(z - z_0), \; v_k(z) = \frac{v_k(z_k)}{1 + v_{k+1}(z)(z - z_k)},$$

$V_0(z) = v_0(z)$, $V_k(z) = v_0 \circ \cdots \circ v_k(z)$, $k = \overline{1, n}$, $z_i \in \mathbf{Z}$, $\quad i = \overline{0, n}$.

Тоді

$$f(z) = V_n(z) = v_0(z_0) + \frac{v_1(z_1)(z - z_0)}{1} + \frac{v_2(z_2)(z - z_1)}{1} + \cdots + \frac{v_{n-1}(z_{n-1})(z - z_{n-2})}{1} + \frac{v_n(z_n)(z - z_{n-1})}{1 + v_{n+1}(z)(z - z_n)}.$$

Позначимо через $a_k = v_k(z_k)$, $k = \overline{0, n}$. Маємо

$$f(z) = \frac{P^{(*)}_{n+1}(z)}{Q^{(*)}_{n+1}(z)} = a_0 + \frac{a_1(z - z_0)}{1} + \frac{a_2(z - z_1)}{1} + \cdots + \frac{a_n(z - z_{n-1})}{1} + \frac{v_{n+1}(z)(z - z_n)}{1}. \tag{2.61}$$

Розглянемо ланцюговий дріб вигляду

$$D^{(c)}_n(z) = a_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k \left(z - z_{k-1}\right)}{1}. \tag{2.62}$$

Скориставшись прямим (1.6) (або оберненим (1.11)) рекурентним алгоритмом поставимо у відповідність ланцюговому дробу (2.62) відношення двох многочленів, тобто

$$D^{(c)}_n(z) = \frac{P^{(c)}_n(z)}{Q^{(c)}_n(z)} = a_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k \left(z - z_{k-1}\right)}{1}. \tag{2.63}$$

Означення 2.3. Якщо ланцюговий дріб (2.63) у інтерполяційних вузлах (1.16) задовольняє умову (2.27), то його називають інтерполяційним ланцюговим дробом типу С–дробу (С–ІЛД).

Коефіцієнти a_k, $k=\overline{0,n}$, ланцюгового дробу (2.63) визначимо із умови (2.27). Очевидно, що для довільному m, де $0 \leqslant m \leqslant n$, має місце співвідношення

$$w_m = D_n^{(c)}(z_m) = a_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{m} \frac{a_k\,(z_m - z_{k-1})}{1}. \tag{2.64}$$

При $m=0,1,2$ маємо: $a_0 = w_0$, $a_1 = \frac{w_1-w_0}{z_1-z_0}$, $a_2 = \frac{1}{z_2-z_1}\Big(-1+\frac{a_1(z_2-z_0)}{w_2-a_0}\Big)$.

Теорема 2.11. *Коефіцієнти С–ІЛД* (2.63) *визначаються через значення функції $f(z)$ в інтерполяційних вузлах $\mathbf{Z}$ за допомогою рекурентного співвідношення у вигляді скінченного ланцюгового дробу, тобто*

$$a_m = \frac{1}{z_m - z_{m-1}}\left(-1 + \frac{a_{m-1}(z_m - z_{m-2})}{-1} + \frac{a_{m-2}(z_m - z_{m-3})}{-1} + \cdots + \right.$$
$$\left. + \frac{a_2(z_m - z_1)}{-1} + \frac{a_1(z_m - z_0)}{w_m - a_0}\right),\ m=\overline{2,n},\quad a_0 = w_0,\ a_1 = \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0}. \tag{2.65}$$

Доведення. Використаємо метод повної математичної індукції. Твердження теореми має місце для $m=0,1,2$. Припустимо, що (2.65) виконується, коли $m=j-1$. Тоді для $m=j$ із (2.64) маємо, що

$$w_j = a_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{j} \frac{a_k\,(z_j - z_{k-1})}{1} = a_0 + \frac{a_1(z_j - z_0)}{1 + \mathbf{K}_{k=2}^{j}(a_k(z_j - z_{k-1})/1)}.$$

Позначимо через $S = 1 + \mathbf{K}_{k=2}^{j}(a_k(z_j - z_{k-1})/1)$. Тоді $w_j = a_0 + a_1(z_j - z_0)/S$ і $S = a_1(z_j - z_0)/(w_j - a_0)$. Розглянемо ланцюговий дріб $D_{j-1}^{(c)}(z) = 1 + {}+\mathbf{K}_{k=2}^{j}(a_k(z - z_{k-1})/1)$. Коефіцієнти $a_2, a_3, \ldots, a_{j-1}$ ланцюгового дробу відомі, а коефіцієнт a_j — невідомий. З іншого боку це С–ІЛД, який побудований за значеннями деякої функції в інтерполяційних вузлах $z_1, z_2, \ldots, z_j$. Згідно із припущенням індукції його коефіцієнти визначаються за формулою (2.65) і зокрема коефіцієнт a_j визначається наступним чином

$$a_j = \frac{1}{z_j - z_{j-1}}\left(-1 + \frac{a_{j-1}\,(z_j - z_{j-2})}{-1} + \cdots + \frac{a_3\,(z_j - z_2)}{-1} + \frac{a_2\,(z_j - z_1)}{S - 1}\right).$$

Підставивши в останнє співвідношення раніше знайдене значення S отримаємо, що (2.65) виконується і в цьому випадку. $\square$

Очевидно, що якщо $b_i \neq 0, i = \overline{1,n}$, то С–ІЛД (2.63) буде еквівалентний Т–ІЛД (1.25), оскільки коефіцієнти ланцюгових дробів взаємозв'язані співвідношеннями $a_0 = b_0, a_1 = 1/b_1$, $a_i = 1/(b_i b_{i-1})$, $i = \overline{2,n}$. Однак зауважимо, що формула (2.65) дозволяє знаходити коефіцієнти С–ІЛД (2.63) безпосередньо через значення функції в інтерполяційних вузлах. Крім того коефіцієнти С–ІЛД (2.63) не задовольняють умову типу Слєшинського–Прінґсгейма, а отже для такого типу інтерполяційного ланцюгового дробу теорема 2.7 не має місця.

Зауваження 2.7. Легко бачити, що С–ІЛД (2.63) є раціональна функція, $\mathbf{deg}\ P_n^{(c)}(z) \leqslant [(n+1)/2]$, $\mathbf{deg}\ Q_n^{(c)}(z) \leqslant [n/2]$.

Лема 2.2. *Якщо коефіцієнти С–ІЛД* (2.63) *такі, що* $a_k \neq 0$, $k = \overline{1,n}$, *та виконується умова типу Пейдона–Уолла, тобто* $\max\limits_{z\in\mathcal{R}} |a_k(z - z_{k-1})| \leqslant$ $\leqslant t(1-t)$, *де* $0 < t \leqslant \frac{1}{2}$, $k = \overline{2,n}$, *то для довільного* $z \in \mathcal{Z}\backslash\mathbf{Z}$ *має місце нерівність*

$$\Omega_n(t) \leqslant \left|Q_n^{(c)}(z)\right| < \kappa_{n+1}(\delta)\,, \tag{2.66}$$

де $\delta = \max\limits_{2\leqslant i\leqslant n} |a_i|\, d_{\mathcal{Z}}$, *величини* $\kappa_n(\delta)$ *та* $\Omega_n(t)$ *визначені в* (2.12) *та* (2.17).

Доведення. Оцінка для модуля знаменника $Q_n^{(c)}$ згори в (2.66) безпосередньо випливає з теореми 2.2, оскільки для С–ІЛД $B_1^{[n]} \equiv 1$. Оцінка модуля знаменника знизу випливає із теореми 2.4. $\square$

Теорема 2.12. ***(A)*** *Нехай функція* $f(z)$ *визначена на компакті* $\mathcal{Z} \subset$ $\subset \mathbb{C}$; ***(B)*** *нехай коефіцієнти С–ІЛД* (2.63) $a_k \neq 0$, $k = \overline{1,n}$, *і має місце умова типу Пейдона–Уолла*

$$\max_{z\in\mathcal{Z}} |a_k(z - z_{k-1})| \leqslant t(1-t), \quad 0 < t \leqslant \tfrac{1}{2}, \qquad k = \overline{2,n}; \tag{2.67}$$

(C) *нехай знайдеться множина* $\mathscr{Z} \subset \mathcal{Z}\backslash\mathbf{Z}$, *що в довільній точці* $z_* \in \mathscr{Z}$ *частинний чисельник* $v_{n+1}(z)(z-z_n)$ *ланцюгового дробу* (2.61) *задовольняє* *умови*

$$v_{n+1}(z_*) \neq 0, \qquad \max_{z \in \mathscr{Z}} |v_{n+1}(z_*)(z - z_n)| \leqslant t(1-t). \tag{2.68}$$

Тоді

$$\frac{\tilde{a}_{n+1} \min_{z_* \in \mathscr{Z}} \prod_{i=1}^{n} |a_i(z_* - z_{i-1})|}{\kappa_{n+1}(\delta)\, \kappa_{n+2}(\delta_*)} \leqslant \max_{z_* \in \mathscr{Z}} |f(z_*) - D_n^{(c)}(z_*)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\bar{a}_{n+1} \max_{z_* \in \mathscr{Z}} \prod_{i=1}^{n} |a_i(z_* - z_{i-1})|}{\Omega_n(t)\, \Omega_{n+1}(t)}, \tag{2.69}$$

де $\delta = \max\limits_{2 \leqslant i \leqslant n} |a_i|\, d_{\mathcal{Z}}$*,* $\delta_* = \max\{\delta, \bar{a}_{n+1}\}\, d_{\mathcal{Z}}$*,* $\bar{a}_{n+1} = \max\limits_{z_* \in \mathscr{Z}} |v_{n+1}(z_*)(z_* - z_n)|$*,* $\tilde{a}_{n+1} = \min\limits_{z_* \in \mathscr{Z}} |v_{n+1}(z_*)(z_* - z_n)|$*, а* $\kappa_n(\delta)$ *та* $\Omega_n(t)$ *визначені в* (2.12) *та* (2.17).

Доведення. Нехай $z_* \in \mathscr{Z}$. Припустимо, що коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ланцюгового дробу (2.61) визначені з інтерполяційної умови (2.27), а отже збігаються із коефіцієнтами С–ІЛД (2.63) за побудовою. Тоді різниця

$$f(z) - D_n^{(c)}(z) = \frac{P_{n+1}^{(*)}(z)}{Q_{n+1}^{(*)}(z)} - \frac{P_n^{(c)}(z)}{Q_n^{(c)}(z)} = \frac{(-1)^n \prod_{i=0}^{n} a_{i+1}(z - z_i)}{Q_n^{(c)}(z)\, Q_{n+1}^{(*)}(z)}.$$

Оцінимо цю різницю за абсолютним значенням в точці $z_* \in \mathscr{Z}$, маємо

$$|f(z_*) - D_n^{(c)}(z_*)| = \frac{v_{n+1}(z_*) \prod_{i=1}^{n} |a_i\,(z_* - z_{i-1})|}{|Q_{n+1}^{(*)}(z_*)|\, |Q_n^{(c)}(z_*)|}.$$

З урахуванням леми 2.2 отримуємо твердження (2.69). □

Зауваження 2.8. Числові приклади інтерполяції функцій комплексної змінної, які вміщено в підрозділі Б.4 додатку(стор. 347), ілюструють теорему 2.12.

Теорема 2.13. ***(A)*** *Нехай функція* $f(z)$ *визначена на компакті* $\mathcal{Z} \subset \subset \mathbb{C}$*.* ***(B)*** *Нехай для кожного значення* n*:* ***(B1)*** *коефіцієнти С–ІЛД* (2.63) $a_k^{(n)}$*,* $k = \overline{1,n}$*, які визначаються за значеннями функції у вузлах* $(n + + 1)$*–го рядка матриці вузлів* (1.20)*, відмінні від нуля,* $a_k^{(n)} \neq 0$*, та має місце умова типу Пейдона–Уолла* $\max_{z \in \mathcal{Z}} |a_k^{(n)}(z - z_{k-1}^{(n)})| \leqslant t(1-t)$*, де* $0 < < t \leqslant \frac{1}{2}$*;* ***(B2)*** *нехай існує множина* $\mathscr{Z} \subset \mathcal{Z} \backslash \mathcal{I}$*, що в довільній точці* $z_* \in \mathscr{Z}$*, частинний чисельник* $v_{n+1}(z)(z - z_n)$ *ланцюгового дробу* (2.61) *задовольняє умови* $v_{n+1}^{(n)}(z_*) \neq 0$, $\max_{z \in \mathcal{Z}} |v_{n+1}^{(n)}(z_*)(z - z_n^{(n)})| \leqslant t(1-t)$. *Тоді* $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{z_* \in \mathscr{Z}} |f(z_*) - D_n^{(c)}(z_*)| = 0$.

Доведення. Розглянемо два випадки: а) $0 < t < 1/2$; б) $t = 1/2$.

а) Нехай $0 < t < 1/2$. Коли n фіксовано, то згідно із теоремою 2.12 має місце оцінка

$$\max_{z_* \in \mathscr{Z}} |f(z_*) - D_n^{(c)}(z_*)| \leqslant \frac{\bar{a}_{n+1} \max_{z_* \in \mathscr{Z}} \prod_{i=1}^{n} |a_i^{(n)}(z_* - z_{i-1}^{(n)})|}{\Omega_n \, \Omega_{n+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{t^{n+1}(1-t)^{n+1}((1-t)^{n+1} - t^{n+1})}{(1-t)^{n+3} - t^{n+3}} .$$

Якщо зробити заміну $t = 1/\theta, \theta > 2$, то маємо

$$\max_{z_* \in \mathscr{Z}} |f(z_*) - D_n^{(c)}(z_*)| \leqslant \frac{(\theta-1)^{n+1}((\theta-1)^{n+1} - 1)}{\theta^{2n}((\theta-1)^{n+3} - 1)} .$$

Перейшовши до границі, коли $n \to \infty$, отримуємо твердження теореми.

б) Коли $t = 1/2$, то $\max\limits_{z_* \in \mathscr{Z}} |f(z_*) - D_n^{(c)}(z_*)| \leqslant \frac{n+1}{4^n(n+3)}$. Права частина прямує до нуля, коли $n \to \infty$. □

2.6. Залишковий член інтерполяційного ланцюгового дробу типу С–дробу дійсної змінної

Розглянемо функцію дійсного аргументу $f(x)$, яка визначена на компакті $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$ і задана значеннями в інтерполяційних вузлах (2.28).

Теорема 2.14. *Нехай функція* $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$ *і за значеннями функції* $f(x)$ *у вузлах* (2.28) *побудований С–ІЛД* (2.63). *Тоді залишковий член С–ІЛД* $R_n^{(c)}(x) = f(x) - P_n^{(c)}(x)/Q_n^{(c)}(x)$ *задовольняє нерівність*

$$|R_n^{(c)}(x)| \leqslant \frac{f^* \prod_{k=0}^{n} |x - x_k|}{(n+1)! \, |Q_n^{(c)}(x)|} \Big(\kappa_{n+1}(\rho) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{l} \mathrm{C}_{n+1}^{m} (a^*)^m \sum_{i=0}^{l-m} \frac{\rho^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n - 2(m+i) + j) \Big), \quad l = [n/2], \tag{2.70}$$

де $f^* = \max_{0 \leqslant i \leqslant l} \max_{x \in \mathcal{R}} \left| f^{(n+1-i)}(x) \right|, a^* = \max_{2 \leqslant i \leqslant n} |a_i|, d_{\mathcal{R}} = \mathbf{diam}\, \mathcal{R}$, $\rho = d_{\mathcal{R}} a^*$, *величина* $\kappa_n(\rho)$ *визначена в* (2.12).

Доведення. Із (2.4) та (2.63) випливає, що у випадку С–ІЛД маємо, що $X_j(x) = a_{j+1}(x - x_j)$, $X_j'(x) = a_{j+1}$ і $X_j^{(k)}(x) \equiv 0$, коли $j = \overline{1, n-1}$ і $k = \overline{2, n-1}$, $B_1^{[n]} \equiv 1$. Тоді (2.44) набуває вигляду

$$(R_{k,1}^{[n]}(x))^{(m)} = \sum_{j=1}^{n+1-2k} \big(X_j(x)(R_{k-1,j+2}^{[n]}(x))^{(m)} + m a_{j+1}(R_{k-1,j+2}^{[n]}(x))^{(m-1)}\big). \quad (2.71)$$

Оскільки $R_{k,1}^{[n]}(x)$ многочлен k–го степеня, то

$$\big(R_{k,1}^{[n]}(x)\big)^{(m)} = 0, \qquad \text{коли} \qquad k < m. \quad (2.72)$$

Степінь многочлена знаменника $\mathbf{deg}\, Q_n^{(c)}(x) \leqslant l$. Тоді (2.43) перепишеться наступним чином

$$\frac{d^{n+1}}{d\,x^{n+1}}\big[f(x)\,Q_n^{(c)}(x)\big] = f^{(n+1)}(x)\,Q_n^{(c)}(x) +$$

$$+\sum_{m=1}^{l} \mathrm{C}_{n+1}^{m}\, f^{(n+1-m)}(x) \sum_{k=m}^{l} \big(R_{k,1}^{[n]}(x)\big)^{(m)}. \quad (2.73)$$

Знайдемо значення похідної $\big(R_{k,1}^{[n]}(x)\big)^{(m)}$ для $k = \overline{m, l}$. Для $k = m$ з (2.71) з урахуванням (2.72) отримуємо, що

$$\big(R_{m,1}^{[n]}(x)\big)^{(m)} = \sum_{i=1}^{n+1-2m} m\, a_{i+1} \big(R_{m-1,i_1+2}^{[n]}(x)\big)^{(m-1)} =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n+1-2m} m\, a_{i_1+1} \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2m} (m-1)\, a_{i_2+1} \times \big(R_{m-2,i_2+2}^{[n]}(x)\big)^{(m-2)} =$$

$$= \quad \cdots \quad = m! \sum_{i_1=1}^{n+1-2m} a_{i_1+1} \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2m} a_{i_2+1} \cdots \sum_{i_m=i_{m-1}+2}^{n-1} a_{i_m+1}.$$

Позначимо через

$$N_{s,t}^{[n,0]} = \sum_{j_1=t}^{n+1-2s} a_{j_1+1} \sum_{j_2=j_1+2}^{n+3-2s} a_{j_2+1} \cdots \sum_{j_s=j_{s-1}+2}^{n-1} a_{j_m+1},\ N_{0,t}^{[n,0]} = R_{0,t}^{[n]} = 1, \quad (2.74)$$

де $s = \overline{1, l}$. Тоді маємо $\big(R_{m,1}^{[n]}(x)\big)^{(m)} = m!\, N_{m,1}^{[n,0]}$. Легко бачити, що $N_{s,t}^{[n,0]} = \\ = \sum_{j=t}^{n+1-2s} a_{j+1}\, N_{s-1,j+2}^{[n,0]}$.

Коли $k = m + 1$, то з (2.71) отримуємо

$$\big(R^{[n]}_{m+1,1}(x)\big)^{(m)} = \sum_{i=1}^{n-1-2m} \big(X_i(x)\big(R^{[n]}_{m,i+2}(x)\big)^{(m)} + ma_{i+1}\big(R^{[n]}_{m,i+2}(x)\big)^{(m-1)}\big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1-2m} \big(X_i(x)\, m!\, N^{[n,0]}_{m,i+2} + m\, a_{i+1}\, \big(R^{[n]}_{m,i+2}(x)\big)^{(m-1)}\big) = \quad \cdots \quad =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n-1-2m} \big(X_{i_1}(x)\, m!\, N^{[n,0]}_{m,i_1+2} + m\, a_{i_1+1} \sum_{i_2=i_1+2}^{n+1-2m} \big(X_{i_2}(x)\,(m-1)!\, N^{[n,0]}_{m-1,i_2+2} +$$

$$+(m-1)\, a_{i_2+1} \sum_{i_3=i_2+2}^{n+3-2m} \big(X_{i_3}(x)\,(m-2)!\, N^{[n,0]}_{m-2,i_3+2} + (m-2)\, a_{i_3+1} \sum_{i_4=i_3+2}^{n+5-2m} \big(\cdots$$

$$+2\, a_{i_{m-1}+1} \sum_{i_m=i_{m-1}+2}^{n-3} \big(X_{i_m}(x)\, N^{[n,0]}_{1,i_m+2} + a_{i_m+1}\, R^{[n]}_{1,i_m+2}(x)\big) \quad \cdots \quad \big)\big)\big)\big).$$

Позначимо через

$$N^{[n,1]}_{s+1,t}(x) = \sum_{j_1=t}^{n-1-2s} \big(X_{j_1}(x) N^{[n,0]}_{s,j_1+2} + a_{j_1+1} \sum_{j_2=j_1+2}^{n+1-2s} \big(X_{j_2}(x) N^{[n,0]}_{s-1,j_2+2} + a_{j_2+1}\times$$

$$\times \sum_{j_3=j_2+2}^{n+3-2s} \big(\cdots + a_{j_{s-1}+1} \sum_{j_s=j_{s-1}+2}^{n-3} \big(X_{j_s}(x)\; N^{[n,0]}_{1,j_s+2} + a_{j_s+1}\, R^{[n]}_{1,i_s+2}(x)\big) \cdots \big)\big)\big).$$

Тоді $\big(R^{[n]}_{m+1,1}(x)\big)^{(m)} = m!\, N^{[n,1]}_{m+1,1}(x)$. Очевидно, що

$$N^{[n,1]}_{s+1,t}(x) = \sum_{j=t}^{n-1-2s} \big(X_j(x) N^{[n,0]}_{s,j+2} + a_{j+1} N^{[n,1]}_{s,j+2}(x)\big),\; N^{[n,1]}_{1,t}(x) = R^{[n]}_{1,t}(x). \quad (2.75)$$

За індукцією з формули (2.71) можна отримати співвідношення

$$\big(R^{[n]}_{m+s,1}(x)\big)^{(m)} = m!\, N^{[n,s]}_{m+s,1}(x), \qquad s = \overline{1, l-m},$$

де

$$N^{[n,s]}_{m+s,t}(x) = \sum_{j=t}^{n+1-2(m+s)} \big(X_j(x) N^{[n,s-1]}_{m+s-1,j+2}(x) + a_{j+1} N^{[n,s]}_{m+s-1,j+2}(x)\big), \quad (2.76)$$

$$N_{s,t}^{[n,s]}(x) = R_{s,t}^{[n]}(x).$$

З врахуванням отриманого маємо, що (2.73) набуде вигляду

$$\frac{d^{n+1}}{d\,x^{n+1}}\big[f(x)\,Q_n^{(c)}(x)\big] = f^{(n+1)}(x)\,Q_n^{(c)}(x)+$$

$$+\sum_{m=1}^{l} \mathrm{C}_{n+1}^{m}\, f^{(n+1-m)}(x)\, m!\,\sum_{k=m}^{l} N_{k,1}^{[n,k-m]}(x)\ .$$

Тоді

$$\left|\frac{d^{n+1}\big[f(x)Q_n^{(c)}(x)\big]}{dx^{n+1}}\right| \leqslant f^*\Big(\big|Q_n^{(c)}(x)\big| + \sum_{m=1}^{l} C_{n+1}^{m} m! \sum_{k=m}^{l} |N_{k,1}^{[n,k-m]}(x)|\Big). \qquad (2.77)$$

Згідно з теоремою 2.2

$$\big|Q_n^{(c)}(x)\big| \leqslant \kappa_{n+1}(\rho). \qquad (2.78)$$

Знайдемо оцінку $|N_{k,1}^{[n,k-m]}(x)|$, коли $k=\overline{m,l}$. Для $k=m$ з (2.74) маємо, що

$$|N_{m,i+2}^{[n,0]}(x)| \leqslant \frac{(a^*)^m}{m!}\prod_{j=1}^{m}(n-1-i-2m+j)\ .$$

Для $k=m+1$ із формули (2.75) отримуємо, що

$$|N_{m+1,i+2}^{[n,1]}(x)| \leqslant \sum_{j=i+2}^{n-1-2m}\big(|X_j(x)|\,|N_{m,j+2}^{[n,0]}(x)| + |a_{j+1}||N_{m,j+2}^{[n,1]}(x)|\big)\ . \qquad (2.79)$$

Коли $m=0$, то з (2.79) маємо $|N_{1,i+2}^{[n,1]}(x)| = |R_{1,i+2}^{[n]}(x)| \leqslant d_{\mathcal{R}}\, a^*(n-i-2)$. Коли $m=1$, то з (2.79) випливає, що

$$|N_{2,i+2}^{[n,1]}(x)| \leqslant \sum_{j=i+2}^{n-3}\big(|X_j(x)|\,|N_{1,j+2}^{[n,0]}(x)| + |a_{j+1}|\,|N_{1,j+2}^{[n,1]}(x)|\big) \leqslant$$

$$\leqslant 2d_{\mathcal{R}}\,(a^*)^2\sum_{j=i+2}^{n-3}(n-j-2) = d_{\mathcal{R}}\,(a^*)^2(n-i-4)(n-i-3).$$

За індукцією доведемо, що

$$|N_{k,i+2}^{[n,1]}(x)| \leqslant \frac{d_{\mathcal{R}}(a^*)^k}{(k-1)!}\prod_{j=1}^{k}(n-i-2k+j-1)\ , \qquad k=\overline{1,l}. \qquad (2.80)$$

У випадку $k = 1, 2$ формула (2.80) виконується. Зробимо припущення, що вона має місце для $k = t$. Коли $k = t + 1$, то з (2.79) отримаємо

$$|N^{[n,1]}_{t+1,i+2}(x)| \leqslant \sum_{j=i+2}^{n-1-2t} \big(|X_j(x)|\,|N^{[n,0]}_{t,j+2}(x)| + |a_{j+1}|\,|N^{[n,1]}_{t,j+2}(x)|\big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=i+2}^{n-1-2k} \Big(a^* d_{\mathcal{R}} \frac{(a^*)^t}{t!} \prod_{l=1}^{t} (n-j-2t+l-1) + a^* \frac{d_{\mathcal{R}} (a^*)^t}{(t-1)!} \prod_{l=1}^{t} (n-j-2t+l-1)\Big) =$$

$$= \frac{d_{\mathcal{R}}\,(a^*)^{t+1}}{t!} \prod_{j=1}^{t+1} (n-i-2(t+1)+j-1),$$

тобто формула (2.80) має місце і в цьому випадку.

Скориставшись методом повної математичної індукції покажемо, що

$$|N^{[n,s]}_{m+s,i+2}(x)| \leqslant \frac{d^s_{\mathcal{R}}\,(a^*)^{m+s}}{m!\,s!} \prod_{l=1}^{m+s} (n-i-2(m+s)+l-1), s = \overline{0, l-m}. \quad (2.81)$$

Коли $s = 0, 1$, то формула (2.81) виконується. Зробимо припущення, що формула вірна для $s = k$. Тоді для $s = k + 1$ з (2.76) отримаємо, що

$$|N^{[n,k+1]}_{m+k+1,i+2}(x)| \leqslant \sum_{j=i+2}^{n-1-2(m+k)} \big(|X_j(x)||N^{[n,k]}_{m+k,j+2}(x)| + |a_{j+1}||N^{[n,k+1]}_{m+k,j+2}(x)|\big). \quad (2.82)$$

Коли $m = 0$, то з (2.76) маємо

$$|N^{[n,k+1]}_{k+1,i+2}(x)| = |R^{[n]}_{k+1,i+2}(x)| \leqslant \frac{d^{k+1}_{\mathcal{R}}\,(a^*)^{k+1}}{(k+1)!} \prod_{j=1}^{k+1} (n-i-2(k+1)+j-1).$$

Для $m = 1$ з (2.82) випливає, що

$$|N^{[n,k+1]}_{k+2,i+2}(x)| \leqslant \sum_{j=i+2}^{n-3-2k} \big(|X_j(x)|\,|N^{[n,k]}_{k+1,i+2}(x)| + |a_{j+1}|\,|N^{[n,k+1]}_{k+1,i+2}(x)|\big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=i+2}^{n-3-2k} \big(d_{\mathcal{R}}\, a^* \, \frac{d^k_{\mathcal{R}}\,(a^*)^{k+1}}{k!} \prod_{l=1}^{k+1} (n-j-2(k+1)+l-1) + a^* \frac{d^{k+1}_{\mathcal{R}}\,(a^*)^{k+1}}{(k+1)!} \times$$

$$\times \prod_{l=1}^{k+1}(n-i-2(k+1)+l-1)\Big) = \frac{d_{\mathcal{R}}^{k+1}\,(a^*)^{k+2}}{(k+1)!\;1!}\prod_{j=1}^{k+2}(n-i-2(k+2)+j-1).$$

Коли $m=2$, то

$$|N_{k+3,i+2}^{[n,k+1]}(x)| \leqslant \sum_{j=i+2}^{n-5-2k}\big(|X_j|\,|N_{k+2,i+2}^{[n,k]}(x)| + |a_{j+1}|\,|N_{k+2,i+2}^{[n,k+1]}(x)|\big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=i+2}^{n-5-2k}\Big(d_{\mathcal{R}}\,a^*\,\frac{d_{\mathcal{R}}^{k}\,(a^*)^{k+2}}{k!\,2!}\prod_{l=1}^{k+2}(n-j-2(k+2)+l-1) + a^*\frac{d_{\mathcal{R}}^{k+1}\,(a^*)^{k+2}}{(k+1)!1!}\times$$

$$\times \prod_{l=1}^{k+2}(n-i-2(k+2)+l-1)\Big) = \frac{d_{\mathcal{R}}^{k+1}\,(a^*)^{k+3}}{(k+1)!\;2!}\prod_{j=1}^{k+3}(n-i-2(k+3)+j-1).$$

Припустимо, що (2.81) виконується для $m=t$. Тоді для $m=t+1$ з (2.82) маємо

$$|N_{k+t+2,i+2}^{[n,k+1]}(x)| \leqslant \sum_{j=i+2}^{n-3-2(k+t)}\big(|X_j|\,|N_{k+t+1,j+2}^{[n,k]}(x)| + |a_{j+1}|\,|N_{k+t+1,j+2}^{[n,k+1]}(x)|\big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=i+2}^{n-3-2(k+t)}\Big(d_{\mathcal{R}}a^*\,\frac{d_{\mathcal{R}}^{k}\,(a^*)^{k+t+1}}{k!(t+1)!}\prod_{l=1}^{k+t+1}(n-j-2(k+t+1)+l-1)+$$

$$+a^*\frac{d_{\mathcal{R}}^{k+1}(a^*)^{k+t+1}}{(k+1)!\;t!}\prod_{l=1}^{k+t+1}(n-i-2(k+t+1)+l-1)\Big) =$$

$$= \frac{d_{\mathcal{R}}^{k+1}\,(a^*)^{k+t+2}}{(k+1)!\,(t+1)!}\prod_{j=1}^{k+t+2}(n-i-2(k+t+2)+j-1).$$

Формула (2.81) вірна і в цьому випадку, отже вона вірна для довільних s та m. Із (2.81) випливає, що

$$|N_{m+s,1}^{[n,s]}(x)| \leqslant \frac{d_{\mathcal{R}}^{s}\,(a^*)^{m+s}}{m!\,s!}\prod_{l=1}^{m+s}(n-2(m+s)+l)\ . \tag{2.83}$$

З (2.41),(2.77), (2.78) та (2.83) отримуємо (2.70). □

Зауваження 2.9. В підрозділі Б.5 додатку (стор. 350) наведені приклади, які ілюструють ефективність оцінки (2.70) теореми 2.14.

Теорема 2.15. *Нехай функція* $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$ *і за значеннями функції у вузлах* (2.28) *побудований С–ІЛД* (2.63)*, частинні чисельники якого задовольняють умову типу Пейдона–Уолла*

$$0 < \rho \leqslant t(1-t), \quad \text{де } t \in (0; \tfrac{1}{2}], \ \rho = a^* d_{\mathcal{R}}, \ d_{\mathcal{R}} = \mathbf{diam}\,\mathcal{R}, \ a^* = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|.$$

Тоді для довільного $x \in \mathcal{R}$ *має місце наступна оцінка:*

а) коли $0 < t < \frac{1}{2}$

$$|R_n^{(c)}(x)| \leqslant \frac{f^* d_{\mathcal{R}}^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(1-t)^{n+1} - t^{n+1}}{(1-t)^{n+2} - t^{n+2}} \Big(\kappa_{n+1}(t(1-t)) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{l} \mathrm{C}_{n+1}^{m} \frac{t^m (1-t)^m}{d_{\mathcal{R}}^m} \sum_{i=0}^{l-m} \frac{t^i (1-t)^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n - 2(m+i) + j) \Big) \ , \tag{2.84}$$

б) коли $t = \frac{1}{2}$

$$|R_n^{(c)}(x)| \leqslant \frac{f^* d_{\mathcal{R}}^{n+1}}{n!} \frac{2}{n+2} \big(\kappa_{n+1}(\tfrac{1}{4}) + \sum_{m=1}^{l} \mathrm{C}_{n+1}^{m} \frac{1}{(4 d_{\mathcal{R}})^m} \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{l-m} \frac{1}{4^i \, i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n - 2(m+i) + j) \big) \ , \tag{2.85}$$

де $\kappa_n(\rho), f^*, l$ *визначені в умові теореми 2.14.*

Доведення. Згідно із умовою даної теореми $a^* \leqslant t(1-t)/d_{\mathcal{R}}$. Тоді з теорем 2.4 та 2.14 отримуємо нерівності (2.84) та (2.85). □

Зауваження 2.10. В роботі [77] (див. також [92, с. 114–119]) розглядалися інтерполяційні ланцюгові дроби Ойлера, які еквівалентні інтерполяційному многочлену у формі Ньютона. Наведені у цих роботах результати та числові експерименти дозволяють стверджувати, що такі інтерполяційні ланцюгові дроби не мають жодних обчислювальних переваг над інтерполяційним многочленом у формі Ньютона, якому вони еквівалентні.

2.7. Інтерполяція функціоналів інтегральними ланцюговими С–дробами

Розглянемо задачу інтерполяції функціонала, заданого на множині континуальних вузлів, інтегральними ланцюговими С–дробами. В частковому випадку такий інтегральний ланцюговий дріб містить в собі інтерполяційний ланцюговий С–дріб, тому він є узагальненням одного із типів ланцюгових дробів, що використовуються для інтерполяції функцій.

Нехай функції $x(z), x_i(z) \in C[0,1], i = \overline{0,n}$, де $x_i(z) \neq x_j(z)$, є фіксованими елементами з $C[0,1]$, $F(x(\cdot))$ — деякий функціонал, визначений у просторі кусково–неперервних функцій $Q[0,1]$. Утворимо континуальні вузли

$$x^0(z,\xi) = x_0(z),\ x^i(z,\xi) = x_0(z) + H(z-\xi)(x_i(z) - x_0(z)), \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.86}$$

де $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $H(\cdot)$ — функція Гевісайда.

Розглянемо множину інтегральних ланцюгових дробів (ІнтЛД) вигляду

$$Q_n(x(\cdot),\xi) = a_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{\int_0^1 a_k(z_)[x(z_k) - x^{k-1}(z_k)]dz_k}{1}, \tag{2.87}$$

де $a_0, a_1(z), a_2(z), \ldots, a_n(z)$ — деякі ядра.

Сформулюємо інтерполяційну задачу: в множині ІнтЛД (2.87) знайти такий ланцюговий дріб, який на континуальних вузлах (2.86) задовольняє інтерполяційним умовам

$$F(x_0(\cdot)) = Q_n(x_0(\cdot),\xi), F(x^i(\cdot,\xi)) = Q_n(x^i(\cdot,\xi),\xi), i = \overline{1,n}, \forall\, \xi \in [0,1] \tag{2.88}$$

і який, як частинний випадок, містить в собі С–ІЛД (2.63). Такий ІнтЛД назвемо інтегральним інтерполяційним ланцюговим С–дробом (С–ІнтІЛД).

Визначимо ядра $a_0, a_1(z), \ldots, a_n(z)$ з умови, що С–ІнтІЛД (2.87) задовольняє (2.88). Зауважимо, що з (2.87), (2.88) безпосередньо можна одержати, що для $k = \overline{0,n}$

$$Q_n(x^k(\cdot,\xi),\xi) = a_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{m=1}^{k} \frac{\int\limits_0^1 a_m(z_1)[x^k(z_m,\xi) - x^{m-1}(z_m)]dz_m}{1}. \tag{2.89}$$

Теорема 2.16. *Нехай функціонал $F(x(\cdot))$ диференційований за Гато $(n-1)$ разів і наступні формули мають сенс. Для того, щоб С–ІнтІЛД (2.87) задовольняв інтерполяційні умови (2.88) необхідно, щоб його ядра визначалися за формулами*

$$a_k(\xi) = \frac{-1}{x_k(\xi) - x_{k-1}(\xi)} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\int\limits_0^1 a_{k-1}(z_{k-1})[x^k(z_{k-1},\xi) - x^{k-2}(z_{k-1},\xi)]dz_{k-1}}{-1} + \right.$$

$$+ \frac{\int\limits_0^1 a_{k-2}(z_{k-2})[x^k(z_{k-2},\xi) - x^{k-3}(z_{k-2},\xi)]dz_{k-2}}{-1} + \cdots +$$

$$\left. + \frac{\int\limits_0^1 a_2(z_2)[x^k(z_2,\xi) - x^1(z_2,\xi)]dz_2}{-1} + \frac{\int\limits_0^1 a_1(z_1)[x^k(z_1,\xi) - x_0(z_1)]dz_1}{F(x^k(\cdot,\xi)) - F(x_0(\cdot))} \right), \tag{2.90}$$

$$a_0 = F(x_0(\cdot)), \quad a_1(\xi) = \frac{-1}{x_1(\xi) - x_0(\xi)} \frac{d}{d\xi} F(x^1(\cdot,\xi)), \qquad k = \overline{2,n}.$$

Доведення. Для $k = 0, 1$ формули є очевидними. При $k = m$ із (2.88), (2.89) отримуємо

$$F(x^m(\cdot,\xi)) = a_0 + \frac{\int\limits_0^1 a_1(z_1)[x^m(z_1,\xi) - x_0(z_1)]dz_1}{1} +$$

$$+ \frac{\int\limits_0^1 a_2(z_2)[x^m(z_2,\xi) - x^1(z_2,\xi)]dz_2}{1} + \cdots +$$

$$+ \frac{\int\limits_0^1 a_{m-1}(z_{m-1})[x^m(z_{m-1},\xi) - x^{m-2}(z_{m-1},\xi)]dz_{m-1}}{1} +$$

$$+\frac{\int\limits_0^1 a_m(z_m)[x^m(z_m,\xi)-x^{m-1}(z_m,\xi)]dz_m}{1}.$$

Послідовно обертаючи ланцюговий дріб, одержимо

$$\int\limits_\xi^1 a_m(z_m)[x^m(z_m,\xi)-x^{m-1}(z_m,\xi)]dz_m+1=$$

$$=\frac{\int\limits_0^1 a_{m-1}(z_{m-1})[x^m(z_{m-1},\xi)-x^{m-2}(z_{m-1},\xi)]dz_{m-1}}{-1}+$$

$$+\cdots+\frac{\int\limits_0^1 a_2(z_2)[x^m(z_2,\xi)-x^1(z_2,\xi)]dz_2}{-1}+\frac{\int\limits_0^1 a_1(z_1)[x^m(z_1,\xi)-x_0(z_1)]dz_1}{F(x^m(\cdot,\xi))-F(x_0(\cdot))}.$$

Диференціюючи за змінною ξ обидві частини цього співвідношення, прийдемо до формули (2.90). $\square$

Теорема 2.17. *Нехай*

$$F(x(\cdot))=f\Big(\int\limits_0^1 x(t)dt\Big) \tag{2.91}$$

і ядра С–ІнтІЛД (2.87) *визначаються за формулами* (2.90)*. Для того, щоб С–ІнтІЛД дріб задовольняв інтерполяційні умови* (2.88)*, достатньо, щоб функція $f(s)\in C^{(n-1)}(-\infty,+\infty)$.*

Доведення. Нехай ядра С–ІнтІЛД визначаються за формулами (2.90). Для $k=0,1$ із (2.89) безпосередньо випливає, що $Q_n(x_0(\cdot),\xi)=F(x_0(\cdot))$, $Q_n(x^1(\cdot,\xi),\xi)=F(x^1(\cdot,\xi))$, $\forall\xi\in[0,1]$. Для $k=2$ із (2.89) отримаємо

$$Q_n(x^2(\cdot,\xi),\xi)=a_0+\frac{\int\limits_0^1 a_1(z_1)[x^2(z_1,\xi)-x_0(z_1)]dz_1}{1+\int\limits_0^1 a_2(z_2)[x^2(z_2,\xi)-x^1(z_2,\xi)]dz_2}. \tag{2.92}$$

Підставимо значення ядра $a_2(z_2)$ і знайдемо знаменник дробу:

$$P_2=1+\int\limits_0^1 a_2(z_2)[x^2(z_2,\xi)-x^1(z_2,\xi)]dz_2=$$

$$= 1 - \int\limits_{\xi}^{1} \frac{d}{dz_2}\left(\frac{\int\limits_{z_2}^{1} a_1(z_1)[x_2(z_1) - x_0(z_1)]dz_1}{F(x^2(\cdot,\xi)) - F(x_0(\cdot))}\right) dz_2 =$$

$$= 1 - \lim_{z_2\to 1} K_2[z_2, x_2] + \frac{\int\limits_{\xi}^{1} a_1(z_1)[x_2(z_1) - x_0(z_1)]dz_1}{F(x^2(\cdot,\xi)) - F(x_0(\cdot))},$$

де

$$K_2[z_2, x_2] = \frac{\int\limits_{z_2}^{1} a_1(z_1)[x_2(z_1) - x_0(z_1)]dz_1}{F(x^2(\cdot, z_2)) - F(x_0(\cdot))}.$$

Застосовуючи правило Лопіталя і враховуючи (2.90), (2.91), одержимо

$$\lim_{z_2\to 1} K_2[z_2, x_2] = -\lim_{z_2\to 1} \frac{a_1(z_2)[x_2(z_2) - x_0(z_2)]}{\dfrac{dF(x^2(\cdot, z_2))}{dz_2}} = \lim_{z_2\to 1} \frac{a_1(z_2)}{a_1(z_2)\big|_{x_1(z_2)\to x_2(z_2)}} =$$

$$= \lim_{z_2\to 1} \frac{x_2(z_2) - x_0(z_2)}{x_1(z_2) - x_0(z_2)} \frac{f'\big(\int\limits_0^1 x^1(t, z_2)dt\big)(x_0(z_2) - x_1(z_2))}{f'\big(\int\limits_0^1 x^2(t, z_2))dt\big)(x_0(z_2) - x_2(z_2))} = 1, \forall x_2(z_2). \quad (2.93)$$

Підставимо знайдене значення границі $K_2[z_2, x_2]$ у вираз для P_2, який подальшому підставимо в (2.92). У результаті одержимо

$$Q_n(x^2(\cdot,\xi),\xi) = F(x^2(\cdot,\xi)).$$

Нехай $k = 3$. Із (2.89) отримаємо співвідношення

$$Q_n(x^3(\cdot,\xi),\xi) = F(x_0(\cdot)) + \frac{\int\limits_0^1 a_1(z_1)[x^3(z_1,\xi) - x_0(z_1)]dz_1}{1} +$$

$$+ \frac{\int\limits_0^1 a_2(z_2)[x^3(z_2,\xi) - x^1(z_2,\xi)]dz_2}{1 + \int\limits_0^1 a_3(z_3)[x^3(z_3,\xi) - x^2(z_3,\xi)]dz_3}.$$

Підставимо значення ядра $a_3(z_3)$ і обчислимо значення останнього знаменника:

$$P_3 = 1 + \int\limits_0^1 a_3(z_3)[x^3(z_3,\xi) - x^2(z_3,\xi)]dz_3 =$$

$$= 1 - \int\limits_\xi^1 \frac{d}{dz_3} \left\{ \frac{\int\limits_0^1 a_2(z_2)[x^3(z_2,z_3) - x^1(z_2,z_3)]dz_2}{-1 + \frac{\int\limits_0^1 a_1(z_1)[x^3(z_1,z_3) - x_0(z_1)]dz_1}{F(x^3(\cdot,z_3)) - F(x_0(\cdot))}} \right\} dz_3 = 1 - \lim_{z_3\to 1} K_3[z_3,x_3] +$$

$$+ \frac{\int\limits_\xi^1 a_2(z_2)[x_3(z_2) - x_1(z_2)]dz_2}{-1 + \frac{\int\limits_\xi^1 a_1(z_1)[x_3(z_1) - x_0(z_1)]dz_1}{F(x^3(\cdot,z_3)) - F(x_0(\cdot))}},$$

де

$$K_3[z_3,x_3] = \frac{\int\limits_{z_3}^1 a_2(z_2)[x_3(z_2) - x_1(z_2)]dz_2}{-1 + \frac{\int\limits_{z_3}^1 a_1(z_1)[x_3(z_1) - x_0(z_1)]dz_1}{F(x^3(\cdot,z_3)) - F(x_0(\cdot))}}.$$

Застосовуючи правило Лопіталя, з урахуванням (2.93), одержуємо

$$\lim_{z_3\to 1} K_3[z_3,x_3] = \lim_{z_3\to 1} \Big(a_2(z_3)[x_3(z_3) - x_1(z_3)]\Big) \Big/ \Bigg(\frac{a_1(z_3)[x_3(z_3) - x_0(z_3)]}{F(x^3(\cdot,z_3)) - F(x_0(\cdot))} +$$

$$+ \frac{\int\limits_{z_3}^1 a_1(z_1)[x_3(z_1) - x_0(z_1)]dz_1}{(F(x^3(\cdot,z_3)) - F(x_0(\cdot)))^2} \frac{d}{dz_3} F(x^3(\cdot,z_3)) \Bigg) =$$

$$= \lim_{z_3\to 1} \frac{x_3(z_3) - x_1(z_3)}{x_2(z_3) - x_1(z_3)} \frac{a_1(z_3)[x_2(z_3) - x_0(z_3)] + \frac{d}{dz_3}F(x^2(\cdot,z_3))}{a_1(z_3)[x_3(z_3) - x_0(z_3)] + \frac{d}{dz_3}F(x^3(\cdot,z_3))} \times$$

$$\times \frac{F(x^3(\cdot,z_3)) - F(x_0(\cdot))}{F(x^2(\cdot,z_3)) - F(x_0(\cdot))} = \lim_{z_3\to 1} \frac{x_3(z_3) - x_1(z_3)}{x_2(z_3) - x_1(z_3)} \frac{\frac{d}{dz_3}F(x^3(\cdot,z_3))}{\frac{d}{dz_3}F(x^2(\cdot,z_3))} \times$$

$$\times\frac{[x_2(z_3)-x_0(z_3)]\dfrac{d}{dz_3}F(x^1(\cdot,z_3))-[x_1(z_3)-x_0(z_3)]\dfrac{d}{dz_3}F(x^2(\cdot,z_3))}{[x_3(z_3)-x_0(z_3)]\dfrac{d}{dz_3}F(x^1(\cdot,z_3))-[x_1(z_3)-x_0(z_3)]\dfrac{d}{dz_3}F(x^3(\cdot,z_3))}.$$

Використавши (2.91) та теорему Лагранжа про скінчені прирости, маємо

$$\lim_{z_3\to 1}K_3[z_3,x_3]=\lim_{z_3\to 1}\frac{x_3(z_3)-x_1(z_3)}{x_2(z_3)-x_1(z_3)}\frac{f''(\theta_1)\Big(\int\limits_0^1 x^1(s,z_3)ds-\int\limits_0^1 x^2(s,z_3)ds\Big)}{f''(\theta_2)\Big(\int\limits_0^1 x^1(s,z_3)ds-\int\limits_0^1 x^3(s,z_3)ds\Big)}=$$

$$=\lim_{z_3\to 1}\frac{a_2(z_3)}{a_2(z_3)\big|_{x_2(z_3)\to x_3(z_3)}}=1,\qquad \forall\, x_3(z_3),$$

де

$$\theta_1=\int\limits_0^1 x^1(s,z_3)ds+\tau_1\Big(\int\limits_0^1 x^2(s,z_3)ds-\int\limits_0^1 x^1(s,z_3)ds\Big),$$

$$\theta_2=\int\limits_0^1 x^1(s,z_3)ds+\tau_2\Big(\int\limits_0^1 x^3(s,z_3)ds-\int\limits_0^1 x^1(s,z_3)ds\Big),\qquad \tau_1,\tau_2\in(0,1).$$

В загальному випадку для $k=m$ із (2.89) одержимо

$$Q_n(x^m(\cdot,\xi),\xi)=F(x_0(\cdot))+\mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{m}\frac{\int\limits_0^1 a_i(z_i)[x^m(z_i,\xi)-x^{i-1}(z_i,\xi)]dz_i}{1}.\qquad (2.94)$$

Знайдемо значення останнього знаменника

$$P_m=1+\int\limits_0^1 a_m(z_m)[x^m(z_m,\xi)-x^{m-1}(z_m,\xi)]dz_m.$$

Для цього підставимо у нього значення $a_m(z_m)$ з формули (2.90). Тоді

$$P_m=1-\int\limits_{\xi}^1\frac{d}{dz_m}\left(\frac{\int\limits_0^1 a_{m-1}(z_{m-1})[x^m(z_{m-1},z_m)-x^{m-2}(z_{m-1},z_m)]dz_{m-1}}{-1}+\right.$$

$$+\cdots+\frac{\int\limits_0^1 a_2(z_2)[x^m(z_2,z_m)-x^1(z_2,z_m)]dz_2}{-1}+$$

$$\left.+\frac{\int\limits_0^1 a_1(z_1)[x^m(z_1,z_m)-x_0(z_1)]dz_1}{F(x^m(\cdot,z_m))-F(x_0(\cdot))}\right)dz_m = 1-\lim_{z_m\to 1}K_m[z_m,x_m]+$$

$$+\frac{\int\limits_\xi^1 a_{m-1}(z_{m-1})[x_m(z_{m-1})-x_{m-2}(z_{m-1})]dz_{m-1}}{-1}+$$

$$+\cdots+\frac{\int\limits_\xi^1 a_2(z_2)[x_m(z_2)-x_1(z_2)]dz_2}{-1}+\frac{\int\limits_\xi^1 a_1(z_1)[x_m(z_1)-x_0(z_1)]dz_1}{F(x^m(\cdot,\xi))-F(x_0(\cdot))},$$

де

$$K_m[z_m,x_m]=\frac{\int\limits_{z_m}^1 a_{m-1}(z_{m-1})[x_m(z_{m-1})-x_{m-2}(z_{m-1})]dz_{m-1}}{-1}+\cdots+$$

$$+\frac{\int\limits_{z_m}^1 a_2(z_2)[x_m(z_2)-x_1(z_2)]dz_2}{-1}+\frac{\int\limits_{z_m}^1 a_1(z_1)[x_m(z_1)-x_0(z_1)]dz_1}{F(x^m(\cdot,z_m))-F(x_0(\cdot))}.$$

Аналогічно доводимо, що

$$\lim_{z_m\to 1}K_m[z_m,x_m]=\lim_{z_m\to 1}\frac{a_{m-1}(z_m)}{a_{m-1}(z_m)\big|_{x_{m-1}(z_m)\to x_m(z_m)}}=1, \qquad \forall\, x_m(z_m).$$

Підставивши знайдене значення P_m в (2.94) отримаємо бажаний результат, а саме — $Q_n(x^m(\cdot,\xi),\xi)=F(x^m(\cdot,\xi))$.

В загальному випадку вказане твердження можна довести за тією ж схемою, що й для випадку $k=2,3$, але через громіздкість викладок повне доведення не наводиться. □

Зауваження 2.11. Умова (2.91) із формулювання теореми 2.17 може бути змінена на більш загальну, якщо використати результати робіт [1,54].

Теорема 2.18. *Нехай виконуються умови теореми 2.17 і крім того* $\xi = 0$, $x(z) \equiv x, x_i(z) \equiv x_i, i = \overline{0,n}$. *Тоді С–ІнтІЛД* (2.87) *збігається з С–ІЛД* (2.63).

Доведення. Враховуючи умови теореми 2.18, отримуємо наступний вигляд ланцюгового дробу (2.87):

$$Q_n(x) = a_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{(x - x_{k-1}) \int\limits_0^1 a_k(z_k) dz_k}{1} \tag{2.95}$$

З інтерполяційної умови (2.88) одержимо

$$a_0 = f(x_0),\ \tilde{a}_1 = \int\limits_0^1 a_1(z_1) dz_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

$$\tilde{a}_2 = \int\limits_0^1 a_2(z_2) dz_2 = \frac{1}{x_2 - x_1}\left(-1 + \frac{\tilde{a}_1(x_2 - x_0)}{f(x_2) - f(x_0)}\right).$$

За індукцією покажемо, що для $m = \overline{3,n}$, має місце формула

$$\tilde{a}_m = \int\limits_0^1 a_m(z_m) dz_m = \frac{1}{x_m - x_{m-1}}\left(-1 + \frac{\tilde{a}_{m-1}(x_m - x_{m-2})}{-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\tilde{a}_{m-2}(x_m - x_{m-3})}{-1} + \cdots + \frac{\tilde{a}_2(x_m - x_1)}{-1} + \frac{\tilde{a}_1(x_m - x_0)}{f(x_m) - f(x_0)}\right). \tag{2.96}$$

Для $m = 1, 2$ формула (2.96) є вірна. Зробимо припущення, що вона виконується для $m = \overline{1, k-1}$. Тоді для $m = k$ ланцюговий дріб (2.95) може бути записаний у вигляді

$$f(x_k) = a_0 + \frac{(x_k - x_0)\tilde{a}_1}{1} + \cdots + \frac{(x_k - x_{k-2})\tilde{a}_{k-1}}{1} + \frac{(x_k - x_{k-1})\tilde{a}_k(z_k)}{1}. \tag{2.97}$$

Обертаючи ланцюговий дріб (2.97), отримаємо

$$\tilde{a}_k = \int\limits_0^1 a_k(z_k) dz_k = \frac{1}{x_k - x_{k-1}}\left(-1 + \frac{\tilde{a}_{k-1}(x_k - x_{k-2})}{-1} + \right.$$

$$+\cdots+\frac{\tilde{a}_2(x_k-x_1)}{-1}+\frac{\tilde{a}_1(x_k-x_0)}{f(x_k)-f(x_0)}\Bigg). \qquad (2.98)$$

За своєю формою права частина формули (2.98) збігається з точністю до позначень з правою частиною формули (2.65) і, крім того, початкові умови є однаковими. Отже, формула (2.96) збігається з формулою (2.65). □

2.8. Висновки до розділу 2

У другому розділі отримано оцінки канонічних знаменників підхідних дробів ФЛД, елементи яких задовольняють або умови типу Слєшинського–Прінґсгейма, теорема 2.2, теорема 2.3, або умови типу Пейдона–Уолла, теорема 2.4. В теоремі 2.5 отримано оцінку залишкового члена ІФЛД дійсної змінної частинні чисельники та знаменники якого є многочлени. Запропоновано рекурентне співвідношення у вигляді ланцюгового дробу (2.33) відшукання коефіцієнтів Т–ІЛД. В теоремі 2.7 отримано двосторонню оцінку залишкового члена Т–ІЛД у випадку інтерполяції функції комплексної змінної. Збіжність (Т–ІЛД)–процесу доведено в теоремі 2.8. В теоремі 2.9 отримано оцінку залишкового члена Т–ІЛД, коли $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R}), \mathcal{R} \subset \mathbb{R}$. Знайдено рекурентну формулу визначення коефіцієнтів С–ІЛД. В теоремі 2.12 обґрунтовано двосторонню оцінку залишкового члена С–ІЛД для функцій комплексної змінної. Збіжність (С–ІЛД)–процесу доведено в теоремі 2.13. В теоремі 2.14 отримано оцінку залишкового члена С–ІЛД, коли $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$.

Досліджено задачу інтерполяції функціонала, заданого на множині континуальних вузлів, інтегральним ланцюговим С–дробом (2.87). Отримано необхідні, теорема 2.16, та достатні умови, теорема 2.17, розв'язності розглядуваної задачі. Доведено, теорема 2.18, що інтегральний ланцюговий С–дріб містить в собі С–ІЛД, як частинний випадок.

Результати розділу 2 опубліковано в роботах [50, 70–75, 77, 78, 87, 168, 169] та розділах монографії [92, с. 63–119].

РОЗДІЛ 3
КВАЗІ–ОБЕРНЕНІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ЛАНЦЮГОВІ ДРОБИ

3.1. Обернені функціональні ланцюгові дроби

Розглянемо ланцюговий дріб вигляду

$$D^{(r)}(z) = \left(b_0^{(r)}(z) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^{(r)}(z)}{b_k^{(r)}(z)} \right)^{-1}, \tag{3.1}$$

який є оберненим функціональним ланцюговим дробом (ОФЛД) до деякого функціонального ланцюгового дробу вигляду (2.1). Розглянемо n-й підхідний дріб ОФЛД (3.1)

$$D_n^{(r)}(z) = \frac{P_n^{(r)}(z)}{Q_n^{(r)}(z)} = \left(b_0^{(r)}(z) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k^{(r)}(z)}{b_k^{(r)}(z)} \right)^{-1}, \tag{3.2}$$

де $a_k^{(r)}(z), b_k^{(r)}(z) \in \mathbf{C}(\mathcal{Z}), a_k^{(r)}(z) \neq 0$.

Значення канонічних чисельника $P_n^{(r)}(z)$ та знаменника $Q_n^{(r)}(z)$ підхідного дробу (3.2) можна знайти за допомогою формул Валліса (1.6) для початкових значень

$$P_{-1}^{(r)}(z) = 0,\ Q_{-1}^{(r)}(z) = P_0^{(r)}(z) = 1,\ Q_0^{(r)}(z) = b_0^{(r)}(z). \tag{3.3}$$

Встановимо для ланцюгового дробу (3.1) детермінантну формулу аналогічну формулі (1.9). Для цього скористаємося формулами Валліса (1.6)

$$P_n^{(r)}(z)Q_{n-1}^{(r)}(z) - P_{n-1}^{(r)}(z)Q_n^{(r)}(z) = \big(b_n^{(r)}(z)P_{n-1}^{(r)}(z) + a_n^{(r)}(z)P_{n-2}^{(r)}(z)\big)\times$$
$$\times Q_{n-1}^{(r)}(z) - P_{n-1}^{(r)}(z)\big(b_n^{(r)}(z)Q_{n-1}^{(r)}(z) + a_n^{(r)}(z)Q_{n-2}^{(r)}(z)\big) = -a_n^{(r)}(z)\big(P_{n-1}^{(r)}(z)\times$$
$$\times Q_{n-2}^{(r)}(z) - P_{n-2}^{(r)}(z)Q_{n-1}^{(r)}(z)\big) = a_{n-1}^{(r)}(z)a_n^{(r)}(z)\big(P_{n-2}^{(r)}(z)Q_{n-3}^{(r)}(z) - P_{n-3}^{(r)}(z)\times$$

$$\times Q_{n-2}^{(r)}(z)\big) = \dots = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} a_i^{(r)}(z)\big(P_0^{(r)}(z)Q_{-1}^{(r)}(z) - P_{-1}^{(r)}(z)Q_0^{(r)}(z)\big).$$

Таким чином, із врахуванням початкових значень (3.3), отримали наступну детермінанту формулу $P_n^{(r)}(z)Q_{n-1}^{(r)}(z) - P_{n-1}^{(r)}(z)Q_n^{(r)}(z) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} a_i^{(r)}(z)$.

Якщо зроблено припущення, що $Q_{n-1}^{(r)}(z)Q_n^{(r)}(z) \neq 0$, то тоді різниця між двома сусідніми підхідними дробами ОФЛД буде визначатися за формулою

$$\frac{P_n^{(r)}(z)}{Q_n^{(r)}(z)} - \frac{P_{n-1}^{(r)}(z)}{Q_{n-1}^{(r)}(z)} = \frac{(-1)^n \prod_{i=1}^{n} a_i^{(r)}(z)}{Q_{n-1}^{(r)}(z)\, Q_n^{(r)}(z)}. \tag{3.4}$$

Із (3.4) безпосередньо отримуємо, що

$$D_n^{(r)}(z) = \frac{1}{b_0^{(r)}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \prod_{i=1}^{k} a_k^{(r)}(z)}{Q_{k-1}^{(r)}(z)Q_k^{(r)}(z)}\ . \tag{3.5}$$

В класі ОФЛД виокремимо підклас обернених інтерполяційних функціональних ланцюгових дробів (ОІФЛД), тобто таких ОФЛД, для яких на множині інтерполяційних вузлів (1.16) виконується умова (2.27).

Теорема 3.1. ***(A)*** *Якщо частинні чисельники та знаменники ОФЛД* (3.2) *для довільного* $z \in \mathcal{Z}$ *задовольняють нерівності* $0 < |a_i^{(r)}(z)| \leqslant \delta_r$, $0 < \gamma_r \leqslant |b_i^{(r)}(z)|$, $i = \overline{1,n}$, *то*

$$\left|Q_n^{(r)}(z)\right| < \prod_{i=0}^{n} |b_i^{(r)}(z)|\, \kappa_{n+2}(\omega_r), \qquad \omega_r = \delta_r/\gamma_r^2. \tag{3.6}$$

(B) *Якщо крім того* $\gamma_r \geqslant \delta_r + 1$, *то*

$$\left|Q_n^{(r)}(z)\right| \geqslant |\Psi_n|, \tag{3.7}$$

де

$$\Psi_n = \begin{cases} \delta_r\, \kappa_n(\omega_r)\, \prod_{k=2}^{n} |b_k^{(r)}(z)| - \gamma_r \dfrac{\delta_r^{n+1} - 1}{\delta_r - 1}, & \textit{коли} \quad \delta_r \neq 1, \\ \kappa_n(\omega_r)\, \prod_{k=2}^{n} |b_k^{(r)}(z)| - (n+1)\gamma_r, & \textit{коли} \quad \delta_r = 1. \end{cases}$$

Доведення. Запишемо ОФЛД (3.2) у вигляді

$$\frac{P_n^{(r)}(z)}{Q_n^{(r)}(z)} = \left(b_0^{(r)}(z) + a_1^{(r)}(z)\Big/\left(b_1^{(r)}(z) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=2}^{n} \frac{a_k^{(r)}(z)}{b_k^{(r)}(z)}\right)\right)^{-1}.$$

Нехай $P_1^{(n)}(z)$ та $Q_1^{(n)}(z)$ канонічні чисельник та знаменник ФЛД вигляду (2.1), тобто $P_1^{(n)}(z)/Q_1^{(n)}(z) = b_1^{(r)}(z) + \mathbf{K}_{k=2}^{n}(a_k^{(r)}(z)/b_k^{(r)}(z))$. Тоді

$$\frac{P_n^{(r)}(z)}{Q_n^{(r)}(z)} = \frac{P_1^{(n)}(z)}{b_0^{(r)}(z)P_1^{(n)}(z) + a_1^{(r)}(z)Q_1^{(n)}(z)}.$$

Згідно із формулою Ойлера–Міндінґа (2.3) канонічний знаменник $Q_n^{(r)}$ може бути записаний у вигляді

$$Q_n^{(r)}(z) = \prod_{i=0}^{n} b_i^{(r)}(z)\Big(1 + \sum_{i=0}^{n-1} X_i(z) + \sum_{i_1=0}^{n-3} X_{i_1}(z) \sum_{i_2=i_1+2}^{n-1} X_{i_2}(z) + \cdots +$$
$$+ \sum_{i_1=0}^{n+1-2s} X_{i_1}(z) \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2s} X_{i_2}(z) \cdots \sum_{i_s=i_{s-1}+2}^{n-1} X_{i_s}(z)\Big), \quad s = \left[\tfrac{n+1}{2}\right],$$

де $X_i(z) = a_{i+1}^{(r)}(z)/(b_i^{(r)}(z)b_{i+1}^{(r)}(z))$. Тоді із теореми 2.2 отримаємо (3.6).

Згідно із теоремою 2.2 маємо, що $|Q_1^{(n)}(z)| \leqslant \prod_{k=2}^{n} |b_k^{(r)}(z)|\kappa_n(\omega_r)$. Повторивши міркування теореми 2.3 легко переконатись, що

$$\left|P_1^{(n)}(z)\right| \geqslant \begin{cases} \dfrac{\delta_r^{n+1} - 1}{\delta_r - 1}, & \text{якщо} \quad \delta_r \neq 1, \\ n + 1, & \text{якщо} \quad \delta_r = 1. \end{cases}$$

Оцінимо $Q_n^{(r)}(z)$ по модулю $\left|Q_n^{(r)}(z)\right| \geqslant \left||a_1^{(r)}(z)||Q_1^{(n)}(z)| - |b_0^{(r)}(z)||P_1^{(n)}(z)|\right|$. Якщо $\delta_r \neq 1$, то $\left|Q_n^{(r)}(z)\right| \geqslant \left|\delta_r\kappa_n(\omega_r)\prod_{k=2}^{n} |b_k^{(r)}(z)| - \gamma_r \dfrac{\delta_r^{n+1} - 1}{\delta_r - 1}\right|$, якщо $\delta_r = 1$, то $\left|Q_n^{(r)}(z)\right| \geqslant \left|\kappa_n(\omega_r)\prod_{k=2}^{n} |b_k^{(r)}(z)| - (n+1)\gamma_r\right|$. Отже $|Q_n^{(r)}(z)| \geqslant |\Psi_n|$. □

Зауваження 3.1. Якщо крім того припустити, що $|b_0^{(r)}(z)| \geqslant \delta_r + 1$, то аналогічно як у випадку теореми 2.3 отримаємо:

$$\left|Q_n^{(r)}(z)\right| \geqslant \begin{cases} \dfrac{\delta_r^{n+2}-1}{\delta_r-1}, & \text{якщо } \delta_r \neq 1, \\ n+2, & \text{якщо } \delta_r = 1. \end{cases}$$

Розглянемо ОІФЛД дійсної змінної, який визначений на компакті $\mathcal{R}$

$$D_n^{(r)}(x) = \frac{P_n^{(r)}(x)}{Q_n^{(r)}(x)} = \left(b_0^{(r)}(x) + \operatorname*{K}_{k=1}^{n} \frac{a_k^{(r)}(x)}{b_k^{(r)}(x)} \right)^{-1}. \tag{3.8}$$

Очевидно, що канонічний знаменник $Q_n^{(r)}(x)$ згідно із теоремою 2.1 визначається через елементи ланцюгового дробу за формулою Ойлера–Міндінга (2.3) та може бути записаний у вигляді $Q_n^{(r)}(x) = B_0^{[n]}(x) \sum\limits_{k=0}^{r} R_{k,0}^{[n]}(x)$, де $r = \left[\frac{n+1}{2}\right]$, а $B_0^{[n]}(x), R_{k,0}^{[n]}(x)$ визначені в (2.4) та (2.7) відповідно.

Якщо елементи ОІФЛД (3.8) многочлени, степінь многочлена канонічного чисельника $\deg P_n^{(r)}(x) \leqslant n$ і функція $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$, то залишковий член ОІФЛД визначається за формулою (2.41) та мають місце формули аналогічні формулам (2.43) та (2.44), тобто

$$\frac{d^{n+1}}{d\,x^{n+1}}\left[f(x)\,Q_n^{(r)}(x)\right] = f^{(n+1)}(x)\,Q_n^{(r)}(x) + \sum_{m=1}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^{m}\, f^{(n+1-m)}(x) \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{m} \mathrm{C}_m^j \big(B_0^{[n]}(x)\big)^{(m-j)} \sum_{k=0}^{r} \big(R_{k,0}^{[n]}(x)\big)^{(j)}, \tag{3.9}$$

$$\big(R_{k,0}^{[n]}(x)\big)^{(m)} = \sum_{j=0}^{n+1-2k} \sum_{i=0}^{m} \mathrm{C}_m^i\, X_j^{(i)}(x)\, \big(R_{k-1,j+2}^{[n]}(x)\big)^{(m-i)}, \tag{3.10}$$

де $X_i(x)$ визначено в (2.4).

3.2. Квазі–обернений інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле

Визначимо послідовності $\{v_k(z)\}$ і $\{V_k(z)\}$ співвідношеннями:

$$f(z) = \frac{1}{v_0(z)},\ v_k(z) = v_k(z_k) + \frac{z - z_k}{v_{k+1}(z)}, \quad z_k \in \mathbf{Z},\ k = \overline{0,n}, \tag{3.11}$$

$$V_0(z) = v_0(z), \quad V_k(z) = v_0 \circ v_1 \circ \cdots \circ v_k(z), \qquad k = \overline{1,n}.$$

Тоді

$$f(z) = \frac{1}{V_n(z)} = \left(v_0(z_0) + \frac{z - z_0}{v_1(z_1)} + \cdots + \frac{z - z_{n-1}}{v_n(z_n)} + \frac{z - z_n}{v_{n+1}(z)}\right)^{-1}.$$

Зробимо позначення $d_k = v_k(z_k), k = \overline{0,n}$. Маємо

$$f(z) = \left(d_0 + \frac{z - z_0}{d_1} + \frac{z - z_1}{d_2} + \cdots + \frac{z - z_{n-1}}{d_n} + \frac{z - z_n}{v_{n+1}(z)}\right)^{-1}. \tag{3.12}$$

Розглянемо також ланцюговий дріб вигляду

$$\tilde{D}_n^{(T)}(z) = \left(d_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{z - z_{k-1}}{d_k}\right)^{-1}. \tag{3.13}$$

Якщо скористатися прямим (1.6) (або оберненим (1.11)) рекурентним алгоритмом, то можемо поставити у відповідність ланцюговим дробам (3.12) та (3.13) відношення двох многочленів

$$f(z) = \frac{\tilde{P}_{n+1}^{(*)}(z)}{\tilde{Q}_{n+1}^{(*)}(z)} = \left(d_0 + \frac{z - z_0}{d_1} + \cdots + \frac{z - z_{n-1}}{d_n} + \frac{z - z_n}{v_{n+1}(z)}\right)^{-1}, \tag{3.14}$$

$$\tilde{D}_n^{(T)}(z) = \frac{\tilde{P}_n^{(T)}(z)}{\tilde{Q}_n^{(T)}(z)} = \left(d_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{z - z_{k-1}}{d_k}\right)^{-1}. \tag{3.15}$$

Означення 3.1. Якщо ланцюговий дріб (3.15) задовольняє інтерполяційну умову (2.27), то він називається квазі–оберненим інтерполяційним ланцюговим дробом типу Тіле (Т–КІЛД).

Теорема 3.2. *Коефіцієнти Т–КІЛД* (3.15) *визначаються через значення функції $f(z)$ в інтерполяційних вузлах* (1.16) *за допомогою рекурентного співвідношення у вигляді скінченного ланцюгового дробу, тобто*

$$d_0 = \frac{1}{w_0}, \quad d_k = \frac{z_k - z_{k-1}}{-d_{k-1}} + \cdots + \frac{z_k - z_1}{-d_1} + \frac{z_k - z_0}{1/w_k - d_0}, \qquad k = \overline{1,n}.$$

Доведення. Твердження теореми доводиться за індукцією за аналогією з теоремою 2.6. □

Зауваження 3.2. Т–КІЛД (3.15) не буде оберненим до Т–ІЛД (1.25) згідно з означенням 1.5. Якщо інтерполяційні вузли $z_0 \neq z_1$, $w_0 = f(z_0)$, $w_1 = f(z_1)$, то можемо побудувати Т–ІЛД та Т–КІЛД:

$$D_0^{(T)}(z) = w_0, \quad \tilde{D}_0^{(T)}(z) = w_0, \qquad D_1^{(T)}(z) = \frac{(z - z_0)w_1 - (z - z_1)w_0}{z_1 - z_0},$$

$$\tilde{D}_1^{(T)}(z) = \frac{w_0 w_1 (z_1 - z_0)}{(z - z_0)w_0 - (z - z_1)w_1}.$$

Так як

$$D_0^{(T)}(z)\tilde{D}_0^{(T)}(z) = w_0^2, \quad D_1^{(T)}(z)\,\tilde{D}_1^{(T)}(z) = \frac{w_0 w_1((z - z_0)w_1 - (z - z_1)w_0)}{(z - z_0)w_1 - (z - z_1)w_1},$$

то звідси маємо, що $D_0^{(T)}(z)\tilde{D}_0^{(T)}(z) = 1$ лише у частинному випадку, коли $w_0 = 1$. Аналогічно, $D_1^{(T)}(z)\tilde{D}_1^{(T)}(z) = 1$, коли виконуються, наприклад, додаткові умови $w_0 = w_1 = 1$. В загальному випадку добутки підхідних дробів 0–го та 1–го порядку не рівні одиниці.

Теорема 3.3. *Канонічний чисельник* $\tilde{P}_n^{(T)}(z)$ *та канонічний знаменник* $\tilde{Q}_n^{(T)}(z)$ *Т–КІЛД* (3.15) *є многочлени, степені яких задовольняють нерівності* $\mathbf{deg}\ \tilde{P}_n^{(T)}(z) \leqslant [n/2]$, $\mathbf{deg}\ \tilde{Q}_n^{(T)}(z) \leqslant [(n+1)/2]$.

Теорема 3.4. ***(A)*** *Нехай функція $f(z)$ визначена на компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$.* ***(B)*** *Нехай коефіцієнти Т–КІЛД* (3.15)*, які визначені за значеннями функції на множині інтерполяційних вузлах* $\mathbf{Z}$*, задовольняють умову типу Слєшинського–Прінґсгейма*

$$|d_k| \geqslant \beta \geqslant d_{\mathcal{Z}} + 1, \quad k = \overline{1,n}. \tag{3.16}$$

(C) *Нехай існує така множина* $\mathscr{Z} \subset \mathcal{Z}\backslash\mathbf{Z}$, *що в довільній точці* $z_* \in \mathscr{Z}$ *частинний знаменник* $v_{n+1}(z)$ *ланцюгового дробу* (3.14) *задовольняє умову*

$$|v_{n+1}(z_*)| \geqslant \beta \geqslant d_{\mathcal{Z}} + 1. \tag{3.17}$$

тоді

$$\frac{\min_{z_*\in\mathscr{Z}} \prod_{i=0}^{n} |z_* - z_i|}{\kappa_{n+3}(\omega^*)\,\kappa_{n+2}(\omega)\,d_{n+1}^* \prod_{i=0}^{n} |d_i|^2} \leqslant \max_{z_*\in\mathscr{Z}} |f(z_*) - \tilde{D}_n^{(T)}(z_*)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\max_{z_*\in\mathscr{Z}} \prod_{i=0}^{n} |z_* - z_i|}{|\Upsilon_n|\,|\Upsilon_{n+1}|}, \tag{3.18}$$

де

$$\Upsilon_n = \begin{cases} d_{\mathcal{Z}}\,\kappa_n(\omega) \prod\limits_{k=2}^{n} |d_k| - \beta \dfrac{(d_{\mathcal{Z}})^{n+1} - 1}{d_{\mathcal{Z}} - 1}, & \textit{якщо} \quad d_{\mathcal{Z}} \neq 1, \\ \kappa_n(\omega) \prod\limits_{k=2}^{n} |d_k| - (n+1)\beta, & \textit{якщо} \quad d_{\mathcal{Z}} = 1, \end{cases}$$

$$\Upsilon_{n+1} = \begin{cases} d_{\mathcal{Z}}\,\kappa_{n+1}(\omega) d_{n+1}^* \prod\limits_{k=2}^{n} |d_k| - \beta \dfrac{(d_{\mathcal{Z}})^{n+2} - 1}{d_{\mathcal{Z}} - 1}, & \textit{якщо} \quad d_{\mathcal{Z}} \neq 1, \\ \kappa_{n+1}(\omega) d_{n+1}^* \prod\limits_{k=2}^{n} |d_k| - (n+2)\beta, & \textit{якщо} \quad d_{\mathcal{Z}} = 1, \end{cases}$$

$d_{n+1}^* = \min_{z_*\in\mathscr{Z}} |v_{n+1}(z_*)|$, $\omega = d_{\mathcal{Z}}/\beta^2$.

Доведення. Оскільки коефіцієнти $d_i, i = \overline{0, n}$, ланцюгового дробу (3.14) збігаються із відповідними коефіцієнтами Т–КІЛД (3.15) за побудовою, то із (3.4) випливає, що для довільної точки $z_* \in \mathscr{Z}$

$$|f(z_*) - \tilde{D}_n^{(T)}(z_*)| = \left| \frac{\tilde{P}_{n+1}^{(*)}(z_*)}{\tilde{Q}_{n+1}^{(*)}(z_*)} - \frac{\tilde{P}_n^{(T)}(z_*)}{\tilde{Q}_n^{(T)}(z_*)} \right| = \left| \frac{\prod_{i=1}^{n+1}(z_* - z_{i-1})}{\tilde{Q}_{n+1}^{(*)}(z)\,\tilde{Q}_n^{(T)}(z)} \right|.$$

Згідно із припущенням коефіцієнти $d_i, i = \overline{0, n}$, та $v_{n+1}(z_*)$ задовольняють умови типу Слєшинського–Прінґсгейма (3.16) та (3.17). Із оцінок (3.6) та (3.7) отримуємо твердження теореми. □

Зауваження 3.3. Чисельні приклади інтерполювання функцій комплексної змінної Т–КІЛД, які наведені в підрозділі Б.6 додатку (стор. 352), ілюструють теорему 3.3.

Теорема 3.5. ***(A)*** *Нехай функція $f(z)$ визначена на компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$.* ***(B)*** *Нехай для кожного значення n:* ***(B1)*** *коефіцієнти $d_k^{(n)}$, де $k = \overline{0,n}$, Т–КІЛД (3.15), який побудований за значеннями $f(z)$ у вузлах $(n+1)$–го рядка матриці $\mathcal{I}$ задовольняють умову типу Слєшинського–Прінґсгейма $|d_k^{(n)}| \geqslant \beta \geqslant d_{\mathcal{Z}} + 1$, $k = \overline{1,n}$;* ***(B2)*** *існує така множина $\mathscr{Z} \subset \mathcal{Z} \backslash \mathcal{I}$, що для кожної точки $z_* \in \mathscr{Z}$ частинний знаменник $v_{n+1}(z_*)$ ланцюгового дробу (3.14) задовольняє нерівність $\left|v_{n+1}^{(n)}(z_*)\right| \geqslant \beta \geqslant d_{\mathcal{Z}} + 1$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{z_* \in \mathscr{Z}} |f(z_*) - \tilde{D}_n^{(T)}(z_*)| = 0$.*

Доведення. Для кожного фіксованого значення n має місце співвідношення (3.18). Нехай $\rho = d_{\mathcal{Z}}$. Розглянемо два випадки: а) $\rho \neq 1$; б) $\rho = 1$.

а) Нехай $\rho \neq 1$. Оскільки $\kappa_n(\omega) \geqslant 1, \beta > \rho, |d_k^{(n)}| \geqslant \rho + 1$, то тоді

$$|\Upsilon_n| = \left|\rho\, \kappa_n(\omega) \prod_{k=2}^{n} |d_k^{(n)}| - \beta \frac{\rho^{n+1} - 1}{\rho - 1}\right| > \frac{\rho}{|\rho - 1|}\left|(\rho - 1)(\rho + 1)^{n-1} - (\rho)^{n+1}\right|,$$

і

$$\max_{z_* \in \mathscr{Z}} |f(z_*) - \tilde{D}_n^{(T)}(z_*)| \leqslant \frac{\max_{z_* \in \mathscr{Z}} \prod_{i=0}^{n} |z_* - z_i|}{|\Upsilon_n|\,|\Upsilon_{n+1}|} <$$

$$< \frac{(\rho)^{n+1}(\rho - 1)^2}{(\rho)^2\left|(\rho - 1)(\rho + 1)^{n-1} - (\rho)^{n+1}\right|\,\left|(\rho - 1)(\rho + 1)^{n} - (\rho)^{n+2}\right|}.$$

Якщо $n \to \infty$, то права частина буде прямувати до нуля.

б) Коли $\rho = 1$, то

$$\max_{z_* \in \mathscr{Z}} |f(z_*) - \tilde{D}_n^{(T)}(z_*)| \leqslant \frac{\max\limits_{z_* \in \mathscr{Z}} \prod\limits_{i=0}^{n} |z_* - z_i|}{|\Upsilon_n|\,|\Upsilon_{n+1}|} < \frac{1}{4\left|2^{n-2} - n - 1\right|\left|2^{n-1} - n - 2\right|}.$$

Знову права частина прямує до нуля, коли $n \to \infty$. $\square$

3.3. Обернені різниці 2–го типу

Із (3.11) випливає, що $v_0(z) = 1/f(z), v_{k+1}(z) = (z - z_k)/(v_k(z) - v_k(z_k))$, $k \in \mathbb{N}_0$. Введемо в розгляд послідовність обернених поділених різниць 2–го типу наступним чином:

$$\begin{gathered}\Phi_k^{(2)}[z_0,\ldots,z_{k-1},z;f]=\frac{z-z_{k-1}}{\Phi_{k-1}^{(2)}[z_0,\ldots,z_{k-2},z;f]-\Phi_{k-1}^{(2)}[z_0,\ldots,z_{k-1};f]},\\ \Phi_0^{(2)}[z;f]=\frac{1}{f(z)}.\end{gathered} \tag{3.19}$$

Тоді $d_k=v_k(z_k)=\Phi_k^{(2)}[z_0,z_1,\ldots,z_k;f],\ k=\overline{0,n}$.

Обернена поділена різниця 2–го типу k–го порядку $\Phi_k^{(2)}[z_0,\ldots,z_k;f]$ залежить від інтерполяційних вузлів $z_0,\ldots,z_k$ та значень функції $f(z)$ в цих вузлах і в той же час є симетрична функція відносно тільки двох своїх аргументів z_{k-1} та z_k. Введемо в розгляд співвідношення вигляду

$$\rho_k^{(2)}[z_0,\ldots,z_k;f]=\sum_{i=0}^{[k/2]}\Phi_{k-2i}^{(2)}[z_0,z_1,\ldots,z_{k-2i};f], \tag{3.20}$$

яке будемо називати оберненою різницею 2–го типу k–го порядку. З (3.20) маємо, що $\Phi_k^{(2)}[z_0,\ldots,z_k;f]=\rho_k^{(2)}[z_0,\ldots,z_k;f]-\rho_{k-2}^{(2)}[z_0,\ldots,z_{k-2};f]$.

Тоді з (3.19) випливає, що обернені різниці 2–го типу задовольняють рекурентне співвідношення

$$\begin{gathered}\rho_k^{(2)}[z_0,\ldots,z_k;f]=\rho_{k-2}^{(2)}[z_0,\ldots,z_{k-2};f]+\\ +\frac{z_k-z_{k-1}}{\rho_{k-1}^{(2)}[z_0,\ldots,z_{k-2},z_k;f]-\rho_{k-1}^{(2)}[z_0,\ldots,z_{k-1};f]},\quad k=\overline{2,n},\\ \rho_0^{(2)}[z_0;f]=\frac{1}{f(z_0)},\quad \rho_1^{(2)}[z_0,z_1;f]=\frac{z_1-z_0}{\rho_0^{(2)}[z_1;f]-\rho_0^{(2)}[z_0;f]}.\end{gathered} \tag{3.21}$$

Теорема 3.6. *Обернена різниця 2–го типу k–го порядку є симетричною функцією своїх аргументів $z_0,z_1,\ldots,z_k$.*

Доведення. Легко бачити, що

$$\rho_1^{(2)}[z_0,z_1;f]=\frac{(z_1-z_0)\,w_0\,w_1}{w_0-w_1}=-\begin{vmatrix}w_0 & z_0w_0\\ w_1 & z_1w_1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & w_0\\ 1 & w_1\end{vmatrix}, \tag{3.22}$$

та

$$\rho_2^{(2)}[z_0,z_1,z_2;f]=\frac{z_0\,(w_1-w_2)+z_1\,(w_2-w_0)+z_2\,(w_0-w_1)}{z_0\,w_0\,(w_1-w_2)+z_1\,w_1\,(w_2-w_0)+z_2\,w_2\,(w_0-w_1)}=$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & w_0 & z_0 \\ 1 & w_1 & z_1 \\ 1 & w_2 & z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & w_0 & z_0w_0 \\ 1 & w_1 & z_1w_1 \\ 1 & w_2 & z_2w_2 \end{vmatrix},$$

симетричні відносно аргументів z_0, z_1, z_2.

Із (3.20) маємо, що

$$\begin{aligned} &d_0 = \rho_0^{(2)}[z_0; f],\ d_1 = \rho_1^{(2)}[z_0, z_1; f], \\ &d_k = \rho_k^{(2)}[z_0, \dots, z_k; f] - \rho_{k-2}^{(2)}[z_0, \dots, z_{k-2}; f], \quad k = \overline{2, n}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

а тоді Т–КІЛД (3.15) запишеться у вигляді

$$\tilde{D}_n^{(T)}(z) = \left(\rho_0^{(2)} + \frac{z - z_0}{\rho_1^{(2)}} + \frac{z - z_1}{\rho_2^{(2)} - \rho_0^{(2)}} + \dots + \frac{z - z_{n-1}}{\rho_n^{(2)} - \rho_{n-2}^{(2)}} \right)^{-1}. \tag{3.24}$$

Далі $\tilde{P}_0^{(T)}(z) = 1$, $\tilde{Q}_0^{(T)}(z) = \rho_0^{(2)}$, $\tilde{P}_1^{(T)}(z) = \rho_1^{(2)}$, $\tilde{Q}_1^{(T)}(z) = \rho_0^{(2)}\rho_1^{(2)} + z - z_0$. Скориставшись формулами Валліса (1.6), маємо:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{2m}^{(T)}(z) &= A_0 + A_1 z + \dots + A_{m-1} z^{m-1} + z^m, & A_m &= 1, \\ \tilde{Q}_{2m}^{(T)}(z) &= B_0 + B_1 z + \dots + B_{m-1} z^{m-1} + \rho_{2m}^{(2)} z^m, & B_m &= \rho_{2m}^{(2)}, \\ \tilde{P}_{2m+1}^{(T)}(z) &= C_0 + C_1 z + \dots + C_{m-1} z^{m-1} + \rho_{2m+1}^{(2)} z^m, & C_m &= \rho_{2m+1}^{(2)}, \\ \tilde{Q}_{2m+1}^{(T)}(z) &= D_0 + D_1 z + \dots + D_m z^m + z^{m+1}, & D_{m+1} &= 1, \end{aligned}$$

де $A_0, \dots, A_m, B_0, \dots, B_m, C_0, \dots, C_m, D_0, \dots, D_{m+1}$ деякі коефіцієнти.

В силу того, що ланцюговий дріб (3.24) інтерполяційний, отримаємо, що $w_k = \tilde{D}_n^{(T)}(z_k) = \tilde{P}_n^{(T)}(z_k)/\tilde{Q}_n^{(T)}(z_k)$, $k = \overline{0, n}$. Розглянемо два випадки: а) $n = 2m$; б) $n = 2m + 1$.

а) Коли $n = 2m$, то маємо:

$$A_0 + A_1 z_k + \dots + A_{m-1} z_k^{m-1} + z_k^m = w_k (B_0 + B_1 z_k + \dots + B_{m-1} z_k^{m-1} + B_m z_k^m)$$

для кожного $k = \overline{0, n}$, або

$$\begin{cases} A_0 - w_0 B_0 + z_0 A_1 - z_0 w_0 B_1 + \dots - z_0^{m-1} w_0 B_{m-1} - z_0^m w_0 B_m = -z_0^m, \\ A_0 - w_1 B_0 + z_1 A_1 - z_1 w_1 B_1 + \dots - z_1^{m-1} w_1 B_{m-1} - z_1^m w_1 B_m = -z_1^m, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ A_0 - w_n B_0 + z_n A_1 - z_n w_n B_1 + \dots - z_n^{m-1} w_n B_{m-1} - z_n^m w_n B_m = -z_n^m. \end{cases}$$

Отримали систему із $(2m+1)$–го лінійного алгебричного рівняння відносно невідомих $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}, B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}, B_m = \rho_{2m}^{(2)}$. Визначник системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -w_0 & z_0 & -z_0\,w_0 & z_0^2 & -z_0^2\,w_0 & \cdots & z_0^{m-1} & -z_0^{m-1}\,w_0 & -z_0^m\,w_0 \\ 1 & -w_1 & z_1 & -z_1\,w_1 & z_1^2 & -z_1^2\,w_1 & \cdots & z_1^{m-1} & -z_1^{m-1}\,w_1 & -z_1^m\,w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -w_n & z_n & -z_n\,w_n & z_n^2 & -z_n^2\,w_n & \cdots & z_n^{m-1} & -z_n^{m-1}\,w_n & -z_n^m\,w_n \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{m+1} \begin{vmatrix} 1 & w_0 & z_0 & z_0\,w_0 & z_0^2 & z_0^2\,w_0 & \cdots & z_0^{m-1} & z_0^{m-1}\,w_0 & z_0^m\,w_0 \\ 1 & w_1 & z_1 & z_1\,w_1 & z_1^2 & z_1^2\,w_1 & \cdots & z_1^{m-1} & z_1^{m-1}\,w_1 & z_1^m\,w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_n & z_n & z_n\,w_n & z_n^2 & z_n^2\,w_n & \cdots & z_n^{m-1} & z_n^{m-1}\,w_n & z_n^m\,w_n \end{vmatrix}.$$

Визначник

$$\Delta_{2m+1} = (-1)^{m+1} \begin{vmatrix} 1 & w_0 & z_0 & z_0\,w_0 & z_0^2 & z_0^2\,w_0 & \cdots & z_0^{m-1} & z_0^{m-1}\,w_0 & z_0^m \\ 1 & w_1 & z_1 & z_1\,w_1 & z_1^2 & z_1^2\,w_1 & \cdots & z_1^{m-1} & z_1^{m-1}\,w_1 & z_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_n & z_n & z_n\,w_n & z_n^2 & z_n^2\,w_n & \cdots & z_n^{m-1} & z_n^{m-1}\,w_n & z_n^m \end{vmatrix}.$$

Тоді згідно із правилом Крамера

$$\rho_{2m}^{(2)} = B_m = \begin{vmatrix} 1 & w_0 & z_0 & z_0\,w_0 & \cdots & z_0^{m-1} & z_0^{m-1}\,w_0 & z_0^m \\ 1 & w_1 & z_1 & z_1\,w_1 & \cdots & z_1^{m-1} & z_1^{m-1}\,w_1 & z_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_n & z_n & z_n\,w_n & \cdots & z_n^{m-1} & z_n^{m-1}\,w_n & z_n^m \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} 1 & w_0 & z_0 & z_0w_0 & z_0^2 & z_0^2w_0 & \cdots & z_0^{m-1} & z_0^{m-1}w_0 & z_0^mw_0 \\ 1 & w_1 & z_1 & z_1w_1 & z_1^2 & z_1^2\,w_1 & \cdots & z_1^{m-1} & z_1^{m-1}w_1 & z_1^mw_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_n & z_n & z_nw_n & z_n^2 & z_n^2w_n & \cdots & z_n^{m-1} & z_n^{m-1}w_n & z_n^mw_n \end{vmatrix}. \qquad (3.25)$$

Із формули (3.25) безпосередньо випливає, що обернена різниця 2-го типу $\rho_{2m}^{(2)} = \rho_{2m}^{(2)}[z_0, z_1, \ldots, z_{2m}; f]$ симетрична функція аргументів $z_0, z_1, \ldots, z_{2m}$.

Чисельник $\tilde{P}_{2m}^{(T)}$ та знаменник $\tilde{Q}_{2m}^{(T)}$ можуть бути подані у вигляді відношення двох визначників

$$\tilde{P}_{2m}^{(T)}(z) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & z & 0 & \cdots & z^{m-1} & 0 & z^m & 0 \\ 1 & w_0 & z_0 & z_0\, w_0 & \cdots & z_0^{m-1} & z_0^{m-1}\, w_0 & z_0^m & z_0^m\, w_0 \\ 1 & w_1 & z_1 & z_1\, w_1 & \cdots & z_1^{m-1} & z_1^{m-1}\, w_1 & z_1^m & z_1^m\, w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_n & z_n & z_n\, w_n & \cdots & z_n^{m-1} & z_n^{m-1}\, w_n & z_n^m & z_n^m\, w_n \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} 1 & w_0 & z_0 & z_0\, w_0 & z_0^2 & z_0^2\, w_0 & \cdots & z_0^{m-1} & z_0^{m-1}\, w_0 & z_0^m w_0 \\ 1 & w_1 & z_1 & z_1\, w_1 & z_1^2 & z_1^2\, w_1 & \cdots & z_1^{m-1} & z_1^{m-1}\, w_1 & z_1^m w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_n & z_n & z_n\, w_n & z_n^2 & z_n^2\, w_n & \cdots & z_n^{m-1} & z_n^{m-1}\, w_n & z_n^m w_n \end{vmatrix},$$

$$\tilde{Q}_{2m}^{(T)}(z) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & z & \cdots & 0 & z^{m-1} & 0 & z^m \\ 1 & w_0 & z_0 & z_0\, w_0 & \cdots & z_0^{m-1} & z_0^{m-1}\, w_0 & z_0^m & z_0^m\, w_0 \\ 1 & w_1 & z_1 & z_1\, w_1 & \cdots & z_1^{m-1} & z_1^{m-1}\, w_1 & z_1^m & z_1^m\, w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_n & z_n & z_n\, w_n & \cdots & z_n^{m-1} & z_n^{m-1}\, w_n & z_n^m & z_n^m\, w_n \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} 1 & w_0 & z_0 & z_0\, w_0 & z_0^2 & z_0^2\, w_0 & \cdots & z_0^{m-1} & z_0^{m-1}\, w_0 & z_0^m w_o \\ 1 & w_1 & z_1 & z_1\, w_1 & z_1^2 & z_1^2\, w_1 & \cdots & z_1^{m-1} & z_1^{m-1}\, w_1 & z_1^m w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_n & z_n & z_n\, w_n & z_n^2 & z_n^2\, w_n & \cdots & z_n^{m-1} & z_n^{m-1}\, w_n & z_n^m w_n \end{vmatrix}.$$

б) Коли $n = 2m+1$, то аналогічно отримуємо

$$C_0 + C_1 z_k + \cdots + C_{m-1} z_k^{m-1} + C_m z_k^m = w_k(D_0 + D_1 z_k + \cdots + D_m z_k^m + z_k^{m+1})$$

для кожного значення $k = \overline{0, 2m+1}$, тобто

$$\begin{cases} C_0 - w_0 D_0 + z_0 C_1 - z_0 w_0 D_1 + \cdots - z_0^m w_0 D_m = z_0^{m+1} w_0, \\ C_0 - w_1 D_0 + z_1 C_1 - z_1 w_1 D_1 + \cdots - z_1^m w_1 D_m = z_1^{m+1} w_1, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ C_0 - w_n D_0 + z_n C_1 - z_n w_n D_1 + \cdots - z_n^m w_n D_m = z_n^{m+1} w_n\,. \end{cases}$$

Знову отримали систему із $(2m+2)$–х лінійних алгебричних рівнянь відносно $(2m+2)$–х невідомих $C_0, C_1, \ldots, C_m = \rho_{2m+1}^{(2)}, D_0, D_1, \ldots, D_m$.

Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -w_0 & z_0 & -z_0\, w_0 & z_0^2 & -z_0^2\, w_0 & \cdots & z_0^m & -z_0^m\, w_0 \\ 1 & -w_1 & z_1 & -z_1\, w_1 & z_1^2 & -z_1^2\, w_1 & \cdots & z_1^m & -z_1^m\, w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -w_n & z_n & -z_n\, w_n & z_n^2 & -z_n^2\, w_n & \cdots & z_n^m & -z_n^m\, w_n \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{m+1} \begin{vmatrix} 1 & w_0 & z_0 & z_0\, w_0 & z_0^2 & z_0^2\, w_0 & \cdots & z_0^m & z_0^m\, w_0 \\ 1 & w_1 & z_1 & z_1\, w_1 & z_1^2 & z_1^2\, w_1 & \cdots & z_1^m & z_1^m\, w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_n & z_n & z_n\, w_n & z_n^2 & z_n^2\, w_n & \cdots & z_n^m & z_n^m\, w_n \end{vmatrix}.$$

Визначник

$$\Delta_{2m+2} = (-1)^m \begin{vmatrix} 1 & w_0 & z_0 & z_0 w_0 & z_0^2 & z_0^2 w_0 & \cdots & z_0^{m-1} w_0 & z_0^m w_0 & z_0^{m+1} w_0 \\ 1 & w_1 & z_1 & z_1 w_1 & z_1^2 & z_1^2 w_1 & \cdots & z_1^{m-1} w_1 & z_1^m w_1 & z_1^{m+1} w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_n & z_n & z_n w_n & z_n^2 & z_n^2 w_n & \cdots & z_n^{m-1} w_n & z_n^m w_n & z_n^{m+1} w_n \end{vmatrix},$$

а тоді

$$\rho_{2m+1}^{(2)} = C_m = - \begin{vmatrix} 1 & w_0 & z_0 & z_0\, w_0 & \cdots & z_0^{m-1}\, w_0 & z_0^m\, w_0 & z_0^{m+1}\, w_0 \\ 1 & w_1 & z_1 & z_1\, w_1 & \cdots & z_1^{m-1}\, w_1 & z_1^m\, w_1 & z_1^{m+1}\, w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_n & z_n & z_n\, w_n & \cdots & z_n^{m-1}\, w_n & z_n^m\, w_n & z_n^{m+1}\, w_n \end{vmatrix}:$$

$$
: \begin{vmatrix}
1 & w_0 & z_0 & z_0\, w_0 & z_0^2 & z_0^2\, w_0 & \cdots & z_0^m & z_0^m\, w_0 \\
1 & w_1 & z_1 & z_1\, w_1 & z_1^2 & z_1^2\, w_1 & \cdots & z_1^m & z_1^m\, w_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1 & w_n & z_n & z_n\, w_n & z_n^2 & z_n^2\, w_n & \cdots & z_n^m & z_n^m\, w_n
\end{vmatrix}. \tag{3.26}
$$

Аналогічно як і в попередньому випадку, із формули (3.26) випливає, що обернена різниця 2-го типу $\rho^{(2)}_{2m+1} = \rho^{(2)}_{2m+1}[z_0, \ldots, z_{2m+1}; f]$ також симетрична функція своїх аргументів $z_0, z_1, \ldots, z_{2m+1}$.

Чисельник $\tilde{P}^{(T)}_{2m+1}(z)$ та знаменник $\tilde{Q}^{(T)}_{2m+1}(z)$ можуть бути подані у вигляді відношення двох визначників

$$
\tilde{P}^{(T)}_{2m+1}(z) = - \begin{vmatrix}
1 & 0 & z & 0 & \cdots & z^m & 0 & 0 \\
1 & w_0 & z_0 & z_0\, w_0 & \cdots & z_0^m & z_0^m\, w_0 & z_0^{m+1}\, w_0 \\
1 & w_1 & z_1 & z_1\, w_1 & \cdots & z_1^m & z_1^m\, w_1 & z_1^{m+1}\, w_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & w_n & z_n & z_n\, w_n & \cdots & z_n^m & z_n^m\, w_n & z_n^{m+1}\, w_n
\end{vmatrix} :
$$

$$
: \begin{vmatrix}
1 & w_0 & z_0 & z_0\, w_0 & z_0^2 & z_0^2\, w_0 & \cdots & z_0^m & z_0^m\, w_0 \\
1 & w_1 & z_1 & z_1\, w_1 & z_1^2 & z_1^2\, w_1 & \cdots & z_1^m & z_1^m\, w_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1 & w_n & z_n & z_n\, w_n & z_n^2 & z_n^2\, w_n & \cdots & z_n^m & z_n^m\, w_n
\end{vmatrix},
$$

$$
\tilde{Q}^{(T)}_{2m+1}(z) = - \begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & z & \cdots & z^m & 0 \\
1 & w_0 & z_0 & z_0\, w_0 & \cdots & z_0^m\, w_0 & z_0^{m+1}\, w_0 \\
1 & w_1 & z_1 & z_1\, w_1 & \cdots & z_1^m\, w_1 & z_1^{m+1}\, w_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1 & w_n & z_n & z_n\, w_n & \cdots & z_n^m\, w_n & z_s^{m+1}\, w_s
\end{vmatrix} :
$$

$$\begin{vmatrix} 1 & w_0 & z_0 & z_0\,w_0 & z_0^2 & z_0^2\,w_0 & \cdots & z_0^m & z_0^m\,w_0 \\ 1 & w_1 & z_1 & z_1\,w_1 & z_1^2 & z_1^2\,w_1 & \cdots & z_1^m & z_1^m\,w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_n & z_n & z_n\,w_n & z_n^2 & z_n^2\,w_n & \cdots & z_n^m & z_n^m\,w_n \end{vmatrix}.$$

Теорему доведено. □

3.4. Залишковий член квазі–оберненого інтерполяційного ланцюгового дробу типу Тіле дійсної змінної

Розглянемо Т–КІЛД дійсної змінної

$$\tilde{D}_n^{(T)}(x) = \frac{\tilde{P}_n^{(T)}(x)}{\tilde{Q}_n^{(T)}(x)} = \left(d_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{x - x_{k-1}}{d_k}\right)^{-1}. \tag{3.27}$$

Теорема 3.7. *Нехай функція* $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$, *коефіцієнти ланцюгового дробу* (3.27), *який побудований за значеннями функції* $f(x)$ *в інтерполяційних вузлах* (2.28), *відмінні від нуля, тоді*

$$\left| f(x) - \frac{\tilde{P}_n^{(T)}(x)}{\tilde{Q}_n^{(T)}(x)} \right| \leqslant \frac{f^* \left|B_0^{[n]}\right| \prod_{k=0}^n |x - x_k|}{(n+1)!\,|\tilde{Q}_n^{(T)}(x)|} \Biggl(\kappa_{n+2}(\omega) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{r} \mathrm{C}_{n+1}^{m} \frac{1}{(d_*)^{2m}} \sum_{i=0}^{r-m} \frac{\omega^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n - 2(m+i) + j + 1)\Biggr), \tag{3.28}$$

де $f^* = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant r} \max\limits_{x \in \mathcal{R}} \left| f^{(n+1-i)}(x) \right|$, $B_0^{[n]} = \prod\limits_{i=0}^{n} d_i$, $d_* = \min\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} |d_i|$, $\omega = \frac{d_{\mathcal{R}}}{(d_*)^2}$, $r =$ $= [(n+1)/2]$, $\kappa_n(\omega)$ *визначено в* (2.12).

Доведення. У випадку Т–КІЛД маємо, що $X_i(x) = (x - x_i)/(d_i\, d_{i+1})$. Оскільки $Y_i = X_i'(x) = 1/(d_i\, d_{i+1})$, коли $i = \overline{0, n-1}$, і $X_i^{(k)}(x) \equiv 0$, коли $k = \overline{2, n}$, то формула (3.10) набуває вигляду

$$\bigl(R_{k,0}^{[n]}(x)\bigr)^{(m)} = \sum_{j=0}^{n+1-2k} \Bigl(X_j(x) \bigl(R_{k-1,j+2}^{[n]}(x)\bigr)^{(m)} + m Y_j \bigl(R_{k-1,j+2}^{[n]}(x)\bigr)^{(m-1)} \Bigr). \tag{3.29}$$

В цьому випадку $R^{[n]}_{k,0}(x)$ є многочлен степеня k, а тоді $\big(R^{[n]}_{k,0}(x)\big)^{(m)} = 0$, коли $k < m$. Крім того, згідно із теоремою 3.3, $\mathbf{deg}\,\tilde{Q}^{(T)}_n \leqslant r$ і $B^{[n]}_0$ не залежить від x. Тоді формула (3.9) перепишеться наступним чином:

$$\frac{d^{n+1}}{d\,x^{n+1}}\big[f(x)\,\tilde{Q}^{(T)}_n(x)\big] = f^{(n+1)}(x)\,\tilde{Q}^{(T)}_n(x) +$$

$$+B^{[n]}_0 \sum_{m=1}^{r} \mathrm{C}^m_{n+1}\, f^{(n+1-m)}(x) \sum_{k=m}^{r} \big(R^{[n]}_{k,0}(x)\big)^{(m)}\ . \tag{3.30}$$

Якщо скористатися методом повної математичної індукції, то із формули (3.29) отримуємо, що

$$\big(R^{[n]}_{m+s,0}(x)\big)^{(m)} = m!\, M^{[n,s]}_{m+s,0}(x), \qquad s = \overline{0, r-m},$$

де

$$M^{[n,0]}_{m,0}(x) = \sum_{j_1=0}^{n+1-2m} Y_{j_1} \sum_{j_2=j_1+2}^{n+3-2m} Y_{j_2} \sum_{j_m=j_{m-1}+2}^{n-1} Y_{j_m}, \tag{3.31}$$

$$M^{[n,s]}_{m+s,0}(x) = \sum_{j=0}^{n+1-2(m+s)} \Big(X_j\, M^{[n,s-1]}_{m+s-1,j+2}(x) + Y_j\, M^{[n,s]}_{m+s-1,j+2}(x)\Big). \tag{3.32}$$

Оскільки $|Y_i| = |1/(d_i\, d_{i+1})| \leqslant 1/(d_*)^2$, а кількість доданків в правій частині формули (3.31) рівна $\prod_{j=1}^{m}(n-2m+j+1)/m!$, то маємо:

$$\big|M^{[n,0]}_{m,0}(x)\big| \leqslant \frac{1}{m!\,(d_*)^{2m}} \prod_{j=1}^{m}(n-2m+j+1). \tag{3.33}$$

Спираючись на останню нерівність за індукцією з формули (3.32) отримуємо, що

$$\Big|M^{[n,s]}_{m+s,0}(x)\Big| \leqslant \frac{(d_{\mathcal{R}})^s}{m!\,s!\,(d_*)^{2(m+s)}} \prod_{j=1}^{m+s}(n-2(m+s)+j+1), \tag{3.34}$$

де $s = \overline{1, r-m}$. Згідно з теоремою 3.1 $\big|\tilde{Q}^{(T)}_n(x)\big| \leqslant \big|B^{[n]}_0\big|\,\kappa_{n+2}(\omega)$. Звідси та з (3.30),(3.33), (3.34) маємо (3.28). $\square$

Зауваження 3.4. В підрозділі Б.7 додатку (стор. 355) наведено приклад інтерполяції функції дійсної змінної на відрізку, який ілюструє якість оцінки (3.28) теореми 3.7.

Теорема 3.8. *Нехай* $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$, *коефіцієнти Т–КІЛД* (3.27), *який побудований за значеннями функції в інтерполяційних вузлах* (2.28), *задовольняють умову типу Слешинського–Прінґсгейма* $|d_i| \geqslant d_{\mathcal{R}} + 1$, *де* $i = \overline{0, n}$. *Тоді має місце оцінка залишкового члена Т-КІЛД* (3.27)

а) якщо $d_{\mathcal{R}} \neq 1$

$$\left| f(x) - \frac{\tilde{P}_n^{(T)}(x)}{\tilde{Q}_n^{(T)}(x)} \right| \leqslant \frac{f^* \left| B_0^{[n]} \right| (d_{\mathcal{R}})^{n+1} (d_{\mathcal{R}} - 1)}{(n+1)!\,((d_{\mathcal{R}})^{n+2} - 1)} \Big(\kappa_{n+2}(\omega) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{r} \mathrm{C}_{n+1}^{m} \frac{1}{(d_*)^{2m}} \sum_{i=0}^{r-m} \frac{\omega^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n - 2(m+i) + j + 1) \Big) , \qquad (3.35)$$

б) якщо $d_{\mathcal{R}} = 1$

$$\left| f(x) - \frac{\tilde{P}_n^{(T)}(x)}{\tilde{Q}_n^{(T)}(x)} \right| \leqslant \frac{f^* \left| B_0^{[n]} \right|}{(n+2)!} \Big(\kappa_{n+2}(\omega) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{r} \mathrm{C}_{n+1}^{m} \frac{1}{(d_*)^{2m}} \sum_{i=0}^{r-m} \frac{\omega^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n - 2(m+i) + j + 1) \Big) , \qquad (3.36)$$

де $d_{\mathcal{R}}, d_*, \omega, f^*$ *визначені в умові теореми 3.7.*

Доведення. Коли умови теореми виконуються, то згідно з теоремою 3.1 канонічний знаменник Т–КІЛД задовольняє нерівність

$$\left| \tilde{Q}_n^{(T)}(x) \right| \geqslant \begin{cases} \frac{(d_{\mathcal{R}})^{n+2} - 1}{d_{\mathcal{R}} - 1}, & \text{якщо } d_{\mathcal{R}} \neq 1, \\ n + 2, & \text{якщо } d_{\mathcal{R}} = 1. \end{cases}$$

Крім того, $|x - x_i| \leqslant d_{\mathcal{R}}$, $i = \overline{0, n-1}$. Тоді із умов даної теореми та теореми 3.7 отримуємо оцінки (3.35)–(3.36). □

3.5. Квазі–обернений інтерполяційний ланцюговий дріб типу С–дробу

Визначимо послідовності $\{v_k(z)\}$ та $\{V_k(z)\}$ наступним чином:

$$f(z)=\frac{1}{v_0(z)},\ v_0(z)=v_0(z_0)+v_1(z)(z-z_0), v_k(z)=\frac{v_k(z_k)}{1+v_{k+1}(z)(z-z_k)},$$

$$V_0(z)=v_0(z),\ V_k(z)=v_0\circ\cdots\circ v_k(z),\quad k=\overline{1,n},\quad z_i\in\mathbf{Z},\quad i=\overline{0,n}.$$

Тоді

$$f(z)=\frac{1}{V_n(z)}=\frac{1}{v_0(z_0)+}\,\frac{v_1(z_1)(z-z_0)}{1}\,{}_{+}\,\frac{v_2(z_2)(z-z_1)}{1}\,{}_{+}$$

$$+\cdots+\frac{v_n(z_n)(z-z_{n-1})}{1}\,{}_{+}\,\frac{v_{n+1}(z)(z-z_n)}{1}.$$

Зробимо позначення $e_k=v_k(z_k)$, $k=\overline{0,n}$. Отримали зображення функції $f(z)$ ланцюговим дробом з $(n+1)$–м поверхом

$$f(z)=\frac{1}{e_0+}\,\frac{e_1(z-z_0)}{1}\,{}_{+}\cdots{}_{+}\,\frac{e_n(z-z_{n-1})}{1}\,{}_{+}\,\frac{v_{n+1}(z)(z-z_n)}{1}. \tag{3.37}$$

Розглянемо n–й підхідний дріб ланцюгового дробу (3.37).

$$\tilde{D}_n^{(c)}(z)=\left(e_0+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n}\frac{e_k(z-z_{k-1})}{1}\right)^{-1}. \tag{3.38}$$

Скориставшись прямим (1.6) (або оберненим (1.11)) рекурентним алгоритмом поставимо у відповідність ланцюговим дробам (3.37) і (3.38) відношення многочленів, тобто

$$f(z)=\frac{\tilde{P}_{n+1}^{(*)}(z)}{\tilde{Q}_{n+1}^{(*)}(z)}=\frac{1}{e_0+}\,\frac{e_1(z-z_0)}{1}\,{}_{+}\cdots{}_{+}\,\frac{e_n(z-z_{n-1})}{1}\,{}_{+}\,\frac{v_{n+1}(z)(z-z_n)}{1}.$$

$$\tilde{D}_n^{(c)}(z)=\frac{\tilde{P}_n^{(c)}(z)}{\tilde{Q}_n^{(c)}(z)}=\left(e_0+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n}\frac{e_k(z-z_{k-1})}{1}\right)^{-1}. \tag{3.39}$$

Означення 3.2. Якщо ланцюговий дріб (3.39) задовольняє інтерполяційну умову (2.27), то він називається квазі–оберненим інтерполяційним ланцюговим дробом типу С–дробу (С–КІЛД).

Теорема 3.9. *Коефіцієнти С–КІЛД* (3.39) *визначаються через значення функції $f(z)$ у вузлах* (1.16) *за допомогою рекурентного співвідношення у вигляді скінченного ланцюгового дробу*

$$e_0 = \frac{1}{w_0}, \quad e_1 = \frac{1/w_1 - e_0}{z_1 - z_0}, \quad e_m = \frac{1}{z_m - z_{m-1}}\left(-1 + \frac{e_{m-1}(z_m - z_{m-2})}{-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{e_{m-2}(z_m - z_{m-3})}{-1} + \cdots + \frac{e_2(z_m - z_1)}{-1} + \frac{e_1(z_m - z_0)}{1/w_m - e_0}\right), \quad m = \overline{2, n}.$$

Зауваження 3.5. Легко переконатися, що C–КІЛД (3.39) раціональна функція і $\mathbf{deg}\ \tilde{P}_n^{(c)}(z) \leqslant [n/2]$, $\mathbf{deg}\ \tilde{Q}_n^{(c)}(z) \leqslant [(n+1)/2]$.

С–КІЛД (3.39) є еквівалентний Т–КІЛД (3.15), оскільки між коефіцієнтами вказаних ланцюгових дробів існує взаємозв'язок $e_0 = d_0, e_1 = 1/d_1$, $e_i = 1/(d_{i-1}d_i)$, $i = \overline{2, n}$. В той же час коефіцієнти С–КІЛД (3.39) можуть бути обчислені безпосередньо через значення функції $f(z)$ в інтерполяційних вузлах. Крім того, коефіцієнти (3.39) не задовольняють умову типу Слєшинського–Прінґсгейма (3.16), а тому теорема 3.4 не має місця.

Лема 3.1. *Нехай коефіцієнти С–КІЛД (3.39) відмінні від нуля і виконуються умови типу Пейдона–Уолла*

$$\begin{aligned} \max_{z\in\mathcal{R}} |e_1(z - z_0)/e_0| &\leqslant t(1-t), \qquad 0 < t \leqslant \tfrac{1}{2}, \\ \max_{z\in\mathcal{R}} |e_i(z - z_{i-1})| &\leqslant t(1-t), \qquad i = \overline{2, n}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Тоді для довільного $z \in \mathcal{Z}$, $z \notin \mathbf{Z}$, $|e_0|\,\Omega_{n+1}(t) \leqslant \left|\tilde{Q}_n^{(c)}(z)\right| < |e_0|\,\kappa_{n+2}(\delta)$, *де* $\Omega_n(t)$ *визначено в* (2.17),

$$\delta = \max\{\max_{2\leqslant i\leqslant n} |e_i|, |e_1/e_0|\}\cdot d_{\mathcal{Z}}. \tag{3.41}$$

Доведення. Оскільки

$$\tilde{D}_n^{(c)}(z) = \frac{\tilde{P}_n^{(c)}(z)}{\tilde{Q}_n^{(c)}(z)} = \left(\frac{\bar{P}_n(z)}{\bar{Q}_n(z)}\right)^{-1},$$

то оцінка $|\tilde{Q}_n^{(c)}(z)|$ згори випливає із формули Ойлера–Міндінґа (2.3a) для чисельника $\bar{P}_n(z)$ та теореми 2.2, коли $B_0^{[n]} = e_0$, $X_0 = e_1(z - z_0)/e_0$, $X_i = e_{i+1}(z - z_i)$, $i = \overline{1, n}$. Оцінка знизу випливає із теореми 2.4. □

Теорема 3.10. ***(A)*** *Нехай функція $f(z)$ визначена на компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$.* ***(B)*** *Нехай всі коефіцієнти С–КІЛД* (3.39) *відмінні від нуля і виконується умова типу Пейдона–Уолла* (3.40). ***(C)*** *Нехай існує множина $\mathscr{Z} \subset \mathcal{Z}\backslash\mathbf{Z}$, що для довільної точки $z_* \in \mathscr{Z}$ частинний чисельник ланцюгового дробу* (3.37) *задовольняє умови*

$$v_{n+1}(z_*) \neq 0, \qquad \max_{z \in \mathcal{Z}} |v_{n+1}(z_*)(z - z_n)| \leqslant t(1 - t). \tag{3.42}$$

Тоді

$$\frac{\tilde{e}_{n+1} \min_{z_* \in \mathscr{Z}} \prod_{i=1}^{n} |e_i(z_* - z_{i-1})|}{|e_0|^2\, \kappa_{n+2}(\delta)\, \kappa_{n+3}(\delta_*)} \leqslant \max_{z_* \in \mathscr{Z}} |f(z_*) - \tilde{D}_n^{(c)}(z_*)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\bar{e}_{n+1} \max_{z_* \in \mathscr{Z}} \prod_{i=1}^{n} |e_i(z_* - z_{i-1})|}{|e_0|^2\, \Omega_{n+1}(t)\, \Omega_{n+2}(t)}, \tag{3.43}$$

де $\tilde{e}_{n+1} = \min_{z_* \in \mathscr{Z}} |v_{n+1}(z_*)(z_* - z_n)|$, $\bar{e}_{n+1} = \max_{z_* \in \mathscr{Z}} |v_{n+1}(z_*)(z_* - z_n)|$, *значення δ визначено в* (3.41), $\delta_* = \max\{\delta, \bar{e}_{n+1}\} \cdot d_{\mathcal{Z}}$, *величини $\kappa_n(\delta)$ та $\Omega_n(t)$ відповідно визначені в* (2.12) *та* (2.17).

Доведення. Так як коефіцієнти $e_0, e_1, \ldots, e_n$ ланцюгового дробу (3.37) можуть бути знайдені із інтерполяційної умови (1.16), то вони збігаються з коефіцієнтами С–КІЛД (3.39). Для довільного $z_* \in \mathscr{Z}$ згідно із (3.4)

$$|f(z_*) - \tilde{D}_n^{(c)}(z_*)| = \left| \frac{\tilde{P}_{n+1}^{(*)}(z_*)}{\tilde{Q}_{n+1}^{(*)}(z_*)} - \frac{\tilde{P}_n^{(c)}(z_*)}{\tilde{Q}_{n+1}^{(c)}(z_*)} \right| = \frac{\prod_{i=1}^{n+1} |e_i(z_* - z_{i-1})|}{|\tilde{Q}_n^{(c)}(z_*)|\, |\tilde{Q}_{n+1}^{(*)}(z_*)|}\,.$$

Спираючись на твердження леми 3.1 отримаємо оцінку (3.43). □

Зауваження 3.6. Приклади інтерполяції функцій комплексної змінної С–КІЛД розглянуті в підрозділі Б.8 додатку (стор. 357). На прикладах проілюстровано ефективність оцінки (3.43) теореми 3.10.

Теорема 3.11. ***(A)*** *Нехай функція* $f(z)$ *визначена на* $\mathcal{Z}$; ***(B)*** *нехай для кожного значення* n: ***(B1)*** *всі коефіцієнти С–КІЛД* $e_i^{(n)}$, $i = \overline{0,n}$, *які визначені через значення функції у вузлах* $(n+1)$*–го рядку матриці інтерполяційних вузлів* (1.20), *відмінні від нуля і виконується умова типу Пейдона–Уолла* $\max\limits_{z\in\mathcal{Z}} |e_1^{(n)}(z - z_0^{(n)})/e_0^{(n)}| \leqslant t(1-t)$, $\max\limits_{z\in\mathcal{Z}} |e_i^{(n)}(z - z_{i-1}^{(n)})| \leqslant \leqslant t(1-t)$, *де* $0 < t \leqslant \frac{1}{2}$, $i = \overline{2,n}$; ***(B2)*** *існує множина* $\mathscr{Z} \subset \mathcal{Z}\backslash\mathcal{I}$, *що в довільній точці* $z_* \in \mathscr{Z}$ *частинні чисельники ланцюгового дробу* (3.37) *задовольняють нерівності* $v_{n+1}^{(n)}(z_*) \neq 0$, $\max\limits_{z\in\mathcal{Z}} |v_{n+1}^{(n)}(z_*)(z - z_n^{(n)})| \leqslant t(1-t)$, *Тоді* $\lim\limits_{n\to\infty} \max_{z_*\in\mathscr{Z}} \left| f(z_*) - \tilde{D}_n^{(c)}(z_*)\right| = 0$.

Доведення. Розглянемо два випадки: а) $0 < t < 1/2$; б) $t = 1/2$.

а) Коли $0 < t < 1/2$, то для кожного фіксованого значення n з теореми 3.10 маємо, що виконується нерівність

$$\max_{z_*\in\mathscr{Z}} \left| f(z_*) - \tilde{D}_n^{(c)}(z_*)\right| \leqslant \frac{\bar{e}_{n+1} \max_{z_*\in\mathscr{Z}} \prod_{i=1}^n |e_i^{(n)}(z_* - e_{i-1}^{(n)})|}{|e_0^{(n)}|^2\, \Omega_{n+1}(t)\, \Omega_{n+2}(t)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{t^{n+1}(1-t)^{n+1}((1-t)^{n+2} - t^{n+2})}{|e_0^{(n)}|\, ((1-t)^{n+4} - t^{n+4})}.$$

Ввівши в розгляд новий параметр $\theta = 1/t, \theta > 2$, отримаємо

$$\max_{z_*\in\mathscr{Z}} \left| f(z_*) - \tilde{D}_n^{(c)}(z_*)\right| \leqslant \frac{(\theta-1)^{n+1}((\theta-1)^{n+2} - 1)}{|e_0^{(n)}|\, \theta^{2n}((\theta-1)^{n+4} - 1)}.$$

Коли $n \to \infty$, то права частина прямує до нуля.

б) Коли $t = 1/2$, то аналогічно $\max\limits_{z_*\in\mathscr{Z}} \left| f(z_*) - \tilde{D}_n^{(c)}(z_*)\right| \leqslant \frac{(n+2)}{|e_0^{(n)}| 4^{n+1}(n+4)}$. Права частина прямує до нуля, коли $n \to \infty$. □

3.6. Залишковий член квазі–оберненого інтерполяційного ланцюгового дробу типу С–дробу дійсної змінної

Розглянемо на компакті $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$ С–КІЛД (3.39) дійсної змінної

$$\tilde{D}_n^{(c)}(x) = \frac{\tilde{P}_n^{(c)}(x)}{\tilde{Q}_n^{(c)}(x)} = \left(e_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{e_k(x - x_{k-1})}{1}\right)^{-1}. \quad (3.44)$$

Теорема 3.12. *Нехай функція* $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$, *за значеннями функції у вузлах* (2.28) *побудований С–КІЛД* (3.44), *коефіцієнти якого відмінні від нуля. Тоді*

$$\left|f(x) - \frac{\tilde{P}_n^{(c)}(x)}{\tilde{Q}_n^{(c)}(x)}\right| \leqslant \frac{|e_0| f^* \prod_{k=0}^{n} |x - x_k|}{(n+1)!\,|\tilde{Q}_n^{(c)}(x)|} \Big(\kappa_{n+2}(\delta) +$$

$$+\sum_{m=1}^{r} \mathrm{C}_{n+1}^{m} (e^*)^m \sum_{i=0}^{r-m} \frac{\delta^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n - 2(m+i) + j + 1)\Big), \tag{3.45}$$

де $f^* = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant r} \max\limits_{x \in \mathcal{R}} \left|f^{(n+1-i)}(x)\right|, \delta = d_{\mathcal{R}} e^*, e^* = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |e_i|, r = [\frac{n+1}{2}]$, *а* $\kappa_n(\delta)$ *визначена* (2.12).

Доведення. Так як у випадку С–КІЛД (3.44) мають місце співвідношення $B_0^{[n]} = e_0$, $X_i(x) = e_{i+1}(x - x_i)$, $X_i'(x) = e_{i+1}$, $X_i^{(k)}(x) \equiv 0$, де $i = \overline{0, n-1}$, $k = \overline{2, n-1}$, і $\big(R_{k,0}^{[n]}(x)\big)^{(m)} = 0$, коли $k < m$, то формула (3.9) перепишеться наступним чином

$$\frac{d^{n+1}}{d\,x^{n+1}} \big[f(x)\, Q_n^{(c)}(x)\big] = f^{(n+1)}(x)\, Q_n^{(c)}(x) +$$

$$+e_0 \sum_{m=1}^{r} \mathrm{C}_{n+1}^{m}\, f^{(n+1-m)}(x) \sum_{k=m}^{r} \big(R_{k,0}^{[n]}(x)\big)^{(m)}. \tag{3.46}$$

За допомогою індукції легко показати, що $\big(R_{m+s,0}^{[n]}(x)\big)^{(m)} = m!\, N_{m+s,0}^{[n,s]}(x)$, $s = \overline{0, r-m}$, де

$$N_{m,0}^{[n,0]}(x) = \sum_{j_1=0}^{n+1-2m} e_{j_1+1} \sum_{j_2=j_1+2}^{n+3-2m} e_{j_2+1} \cdots \sum_{j_m=j_{m-1}+2}^{n-1} e_{j_m+1}, \tag{3.47}$$

$$N_{m+s,0}^{[n,s]}(x) = \sum_{j=0}^{n+1-2(m+s)} \big(X_j(x) N_{m+s-1,j+2}^{[n,s-1]}(x) + e_{j+1} N_{m+s-1,j+2}^{[n,s]}(x)\big). \tag{3.48}$$

Згідно з теоремою 3.1

$$\left|Q_n^{(c)}(x)\right| \leqslant |e_0| \kappa_{n+2}(\delta). \tag{3.49}$$

В силу того, що $|e_i| \leqslant e^*, i=\overline{1,n}$, то з (3.47) маємо:

$$|N_{m,0}^{[n,0]}(x)| \leqslant \frac{(e^*)^m}{m!} \prod_{j=1}^{m}(n-2m+j+1)\ . \tag{3.50}$$

Скориставшись методом повної математичної індукції з (3.48) отримуємо:

$$|N_{m+s,0}^{[n,s]}(x)| \leqslant \frac{d_{\mathcal{R}}^s (e^*)^{m+s}}{m!\,s!} \prod_{j=1}^{m+s}(n-2(m+s)+j+1), \tag{3.51}$$

де $s=\overline{0,r-m}$. З (3.46),(3.49),(3.50) та (3.51) випливає (3.45). □

Зауваження 3.7. В підрозділі Б.9 додатку (стор. 360) наведені числові приклади, які ілюструють ефективність оцінки (3.45).

Теорема 3.13. *Нехай функція $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$, за значеннями функції у вузлах (2.28) побудований C–КІЛД (3.44), коефіцієнти якого відмінні від нуля і виконується умова типу Пейдона–Уолла*

$$0 < |e_i(x-x_{i-1})| \leqslant \delta \leqslant t(1-t), \qquad i=\overline{1,n}, \quad t \in (0;\tfrac{1}{2}].$$

Тоді:

а) коли $0<t<\frac{1}{2}$, то

$$\left|f(x)-\frac{P_n^{(c)}(x)}{Q_n^{(c)}(x)}\right| \leqslant \frac{f^* d_{\mathcal{R}}^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{(1-t)^{n+2}-t^{n+2}}{(1-t)^{n+3}-t^{n+3}}\Big(\kappa_{n+2}(t(1-t))+$$

$$+\sum_{m=1}^{r} \mathrm{C}_{n+1}^m \frac{t^m(1-t)^m}{d_{\mathcal{R}}^m} \sum_{i=0}^{r-m} \frac{t^i(1-t)^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i}(n-2(m+i)+j+1)\Big), \tag{3.52}$$

б) коли $t=\frac{1}{2}$, то

$$\left|f(x)-\frac{P_n^{(c)}(x)}{Q_n^{(c)}(x)}\right| \leqslant \frac{f^* d_{\mathcal{R}}^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{2(n+2)}{n+3}\big(\kappa_{n+2}(\tfrac{1}{4})+$$

$$+\sum_{m=1}^{r} \mathrm{C}_{n+1}^m \frac{1}{(4d_{\mathcal{R}})^m} \sum_{i=0}^{r-m} \frac{1}{4^i\,i!} \prod_{j=1}^{m+i}(n-2(m+i)+j+1)\big), \tag{3.53}$$

де δ, e^*, f^* визначені в умовах теорем 3.12.

Доведення. Згідно із умовою даної теореми $e^* \leqslant t(1-t)/d_{\mathcal{R}}$. З теорем 3.12 та 2.4 отримуємо нерівності (3.52) та (3.53). □

3.7. Висновки до розділу 3

На початку третього розділу обґрунтовано основні твердження з ОФЛД. В теоремі 3.1 отримано оцінки для канонічних чисельника та знаменника ОФЛД. Вивчено аналог інтерполяційного дробу Тіле — Т–КІЛД $\big(d_0 + + \mathbf{K}_{i=1}^{n}((z - z_{i-1})/d_i)\big)^{-1}$. В теоремі 3.2 обґрунтовано рекурентну формулу визначення коефіцієнтів Т–КІЛД (3.15). Двосторонню оцінку залишкового члена Т–КІЛД у випадку інтерполяції функції комплексної змінної отримано в теоремі 3.4. Теорема 3.5 обґрунтовує збіжність інтерполяційного процесу. В розділі 3 введено в розгляд обернені різниці 2–го типу. В теоремі 3.6 доведено симетричність обернених різниць 2–го типу. Оцінку залишкового члена Т–КІЛД для інтерполяції функцій дійсної змінної отримано в теоремі 3.7.

В теоремі 3.9 встановлено рекурентну формулу у вигляді ланцюгового дробу для визначення коефіцієнтів С–КІЛД $\big(e_0 + \mathbf{K}_{i=1}^{n}(e_i(z - z_{i-1})/1)\big)^{-1}$. Двосторонню оцінку залишкового члена С–КІЛД (3.39) для інтерполяції функцій комплексної змінної отримано в теоремі 3.10. Збіжність інтерполяційного процесу обґрунтовано в теоремі 3.11. В теоремі 3.12 отримано формулу залишкового члена С–КІЛД, коли $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$.

Результати розділу 3 опубліковано в статтях $[74, 79, 86, 88]$ та в розділі монографії [92, с. 120–154].

РОЗДІЛ 4
ФУНКЦІОНАЛЬНІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ЛАНЦЮГОВІ ДРОБИ

Функцію $f(z)$ на компакті $\mathcal{Z}$, яка задана значеннями в інтерполяційних вузлах, можна наближати узагальненим інтерполяційним многочленом за вибраною чибешовською системою функцій $\{\varphi_i(z)\}$, а також функціональним інтерполяційним ланцюговим дробом (ФІЛД). Зокрема для функцій дійсної змінної можна будувати ФІЛД, якщо, наприклад, базис–функція є неперервна та строго монотонна функція на компакті $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$.

4.1. Функціональний інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле

Припустимо, що функція $f(z)$ визначена на компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ і задана значеннями в точках множини $\mathbf{Z}$. Однолисту на компакті $\mathcal{Z}$ функцію $g(z)$ назвемо базис–функцією.

Зауваження 4.1. Так як множина $\mathbf{Z}$ містить різні точки, а функція $g(z)$ є однолиста, то множина $G = \{g_i : g_i = g(z_i),\, z_i \in \mathbf{Z},\, i = \overline{0,n}\}$ буде складатися також з різних точок.

Розглянемо послідовності $\{v_k(g; z)\}$ та $\{V_k(g; z)\}$, де

$$f(z) = v_0(g; z),\; v_k(g; z) = v_k(g; z_k) + \frac{g(z) - g(z_k)}{v_{k+1}(g; z)}, \quad z_k \in \mathbf{Z}, \tag{4.1}$$

$$V_0(g; z) = v_0(g; z),\; V_k(g; z) = v_0 \circ v_1 \circ \cdots \circ v_k(g; z), \quad k = \overline{1,n}.$$

Маємо зображення функції ланцюговим дробом

$$f(z) = V_n(g; z) = v_0(g; z_0) + \frac{g(z) - g(z_0)}{v_1(g; z_1)} + \cdots + \frac{g(z) - g(z_{n-1})}{v_n(g; z_n)} + \frac{g(z) - g(z_n)}{v_{n+1}(g; z)}.$$

Зробимо позначення $b_k^{(g)} = v_k(g; z_k), k = \overline{0, n}$. Тоді

$$f(z) = b_0^{(g)} + \frac{g(z) - g(z_0)}{b_1^{(g)}} + \cdots + \frac{g(z) - g(z_{n-1})}{b_n^{(g)}} + \frac{g(z) - g(z_n)}{v_{n+1}(g; z)}. \qquad (4.2)$$

Розглянемо функціональний ланцюговий дріб вигляду

$$D_n^{(T)}(g; z) = b_0^{(g)} + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{g(z) - g(z_{k-1})}{b_k^{(g)}}. \qquad (4.3)$$

Поставимо у відповідність ланцюговим дробам (4.2) та (4.3) відношення двох узагальнених многочленів відносно базис–функції $g(z)$, тобто

$$f(z) = \frac{P_n^{(*)}(g; z)}{Q_n^{(*)}(g; z)} = b_0^{(g)} + \frac{g(z) - g(z_0)}{b_1^{(g)}} + \cdots + \frac{g(z) - g(z_{n-1})}{b_n^{(g)}} + \frac{g(z) - g(z_n)}{v_{n+1}(g; z)}.$$

$$D_n^{(T)}(g; z) = \frac{P_n^{(T)}(g; z)}{Q_n^{(T)}(g; z)} = b_0^{(g)} + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{g(z) - g(z_{k-1})}{b_k^{(g)}}. \qquad (4.4)$$

Означення 4.1. Якщо ланцюговий дріб (4.4) задовольняє інтерполяційну умову (2.27), то він називається функціональним інтерполяційним ланцюговим дробом типу Тіле (Т–ФІЛД).

Теорема 4.1. *Коефіцієнти $b_i^{(g)}, i = \overline{0, n}$, Т–ФІЛД* (4.4) *визначаються через значення функції $f(z)$ в інтерполяційних вузлах* (1.16) *за допомогою рекурентного співвідношення у вигляді ланцюгового дробу*

$$b_0^{(g)} = f_0,\ b_k^{(g)} = \frac{g(z_k) - g(z_{k-1})}{-b_{k-1}^{(g)}} + \cdots + \frac{g(z_k) - g(z_1)}{-b_1^{(g)}} + \frac{g(z_k) - g(z_0)}{w_k - b_0^{(g)}},$$

коли $k = \overline{1, n}$, де $w_k = f(z_k)$.

Теорема доводиться аналогічно до теореми 2.6.

4.2. Обернені g–різниці та їх властивості

Із формули (4.1) випливає, що $v_0(g; z) = f(z)$, $v_{k+1}(g; z) = \frac{g(z) - g(z_k)}{v_k(g; z) - v_k(g; z_k)}$, $k = \overline{0, n}$. Позначимо через $\mathbf{\Phi}_k[g; z_0, \ldots, z_{k-1}, z; f] = v_k(g; z)$ обернену поділену g–різницю k–го порядку. Тоді $b_k^{(g)} = \mathbf{\Phi}_k[g; z_0, z_1, \ldots, z_k; f]$. Має місце рекурентна формула

$$\mathbf{\Phi}_k[g;z_0,\ldots,z_k;f]=\frac{g(z_k)-g(z_{k-1})}{\mathbf{\Phi}_{k-1}[g;z_0,\ldots,z_{k-2},z_k;f]-\mathbf{\Phi}_{k-1}[g;z_0,\ldots,z_{k-1};f]},$$
$$\mathbf{\Phi}_0[g;z;f]=f(z).$$

Обернена поділена g–різниця k–го порядку $\mathbf{\Phi}_k[g;z_0,\ldots,z_k;f]$ симетрична відносно лише двох своїх аргументів z_{k-1} та z_k. Утворимо лінійну комбінацію обернених поділених g–різниць

$$\varrho_k[g;z_0,\ldots,z_k;f]=\sum_{i=0}^{[k/2]}\mathbf{\Phi}_{k-2i}[g;z_0,\ldots,z_{k-2i};f], \tag{4.5}$$

яку будемо називати оберненою g–різницею k–го порядку. Із (4.5) маємо, що коефіцієнти Т–ФІЛД (4.4) будуть рівні

$$b_0^{(g)}=\varrho_0[g;z_0;f],\quad b_1^{(g)}=\varrho_1[g;z_0,z_1;f],$$

$$b_k^{(g)}=\varrho_k[g;z_0,\ldots,z_k;f]-\varrho_{k-2}[g;z_0,\ldots,z_{k-2};f],\qquad k=\overline{2,n}.$$

Тоді Т–ФІЛД (4.4) запишеться у вигляді

$$D_n(g;z)=\varrho_0[g;z_0;f]+\frac{g(z)-g(z_0)}{\varrho_1[g;z_0,z_1;f]}+\frac{g(z)-g(z_1)}{\varrho_2[g;z_0,z_1,z_2;f]-\varrho_0[g;z_0;f]}+$$
$$+\cdots+\frac{g(z)-g(z_{n-1})}{\varrho_n[g;z_0,z_1,\ldots,z_n;f]-\varrho_{n-2}[g;z_0,z_1,\ldots,z_{n-2};f]}\,. \tag{4.6}$$

Обернені g–різниці задовольняють рекурентне співвідношення:

$$\varrho_k[g;z_0,z_1,\ldots,z_k;f]=\varrho_{k-2}[g;z_0,z_1,\ldots,z_{k-2};f]+$$
$$+\frac{g(z_k)-g(z_{k-1})}{\varrho_{k-1}[g;z_0,z_1,\ldots,z_{k-2},z_k;f]-\varrho_{k-1}[g;z_0,z_1,\ldots,z_{k-1};f]},\quad k=\overline{2,n}, \tag{4.7}$$

для початкових значень

$$\varrho_0[g;z_0;f]=f(z_0),\ \varrho_1[g;z_0,z_1;f]=\frac{g(z_1)-g(z_0)}{\varrho_0[g;z_1;f]-\varrho_0[g;z_0;f]}.$$

Легко переконатися, що

$$\varrho_1[g;z_0,z_1;f]=\frac{g(z_1)-g(z_0)}{f_1-f_0}, \tag{4.8}$$

$$\varrho_2[g;z_0,z_1,z_2;f]=\frac{g(z_0)f_0(f_2-f_1)+g(z_1)f_1(f_0-f_2)+g(z_2)f_2(f_1-f_0)}{f_0(f_2-f_1)+f_1(f_0-f_2)+f_2(f_1-f_0)}.$$

Отже, обернені g–різниці 1–го та 2–го порядків симетричні відносно своїх аргументів. Покажемо, що $\varrho_k=\varrho_k[g;z_0,\ldots,z_k;f]$ — обернена g–різниця k–го порядку симетрична функція $(k+1)$–го аргументу $z_0,z_1,\ldots,z_k$.

Із (4.6) безпосередньо маємо: $P_0^{(T)}(g;z)=\varrho_0, P_1^{(T)}(g;z)=\varrho_0\varrho_1+g(z)-$ $-\,g(z_0)$, $Q_0^{(T)}(g;z)=1$, $Q_1^{(T)}(g;z)=\varrho_1$. Застосувавши до Т–ФІЛД (4.6) прямий рекурентний алгоритм (1.6) отримаємо:

$$P_{2m}^{(T)}(g;z)=\tilde a_0+\tilde a_1 g(z)+\cdots+\tilde a_{m-1}g^{m-1}(z)+\varrho_{2m}g^m(z), \tag{4.9а}$$

$$Q_{2m}^{(T)}(g;z)=\tilde b_0+\tilde b_1 g(z)+\cdots+\tilde b_{m-1}g^{m-1}(z)+g^m(z), \tag{4.9б}$$

$$P_{2m+1}^{(T)}(g;z)=\tilde c_0+\tilde c_1 g(z)+\cdots+\tilde c_{m-1}g^{m-1}(z)+\tilde c_m g^m(z)+g^{m+1}(z), \tag{4.9в}$$

$$Q_{2m+1}^{(T)}(g;z)=\tilde d_0+\tilde d_1 g(z)+\cdots+\tilde d_{m-1}g^{m-1}(z)+\varrho_{2m+1}g^m(z), \tag{4.9г}$$

де $\tilde a_0,\ldots,\tilde a_{m-1},\tilde b_0,\ldots,\tilde b_{m-1},\tilde c_0,\ldots,\tilde c_m,\tilde d_0,\ldots,\tilde d_{m-1}$ — деякі коефіцієнти.

Оскільки Т–ФІЛД (4.4) задовольняє інтерполяційну умову, то з (2.27) випливає, що

$$P_n^{(T)}(g;z_i)-w_iQ_n^{(T)}(g;z_i)=0, \qquad i=\overline{0,n}. \tag{4.10}$$

Розглянемо два випадки: а) $n=2m$; б) $n=2m+1$.

а) Для $n=2m$ згідно із (4.9а)–(4.9б) співвідношення (4.10) запишеться:

$$\tilde a_0+\tilde a_1 g(z_i)+\cdots+\tilde a_{m-1}g^{m-1}(z_i)+\varrho_{2m}g^m(z_i)-$$

$$-w_i(\tilde b_0+\tilde b_1 g(z_i)+\cdots+\tilde b_{m-1}g^{m-1}(z_i))=w_ig^m(z_i).$$

Підставивши в останню рівність значення z_i та w_i для $i=\overline{0,2m}$, отримаємо систему $(2m+1)$–го лінійного алгебричного рівняння відносно невідомих $\tilde a_0,\tilde a_1,\ldots,\tilde a_{m-1},\ \tilde b_0,\tilde b_1,\ldots,\tilde b_{m-1},\varrho_{2m}$. Згідно із правилом Крамера

$$\varrho_{2m} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f_0 & g_0 & g_0 f_0 & g_0^2 & g_0^2 f_0 & \cdots & g_0^{m-1} & g_0^{m-1} f_0 & g_0^m f_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & f_n & g_n & g_n f_n & g_n^2 & g_n^2 f_n & \cdots & g_n^{m-1} & g_n^{m-1} f_n & g_n^m f_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f_0 & g_0 & g_0 f_0 & g_0^2 & g_0^2 f_0 & \cdots & g_0^{m-1} & g_0^{m-1} f_0 & g_0^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & f_n & g_n & g_n f_n & g_n^2 & g_n^2 f_n & \cdots & g_n^{m-1} & g_n^{m-1} f_n & g_n^m \end{vmatrix}}. \tag{4.11}$$

б) У випадку, коли $n = 2m + 1$ з (4.9в)–(4.9г) аналогічно отримуємо:

$$\varrho_{2m+1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f_0 & g_0 & g_0 f_0 & \cdots & g_0^{m-1} & g_0^{m-1} f_0 & g_0^m & g_0^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & f_n & g_n & g_n f_n & \cdots & g_n^{m-1} & g_n^{m-1} f_n & g_n^m & g_n^{m+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f_0 & g_0 & g_0 f_0 & \cdots & g_0^{m-1} & g_0^{m-1} f_0 & g_0^m & g_0^m f_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & f_n & g_n & g_n f_n & \cdots & g_n^{m-1} & g_n^{m-1} f_n & g_n^m & g_n^m f_n \end{vmatrix}}. \tag{4.12}$$

Із формул (4.11)–(4.12) випливає, що обернена g–різниця n–го порядку $\varrho_n[g; z_0, z_1, \ldots, z_n; f]$ симетрична відносно своїх аргументів $z_0, z_1, \ldots, z_n$.

Оскільки далі всі перетворення у визначниках (4.11) та (4.12) здійснюються над рядками, то будемо записувати тільки i-й рядок цих визначників. Тоді (4.11) та (4.12) запишуться наступним чином

$$\varrho_{2m}[g; z_0, \ldots, z_{2m}; f] = \frac{\left|1, f_i, g_i, g_i f_i, \ldots, g_i^{m-1}, g_i^{m-1} f_i, g_i^m f_i\right|}{\left|1, f_i, g_i, g_i f_i, \ldots, g_i^{m-1}, g_i^{m-1} f_i, g_i^m\right|}, \tag{4.13}$$

$$\varrho_{2m+1}[g; z_0, \ldots, z_{2m+1}; f] = \frac{\left|1, f_i, g_i, g_i f_i, \ldots, g_i^{m-1} f_i, g_i^m, g_i^{m+1}\right|}{\left|1, f_i, g_i, g_i f_i, \ldots, g_i^{m-1} f_i, g_i^m, g_i^m f_i\right|}. \tag{4.14}$$

Теорема 4.2. *Нехай на компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ визначені функції $f(z), h(z)$, де $h(z) \neq 0$, A, B, C, D — деякі сталі, тоді обернені g–різниці задовольняють співвідношення:*

$$\varrho_{2m}[g; z_0, \ldots, z_{2m}; Cf] = C\varrho_{2m}[g; z_0, \ldots, z_{2m}; f] \ , \tag{4.15}$$

$$\varrho_{2m+1}[g; z_0, \ldots, z_{2m+1}; Cf] = \frac{1}{C}\varrho_{2m+1}[g; z_0, \ldots, z_{2m+1}; f] \ . \tag{4.16}$$

$$\varrho_{2m}[g; z_0, \ldots, z_{2m}; f + C] = \varrho_{2m}[g; z_0, \ldots, z_{2m}; f] + C \ , \tag{4.17}$$

$$\varrho_{2m+1}[g; z_0, \ldots, z_{2m+1}; f + C] = \varrho_{2m+1}[g; z_0, \ldots, z_{2m+1}; f] \ , \tag{4.18}$$

$$\varrho_{2m}\Big[g; z_0, \ldots, z_{2m}; \frac{f}{h}\Big] = \frac{\big|h_i, f_i, \, g_i h_i, \, g_i f_i, \ldots, g_i^{m-1}h_i, \, g_i^{m-1}f_i, \, g_i^m f_i\big|}{\big|h_i, \, f_i, \, g_i h_i, \, g_i f_i, \ldots, g_i^{m-1}h_i, \, g_i^{m-1}f_i, \, g_i^m h_i\big|}, \tag{4.19}$$

$$\varrho_{2m+1}\Big[g; z_0, \ldots, z_{2m+1}; \frac{f}{h}\Big] =$$

$$= \frac{\big|h_i, \, f_i, \, g_i h_i, \, g_i f_i, \, \ldots, g_i^{m-1}h_i, \, g_i^{m-1}f_i, \, g_i^m h_i, \, g_i^{m+1}h_i\big|}{\big|h_i, \, f_i, \, g_i h_i, \, g_i f_i, \, \ldots, \, g_i^{m-1}h_i, g_i^{m-1}f_i, g_i^m h_i, \, g_i^m f_i\big|}, \tag{4.20}$$

$$\varrho_{2m}\Big[g; z_0, \ldots, z_{2m}; \frac{1}{f}\Big] = \frac{1}{\varrho_{2m}[g; z_0, \ldots, z_{2m}; f]} \ , \tag{4.21}$$

$$\varrho_{2m}\Big[g; z_0, \ldots, z_{2m}; \frac{A + Bf}{C + Df}\Big] = \frac{A + B\varrho_{2m}[g; z_0, \ldots, z_{2m}; f]}{C + D\varrho_{2m}[g; z_0, \ldots, z_{2m}; f]} \ . \tag{4.22}$$

Доведення. Співвідношення (4.15)–(4.16) випливають безпосередньо із (4.13)–(4.14). Із (4.13) маємо

$$\varrho_{2m}[g; z_0, \ldots, z_{2m}; f + C] =$$

$$= \frac{\big|1, f_i + C, g_i, g_i(f_i + C), \cdots, g_i^{m-1}, g_i^{m-1}(f_i + C), g_i^m(f_i + C)\big|}{\big|1, f_i + C, g_i, g_i(f_i + C), \cdots, g_i^{m-1}, g_i^{m-1}(f_i + C), g_i^m\big|} \ .$$

Оскільки

$$\big|1, f_i + C, g_i, \ g_i(f_i + C), \cdots, g_i^{m-1}, g_i^{m-1}(f_i + C), g_i^m(f_i + C)\big| =$$

$$= \big|1, f_i, g_i, g_i f_i, \cdots, g_i^{m-1}, g_i^{m-1}f_i, g_i^m f_i\big| + C\big|1, f_i, g_i, g_i f_i, \cdots, g_i^{m-1}, g_i^{m-1}f_i, g_i^m\big|,$$

$$\big|1, \ f_i + C, \ g_i, \ g_i(f_i + C), \ \cdots \ , \ g_i^{m-1}, \ g_i^{m-1}(f_i + C), \ g_i^m\big| =$$

$$= \left|1,\ f_i,\ g_i,\ g_i f_i,\ \cdots,\ g_i^{m-1},\ g_i^{m-1} f_i,\ g_i^m\right|,$$

то звідси маємо: $\varrho_{2m}[g; z_0, z_1, \ldots, z_{2m}; f + C] = \varrho_{2m}[g; z_0, z_1, \ldots, z_{2m}; f] + C$. Аналогічно доводиться (4.18). Співвідношення (4.19) та (4.20) отримаємо безпосередньо із (4.13) та (4.14) відповідно, якщо i рядки визначників чисельника і знаменника помножимо на h_i, де $h_i = h(x_i), i = 0, 1, \ldots, n$.

Якщо у (4.19) підставити $1/f(z)$, а потім зробити перестановку непарних та парних стовпців у визначниках чисельника та знаменника, то отримаємо (4.21). Оскільки $\frac{A+Bf}{C+Df} = \frac{B}{D} + \frac{A-BC/D}{C+Df}$, то скориставшись (4.15), (4.17) та (4.21) отримаємо (4.22). □

4.3. Залишковий член функціонального інтерполяційного ланцюгового дробу типу Тіле

Згідно із теоремою 2.1 знаменник $Q_n(g; z)$ Т–ФІЛД (4.4) може бути поданий за формулою Ойлера–Міндінґа (2.6), де $X_i(g; z) = \frac{g(z)-g(z_i)}{b_i^{(g)} b_{i+1}^{(g)}}$. Якщо для довільного $z \in \mathcal{Z}$ виконуються умова $|g(z) - g(z_i)| \leqslant \delta$, $|b_i^{(g)}| \geqslant \delta + 1$, то знаменник підхідного дробу $Q_n^{(T)}(g; z)$ буде задовольняти нерівність (2.13).

Теорема 4.3. ***(A)*** *Нехай $f(z)$ визначена на компакті $\mathcal{Z}$ і базис–функція $g(z)$ – однолиста на $\mathcal{Z}$.* ***(B)*** *Нехай за значеннями функції $f(z)$ в інтерполяційних вузлах* (1.16) *побудований Т–ФІЛД* (4.4), *коефіцієнти якого задовольняють умову типу Слєшинського–Прінґсгейма*

$$|b_k^{(g)}| \geqslant \beta \geqslant \delta + 1, \quad k = \overline{1, n}, \quad \text{де } \delta = \max_{t,s \in \mathcal{Z}} |g(t) - g(s)| \neq 1. \tag{4.23}$$

(C) *Нехай існує множина $\mathscr{Z} \subset \mathcal{Z} \setminus \mathbf{Z}$, що в довільній точці $z_* \in \mathscr{Z}$ частинний знаменник $v_{n+1}(z)$ ланцюгового дробу* (4.2) *задовольняє нерівність*

$$|v_{n+1}(z_*)| \geqslant \beta \geqslant \delta + 1. \tag{4.24}$$

Тоді залишковий член Т–ФІЛД задовольняє нерівність

$$\frac{\min_{z_*\in\mathscr{Z}}\prod_{i=0}^{n}|g(z_*)-g(z_i)|}{\tilde{b}_{n+1}^{(g)}\prod_{i=1}^{n}|b_i^{(g)}|^2\cdot\kappa_{n+2}(\omega)\kappa_{n+1}(\omega)}\leqslant\max_{z_*\in\mathscr{Z}}|f(z_*)-D_n^{(T)}(g;z_*)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{(\delta-1)^2\max_{z_*\in\mathscr{Z}}\prod_{i=0}^{n}|g(z_*)-g(z_i)|}{(\delta^{n+2}-1)(\delta^{n+1}-1)},\qquad(4.25)$$

де $\tilde{b}_{n+1}^{(g)}=\min_{z_*\in\mathscr{Z}}|v_{n+1}(z_*)|\,,\omega=\delta/\beta^2$, $\kappa_n(\omega)$ *визначена в* (2.12).

Доведення. Коефіцієнти $b_i^{(g)}, i=\overline{0,n}$, ланцюгового дробу (4.2) збігаються з відповідними коефіцієнтами Т–ФІЛД (4.3) за побудовою. З формули (1.10) маємо, що

$$\left|f(z_*)-D_n^{(T)}(g;z_*)\right|=\left|\frac{P_{n+1}^{(*)}(g;z_*)}{Q_{n+1}^{(*)}(g;z_*)}-\frac{P_n^{(T)}(g;z_*)}{Q_n^{(T)}(g;z_*)}\right|=\frac{\prod_{i=0}^{n}|g(z_*)-g(z_i)|}{|Q_{n+1}^{(*)}(g;z_*)||Q_n^{(T)}(g;z_*)|}.$$

Скориставшись теоремами 2.2 та 2.3 отримаємо (4.25). □

Зауваження 4.2. У випадку, коли $\delta=\max_{t,s\in\mathcal{Z}}|g(t)-g(s)|=1$, то згідно із (2.13) нерівність (4.25) запишеться у наступному вигляді

$$\frac{\min_{z_*\in\mathscr{Z}}\prod_{i=0}^{n}|g(z_*)-g(z_i)|}{\tilde{b}_{n+1}^{(g)}\prod_{i=1}^{n}|b_i^{(g)}|^2\cdot\kappa_{n+2}(\omega)\kappa_{n+1}(\omega)}\leqslant\max_{z_*\in\mathscr{Z}}|f(z_*)-D_n^{(T)}(g;z_*)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\max_{z_*\in\mathscr{Z}}\prod_{i=0}^{n}|g(z_*)-g(z_i)|}{(n+1)(n+2)}.\qquad(4.26)$$

Зауваження 4.3. Для ілюстрації ефективності оцінки (4.25) теореми в підрозділі Б.10 додатку (стор. 363) розглянуті числові приклади.

Теорема 4.4. ***(A)*** *Нехай функція* $f(z)$ *визначена на компакті* $\mathcal{Z}\subset\mathbb{C}$, *базис–функція* $g(z)$ *є однолиста на* $\mathcal{Z}$; ***(B)*** *для кожного фіксованого значення* n: ***(B1)*** *коефіцієнти Т–ФІЛД* (4.4), *які побудовані за значеннями функції у вузлах* n *рядка матриці* (1.20), *задовольняють умову типу Слєшинського–Прінґсгейма* $|\,{}^{(n)}b_k^{(g)}\,|\geqslant\beta\geqslant\delta+1$, $k=\overline{1,n}$;
(B2) *існує множина* $\mathscr{Z}\subset\mathcal{Z}\backslash\mathbf{Z}$, *що в довільній точці* $z_*\in\mathscr{Z}$ *знаменник ланцюгового дробу* (4.2) *задовольняє нерівність* $|v_{n+1}(z_*)|\geqslant\beta\geqslant\delta+1$. *Тоді* $\lim\limits_{n\to\infty}\max_{z_*\in\mathscr{Z}}|f(z_*)-D_n^{(T)}(g;z_*)|=0$.

Доведення. За припущенням теореми для кожного фіксованого значення n коефіцієнти Т–ФІЛД задовольняють умову типу Слєшинського–Прінґсгейма. А тоді, згідно із теоремою 4.3, має місце нерівність або (4.25) або (4.26). Перейшовши до границі, коли кількість інтерполяційних вузлів n прямує до ∞, отримаємо твердження теореми. □

4.4. Функціональний інтерполяційний ланцюговий дріб типу C–дробу

Виберемо послідовність $\{v_k(g;z)\}$ та $\{V_k(g;z)\}$ наступним чином

$$f(z) = v_0(g;z), \quad v_0(g;z) = v_0(g;z_0) + v_1(g;z)(g(z) - g(z_0)),$$
$$v_k(g;z) = \frac{v_k(g;z_k)}{1 + v_{k+1}(g;z)(g(z) - g(z_k))}, \quad z_i \in \mathbf{Z}, \quad i = \overline{0,n},$$

$$V_0(g;z) = v_0(g;z), \quad V_k(g;z) = v_0 \circ v_1 \circ \cdots \circ v_k(g;z), \quad k = \overline{1,n}.$$

Тоді функція $f(z)$ записується у вигляді функціонального дробу

$$f(z) = V_n(g;z) = v_0(g;z_0) + \frac{v_1(g;z_1)(g(z) - g(z_0))}{1} + \cdots +$$

$$+ \frac{v_{n-1}(g;z_{n-1})(g(z) - g(z_{n-2}))}{1} + \frac{v_n(g;z_n)(g(z) - g(z_{n-1}))}{1 + v_{n+1}(g;z)(g(z) - g(z_n))}.$$

Позначимо через $a_k^{(g)} = v_k(g;z_k)$, $k = \overline{0,n}$. Маємо

$$f(z) = a_0^{(g)} + \frac{a_1^{(g)}(g(z) - g(z_0))}{1} + \frac{a_2^{(g)}(g(z) - g(z_1))}{1} + \cdots +$$

$$+ \frac{a_n^{(g)}(g(z) - g(z_{n-1}))}{1} + \frac{v_{n+1}(g;z)(g(z) - g(z_n))}{1}. \tag{4.27}$$

Розглянемо також функціональний ланцюговий дріб

$$D_n^{(c)}(g;z) = a_0^{(g)} + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k^{(g)}(g(z) - g(z_{k-1}))}{1}. \tag{4.28}$$

Поставимо у відповідність ланцюговим дробам (4.27) та (4.28) відношення двох узагальнених многочленів відносно g

$$f(z)=\frac{P_n^{(*)}(g;z)}{Q_n^{(*)}(g;z)}=a_0^{(g)}+\frac{a_1^{(g)}(g(z)-g(z_0))}{1}+\frac{a_2^{(g)}(g(z)-g(z_1))}{1}+\cdots+$$

$$+\frac{a_n^{(g)}(g(z)-g(z_{n-1}))}{1}+\frac{v_{n+1}(g;z)(g(z)-g(z_n))}{1}. \qquad (4.29)$$

$$D_n^{(c)}(g;z)=\frac{P_n^{(c)}(g;z)}{Q_n^{(c)}(g;z)}=a_0^{(g)}+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n}\frac{a_k^{(g)}(g(z)-g(z_{k-1}))}{1}. \qquad (4.30)$$

Означення 4.2. Якщо в інтерполяційних вузлах ФЛД (4.30) задовольняє умову (2.27), то ланцюговий дріб називається функціональним інтерполяційним ланцюговим дробом типу С–дробу (С–ФІЛД).

Теорема 4.5. *Коефіцієнти С–ФІЛД* (4.30) *обчислюються через значення функції* $f(z)$ *у вузлах* $\mathbf{Z}$ *за допомогою рекурентної формули*

$$a_k^{(g)}=\frac{1}{g(z_k)-g(z_{k-1})}\left(-1+\frac{a_{k-1}^{(g)}(g(z_k)-g(z_{k-2}))}{-1}+\frac{a_{k-2}^{(g)}(g(z_k)-g(z_{k-3}))}{-1}+\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{a_2^{(g)}(g(z_k)-g(z_1))}{-1}+\frac{a_1^{(g)}(g(z_k)-g(z_0))}{w_k-a_0^{(g)}}\right),\quad k=\overline{2,n}, \qquad (4.31)$$

для початкових значеннях $a_0^{(g)}=w_0$, $a_1^{(g)}=(w_1-a_0^{(g)})/(g(z_1)-g(z_0))$.

Доведення. Теорема доводиться аналогічно до теореми 2.11. □

Очевидно, що С–ФІЛД (4.30) буде еквівалентним Т–ФІЛД (4.4), оскільки $a_0^{(g)}=b_0^{(g)}$, $a_1^{(g)}=1/b_1^{(g)}, a_i^{(g)}=1/(b_{i-1}^{(g)}b_i^{(g)}), i=\overline{2,n}$, але формули (4.31) дозволяють знаходити коефіцієнти С–ФІЛД безпосередньо за значеннями функції в точках множини $\mathbf{Z}$. Крім того, оскільки коефіцієнти С–ФІЛД (4.30) не задовольняють умову типу Слєшинського–Прінґсгейма (4.23), то теорема 4.3 для С–ФІЛД не буде мати місця.

Лема 4.1. *Нехай коефіцієнти* $a_i^{(g)}\neq 0, i=\overline{2,n}$, *і виконується умова типу Пейдона–Уолла* $\max_{z\in\mathcal{Z}}|a_i^{(g)}(g(z)-g(z_{i-1}))|\leqslant t(1-t), 0<t\leqslant\frac{1}{2}$. *Тоді*

для $z \in \mathcal{Z}\backslash\mathbf{Z}$ виконується нерівність

$$\Omega_n(t) \leqslant |Q_n^{(c)}(z)| < \kappa_{n+1}(\delta), \tag{4.32}$$

де

$$\delta = \max_{2\leqslant i\leqslant n} \max_{z\in\mathcal{Z}} |a_i^{(g)}(g(z) - g(z_{i-1}))|, \tag{4.33}$$

а $\kappa_n(\delta)$ та $\Omega_n(t)$ визначені,відповідно, в (2.12) *та* (2.17).

Доведення. Коли $z \in \mathcal{Z}\backslash\mathbf{Z}$, то $|a_i^{(g)}(g(z)-g(z_{i-1}))| \leqslant \delta$, $i = \overline{2,n}$, $B_1^{[n]} \equiv 1$, то згідно із теоремою 2.2 $|Q_n^{(c)}(g;z)| < \kappa_{n+1}(\delta)$. Крім того для кожного коефіцієнта $a_i^{(g)}, i = \overline{2,n}$, має місце умова типу Пейдона–Уолла. Тоді згідно із теоремою 2.4 $|Q_n^{(c)}(g;z)| \geqslant \Omega_n(t)$. □

Теорема 4.6. ***(A)*** *Нехай $f(z)$ визначена на компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$, а базис–функція $g(z)$ однолиста на $\mathcal{Z}$;* ***(B)*** *нехай коефіцієнти C–ФІЛД* (4.30), *який побудований за значеннями функції в інтерполяційних вузлах* (1.16), *відмінні від нуля і має місце умова типу Пейдона–Уолла*

$$\max_{z\in\mathcal{Z}} |a_k^{(g)}(g(z) - g(z_{k-1}))| \leqslant t(1-t), \quad 0 < t \leqslant \tfrac{1}{2}, \quad k = \overline{2,n}; \tag{4.34}$$

(C) *нехай знайдеться множина $\mathscr{Z} \subset \mathcal{Z}\backslash\mathbf{Z}$, що для довільного $z_* \in \mathscr{Z}$ частинний чисельник $v_{n+1}(g;z)$ ланцюгового дробу* (4.29) *задовольняє нерівності*

$$v_{n+1}(g;z_*) \neq 0, \; \max_{z\in\mathcal{Z}} |v_{n+1}(g;z_*)(g(z) - g(z_n))| \leqslant t(1-t). \tag{4.35}$$

Тоді

$$\frac{\tilde{a}_{n+1}^{(g)} \cdot \min_{z_*\in\mathscr{Z}} \prod_{i=1}^{n} |a_i^{(g)}(g(z_*) - g(z_{i-1}))|}{\kappa_{n+1}(\delta)\, \kappa_{n+2}(\delta_*)} \leqslant \max_{z_*\in\mathscr{Z}} |f(z_*) - D_n^{(c)}(g;z_*)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\bar{a}_{n+1}^{(g)} \cdot \max_{z_*\in\mathscr{Z}} \prod_{i=1}^{n} |a_i^{(g)}(g(z_*) - g(z_{i-1}))|}{\Omega_n(t)\, \Omega_{n+1}(t)}, \tag{4.36}$$

де $\tilde{a}_{n+1}^{(g)} = \min_{z_*\in\mathscr{Z}} |v_{n+1}(g;z_*)(g(z_*) - g(z_n))|$, $\bar{a}_{n+1}^{(g)} = \max_{z_*\in\mathscr{Z}} |v_{n+1}(g;z_*)(g(z_*) -$ $- g(z_n))|$, $\delta_* = \max\{\delta, \max_{z\in\mathcal{Z}} |\bar{a}_{n+1}^{(g)}(g(z) - g(z_n))|\}$, величина δ визначена в (4.33), *$\kappa_n(\delta)$ та $\Omega_n(t)$ визначені, відповідно, в* (2.12) *та* (2.17).

Доведення. Коефіцієнти $a_k^{(g)}, k = \overline{0, n}$, ланцюгового дробу (4.29) за побудовою збігаються із коефіцієнтами С–ФІЛД (4.30). А тоді

$$|f(z_*) - D_n^{(c)}(g; z_*)| = \left|\frac{P_{n+1}^{(*)}(g; z_*)}{Q_{n+1}^{(*)}(g; z_*)} - \frac{P_n^{(c)}(g; z_*)}{Q_n^{(c)}(g; z_*)}\right| = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n+1} |a_i^{(g)}(g(z_*) - g(z_{i-1}))|}{Q_{n+1}^{(*)}(g; z_*) Q_n^{(c)}(g; z_*)}.$$

Скориставшись нерівністю (4.32) отримаємо твердження теореми. □

Зауваження 4.4. Теорема 4.6 проілюстрована на прикладах в підрозділі Б.11 додатку (стор. 365).

Теорема 4.7. ***(A)*** *Нехай функція $f(z)$ визначена на $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$, базис–функція $g(z)$ є однолиста на $\mathcal{Z}$;* ***(B)*** *для кожного n:* ***(B1)*** *коефіцієнти С–ФІЛД, який побудований за значеннями f у вузлах $(n+1)$–го рядка матриці вузлів* (1.20), *відмінні від нуля і виконується умова типу Пейдона–Уолла $\max\limits_{z \in \mathcal{Z}} | {}^{(n)}a_k^{(g)}(g(z) - g(z_{k-1}))| \leqslant t(1 - t), 0 < t \leqslant \frac{1}{2}$, $k = \overline{2, n}$;* ***(B2)*** *знайдеться така множина $\mathscr{Z} \subset \mathcal{Z} \backslash \mathbf{Z}$, що для довільної точки $z_* \in \mathscr{Z}$ виконуються співвідношення $v_{n+1}(g; z_*) \neq 0$, $\max\limits_{z \in \mathcal{Z}} |v_{n+1}(g; z_*)(g(z) - g(z_n))| \leqslant$ $\leqslant t(1 - t)$. Тоді $\lim\limits_{n \to \infty} \max\limits_{z_* \in \mathscr{Z}} |f(z_*) - D_n^{(c)}(g; z_*)| = 0$.*

Доведення. Розглянемо два випадки: а) $0 < t < \frac{1}{2}$; б) $t = \frac{1}{2}$.
а) Нехай $0 < t < \frac{1}{2}$. Якщо виконуються умови теореми, то для кожного фіксованого n, згідно із теоремою 4.6, має місце нерівність

$$\max_{z_* \in \mathscr{Z}} |f(z_*) - D_n^{(c)}(g; z_*)| \leqslant \frac{{}^{(n)}\breve{a}_{n+1}^{(g)} \max_{z_* \in \mathscr{Z}} \prod_{i=1}^{n} | {}^{(n)}a_i^{(g)}(g(z_*) - g(z_{i-1}))|}{\Omega_n(t)\, \Omega_{n+1}(t)},$$

де ${}^{(n)}\breve{a}_{n+1}^{(g)} = \max_{z_* \in \mathscr{Z}} | {}^{(n)}a_{n+1}^{(g)}(z_*)(g(z_*) - g(z_n))|$,
або

$$\max_{z_* \in \mathscr{Z}} |f(z_*) - D_n^{(c)}(g; z_*)| \leqslant \frac{t^{n+1}(1 - t)^{n+1}((1 - t)^{n+1} - t^{n+1})}{(1 - t)^{n+3} - t^{n+3}}.$$

Якщо зробити заміну $t = 1/\theta$, де $\theta > 2$, то нерівність запишеться так

$$|f(z_*) - D_n^{(c)}(g; z_*)| < \frac{(\theta - 1)^{n+1}((\theta - 1)^{n+1} - 1)}{\theta^{2n}((\theta - 1)^{n+3} - 1)}.$$

Легко бачити, що права частина прямує до нуля, коли $n \to \infty$.

б) У випадку, коли $t = \frac{1}{2}$, нерівність (4.36) набуває вигляду

$$\max_{z_* \in \mathscr{Z}} |f(z_*) - D_n^{(c)}(g; z_*)| < \frac{n+1}{4^n(n+3)}.$$

Права частина прямує до нуля для $n \to \infty$. □

4.5. Квазі–обернений функціональний інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле

Нехай функція $f(z)$ визначена на компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$, базис–функція $g(z)$ однолиста на $\mathcal{Z}$, вузли $z_k \in \mathbf{Z}, k = \overline{0,n}$. Послідовності $\{v_k(g;z)\}$ та $\{V_k(g;z)\}$ визначимо наступним чином

$$f(z) = \frac{1}{v_0(g;z)},\ v_k(g;z) = v_k(g;z_k) + \frac{g(z) - g(z_k)}{v_{k+1}(g;z)}, \qquad k = \overline{0,n}, \quad (4.37)$$

$$V_0(g;z) = v_0(g;z), \quad V_k(g;z) = v_0 \circ v_1 \circ \cdots \circ v_k(g;z), \qquad k = \overline{1,n}.$$

Отримуємо, що функція f задається у вигляді ланцюгового дробу

$$f(z) = \frac{1}{V_n(g;z)} = \left(v_0(g;z_0) + \frac{g(z) - g(z_0)}{v_1(g;z_1)} \underset{+}{} \frac{g(z) - g(z_1)}{v_2(g;z_2)} \underset{+}{} \right.$$

$$\left. \underset{+ \cdots +}{} \frac{g(z) - g(z_{n-1})}{v_n(g;z_n)} \underset{+}{} \frac{g(z) - g(z_n)}{v_{n+1}(g;z)} \right)^{-1}.$$

Якщо позначити через $d_k^{(g)} = v_k(g;z_k), k = \overline{0,n}$, то матимемо

$$f(z) = \left(d_0^{(g)} + \frac{g(z) - g(z_0)}{d_1^{(g)}} \underset{+ \cdots +}{} \frac{g(z) - g(z_{n-1})}{d_n^{(g)}} \underset{+}{} \frac{g(z) - g(z_n)}{v_{n+1}(g;z)} \right)^{-1}. \quad (4.38)$$

Розглянемо також функціональний ланцюговий дріб вигляду

$$\tilde{D}_n^{(T)}(g;z) = \left(d_0^{(g)} + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{g(z) - g(z_{k-1})}{d_k^{(g)}} \right)^{-1}. \quad (4.39)$$

Скориставшись прямим (1.6) (або оберненим (1.11)) рекурентним алгоритмом поставимо у відповідність ланцюговим дробам (4.38) та (4.39) відношення двох узагальнених многочленів відносно g. Маємо:

$$f(z) = \frac{\tilde{P}_{n+1}^{(*)}(g;z)}{\tilde{Q}_{n+1}^{(*)}(g;z)} = \left(d_0^{(g)} + \frac{g(z) - g(z_0)}{d_1^{(g)}} \underset{+}{} \frac{g(z) - g(z_1)}{d_2^{(g)}} \underset{+}{} \right.$$

$$+ \cdots + \frac{g(z)-g(z_{n-1})}{d_n^{(g)}} + \frac{g(z)-g(z_n)}{v_{n+1}(g;z)}\Bigg)^{-1}. \tag{4.40}$$

$$\tilde{D}_n^{(T)}(g;z) = \frac{\tilde{P}_n^{(T)}(g;z)}{\tilde{Q}_n^{(T)}(g;z)} = \left(d_0^{(g)} + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{g(z)-g(z_{k-1})}{d_k^{(g)}}\right)^{-1}. \tag{4.41}$$

Означення 4.3. Якщо в точках множини (1.16) ланцюговий дріб (4.41) задовольняє умову (2.27), то він називається квазі–оберненим функціональним інтерполяційним ланцюговим дробом типу Тіле (Т–КФІЛД), .

Теорема 4.8. *Коефіцієнти Т–КФІЛД* (4.41) *визначаються через значення функції* $f(z)$ *у вузлах* $\mathbf{Z}$ *за допомогою рекурентного співвідношення*

$$d_k^{(g)} = \frac{g(z_k)-g(z_{k-1})}{-d_{k-1}^{(g)}} + \cdots + \frac{g(z_k)-g(z_1)}{-d_1^{(g)}} + \frac{g(z_k)-g(z_0)}{1/w_k - d_0^{(g)}}, \tag{4.42}$$

де $d_0^{(g)} = 1/w_0, k = \overline{1,n}$.

Доведення. Рекурентна формула (4.42) доводиться за аналогією з твердженням теореми 2.6. $\square$

Теорема 4.9. ***(A)*** *Нехай функція* $f(z)$ *визначена на компакті* $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$, *функція–базис* $g(z)$ *є однолиста на* $\mathcal{Z}$; ***(B)*** *нехай за значеннями функції в інтерполяційних вузлах* (1.16) *побудований Т–КФЛІД* (4.41), *коефіцієнти якого задовольняють умови типу Слєшинського–Прінґсгейма*

$$|d_i^{(g)}| \geqslant \beta \geqslant \alpha + 1, \qquad i = \overline{1,n}, \quad \text{де} \quad \alpha = \max_{t,s\in\mathcal{Z}} |g(t)-g(s)|; \tag{4.43}$$

(C) *нехай знайдеться множина* $\mathscr{Z} \subset \mathcal{Z}\backslash\mathbf{Z}$, *що в довільній точці* $z_* \in \mathscr{Z}$ *для частинного знаменника* $v_{n+1}(g;z)$ *ланцюгового дробу* (4.40) *виконується нерівність*

$$|v_{n+1}(g;z_*)| \geqslant \beta \geqslant \alpha + 1. \tag{4.44}$$

Тоді

$$\frac{\min_{z_*\in\mathscr{Z}} \prod_{i=1}^{n+1} |g(z_*)-g(z_{i-1})|}{\kappa_{n+3}(\omega)\kappa_{n+2}(\omega)|\bar{d}_{n+1}^{(g)}| \prod_{i=0}^{n} |d_i^{(g)}|^2} \leqslant \max_{z_*\in\mathscr{Z}} |f(z_*) - \tilde{D}_n^{(T)}(g;z_*)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\max_{z_*\in\mathscr{Z}} \prod_{i=1}^{n+1} |g(z_*) - g(z_{i-1})|}{|K_n||K_{n+1}|}\,, \tag{4.45}$$

де

$$K_n = \begin{cases} \alpha\,\kappa_n(\omega)\prod\limits_{k=2}^{n}|d_k^{(g)}| - \beta\dfrac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}, & \text{якщо} \quad \alpha \neq 1, \\ \kappa_n(\omega)\prod\limits_{k=2}^{n}|d_k^{(g)}| - (n+1)\beta, & \text{якщо} \quad \alpha = 1, \end{cases}$$

$$K_{n+1} = \begin{cases} \alpha\,\kappa_{n+1}(\omega)\tilde{d}_{n+1}^{(g)}\prod\limits_{k=2}^{n}|d_k^{(g)}| - \beta\dfrac{\alpha^{n+2}-1}{\alpha-1}, & \text{якщо} \quad \alpha \neq 1, \\ \kappa_{n+1}(\omega)\tilde{d}_{n+1}^{(g)}\prod\limits_{k=2}^{n}|d_k^{(g)}| - (n+2)\beta, & \text{якщо} \quad \alpha = 1, \end{cases}$$

$\omega = \alpha/\beta^2, \tilde{d}_{n+1}^{(g)} = \min\limits_{z_*\in\mathscr{Z}} |v_{n+1}(g;z_*)|, \bar{d}_{n+1}^{(g)} = \max\limits_{z_*\in\mathscr{Z}} |v_{n+1}(g;z_*)|$.

Доведення. Нехай коефіцієнти $d_i^{(g)}, i = \overline{0,n}$, ланцюгового дробу (4.40) визначені з інтерполяційної умови (2.27), тобто вони збігаються з відповідними коефіцієнтами Т–ФІЛД (4.41). Тоді в довільній точці $z_* \in \mathscr{Z}$ згідно із (1.10) маємо

$$|f(z_*) - \tilde{D}_n^{(T)}(g;z_*)| = \left|\frac{\tilde{P}_{n+1}^{(*)}(g;z_*)}{\tilde{Q}_{n+1}^{(*)}(g;z_*)} - \frac{\tilde{P}_n^{(T)}(g;z_*)}{\tilde{Q}_n^{(T)}(g;z_*)}\right| = \frac{\prod_{i=1}^{n+1}|g(z_*)-g(z_i)|}{|\tilde{Q}_n^{(T)}(g;z_*)||\tilde{Q}_{n+1}^{(T)}(g;z_*)|}.$$

Оскільки коефіцієнти Т–КФІЛД (4.41) та ланцюгового дробу (4.40) задовольняють умови типу Слєшинського–Прінґсгейма (4.43)–(4.44), то згідно із теоремою 3.1 маємо, що $K_n \leqslant |\tilde{Q}_n^{(T)}(g;z_*)| \leqslant \prod\limits_{i=0}^{n} |d_i^{(g)}|\,\kappa_{n+2}(\omega)$, $K_{n+1} \leqslant$ $\leqslant |\tilde{Q}_{n+1}^{(*)}(g;z_*)| \leqslant \bar{d}_{n+1}^{(g)} \prod\limits_{i=0}^{n} |d_i^{(g)}|\,\kappa_{n+3}(\omega)$. Звідки випливає оцінку (4.45). □

Зауваження 4.5. Якість оцінки (4.45) теореми 4.9 ілюструють приклади, які розміщені в підрозділі Б.12 додатку (стор. 367).

Теорема 4.10. ***(A)*** *Нехай функція $f(z)$ визначена на компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$, базис–функція $g(z)$ є однолиста в $\mathcal{Z}$;* ***(B)*** *для кожного n:* ***(B1)*** *коефіцієнти ${}^{(n)}d_k^{(g)}$, $k = \overline{0,n}$, Т–КФІЛД (4.41), який побудований за значеннями функції у вузлах $(n+1)$–го рядка матриці (1.20), задовольняють умову*

$|\,{}^{(n)}d_k^{(g)}\,| \geqslant \beta \geqslant \alpha + 1$, *де* $\alpha = \max\limits_{t,s\in\mathcal{Z}} |g(t) - g(s)|$, $k = \overline{1,n}$; ***(B2)*** *знайдеться множина* $\mathscr{Z} \subset \mathcal{Z}\backslash\mathcal{I}$, *що для довільної точки* $z_* \in \mathscr{Z}$ *частинний знаменник* $v_{n+1}(g; z)$ *задовольняє нерівність* $|v_{n+1}(g; z_*)| \geqslant \beta \geqslant \alpha + 1$. *Тоді* $\max_{z_*\in\mathscr{Z}} \lim_{n\to\infty} |f(z_*) - \tilde{D}_n^{(T)}(g; z_*)| = 0$.

Доведення. Згідно із теоремою 4.9 для кожного фіксованого значення n має місце оцінка (4.45), тобто

$$\max_{z_*\in\mathscr{Z}} |f(z_*) - \tilde{D}_n^{(T)}(g; z_*)| \leqslant \frac{\max_{z_*\in\mathscr{Z}} \prod_{i=1}^{n+1} |g(z_*) - g(z_{i-1}^{(n)})|}{|K_n||K_{n+1}|}.$$

Із умов даної теореми випливає, що $\beta > \alpha, |\,{}^{(n)}d_k^{(g)}\,| > \alpha, k = \overline{2,n}$. Крім того, $\kappa_n(\omega) \geqslant 1$. Розглянемо два випадки: а) $\alpha \neq 1$; б) $\alpha = 1$.

а) Нехай $\alpha \neq 1$. Тоді

$$|K_n| = \left|\alpha\, \kappa_n(\omega) \prod_{k=2}^{n} |d_k^{(g)}| - \beta \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1}\right| > \left|\alpha\alpha^{n-1} - \alpha \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1}\right| > \alpha^n(\alpha + 1),$$

і

$$\max_{z_*\in\mathscr{Z}} |f(z_*) - \tilde{D}_n^{(T)}(g; z_*)| < \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^n(\alpha+1)\alpha^{n+1}(\alpha+1)} = \frac{1}{(\alpha+1)^2\alpha^n}.$$

Права частина прямує до нуля, коли $n \to \infty$.

б) У випадку, коли $\alpha = 1$ маємо: $|K_n| = \left|\alpha\, \kappa_n(\omega) \prod\limits_{k=2}^{n} |d_k^{(g)}| - \beta(n+1)\right| > n$. Тоді $\max\limits_{z_*\in\mathscr{Z}} |f(z_*) - \tilde{D}_n^{(T)}(g; z_*)| < \frac{1}{n\,(n+1)}$. Знову права частина прямує до нуля, коли $n \to \infty$. □

4.6. Обернені g–різниці 2–го типу

З (4.37) випливає, що $v_0(g; z) = 1/f(z)$, $v_{k+1}(g; z) = (g(z) - g(z_k)) \times \times (v_k(g; z) - v_k(g; z_k))^{-1}$, $k = \overline{0,n}$.

Розглянемо обернені поділені g–різниці 2–го типу k–го порядку

$$\mathbf{\Phi}_k^{(2)}[g; z_0, \ldots, z_k; f] = \frac{g(z_k) - g(z_{k-1})}{\mathbf{\Phi}_{k-1}^{(2)}[g; z_0, \ldots, z_{k-2}, z_k; f] - \mathbf{\Phi}_{k-1}^{(2)}[g; z_0, \ldots, z_{k-1}; f]},$$

$$\mathbf{\Phi}_0^{(2)}[g;z;f] = 1/f(z), \qquad k=\overline{1,n}.$$

Легко бачити, що $d_k^{(g)} = v_k(g;z_k) = \mathbf{\Phi}_k^{(2)}[g;z_0,z_1,\ldots,z_k;f], k=\overline{0,n}$.

Обернена поділена g–різниця 2–го типу k–го порядку з одного боку визначається через інтерполяційні вузли $z_0,z_1,\ldots,z_k$ та значення функції $f(z)$ в цих вузлах, а з іншого боку є симетрична функція лише відносно двох останніх своїх аргументів z_{k-1} та z_k.

Утворимо обернені g–різниці 2–го типу k–го порядку за допомогою наступних співвідношень:

$$\varrho_0^{(2)} = \varrho_0^{(2)}[g;z_0;f] = \frac{1}{f(z_0)}, \tag{4.46}$$

$$\varrho_1^{(2)} = \varrho_1^{(2)}[g;z_0,z_1;f] = \frac{g(z_1)-g(z_0)}{\varrho_0^{(2)}[g;z_1;f]-\varrho_0^{(2)}[g;z_0;f]}, \tag{4.47}$$

$$\varrho_k^{(2)} = \varrho_k^{(2)}[g;z_0,z_1,\ldots,z_k;f] = \sum_{i=0}^{[k/2]} \mathbf{\Phi}_{k-2i}^{(2)}[g;z_0,z_1,\ldots,z_{k-2i};f], \tag{4.48}$$

де $k=\overline{2,n}$.

Із формул (4.46)–(4.48) випливає, що обернені g–різниці 2–го типу задовольняють рекурентне співвідношення

$$\begin{aligned}\varrho_k^{(2)}[g;z_0,\ldots,z_k;f] &= \varrho_{k-2}^{(2)}[g;z_0,\ldots,z_{k-2};f]+\\ &+\frac{g(z_k)-g(z_{k-1})}{\varrho_{k-1}^{(2)}[g;z_0,\ldots,z_{k-2},z_k;f]-\varrho_{k-1}^{(2)}[g;z_0,\ldots,z_{k-1};f]}, \qquad k=\overline{2,n},\end{aligned} \tag{4.49}$$

для початкових значень (4.46)–(4.47).

В свою чергу, коефіцієнти $d_k^{(g)}$ Т–КФІЛД (4.41) визначаються через обернені g–різниці 2–го типу наступним чином

$$\begin{aligned}&d_0^{(g)} = \varrho_0^{(2)} = \varrho_0^{(2)}[g;z_0;f], \qquad d_1^{(g)} = \varrho_1^{(2)} = \varrho_1^{(2)}[g;z_0,z_1;f],\\ &d_k^{(g)} = \varrho_k^{(2)} - \varrho_{k-2}^{(2)} = \varrho_k^{(2)}[g;z_0,\ldots,z_k;f] - \varrho_{k-2}^{(2)}[g;z_0,\ldots,z_{k-2};f],\end{aligned} \tag{4.50}$$

де $k=\overline{2,n}$.

Тоді Т–КФІЛД (4.41) запишеться у вигляді

$$\tilde{D}_n^{(T)}(g;z) = \frac{\tilde{P}_n^{(T)}(g;z)}{\tilde{Q}_n^{(T)}(g;z)} = \left(\varrho_0^{(2)} + \cfrac{g(z)-g(z_0)}{\varrho_1^{(2)} + \cfrac{g(z)-g(z_1)}{\varrho_2^{(2)}-\varrho_0^{(2)} + \cfrac{g(z)-g(z_2)}{\varrho_3^{(2)}-\varrho_1^{(2)} + \cdots + \cfrac{g(z)-g(z_{n-1})}{\varrho_n^{(2)}-\varrho_{n-2}^{(2)}}}}}\right)^{-1}. \tag{4.51}$$

Легко переконатися, що

$$\varrho_1^{(2)} = \frac{(g(z_1)-g(z_0))w_0w_1}{w_0-w_1},$$

$$\varrho_2^{(2)} = \frac{g(z_0)(w_2-w_1)+g(z_1)(w_0-w_2)+g(z_2)(w_1-w_0)}{g(z_0)w_0(w_2-w_1)+g(z_1)w_1(w_0-w_2)+g(z_2)w_2(w_1-w_0)},$$

тобто обернені g–різниці 2–го типу $\varrho_1^{(2)}[g;z_0,z_1;f]$ та $\varrho_2^{(2)}[g;z_0,z_1,z_2;f]$ симетричні функції своїх аргументів z_0,z_1,z_2. Доведемо, що обернена g–різниця 2–го типу n–го порядку $\varrho_n^{(2)}[g;z_0,z_1,\ldots,z_n;f]$ симетрична функція своїх аргументів $z_0,z_1,\ldots,z_n, n\in\mathbb{N}$.

Маємо, що $\tilde{P}_0^{(T)}(g;z)=1$, $\tilde{Q}_0^{(T)}(g;z)=\varrho_0^{(2)}$, $\tilde{P}_1^{(T)}(g;z)=\varrho_1^{(2)}$, $\tilde{Q}_1^{(T)}(g;z)= = \varrho_0^{(2)}\varrho_1^{(2)}+g(z)-g(z_0)$. Скориставшись прямим рекурентним алгоритмом (1.6), отримаємо

$$\tilde{P}_{2m}^{(T)}(g;z) = A_0 + A_1g(z) + \cdots + A_{m-1}g^{m-1}(z) + g^m(z), \tag{4.52}$$

$$\tilde{Q}_{2m}^{(T)}(g;z) = B_0 + B_1g(z) + \cdots + B_{m-1}g^{m-1}(z) + B_mg^m(z), \tag{4.53}$$

$$\tilde{P}_{2m+1}^{(T)}(g;z) = C_0 + C_1g(z) + \cdots + C_{m-1}g^{m-1}(z) + C_mg^m(z), \tag{4.54}$$

$$\tilde{Q}_{2m+1}^{(T)}(g;z) = D_0 + D_1g(z) + \cdots + D_mg^m(z) + g^{m+1}(z), \tag{4.55}$$

де $A_0,\ldots,A_{m-1},B_0,\ldots,B_m=\varrho_{2m}^{(2)},C_0,\ldots,C_m=\varrho_{2m+1}^{(2)},D_0,\ldots,D_m$ — деякі коефіцієнти.

Оскільки Т–КФІЛД (4.41) інтерполяційний за побудовою, то

$$\tilde{P}_n^{(T)}(g;z_k) - w_k\tilde{Q}_n^{(T)}(g;z_k) = 0, \qquad k=\overline{0,n}. \tag{4.56}$$

Розглянемо два випадки: а) $n = 2m$; б) $n = 2m + 1$.

а) Коли $n = 2m$, то із співвідношень (4.52), (4.53) та (4.56) отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь, яка містить $(2m + 1)$–е рівняння відносно $(2m + 1)$–го невідомого $A_0, \ldots, A_{m-1}, B_0, \ldots, B_{m-1}, B_m = \varrho_{2m}^{(2)}$

$$\begin{cases} A_0 - w_0 B_0 + g_0 A_1 - g_0 w_0 B_1 + \cdots - g_0^{m-1} w_0 B_{m-1} - g_0^m w_0 B_m = -g_0^m, \\ A_0 - w_1 B_0 + g_1 A_1 - g_1 w_1 B_1 + \cdots - g_1^{m-1} w_1 B_{m-1} - g_1^m w_1 B_m = -g_1^m, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ A_0 - w_n B_0 + g_n A_1 - g_n w_n B_1 + \cdots - g_n^{m-1} w_n B_{m-1} - g_n^m w_n B_m = -g_n^m. \end{cases}$$

Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -w_0 & g_0 & -g_0 w_0 & \cdots & g_0^{m-1} & -g_0^{m-1} w_0 & -g_0^m w_0 \\ 1 & -w_1 & g_1 & -g_1 w_1 & \cdots & g_1^{m-1} & -g_1^{m-1} w_1 & -g_1^m w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -w_n & g_n & -g_n w_n & \cdots & g_n^{m-1} & -g_n^{m-1} w_n & -g_n^m w_n \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{m+1} \begin{vmatrix} 1 & w_0 & g_0 & g_0 w_0 & \cdots & g_0^{m-1} & g_0^{m-1} w_0 & g_0^m w_0 \\ 1 & w_1 & g_1 & g_1 w_1 & \cdots & g_1^{m-1} & g_1^{m-1} w_1 & g_1^m w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_n & g_n & g_n w_n & \cdots & g_n^{m-1} & g_n^{m-1} w_n & g_n^m w_n \end{vmatrix}.$$

В свою чергу визначник

$$\Delta_{2m+1} = (-1)^{m+1} \begin{vmatrix} 1 & w_0 & g_0 & g_0 w_0 & \cdots & g_0^{m-1} & g_0^{m-1} w_0 & g_0^m \\ 1 & w_1 & g_1 & g_1 w_1 & \cdots & g_1^{m-1} & g_1^{m-1} w_1 & g_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_n & g_n & g_n w_n & \cdots & g_n^{m-1} & g_n^{m-1} w_n & g_n^m \end{vmatrix}.$$

Тоді, згідно із правилом Крамера

$$\varrho_{2m}^{(2)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & w_0 & g_0 & g_0w_0 & \cdots & g_0^{m-1} & g_0^{m-1}w_0 & g_0^m\\ 1 & w_1 & g_1 & g_1w_1 & \cdots & g_1^{m-1} & g_1^{m-1}w_1 & g_1^m\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & w_n & g_n & g_nw_n & \cdots & g_n^{m-1} & g_n^{m-1}w_n & g_n^m\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & w_0 & g_0 & g_0w_0 & \cdots & g_0^{m-1} & g_0^{m-1}w_0 & g_0^mw_0\\ 1 & w_1 & g_1 & g_1w_1 & \cdots & g_1^{m-1} & g_1^{m-1}w_1 & g_1^mw_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & w_n & g_n & g_nw_n & \cdots & g_n^{m-1} & g_n^{m-1}w_n & g_n^mw_n\end{vmatrix}}\,. \tag{4.57}$$

б) Якщо $n=2m+1$, то із співвідношень (4.54), (4.55) та (4.56) отримаємо систему із $(2m+2)$–х лінійних алгебричних рівнянь відносно невідомих $C_0, C_1, \dots, C_m=\varrho_{2m+1}^{(2)}, D_0, D_1, \dots, D_m$

$$\begin{cases} C_0-w_0D_0+g_0C_1-g_0w_0D_1+\cdots+g_0^mC_m-g_0^mw_0D_m=g_0^{m+1}w_0,\\ C_0-w_1D_0+g_1C_1-g_1w_1D_1+\cdots+g_1^mC_m-g_1^mw_1D_m=g_1^{m+1}w_1,\\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots\\ C_0-w_nD_0+g_nC_1-g_nw_nD_1+\cdots+g_n^mC_m-g_n^mw_nD_m=g_n^{m+1}w_n. \end{cases}$$

Визначник системи

$$\Delta=(-1)^{m+1}\begin{vmatrix}1 & w_0 & g_0 & g_0w_0 & \cdots & g_0^{m-1} & g_0^{m-1}w_0 & g_0^m & g_0^mw_0\\ 1 & w_1 & g_1 & g_1w_1 & \cdots & g_1^{m-1} & g_1^{m-1}w_1 & g_0^m & g_1^mw_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & w_n & g_n & g_nw_n & \cdots & g_n^{m-1} & g_n^{m-1}w_n & g_n^m & g_n^mw_n\end{vmatrix},$$

а визначник

$$\Delta_{2m+1}=(-1)^m\begin{vmatrix}1 & w_0 & g_0 & g_0w_0 & \cdots & g_0^{m-1} & g_0^{m-1}w_0 & g_0^mw_0 & g_0^{m+1}w_0\\ 1 & w_1 & g_1 & g_1w_1 & \cdots & g_1^{m-1} & g_1^{m-1}w_1 & g_1^mw_1 & g_1^{m+1}w_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & w_n & g_n & g_nw_n & \cdots & g_n^{m-1} & g_n^{m-1}w_n & g_n^mw_n & g_n^{m+1}w_n\end{vmatrix}.$$

Аналогічно, згідно із правилом Крамера

$$
\varrho^{(2)}_{2m+1} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & w_0 & g_0 & g_0w_0 & \cdots & g_0^{m-1} & g_0^{m-1}w_0 & g_0^m w_0 & g_0^{m+1}w_0 \\ 1 & w_1 & g_1 & g_1w_1 & \cdots & g_1^{m-1} & g_1^{m-1}w_1 & g_1^m w_1 & g_1^{m+1}w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_n & g_n & g_nw_n & \cdots & g_n^{m-1} & g_n^{m-1}w_n & g_n^m w_n & g_n^{m+1}w_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & w_0 & g_0 & g_0w_0 & \cdots & g_0^{m-1} & g_0^{m-1}w_0 & g_0^m & g_0^m w_0 \\ 1 & w_1 & g_1 & g_1w_1 & \cdots & g_1^{m-1} & g_1^{m-1}w_1 & g_0^m & g_1^m w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_n & g_n & g_nw_n & \cdots & g_n^{m-1} & g_n^{m-1}w_n & g_n^m & g_n^m w_n \end{vmatrix}}\,. \tag{4.58}
$$

Тут $w_i = f(z_i), g_i = g(z_i), i = \overline{0, n}$.

Із (4.57)–(4.58) випливає, що обернені g–різниці 2–го типу симетричні відносно своїх аргументів $z_0, z_1, \ldots, z_n$.

4.7. Квазі–обернений функціональний інтерполяційний ланцюговий дріб типу С–дробу

Нехай елементи послідовностей $\{v_k(g; z)\}$ та $\{V_k(g; z)\}$ визначаються наступним чином

$$
f(z) = \frac{1}{v_0(g; z)}, \qquad v_0(g; z) = v_0(g; z_0) + v_1(g; z)(g(z) - g(z_0)),
$$

$$
v_k(g; z) = \frac{v_k(g; z_k)}{1 + v_{k+1}(g; z)(g(z) - g(z_k))}, \qquad z_k \in \mathbf{Z}, \quad k = \overline{0, n},
$$

$$
V_0(g; z) = v_0(g; z),\ V_k(g; z) = v_0 \circ v_1 \circ \cdots \circ v_k(g; z), \qquad k = \overline{1, n}.
$$

Тоді функція $f(z)$ зображається функціональним ланцюговим дробом

$$
f(z) = \frac{1}{V_n(g; z)} = \frac{1}{v_0(g; z_0)} + \frac{v_1(g; z_1)(g(z) - g(z_0))}{1} +
$$

$$
+ \cdots + \frac{v_n(g; z_n)(g(z) - g(z_{n-1}))}{1} + \frac{v_{n+1}(g; z)(g(z) - g(z_n))}{1}\,.
$$

Позначимо через $e_k^{(g)} = v_k(g; z_k), k = \overline{0, n}$. Маємо

$$f(z) = \frac{\tilde{P}_{n+1}^{(*)}(g;z)}{\tilde{Q}_{n+1}^{(*)}(g;z)} = \frac{1}{e_0^{(g)}} + \frac{e_1^{(g)}(g(z) - g(z_0))}{1} + \frac{e_2^{(g)}(g(z) - g(z_1))}{1} +$$

$$+ \cdots + \frac{e_n^{(g)}(g(z) - g(z_{n-1}))}{1} + \frac{v_{n+1}(g;z)(g(z) - g(z_n))}{1}. \tag{4.59}$$

Також розглянемо ланцюговий дріб вигляду

$$\tilde{D}_n^{(c)}(g;z) = \frac{\tilde{P}_n^{(c)}(g;z)}{\tilde{Q}_n^{(c)}(g;z)} = \left(e_0^{(g)} + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{e_k^{(g)}(g(z) - g(z_{k-1}))}{1}\right)^{-1}. \tag{4.60}$$

Означення 4.4. Функціональний ланцюговий дріб (4.60), який у інтерполяційних вузлах (1.16) задовольняє умову (2.27), називається квазі–оберненим функціональним інтерполяційним ланцюговим дробом типу С–дробу (С–КФІЛД).

Теорема 4.11. *Коефіцієнти С–КФІЛД визначаються через значення функції $f(z)$ в інтерполяційних вузлах* (1.16) *за рекурентною формулою*

$$e_k^{(g)} = \frac{1}{g(z_k) - g(z_{k-1})}\left(-1 + \frac{e_{k-1}^{(g)}(g(z_k) - g(z_{k-2}))}{-1} + \cdots + \right.$$
$$\left. + \frac{e_2^{(g)}(g(z_k) - g(z_1))}{-1} + \frac{e_1^{(g)}(g(z_k) - g(z_0))}{1/w_k - e_0^{(g)}}\right), \qquad k = \overline{2, n}, \tag{4.61}$$
$$e_0^{(g)} = \frac{1}{w_0}, \quad e_1^{(g)} = \frac{1/w_1 - e_0^{(g)}}{g(z_1) - g(z_0)}.$$

Доведення. Теорема доводиться аналогічно до теореми 2.6. □

Очевидно, що С–КФІЛД (4.60) еквівалентний Т–КФІЛД (4.41), оскільки коефіцієнти вказаних ланцюговий дробів пов'язанні співвідношеннями $e_0^{(g)} = d_0^{(g)}$, $e_1^{(g)} = 1/d_1^{(g)}$, $e_k^{(g)} = 1/(d_{k-1}^{(g)}\, d_k^{(g)})$, $k = \overline{2, n}$. В той же час коефіцієнти С–КФІЛД (4.60) можуть бути знайдені безпосередньо через значення функції в інтерполяційних вузлах за допомогою рекурентної формули (4.61). Крім того, теорема 4.9 не буде мати місця для С–КФІЛД (4.60), оскільки коефіцієнти С–КФІЛД не задовольняють умов теореми.

Теорема 4.12. ***(A)*** *Нехай $f(z)$ неперервна на компакті $\mathcal{Z}\subset\mathbb{C}$, базис–функція $g(z)$ є однолиста на $\mathcal{Z}$;* ***(B)*** *нехай за значеннями функції в інтерполяційних вузлах* (1.16) *побудований C–КФІЛД* (4.60)*, коефіцієнти якого відмінні від нуля і задовольняють умову типу Пейдона–Уолла*

$$\begin{gathered}\max_{z\in\mathcal{Z}}|e_1^{(g)}(g(z)-g(z_0))/e_0^{(g)}|\leqslant t(1-t),\qquad 0<t\leqslant\frac{1}{2},\\ \max_{z\in\mathcal{Z}}|e_i^{(g)}(g(z)-g(z_{i-1}))|\leqslant t(1-t),\qquad i=\overline{2,n}.\end{gathered}\tag{4.62}$$

(C) *нехай знайдеться множина $\mathscr{Z}\subset\mathcal{Z}\backslash\mathbf{Z}$, що в довільній $z_*\in\mathscr{Z}$ для частинного чисельника $v_{n+1}(g;z)$ ланцюгового дробу* (4.59) *виконуються умови*

$$v_{n+1}(g;z_*)\neq0,\quad \max_{x\in\mathcal{Z}}|e_{n+1}(g;z_*)(g(z)-g(z_n))|\leqslant t(1-t).\tag{4.63}$$

Тоді

$$\frac{\tilde{e}_{n+1}^{(g)}\min_{z_*\in\mathscr{Z}}\prod_{i=1}^n|e_i^{(g)}(g(z_*)-g(z_{i-1}))|}{|e_0^{(g)}|^2\,\kappa_{n+2}(\delta)\,\kappa_{n+3}(\delta_*)}\leqslant\max_{z_*\in\mathscr{Z}}|f(z_*)-\tilde{D}_n^{(c)}(g;z_*)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\bar{e}_{n+1}^{(g)}\max_{z_*\in\mathscr{Z}}\prod_{i=1}^n|e_i^{(g)}(g(z_*)-g(z_{i-1}))|}{|e_0^{(g)}|^2\,\Omega_{n+1}(t)\,\Omega_{n+2}(t)},\tag{4.64}$$

де $\tilde{e}_{n+1}^{(g)}=\min\limits_{z_*\in\mathscr{Z}}|v_{n+1}(g;z_*)(g(z_*)-g(z_n))|$, $\bar{e}_{n+1}^{(g)}=\max\limits_{z_*\in\mathscr{Z}}|v_{n+1}(g;z_*)(g(z_*)-g(z_n))|$, $\delta=\max\left\{\max\limits_{z\in\mathcal{Z}}\max\limits_{2\leqslant i\leqslant n}\{|e_i^{(g)}(g(z)-g(z_{i-1}))|\},\max\limits_{z\in\mathcal{Z}}\left\{\frac{|e_1^{(g)}(g(z)-g(z_0))|}{|e_0^{(g)}|}\right\}\right\}$, $\delta_*=\max\left\{\delta,\bar{e}_{n+1}^{(g)}\right\}$, *величини $\kappa_n(\delta)$ та $\Omega_n(t)$ визначенні, відповідно, в* (2.12) *та* (2.17).

Доведення. Оскільки коефіцієнти $e_i^{(g)}, i=\overline{0,n}$, ланцюгового дробу (4.59) можна визначити з інтерполяційної умови (2.27), то за побудовою перші n коефіцієнтів (4.59) будуть збігатися з коефіцієнтами C–КФІЛД (4.60). Тоді для довільної $z_*\in\mathscr{Z}$ згідно із формулою (3.4) маємо, що

$$\left|f(z_*)-\tilde{D}_n^{(c)}(g;z_*)\right|=\left|\frac{\tilde{P}_{n+1}^{(*)}(g;z_*)}{\tilde{Q}_{n+1}^{(*)}(g;z_*)}-\frac{\tilde{P}_n^{(c)}(g;z_*)}{\tilde{P}_n^{(c)}(g;z_*)}\right|=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n+1}|e_i^{(g)}(g(z_*)-g(z_{i-1}))|}{\left|\tilde{Q}_{n+1}^{(*)}(g;z_*)\right|\left|\tilde{Q}_n^{(c)}(g;z_*)\right|}.$$

Оскільки $\tilde{D}_n^{(c)}(g;z) = \tilde{P}_n^{(c)}(g;z)/\tilde{Q}_n^{(c)}(g;z) = \big(\check{P}_n(z)/\check{Q}_n(z)\big)^{-1}$, то з формули Ойлера–Міндінґа (2.3a) для $B_0^{[n]} = e_0^{(g)}$, $X_0 = e_1^{(g)}(g(z)-g(z_0))/e_0^{(g)}$, $X_i = e_{i+1}^{(g)}(g(z)-g(z_i))$, $i=\overline{1,n}$, та із теореми 2.2 отримуємо

$$|\tilde{Q}_n^{(c)}(g;z)| \leqslant |e_0^{(g)}|\,\kappa_{n+2}(\delta), \qquad |\tilde{Q}_{n+1}^{(*)}(g;z)| \leqslant |e_0^{(g)}|\,\kappa_{n+3}(\delta_*).$$

Оскільки мають місце умови (4.62), то згідно із теоремою 2.4 маємо:

$$|\tilde{Q}_n^{(c)}(g;z)| \geqslant |e_0^{(g)}|\,\Omega_{n+1}(t), \qquad |\tilde{Q}_{n+1}^{(*)}(g;z)| \geqslant |e_0^{(g)}|\,\Omega_{n+2}(t).$$

Звідси і випливає (4.64). □

Зауваження 4.6. В підрозділі Б.13 додатку (стор. 369) розглянуті приклади, які ілюструють теорему 4.12.

4.8. Висновки до розділу 4

В розділі 4 розглянуто задачу інтерполяції функцій комплексної змінної ФІЛД, коли в якості базис–функції $g(z)$ вибрано деяку однолисту функцію.

Побудовано Т–ФІЛД $b_0^{(g)} + \mathbf{K}_{i=1}^n((g(z)-g(z_{i-1}))/b_i^{(g)})$, коефіцієнти якого, згідно із теоремою 4.1, визначаються за рекурентним співвідношенням. Введено в розгляд обернені g–різниці. В теоремі 4.2 обґрунтовано їх властивості. Отримано співвідношення (4.11) та (4.12) з яких випливає симетричність обернених g–різниць. В теоремі 4.3 доведено оцінку залишкового члена Т–ФІЛД. Збіжність інтерполяційного процесу обґрунтовано в теоремі 4.4.

В теоремі 4.5 встановлено рекурентну формулу обчислення коефіцієнтів С–ФІЛД $a_0^{(g)} + \mathbf{K}_{i=1}^n(a_i^{(g)}(g(z)-g(z_{i-1})/1)$. Оцінку залишкового члена С–ФІЛД доведено в теоремі 4.6. В теоремі 4.7 показано збіжність інтерполяційного процесу.

Побудовано Т–КФІЛД $\big(d_0^{(g)} + \mathbf{K}_{i=1}^n((g(z)-g(z_{i-1}))/d_i^{(g)})\big)^{-1}$. В теоремі 4.8 отримано рекурентну формулу у вигляді функціонального ланцюгового дробу для обчислення коефіцієнтів Т–КФІЛД. Формулу залишкового члена Т–КФІЛД доведено в теоремі 4.9. Збіжність інтерполяційного процесу обґрунтовано в теоремі 4.10. Розглянуто обернені g–різниці 2–го типу. Отримано співвідношення (4.57) та (4.58), які доводять симетричність обернених g–різниць 2–го типу.

В теоремі 4.11 отримано рекурентна формула визначення коефіцієнтів С–КФІЛД $\left(e_0^{(g)} + \mathbf{K}_{i=1}^{n}(e_i^{(g)}(g(z) - g(z_{i-1}))/1)\right)^{-1}$. Формулу залишкового члена С–КФІЛД доведено в теоремі 4.12.

Результати розділу опубліковано в статті [83] та у розділах монографії [92, с. 155–192].

РОЗДІЛ 5
РОЗВИНЕННЯ ФУНКЦІЙ В ЛАНЦЮГОВИЙ ДРІБ ТІЛЕ ТА В ПРАВИЛЬНИЙ ЛАНЦЮГОВИЙ С–ДРІБ

5.1. Властивості обернених похідних Тіле

Встановимо деякі нові властивості обернених похідних Тіле, які доповнюють властивості, що визначаються співвідношеннями (1.73)–(1.74).

Теорема 5.1. *Нехай функція $f(z)$ в кожній точці компакту $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ має похідні (скінченне значення чи ∞).* ***(A)*** *Якщо $f'(z_0) = 0$ в точці $z_0 \in \mathcal{Z}$, то тоді ${}^{\backprime}f(z_0) = \infty$;* ***(B)*** *якщо $f'(z_0) = \infty$ в точці $z_0 \in \mathcal{Z}$, то тоді ${}^{\backprime}f(z_0) = 0$;* ***(C)*** *якщо ${}^{(n-2)}f(z_0) = C$ в точці $z_0 \in \mathcal{Z}$, де $C = const \neq 0$, то тоді:* ***(C1)*** *якщо ${}^{(n-1)}f(z_0) = 0$, то ${}^{(n)}f(z_0) = \infty$;* ***(C2)*** *якщо ${}^{(n-1)}f(z_0) = \infty$, то тоді ${}^{(n)}f(z_0) = C$.*

У випадку функції дійсної змінної $f(x)$, яка визначена на компакті $\mathcal{R} \subset \subset \mathbb{R}$, теорема 5.1 формулюється наступним чином.

Теорема 5.2. *Нехай функція $f(x)$ в точках компакту $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$ має похідні (скінченне значення, $+\infty$ чи $-\infty$).* ***(A)*** *Якщо $f'(x_0) = 0$ в точці $x_0 \in \mathcal{R}$, то тоді:* ***(A1)*** *${}^{\backprime}f(x_0) = +\infty$, коли функція f монотонно зростає в деякому околі точки x_0;* ***(A2)*** *${}^{\backprime}f(x_0) = -\infty$, коли функція f монотонно спадає в деякому околі точки x_0;* ***(B)*** *якщо $f'(x_0) = \pm\infty$ в точці $x_0 \in \mathcal{R}$, то тоді ${}^{\backprime}f(x_0) = 0$;* ***(C)*** *якщо ${}^{(n-2)}f(x_0) = C$ в точці $x_0 \in \mathcal{R}$, де $C = = const \neq 0$, то тоді:* ***(C1)*** *якщо ${}^{(n-1)}f(x_0) = 0$, то ${}^{(n)}f(x_0) = +\infty$, коли в деякому околі точки x_0 обернена похідна ${}^{(n-1)}f(x)$ монотонно зростає і ${}^{(n)}f(x_0) = -\infty$, коли обернена похідна ${}^{(n-1)}f(x)$ монотонно спадає в деякому околі точки x_0;* ***(C2)*** *якщо ${}^{(n-1)}f(x_0) = \pm\infty$, то тоді ${}^{(n)}f(x_0) = C$.*

Теореми 5.1 та 5.2 безпосередньо випливають із (1.68)–(1.69) та означення похідних дійсної [112, 114] та комплексної [57, 96, 119] змінних.

Зауваження 5.1. Аналогічно, як і у випадку "звичайних" похідних функції дійсної змінної $f(x)$ [110], для обернених похідних Тіле можна означити обернену ліву похідну ${}^{\backprime}f_{-}(x)$ та обернену праву похідну ${}^{\backprime}f_{+}(x)$, а також обернені похідні числа: $\mathbf{R}^{+}f(x)$— верхнє справа, $\mathbf{R}_{+}f(x)$— нижнє справа, $\mathbf{R}^{-}f(x)$ — верхнє зліва, $\mathbf{R}_{-}f(x)$— нижнє зліва наступним чином

$$\mathbf{R}^{+}f(x) = \overline{\lim_{h\to+0}}\frac{h}{f(x+h)-f(x)}, \qquad \mathbf{R}_{+}f(x) = \underline{\lim_{h\to+0}}\frac{h}{f(x+h)-f(x)},$$

$$\mathbf{R}^{-}f(x) = \overline{\lim_{h\to-0}}\frac{h}{f(x+h)-f(x)}, \qquad \mathbf{R}_{-}f(x) = \underline{\lim_{h\to-0}}\frac{h}{f(x+h)-f(x)},$$

$${}^{\backprime}f_{-}(x) = \lim_{h\to-0}\frac{h}{f(x+h)-f(x)}, \qquad {}^{\backprime}f_{+}(x) = \lim_{h\to+0}\frac{h}{f(x+h)-f(x)}.$$

Очевидно, що якщо $\mathbf{R}^{+}f(x) = \mathbf{R}_{+}f(x)$, то функція має праву обернену похідну Тіле ${}^{\backprime}f_{+}(x)$, якщо $\mathbf{R}^{-}f(x) = \mathbf{R}_{-}f(x)$ — обернену ліву похідну Тіле ${}^{\backprime}f_{+}(x)$. Необхідною і достатньою умовою існування оберненої похідної Тіле ${}^{\backprime}f(x)$ є рівність всіх чотирьох обернених похідних чисел, тобто $\mathbf{R}^{+}f(x) = = \mathbf{R}_{+}f(x) = \mathbf{R}^{-}f(x) = \mathbf{R}_{-}f(x)$.

Теорема 5.3. *Нехай для $z \in \mathcal{Z}$ існують скінченні та відмінні від нуля обернені похідні Тіле функцій $u = u(z)$ та $v = v(z)$. Тоді існують обернені похідні Тіле суми, різниці, добутку та частки цих функцій, які визначаються формулами*

$${}^{\backprime}(u \pm v) = \frac{{}^{\backprime}u\cdot{}^{\backprime}v}{{}^{\backprime}v \pm {}^{\backprime}u}\,, {}^{\backprime}(u\cdot v) = \frac{{}^{\backprime}u\cdot{}^{\backprime}v}{{}^{\backprime}u\cdot u + {}^{\backprime}v\cdot v}\,, {}^{\backprime}(u/v) = \frac{v^2\cdot{}^{\backprime}u\cdot{}^{\backprime}v}{{}^{\backprime}v\cdot v - {}^{\backprime}u\cdot u}\,. \tag{5.1}$$

Доведення. Існування обернених похідних суми, різниці, добутку і частки двох функцій випливає із існування "звичайних" похідних суми, різниці, добутку та частки двох функцій [57].

Покажемо, що мають місце формули (5.1). У випадку суми або різниці двох функцій із (1.68) маємо, що

$${}^{\backprime}(u \pm v) = \frac{1}{(u \pm v)'} = \frac{1}{u' \pm v'} = \frac{1}{1/{}^{\backprime}u \pm 1/{}^{\backprime}v} = \frac{{}^{\backprime}v\cdot{}^{\backprime}u}{{}^{\backprime}v \pm {}^{\backprime}u}\,.$$

Аналогічно у випадку добутку функцій отримуємо, що

$$ {}^{\backprime}(u{\cdot}v) = \frac{1}{(u{\cdot}v)'} = \frac{1}{u'{\cdot}v + u{\cdot}v'} = \frac{1}{v/{}^{\backprime}u + u/{}^{\backprime}v} = \frac{{}^{\backprime}v{\cdot}{}^{\backprime}u}{{}^{\backprime}v{\cdot}v + {}^{\backprime}u{\cdot}u}\ . $$

У випадку частки функцій маємо, що

$$ {}^{\backprime}(u/v) = \frac{1}{(u/v)'} = \frac{v^2}{u'{\cdot}v - u{\cdot}v'} = \frac{v^2}{v/{}^{\backprime}u - u/{}^{\backprime}v} = \frac{v^2{\cdot}{}^{\backprime}v{\cdot}{}^{\backprime}u}{{}^{\backprime}v{\cdot}v - {}^{\backprime}u{\cdot}u}. $$

$\square$

За індукцією спираючись на (5.1) легко довести наступне твердження.

Теорема 5.4. *Якщо функції $f_i(z), z \in \mathcal{Z}, i = \overline{1,n}$, мають скінченні відмінні від нуля обернені похідні, то*

$$ {}^{\backprime}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(z)\right) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} {}^{\backprime}f_i(z)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} {}^{\backprime}f_j(z)}, \quad {}^{\backprime}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(z)\right) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} {}^{\backprime}f_i(z)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} {}^{\backprime}f_j(z)\, f_j(z)}. \tag{5.2} $$

Зауваження 5.2. Із (5.2) випливає, що ${}^{\backprime}(f(z)^n) = {}^{\backprime}f(z)/(n\,(f(z))^{n-1})$.

Наведемо без доведення наступне твердження.

Теорема 5.5. *Нехай для $z \in \mathcal{Z}$ функції $u = u(z)$ та $v = v(z)$ мають скінченні відмінні від нуля обернені похідні до другого порядку включно, тоді другу обернену похідну Тіле суми, різниці, добутку та частки цих функцій можна знайти за допомогою формул*

$$ {}^{\backprime\backprime}(u \pm v) = \frac{({}^{\backprime}v)^2{\cdot}\frac{{}^{\backprime\backprime}u \pm v}{{}^{\backprime\backprime}u - u} \pm 2{\cdot}{}^{\backprime}u{\cdot}{}^{\backprime}v + ({}^{\backprime}u)^2{\cdot}\frac{{}^{\backprime\backprime}v \pm u}{{}^{\backprime\backprime}v - v}}{\frac{({}^{\backprime}v)^2}{{}^{\backprime\backprime}u - u} \pm \frac{({}^{\backprime}u)^2}{{}^{\backprime\backprime}v - v}}\,, $$

$$ {}^{\backprime\backprime}(uv) = \frac{\frac{u^2{\cdot}({}^{\backprime}u)^2{\cdot}{}^{\backprime\backprime}v}{{}^{\backprime\backprime}v - v} + u{\cdot}v{\cdot}{}^{\backprime}u{\cdot}{}^{\backprime}v + \frac{v^2{\cdot}({}^{\backprime}v)^2{\cdot}{}^{\backprime\backprime}u}{{}^{\backprime\backprime}u - u}}{\frac{u{\cdot}({}^{\backprime}u)^2}{{}^{\backprime\backprime}v - v} - {}^{\backprime}u{\cdot}{}^{\backprime}v + \frac{v{\cdot}({}^{\backprime}v)^2}{{}^{\backprime\backprime}u - u}}, $$

$$ {}^{\backprime\backprime}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\frac{uv^2{\cdot}({}^{\backprime}v)^2}{{}^{\backprime\backprime}u - u} + v^2({}^{\backprime}v)^2 - uv{\cdot}{}^{\backprime}u{\cdot}{}^{\backprime}v + u^2({}^{\backprime}u)^2 - \frac{u^2({}^{\backprime}u)^2{\cdot}{}^{\backprime\backprime}v}{{}^{\backprime\backprime}v - v}}{v\Big(\frac{v^2({}^{\backprime}v)^2}{{}^{\backprime\backprime}u - u} + v{\cdot}{}^{\backprime}u{\cdot}{}^{\backprime}v - \frac{u{\cdot}({}^{\backprime}u)^2{\cdot}{}^{\backprime\backprime}v}{{}^{\backprime\backprime}v - v}\Big)}\,. $$

Теорема 5.6. ***(A)*** *Нехай функція $w = f(z)$ однолиста в області G і в точці $z = z_0$ має обернену похідну Тіле ${}^{\backprime}f(z_0)$;* ***(B)*** *нехай $z = F(w)$ обернена функція до $f(z)$ в області E, де $E = \{w : w = f(z), z \in G\}$. Тоді в точці $w_0 \in E$, де $w_0 = f(z_0)$, функція F має обернену похідну Тіле ${}^{\backprime}F(w_0)$ і виконується співвідношення ${}^{\backprime}F(w_0) = 1/{}^{\backprime}f(z_0)$.*

Доведення. З означення оберненої похідної Тіле та з умов, які накладені на функцію $f(z)$, маємо, що обернена функція F має похідну в точці w_0 і $F'(w_0) = 1/f'(z_0)$ [96]. Тоді ${}^{\backprime}F(w_0) = 1/F'(w_0) = 1/(1/f'(z_0)) = 1/{}^{\backprime}f(z_0)$. $\square$

Теорема 5.7. *Нехай функція $w = f(z)$ має обернену похідну Тіле в точці $z_0 \in G$, а функція $u = g(w)$ має обернену похідну в точці $w_0 \in E$, де $w_0 = f(z_0)$, тоді складена функція $u = F(z) = g\left(f(z)\right)$ також має в точці $z_0 \in G$ обернену похідну Тіле, причому ${}^{\backprime}F(z_0) = {}^{\backprime}g(w_0) \cdot {}^{\backprime}f(z_0)$.*

Доведення. При умовах накладених на функції $f(z), g(z)$ та із визначення оберненої похідної Тіле маємо, що складена функція F має похідну в точці z_0 і $F'(z_0) = g'(w_0)f'(z_0)$. Тоді ${}^{\backprime}F(z_0) = 1/(g'(w_0)f'(z_0)) = {}^{\backprime}g(w_0) \cdot {}^{\backprime}f(z_0)$. $\square$

Як наслідок із теореми 5.7 випливає наступне твердження.

Теорема 5.8. *Нехай функція $f(z)$ має обернені похідні Тіле до n–го порядку, $C = const$, тоді*

$$ {}^{(2k)}\big(f(Cz)\big) = {}^{(2k)}f(v)\Big|_{v=Cz}, \quad {}^{(2k+1)}\big(f(Cz)\big) = \tfrac{1}{C} \cdot {}^{(2k+1)}f(v)\Big|_{v=Cz}, \tag{5.3} $$

де $k = \overline{0, [\frac{n}{2}]}$.

Доведення. Із теореми 5.7 маємо, що ${}^{(1)}\big(f(Cz)\big) = \frac{1}{C} \cdot {}^{(1)}f(v)\Big|_{v=Cz}$. Далі, звідси та із (1.69) і (1.73) випливає, що ${}^{(2)}\big(f(Cz)\big) = 2 \cdot {}^{(1)}\big({}^{(1)}(f(Cz))\big) + f(Cz) = \big(2 \cdot {}^{(1)}\big(\frac{1}{C} \cdot {}^{(1)}f(v)\big) + f(v)\big)\Big|_{v=Cz} = {}^{(2)}f(v)\Big|_{v=Cz}$. Припустимо, що формули (5.3) вірні для $k = \overline{1, s-1}$. Тоді для $k = s$ із (1.73) маємо, що ${}^{(2s)}\big(f(Cz)\big) = 2s \cdot {}^{(1)}\big({}^{(2s-1)}\big(f(Cz)\big)\big) + {}^{(2s-2)}\big(f(Cz)\big) = 2s \cdot \big({}^{(1)}\big(\frac{1}{C} \times$

$\times {}^{(2s-1)}f(v)\big)+{}^{(2s-2)}f(v)\big)\big|_{v=Cz} = {}^{(2s)}f(v)\big|_{v=Cz}$. Аналогічно ${}^{(2s+1)}\big(f(Cz)\big) = (2s+$ $+1)\cdot\big({}^{(1)}\big({}^{(2s)}\big(f(v)\big)\big)+{}^{(2s-1)}\big(f(v)\big)\big)\big|_{v=Cz} = \frac{1}{C}\cdot{}^{(2s+1)}f(v)\big|_{v=Cz}$. □

5.2. Взаємозв'язок обернених похідних Тіле з похідними функції

Обернена похідна Тіле довільного порядку функції комплексної змінної $f(z)$ може бути обчислена за допомогою рекурентної формули (1.69). Згідно із означенням 1.33 обернена похідна Тіле k–го порядку ${}^{(k)}f(z)$ визначається як границя оберненої різниці k–го порядку $\rho_k[z_0, z_1, \ldots, z_k; f]$, коли вузли $z_0, z_1, \ldots, z_k$ прямують до деякого фіксованого значення $z \in \mathcal{Z}$.

Нехай для функції $f(z)$ в околі точки $z_* \in \mathcal{Z}$ має місце формула Тейлора $f(z) = P_n(z, z_*) + R_n(z, z_*)$, де $P_n(z, z_*) = c(z_*) + c_1(z_*)(z - z_*) + \ldots +$ $+ c_n(z_*)(z - z_*)^n$, $c_k(z_*) = f^{(k)}(z_*)/k!$.

Теорема 5.9 (Співвідношення Ньорлунда). *Якщо функція $f(z)$ аналітична в $\mathcal{Z}$, тоді обернені похідні Тіле функції в точці $z_* \in \mathcal{Z}$ визначаються через похідні функції в цій точці через відношення визначників Ганкеля наступним чином*

$$ {}^{(2k)}f(z_*) = \frac{H_{k+1}^{(0)}(z_*)}{H_k^{(2)}(z_*)}, \quad {}^{(2k-1)}f(z_*) = \frac{H_{k-1}^{(3)}(z_*)}{H_k^{(1)}(z_*)}, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{5.4} $$

де

$$ H_0^{(n)}(z_*) = 1, \quad H_k^{(n)}(z_*) = \begin{vmatrix} c_n(z_*) & c_{n+1}(z_*) & \ldots & c_{n+k-1}(z_*) \\ c_{n+1}(z_*) & c_{n+2}(z_*) & \ldots & c_{n+k}(z_*) \\ c_{n+2}(z_*) & c_{n+3}(z_*) & \ldots & c_{n+k+1}(z_*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+k-1}(z_*) & c_{n+k}(z_*) & \ldots & c_{n+2k-2}(z_*) \end{vmatrix}. $$

Зауваження 5.3. Формули (5.4) вперше були отримані Н. Е. Ньорлундом [164, с. 427] і ґрунтувалися на взаємозв'язку між коефіцієнтами інтерполяційного многочлена у формі Ньютона та коефіцієнтами Т–ІЛД, які побудовані за значеннями функції на одній і тій самій множині вузлів. Запропоноване в роботі Р. А. Кацали [35] доведення ґрунтується на означенні оберненої похідної Тіле.

Із теореми 5.9 як наслідок випливає твердження.

Теорема 5.10. ***(A)*** *Якщо визначники Ганкеля* $H_{k+1}^{(0)}(z_*) \neq 0, H_k^{(2)}(z_*) \neq$ $\neq 0$, *то аналітична функція* f *в точці* z_* *має скінченну обернену похідну Тіле* $(2k)$*–го порядку, яка обчислюється за формулою* (5.4)*; якщо* $H_{k+1}^{(0)}(z_*) = 0, H_k^{(2)}(z_*) \neq 0$, *то* ${}^{(2k)}f(z_*) = 0$*; якщо* $H_{k+1}^{(0)}(z_*) \neq 0, H_k^{(2)}(z_*) =$ $= 0$, *то* ${}^{(2k)}f(z_*) = \infty$.

(B) *Якщо ганкелеві визначники* $H_{k+1}^{(1)}(z_*) \neq 0, H_k^{(3)}(z_*) \neq 0$, *то аналітична функція* $f(z)$ *в точці* z_* *має скінченну обернену похідну Тіле* $(2k{+}1)$*–го порядку, яка визначається за формулою* (5.4)*; якщо* $H_{k+1}^{(1)}(z_*) \neq 0, H_k^{(3)}(z_*) =$ $= 0$, *то* ${}^{(2k+1)}f(z_*) = 0$*; якщо* $H_{k+1}^{(1)}(z_*) = 0, H_k^{(3)}(z_*) \neq 0$, *то* ${}^{(2k+1)}f(z_*) = \infty$.

Лема 5.1 (Тотожність Якобі [140, с. 595]). *При всіх* $n, k \in \mathbb{N}$ *визначники Ганкеля задовольняють тотожність Якобі*

$$\left(H_k^{(n)}(z_*)\right)^2 - H_k^{(n-1)}(z_*)H_k^{(n+1)}(z_*) + H_{k+1}^{(n-1)}(z_*)H_{k-1}^{(n+1)}(z_*) = 0\ . \tag{5.5}$$

Теорема 5.11. *Коефіцієнти формули Тіле* (1.71) *визначаються через відношення визначників Ганкеля наступним чином*

$$\begin{aligned} b_{2k}(z_*) &= (2k)^{\backprime}\left({}^{(2k-1)}f(z_*)\right) = \frac{-\left(H_k^{(1)}(z_*)\right)^2}{H_k^{(2)}(z_*)\, H_{k-1}^{(2)}(z_*)}, \\ b_{2k+1}(z_*) &= (2k+1)^{\backprime}\left({}^{(2k)}f(z_*)\right) = \frac{\left(H_k^{(2)}(z_*)\right)^2}{H_k^{(1)}(z_*)\, H_{k+1}^{(1)}(z_*)}, \qquad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Доведення. Оскільки $b_{2k}(z_*) = (2k)^{\backprime}\left({}^{(2k-1)}f(z_*)\right) = {}^{(2k)}f(z_*) - {}^{(2k-2)}f(z_*)$, то з першої формули (5.4) та (5.5) маємо, що

$$b_{2k}(z_*) = \frac{H_{k+1}^{(0)}(z_*)}{H_k^{(2)}(z_*)} - \frac{H_k^{(0)}(z_*)}{H_{k-1}^{(2)}(z_*)} = \frac{H_{k+1}^{(0)}(z_*)H_{k-1}^{(2)}(z_*) - H_k^{(0)}(z_*)H_k^{(2)}(z_*)}{H_k^{(2)}(z_*)H_{k-1}^{(2)}(z_*)} =$$

$$= \frac{-\big(H_k^{(1)}(z_*)\big)^2}{H_k^{(2)}(z_*)H_{k-1}^{(2)}(z_*)}.$$

Аналогічно з другої формули (5.4) та (5.5) отримуємо

$$b_{2k+1}(z_*) = (2k+1)^{\backprime}\big({}^{(2k)}f(z_*)\big) = {}^{(2k+1)}f(z_*) - {}^{(2k-1)}f(z_*) =$$

$$= \frac{H_k^{(3)}(z_*)}{H_{k+1}^{(1)}(z_*)} - \frac{H_{k-1}^{(0)}(z_*)}{H_k^{(1)}(z_*)} = \frac{\big(H_k^{(2)}(z_*)\big)^2}{H_k^{(1)}(z_*)H_{k+1}^{(1)}(z_*)}\ .$$

□

Формули (5.6) були доведені Ньорлундом в [164, с. 428–429] без використання тотожності Якобі.

5.3. Теореми про обернену похідну Тіле многочлена та раціональної функції

Як наслідок із теореми 5.9 випливає наступне твердження.

Теорема 5.12. *Обернена похідна Тіле $(2n-1)$–го порядку многочлена n–го степеня $p_n(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i, a_i \in \mathbb{C},\ i = \overline{0,n}, a_n \neq 0$, тотожно дорівнює нулю, коли $n \in \mathbb{N}_2$, обернена похідна Тіле 1–го порядку двочлена $p_1(z) = a_0 + a_1 z$ рівна $1/a_1$.*

Доведення. Нехай $\bar{z} \in \mathbb{C}$ є довільна фіксована точка. Згідно із (5.4) для $n \geqslant 2$

$${}^{(2n-1)}p_n(\bar{z}) = \frac{H_{n-1}^{(3)}(\bar{z})}{H_n^{(1)}(\bar{z})} = \frac{\begin{vmatrix} c_3(\bar{z}) & c_4(\bar{z}) & \dots & c_n(\bar{z}) & c_{n+1}(\bar{z}) \\ c_4(\bar{z}) & c_5(\bar{z}) & \dots & c_{n+1}(\bar{z}) & c_{n+2}(\bar{z}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n+1}(\bar{z}) & c_{n+2}(\bar{z}) & \dots & c_{2n-2}(\bar{z}) & c_{2n-1}(\bar{z}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1(\bar{z}) & c_2(\bar{z}) & \dots & c_{n-1}(\bar{z}) & c_n(\bar{z}) \\ c_2(\bar{z}) & c_3(\bar{z}) & \dots & c_n(\bar{z}) & c_{n+1}(\bar{z}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_n(\bar{z}) & c_{n+1}(\bar{z}) & \dots & c_{2n-2}(\bar{z}) & c_{2n-1}(\bar{z}) \end{vmatrix}}.$$

Оскільки $c_{n+1}(\bar z) = c_{n+2}(\bar z) = \dots = c_{2n-1}(\bar z) = 0$, то у визначнику чисельника останній стовпчик буде складатися лише з нулів. В той же час елемент $c_n(\bar z) = a_n n!$ в останньому стовпчику визначника $H_n^{(1)}$ відмінний від нуля. Отже ${}^{(2n-1)}p_n(\bar z) \equiv 0$. Твердження для двочлена випливає з (1.68). $\square$

Теорема 5.13. *Нехай функція* $g(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(z-\alpha)^i}$, $a_i, \alpha \in \mathbb{C}$. *Для довільного значення* $\bar z \in \mathbb{C}\backslash\{\alpha\}$ *ранг нескінченної матриці Ганкеля*

$$H^{(0)}(\bar z) = \begin{pmatrix} c_0(\bar z) & c_1(\bar z) & c_2(\bar z) & \dots & c_n(\bar z) & \dots \\ c_1(\bar z) & c_2(\bar z) & c_3(\bar z) & \dots & c_{n+1}(\bar z) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ c_n(\bar z) & c_{n+1}(\bar z) & c_{n+2}(\bar z) & \dots & c_{2n}(\bar z) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \; c_k(\bar z) = \frac{g^{(k)}(\bar z)}{k!},$$

дорівнює n.

Для функції $g(z)$, яка визначена в умові теореми 5.13, елементи матриці Ганкеля $H^{(0)}(\bar z)$ будуть рівні

$$c_k(\bar z) = \sum_{i=1}^{n} \binom{k+i-1}{k} \frac{(-1)^k a_i}{(\bar z - \alpha)^{k+i}}, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{5.7}$$

Доведення. Для доведення твердження теореми розглянемо визначник Ганкеля $(n+1)$–го порядку

$$H_{n+1}^{(0)}(\bar z) = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(\bar z-\alpha)^i} & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i}{1} \frac{-a_i}{(\bar z-\alpha)^{i+1}} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+n-1}{n} \frac{(-1)^n a_i}{(\bar z-\alpha)^{n+i}} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i}{1} \frac{-a_i}{(\bar z-\alpha)^{i+1}} & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+1}{2} \frac{a_i}{(\bar z-\alpha)^{i+2}} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+n}{n+1} \frac{(-1)^{n+1} a_i}{(\bar z-\alpha)^{n+i+1}} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+1}{2} \frac{a_i}{(\bar z-\alpha)^{i+2}} & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+2}{3} \frac{-a_i}{(\bar z-\alpha)^{i+3}} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+n}{n+2} \frac{(-1)^{n+2} a_i}{(\bar z-\alpha)^{n+i+2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+n-3}{n-2} \frac{(-1)^{n-2} a_i}{(\bar z-\alpha)^{i+n-2}} & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+n-2}{n-1} \frac{(-1)^{n-1} a_i}{(\bar z-\alpha)^{i+n-1}} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+2n-3}{2n-2} \frac{(-1)^{2n-2} a_i}{(\bar z-\alpha)^{2n+i-2}} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+n-2}{n-1} \frac{(-1)^{n-1} a_i}{(\bar z-\alpha)^{i+n-1}} & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+n-1}{n} \frac{(-1)^{n} a_i}{(\bar z-\alpha)^{i+n}} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+2n-2}{2n-1} \frac{(-1)^{2n-1} a_i}{(\bar z-\alpha)^{2n+i-1}} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+n-1}{n} \frac{(-1)^{n} a_i}{(\bar z-\alpha)^{i+n}} & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+n}{n+1} \frac{(-1)^{n+1} a_i}{(\bar z-\alpha)^{i+n+1}} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+2n-1}{2n} \frac{(-1)^{2n} a_i}{(\bar z-\alpha)^{2n+i}} \end{vmatrix}.$$

З першого рядка визначника винесемо спільний множник $\frac{1}{\bar{z}-\alpha}$, з другого рядка визначника винесемо спільний множник $\frac{1}{(\bar{z}-\alpha)^2}$, і т.д, з $(n+1)$–го рядка визначника винесемо спільний множник $\frac{1}{(\bar{z}-\alpha)^{n+1}}$.

Тоді маємо, що $H_{n+1}^{(0)}(\bar{z}) = \bar{H}_{n+1}^{(0)}(\bar{z})/(\bar{z}-\alpha)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$, де

$$\bar{H}_{n+1}^{(0)}(\bar{z})=\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i-1}} & \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{i}{1}\frac{-a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i}} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{i+n-1}{n}\frac{(-1)^n a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{n+i-1}} \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{i}{1}\frac{-a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i-1}} & \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{i+1}{2}\frac{a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i}} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{i+n}{n+1}\frac{(-1)^{n+1} a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{n+i-1}} \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{i+1}{2}\frac{a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i-1}} & \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{i+1}{3}\frac{-a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i}} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{i+n+1}{n+2}\frac{(-1)^{n+2} a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{n+i-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{i+n-3}{n-2}\frac{(-1)^{n-2}a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i-1}} & \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{i+n-2}{n-1}\frac{(-1)^{n-1}a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i}} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{i+2n-3}{2n-2}\frac{(-1)^{2n-2} a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{n+i-1}} \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{i+n-2}{n-1}\frac{(-1)^{n-1}a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i-1}} & \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{i+n-1}{n}\frac{(-1)^{n}a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i}} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{i+2n-2}{2n-1}\frac{(-1)^{2n-1} a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{n+i-1}} \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{i+n-1}{n}\frac{(-1)^{n}a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i-1}} & \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{i+n}{n+1}\frac{(-1)^{n+1}a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i}} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{i+2n-1}{2n}\frac{(-1)^{2n} a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{n+i-1}} \end{vmatrix}.$$

У визначнику $\bar{H}_{n+1}^{(0)}(\bar{z})$ послідовно виконаємо наступні еквівалентні перетворення: на місце k–го рядка запишемо суму елементів k–го та $(k-1)$–го рядків, $k=\overline{2,n+1}$, і враховуючи, що $\binom{s-1}{t}=\binom{s}{t}-\binom{s-1}{t-1}$, маємо

$$\bar{H}_{n+1}^{(0)}(\bar{z})=\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i-1}} & \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{i}{1}\frac{-a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i}} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{i+n-1}{n}\frac{(-1)^n a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{n+i-1}} \\ \sum\limits_{i=2}^{n}\binom{i-1}{1}\frac{-a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i-1}} & \sum\limits_{i=2}^{n}\binom{i}{2}\frac{a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i}} & \dots & \sum\limits_{i=2}^{n}\binom{i+n-1}{n+1}\frac{(-1)^{n+1} a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{n+i-1}} \\ \sum\limits_{i=2}^{n}\binom{i}{2}\frac{a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i-1}} & \sum\limits_{i=2}^{n}\binom{i+1}{3}\frac{-a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i}} & \dots & \sum\limits_{i=2}^{n}\binom{i+n}{n+2}\frac{(-1)^{n+2} a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{n+i-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=2}^{n}\binom{i+n-4}{n-2}\frac{(-1)^{n-2}a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i-1}} & \sum\limits_{i=2}^{n}\binom{i+n-3}{n-1}\frac{(-1)^{n-1}a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i}} & \dots & \sum\limits_{i=2}^{n}\binom{i+2n-4}{2n-2}\frac{(-1)^{2n-2} a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{n+i-1}} \\ \sum\limits_{i=2}^{n}\binom{i+n-3}{n-1}\frac{(-1)^{n-1}a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i-1}} & \sum\limits_{i=2}^{n}\binom{i+n-2}{n}\frac{(-1)^{n}a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i}} & \dots & \sum\limits_{i=2}^{n}\binom{i+2n-3}{2n-1}\frac{(-1)^{2n-1} a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{n+i-1}} \\ \sum\limits_{i=2}^{n}\binom{i+n-2}{n}\frac{(-1)^{n}a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i-1}} & \sum\limits_{i=2}^{n}\binom{i+n-1}{n+1}\frac{(-1)^{n+1}a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i}} & \dots & \sum\limits_{i=2}^{n}\binom{i+2n-2}{2n}\frac{(-1)^{2n} a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{n+i-1}} \end{vmatrix}.$$

Перші два рядки визначника залишимо без змін, а на місці k-го рядка запишемо суму елементів k–го та $(k-1)$–го рядків, $k=\overline{3,n+1}$. Виконавши

$(n-1)$ такий крок отримаємо визначник

$$\bar{H}^{(0)}_{n+1}(\bar{z})=\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i-1}} & \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{i}{1}\frac{-a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i}} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{i+n-1}{n}\frac{(-1)^n a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{n+i-1}} \\ \sum\limits_{i=2}^{n}\binom{i-1}{1}\frac{-a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i-1}} & \sum\limits_{i=2}^{n}\binom{i}{2}\frac{a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i}} & \dots & \sum\limits_{i=2}^{n}\binom{i+n-1}{n+1}\frac{(-1)^{n+1} a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{n+i-1}} \\ \sum\limits_{i=3}^{n}\binom{i-1}{2}\frac{a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i-1}} & \sum\limits_{i=3}^{n}\binom{i}{3}\frac{-a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i}} & \dots & \sum\limits_{i=3}^{n}\binom{i+n-1}{n+2}\frac{(-1)^{n+2} a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{n+i-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=n-1}^{n}\binom{i-1}{n-2}\frac{(-1)^{n-2}a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i-1}} & \sum\limits_{i=n-1}^{n}\binom{i}{n-1}\frac{(-1)^{n-1}a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i}} & \dots & \sum\limits_{i=n-1}^{n}\binom{i+n-1}{2n-2}\frac{(-1)^{2n-2} a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{n+i-1}} \\ \frac{(-1)^{n-1}a_n}{(\bar{z}-\alpha)^{n-1}} & \frac{(-1)^{n}a_n}{(\bar{z}-\alpha)^{n}} & \dots & \frac{(-1)^{2n-1}a_n}{(\bar{z}-\alpha)^{2n-1}} \\ \frac{(-1)^{n}a_n}{(\bar{z}-\alpha)^{n-1}} & \frac{(-1)^{n+1}a_n}{(\bar{z}-\alpha)^{n}} & \dots & \frac{(-1)^{2n}a_n}{(\bar{z}-\alpha)^{2n-1}} \end{vmatrix}.$$

Визначник $\bar{H}^{(0)}_{n+1}(\bar{z})$ буде рівним нулю, оскільки два останні його рядки пропорційні, а отже і $H^{(0)}_{n+1}(\bar{z})=0$.

В свою чергу визначник

$$\bar{H}^{(0)}_{n}(\bar{z})=\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i-1}} & \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{i}{1}\frac{-a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i}} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{i+n-2}{n-1}\frac{(-1)^{n-1} a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{n+i-2}} \\ \sum\limits_{i=2}^{n}\binom{i-1}{1}\frac{-a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i-1}} & \sum\limits_{i=2}^{n}\binom{i}{2}\frac{a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i}} & \dots & \sum\limits_{i=2}^{n}\binom{i+n-2}{n}\frac{(-1)^{n} a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{n+i-2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=n-1}^{n}\binom{i-1}{n-2}\frac{(-1)^{n-2}a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i-1}} & \sum\limits_{i=n-1}^{n}\binom{i}{n-1}\frac{(-1)^{n-1}a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{i}} & \dots & \sum\limits_{i=n-1}^{n}\binom{i+n-2}{2n-3}\frac{(-1)^{2n-3} a_i}{(\bar{z}-\alpha)^{n+i-2}} \\ \frac{(-1)^{n-1}a_n}{(\bar{z}-\alpha)^{n-1}} & \frac{(-1)^{n}a_n}{(\bar{z}-\alpha)^{n}} & \dots & \frac{(-1)^{2n-2}a_n}{(\bar{z}-\alpha)^{2n-2}} \end{vmatrix}$$

тотожно не рівний нулю, а тоді і $H^{(0)}_{n}(\bar{z})\neq 0$. Отже ранг матриці Ганкеля $H^{(0)}(\bar{z})$ рівний n. □

Із доведеної теореми безпосередньо випливає наступний наслідок.

Наслідок 5.1. *Якщо* $c_k=c_k(\bar{z}), k\in\mathbb{N}_0$, *визначенні за* (5.7), *то визначник* $(n+m+1)$*–го порядку вигляду*

$$\mathcal{H}=\begin{vmatrix} c_{k_0} & c_{k_1} & c_{k_2} & c_{k_3} & \dots & c_{k_n} & b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ c_{k_0+1} & c_{k_1+1} & c_{k_2+1} & c_{k_3+1} & \dots & c_{k_n+1} & b_2 & b_3 & \dots & b_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k_0+n} & c_{k_1+n} & c_{k_2+n} & c_{k_3+n} & \dots & c_{k_n+n} & b_{n+1} & b_{n+2} & \dots & b_{m+n} \end{vmatrix}=0,$$

для довільних значеннях $k_0, k_1, \dots, k_n$ *та* m, *де* $b_j = b_j(\bar{z}) \not\equiv 0$, $k_i, m \in \mathbb{N}$, $i = \overline{0, n}, j = \overline{1, m}$.

Доведення. Оскільки ранг матриці Ганкеля $H^{(0)}(\bar{z})$ рівний n, то довільні $(n+1)$ стовпчики матриці $H^{(0)}(\bar{z})$ будуть лінійно залежними, а тоді має місце твердження наслідку. □

Теорема 5.14. *Нехай раціональна функція* $R_{m,n}(z) = p_m(z)/q_n(z)$ *визначена на* $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$, *де* $p_m(z)$, $q_n(z)$ *— многочлени відповідно степенів* m *та* n, $m < n$, *знаменник* $q_n(z)$ *не має коренів в* $\mathcal{Z}$. *Обернена похідна Тіле* $(2n)$*–го порядку функції* $R_{m,n}(z)$ *дорівнює нулеві для всіх* $z \in \mathcal{Z}$.

Доведення. а) Якщо $R_{0,n}(z) = A/(z-\alpha)^n$, то згідно із (1.73) та теоремою 5.15 (пункт С) обернена похідна Тіле $(2n)$–го порядку дорівнює нулеві для всіх $z \in \mathcal{Z}$.

б) Якщо $R_{m,n}(z) = p_m(z)/(z-\alpha)^n$, то функцію $R_{m,n}$ можна подати у вигляді суми простих дробів, тобто $R_{m,n}(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(z-\alpha)^i}$. В цьому випадку елементи визначника Ганкеля $c_k(\bar{z}), k = \overline{0, 2n}$, визначаються за (5.7). З теореми 5.13 маємо, що визначник Ганкеля $H_{n+1}^{(0)}(\bar{z}) = 0$, а тоді згідно із (5.4) ${}^{(2n)}R_{m,n}(\bar{z}) = 0$ для довільного $\bar{z} \in \mathcal{Z}$.

в) В загальному випадку раціональну функцію $R_{m,n}$ можна подати у вигляді суми простих дробів

$$R_{m,n}(z) = \sum_{s=1}^{r} \sum_{i_s=1}^{l_s} \frac{a_{i_s}^{(s)}}{(z-\alpha_s)^{i_s}}, \qquad l_1 + l_2 + \cdots + l_r = n. \tag{5.8}$$

Тоді

$$c_k(\bar{z}) = \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\, z^k} (R_{m,n}(z)) \Big|_{z=\bar{z}} = \sum_{s=1}^{r} \sum_{i_s=1}^{l_s} \binom{k+i_s-1}{k} \frac{(-1)^k a_{i_s}^{(s)}}{(\bar{z}-\alpha_s)^{k+i_s}}, \tag{5.9}$$

де $k = \overline{0, 2n}$.

Визначник Ганкеля $H_{n+1}^{(0)}(\bar{z})$ буде рівним

$$H_{n+1}^{(0)}(\bar{z}) =$$

$$
= \begin{vmatrix}
\sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{a_{i_s}^{(s)}}{(\bar{z}-\alpha_s)^{i_s}} & \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{-i_s a_{i_s}^{(s)}}{(\bar{z}-\alpha_s)^{i_s+1}} & \dots & \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{(-1)^n (i_s)_n a_{i_s}^{(s)}}{n!(\bar{z}-\alpha_s)^{i_s+n}} \\
\sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{-i_s a_{i_s}^{(s)}}{(\bar{z}-\alpha_s)^{i_s+1}} & \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{i_s(i_s+1) a_{i_s}^{(s)}}{2!(\bar{z}-\alpha_s)^{i_s+2}} & \dots & \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{(-1)^{n+1} (i_s)_{n+1} a_{i_s}^{(s)}}{(n+1)!(\bar{z}-\alpha_s)^{i_s+n+1}} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{(-1)^n (i_s)_n a_{i_s}^{(s)}}{n!(\bar{z}-\alpha_s)^{i_s+n}} & \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{(-1)^{n+1} (i_s)_{n+1} a_{i_s}^{(s)}}{(n+1)!(\bar{z}-\alpha_s)^{i_s+n+1}} & \dots & \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{(-1)^{2n} (i_s)_{2n} a_{i_s}^{(s)}}{(2n)!(\bar{z}-\alpha_s)^{i_s+2n}}
\end{vmatrix},
$$

де $(i_s)_n = i_s(i_s+1)\cdots(i_s+n-1)$— символ Похгаммера.

В кожному стовпчику визначника міститься n доданків. Оскільки всі елементи 1–го стовпчика визначника $H_{n+1}^{(0)}(\bar{z})$ складаються із суми n доданків, то згідно із відомою властивістю визначників $H_{n+1}^{(0)}(\bar{z})$ рівний сумі n визначників, які будуть відрізнятися лише елементами 1–го стовпчика. Якщо кожний із n отриманих визначників подати у вигляді суми n визначників, кожен з яких відрізняється від іншого новоутвореного визначника лише елементами 2–го стовпчика, то отримаємо n^2 визначників. Продовжуючи далі подібні перетворення в решті решт отримаємо n^{n+1} визначників, які будуть містити лише по одному доданку із кожного стовпця вихідного визначника.

Нехай

$$
\tilde{H}_{n+1}^{(0)}(\bar{z}) = \begin{vmatrix}
\frac{b_{j_0}^{(0)}}{(\bar{z}-\beta_0)^{j_0}} & \binom{j_1}{1}\frac{-b_{j_1}^{(1)}}{(\bar{z}-\beta_1)^{j_1+1}} & \dots & \binom{j_n+n-1}{n}\frac{(-1)^n b_{j_n}^{(n)}}{(\bar{z}-\beta_n)^{j_n+n}} \\
\binom{j_0}{1}\frac{-b_{j_0}^{(0)}}{(\bar{z}-\beta_0)^{j_0+1}} & \binom{j_1+1}{2}\frac{b_{j_1}^{(1)}}{(\bar{z}-\beta_1)^{j_1+2}} & \dots & \binom{j_n+n}{n+1}\frac{(-1)^{n+1} b_{j_n}^{(n)}}{(\bar{z}-\beta_n)^{j_n+n+1}} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\binom{j_0+n-1}{n}\frac{(-1)^n b_{j_0}^{(0)}}{(\bar{z}-\beta_0)^{j_0+n}} & \binom{j_1+n}{n+1}\frac{(-1)^{n+1} b_{j_1}^{(1)}}{(\bar{z}-\beta_1)^{j_1+n+1}} & \dots & \binom{j_n+2n-1}{2n}\frac{(-1)^{2n} b_{j_n}^{(n)}}{(\bar{z}-\beta_n)^{j_n+2n}}
\end{vmatrix},
$$

один із таких визначників, де $\beta_t \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}, t = \overline{0,n}$, а j_t приймає деяке із можливих своїх значень, які відповідні β_t, тобто, якщо $\beta_t = \alpha_s$, то $1 \leqslant j_t \leqslant l_s, b_{j_t}^{(t)} = a_{j_t}^{(s)}$.

Оскільки визначник $\tilde{H}_{n+1}^{(0)}(\bar{z})$ містить $(n+1)$–ин стовпець, а знаменник q_n має r різних коренів, $1 \leqslant r \leqslant n$, то принаймні два β_t будуть приймати однакові значення. В кожному такому визначнику містять стовпці, які відповідають одному і тому кореню α_s і кількість таких стовпців більша за кратність кореня l_s. Ці стовпці будуть лінійно залежними, а тоді згідно із наслідком 5.1 кожен такий визначник буде рівний нулю. Визначник $H^{(0)}_{n+1}(\bar{z})$ рівний нулю як сума визначників того же порядку, кожен з яких рівний нулю. Тоді з (5.4) маємо, що ${}^{(2n)}R_{m,n}(\bar{z})=0$. □

5.4. Розвинення функцій в Т–ЛД

Щоб розвинути функцію $f(z)$ в околі точки $z = z_*$ в ланцюговий дріб Тіле необхідно знайти коефіцієнти ланцюгового дробу за формулами (1.70). Т. Н. Тіле в своїй монографії [188] наводить формули для знаходження n–х похідних функцій $e^x, \operatorname{tg} x, \ln(1 + x)$, $(1 + x)^\alpha$, де $\alpha \in \mathbb{R}$, та отримує розвинення функцій в ланцюгові дроби в околі нуля. Розвинення вказаних функцій в ланцюговий дріб Тіле в околі довільної точки $x_* \in \mathbb{R}$ та $z_* \in \mathbb{C}$ розглянуто в роботі [76]. Ці результати наводяться без доведення.

5.4.1. Функції $(c + z)^\alpha, e^z, \operatorname{tg} z, \operatorname{th} z, \ln(c + z)$. Мають місце теореми та розвинення вказаних функцій в ланцюговий дріб Тіле.

Теорема 5.15. ***(A)*** *Якщо* $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}, c \in \mathbb{C}$, *то функція* $(c + z)^\alpha$ *має обернені похідні Тіле довільного порядку, які рівні*

$$\begin{aligned} {}^{(2n-1)}(c + z)^\alpha &= \frac{n\cdot\prod_{i=2}^{n}(i-\alpha)}{\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha+i)}(c + z)^{1-\alpha}, \\ {}^{(2n)}(c + z)^\alpha &= \frac{\prod_{i=1}^{n}(\alpha+i)}{\prod_{i=1}^{n}(i-\alpha)}\,(c + z)^\alpha, \qquad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

(B) *Функція* $(c + z)^n$, $n \in \mathbb{N}$, *має обернені похідні Тіле включно до* $(2n - 1)$*–го порядку, які обчислюються за* (5.10), ${}^{(2n-1)}\big((c + z)^n\big) = 0$, *для* $n \in \mathbb{N}_2$, ${}^{(1)}(c + z) = 1$.

(C) *Функція* $(c+z)^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, *має обернені похідні Тіле включно до* $(2n)$*–го порядку, які визначаються за* (5.10), ${}^{(2n)}\big((c + z)^{-n}\big) = 0$, *коли* $n \in \mathbb{N}$.

Із формул (1.70) та (5.10) випливає, що коефіцієнти розвинення функції $(c+z)^\alpha$ в Т–ЛД в околі точки $z = z_*$ будуть рівні

$$b_0(z_*) = (c+z_*)^\alpha,\ b_1(z_*) = \frac{(c+z_*)^{1-\alpha}}{\alpha},\ b_{2m}(z_*) = \frac{2\prod_{i=0}^{m-1}(\alpha+i)}{\prod_{i=1}^{m}(i-\alpha)}(c+z_*)^\alpha,$$

$$b_{2m+1}(z_*) = \frac{(2m+1)\prod_{i=1}^{m}(i-\alpha)}{\prod_{i=0}^{m}(\alpha+i)}\ (c+z_*)^{1-\alpha}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Тоді, після еквівалентних перетворень, отримаємо розвинення функції $(c+z)^\alpha$ в ланцюговий дріб Тіле

$$(c+z)^\alpha = \mathfrak{z}^\alpha \left(1 + \frac{\alpha(z-z_*)}{\mathfrak{z}} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{(1-\alpha)(z-z_*)}{2} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{(\alpha+1)(z-z_*)}{3\mathfrak{z}} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+}\right.$$

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{(2-\alpha)(z-z_*)}{2} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{(\alpha+2)(z-z_*)}{5\mathfrak{z}} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{(3-\alpha)(z-z_*)}{2} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{(\alpha+3)(z-z_*)}{7\mathfrak{z}} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+}$$

$$\left.\genfrac{}{}{0pt}{}{}{+\cdots+} \frac{(m-\alpha)(z-z_*)}{2} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{(m+\alpha)(z-z_*)}{(2m+1)\mathfrak{z}} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+\cdots}\right), \qquad \mathfrak{z} = c+z_*. \quad (5.11)$$

Якщо в (5.11) підставити $z_* = 0, c = 1$, то матимемо розвинення Лагранжа [153] степеневої функції $(1+z)^\alpha$ в околі нуля.

При $\alpha = 0{,}5$ маємо розвинення функції $\sqrt{c+z}$ в ланцюговий дріб Тіле

$$\sqrt{c+z} = \mathfrak{z} + \frac{z-z_*}{2\mathfrak{z}} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{z-z_*}{2\mathfrak{z}} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+\cdots+} \frac{z-z_*}{2\mathfrak{z}} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+\cdots}, \quad \mathfrak{z} = \sqrt{c+z_*}. \quad (5.12)$$

або з (5.11)

$$\sqrt{c+z} = \sqrt{\mathfrak{z}}\left(1 + \frac{z-z_*}{2\mathfrak{z}} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{z-z_*}{2} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+\cdots+} \frac{z-z_*}{2\mathfrak{z}} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{z-z_*}{2} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+\cdots}\right),\ \mathfrak{z} = c+z_*.$$

Теорема 5.16 ([162, с. 121]). ***(A)*** *Функція e^z має обернені похідні Тіле довільного порядку, які обчислюються наступним чином*

$${}^{(2n)}e^z = (-1)^n e^z, \quad {}^{(2n+1)}e^z = (-1)^n (n+1) e^{-z}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

(B) *Коефіцієнти розвинення функції в околі точки $z = z_*$ в Т–ЛД рівні*

$$b_{2n}(z_*) = (-1)^n 2 e^{z_*}, \quad b_{2n+1}(z_*) = (-1)^n (2n+1) e^{-z_*}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Розвинення функції e^z в околі точки $z = z_*$ в Т–ЛД (1.72) після еквівалентних перетворень має вигляд:

$$e^z = e^{z_*}\Big(1 + \frac{z-z_*}{1} + \frac{z-z_*}{-2} + \frac{z-z_*}{-3} + \frac{z-z_*}{2} + \frac{z-z_*}{5} + \cdots + \\ + \frac{z-z_*}{(-1)^n 2} + \frac{z-z_*}{(-1)^n(2n+1)} + \cdots\Big). \tag{5.13}$$

Якщо $z_* = 0$, то будемо мати розвинення функції в ланцюговий дріб в околі нуля [162, с. 121].

Далі буде потрібне розвинення функції e^{iz}. Має місце наступна теорема.

Теорема 5.17. ***(А)*** *Обернені похідні Тіле функції* e^{iz} *обчислюються за формулами* ${}^{(2n)}e^{iz} = (-1)^n e^{iz}$, ${}^{(2n+1)}e^{iz} = (-1)^{n+1}(n+1)e^{-iz}\, i,\ n \in \mathbb{N}_0$.
(B) *Коефіцієнти розвинення функції в околі точки* $z = z_*$ *в Т–ЛД рівні*

$$b_{2n}(z_*) = (-1)^n 2e^{iz_*},\ b_{2n+1}(z_*) = (-1)^{n+1}(2n+1)e^{-iz_*}\, i, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{5.14}$$

Доведення. **(А)** випливає з теорем 5.8, 5.16. **(B)** отримуємо з (1.70). □

Із теореми 5.17 маємо, що після еквівалентних перетворень розвинення функції e^{iz} в Т–ЛД матиме вигляд

$$e^{iz} = e^{iz_*}\Big(1 + \frac{z-z_*}{-i} + \frac{z-z_*}{-2} + \frac{z-z_*}{3i} + \frac{z-z_*}{2} + \frac{z-z_*}{-5i} + \frac{z-z_*}{-2} + \\ + \cdots + \frac{z-z_*}{(-1)^n(2n-1)i} + \frac{z-z_*}{(-1)^n 2} + \cdots\Big). \tag{5.15}$$

В околі точки $z = 0$ отримуємо розвинення

$$e^{iz} = 1 + \frac{z}{-i} + \frac{z}{-2} + \frac{z}{3i} + \frac{z}{2} + \cdots + \frac{z}{(-1)^n(2n-1)i} + \frac{z}{(-1)^n 2} + \cdots.$$

Теорема 5.18. ***(А)*** *Функція* $\operatorname{tg} z$ *має обернені похідні Тіле довільного порядку, які знаходяться за формулами*

$$ {}^{(4n)}\operatorname{tg} z = \operatorname{tg} z,\ {}^{(4n+1)}\operatorname{tg} z = \frac{(2n+1)(n\operatorname{tg}^2 z + n + 1)}{1+\operatorname{tg}^2 z}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$ {}^{(4n+2)}\operatorname{tg} z = -\frac{1}{\operatorname{tg} z},\ {}^{(4n+3)}\operatorname{tg} z = \frac{(n+1)\big((2n+3)\operatorname{tg}^2 z + 2n + 1\big)}{1+\operatorname{tg}^2 z}.$$

(B) *Коефіцієнти розвинення функції* $\operatorname{tg} z$ *в ланцюговий дріб за формулою Тіле в околі точки* $z = z_*$ *рівні*

$$\begin{aligned} &b_0(z_*) = \operatorname{tg} z_*,\ b_{4n+1}(z_*) = \frac{4n+1}{1+\operatorname{tg}^2 z_*},\ b_{4n+2}(z_*) = -\frac{1+\operatorname{tg}^2 z_*}{\operatorname{tg} z_*}, \\ &b_{4n+3}(z_*) = \frac{(4n+3)\operatorname{tg}^2 z_*}{1+\operatorname{tg}^2 z_*},\ b_{4n+4}(z_*) = \frac{1+\operatorname{tg}^2 z_*}{\operatorname{tg} z_*}, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Із формул (5.16) отримуємо розвинення функції $\operatorname{tg} z$ в Т–ЛД в околі точки $z = z_*$, яке після еквівалентних перетворень набуває вигляду

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} z = \mathfrak{z} + \frac{(z-z_*)(1+\mathfrak{z}^2)}{1} &+ \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-1} + \frac{z-z_*}{3\mathfrak{z}} + \frac{z-z_*}{1} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{5} + \\ + \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-1} + \frac{z-z_*}{7\mathfrak{z}} &+ \frac{z-z_*}{1} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{9} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-1} + \frac{z-z_*}{11\mathfrak{z}} + \cdots + \\ + \frac{z-z_*}{1} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{4k+1} &+ \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-1} + \frac{z-z_*}{(4k+3)\mathfrak{z}} + \cdots,\ \mathfrak{z} = \operatorname{tg} z_*. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Як частинний випадок розвинення (5.17) в околі точки $z = \frac{\pi}{4}$ маємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} z = 1 + \frac{2(z-\frac{\pi}{4})}{1} &+ \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1} + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{3} + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{1} + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{5} + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1} + \\ + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{7} + \cdots &+ \frac{z-\frac{\pi}{4}}{1} + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{4k+1} + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1} + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{4k+3} + \cdots. \end{aligned}$$

Згідно із формулами (1.5) парною частиною ланцюгового дробу (5.17) буде ланцюговий дріб, який після еквівалентних перетворень записується у вигляді

$$\operatorname{tg} z = \mathfrak{z} + \frac{(z-z_*)(1+\mathfrak{z}^2)}{1-(z-z_*)\mathfrak{z}} - \frac{(z-z_*)^2}{3} - \cdots - \frac{(z-z_*)^2}{2k-1} - \cdots. \tag{5.18}$$

З (5.18) для $z_* = 0$ випливає розвинення функції $\operatorname{tg} z$ в ланцюговий дріб, яке отримано як розв'язок диференціального рівняння Ріккаті [116, с. 120].

Теорема 5.19. ***(A)*** *Функція* $\operatorname{th} z$ *має обернені похідні Тіле довільного порядку, які можна знайти за формулами*

$$\begin{aligned} &{}^{(4n)}\operatorname{th} z = \operatorname{th} z, \quad {}^{(4n+1)}\operatorname{th} z = \frac{(2n+1)(n\ \operatorname{th}^2 z - (n+1))}{\operatorname{th}^2 z - 1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ &{}^{(4n+2)}\operatorname{th} z = \frac{1}{\operatorname{th} z}, \quad {}^{(4n+3)}\operatorname{th} z = \frac{(n+1)((2n+3)\operatorname{th}^2 z - (2n+1))}{\operatorname{th}^2 z - 1}. \end{aligned}$$

(B) *Коефіцієнти розвинення функції в Т–ЛД в околі точки $z = z_*$ рівні*

$$
\begin{gathered}
b_0(z_*) = \operatorname{th} z_*,\ b_{4n+1}(z_*) = -\frac{4n+1}{\operatorname{th}^2 z_* - 1},\ b_{4n+2}(z_*) = -\frac{\operatorname{th}^2 z_* - 1}{\operatorname{th} z_*}, \\
b_{4n+3}(z_*) = \frac{(4n+3)\operatorname{th}^2 z_*}{\operatorname{th}^2 z_* - 1},\ b_{4n+4}(z_*) = \frac{\operatorname{th}^2 z_* - 1}{\operatorname{th} z_*}, \quad n \in \mathbb{N}_0.
\end{gathered} \tag{5.19}
$$

Розвинення функції $\operatorname{th} z$ в ланцюговий дріб в околі точки $z = z_*$ після еквівалентних перетворень має вигляд

$$
\begin{gathered}
\operatorname{th} z = \mathfrak{z} + \frac{(z-z_*)(\mathfrak{z}^2-1)}{-1} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-1} + \frac{z-z_*}{3\mathfrak{z}} + \frac{z-z_*}{1} + \\
+ \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-5} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-1} + \frac{z-z_*}{7\mathfrak{z}} + \frac{z-z_*}{1} + \cdots + \\
+ \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-(4k+1)} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-1} + \frac{z-z_*}{(4k+3)\mathfrak{z}} + \frac{z-z_*}{1} + \cdots, \quad \mathfrak{z} = \operatorname{th} z_*
\end{gathered} \tag{5.20}
$$

Парна частина ланцюгового дробу (5.20) запишеться наступним чином

$$
\operatorname{th} z = \mathfrak{z} - \frac{(z-z_*)(\mathfrak{z}^2-1)}{(z-z_*)\mathfrak{z}+1} + \frac{(z-z_*)^2}{3} + \frac{(z-z_*)^2}{5} + \cdots + \frac{(z-z_*)^2}{(2k-1)} + \cdots.
$$

Теорема 5.20. ***(A)*** *Функція $\ln(c+z)$, де $c = const$, для всіх значень $z \neq -c$, має обернені похідні Тіле довільного порядку, які визначаються за формулами*

$$
{}^{(2n)}\ln(c+z) = 2H_n + \ln(c+z),\ {}^{(2n+1)}\ln(c+z) = (n+1)^2(c+z),\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{5.21}
$$

де $H_0 = 0$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $n \in \mathbb{N}$.

(B) *Коефіцієнти розвинення функції $\ln(c+z)$ в Т–ЛД в околі $z = z_*$ рівні*

$$
\begin{gathered}
b_0(z_*) = \ln(c+z_*), \quad b_1(z_*) = c + z_*, \\
b_{2n}(z_*) = \tfrac{2}{n}, \quad b_{2n+1}(z_*) = (2n+1)(c+z_*), \quad n \in \mathbb{N}.
\end{gathered} \tag{5.22}
$$

Якщо в формулах (5.21) підставити $c = 0$, то отримаємо співвідношення, які наведені в книзі Тіле [188, с. 143].

Розвинення функції $\ln(c+z)$ в Т–ЛД в околі точки $z = z_*$ має вигляд

$$
\ln(c+z) = \ln(c+z_*) + \frac{z-z_*}{c+z_*} + \frac{z-z_*}{2} + \frac{z-z_*}{3(c+z_*)} + \frac{2(z-z_*)}{2} + \frac{2(z-z_*)}{5(c+z_*)} +
$$

$$+\frac{3(z-z_*)}{2}+\frac{3(z-z_*)}{7(c+z_*)}+\cdots+\frac{n(z-z_*)}{2}+\frac{n(z-z_*)}{(2n+1)(c+z_*)}+\cdots. \tag{5.23}$$

У випадку, коли $c=1, z_*=0$, то отримаємо розвинення Лагранжа [153] функції $\ln(1+z)$. Якщо $c=0$, то маємо розвинення функції $\ln(z)$ в околі точки $z=z_*\neq 0$

$$\ln(z)=\ln(z_*)+\frac{z-z_*}{z_*}+\frac{z-z_*}{2}+\frac{z-z_*}{3z_*}+\frac{2(z-z_*)}{2}+\frac{2(z-z_*)}{5z_*}+$$

$$+\frac{3(z-z_*)}{2}+\frac{3(z-z_*)}{7z_*}+\cdots+\frac{n(z-z_*)}{2}+\frac{n(z-z_*)}{(2n+1)z_*}+\cdots.$$

Якщо $z_*=1$, то останнє розвинення набуває вигляду:

$$\ln(z)=\frac{z-1}{1}+\frac{z-1}{2}+\frac{z-1}{3}+\frac{2(z-1)}{2}+\frac{2(z-1)}{5}+$$

$$+\frac{3(z-1)}{2}+\frac{3(z-1)}{7}+\cdots+\frac{n(z-1)}{2}+\frac{n(z-1)}{(2n+1)}+\cdots.$$

5.4.2. Функції $\operatorname{ctg} z, \operatorname{cth} z$. Розглянемо функцію $\operatorname{ctg} z$ і знайдемо її розвинення в околі точки z_* в ланцюговий дріб Тіле.

Теорема 5.21. ***(A)*** *Функція $\operatorname{ctg} z$ має обернені похідні Тіле довільного порядку, які визначаються за формулами*

$$\begin{aligned} {}^{(4n)}\operatorname{ctg} z&=\operatorname{ctg} z,\ {}^{(4n+1)}\operatorname{ctg} z=-\frac{(2n+1)(n\operatorname{ctg}^2 z+n+1)}{1+\operatorname{ctg}^2 z},\ n\in\mathbb{N}_0,\\ {}^{(4n+2)}\operatorname{ctg} z&=\frac{-1}{\operatorname{ctg} z},\ {}^{(4n+3)}\operatorname{ctg} z=-\frac{(n+1)((2n+3)\operatorname{ctg}^2 z+2n+1)}{1+\operatorname{ctg}^2 z}.\end{aligned} \tag{5.24}$$

(B) *Коефіцієнти розвинення функції $\operatorname{ctg} z$ в околі точки $z=z_*$ за формулою Тіле в ланцюговий дріб рівні*

$$b_0(z_*)=\operatorname{ctg} z_*,\ b_{4n+1}(z_*)=-\frac{4n+1}{1+\operatorname{ctg}^2 z_*},\ b_{4n+2}(z_*)=-\frac{1+\operatorname{ctg}^2 z_*}{\operatorname{ctg} z_*},$$

$$b_{4n+3}(z_*)=-\frac{(4n+3)\operatorname{ctg}^2 z_*}{1+\operatorname{ctg}^2 z_*},\ b_{4n+4}(z_*)=\frac{1+\operatorname{ctg}^2 z_*}{\operatorname{ctg} z_*},\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Доведення. **(A)** Доведемо (5.24) за індукцією. Із означення оберненої похідної Тіле маємо, що

$$ {}^{(1)}\operatorname{ctg} z = \frac{-1}{1+\operatorname{ctg}^2 z}, \quad {}^{(2)}\operatorname{ctg} z = \frac{-1}{\operatorname{ctg} z}, \quad {}^{(3)}\operatorname{ctg} z = \frac{-(3\operatorname{ctg}^2 z+1)}{1+\operatorname{ctg}^2 z}, $$

$$ {}^{(4)}\operatorname{ctg} z = \operatorname{ctg} z, \quad {}^{(5)}\operatorname{ctg} z = \frac{-(3\operatorname{ctg}^2 z+6)}{1+\operatorname{ctg}^2 z}, \quad {}^{(6)}\operatorname{ctg} z = \frac{-1}{\operatorname{ctg} z}, $$

$$ {}^{(7)}\operatorname{ctg} z = \frac{-(10\operatorname{ctg}^2 z+6)}{1+\operatorname{ctg}^2 z}, \quad {}^{(8)}\operatorname{ctg} z = \operatorname{ctg} z. $$

Формули мають місце для $k = 1, 2$. Припустимо, що формули (5.24) виконуються для $k = m-1$. Тоді для $k = m$ отримуємо

$$ {}^{(4m)}\operatorname{ctg} z = \frac{4m}{\left(\frac{-m((2m+1)\operatorname{ctg}^2 z+2m-1)}{1+\operatorname{ctg}^2 z}\right)'} - \frac{1}{\operatorname{ctg} z} = \frac{1+\operatorname{ctg}^2 z}{\operatorname{ctg} z} - \frac{1}{\operatorname{ctg} z} = \operatorname{ctg} z\ , $$

$$ {}^{(4m+1)}\operatorname{ctg} z = \frac{4m+1}{(\operatorname{ctg} z)'} - \frac{m((2m+1)\operatorname{ctg}^2 z+2m-1)}{1+\operatorname{ctg}^2 z} = \frac{(2m+1)(m\operatorname{ctg}^2 z+m+1)}{-1-\operatorname{ctg}^2 z}, $$

$$ {}^{(4m+2)}\operatorname{ctg} z = \frac{4m+2}{\left(\frac{-(2m+1)(m\operatorname{ctg}^2 z+m+1)}{1+\operatorname{ctg}^2 z}\right)'} + \operatorname{ctg} z = -\frac{1+\operatorname{ctg}^2 z}{\operatorname{ctg} z} + \operatorname{ctg} z = -\frac{1}{\operatorname{ctg} z}\ , $$

$$ {}^{(4m+3)}\operatorname{ctg} z = \frac{4m+3}{\left(-\frac{1}{\operatorname{ctg} z}\right)'} + \frac{(2m+1)(m\operatorname{ctg}^2 z+m+1)}{1+\operatorname{ctg}^2 z} = $$

$$ = \frac{-(m+1)((2m+3)\operatorname{ctg}^2 z+2m+1)}{1+\operatorname{ctg}^2 z}. $$

Отже, формули (5.24) мають місце для довільних k.

(B) Із (1.70) та (5.24) безпосередньо отримуємо, що

$$ b_0(z_*) = \operatorname{ctg} z_*,\ b_{4n+1}(z_*) = -\frac{4k+1}{1+\operatorname{ctg}^2 z_*},\ b_{4n+2}(z_*) = -\frac{1+\operatorname{ctg}^2 z_*}{\operatorname{ctg} z_*}, $$

$$ b_{4n+3}(z_*) = -\frac{(4n+3)\operatorname{ctg}^2 z_*}{1+\operatorname{ctg}^2 z_*},\ b_{4n+4}(z_*) = \frac{1+\operatorname{ctg}^2 z_*}{\operatorname{ctg} z_*}, \quad n \in \mathbb{N}_0. $$

□

Маємо розвинення функції $\operatorname{ctg} z$ в Т–ЛД в околі точки $z = z_*$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ctg} z = \mathfrak{z} &+ \frac{z-z_*}{-\frac{1}{1+\mathfrak{z}^2}} + \frac{z-z_*}{-\frac{1+\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{z}}} + \frac{z-z_*}{-\frac{3\mathfrak{z}^2}{1+\mathfrak{z}^2}} + \frac{z-z_*}{\frac{1+\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{z}}} + \frac{z-z_*}{-\frac{5}{1+\mathfrak{z}^2}} + \frac{z-z_*}{-\frac{1+\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{z}}} + \\
&+ \frac{z-z_*}{-\frac{7\mathfrak{z}^2}{1+\mathfrak{z}^2}} + \frac{z-z_*}{\frac{1+\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{z}}} + \frac{z-z_*}{-\frac{9}{1+\mathfrak{z}^2}} + \frac{z-z_*}{-\frac{1+\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{z}}} + \frac{z-z_*}{-\frac{11\mathfrak{z}^2}{1+\mathfrak{z}^2}} + \\
&+ \cdots + \frac{z-z_*}{\frac{1+\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{z}}} + \frac{z-z_*}{-\frac{4k+1}{1+\mathfrak{z}^2}} + \frac{z-z_*}{-\frac{1+\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{z}}} + \frac{z-z_*}{-\frac{(4k+3)\mathfrak{z}^2}{1+\mathfrak{z}^2}} + \cdots, \qquad \mathfrak{z} = \operatorname{ctg} z_*.
\end{aligned}
$$

Після еквівалентних перетворень розвинення запишеться у вигляді

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ctg} z = \mathfrak{z} &+ \frac{(z-z_*)(1+\mathfrak{z}^2)}{-1} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-1} + \frac{z-z_*}{-3\mathfrak{z}} + \frac{z-z_*}{1} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-5} + \\
&+ \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-1} + \frac{z-z_*}{-7\mathfrak{z}} + \frac{z-z_*}{1} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-9} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-1} + \frac{z-z_*}{-11\mathfrak{z}} + \\
&+ \cdots + \frac{z-z_*}{1} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-(4k+1)} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-1} + \frac{z-z_*}{-(4k+3)\mathfrak{z}} + \cdots .
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

Коли $z_* = \pi/4$, то маємо

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ctg} z = 1 &+ \frac{2(z-\frac{\pi}{4})}{-1} + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1} + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-3} + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{1} + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-5} + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1} + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-7} + \\
&+ \cdots + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{1} + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-(4k+1)} + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1} + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-(4k+3)} + \cdots .
\end{aligned}
$$

Скориставшись формулами (1.5) побудуємо парну частину ланцюгового дробу (5.25)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ctg} z = \mathfrak{z} &+ \frac{-(z-z_*)(1+\mathfrak{z}^2)}{(z-z_*)\mathfrak{z}+1} + \frac{-(z-z_*)^2\mathfrak{z}}{3\mathfrak{z}} + \frac{-(z-z_*)^2\mathfrak{z}}{5} + \\
&+ \frac{-(z-z_*)^2\mathfrak{z}}{7\mathfrak{z}} + \frac{-(z-z_*)^2\mathfrak{z}}{9} + \cdots + \frac{-(z-z_*)^2\mathfrak{z}}{(4k-1)\mathfrak{z}} + \frac{-(z-z_*)^2\mathfrak{z}}{4k+1} + \cdots .
\end{aligned}
$$

Виконавши еквівалентні перетворення маємо розвинення

$$
\operatorname{ctg} z = \mathfrak{z} - \frac{(z-z_*)(1+\mathfrak{z}^2)}{(z-z_*)\mathfrak{z}+1} - \frac{(z-z_*)^2}{3} - \cdots - \frac{(z-z_*)^2}{2k-1} - \cdots .
$$

Для функції $\operatorname{cth} z$ можна довести наступну теорему.

Теорема 5.22. ***(A)*** *Функція* $\operatorname{cth} z$ *має обернені похідні Тіле довільного порядку, які знаходяться за формулами*

$$
{}^{(4n)}\!\operatorname{cth} z = \operatorname{cth} z,\ {}^{(4n+1)}\operatorname{cth} z = \frac{(2n+1)(n\ \operatorname{cth}^2 z - (n+1))}{\operatorname{cth}^2 z - 1},\quad n \in \mathbb{N}_0,
$$
$$
{}^{(4n+2)}\!\operatorname{cth} z = \frac{1}{\operatorname{cth} z},\ {}^{(4n+3)}\!\operatorname{cth} z = \frac{(n+1)((2n+3)\operatorname{cth}^2 z - (2n+1))}{\operatorname{cth}^2 z - 1}.
$$

(B) *Коефіцієнти розвинення функції в ланцюговий дріб за формулою Тіле в околі точки* $z = z_*$ *рівні*

$$
b_0(z_*) = \operatorname{cth} z_*,\ b_{4n+1}(z_*) = -\frac{4n+1}{\operatorname{cth}^2 z_* - 1},\ b_{4n+2}(z_*) = -\frac{\operatorname{cth}^2 z_* - 1}{\operatorname{cth} z_*}
$$
$$
b_{4n+3}(z_*) = \frac{(4n+3)\operatorname{cth}^2 z_*}{\operatorname{cth}^2 z_* - 1},\ b_{4n+4}(z_*) = \frac{\operatorname{cth}^2 z_* - 1}{\operatorname{cth} z_*},\qquad n \in \mathbb{N}_0.
$$

Розвинення функції $\operatorname{cth} z$ в ланцюговий дріб в околі точки $z = z_*$ після еквівалентних перетворень матиме вигляд

$$
\operatorname{cth} z = \mathfrak{z} + \frac{(z-z_*)(\mathfrak{z}^2-1)}{-1} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-1} + \frac{z-z_*}{3\mathfrak{z}} + \frac{z-z_*}{1} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-5} +
$$
$$
+ \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-1} + \frac{z-z_*}{7\mathfrak{z}} + \frac{z-z_*}{1} + \dots + \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-(4k+1)} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-1} +
$$
$$
+ \frac{z-z_*}{(4k+3)\mathfrak{z}} + \frac{z-z_*}{1} + \dots,\qquad \mathfrak{z} = \operatorname{cth} z_*. \tag{5.26}
$$

Парна частина ланцюгового дробу (5.26) після еквівалентних перетворень запишеться наступним чином

$$
\operatorname{cth} z = \mathfrak{z} - \frac{(z-z_*)(\mathfrak{z}^2-1)}{(z-z_*)\mathfrak{z}+1} + \frac{(z-z_*)^2}{3} + \dots + \frac{(z-z_*)^2}{(2k-1)} + \dots .
$$

5.4.3. Функція $z \ln z$.

Знайдемо розвинення функції $z \ln z$ в Т–ЛД.

Теорема 5.23. ***(A)*** *Функція* $z\ \ln z$ *має обернені похідні Тіле довільного порядку, які визначаються за формулами:*

$$
{}^{(0)}(z \ln z) = z \ln z,\quad {}^{(1)}(z \ln z) = \frac{1}{\ln z + 1}, \tag{5.27а}
$$
$$
{}^{(2)}(z \ln z) = -z(2\ln^2 z + 3\ln z + 2),\quad {}^{(3)}(z \ln z) = \frac{1}{\ln z + 5/2}, \tag{5.27б}
$$

$$ {}^{(2n)}(z\ln z) = -z\Big(n(n+1)\ln^2 z + \alpha_n \ln z + \frac{\alpha_n^2 + 4n^4 + 8n^3 - 4n - 1}{4n(n+1)}\Big), \qquad (5.27\text{в}) $$

$$ {}^{(2n+1)}(z\ln z) = 1\Big/\Big(\ln z + \frac{\alpha_n + 2(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)}\Big), \qquad n \in \mathbb{N}_2, \qquad (5.27\text{г}) $$

де

$$ \alpha_1 = 3, \quad \alpha_n = \frac{(n+1)\alpha_{n-1} + 2(2n^2 - 1)}{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}_2. \qquad (5.28) $$

(B) *Коефіцієнти розвинення функції за формулою Тіле в ланцюговий дріб в околі точки $z = z_*$ рівні*

$$ \begin{aligned} &b_0(z_*) = z_* \ln z_*, \quad b_1(z_*) = \frac{1}{\ln z_* + 1}, \quad b_2(z_*) = -2z_*(\ln z_* + 1)^2, \\ &b_3(z_*) = \frac{-3/2}{(\ln z_* + 5/2)(\ln z_* + 1)}, \quad b_{2n}(z_*) = -2n\, z_*\big(\ln z_* + a_{n-1}\big)^2, \qquad (5.29) \\ &b_{2n+1}(z_*) = \frac{-(2n+1)}{n(n+1)\big(\ln z_* + a_n\big)\big(\ln z_* + a_{n-1}\big)}, \qquad n \in \mathbb{N}_2, \end{aligned} $$

де

$$ a_0 = 1,\ a_n = \frac{\alpha_n + 2(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)}, \qquad n \in \mathbb{N}. \qquad (5.30) $$

Доведення. **(A)** Із рекурентних співвідношень (1.69) безпосередньо випливають формули (5.27а)–(5.27б). Припустимо, що (5.27в)–(5.27г), (5.28) виконуються для $n = k-1$. Тоді із формул (1.69) для $n = k$ отримуємо:

$$ {}^{(2k)}(z\ln z) = 2k\left(\left(\ln z + \frac{\alpha_{k-1} + 2k^2 - 1}{2(k-1)k}\right)^{-1}\right) - z\Big((k-1)k\ln^2 z + \alpha_{k-1}\ln z + $$

$$ + \frac{\alpha_{k-1}^2 + 4(k-1)^4 + 8(k-1)^3 - 4(k-1) - 1}{4(k-1)k}\Big) = -2kz\left(\ln z + \frac{\alpha_{k-1} + 2k^2 - 1}{2(k-1)k}\right)^2 - $$

$$ -z\left((k-1)k\ln^2 z + \alpha_{k-1}\ln z + \frac{\alpha_{k-1}^2 + 4(k-1)^4 + 8(k-1)^3 - 4(k-1) - 1}{4(k-1)k}\right) = $$

$$ = -z\Bigg(k(k+1)\ln^2 z + \frac{(k+1)\alpha_{k-1} + 2(2k^2 - 1)}{k-1}\ln z + \frac{2(\alpha_{k-1} + 2k^2 - 1)^2}{4k(k-1)^2} + $$

$$ + \frac{\alpha_{k-1} + 4k^4 - 8k^3 + 4k - 1}{4k(k-1)}\Bigg) = -z\Bigg(k(k+1)\ln^2 z + \frac{(k+1)\alpha_{k-1} + 2(2k^2 - 1)}{k-1}\ln z + $$

$$+\frac{(k+1)\alpha_{k-1}^2+4(2k^2-1)\alpha_{k-1}+2(2k^2-1)^2+(k-1)(4k^4-8k^3+4k-1)}{4k(k-1)^2}\Bigg)=$$

$$=-z\Bigg(k(k+1)\ln^2 z+\frac{(k+1)\alpha_{k-1}+2(2k^2-1)}{k-1}\ln z+$$

$$+\frac{(k+1)\alpha_{k-1}^2+4(2k^2-1)\alpha_{k-1}+4k^5-4k^4+8k^3-4k^2-5k+3}{4k(k-1)^2}\Bigg)=$$

$$=-z\Bigg(k(k+1)\ln^2 z+\frac{(k+1)\alpha_{k-1}+2(2k^2-1)}{k-1}\ln z+$$

$$+\frac{(k+1)^2\alpha_{k-1}^2+4(2k^2-1)(k+1)\alpha_{k-1}+4k^6+4k^4+4k^3-9k^2-2k+3}{4k(k+1)(k-1)^2}\Bigg)=$$

$$=-z\Bigg(k(k+1)\ln^2 z+\frac{(k+1)\alpha_{k-1}+2(2k^2-1)}{k-1}\ln z+$$

$$+\frac{((k+1)\alpha_{k-1}+2(2k^2-1))^2+(k-1)^2(4k^4+8k^3-4k-1)}{4k(k+1)(k-1)^2}\Bigg)=$$

$$=-z\Bigg(k(k+1)\ln^2 z+\frac{(k+1)\alpha_{k-1}+2(2k^2-1)}{k-1}\ln z+$$

$$+\frac{\left(\frac{(k+1)\alpha_{k-1}+2(2k^2-1)}{(k-1)}\right)^2+4k^4+8k^3-4k-1}{4k(k+1)}\Bigg)=$$

$$=-z\Bigg(k(k+1)\ln^2 z+\alpha_k\ln z+\frac{\alpha_k^2+4k^4+8k^3-4k-1}{4k(k+1)}\Bigg),$$

де

$$\alpha_k=\frac{(k+1)\alpha_{k-1}+2(2k^2-1)}{(k-1)}. \tag{5.31}$$

Отже, формули (5.27в) мають місце.

Аналогічно із рекурентних співвідношень (1.69) маємо, що

$$^{(2k+1)}(z\ln z)=(2k+1)\grave{}\big(-z\big(k(k+1)\ln^2 z+\alpha_k\ln z+c_k\big)\big)+\frac{1}{\ln z+\frac{\alpha_{k-1}+2k^2-1}{2(k-1)k}},$$

де $c_k = (\alpha_k^2 + 4k^4 + 8k^3 - 4k - 1)/4k(k+1)$. Згідно із формулою (5.1)

$$^{(2k+1)}(z\ln z) = -(2k+1)\Big(\backprime z \cdot \backprime\big(k(k+1)\ln^2 z + \alpha_k \ln z + c_k\big)\Big)\Big/\Big(\backprime z \cdot z +$$

$$+\backprime\big(k(k{+}1)\ln^2 z{+}\alpha_k \ln z{+}c_k\big)\big(k(k{+}1)\ln^2 z{+}\alpha_k \ln z{+}c_k\big)\Big){+}\frac{1}{\ln z{+}\frac{\alpha_{k-1}+2k^2-1}{2(k-1)k}}.$$

З формул (5.1), (1.74) та (5.2) випливає, що

$$\backprime\big(k(k+1)\ln^2 z + \alpha_k \ln z + c_k\big) = \frac{\backprime(k(k+1)\ln^2 z)\cdot\backprime(\alpha_k \ln z + c_k)}{\backprime(k(k+1)\ln^2 z) + \backprime(\alpha_k \ln z + c_k)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{k(k+1)}\cdot\frac{z}{2\ln z}\cdot\frac{z}{\alpha_k}}{\frac{1}{k(k+1)}\cdot\frac{z}{2\ln z} + \frac{z}{\alpha_k}} = \frac{z}{\alpha_k + 2k(k+1)\ln z}.$$

Тоді

$$^{(2k+1)}(z\ln z) {=} \frac{\frac{-(2k+1)z}{\alpha_k+2k(k+1)\ln z}}{z{+}\big(k(k{+}1)\ln^2 z{+}\alpha_k \ln z{+}c_k\big)\frac{z}{\alpha_k+2k(k+1)\ln z}} {+} \frac{1}{\ln z{+}\frac{\alpha_{k-1}+2k^2-1}{2(k-1)k}} =$$

$$= \frac{-(2k+1)}{k(k+1)\ln^2 z + (\alpha_k + 2k(k+1))\ln z + \alpha_k + c_k} + \frac{1}{\ln z + \frac{\alpha_{k-1}+2k^2-1}{2(k-1)k}}.$$

Із (5.31) маємо, що $\alpha_{k-1} = ((k-1)\alpha_k - 2(2k^2-1))/(k+1)$. А тоді

$$^{(2k+1)}(z\ln z) {=} \frac{-(2k+1)}{k(k{+}1)\ln^2 z{+}(\alpha_k{+}2k(k{+}1))\ln z{+}\alpha_k{+}\frac{\alpha_k^2+4k^4+8k^3-4k-1}{4k(k+1)}} +$$

$$+\frac{1}{\ln z + \frac{\alpha_k+2k^2-1}{2(k+1)k}} = -4k(k+1)(2k+1)\big/\big(4k^2(k+1)^2\ln^2 z +$$

$$+4k(k+1)(\alpha_k + 2k(k+1))\ln z + 4k(k+1)\alpha_k + \alpha_k^2 + 4k^4 + 8k^3 - 4k - 1\big) +$$

$$+\frac{2(k+1)k}{2(k+1)k\ln z + \alpha_k + 2k^2 - 1}.$$

Оскільки

$$4k^2(k{+}1)^2\ln^2 z{+}4k(k{+}1)(\alpha_k{+}2k(k{+}1))\ln z{+}4k(k{+}1)\alpha_k{+}\alpha_k^2{+}4k^4{+}8k^3-$$

$$-4k - 1 = \big(2k(k+1)\ln z + \alpha_k + 2k^2 - 1\big)\,\big(2k(k+1)\ln z + \alpha_k + 2k^2 + 4k + 1\big),$$

то

$$ {}^{(2k+1)}(z\ln z) = (-4k(k+1)(2k+1))\big/\big((2k(k+1)\ln z + \alpha_k + 2k^2 - 1)\times $$

$$ \times(2k(k+1)\ln z+\alpha_k+2k^2+4k+1)\big)+2(k+1)k/(2(k+1)k\ln z+\alpha_k+2k^2-1)= $$
$$ = \frac{2(k+1)k}{2(k+1)k\ln z + \alpha_k + 2k^2 + 4k + 1} = \frac{1}{\ln z + \frac{\alpha_k + 2(k+1)^2 - 1}{2k(k+1)}}. $$

Формула (5.27г) виконується для $n = k$. Формули (5.27) доведені.

(В) Формули для b_0, b_1, b_2, b_3 випливають безпосередньо із співвідношень (5.27а)–(5.27б). Далі, із (5.27в) маємо:

$$ b_{2n}(z_*) = {}^{(2n)}(z\ln z) - {}^{(2n-2)}(z\ln z) = -z_*\bigg(n(n+1)\ln^2 z_* + \alpha_n \ln z_* + $$

$$ + \frac{\alpha_n^2 + 4n^4 + 8n^3 - 4n - 1}{4n(n+1)}\bigg) + z_*\bigg((n-1)n\ln^2 z_* + \alpha_{n-1}\ln z_* + $$

$$ + \frac{\alpha_{n-1}^2 + 4(n-1)^4 + 8(n-1)^3 - 4(n-1) - 1}{4(n-1)n}\bigg) = -z_*(2n\ln^2 z_* + \bar{\alpha}_n \ln z_* + \bar{\beta}_n), $$

де

$$ \bar{\alpha}_n = \alpha_n - \alpha_{n-1},\ \bar{\beta}_n = \frac{\alpha_n^2 + 4n^4 + 8n^3 - 4n - 1}{4n(n+1)} - \frac{\alpha_{n-1}^2 + 4n^4 - 8n^3 + 4n - 1}{4(n-1)n}. $$

Згідно із (5.28) можна записати $\bar{\alpha}_n$ та $\bar{\beta}_n$ наступним чином:

$$ \bar{\alpha}_n = \frac{(n+1)\alpha_{n-1} + 2(2n^2-1)}{n-1} - \alpha_{n-1} = 4n\frac{\alpha_{n-1} + 2n^2 - 1}{2n(n-1)}, $$

$$ \bar{\beta}_n = \frac{\frac{((n+1)\alpha_{n-1} + 2(2n^2-1))^2}{(n-1)^2} + 4n^4 + 8n^3 - 4n - 1}{4n(n+1)} - \frac{\alpha_{n-1}^2 + 4n^4 - 8n^3 + 4n - 1}{4(n-1)n} = $$

$$ = \frac{1}{4n(n+1)(n-1)^2}\Big(\big((n+1)\alpha_{n-1} + 2(2n^2-1)\big)^2 + (n-1)^2(4n^4 + 8n^3 - 4n - 1) - $$

$$ -(n^2-1)(\alpha_{n-1}^2 + 4n^4 - 8n^3 + 4n - 1)\Big) = \frac{1}{4n(n+1)(n-1)^2}\Big(2(n+1)\alpha_{n-1}^2 + $$

$$ +4(n+1)(2n^2-1)\alpha_{n-1} + 2(n+1)(2n^2-1)^2\Big) = 2n\left(\frac{\alpha_{n-1} + 2n^2 - 1}{2(n-1)n}\right)^2. $$

Тоді

$$b_{2n}(z_*) = -2nz_*\left(\ln z_* + \frac{\alpha_{n-1}+2n^2-1}{2n(n-1)}\right)^2 = -2nz_*\big(\ln z_* + a_{n-1}\big)^2.$$

Аналогічно з формули (5.27г) випливає, що

$$b_{2n+1}(z_*) = \frac{1}{\ln z_* + \frac{\alpha_n+2(n+1)^2-1}{2n(n+1)}} - \frac{1}{\ln z_* + \frac{\alpha_{n-1}+2n^2-1}{2(n-1)n}} =$$

$$= \frac{-\bar{\gamma}_n}{\left(\ln z_* + \frac{\alpha_n+2(n+1)^2-1}{2n(n+1)}\right)\left(\ln z_* + \frac{\alpha_{n-1}+2n^2-1}{2(n-1)n}\right)},$$

де

$$\bar{\gamma}_n = \frac{\alpha_n+2(n+1)^2-1}{2n(n+1)} - \frac{\alpha_{n-1}+2n^2-1}{2(n-1)n}.$$

Підставимо значення α_n з (5.28). Тоді маємо

$$\bar{\gamma}_n = \frac{\frac{(n+1)\alpha_{n-1}+2(2n^2-1)}{n-1}+2(n+1)^2-1}{2n(n+1)} - \frac{\alpha_{n-1}+2n^2-1}{2(n-1)n} =$$

$$= \frac{(n+1)\alpha_{n-1}+2(2n^2-1)+(n-1)(2(n+1)^2-1)}{2(n-1)n(n+1)} -$$

$$-\frac{(n+1)(\alpha_{n-1}+2n^2-1)}{2(n-1)n(n+1)} = \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

Врешті отримуємо, що $b_{2n+1}(z_*) = \frac{-(2n+1)}{n(n+1)\left(\ln z_*+a_n\right)\left(\ln z_*+a_{n-1}\right)}$. Отже, формули (5.29) виконується. □

Із теореми випливає, що в околі точки $z_* \neq 0$ функція $z\ln z$ може бути розвинута в Т–ЛД наступним чином:

$$z\ln z = z_*\ln z_* + \frac{z-z_*}{\frac{1}{\ln z_*+1}} + \frac{z-z_*}{-2z_*(\ln z_*+1)^2} + \frac{z-z_*}{\frac{-3/2}{(\ln z_*+1)(\ln z_*+5/2)}} +$$

$$+\frac{z-z_*}{-4z_*(\ln z_*+5/2)^2} + \frac{z-z_*}{\frac{-5/6}{(\ln z_*+5/2)(\ln z_*+10/3)}} + \frac{z-z_*}{-6z_*(\ln z_*+10/3)^2} +$$

$$+\frac{z-z_*}{\frac{-7/12}{(\ln z_*+10/3)(\ln z_*+47/12)}} + \cdots + \frac{z-z_*}{\frac{-(2n-1)/(n-1)n}{(\ln z_*+a_{n-2})(\ln z_*+a_{n-1})}} + \frac{z-z_*}{-2nz_*(\ln z_*+a_{n-1})^2} +$$

$$+\frac{z-z_*}{\frac{-(2n+1)/n(n+1)}{(\ln z_*+a_{n-1})(\ln z_*+a_n)}}+\frac{z-z_*}{-2(n+1)z_*(\ln z_*+a_n)^2}+\cdots.$$

Після еквівалентних перетворень маємо:

$$z\ln z = z_*\ln z_* + \frac{(z-z_*)(\ln z_*+1)}{1} + \frac{z-z_*}{-2z_*(\ln z_*+1)} + \frac{(z-z_*)(\ln z_*+5/2)}{-3/2} +$$

$$+\frac{(z-z_*)(\ln z_*+1)}{-4z_*(\ln z_*+5/2)} + \frac{(z-z_*)(\ln z_*+10/3)}{-5/6} + \frac{(z-z_*)(\ln z_*+5/2)}{-6z_*(\ln z_*+10/3)} +$$

$$+\cdots+\frac{(z-z_*)(\ln z_*+a_{n-1})}{-(2n-1)/(n-1)n} + \frac{(z-z_*)(\ln z_*+a_{n-2})}{-2nz_*(\ln z_*+a_{n-1})} +$$

$$+\frac{(z-z_*)(\ln z_*+a_n)}{-(2n+1)/n(n+1)} + \frac{(z-z_*)(\ln z_*+a_{n-1})}{-2(n+1)z_*(\ln z_*+a_n)} + \cdots. \qquad (5.32)$$

В околі точки $z=1$ розвинення матиме вигляд:

$$z\ln z = \frac{z-1}{1} + \frac{z-1}{-2} + \frac{5/2(z-1)}{-3/2} + \frac{z-1}{-10} + \frac{10/3(z-1)}{-5/6} +$$

$$+\frac{5/2(z-1)}{-20} + \cdots + \frac{a_{n-1}(z-1)}{-(2n-1)/(n-1)n} + \frac{a_{n-2}(z-1)}{-2na_{n-1}} +$$

$$+\frac{a_n(z-1)}{-(2n+1)/n(n+1)} + \frac{a_{n-1}(z-1)}{-2(n+1)a_n} + \cdots.$$

Для функцій $ze^z, e^z/z, \sin z, \cos z, \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ не вдалося встановити формули для обернених похідних Тіле n–го порядку, а отже невідомий загальний вигляд коефіцієнтів розвинення функцій в ланцюговий дріб. Для цих функцій використовуючи рекурентне співвідношення (1.69) можна знайти коефіцієнти ланцюгового дробу Тіле до певного порядку. Так в монографії автора [92, с. 266–278] побудовані наближення розглядуваних функцій підхідними дробами ланцюгового дробу Тіле. Деякі числові результати, які ілюструють ефективність наближення функцій дійсної змінної $\sin x, \cos x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$ ланцюговими дробами розглянуті в дисертаційній роботі Р. А. Кацали [36]. В книзі О. М. Хованського [116, с. 162–168] отримані раціональні наближення цих функцій за методом Вісковатова.

5.5. Розвинення функції в правильний ланцюговий C–дріб

Доведемо допоміжне твердження.

Теорема 5.24. *Якщо коефіцієнти ФСР*

$$\mathcal{L}(z_*) = c_0(z_*) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z_*)(z - z_*)^n, \tag{5.33}$$

такі, що

$$c_0(z_*) \neq 0,\ H_k^{(1)}(z_*) \neq 0,\ H_k^{(2)}(z_*) \neq 0, \qquad k \in \mathbb{N},$$

де $H_k^{(n)}(z_*)$ *є визначник Ганкеля утворений з коефіцієнтів* $\mathcal{L}(z_*)$, *то правильний ланцюговий C–дріб* $\mathcal{C}(z_*) = a_0(z_*) + \mathbf{K}(a_n(z_*)(z - z_*)/1)$ *буде відповідним в точці* $z_* \neq 0$ *ФСР* (5.33), *де*

$$\begin{gathered} a_0(z_*) = c_0(z_*),\ a_1(z_*) = c_1(z_*),\ a_{2k}(z_*) = \frac{-\,H_{k-1}^{(1)}(z_*)H_k^{(2)}(z_*)}{H_k^{(1)}(z_*)H_{k-1}^{(2)}(z_*)}, \\ a_{2k+1}(z_*) = -\frac{H_{k+1}^{(1)}(z_*)H_{k-1}^{(2)}(z_*)}{H_k^{(1)}(z_*)H_k^{(2)}(z_*)}, \qquad k \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{5.34}$$

Доведення. Запишемо ФСР $\mathcal{L}$ наступним чином

$$\mathcal{L}(z_*) = c_0(z_*)\,\tilde{\mathcal{L}}(z_*) = c_0(z_*)\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n(z_*)\tilde{z}^n\Big), \quad \tilde{c}_n(z_*) = \frac{c_n(z_*)}{c_0(z_*)},$$

де $n \in \mathbb{N},\ \tilde{z} = z - z_*$.

За припущенням $c_0(z_*) \neq 0,\ H_k^{(1)}(z_*) \neq 0, H_k^{(2)}(z_*) \neq 0$, отже згідно із теоремою 1.29 правильний ланцюговий C–дріб $\tilde{\mathcal{C}}(z_*) = 1 + \mathbf{K}(\tilde{a}_n(z_*)\tilde{z}/1)$, коефіцієнти якого рівні $\tilde{a}_1(z_*) = \tilde{H}_1^{(1)}(z_*)$, $\tilde{a}_{2k}(z_*) = -\big(\tilde{H}_{k-1}^{(1)}(z_*)\tilde{H}_k^{(2)}(z_*)\big) : \big(\tilde{H}_k^{(1)}(z_*)\tilde{H}_{k-1}^{(2)}(z_*)\big)$, $\tilde{a}_{2k+1}(z_*) = -\big(\tilde{H}_{k+1}^{(1)}(z_*)\tilde{H}_{k-1}^{(2)}(z_*)\big)/\big(\tilde{H}_k^{(1)}(z_*)\tilde{H}_k^{(2)}(z_*)\big)$, де

$$\tilde{H}_0^{(n)}(z_*) = 1,\ \tilde{H}_k^{(n)}(z_*) = \begin{vmatrix} \tilde{c}_n(z_*) & \tilde{c}_{n+1}(z_*) & \cdots & \tilde{c}_{n+k-1}(z_*) \\ \tilde{c}_{n+1}(z_*) & \tilde{c}_{n+2}(z_*) & \cdots & \tilde{c}_{n+k}(z_*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{c}_{n+k-1}(z_*) & \tilde{c}_{n+k}(z_*) & \cdots & \tilde{c}_{n+2k-2}(z_*) \end{vmatrix},\ k \in \mathbb{N},$$

буде відповідний ФСР $\tilde{\mathcal{L}}(z_*)$.

Врахувавши, що $\tilde{H}_s^{(n)}(z_*) = H_s^{(n)}(z_*)/(c_0(z_*))^s$ врешті решт маємо

$$\tilde{a}_1(z_*) = \frac{H_1^{(1)}(z_*)}{c_0(z_*)} = \frac{a_1(z_*)}{c_0(z_*)}, \quad \tilde{a}_{2k}(z_*) = -\frac{H_{k-1}^{(1)}(z_*)H_k^{(2)}(z_*)}{H_k^{(1)}(z_*)H_{k-1}^{(2)}(z_*)} = a_{2k}(z_*),$$

$$\tilde{a}_{2k+1}(z_*) = -\frac{H_{k+1}^{(1)}(z_*)H_{k-1}^{(2)}(z_*)}{H_k^{(1)}(z_*)H_k^{(2)}(z_*)} = a_{2k+1}(z_*).$$

□

Нехай

$$f(z) = b_0(z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty} \frac{z - z_*}{b_n(z_*)} \tag{5.35}$$

формальне розвинення функції f в околі точки $z = z_*$ в Т–ЛД. Запишемо ланцюговий дріб (5.35) у вигляді еквівалентного ланцюгового дробу з частинними знаменниками рівними одиниці

$$f(z) = \omega_0(z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n(z_*)(z - z_*)}{1}, \tag{5.36}$$

де

$$\omega_0(z_*) = b_0(z_*),\ \omega_1(z_*) = \frac{1}{b_1(z_*)},\ \omega_n(z_*) = \frac{1}{b_{n-1}(z_*)b_n(z_*)}, \quad n \in \mathbb{N}_2. \tag{5.37}$$

З іншого боку, якщо функція f в околі точки $z = z_*$ розвинена в ФСР

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_*)(z - z_*)^n, \qquad \text{де} \quad c_n(z_*) = \frac{f^{(n)}(z_*)}{n!}, \tag{5.38}$$

то згідно із теоремою 5.24 існує відповідний правильний ланцюговий С–дріб

$$f(z) = a_0(z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(z_*)(z - z_*)}{1}, \tag{5.39}$$

де коефіцієнти $a_n(z_*)$ визначаються за (5.34).

Теорема 5.25. *Коефіцієнти ланцюгових дробів* (5.36) *та* (5.39) *рівні між собою, тобто* $a_n(z_*) = \omega_n(z_*)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Доведення. Очевидно, що $a_0(z_*) = \omega_0(z_*), a_1(z_*) = \omega_1(z_*)$. Визначимо коефіцієнти $\omega_n(z_*)$ ланцюгового дробу (5.36) через визначники Ганкеля. Із формул (5.6) та (5.37) маємо:

$$\omega_{2k}(z_*) = -\frac{H_k^{(2)}(z_*)H_{k-1}^{(2)}(z_*)H_{k-1}^{(1)}(z_*)H_k^{(1)}(z_*)}{(H_k^{(1)}(z_*))^2(H_{k-1}^{(2)}(z_*))^2} = -\frac{H_k^{(2)}(z_*)H_{k-1}^{(1)}(z_*)}{H_k^{(1)}(z_*)H_{k-1}^{(2)}(z_*)} = a_{2k}(z_*),$$

$$\omega_{2k+1}(z_*) = -\frac{H_k^{(1)}(z_*)H_{k+1}^{(2)}(z_*)H_{k-1}^{(2)}(z_*)H_k^{(2)}(z_*)}{(H_k^{(1)}(z_*))^2(H_k^{(2)}(z_*))^2} =$$

$$= -\frac{H_{k-1}^{(2)}(z_*)H_{k+1}^{(1)}(z_*)}{H_k^{(1)}(z_*)H_k^{(2)}(z_*)} = a_{2k+1}(z_*), \qquad k =\in \mathbb{N}.$$

□

Із доведеної теореми випливають наступні важливі висновки.

Наслідок 5.2. *Правильний ланцюговий C–дріб* (5.39) *і ланцюговий дріб Тіле* (5.35) *еквівалентні, а отже Т–ЛД є відповідним ФСР* (5.38).

Наслідок 5.3. *Розвинення в ланцюговий дріб Тіле* (1.72) *функції* $f(z)$ *буде відповідним в точці* $z = z_*$ *розвиненню у ФСР* (5.38) *цієї функції тоді і тільки тоді, коли для визначників Ганкеля виконуються співвідношення*

$$c_0(z_*) \neq 0, \quad H_k^{(1)}(z_*) \neq 0, \quad H_k^{(2)}(z_*) \neq 0, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Зауваження 5.4. В книзі Л. Лоренцен та Г. Воделанда [157, с. 249] показано, що інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле (1.25) не буде відповідним степеневому ряду. В той же час, граничний випадок Т–ІЛД, тобто ланцюговий дріб у якого всі вузли інтерполяції $z_0, z_1, \ldots, z_n$ прямують до одного і того ж значення z_*, дає формальний ланцюговий дріб Тіле, який буде відповідним ФСР в точці z_*.

Звідси та із теореми 1.33 отримуємо зв'язок між ланцюговим дробом Тіле (1.72) і апроксимантами Паде.

Наслідок 5.4. *Нехай (5.38) є розвинення в ФСР функції $f(z)$, якому відповідний T–ЛД (1.72) з n–м підхідним дробом $T_n(z)$. Тоді для кожної апроксиманти Паде $R^{[n,m]} = P_{n,m}/Q_{n,m}$ ФСР (5.38) функції $f(z)$ з послідовності $R^{[0,0]}(z), R^{[1,0]}(z), R^{[1,1]}(z), R^{[2,1]}(z), R^{[2,2]}(z), R^{[3,2]}(z), \ldots$ будуть виконуватися рівності $T_{2m}(z) = R^{[m,m]}(z)$, $T_{2m+1}(z) = R^{[m+1,m]}(z)$, $m \in \mathbb{N}_0$.*

Відповідний ФСР правильний ланцюговий C–дріб (5.36) еквівалентний T–ЛД (1.72). А тоді коефіцієнти правильного ланцюгового C–дробу можуть бути знайдені не тільки через відношення чотирьох визначників Ганкеля (1.51), а також через обернені похідні Тіле наступним чином

$$\omega_0(z_*) = f(z_*),\ \omega_1(z_*) = \frac{1}{`f(z_*)},\ \omega_n(z_*) = \frac{1}{n(n-1)`\big({}^{(n-1)}f(z_*)\big)`\big({}^{(n-2)}f(z_*)\big)},$$

де $n \in \mathbb{N}_2$. Формули безпосередньо випливають із (1.70) та (5.37).

Теорема 5.26. *Якщо в деякому околі точки $z = z_*$ функція $f(z)$ має розвинення в правильним ланцюговий C–дріб (5.36) і $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n(z_*) = a \neq 0$, $a \in \mathbb{C}$, то: **(A)** ланцюговий дріб (5.36) збігається до функції $f(z)$, яка мероморфна в $\mathbf{R}_a = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |\arg(a(z-z_*)+1/4)| < \pi\}$; **(B)** збіжність буде рівномірною на кожному компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbf{R}_a$, який не містить полюсів функції $f(z)$; **(C)** функція $f(z)$ голоморфна в точці $z = z_*$.*

Доведення. Нехай $\bar{z} = z - z_*$. Тоді ланцюговий дріб (5.36) запишеться у вигляді

$$f(\bar{z}) = \omega_0(z_*)\left(1 + \frac{\omega_1(z_*)\bar{z}/\omega_0(z_*)}{1} + \mathop{\mathrm{K}}_{n=2}^{\infty} \frac{\omega_n(z_*)\bar{z}}{1}\right).$$

Згідно із теоремою 1.31 правильний ланцюговий C–дріб

$$1 + \frac{\omega_1(z_*)\bar{z}/\omega_0(z_*)}{1} + \frac{\omega_2(z_*)\bar{z}}{1} + \frac{\omega_3(z_*)\bar{z}}{1} + \cdots$$

збігається до функції $\tilde{f}(\bar{z})$, яка мероморфна в

$$\bar{\mathbf{R}}_a = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(a\bar{z}+1/4)| < \pi\} = \mathbf{R}_a,$$

і збігається рівномірно на довільному компакті $\mathcal{Z} \subset \bar{\mathbf{R}}_a$, який не містить полюсів функції $\tilde{f}(\bar{z})$. Функція $\tilde{f}(\bar{z})$ голоморфна в точці $\bar{z} = 0$. Розглянемо функцію $\bar{f}(z) = \omega_0(z_*)\,\tilde{f}(z - z_*)$. Згідно із наслідком 5.2 ланцюговий дріб (5.36) відповідний степеневому ряду $\mathcal{L}(f)$ функції $f(z)$ в точці z_*. Згідно із теоремою 1.32 $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(\bar{f})$. Виходячи із єдиності розвинення функції у формальний степеневий ряд маємо, що $f = \bar{f}$. □

Теорема 5.27. *Нехай функція $f(z)$ в околі точки $z = z_*$ має розвинення в правильний ланцюговий C–дріб* (5.36)*, $\omega_n(z_*) \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n(z_*) = 0$. Тоді: **(A)** правильний ланцюговий C–дріб* (5.36) *збігається до функції $f(z)$; **(B)** на кожному компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$, який не містить полюсів функції $f(z)$, правильний ланцюговий C–дріб збігається рівномірно; **(C)** функція $f(z)$ голоморфна в точці $z = z_*$ і $f(z_*) = \omega_0$.*

Доведення. Нехай $\bar{z} = z - z_*$. Тоді ланцюговий дріб (5.36) перепишеться наступним чином:

$$f(\bar{z}) = \omega_0(z_*)\left(1 + \frac{\omega_1(z_*)\bar{z}/\omega_0(z_*)}{1} + \mathop{\mathrm{K}}_{n=2}^{\infty} \frac{\omega_n(z_*)\bar{z}}{1}\right).$$

Згідно із теоремою 1.30 ланцюговий дріб

$$1 + \frac{\omega_1(z_*)\bar{z}/\omega_0(z_*)}{1} + \mathop{\mathrm{K}}_{n=2}^{\infty} \frac{\omega_n(z_*)\bar{z}}{1}$$

збігається до мероморфної функції $\tilde{f}(\bar{z})$. На довільному компакті з $\mathbb{C}$, який не містить полюсів функції $\tilde{f}(\bar{z})$, ланцюговий дріб збігається рівномірно. Функція $\tilde{f}(\bar{z})$ голоморфна в точці $\bar{z} = 0$. Розглянемо функцію $\bar{f}(z) = \omega_0(z_*)\tilde{f}(z - z_*)$. Ланцюговий дріб (5.36) відповідний степеневому ряду $\mathcal{L}(f)$ функції $f(z)$ в точці z_* згідно із наслідком 5.2. Згідно із теоремою 1.32 $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(\bar{f})$. Виходячи із єдиності розвинення функції у формальний степеневий ряд маємо, що $f(z) = \bar{f}(z)$. □

В розділі 5.4 були розглянуті розвинення деяких функцій в ланцюговий дріб Тіле. Спираючись на співвідношення (5.37), отримаємо розвинення цих функцій в правильний ланцюговий C–дріб та встановимо області збіжності отриманих ланцюгових дробів.

5.5.1. Функція $(c+z)^\alpha$. Нехай $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}, c \in \mathbb{C}$. Із формул (5.10) та (5.37) маємо, що коефіцієнти ланцюгового дробу (5.35) будуть рівні

$$\omega_0(z_*) = (c+z_*)^\alpha, \quad \omega_1(z_*) = \alpha(c+z_*)^{\alpha-1}, \quad \omega_{2k}(z_*) = \frac{k-\alpha}{2(2k-1)(c+z_*)},$$

$$\omega_{2k+1}(z_*) = \frac{k+\alpha}{2(2\,k+1)(c+z_*)}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Розвинення функції $(c+z)^\alpha$ в околі точки $z = z_*$ в правильний ланцюговий C–дріб має вигляд

$$(c+z)^\alpha = (c+z_*)^\alpha \Bigg(1 + \frac{\frac{\alpha(z-z_*)}{c+z_*}}{1} + \frac{\frac{(1-\alpha)(z-z_*)}{2(c+z_*)}}{1} + \frac{\frac{(1+\alpha)(z-z_*)}{6(c+z_*)}}{1} +$$

$$+ \frac{\frac{(2-\alpha)(z-z_*)}{6(c+z_*)}}{1} + \dots + \frac{\frac{(k-\alpha)(z-z_*)}{(4k-2)(c+z_*)}}{1} + \frac{\frac{(k+\alpha)(z-z_*)}{(4k+2)(c+z_*)}}{1} + \dots\Bigg). \tag{5.40}$$

Якщо $c = 1, z_* = 0$, то отримаємо відоме розвинення [131, с. 218]

$$(1+z)^\alpha = 1 + \frac{\alpha\, z}{1} + \frac{\frac{1-\alpha}{2}z}{1} + \frac{\frac{1+\alpha}{6}z}{1} + \dots + \frac{\frac{k-\alpha}{4k-2}z}{1} + \frac{\frac{k+\alpha}{4k+2}z}{1} + \dots.$$

Теорема 5.28. ***(A)*** *Правильний ланцюговий C–дріб* (5.40) *та еквівалентний йому T–ЛД* (5.11) *збігаються до функції* $(c+z)^\alpha$ *на множині* $\mathbf{R}(c, z_*) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(c+z) - \arg(c+z_*)| < \pi\}$*;* ***(B)*** *на довільному компакті* $\mathcal{Z} \subset \mathbf{R}(c, z_*)$ *ланцюгові дроби збігаються рівномірно.*

Доведення. Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k-\alpha}{2(2k-1)(c+z_*)} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k+\alpha}{2(2k+1)(c+z_*)} = \frac{1}{4(c+z_*)}$, то тоді $\arg\left(\frac{z-z_*}{4(z_*+c)} + \frac{1}{4}\right) = \arg\left(\frac{z+c}{4(c+z_*)}\right) = \arg(z+c) - \arg(c+z_*)$. Згідно із теоремою 5.26 маємо, що ланцюгові дроби (5.40) та (5.11) збігаються до $(c+z)^\alpha$ на $\mathbf{R}(c, z_*)$ і на довільному компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbf{R}(c, z_*)$ ланцюгові дроби збігаються рівномірно. $\square$

Якщо $\alpha = n, n \in \mathbb{N}$, то функція $(c+z)^n$ подається скінченним правильним ланцюговим С–дробом вигляду

$$(c+z)^n = (c+z_*)^n\Bigg(1+\frac{\frac{n}{c+z_*}(z-z_*)}{1}+\frac{\frac{1-n}{2(c+z_*)}(z-z_*)}{1}+\frac{\frac{1+n}{6(c+z_*)}(z-z_*)}{1}+$$

$$+\frac{\frac{2-n}{6(c+z_*)}(z-z_*)}{1}+\dots+\frac{\frac{-1}{(4n-6)(c+z_*)}(z-z_*)}{1}+\frac{\frac{2n-1}{(4n-2)(c+z_*)}(z-z_*)}{1}\Bigg).$$

У випадку, коли $\alpha = -n, \in \mathbb{N}$, аналогічно отримуємо, що функція $(c+z)^{-n}$ подається скінченним правильним ланцюговим С–дробом

$$(c+z)^{-n} = (c+z_*)^{-n}\Bigg(1+\frac{\frac{-n(z-z_*)}{c+z_*}}{1}+\frac{\frac{(1+n)(z-z_*)}{2(c+z_*)}}{1}+\frac{\frac{(1-n)(z-z_*)}{6(c+z_*)}}{1}+$$

$$+\frac{\frac{(2+n)(z-z_*)}{6(c+z_*)}}{1}+\dots+\frac{\frac{-1(z-z_*)}{(4n-2)(c+z_*)}}{1}+\frac{\frac{2n(z-z_*)}{(4n-2)(c+z_*)}}{1}\Bigg).$$

Якщо $z_*, c, \alpha \in \mathbb{R}, c+z_* > 0, \alpha < 1$, то маємо ланцюговий S–дріб. Згідно із теоремою 1.9 в області збіжності ланцюгового дробу $|\arg(z+c)| < \pi$, виконується апріорна оцінка (1.13), тобто якщо $z = \rho e^{2\varphi i}, |\varphi| < \pi/2$, то

$$|(c+z)^\alpha - f_n(z)| \leqslant \frac{2\alpha\rho}{\mathfrak{z}\cos\varphi}\prod_{k=2}^{n}\frac{\sqrt{1+\dfrac{2\rho}{\cos^2\varphi}\,\dfrac{[k/2]+(-1)^{k+1}\alpha}{(k+(-1)^{k+1})\mathfrak{z}}}-1}{\sqrt{1+\dfrac{2\rho}{\cos^2\varphi}\,\dfrac{[k/2]+(-1)^{k+1}\alpha}{(k+(-1)^{k+1})\mathfrak{z}}}+1},$$

та згідно із теоремою 1.11 вірна апостеріорна оцінка (1.15).

5.5.2. Функція e^z. З теореми 5.16 та співвідношення (5.16) маємо, що коефіцієнти розвинення функції e^z в правильний ланцюговий С–дріб в околі точки $z = z_*$ будуть рівні

$$\omega_0(z_*)=\omega_1(z_*) = e^{z_*}, \omega_{2n}(z_*)=\frac{-1}{2(2n-1)}, \omega_{2n+1}(z_*)=\frac{1}{2(2n+1)}, \; n\in\mathbb{N}, \quad (5.41)$$

а тоді маємо розвинення

$$e^z = e^{z_*}\Bigg(1+\frac{z-z_*}{1}-\frac{(z-z_*)/2}{1}+\frac{(z-z_*)/6}{1}-\frac{(z-z_*)/6}{1}+\frac{(z-z_*)/10}{1}-$$

$$-\cdots-\frac{(z-z_*)/(2\,(2k-1))}{1}+\frac{(z-z_*)/(2\,(2k+1))}{1}-\cdots\Big). \tag{5.42}$$

В околі точки $z=0$ правильний ланцюговий С– дріб (5.42) набуде вигляду [131, с. 194]

$$e^z=1+\frac{z}{1}-\frac{z/2}{1}+\frac{z/6}{1}-\cdots-\frac{z/(2\,(2k-1))}{1}+\frac{z/(2\,(2k+1))}{1}-\cdots.$$

Теорема 5.29. ***(A)*** *Правильний ланцюговий С–дріб* (5.42) *та еквівалентний йому Т–ЛД* (5.13) *збігаються до функції e^z на всій комплексній площині $\mathbb{C}$;* ***(B)*** *на довільному компакті $\mathcal{Z}\subset\mathbb{C}$ ланцюгові дроби збігаються рівномірно.*

Доведення. Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty}(-1)/2\,(2k-1)=\lim\limits_{k\to\infty}1/2\,(2k+1)=0$, і крім того з (5.41) маємо, що $\omega_n\neq 0, n\in\mathbb{N}$, то згідно із теоремою 5.27 отримаємо твердження даної теореми. □

Теорема 5.30. *Якщо $|z-z_*|<\frac{1}{2}-\varepsilon$, де $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, то для n–го підхідного дробу $D_n(z;e^z)$ правильного ланцюгового С-дробу* (5.42) *має місце апостеріорна оцінка*

$$|e^z-D_n(z;e^z)|\leqslant\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{\varepsilon}}{4\sqrt{\varepsilon}}\left|D_n(z;e^z)-D_{n-1}(z;e^z)\right|,\qquad n\in\mathbb{N}_2.$$

Доведення. Оскільки $|z-z_*|<1/2-\varepsilon$, то для $n\in\mathbb{N}_2$, виконується нерівність $|\omega_n(z_*)(z-z_*)|<1/4-\varepsilon_0$, де $\omega_n(z_*)$ визначені в (5.41), $\varepsilon_0=\varepsilon/2$. Згідно із теоремою 1.10 має місце апостеріорна оцінка (1.14), тобто коли $n\in\mathbb{N}_2$, то $|e^z-D_n(z;e^z)|\leqslant\big((1-2\sqrt{\varepsilon_0})/4\sqrt{\varepsilon_0}\big)|D_n(z;e^z)-D_{n-1}(z;e^z)|=$ $=\big((\sqrt{2}-2\sqrt{\varepsilon})/4\sqrt{\varepsilon}\big)|D_n(z;e^z)-D_{n-1}(z;e^z)|$. □

Аналогічно, із формул (5.14) випливає, що коефіцієнти розвинення функції e^{iz} в околі точки $z=z_*$ в правильний ланцюговий С–дріб будуть рівні

$$\omega_0(z_*)=e^{iz},\ \omega_1(z_*)=ie^{iz},\ \omega_{2n}(z_*)=\frac{-i}{2(2n+1)},\ \omega_{2n+1}(z_*)=\frac{i}{2(2n+1)},\ n\in\mathbb{N}.$$

Розвинення функції має вигляд

$$e^{iz}=e^{iz_*}\Big(1+\frac{i(z-z_*)}{1}-\frac{i(z-z_*)/2}{1}+\frac{i(z-z_*)/6}{1}-\frac{i(z-z_*)/6}{1}+$$

$$+\cdots+\frac{i(z-z_*)/2(2n-1)}{1}-\frac{i(z-z_*)/2(2n-1)}{1}+\cdots\Big). \tag{5.43}$$

Оскільки $\omega_n(z_*)\neq 0$ і $\lim_{n\to\infty}\omega_n(z_*)=0$, то ланцюговий дріб в правій частині (5.43) збігається до функції e^{iz} на всій комплексній площині і на довільному компакті $\mathcal{Z}\subset\mathbb{C}$ збіжність буде рівномірна.

У частинному випадку в околі точки $z=0$ функція має розвинення

$$e^{iz}=1+\frac{iz}{1}-\frac{iz/2}{1}+\frac{iz/6}{1}-\cdots+\frac{iz/2(2n-1)}{1}-\frac{iz/2(2n-1)}{1}+\cdots.$$

5.5.3. Функція $\operatorname{tg} z$**.** З теореми 5.18 маємо, що коефіцієнти розвинення функції $\operatorname{tg} z$ в околі точки $z=z_*$ в правильний ланцюговий C–дріб будуть рівні

$$\begin{gathered}\omega_0(z_*)=\mathfrak{z},\quad \omega_1(z_*)=1+\mathfrak{z}^2,\quad \omega_{2n}=\frac{(-1)^n\mathfrak{z}^{(-1)^{n-1}}}{2n-1},\\ \omega_{2n+1}=\frac{(-1)^n\mathfrak{z}^{(-1)^n}}{2n+1},\quad \mathfrak{z}=\operatorname{tg} z_*,\qquad n\in\mathbb{N}.\end{gathered} \tag{5.44}$$

Розвинення функції $\operatorname{tg} z$ у правильний ланцюговий C–дріб має вигляд

$$\begin{gathered}\operatorname{tg} z=\mathfrak{z}+\frac{(1+\mathfrak{z}^2)(z-z_*)}{1}-\frac{\mathfrak{z}(z-z_*)}{1}-\frac{\frac{1}{3\mathfrak{z}}(z-z_*)}{1}+\frac{\frac{1}{3\mathfrak{z}}(z-z_*)}{1}+\\ +\frac{\frac{\mathfrak{z}}{5}(z-z_*)}{1}-\frac{\frac{\mathfrak{z}}{5}(z-z_*)}{1}-\frac{\frac{1}{7\mathfrak{z}}(z-z_*)}{1}+\frac{\frac{1}{7\mathfrak{z}}(z-z_*)}{1}+\cdots+\\ +\frac{(-1)^n\mathfrak{z}^{(-1)^{n-1}}\frac{1}{2n-1}(z-z_*)}{1}+\frac{(-1)^n\mathfrak{z}^{(-1)^n}\frac{1}{2n+1}(z-z_*)}{1}+\cdots.\end{gathered} \tag{5.45}$$

Коли $z_*=\pi/4$, то коефіцієнти ω_n будуть рівні

$$\omega_0(\tfrac{\pi}{4})=1,\quad \omega_1(\tfrac{\pi}{4})=2,\quad \omega_{2n}(\tfrac{\pi}{4})=\frac{(-1)^n}{2n-1},\quad \omega_{2n+1}(\tfrac{\pi}{4})=\frac{(-1)^n}{2n+1},\quad n\in\mathbb{N},$$

і ланцюговий дріб (5.45) запишеться наступним чином

$$\begin{gathered}\operatorname{tg} z=1+\frac{2(z-\pi/4)}{1}-\frac{(z-\pi/4)}{1}-\frac{(z-\pi/4)/3}{1}+\frac{(z-\pi/4)/3}{1}+\cdots+\\ +\frac{(-1)^k\,(z-\pi/4)/(2k-1)}{1}+\frac{(-1)^k\,(z-\pi/4)/(2k+1)}{1}+\cdots.\end{gathered}$$

Утворимо парну частину ланцюгового дробу (5.45). Згідно із теоремою 1.3 та формулами (1.5) маємо, що елементи парної частини рівні

$$
\begin{aligned}
&b_0^*(z_*) = \mathfrak{z}, \quad a_1^*(z_*) = (1+\mathfrak{z}^2)(z-z_*), \quad b_1^*(z_*) = 1-\mathfrak{z}(z-z_*),\\
&a_n^*(z_*) = -\frac{(z-z_*)^2}{(2n-1)(2n-3)}, \quad b_n^*(z_*) = 1, \qquad n \in \mathbb{N}_2.
\end{aligned}
$$

Маємо розвинення

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg} z = \mathfrak{z} + \frac{(z-z_*)\big(1+\mathfrak{z}^2\big)}{1-\mathfrak{z}(z-z_*)} - \frac{(z-z_*)^2/3}{1} - \frac{(z-z_*)^2/15}{1} - \frac{(z-z_*)^2/35}{1} -\\
- \cdots - \frac{(z-z_*)^2/\big((2n-3)(2n-1)\big)}{1} - \cdots.
\end{aligned}
\tag{5.46}
$$

Якщо $z_* = 0$, то отримаємо відоме розвинення функції $\operatorname{tg} z$ в правильний ланцюговий C–дріб в околі $z=0$ [131, с. 202]

$$
\operatorname{tg} z = \frac{z}{1} - \frac{z^2/3}{1} - \frac{z^2/15}{1} - \frac{z^2/35}{1} - \cdots - \frac{z^2/\big((2n-3)(2n-1)\big)}{1} - \cdots.
$$

Теорема 5.31. ***(A)*** *Правильний ланцюговий C–дріб* (5.45) *та еквівалентний йому T–ЛД* (5.17) *збігаються до функції* $\operatorname{tg} z$ *на всій комплексній площині* $\mathbb{C}$ *за винятком особливих точок функції;* ***(B)*** *на довільному компакті*

$$
\mathscr{Z}_1 \subset \mathbb{C} \backslash \{(2k+1)\tfrac{\pi}{2} \,:\, k \in \mathbb{Z}\}
\tag{5.47}
$$

ланцюгові дроби збігаються рівномірно.

Доведення. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n (\operatorname{tg} z_*)^{(-1)^{n-1}}}{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n (\operatorname{tg} z_*)^{(-1)^{n}}}{2n+1} = 0$, то згідно з формулами (5.44) для довільного $z_* \in \mathscr{Z}_1$, $\omega_n(z_*) \neq 0$. В силу теореми 5.27 дана теорема має місце. □

Елементи $a_n^*(z_*), b_n^*(z_*)$ ланцюгового дробу (5.46) такі, що $a_n^*(z_*) \not\equiv 0$, $b_n^*(z_*) = 1, n \in \mathbb{N}_2$, то можна довести наступне твердження.

Теорема 5.32. ***(A)*** *Правильний ланцюговий C–дріб* (5.46) *збігається до функції* $\operatorname{tg} z$ *на всій комплексній площині за винятком особливих точок функції;* ***(B)*** *на довільному компакті* $\mathscr{Z}_2 \subset \mathbb{C}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\}$ *ланцюговий дріб* (5.46) *збігається рівномірно.*

Теорема 5.33. *Нехай виконується нерівність* $\frac{1}{3} \leqslant |\operatorname{tg} z_*| \leqslant 1$. *Для ланцюгового дробу* (5.45) *має місце апріорна оцінка* (1.14) *для всіх таких* z *з компакту* (5.47), *що* $|z - z_*| \leqslant \frac{1}{4} - \varepsilon$, *де* $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$.

Доведення. Оскільки всі $\omega_n(z_*), n \in \mathbb{N}_2$, які визначенні в (5.44), задовольняють нерівність $\frac{1}{3|\operatorname{tg} z_*|} \leqslant |\omega_n| \leqslant |\operatorname{tg} z_*|$, то з припущень теореми випливає, що всі елементи ланцюгового дробу (5.45) задовольняють умови теореми 1.10, а тоді має місце оцінка (1.14). $\square$

5.5.4. Функції $\operatorname{ctg} z, \operatorname{th} z, \operatorname{cth} z$**.** Знайдемо розвинення функцій $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{th} z, \operatorname{cth} z$ в правильний ланцюговий C–дріб. З теорем 5.21, 5.27 та формул (5.21), (5.37) випливає твердження.

Теорема 5.34. ***(A)*** *Розвинення мероморфної функції* $\operatorname{ctg} z$ *в правильний ланцюговий C–дріб в околі точки* $z = z_*$ *має вигляд*

$$\operatorname{ctg} z = \mathfrak{z} - \frac{(1+\mathfrak{z}^2)(z-z_*)}{1} + \frac{\mathfrak{z}(z-z_*)}{1} + \frac{(z-z_*)/(3\mathfrak{z})}{1} - \frac{(z-z_*)/(3\mathfrak{z})}{1} - \frac{\mathfrak{z}(z-z_*)/5}{1} + \frac{\mathfrak{z}(z-z_*)/5}{1} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(\mathfrak{z})^{(-1)^{n-1}}(z-z_*)/(2n-1)}{1} + \frac{(-1)^{n-1}(\mathfrak{z})^{(-1)^{n}}(z-z_*)/(2n+1)}{1} + \cdots, \qquad \mathfrak{z} = \operatorname{ctg} z_*; \tag{5.48}$$

(B) *ланцюговий дріб* (5.48) *та еквівалентний йому T–ЛД* (5.25) *збігаються до функції* $\operatorname{ctg} z$ *на всій комплексній площині за винятком особливих точок функції;* ***(C)*** *ланцюгові дроби* (5.48) *та* (5.25) *збігаються рівномірно на довільному компакті* $\mathcal{Z}_1 \subset \mathbb{C} \backslash \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$*;* ***(D)*** *нехай* $1 \leqslant |\operatorname{ctg} z_*| \leqslant 3$. *Для ланцюгового дробу* (5.48) *має місце апріорна оцінка* (1.14) *для всіх значень* z *з компакту* $\mathcal{Z}_1 \subset \mathbb{C} \backslash \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, *що* $|z - z_*| \leqslant \frac{1}{4} - \varepsilon$, *де* $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$.

Парною частиною ланцюгового дробу (5.48) буде ланцюговий дріб

$$\operatorname{ctg} z = \mathfrak{z} - \frac{(1+\mathfrak{z}^2)(z-z_*)}{1+\mathfrak{z}(z-z_*)} - \frac{(z-z_*)^2/3}{1} - \frac{(z-z_*)^2/15}{1} - \frac{(z-z_*)^2/35}{1} -$$

$$-\frac{(z-z_*)^2/63}{1}-\cdots-\frac{(z-z_*)^2/(2n-3)(2n-1)}{1}-\ldots, \tag{5.49}$$

який збіжний до $\operatorname{ctg} z$. На довільному компакті $\mathcal{Z}_3 \subset \mathbb{C}\backslash\{k\pi \ : \ k \in \mathbb{N}\}$ ланцюговий дріб (5.49) збігається рівномірно.

З формул (5.19) та тих же теорем випливає наступне твердження.

Теорема 5.35. ***(A)*** *Функцію* $\operatorname{th} z$ *в околі точки* $z = z_*$ *можна розвинути в правильний ланцюговий C–дріб вигляду*

$$\operatorname{th} z = \mathfrak{z} - \frac{(\mathfrak{z}^2-1)(z-z_*)}{1} + \frac{\mathfrak{z}(z-z_*)}{1} - \frac{(z-z_*)/3\mathfrak{z}}{1} +$$
$$+\frac{(z-z_*)/3\mathfrak{z}}{1} - \frac{\mathfrak{z}(z-z_*)/5}{1} + \frac{\mathfrak{z}(z-z_*)/5}{1} - \frac{(z-z_*)/7\mathfrak{z}}{1} +$$
$$+\frac{(z-z_*)/7\mathfrak{z}}{1} - \frac{\mathfrak{z}(z-z_*)/9}{1} + \cdots + \frac{(\mathfrak{z})^{(-1)^{k-1}}(z-z_*)/(2k-1)}{1} -$$
$$-\frac{(\mathfrak{z})^{(-1)^{k}}(z-z_*)/(2k+1)}{1} + \ldots, \qquad \mathfrak{z} = \operatorname{th} z_*; \tag{5.50}$$

(B) *ланцюговий дріб* (5.50) *та еквівалентний йому T–ЛД* (5.20) *збігаються до функції* $\operatorname{th} z$ *на всій комплексній площині за винятком особливих точок функції;* ***(C)*** *на довільному компакті* $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}\backslash\{i\pi(k+\frac{1}{2}) : k \in \mathbb{Z}\}$ *ланцюгові дроби* (5.50) *та* (5.20) *збігаються рівномірно;* ***(D)*** *парна частина ланцюгового дробу* (5.50)

$$\operatorname{th} z = \mathfrak{z} - \frac{(z-z_*)\big(\mathfrak{z}^2-1\big)}{(z-z_*)\mathfrak{z}+1} + \frac{(z-z_*)^2/3}{1} + \frac{(z-z_*)^2/15}{1} +$$
$$+\frac{(z-z_*)^2/35}{1} + \cdots + \frac{(z-z_*)^2/\big((2k-1)(2k+1)\big)}{1} + \cdots \tag{5.51}$$

збігається рівномірно на компакті $\mathcal{Z}_1 \subset \mathbb{C}\backslash\{i(\frac{\pi}{2}+k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$; ***(E)*** *якщо* $1/3 \leqslant |\operatorname{th} z_*|$, *то для ланцюгового дробу* (5.50) *має місце апріорна оцінка* (1.14) *для всіх значень* z *з компакту* (5.47), *що* $|z-z_*| \leqslant \frac{1}{4}-\varepsilon$, *де* $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$.

У випадку, коли $z_* = 0$ ланцюговий дріб (5.51) набуває вигляду

$$\operatorname{th} z = \frac{z}{1+}\frac{z^2/3}{1} + \frac{z^2/15}{1} + \frac{z^2/35}{1} + \cdots + \frac{z^2/\big((2k-1)(2k+1)\big)}{1} + \cdots.$$

Це розвинення може бути отримане як розв'язок диференціального рівняння Ріккаті [59, с. 139], [60, с. 301], [131, с. 211].

Для функції $\operatorname{cth} z$ з формул (5.22), (5.37) та теорем 5.22, 5.27 випливає наступне твердження.

Теорема 5.36. ***(A)*** *Розвинення функції* $\operatorname{cth} z$ *в околі точки* $z = z_*$ *в правильний ланцюговий C–дріб має вигляд*

$$\operatorname{cth} z = \mathfrak{z} - \frac{(\mathfrak{z}^2-1)(z-z_*)}{1} \underset{+}{} \frac{\mathfrak{z}(z-z_*)}{1} \underset{-}{} \frac{(z-z_*)/3\mathfrak{z}}{1} \underset{+}{} \\ \underset{+}{} \frac{(z-z_*)/3\mathfrak{z}}{1} \underset{-}{} \frac{\mathfrak{z}(z-z_*)/5}{1} \underset{+}{} \frac{\mathfrak{z}(z-z_*)/5}{1} \underset{-}{} \frac{(z-z_*)/7\mathfrak{z}}{1} \underset{+}{} \\ \underset{+}{} \frac{(z-z_*)/7\mathfrak{z}}{1} \underset{-}{} \frac{\mathfrak{z}(z-z_*)/9}{1} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{(\mathfrak{z})^{(-1)^{k-1}}(z-z_*)/(2k-1)}{1} \underset{-}{} \\ \underset{-}{} \frac{(\mathfrak{z})^{(-1)^{k}}(z-z_*)/(2k+1)}{1} \underset{+}{} \cdots, \qquad \mathfrak{z} = \operatorname{cth} z_*; \tag{5.52}$$

(B) *ланцюговий дріб* (5.52) *та еквівалентний йому T–ЛД* (5.26) *збігаються до функції* $\operatorname{cth} z$ *на всій комплексній площині за винятком особливих значень функції;* ***(C)*** *на довільному компакті* $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}\backslash\{i\,k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ *ланцюгові дроби* (5.52) *та* (5.26) *збігаються рівномірно;* ***(D)*** *парна частина ланцюгового дробу* (5.52)

$$\operatorname{cth} z = \mathfrak{z} - \frac{(z-z_*)\big(\mathfrak{z}^2-1\big)}{(z-z_*)\mathfrak{z}+1} \underset{+}{} \frac{(z-z_*)^2/3}{1} \underset{+}{} \frac{(z-z_*)^2/15}{1} \underset{+}{} \\ \underset{+}{} \frac{(z-z_*)^2/35}{1} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{(z-z_*)^2/\big((2k-1)(2k+1)\big)}{1} \underset{+}{} \cdots$$

збігається рівномірно на довільному компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}\backslash\{i\,k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

5.5.5. Функція $\ln(c+z)$. Отримаємо розвинення функції $\ln(c+z)$ в правильний ланцюговий C–дріб.

Теорема 5.37. ***(A)*** *В околі точки* $z = z_*, z_* \neq -c$, *функція* $\ln(c+z)$ *має розвинення в правильний ланцюговий C–дріб вигляду*

$$\ln(c+z)=\ln(\mathfrak{z})+\frac{\frac{1}{\mathfrak{z}}(z-z_*)}{1}+\frac{\frac{1}{2\mathfrak{z}}(z-z_*)}{1}+\frac{\frac{1}{6\mathfrak{z}}(z-z_*)}{1}+\frac{\frac{1}{3\mathfrak{z}}(z-z_*)}{1}+$$
$$+\cdots+\frac{\frac{n}{2(2n-1)\mathfrak{z}}(z-z_*)}{1}+\frac{\frac{n}{2(2n+1)\mathfrak{z}}(z-z_*)}{1}+\cdots,\quad \mathfrak{z}=c+z_*;\quad (5.53)$$

(B) *правильний ланцюговий C–дріб* (5.53) *та еквівалентний йому T–ЛД* (5.23) *збігаються до функції* $\ln(c+z)$ *для всіх значень* $z\notin(-\infty,-c)$*;* ***(C)*** *ланцюгові дроби* (5.53) *та* (5.23) *збігаються рівномірно на довільному компакті* $\mathcal{Z}\subset R(c,z_*)=\{z\in\mathbb{C}\backslash\{-c\}\,:\,|\arg(z+c)-\arg(c+z_*)|<\pi\}$*;* ***(D)*** *якщо* $c,z_*\in\mathbb{R}, c+z_*>0$*, то функція* $\ln(c+z)$ *може бути розвинута в ланцюговий* S*–дріб, який рівномірно збігається на довільному компакті* $\mathcal{Z}\subset\{z\in\mathbb{C}\backslash\{-c\}\,:\,|\arg(c+z)|<\pi\}$ *і мають місце:* ***(D1)*** *апріорна оцінка*

$$|f(z)-f_n(z)|\leqslant\frac{2\rho}{\mathfrak{z}\cos\varphi}\prod_{k=2}^{n}\frac{\sqrt{1+\frac{4\rho}{\cos^2\varphi}\,\frac{[k/2]}{2(k+(-1)^{k+1})\mathfrak{z}}}-1}{\sqrt{1+\frac{4\rho}{\cos^2\varphi}\,\frac{[k/2]}{2(k+(-1)^{k+1})\mathfrak{z}}}+1},\quad n\in\mathbb{N}_2,$$

де $z=\rho e^{2\varphi i},|\varphi|<\pi/2,\mathfrak{z}=c+z_*$*;* ***(D2)*** *апостеріорна оцінка* (1.15).

Доведення. **(A)** Безпосередньо з формул (5.22) та (5.37) випливає, що

$$\omega_0(z_*)=\ln(\mathfrak{z}),\ \omega_1(z_*)=\frac{1}{\mathfrak{z}},\ \omega_{2n}(z_*)=\frac{n}{2(2n-1)\mathfrak{z}},\ \omega_{2n+1}(z_*)=\frac{n}{2(2n+1)\mathfrak{z}},$$

коли $n\in\mathbb{N}$. Підставивши значення коефіцієнтів отримаємо розвинення в ланцюговий дріб (5.53).

(B)–(C) Так як коефіцієнти правильного ланцюгового C–дробу (5.53) такі, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2(2n-1)\,(c+z_*)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2(2n+1)\,(c+z_*)}=\frac{1}{4(c+z_*)}$, то згідно із пунктом **(A)** теореми 5.26 ланцюговий дріб збігається до функції у всіх точках комплексної площини $z\neq-c$. Якщо $\left|\arg\left(\frac{z-z_*}{4(c+z_*)}+\frac{1}{4}\right)\right|=|\arg(c+z)-\arg(c+$ $+z_*)|<\pi$, то згідно із пунктом **(B)** тієї ж теореми ланцюговий дріб буде збігатися рівномірно на кожному компакті $\mathcal{Z}\subset R(c,z_*)$.

(D) Твердження безпосередньо випливають з теорем 1.9 та 1.11. □

Якщо $c=1$ і $z_*=0$, то з розвинення (5.53) як частинний випадок отримаємо розвинення Ламберта–Лагранжа функції $\ln(1+z)$ в околі нуля в ланцюговий S–дріб [131, с. 196], [189, с. 342]

$$\ln(1+z) = \frac{z}{1} {\atop +} \frac{z/2}{1} {\atop +} \frac{z/6}{1} {\atop +} \cdots {\atop +} \frac{nz/2(2n-1)}{1} {\atop +} \frac{nz/2(2n+1)}{1} {\atop +} \cdots.$$

5.5.6. Функція $z \ln z$. Функцію $z \ln z$ також можна розвинути в правильний ланцюговий C–дріб. Має місце наступне твердження.

Теорема 5.38. ***(A)*** *Функція $z \ln z$ в околі точки $z = z_*$ має розвинення в правильний ланцюговий C–дріб вигляду*

$$z \ln z = \mathfrak{a}_0(z_*) + \frac{\mathfrak{a}_1(z_*)(z-z_*)}{1} {\atop +} \frac{\mathfrak{a}_2(z_*)(z-z_*)}{1} {\atop +} \frac{\mathfrak{a}_3(z_*)(z-z_*)}{1} {\atop +}$$
$$+ \cdots + \frac{\mathfrak{a}_{2n}(z_*)(z-z_*)}{1} {\atop +} \frac{\mathfrak{a}_{2n+1}(z_*)(z-z_*)}{1} {\atop +} \cdots, \tag{5.54}$$

де

$$\mathfrak{a}_0(z_*) = z_* \ln z_*, \quad \mathfrak{a}_1(z_*) = \ln z_* + 1,$$
$$\mathfrak{a}_2(z_*) = \frac{-1}{2z_*(\ln z_* + 1)}, \quad \mathfrak{a}_3(z_*) = \frac{3(\ln z_* + 5/2)}{4z_*(\ln z_* + 1)},$$

$$\mathfrak{a}_{2n}(z_*) = \frac{(n-1)(\ln z_* + a_{n-2})}{2(2n-1)\, z_*(\ln z_* + a_{n-1})} = \frac{(n-1)\Big(\ln z_* + \frac{\alpha_{n-2}+2(n-1)^2-1}{2(n-2)(n-1)}\Big)}{2(2n-1)\, z_*(\ln z_* + \frac{\alpha_{n-1}+2n^2-1}{2(n-1)n})},$$

$$\mathfrak{a}_{2n+1}(z_*) = \frac{(n+1)(\ln z_* + a_n)}{2(2n+1) z_*(\ln z_* + a_{n-1})} = \frac{(n+1)\Big(\ln z_* + \frac{\alpha_n+2(n+1)^2-1}{2n(n+1)}\Big)}{2(2n+1) z_*\Big(\ln z_* + \frac{\alpha_{n-1}+2n^2-1}{2(n-1)n}\Big)},$$

α_n визначена в (5.28), *$n \in \mathbb{N}_2$;* ***(B)*** *правильний ланцюговий C–дріб* (5.54) *та еквівалентний йому Т–ЛД* (5.32) *збігаються до функції $z \ln z$ для всіх значень $z \notin (-\infty, 0)$;* ***(C)*** *ланцюгові дроби* (5.54) *та* (5.32) *збігаються рівномірно на довільному компакті $\mathcal{Z} \subset R(0, z_*) = \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\arg(z) - \arg(z_*)| < \pi\}$.*

Доведення. **(A)** Із (5.29), (5.37) маємо, що коефіцієнти правильного ланцюгового C–дробу рівні: $\omega_0(z_*) = z_* \ln z_* = \mathfrak{a}_0(z_*)$, $\omega_1(z_*) = 1 + \ln z_* = \mathfrak{a}_1(z_*)$, $\omega_2(z_*) = \frac{-1}{2z_*(\ln z_*+1)} = \mathfrak{a}_2(z_*)$, $\omega_3(z_*) = \frac{3(\ln z_*+5/2)}{4(\ln z_*+1)} = \mathfrak{a}_3(z_*)$, $\omega_{2n}(z_*) = \frac{(n-1)\Big(\ln z_*+a_{n-2}\Big)}{2(2n-1)z_*\Big(\ln z_*+a_{n-1}\Big)}$, $\omega_{2n+1}(z_*) = \frac{(n+1)\Big(\ln z_*+a_n\Big)}{2(2n+1)z_*\Big(\ln z_*+a_{n-1}\Big)}$, $n \in \mathbb{N}_2$.

Якщо із (5.30) підставити значення a_n, то кінцеве отримаємо

$$\omega_{2n}(z_*)=\frac{(n-1)\left(\ln z_*+\frac{\alpha_{n-2}+2(n-1)^2-1}{2(n-2)(n-1)}\right)}{2(2n-1)z_*\left(\ln z_*+\frac{\alpha_{n-1}+2n^2-1}{2(n-1)n}\right)}=\mathfrak{a}_{2n}(z_*),$$

$$\omega_{2n+1}(z_*)=\frac{(n+1)\left(\ln z_*+\frac{\alpha_{n}+2(n+1)^2-1}{2n(n+1)}\right)}{(2(2n+1)z_*)\left(\ln z_*+\frac{\alpha_{2n-1}+2n^2-1}{2(n-1)n}\right)}=\mathfrak{a}_{2n+1}(z_*),\ n\in\mathbb{N}_2.$$

Підставимо знайдене значення ω_m у формули (5.36), отримаємо розвинення (5.54).

(B)–(C) Спочатку покажемо, що α_n може бути подано у вигляді

$$\alpha_n=3n^2+\beta_1^{(n)}n+\beta_0^{(n)}+\frac{\beta_{-1}^{(n)}}{n-1}+\frac{\beta_{-2}^{(n)}}{(n-2)(n-1)}+\dots+\frac{\beta_{-n+1}^{(n)}}{(n-1)!},\quad(5.55)$$

де $\beta_k^{(n)}, k=-n+1,-n+2,\dots,0,1,$ є деякі коефіцієнти.

Із (5.28) безпосередньо випливає, що для $\alpha_1=3$, $\alpha_2=23$ та $\alpha_3=63$ співвідношення (5.55) виконується, коли $\beta_1^{(1)}=\beta_0^{(1)}=0$, $\beta_1^{(2)}=4,\beta_0^{(2)}=1$, $\beta_{-1}^{(2)}=2$, $\beta_1^{(3)}=8,\beta_0^{(3)}=\beta_{-1}^{(3)}=\beta_{-2}^{(3)}=6$.

Припустимо, що розвинення (5.55) має місце для $n=k-1$. Тоді для $n=k$ із співвідношення (5.28) маємо, що

$$\alpha_k=\frac{1}{k-1}\Bigg((k+1)\Bigg(3(k-1)^2+\beta_1^{(k-1)}(k-1)+\beta_0^{(k-1)}+\frac{\beta_{-1}^{(k-1)}}{k-2}+\frac{\beta_{-2}^{(k-1)}}{(k-3)(k-2)}+$$

$$+\dots+\frac{\beta_{-(k-2)}^{(k-1)}}{(k-2)!}\Bigg)+4k^2-2\Bigg)=3k^2+(\beta_1^{(k-1)}+4)k+\beta_1^{(k-1)}+\beta_0^{(k-1)}+1+$$

$$+\frac{2\beta_0^{(k-1)}+\beta_{-1}^{(k-1)}+2}{k-1}+\frac{3\beta_{-1}^{(k-1)}+\beta_{-2}^{(k-1)}}{(k-2)(k-1)}+\frac{4\beta_{-2}^{(k-1)}+\beta_{-3}^{(k-1)}}{(k-3)(k-2)(k-1)}+\dots+$$

$$+\frac{(k-1)\beta_{-(k-3}^{(k-1)}+\beta_{-(k-2)}^{(k-1)}}{2\cdot3\cdots(k-2)(k-1)}+\frac{k\beta_{-(k-2)}^{(k-1)}}{(k-1)!}.$$

Звідки випливає, що α_k також може бути подана у вигляді (5.55), де коефіцієнти відповідно рівні

$$\beta_1^{(k)}=\beta_1^{(k-1)}+4,\ \beta_0^{(k)}=2\beta_1^{(k-1)}+\beta_0^{(k-1)}+1,\ \beta_{-1}^{(k)}=2\beta_0^{(k-1)}+\beta_{-1}^{(k-1)}+2,$$

$$\beta_{-i}^{(k)} = (i+1)\beta_{-(i-1)}^{(k-1)} + \beta_{-i}^{(k-1)}, \quad i = \overline{2, k-2}, \quad \beta_{-(k-1)}^{(k)} = k\beta_{-(k-2)}^{(k-1)}.$$

Скористаємося (5.55) для знаходження границі $\mathfrak{a}_k$ для $k \to \infty$. Маємо

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{a}_{2n}(z_*) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n(2n-1)z_*} \frac{\ln z_* + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n-2}+2(n-1)^2-1}{2(n-2)(n-1)}}{\ln z_* + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n-1}+2n^2-1}{2(n-1)n}}.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n-2}+2(n-1)^2-1}{2(n-2)(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(n-2)(n-1)} \Big(3(n-2)^2 + \beta_1^{(n-2)}(n-2) +$$

$$+ \beta_0^{(n-2)} + \frac{\beta_{-1}^{(n-2)}}{n-3} + \frac{\beta_{-2}^{(n-2)}}{(n-4)(n-3)} + \dots + \frac{\beta_{-(n-3)}^{(n-2)}}{(n-3)!} + 2(n-1)^2 - 1 \Big) = \frac{5}{2},$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{a}_{2n}(z_*) = \frac{1}{4z_*}$. Аналогічно $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{a}_{2n+1}(z_*) = \frac{1}{4z_*}$. Згідно з теоремою 5.26 правильний ланцюговий C–дріб збігається до функції $z \ln z$ і на довільному компакті $\mathcal{Z} \subset R(0, z_*)$ ланцюговий дріб збігається рівномірно. □

5.6. Висновки до розділу 5

В теоремах 5.1–5.8 встановлено нові властивості обернених похідних Тіле. Теорема 5.12 визначає значення оберненої похідної Тіле многочлена. Твердження про обернену похідну Тіле раціональної функції доведено в теоремі 5.14. Отримано розвинення функції $z \ln z$ в ланцюговий дріб Тіле. В теоремі 5.25 доведено відповідність ланцюгового дробу Тіле ФСР в який розвинута функція в околі точки $z = z_*$. Збіжність та рівномірна збіжність правильних ланцюгових C–дробів до мероморфних функцій обґрунтовано в теоремах 5.26 та 5.27. Отримано розвинення в правильні ланцюгові C–дроби. В теоремах 5.28, 5.29, 5.31, 5.32, 5.34, 5.35, 5.36,5.37, 5.38 вказано області збіжності та рівномірної збіжності розвинень в ланцюгові дроби. В теоремах 5.30, 5.33 та 5.34, 5.35, 5.37 отримано апріорні та апостеріорні оцінки.

Результати розділу 5 опубліковано в роботах [76,80,82,89,90] та розділах монографії [92, с. 218–304].

РОЗДІЛ 6

РОЗВИНЕННЯ ФУНКЦІЙ В КВАЗІ–ОБЕРНЕНІ ЛАНЦЮГОВІ ДРОБИ

6.1. Обернені похідні 2–го типу

В підрозділі 3.3 для побудови обернених різниць 2–го типу робилися припущення, що вузли інтерполяції, $z_i \in \mathbf{Z}, i = \overline{0,n}$, різні. Перейдемо до граничного випадку оберненої різниці 2–го типу, коли всі вузли, чи деяка їх частина, прямують до одного і того ж значення.

Означення 6.1. Якщо існує границя (скінченне значення або нескінченність) оберненої різниці 2–го типу k–го порядку $\rho_k^{(2)}[z_0, z_1, \ldots, z_k; f]$, коли інтерполяційні вузли $z_0, z_1, \ldots, z_k$ прямують до деякого $z_* \in \mathcal{Z}$, то вона називається оберненою похідною 2–го типу k–го порядку функції $f(z)$ в точці z_*.

Обернену похідну 2–го типу k–го порядку функції $f(z)$ позначимо через ${}^{\{k\}}f(z)$. З означення маємо, що

$$ {}^{\{k\}}f(z) = \rho_k^{(2)}[\underbrace{z, \ldots, z}_{k+1}; f\,] = \lim_{z_0,\ldots,z_k \to z} \rho_k^{(2)}[z_0, \ldots, z_k; f]. $$

Для $k = 1$ із формули (3.26) випливає, що

$$ {}^{\{1\}}f(z) = -\lim_{z_0,z_1 \to z} \frac{\begin{vmatrix} f(z_0) & f(z_0)\,z_0 \\ f(z_1) & f(z_1)\,z_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(z_0) \\ 1 & f(z_1) \end{vmatrix}} = -\lim_{h\to 0} \frac{\begin{vmatrix} f(z) & f(z)\,z \\ f(z+h) & f(z+h)(z+h) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(z) \\ 1 & f(z+h) \end{vmatrix}} = $$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{f(z)f(z+h)\begin{vmatrix}1 & z\\ 1 & z+h\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & f(z)\\ 1 & f(z+h)\end{vmatrix}} = -\lim_{h\to 0}\frac{f(z)\,f(z+h)\begin{vmatrix}1 & z\\ 0 & h\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & f(z)\\ 0 & f(z+h)-f(z)\end{vmatrix}}.$$

Поділимо дріб на h та перейдемо до границі коли $h\to 0$, отримаємо

$$^{\{1\}}f(z) = -\lim_{h\to 0}\frac{f(z)\,f(z+h)\begin{vmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & f(z)\\ 0 & \dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}\end{vmatrix}} = -\frac{f^2(z)}{f'(z)}. \tag{6.1}$$

Визначимо рекурентне співвідношення для обчислення обернених похідних 2–го типу. Із (3.21) випливає, що

$$\rho_k^{(2)}[z_0,\ldots,z_k;f] - \rho_{k-2}^{(2)}[z_0,\ldots,z_{k-2};f] =$$

$$= \frac{z_k - z_{k-1}}{\rho_{k-1}^{(2)}[z_0,\ldots,z_{k-2},z_k;f] - \rho_{k-1}^{(2)}[z_0,\ldots,z_{k-1};f]}.$$

Нехай $z_0 = z_1 = \cdots = z_{k-1} = z$, а $z_k = u$. Тоді

$$\frac{\rho_{k-1}^{(2)}[z,\ldots,z,z;f] - \rho_{k-1}^{(2)}[z,\ldots,z,u;f]}{z-u} =$$

$$= \frac{1}{\rho_k^{(2)}[z,\ldots,z,u;f] - \rho_{k-2}^{(2)}[z,\ldots,z,z;f]}.$$

Аналогічно

$$\frac{\rho_{k-1}^{(2)}[z,\ldots,z,u;f] - \rho_{k-1}^{(2)}[z,\ldots,z,u,u;f]}{z-u} =$$

$$= \frac{1}{\rho_k^{(2)}[z,\ldots,z,u,u;f] - \rho_{k-2}^{(2)}[z,\ldots,z,u;f]},$$

$$\frac{\rho_{k-1}^{(2)}[z,\ldots,z,u,u;f] - \rho_{k-1}^{(2)}[z,\ldots,z,u,u,u;f]}{z-u} =$$

$$= \frac{1}{\rho_k^{(2)}[z,\ldots,z,u,u,u;f] - \rho_{k-2}^{(2)}[z,\ldots,z,u,u;f]},$$

. . . .

$$\frac{\rho^{(2)}_{k-1}[z,u\dots,u;f]-\rho^{(2)}_{k-1}[u,\dots,u;f]}{z-u}=$$

$$=\frac{1}{\rho^{(2)}_{k}[z,u,\dots,u;f]-\rho^{(2)}_{k-2}[u,\dots,u;f]}.$$

Додавши k співвідношень та перейшовши до границі для $u\to z$, маємо

$$\lim_{u\to z}\frac{\rho^{(2)}_{k-1}[z,\dots,z]-\rho^{(2)}_{k-1}[u,\dots,u]}{z-u}=\frac{k}{{}^{\{k\}}f(z)-{}^{\{k-2\}}f(z)},$$

$$\left({}^{\{k-1\}}f(z)\right)'=\frac{k}{{}^{\{k\}}f(z)-{}^{\{k-2\}}f(z)}.$$

Кінцеве отримуємо рекурентну формулу для обернених похідних 2–го типу

$${}^{\{0\}}f(z)=\frac{1}{f(z)},\ {}^{\{1\}}f(z)=-\frac{f^2(z)}{f'(z)},\ {}^{\{k\}}f(z)=\frac{k}{\left({}^{\{k-1\}}f(z)\right)'}+{}^{\{k-2\}}f(z),\ k\in\mathbb{N}_2. \quad (6.2)$$

6.2. Властивості обернених похідних 2–го типу

Із формули (6.1) безпосередньо випливає наступне твердження.

Теорема 6.1. ***(A)*** *Якщо $f(z_0)\neq 0$, де $z_0\in\mathcal{Z}$, то ${}^{\{1\}}f(z_0)=\infty$, коли $f'(z_0)=0$, і ${}^{\{1\}}f(z_0)=0$, коли $f'(z_0)=\infty$;* ***(B)*** *якщо $f'(z_0)\neq 0$, то ${}^{\{1\}}f(z_0)=\infty$, коли $f(z_0)=\infty$;* ***(C)*** *якщо $C=const, C\neq 0$, то ${}^{\{1\}}C=\infty$.*

Теорема 6.2. *Нехай для кожного $z\in\mathcal{Z}$ функції $u=f(z)$ та $v=$ $=g(z)$ мають скінченні обернені похідні 2–го типу. Тоді існують обернені похідні 2–го типу суми, різниці, добутку та частки цих функцій, які визначаються за формулами*

$${}^{\{1\}}(u\pm v)=\frac{(u\pm v)^2\cdot{}^{\{1\}}u\cdot{}^{\{1\}}v}{u^2\cdot{}^{\{1\}}v\pm v^2\cdot{}^{\{1\}}u}, \quad (6.3)$$

$${}^{\{1\}}(u\cdot v)=\frac{uv\cdot{}^{\{1\}}u\cdot{}^{\{1\}}v}{u\cdot{}^{\{1\}}v+v\cdot{}^{\{1\}}u}, \quad (6.4)$$

$${}^{\{1\}}(u/v)=\frac{(u/v)\cdot{}^{\{1\}}u\cdot{}^{\{1\}}v}{u\cdot{}^{\{1\}}v-v\cdot{}^{\{1\}}u}. \quad (6.5)$$

Доведення. Із формули (6.1) випливає, що

$$^{\{1\}}\big(u\circ v\big) = -\frac{\big(u\circ v\big)^2}{\big(u\circ v\big)'}, \tag{6.6}$$

де "$\circ$" — одна із операцій "$+$","$-$","$\times$",":". З іншого боку з (6.1) маємо, що $w' = -w^2/{}^{\{1\}}w$. Підставивши значення u' та v' в співвідношення (6.6) отримуємо відповідно формули (6.3), (6.4) та (6.5). □

Теорема 6.3. *Якщо функції $w_i = f_i(z)$, $i=\overline{1,n}$, мають обернені похідні 2–го типу для кожного $z\in\mathcal{Z}$, то тоді*

$$^{\{1\}}\Big(\sum_{i=1}^n w_i\Big) = \frac{\Big(\sum\limits_{i=1}^n w_i\Big)^2 \prod\limits_{i=1}^n {}^{\{1\}}w_i}{\sum\limits_{i=1}^n w_i^2\cdot \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n {}^{\{1\}}w_j}, \qquad ^{\{1\}}\Big(\prod_{i=1}^n w_i\Big) = \frac{\prod\limits_{i=1}^n (w_i\cdot {}^{\{1\}}w_i)}{\sum\limits_{i=1}^n w_i\cdot \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n {}^{\{1\}}w_j}. \tag{6.7}$$

Доведення. Співвідношення (6.7) доводяться за індукцією спираючись на теорему 6.2. □

Теорема 6.4. *Нехай функція $f(z)$ для кожного $z\in\mathcal{Z}$ має обернені похідні 2–го типу до n–го порядку включно і стала $C\neq 0$, тоді $^{\{2m\}}(Cf(z)) = = \frac{1}{C}\cdot {}^{\{2m\}}f(z)$, $^{\{2m+1\}}(Cf(z)) = C\cdot {}^{\{2m+1\}}f(z)$, $\quad m=\overline{0,[\frac{n}{2}]}$.*

Доведення. Теорему доведемо за індукцією. Для $m=0,1$ із формули (6.1) безпосередньо випливає, що $^{\{0\}}(Cw) = \frac{1}{C}\cdot {}^{\{0\}}w$, $^{\{1\}}(Cw) = C\cdot {}^{\{1\}}w$. Припустимо, що твердження теореми виконується для $m=2k$. Тоді для $m=2k+1$ із рекурентної формули (6.2) маємо:

$$^{\{2k+1\}}(Cw) = \frac{2k+1}{\big({}^{\{2k\}}(Cw)\big)'} + {}^{\{2k-1\}}(Cw) = C\cdot\frac{2k+1}{\big({}^{\{2k\}}w\big)'} + C\cdot {}^{\{2k-1\}}w = C\cdot {}^{\{2k+1\}}w.$$

Аналогічно для $m=2k+2$ отримуємо:

$$^{\{2k+2\}}(Cw) = \frac{2k+2}{\big({}^{\{2k+1\}}(Cw)\big)'} + {}^{\{2k\}}(Cw) = \tfrac{1}{C}\cdot\left(\frac{2k+2}{\big({}^{\{2k+1\}}w\big)'} + {}^{\{2k\}}w\right) = \tfrac{1}{C}\cdot {}^{\{2k+2\}}w.$$

□

Теорема 6.5. ***(A)*** *Нехай функція* $w = f(z)$ *однолиста в області* G *і в точці* $z = z_0$ *має обернену похідну 2–го типу* ${}^{\{1\}}f(z_0)$; ***(B)*** *нехай функція* $z = F(w)$ *– обернена функція до* $f(z)$ *в області* $E = \{w : w = f(z), z \in G\}$. *Тоді в точці* $w_0 \in E$, *де* $w_0 = f(z_0)$, *функція* $F(z)$ *має обернену похідну 2–го типу яка рівна:* ${}^{\{1\}}F(w_0) = z_0^2 \cdot f^2(z_0)/{}^{\{1\}}f(z_0)$.

Доведення. З означення оберненої похідної 2–го типу та умов теореми маємо, що обернена функція $z = F(w)$ в точці $w = w_0$ має похідну і $F'(w_0) = 1/f'(z_0)$, а тоді ${}^{\{1\}}F(w_0) = \frac{-F^2(w_0)}{F'(w_0)} = \frac{-F^2(f(z_0))}{1/f'(z_0)} = \frac{z_0^2 \cdot f^2(z_0)}{{}^{\{1\}}f(z_0)}$. □

Теорема 6.6. *Нехай функція* $w = f(u)$ *має обернену похідну 2–го типу в точці* $u_0 \in G$, *функція* $u = g(z)$ *має похідну в точці* $z_0 \in E$. *Тоді складена функція* $w = F(z) = f(g(z))$ *має обернену похідну 2–го типу в точці в точці* $z = z_0$, *яка визначається за формулою* ${}^{\{1\}}F(z_0) = {}^{\{1\}}f(g(z_0))/g'(z_0)$.

Доведення. Із умов, які накладені на функції $w = f(u), u = g(z)$ та визначення оберненої похідної 2–го випливає твердження теореми. □

Теорема 6.7. *Якщо функція* $f(z)$ *має обернені похідні 2–го типу до* n*–го порядку,* $C = const$, *то*

$$ {}^{\{2k\}}\big(f(Cz)\big) = {}^{\{2k\}}f(v)\Big|_{v=Cz}, \; {}^{\{2k+1\}}\big(f(Cz)\big) = \frac{1}{C} \cdot {}^{\{2k+1\}}f(v)\Big|_{v=Cz}, \; k = \overline{0, [\tfrac{n}{2}]}. \quad (6.8)$$

Доведення. Доведемо теорему за індукцією. Згідно із теоремою 6.6 маємо, що ${}^{\{1\}}\big(f(Cz)\big) = \frac{1}{C}{}^{\{1\}}f(v)\Big|_{v=Cz}$. Далі ${}^{\{2\}}\big(f(Cz)\big) = \frac{2}{({}^{\{1\}}(f(Cz)))'} + f(Cz) = = \Big(\frac{2}{({}^{\{1\}}f(v))'} + f(v)\Big)\Big|_{v=Cz} = {}^{\{2\}}f(v)\Big|_{v=Cz}$. Припустимо, що (6.8) виконуються для $k = m - 1$. Якщо $k = m$, то із (6.2) отримуємо, що ${}^{\{2m\}}\big(f(Cz)\big) = \frac{2m}{({}^{\{2m-1\}}(f(Cz)))'} + {}^{\{2m-2\}}\big(f(Cz)\big) = \Big(\frac{2m}{({}^{\{2m-1\}}f(v))'} + {}^{\{2m-2\}}f(v)\Big)\Big|_{v=Cz} = = {}^{\{2m\}}f(Cz)\Big|_{v=Cz}$, ${}^{\{2m+1\}}\big(f(Cz)\big) = \frac{2m+1}{({}^{\{2m\}}(f(Cz)))'} + {}^{\{2m-1\}}(f(Cz)) = \Big(\frac{2m+1}{C({}^{\{2m-1\}}f(v))'} + \frac{1}{C} \cdot {}^{\{2m-1\}}f(v)\Big)\Big|_{v=Cz} = {}^{\{2m+1\}}f(v)\Big|_{v=Cz}$. Отже, (6.8) виконуються для довільного значення k. □

Зауваження 6.1. Для обернених похідних 2–го типу не мають місця властивості аналогічні властивостям (1.74) для обернених похідних Тіле, оскільки ${}^{\{0\}}(w+C)=\frac{1}{w+C}$, ${}^{\{1\}}(w+C)=\left(\frac{C+w}{w}\right)^2\cdot{}^{\{1\}}w$.

6.3. Формула типу Тіле

З співвідношення (3.23) маємо, що

$$b_0(z_*)=\lim_{z_0\to z_*}\rho_0^{(2)}[z_0;f]=\frac{1}{f(z_*)},\ b_1(z_*)=\lim_{z_0,z_1\to z_*}\rho_1[z_0,z_1;f]={}^{\{1\}}f(z_*),$$

$$b_k(z_*)=\lim_{z_0,\ldots,z_k\to z_*}\rho_k^{(2)}[z_0,z_1,\ldots,z_k;f]-\rho_{k-2}^{(2)}[z_0,z_1,\ldots,z_k;f]=\frac{k}{\left({}^{\{k-1\}}f(z_*)\right)'},$$

де $k\in\mathbb{N}_2$.

Якщо функція $f(z)$ в околі точки $z_*\in\mathcal{Z}$ має скінченні обернені похідні 2–го типу до n–го порядку включно, то функція може бути подана за допомогою формули типу Тіле

$$f(z)=\left(\frac{1}{f(z_*)}+\frac{z-z_*}{{}^{\{1\}}f(z_*)}+\frac{z-z_*}{2/\left({}^{\{1\}}f(z_*)\right)'}+\frac{z-z_*}{3/\left({}^{\{2\}}f(z_*)\right)'}+\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{z-z_*}{n/\left({}^{\{n-1\}}f(z_*)\right)'}+\frac{z-z_*}{R_n(z)}\right)^{-1}, \tag{6.9}$$

де згідно із (3.11) $R_n(z)=v_{n+1}(z)$.

Припустимо, що в деякому околі точки $z=z_*$ функція має нескінченну кількість відмінних від нуля обернених похідних 2–го типу. Отримаємо розвинення функції в околі точки $z=z_*$ в ланцюговий дріб

$$f(z)=\left(d_0(z_*)+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty}\frac{z-z_*}{d_k(z_*)}\right)^{-1}, \tag{6.10}$$

де

$$d_0(z_*)=\frac{1}{f(z_*)},\quad d_1(z_*)={}^{\{1\}}f(z_*), \tag{6.11а}$$

$$d_k(z_*)=\frac{k}{\left({}^{\{k-1\}}f(z_*)\right)'}={}^{\{k\}}f(z_*)-{}^{\{k-2\}}f(z_*),\qquad k\in\mathbb{N}_2. \tag{6.11б}$$

Ланцюговий дріб (6.10) назвемо квазі–оберненим ланцюговим дробом типу Тіле (Т–КЛД).

Зауваження 6.2. Т–КЛД (6.10) не буде в загальному випадку оберненим ланцюговим дробом до Т–ЛД (1.72) згідно із означенням 1.5. Якщо розглянути підхідні дроби $T_n(z)$ розвинення функції $f(z)$ в Т–ЛД та підхідні дроби $\tilde{T}_n(z)$ розвинення функції в Т–КЛД в околі $z = z_*$, то $T_0(z) = f(z_*)$, $\tilde{T}_0(z) = f(z_*)$, $T_1(z) = f(z_*) + f'(z_*)(z - z_*)$, $\tilde{T}_1(z) = \frac{f^2(z_*)}{f(z_*) - f'(z_*)(z - z_*)}$. Оскільки $T_0(z)\,\tilde{T}_0(z) = f^2(z_*)$, то тотожність $T_0(z)\,\tilde{T}_0(z) \equiv 1$ має місце тоді, коли $f(z_*) = \pm 1$. Аналогічно $T_1(z)\,\tilde{T}_1(z) = \frac{f^2(z_*)(f(z_*) + f'(z_*)(z - z_*))}{f(z_*) - f'(z_*)(z - z_*)}$. Тотожність $T_1(z)\,\tilde{T}_1(z) \equiv 1$ має місце, наприклад, тоді, коли $f(z_*) = 1$ і $f'(z_*) = 0$.

6.4. Зв'язок обернених похідних 2–го типу з похідними функції

Встановимо загальну формулу визначення обернених похідних 2–го типу через звичайні похідні.

Нехай елементи визначник Ганкеля $H_k^{(n)}(z_*)$ (1.48) рівні $c_n = \frac{f^{(n)}(z_*)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}$. У формулу (3.22) підставимо замість z_0 і z_1 відповідно z_* і $z_* + h$. У визначниках чисельника і знаменника віднімемо від елементів другого рядка елементи першого рядка, поділимо на h і перейдемо до границі. Далі у визначнику чисельника віднімемо від елементів другого стовпчика елементи першого стовпчика, помножені на z_*, та змінимо місцями другий та перший стовпчики. Визначник знаменника розвинемо за першим стовпчиком. Отримаємо

$$ {}^{\{1\}}f(z_*) = \rho_1[z_*, z_*] = -\lim_{h\to 0} \begin{vmatrix} f(z_*) & z_* f(z_*) \\ f(z_* + h) & (z_* + h)\, f(z_* + h) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & f(z_*) \\ 1 & f(z_* + h) \end{vmatrix} = $$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\begin{vmatrix} f(z_*) & z_* f(z_*) \\ \frac{f(z_*+h)-f(z_*)}{h} & z_*\frac{f(z_*+h)-f(z_*)}{h} + f(z_*+h) \end{vmatrix}}{-\begin{vmatrix} 1 & f(z_*) \\ 0 & \frac{f(z_*+h)-f(z_*)}{h} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} c_0 & z_*c_0 \\ c_1 & z_*c_1+c_0 \end{vmatrix}}{-\begin{vmatrix} 1 & c_0 \\ 0 & c_1 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{-\begin{vmatrix} c_0 & 0 \\ c_1 & c_0 \end{vmatrix}}{c_1} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & c_0 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix}}{c_1} = \frac{\left(H_2^{(-1)}(z_*)\right)^2}{H_1^{(1)}(z_*)}.$$

Аналогічно, у формулу (3.26) підставимо замість z_0 і z_1 відповідно z_* і z_*+h. В обох визначниках віднімемо елементи першого рядка від відповідних елементів другого рядка, потім поділимо на h чисельник і знаменник та спрямуємо h до нуля. В результат замість z_2 підставимо z_*+h, віднімемо в обох визначниках елементи першого рядка та елементи другого рядка помножені на h від елементів третього рядка, далі поділимо чисельник і знаменник на h^2 та спрямуємо h до нуля. У визначнику знаменника віднімемо елементи другого стовпця, помножені на z_*, від відповідних елементів третього стовпця і обидва визначники розвинемо за першим стовпцем. Потім визначник чисельника розвинемо за другим стовпцем, а у визначнику знаменника змінимо місцями стовпчики. В результаті маємо

$${}^{\{2\}}f(z_*) = \lim_{z_0,z_1,z_2\to z_*} \rho_2[z_0,z_1,z_2] = \lim_{z_0,z_1,z_2\to z_*} \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(z_0) & z_0 \\ 1 & f(z_1) & z_1 \\ 1 & f(z_2) & z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(z_0) & z_0 f(z_0) \\ 1 & f(z_1) & z_1 f(z_1) \\ 1 & f(z_2) & z_2 f(z_2) \end{vmatrix}} =$$

$$= \lim_{\substack{z_2\to z_* \\ h\to 0}} \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(z_*) & z_* \\ 1 & f(z_*+h) & z_*+h \\ 1 & f(z_2) & z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(z) & zf(z) \\ 1 & f(z_*+h) & (z_*+h)f(z_*+h) \\ 1 & f(z_2) & z_2 f(z_2) \end{vmatrix}} = \lim_{h\to 0} \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(z_*) & z_* \\ 0 & f'(z_*) & 1 \\ 1 & f(z_*+h) & z_*+h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(z_*) & z_* f(z_*) \\ 0 & f'(z_*) & z_* f'(z_*) + f(z_*) \\ 1 & f(z_*+h) & (z_*+h)f(z_*+h) \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & c_0 & z_* \\ 0 & c_1 & 1 \\ 0 & c_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & c_0 & z_* c_0 \\ 0 & c_1 & z_* c_1 + c_0 \\ 0 & c_2 & z_* c_2 + c_1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & c_0 & z_* \\ 0 & c_1 & 1 \\ 0 & c_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & c_0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_0 \\ 0 & c_2 & c_1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & 1 \\ c_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_0 \\ c_2 & c_1 \end{vmatrix}} = \frac{c_2}{\begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{H_1^{(2)}(z_*)}{H_2^{(0)}(z_*)}.$$

Подібним чином отримується співвідношення ${}^{\{3\}}f(z) = \frac{H_3^{(-1)}(z)}{H_2^{(1)}(z)}$.

Доведемо формулу у загальному випадку. Розглянемо два випадки: a) $k = 2n$; b) $k = 2n+1$.

a) Нехай $k = 2n$. Покладемо в обох визначниках (3.25) замість z_0 і z_1 відповідно z_* і $z_* + h$, віднімемо елементи першого рядка від відповідних елементів другого рядка, поділимо на h чисельник і знаменник та спрямуємо h до нуля; потім підставимо $z_* + h$ замість z_2, віднімемо в обох визначниках елементи першого рядка та елементи другого рядка помножені на h від елементів третього рядка, поділимо чисельник і знаменник на h^2 та спрямуємо h до нуля; і т. д.; на останньому кроці підставимо $z_* + h$ замість z_{2n}, віднімемо в обох визначниках елементи першого рядка, елементи другого рядка помножені на h, і т. д., елементи $(2n)$–го рядка помножені на h^{2n-1} від елементів $(2n+1)$–го рядка, поділимо чисельник і знаменник на h^{2n} та спрямуємо h до нуля. В результаті отримаємо

$${}^{\{2n\}}f(z_*) = \lim_{z_0, z_1, \ldots, z_{2n} \to z_*} \rho_{2n}[z_0, z_1, \ldots, z_{2n}] =$$

$$
= \begin{vmatrix}
1 & c_0 & z_* & z_* c_0 & \dots & z_*^{n-1} & z_*^{n-1} c_0 & z_*^n \\
0 & c_1 & 1 & z_* c_1 + c_0 & \dots & \binom{n-1}{1} z_*^{n-2} & \sum\limits_{i=0}^{1} \binom{n-1}{i} z_*^{n-1-i} c_{1-i} & \binom{n}{1} z_*^{n-1} \\
0 & c_2 & 0 & z_* c_2 + c_1 & \dots & \binom{n-1}{2} z_*^{n-3} & \sum\limits_{i=0}^{2} \binom{n-1}{i} z_*^{n-1-i} c_{2-i} & \binom{n}{2} z_*^{n-2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & c_{2n} & 0 & z_* c_{2n} + c_{2n-1} & \dots & 0 & \sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} z_*^{n-1-i} c_{2n-i} & 0
\end{vmatrix} :
$$

$$
: \begin{vmatrix}
1 & c_0 & z_* & z_* c_0 & \dots & z_*^{n-1} & z_*^{n-1} c_0 & z_*^n c_0 \\
0 & c_1 & 1 & z_* c_1 + c_0 & \dots & \binom{n-1}{1} z_*^{n-2} & \sum\limits_{i=0}^{1} \binom{n-1}{i} z_*^{n-1-i} c_{1-i} & \sum\limits_{i=0}^{1} \binom{n}{i} z_*^{n-i} c_{1-i} \\
0 & c_2 & 0 & z_* c_2 + c_1 & \dots & \binom{n-1}{2} z_*^{n-3} & \sum\limits_{i=0}^{2} \binom{n-1}{i} z_*^{n-1-i} c_{2-i} & \sum\limits_{i=0}^{2} \binom{n}{i} z_*^{n-i} c_{2-i} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & c_{2n} & 0 & z_* c_{2n} + c_{2n-1} & \dots & 0 & \sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} z_*^{n-1-i} c_{2n-i} & \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z_*^{n-i} c_{2n-i}
\end{vmatrix} .
$$

Приведемо формулу до більш простого вигляду. З цією метою у визначниках чисельника і знаменника від елементів четвертого стовпчика віднімемо елементи другого стовпчика помножені на z_*; потім від елементів шостого стовпчика віднімемо елементи другого стовпчика помножені на z_*^2 та елементи четвертого стовпчика помножені на $2z_*$; і т. д.; від елементів $(2n)$–го стовпчика віднімемо елементи другого стовпчика помножені на z_*^{n-1}, елементи четвертого стовпчика помножені на $\binom{n-1}{1} z_*^{n-2}$, і т. д., елементи $(2n-2)$–го стовпчика помножені на $\binom{n-1}{n-2} z_*$. У визначнику знаменника, крім того, від елементів $(2n+1)$–го стовпчика віднімемо елементи другого стовпчика помножені на z_*^n, елементи четвертого стовпчика помножені на $\binom{n}{1} z_*^{n-1}$, і т. д., елементи $(2n)$–го стовпчика помножені на $\binom{n}{n-1} z_*$. Обернена похідна 2–го типу парного порядку буде рівна

$$
{}^{\{2n\}}f(z_*) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & c_0 & z_* & 0 & z_*^2 & \dots & z_*^{n-1} & 0 & z_*^n \\ 0 & c_1 & 1 & c_0 & 2z_* & \dots & \binom{n-1}{1} z_*^{n-2} & 0 & \binom{n}{1} z_*^{n-1} \\ 0 & c_2 & 0 & c_1 & 1 & \dots & \binom{n-1}{2} z_*^{n-3} & 0 & \binom{n}{2} z_*^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{2n} & 0 & c_{2n-1} & 0 & \dots & 0 & c_{n+1} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & c_0 & z_* & 0 & z_*^2 & \dots & z_*^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 1 & c_0 & 2z_* & \dots & \binom{n-1}{1} z_*^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & c_1 & 1 & \dots & \binom{n-1}{2} z_*^{n-3} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{2n} & 0 & c_{2n-1} & 0 & \dots & 0 & c_{n+1} & c_n \end{vmatrix}}.
$$

Розвинемо визначники за першим стовпчиком; далі результат розвинемо за другим стовпчиком і т.д. В обох визначниках процедуру розвинення повторимо n разів. Насамкінець визначник чисельника розвинемо за останнім стовпчиком. Маємо, що

$$
{}^{\{2n\}}f(z_*) = (-1)^n \begin{vmatrix} c_{n+1} & c_n & \dots & c_3 & c_2 \\ c_{n+2} & c_{n+1} & \dots & c_4 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{2n} & c_{2n-1} & \dots & c_{n+2} & c_{n+1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_n & c_{n-1} & \dots & c_1 & c_0 \\ c_{n+1} & c_n & \dots & c_2 & c_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{2n} & c_{2n-1} & \dots & c_{n+1} & c_n \end{vmatrix}.
$$

У визначниках чисельника та знаменника переставимо місцями перший стовпець та останній, другий та передостанній і т. д. В чисельнику буде здійснено $[n/2]$ перестановок стовпців, а у знаменнику — $[(n+1)/2]$ перестановок стовпців, тобто, загальна кількість перестановок рівна n. Кінцеве отримуємо співвідношення

$$ {}^{\{2n\}}f(z_*) = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_n & c_{n+1} \\ c_3 & c_4 & \dots & c_{n+1} & c_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n-1} & c_{2n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} & c_{2n} \end{vmatrix} = \frac{H_n^{(2)}(z_*)}{H_{n+1}^{(0)}(z_*)}. $$

b) Нехай $k = 2n + 1$. Повторивши міркування аналогічні попередньому випадку отримаємо

$$ {}^{\{2n+1\}}f(z_*) = \begin{vmatrix} 0 & c_0 & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_0 & c_1 & \dots & c_n & c_{n+1}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_n(z) & c_{n+1} & \dots & c_{2n} & c_{2n+1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n & c_{n+1} \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} & c_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n} & c_{2n+1} \end{vmatrix}, $$

$$ {}^{\{2n+1\}}f(z_*) = \frac{H_{n+2}^{(-1)}(z_*)}{H_{n+1}^{(1)}(z_*)}. $$

Таким чином доведено наступне твердження.

Теорема 6.8. *Обернені похідні 2–го типу функції $f(z)$ в точці $z_* \in \mathcal{Z}$ визначаються через звичайні похідні цієї функції як відношення визначників Ганкеля наступним чином*

$$ {}^{\{2n\}}f(z_*) = \frac{H_n^{(2)}(z_*)}{H_{n+1}^{(0)}(z_*)}, \quad {}^{\{2n-1\}}f(z_*) = \frac{H_{n+1}^{(-1)}(z_*)}{H_n^{(1)}(z_*)}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{6.12} $$

Із теореми 6.8 як наслідок випливає твердження.

Теорема 6.9. ***(A)*** *Якщо визначники Ганкеля $H_{n+1}^{(0)}(z_*) \neq 0, H_n^{(2)}(z_*) \neq$ $\neq 0$, то аналітична функція $f(z)$ в точці z_* має скінченну обернену похідну 2–го типу $(2n)$–го порядку, яка обчислюється за формулою (6.12); якщо $H_{n+1}^{(0)}(z_*) \neq 0, H_n^{(2)}(z_*) = 0$, то ${}^{\{2n\}}f(z_*) = 0$; якщо $H_{n+1}^{(0)}(z_*) = 0$, $H_n^{(2)}(z_*) \neq 0$, то ${}^{\{2n\}}f(z_*) = \infty$.*

(B) *Якщо ганкелеві визначники $H_{n+1}^{(-1)}(z_*) \neq 0, H_n^{(1)}(z_*) \neq 0$, то аналітична функція $f(z)$ в точці z_* має скінченну обернену похідну 2–го типу*

$(2n-1)$–го порядку, яка визначається за формулою (6.12)*; якщо* $H_n^{(1)}(z_*) \neq$ $\neq 0, H_{n+1}^{(-1)}(z_*) = 0$*, то* ${}^{\{2n-1\}}f(z_*) = 0$*; якщо* $H_n^{(1)}(z_*) = 0, H_{n+1}^{(-1)}(z_*) \neq 0$*, то* ${}^{\{2n-1\}}f(z_*) = \infty$.

Теорема 6.10. *Коефіцієнти формули типу Тіле* (6.9) *визначаються через ганкелеві визначники наступним чином*

$$
\begin{aligned}
&d_0(z_*) = \frac{1}{H_1^{(0)}(z_*)}, \quad d_1(z_*) = \frac{-\big(H_1^{(0)}(z_*)\big)^2}{H_1^{(1)}(z_*)},\\
&d_{2k}(z_*) = \frac{\big(H_k^{(1)}(z_*)\big)^2}{H_{k+1}^{(0)}(z_*)H_k^{(0)}(z_*)}, \; d_{2k+1}(z_*) = \frac{-\big(H_{k+1}^{(0)}(z_*)\big)^2}{H_{k+1}^{(1)}(z_*)\,H_k^{(1)}(z_*)}, \; k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

Доведення. Формули для коефіцієнтів $d_0(z_*)$ та $d_1(z_*)$ випливають безпосередньо з формули (6.11а). Із співвідношення (6.11б), (6.12) та тотожності Якобі (5.5) маємо, що

$$
d_{2k}(z_*) = \frac{2k}{\big({}^{\{2k-1\}}f(z_*)\big)'} = \frac{H_k^{(2)}(z_*)}{H_{k+1}^{(0)}(z_*)} - \frac{H_{k-1}^{(2)}(z_*)}{H_k^{(0)}(z_*)} =
$$

$$
= \frac{H_k^{(0)}(z_*)H_k^{(2)}(z_*) - H_{k+1}^{(0)}(z_*)H_{k-1}^{(2)}(z_*)}{H_{k+1}^{(0)}(z_*)H_k^{(0)}(z_*)} = \frac{\big(H_k^{(1)}(z_*)\big)^2}{H_{k+1}^{(0)}(z_*)H_k^{(0)}(z_*)},
$$

та $$d_{2k+1}(z_*) = \frac{2k+1}{\big({}^{\{2k\}}f(z_*)\big)'} = \frac{H_{k+2}^{(-1)}(z_*)}{H_{k+1}^{(1)}(z_*)} - \frac{H_{k+1}^{(-1)}(z_*)}{H_k^{(1)}(z_*)} = \frac{-\,\big(H_{k+1}^{(0)}(z_*)\big)^2}{H_{k+1}^{(1)}(z_*)H_k^{(1)}(z_*)}. \qquad \square$$

6.5. Взаємозв'язок обернених похідних 2–го типу та обернених похідних Тіле

Із формул (5.4) та (6.12) безпосередньо випливає, що між оберненими похідними 2-го типу та оберненими похідними Тіле функції парного порядку має місце взаємозв'язок ${}^{\{2n\}}f(z_*) = 1/{}^{(2n)}f(z_*)$.

Що стосується похідних непарних порядків, то таке співвідношення буде мати нелінійний вигляд. Так в роботі автора [81] показано, що ${}^{\{1\}}f(z_*) =$ $= -f^2(z_*){}^{(1)}f(z_*)$, ${}^{\{3\}}f(z_*) = -({}^{(3)}f(z_*) - {}^{(1)}f(z_*))({}^{(2)}f(z_*))^2 - f^2(z_*) \cdot {}^{(1)}f(z_*)$.

Якщо розглядати загальний випадок, то можна розвинути визначник Ганкеля $H_{n+2}^{(-1)}(z_*)$, який міститься в чисельнику (6.12), за правилом Лапласа в суму добутків мінорів, які знаходяться в перших двох стовпцях, на їх алгебричні доповнення [39, с. 51], тобто

$$H_{n+2}^{(-1)}(z_*) = \begin{vmatrix} 0 & c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n} \\ c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & c_{n+3} & \dots & c_{2n+1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & c_0 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_3 & c_4 & \dots & c_{n+2} \\ c_4 & c_5 & \dots & c_{n+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n} \\ c_{n+2} & c_{n+3} & \dots & c_{2n+1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & c_0 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ c_4 & c_5 & \dots & c_{n+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n} \\ c_{n+2} & c_{n+3} & \dots & c_{2n+1} \end{vmatrix} +$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} c_{n-1} & c_n \\ c_n & c_{n+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-2} \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Позначимо через

$$G(z_*) = - \begin{vmatrix} 0 & c_0 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ c_4 & c_5 & \dots & c_{n+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+2} & c_{n+3} & \dots & c_{2n+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & c_0 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ c_3 & c_4 & \dots & c_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+2} & c_{n+3} & \dots & c_{2n+1} \end{vmatrix} -$$

$$-\begin{vmatrix} 0 & c_0 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ c_3 & c_4 & \dots & c_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+2} & c_{n+3} & \dots & c_{2n+1} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} c_{n-1} & c_n \\ c_n & c_{n+1} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Тоді звідси та із формул (5.4) і (6.12) випливає, що

$$^{\{2n+1\}}f(z_*) = -c_0^2\frac{H_n^{(3)}(z_*)}{H_{n+1}^{(1)}(z_*)} + \frac{G(z_*)}{H_{n+1}^{(1)}(z_*)} = -f^2(z_*)\cdot{}^{(2n+1)}f(z_*) + \frac{G(z_*)}{H_{n+1}^{(1)}(z_*)}.$$

Отже, в загальному випадку обернена похідна 2–го типу функції непарного порядку суттєво відрізняється від оберненої похідної Тіле функції того ж порядку і співвідношення між ними нелінійне.

6.6. Теореми про обернену похідну 2–го типу многочлена та раціональної функції

Теорема 6.11. *Обернена похідна 2–го типу $(2n)$–го порядку многочлена $p_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, n \in \mathbb{N}$, тотожно рівна нулю.*

Доведення. З формули (6.18) для $n = 1$ випливає, що теорема вірна. Якщо вибрати деяке значення $z_* \in \mathcal{Z}$, то в загальному випадку з формул (6.12) маємо, що $^{\{2n\}}p_n(z_*) = H_n^{(2)}(z_*)/H_{n+1}^{(0)}(z_*)$, $n \in \mathbb{N}_2$. Так як у випадку многочлена n–го порядку $c_{n+1}(z_*) = \dots = c_{2n}(z_*) = 0$, то останній стовпчик ганкелевого визначника $H_n^{(2)}(z_*)$ містить лише нулі, а отже $H_n^{(2)}(z_*) \equiv 0$. В той же час останній стовпчик ганкелевого визначника $H_n^{(0)}(z_*)$ буде містити один не нульовий елемент $c_n(z_*) = a_n n!$, а отже цей визначник нулю не рівний. Звідси маємо, що $^{\{2n\}}p_n(z_*) \equiv 0$ для довільного значення $z_* \in \mathcal{Z}$. □

Теорема 6.12. *Нехай на $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ задана раціональна функція $R_{m,n}(z) = p_m(z)/q_n(z)$, де $p_m(z)$ та $q_n(z)$ є многочлени відповідно степенів m та n, $m < n$, многочлен $q_n(z)$ не має коренів в $\mathcal{Z}$. Обернена похідна 2–го типу $(2n-1)$–го порядку раціональної функції $R_{m,n}(z)$ тотожно дорівнює нулеві для всіх $z \in \mathcal{Z}$.*

Доведення. Нехай $z_* \in \mathcal{Z}$. а) У випадку, коли $R_{0,n}(z) = A/(z-\alpha)^n$, то згідно теорем 6.4 та 6.14 маємо, що ${}^{\{2n-1\}}R_{0,n}(z_*) \equiv 0$.

б) Якщо $R_{m,n}(z) = p_m(z)/(z-\alpha)^n$, то функція може бути подана у вигляді суми простих дробів наступним чином

$$R_{m,n}(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(z-\alpha)^i}.$$

Згідно із формулами (6.12) маємо: ${}^{\{2n-1\}}R_{m,n}(z_*) = H_{n+1}^{(-1)}(z_*)/H_n^{(1)}(z_*)$. Елементи ганкелевих визначників $H_{n+1}^{(-1)}(z_*)$ та $H_n^{(1)}(z_*)$ складаються із елементів, які визначаються за формулою (5.7). Згідно з теоремою 5.13 отримуємо, що $H_{n+1}^{(-1)}(z_*) = 0$. Водночас $H_n^{(0)}(z_*) \neq 0$. А тоді ${}^{\{2n-1\}}R_{m,n}(z_*) \equiv 0$.

в) В загальному випадку довільну раціональну функцію $R_{m,n}$ можна розвинути у суму простих дробів, тобто подати у вигляді (5.8). Елементи визначників $H_{n+1}^{(-1)}(z_*)$ та $H_n^{(0)}(z_*)$ визначаються за (5.9).

Визначник Ганкеля $\mathcal{H} = H_{n+1}^{(-1)}(z_0)$ в цьому випадку буде мати вигляд

$$\mathcal{H} = \begin{vmatrix} 0 & \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{a_{i_s}^{(s)}}{(z_*-\alpha_s)^{i_s}} & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{(-1)^n(i_s)_n a_{i_s}^{(s)}}{n!(z_*-\alpha_s)^{i_s+n}} \\ \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{a_{i_s}^{(s)}}{(z_*-\alpha_s)^{i_s}} & \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{-i_s a_{i_s}^{(s)}}{(z_*-\alpha_s)^{i_s+1}} & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{(-1)^{n+1}(i_s)_{n+1} a_{i_s}^{(s)}}{(n+1)!(z_*-\alpha_s)^{i_s+n+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{(-1)^n(i_s)_n a_{i_s}^{(s)}}{n!(z_*-\alpha_s)^{i_s+n}} & \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{(-1)^{n+1}(i_s)_{n+1} a_{i_s}^{(s)}}{(n+1)!(z_*-\alpha_s)^{i_s+n+1}} & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{(-1)^{2n+1}(i_s)_{2n+1} a_{i_s}^{(s)}}{(2n+1)!(z_*-\alpha_s)^{i_s+2n+1}} \end{vmatrix},$$

де $(i_s)_n$— символ Похгаммера.

Оскільки кожний стовпчик визначника $\mathcal{H}$ містить n доданків, то такий визначник буде рівний сумі n визначників, які відрізняються лише елементами першого стовпчика. Кожен із отриманих визначників можна розвинути у суму n визначників, які будуть відрізнятися лише елементами другого стовпчика. В результаті будемо мати n визначників. Продовжуючи подібні розвинення за третім, четвертим, і т.д., $(n+2)$–м стовпчиком в решті решт отримаємо n^{n+2} визначників, які будуть містити лише по одному доданку із суми кожного стовпця визначника $\mathcal{H}$.

Виберемо один із таких визначників

$$\tilde{\mathcal{H}}_{n+1}^{(-1)} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{b_{j_1}^{(0)}}{(z_*-\beta_1)^{j_1}} & \dots & \binom{j_n+n-1}{n}\frac{(-1)^n b_{j_n}^{(n)}}{(z_*-\beta_n)^{j_n+n}} \\ \frac{b_{j_0}^{(0)}}{(z_*-\beta_0)^{j_0}} & \binom{j_1}{1}\frac{-b_{j_1}^{(1)}}{(z_*-\beta_1)^{j_1+1}} & \dots & \binom{j_n+n}{n+1}\frac{(-1)^{n+1} b_{j_n}^{(n)}}{(z_*-\beta_n)^{j_n+n+1}} \\ \binom{j_0}{1}\frac{-b_{j_0}^{(0)}}{(z_*-\beta_0)^{j_0+1}} & \binom{j_1+1}{2}\frac{b_{j_1}^{(1)}}{(z_*-\beta_1)^{j_1+2}} & \dots & \binom{j_n+n+1}{n+2}\frac{(-1)^{n+2} b_{j_n}^{(n)}}{(z_*-\beta_n)^{j_n+n+2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{j_0+n-1}{n}\frac{(-1)^n b_{j_0}^{(0)}}{(z_*-\beta_0)^{j_0+n}} & \binom{j_1+n}{n+1}\frac{(-1)^{n+1} b_{j_1}^{(1)}}{(z_*-\beta_1)^{j_1+n+1}} & \dots & \binom{j_n+2n}{2n+1}\frac{(-1)^{2n+1} b_{j_n}^{(n)}}{(z_*-\beta_n)^{j_n+2n+1}} \end{vmatrix},$$

де $\beta_t \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}, t = \overline{0,n}$, а j_t приймає деяке із можливих своїх значень, які відповідні β_t, тобто, якщо $\beta_t = \alpha_s$, то $1 \leqslant j_t \leqslant l_s$, $b_{j_t}^{(t)} = a_{j_t}^{(s)}$.

Оскільки визначник $\tilde{\mathcal{H}}_{n+1}^{(-1)}$ містить $(n+2)$–а стовпці, а знаменник q_n має r різних коренів, $1 \leqslant r \leqslant n$, то принаймні два β_t будуть приймати однакові значення. В кожному такому визначнику містять стовпці, які відповідають одному і тому кореню α_s і кількість таких стовпців більша за кратність кореня l_s. Ці стовпці будуть лінійно залежними, а тоді згідно із наслідком 5.1 кожен такий визначник буде рівний нулю. Визначник $H_{n+1}^{(-1)}(z_*)$ рівний нулю як сума визначників, кожен з яких рівний нулю. Тоді з (6.12) випливає, що ${}^{\{2n-1\}}R_{m,n}(z_*) \equiv 0$. $\square$

6.7. Розвинення функцій в квазі–обернений ланцюговий дріб типу Тіле

Розглянемо розвинення функцій комплексної змінної у Т–КЛД.

6.7.1. Функція e^z.

Доведемо наступну теорему.

Теорема 6.13. *Функція e^z має обернені похідні 2–го типу довільного порядку, які обчислюються за формулами*

$$^{\{2n\}}e^z = (-1)^n e^{-z}, \quad ^{\{2n+1\}}e^z = (-1)^{n+1}(n+1)\,e^z, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \qquad (6.14)$$

Доведення. Легко бачити, що ${}^{\{0\}}e^z = e^{-z}$, ${}^{\{1\}}e^z = -e^z$, ${}^{\{2\}}e^z = -e^{-z}$, ${}^{\{3\}}e^z = 2e^z$. Отже, для $n = 0, 1$ формули (6.14) мають місце. Припустимо, що вони виконуються для $n = k$. Тоді для $n = k+1$ із формули (6.2) маємо ${}^{\{2k+2\}}e^z = \dfrac{2(k+1)}{\left({}^{\{2k+1\}}e^z\right)'} + {}^{\{2k\}}e^z = (-1)^{k+1}e^{-z}$. ${}^{\{2k+3\}}e^z = \dfrac{2k+3}{\left({}^{\{2k+2\}}e^z\right)'} + {}^{\{2k+1\}}e^z = (-1)^{k+2}(k+2)e^z$. Отже, формула виконується і в цьому випадку. □

Із (6.14) випливає, що коефіцієнти розвинення функції в Т–КЛД будуть рівні $d_{2n}(z_*) = (-1)^n 2e^{-z_*}$, $d_{2n+1}(z_*) = (-1)^{n+1}(2n+1)e^{z_*}$, $n \in \mathbb{N}$.

Отримаємо розвинення функції e^z в околі точки $z = z_*$ в Т–КЛД

$$e^z = \frac{1}{e^{-z_*}} + \frac{z-z_*}{-e^{z_*}} + \frac{z-z_*}{-2e^{-z_*}} + \frac{z-z_*}{3e^{z_*}} + \frac{z-z_*}{2e^{-z_*}} + \frac{z-z_*}{-5e^{z_*}} + \frac{z-z_*}{-2e^{-z_*}} + \cdots + \frac{z-z_*}{(-1)^k\, 2e^{-z_*}} + \frac{z-z_*}{(-1)^{k+1}\,(2k+1)e^{z_*}} + \cdots,$$

яке після еквівалентних перетворень набуває вигляду

$$e^z = \frac{e^{z_*}}{1} + \frac{z-z_*}{-1} + \frac{z-z_*}{-2} + \frac{z-z_*}{3} + \frac{z-z_*}{2} + \frac{z-z_*}{-5} + \frac{z-z_*}{-2} + \cdots + \frac{z-z_*}{(-1)^k\, 2} + \frac{z-z_*}{(-1)^{k+1}\,(2k+1)} + \cdots. \tag{6.15}$$

Зокрема для $z_* = 0$ маємо розвинення функції e^z у Т–КЛД

$$e^z = \frac{1}{1} + \frac{z}{-1} + \frac{z}{-2} + \frac{z}{3} + \frac{z}{2} + \cdots + \frac{z}{(-1)^n 2} + \frac{z}{(-1)^{n+1}(2n+1)} + \cdots,$$

яке збігається із відомим розвиненням функції [152, с. 112].

6.7.2. Функція $(c+z)^\alpha$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 6.14. ***(A)*** *Якщо $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, c— комплексна стала, то функція $(c+z)^\alpha$ має обернені похідні 2–го типу довільного порядку, які обчислюються за формулами*

$${}^{\{2n\}}(c+z)^\alpha = \frac{\prod\limits_{m=1}^{n}(m-\alpha)}{\prod\limits_{m=1}^{n}(m+\alpha)}(c+z)^{-\alpha}, \tag{6.16}$$

$$ {}^{\{2n+1\}}(c+z)^{\alpha} = \frac{(n+1)\prod\limits_{m=2}^{n+1}(m+\alpha)}{\prod\limits_{m=0}^{n}(m-\alpha)}(c+z)^{\alpha+1}, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{6.17} $$

(B) *Функція* $(c+z)^n, n \in \mathbb{N}$, *має обернені похідні 2–го типу до* $(2n)$–*го порядку включно, які визначаються за формулами* (6.16)–(6.17) *і крім того*

$$ {}^{\{2n\}}(c+z)^n = 0. \tag{6.18} $$

(C) *Функція* $(c+z)^{-n}, n \in \mathbb{N}$, *має обернені похідні 2–го типу до* $(2n-1)$–*го порядку включно, які визначаються за* (6.16)–(6.17) *і крім того*

$$ {}^{\{2n-1\}}(c+z)^{-n} = 0. \tag{6.19} $$

Доведення. **(A)** Формули (6.16)–(6.17) доведемо за індукцією. Із означення оберненої похідної 2–го типу та формул (6.2) маємо, що

$$ {}^{\{0\}}(c+z)^{\alpha} = (c+z)^{-\alpha}, \quad {}^{\{1\}}(c+z)^{\alpha} = \frac{(c+z)^{2\alpha}}{(-\alpha)(c+z)^{\alpha-1}} = \frac{1}{(-\alpha)}(c+z)^{1+\alpha}, $$

$$ {}^{\{2\}}(c+z)^{\alpha} = \frac{2(-\alpha)}{((c+z)^{\alpha+1})'} + \frac{1}{(c+z)^{\alpha}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}(c+z)^{-\alpha}, $$

$$ {}^{\{3\}}(c+z)^{\alpha} = \frac{3(1+\alpha)}{(1-\alpha)((c+z)^{-\alpha})'} + \frac{1}{(-\alpha)}(c+z)^{1+\alpha} = \frac{2(2+\alpha)}{(-\alpha)(1-\alpha)}(c+z)^{\alpha+1}. $$

Отже, для $n = 0, 1$ формули (6.16)–(6.17) виконуються. Зробимо припущення, що вони мають місце для $n = k$. Тоді для $n = k+1$ із рекурентних співвідношень (6.2) маємо

$$ {}^{\{2(k+1)\}}(c+z)^{\alpha} = \frac{2\prod_{m=0}^{k}(m-\alpha)}{\prod_{m=1}^{k+1}(m+\alpha)}(c+z)^{-\alpha} + \frac{\prod_{m=1}^{k}(m-\alpha)}{\prod_{m=1}^{k}(m+\alpha)}(c+z)^{-\alpha} = $$

$$ = \frac{\prod_{m=1}^{k+1}(m-\alpha)}{\prod_{m=1}^{k+1}(m+\alpha)}(c+z)^{-\alpha}, $$

$$ {}^{\{2(k+1)+1\}}(c+z)^{\alpha} = \frac{(2k+3)\prod_{m=1}^{k+1}(m+\alpha)}{\prod_{m=0}^{k+1}(m-\alpha)}(c+z)^{\alpha+1} + $$

$$+\frac{(k+1)\prod_{m=2}^{k+1}(\alpha+m)}{\prod_{m=0}^{k}(m-\alpha)}(c+z)^{\alpha+1}=\frac{(k+2)\prod_{m=2}^{k+2}(\alpha+m)}{\prod_{m=0}^{k+1}(\alpha-m)}(c+z)^{\alpha+1}.$$

Формули (6.16)–(6.17) виконуються і в цьому випадку.

Твердження теореми **(B)** та **(C)**, а також формули (6.18)–(6.19) безпосередньо випливають із **(A)** відповідно для $\alpha=n$ та $\alpha=-n$. □

Із формул (6.11) та (6.16)–(6.17) отримуємо, що коефіцієнти розвинення функції $(c+z)^\alpha$ в Т–КЛД в околі точки $z=z_*$ рівні:

$$\begin{aligned} &d_0(z_*)=(c+z_*)^{-\alpha}, \quad d_1(z_*)=\frac{(c+z_*)^{\alpha+1}}{-\alpha},\\ &d_{2n}(z_*)=\frac{2\prod_{m=0}^{n-1}(m-\alpha)}{\prod_{m=1}^{n}(m+\alpha)}(c+z_*)^{-\alpha}, \qquad n\in\mathbb{N},\\ &d_{2n+1}(z_*)=\frac{(2n+1)\prod_{m=1}^{n}(m+\alpha)}{\prod_{m=0}^{n}(m-\alpha)}(c+z_*)^{\alpha+1}. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Після еквівалентних перетворень маємо розвинення функції в Т–КЛД

$$\begin{aligned} (c+z)^\alpha=&\frac{\mathfrak{z}^\alpha}{1}\,{+}\,\frac{(-\alpha)(z-z_*)}{\mathfrak{z}}\,{+}\,\frac{(1+\alpha)(z-z_*)}{2}\,{+}\,\frac{(1-\alpha)(z-z_*)}{3\mathfrak{z}}\,{+}\\ &+\frac{(2+\alpha)(z-z_*)}{2}\,{+}\,\frac{(2-\alpha)(z-z_*)}{5\mathfrak{z}}\,{+}\,\frac{(3+\alpha)(z-z_*)}{2}\,{+}\,\frac{(3-\alpha)(z-z_*)}{7\mathfrak{z}}\,{+}\\ &+\cdots+\frac{(n+\alpha)(z-z_*)}{2}\,{+}\,\frac{(n-\alpha)(z-z_*)}{(2n+1)\mathfrak{z}}\,{+}\cdots, \quad \mathfrak{z}=c+z_*. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Якщо $c=1, z_*=0$, то маємо розвинення функції $(1+z)^\alpha$ в Т–КЛД в околі точки $z=0$

$$\begin{aligned} (1+z)^\alpha=&\frac{1}{1}\,{+}\,\frac{(-\alpha)z}{1}\,{+}\,\frac{(1+\alpha)z}{2}\,{+}\,\frac{(1-\alpha)z}{3}\,{+}\,\frac{(2+\alpha)z}{2}\,{+}\\ &\frac{(2-\alpha)z}{5}\,{+}\,\frac{(3+\alpha)z}{2}\,{+}\,\frac{(3-\alpha)z}{7}\,{+}\cdots{+}\,\frac{(n+\alpha)z}{2}\,{+}\,\frac{(n-\alpha)z}{(2n+1)}\,{+}\cdots. \end{aligned}$$

В книзі [152, с. 101] дане розвинення отримано за допомогою методу Лагранжа знаходження розв'язку диференціального рівняння Ріккаті.

6.7.3. Функція $\ln(c+z)$. Спочатку доведемо одне допоміжне твердження. Нехай задана псі–функція

$$\psi(z) = \frac{d\ln\Gamma(z)}{d\,z} = -\gamma + (z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+z)},$$

де γ є стала Ойлера.

Теорема 6.15. *Нехай $C = const$. Для довільного $n \in \mathbb{N}$ має місце співвідношення*

$$\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)(C+\psi(k+1))(1+C+\psi(k+1)) = n^2(C+\psi(n))(C+\psi(n+1)).$$

Доведення. Співвідношення теореми доведемо за індукцією. При $n=1$ співвідношення тривіальне. При $n=2$ маємо

$$(C+\psi(1))(1+C+\psi(1)) + 3(C+\psi(2))(1+C+\psi(2)) =$$

$$= (C+\psi(2)-1)(C+\psi(2)) + 3(C+\psi(2))(1+C+\psi(2)) =$$

$$= (C+\psi(2))(4(C+\psi(2))+2)) = 2^2(C+\psi(2))(C+\psi(3)).$$

Припустимо, що твердження теореми виконується для $n=s$. Тоді для $n=s+1$ маємо

$$\sum_{k=0}^{s}(2k+1)(C+\psi(k+1))(1+C+\psi(k+1)) = \sum_{k=0}^{s-1}(2k+1)(C+\psi(k+1))(1+C+$$

$$+\psi(k+1)) + (2s+1)(C+\psi(s+1))(1+C+\psi(s+1)) =$$

$$= s^2(C+\psi(s))(C+\psi(s+1)) + (2s+1)(C+\psi(s+1))(1+C+\psi(s+1)) =$$

$$= (C+\psi(s+1))(s^2(C+\psi(s+1)-\tfrac{1}{s}) + (2s+1)+$$

$$+(2s+1)(C+\psi(s+1))) = (s+1)^2(C+\psi(s+1))(C+\psi(s+2)).$$

Отже, співвідношення вірне для довільному n. $\square$

Теорема 6.16. *Функція* $\ln(c+z)$, *де* $c \neq 0$ — *стала,* $z \neq -c$, *має обернені похідні 2–го типу довільного порядку, які обчислюються за формулами*

$$^{\{2n\}}\ln(c+z) = \frac{1}{2\,H_n + \ln(c+z)}, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{6.22}$$

$$^{\{2n+1\}}\ln(c+z) = -(c+z)\sum_{m=0}^{n}(2m+1)\big(2\,H_m + \ln(c+z)\big)^2. \tag{6.23}$$

Доведення. Використаємо метод повної математичної індукції. Коли $n = 0, 1$, то з рекурентних формул (6.2) маємо, що

$$^{\{0\}}\ln(c+z) = \frac{1}{2H_0 + \ln(c+z)}, \quad ^{\{1\}}\ln(c+z) = -(c+z)(2H_0 + \ln(c+z))^2,$$

$$^{\{2\}}\ln(c+z) = \frac{1}{2H_1 + \ln(c+z)}, \, ^{\{3\}}\ln(c+z) = -(c+z)\sum_{m=0}^{1}(2n+1)(2H_m + \ln(c+z))^2.$$

Формули вірні. Зробимо припущення, що для $n = l$ формули (6.22)–(6.23) виконуються. Тоді

$$^{\{2l+2\}}\ln(c+z) = \frac{2l+2}{\left(^{\{2l+1\}}\ln(c+z)\right)'} + {}^{\{2l\}}\ln(c+z) = \frac{1}{2H_l + \ln(c+z)} +$$

$$+\frac{-2(l+1)}{\sum_{m=0}^{l}(2m+1)(2H_m + \ln(c+z))(2H_m + \ln(c+z) + 2)}.$$

Застосуємо теорему 6.15 до знаменника другого дробу, маємо

$$^{\{2l+2\}}\ln(c+z) = \frac{-2/(l+1)}{(2H_l + \ln(c+z))(2H_{l+1} + \ln(c+z))} +$$

$$+\frac{1}{2H_l + \ln(c+z)} = \frac{1}{2H_{l+1} + \ln(c+z)}\,.$$

В свою чергу

$$^{\{2l+3\}}\ln(c+z) = \frac{2l+3}{\left(^{\{2l+2\}}\ln(c+z)\right)'} + {}^{\{2l+1\}}\ln(c+z) =$$

$$= -(c+z)(2l+3)\big(2H_{l+1} + \ln(c+z)\big)^2 - (c+z)\sum_{m=0}^{l}(2m+1)\big(2H_m + \ln(c+z)\big)^2 =$$

$$= -(c+z)\sum_{m=0}^{l+1}(2m+1)\big(2H_m+\ln(c+z)\big)^2.$$

Формули (6.22)–(6.23) виконуються для $n = l+1$. $\square$

Із співвідношень (6.22)–(6.23) безпосередньо випливає, що коефіцієнти розвинення функції $\ln(c+z)$ в ланцюговий дріб (6.10) в околі точки $z = z_*$ будуть рівні

$$\begin{aligned}
&d_0(z_*) = \frac{1}{\ln(c+z_*)}, \quad d_1 = -(c+z_*)\ln^2(c+z_*),\\
&d_{2n}(z_*) = \frac{-2}{n\big(2H_{n-1}+\ln(c+z_*)\big)\big(2H_n+\ln(c+z_*)\big)},\\
&d_{2n+1}(z_*) = -(c+z_*)(2n+1)\big(2H_n+\ln(c+z_*)\big)^2, \qquad n\in\mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Маємо розвинення функції $\ln(c+z)$ в Т–КЛД

$$\ln(c+z) = \left(\frac{1}{\ln(c+z_*)} + \frac{z-z_*}{-(c+z_*)\ln^2(c+z_*)} + \frac{z-z_*}{\frac{-2}{\ln(c+z)(2H_1+\ln(c+z))}} + \right.$$
$$+ \frac{z-z_*}{-(c+z_*)(2H_1+\ln(c+z_*))^2} + \frac{z-z_*}{\frac{-1}{(2H_1+\ln(c+z_*))(2H_2+\ln(c+z_*))}} + \dots +$$
$$\left. + \frac{z-z_*}{\frac{-2/k}{(2H_{k-1}+\ln(c+z_*))(2H_k+\ln(c+z_*))}} + \frac{z-z_*}{-(c+z_*)(2k+1)(2H_k+\ln(c+z_*))^2} + \dots\right)^{-1}.$$

Зробимо позначення

$$\mathfrak{z} = c+z_*,\ S_{-1}^* = 1,\ S_0^* = \ln\mathfrak{z},\ S_n^* = 2H_n+\ln\mathfrak{z}, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{6.25}$$

Тоді після еквівалентних перетворень розвинення запишеться у вигляді

$$\ln(c+z) = \frac{S_0^*}{1} - \frac{(z-z_*)S_{-1}^*}{\mathfrak{z}S_0^*} + \frac{(z-z_*)S_1^*}{2} + \frac{(z-z_*)S_0^*}{3\mathfrak{z}S_1^*} + \frac{(z-z_*)S_2^*}{1} +$$
$$+ \frac{(z-z_*)S_1^*}{5\mathfrak{z}S_2^*} + \dots + \frac{(z-z_*)S_n^*}{2/n} + \frac{(z-z_*)S_{n-1}^*}{(2n+1)\mathfrak{z}S_n^*} + \dots. \tag{6.26}$$

У випадку, коли $z_* = 0, c = e$, отримаємо

$$\ln(e+z) = \frac{1}{1} - \frac{z}{e} + \frac{3z}{2} + \frac{z}{9e} + \frac{4z}{1} + \frac{3z}{20e} + \dots + \frac{S_n^0 z}{2/n} + \frac{S_{n-1}^0 z}{(2n+1)eS_n^0} + \dots,$$

де $S_n^0 = 2H_n + 1,\ n\in\mathbb{N}$.

6.7.4. Функція $z \ln z$. Аналогічно, як у попередніх випадках, має місце теорема.

Теорема 6.17. ***(A)*** *Функція $z \ln z$, де $z \neq 0$, має обернені похідні 2–го типу довільного порядку, які визначаються згідно із формулами*

$$ {}^{\{0\}}(z\ln z) = \frac{1}{z\ln z}, \qquad {}^{\{1\}}(z\ln z) = -\frac{z^2\ln^2 z}{\ln z+1}, \tag{6.27а} $$

$$ {}^{\{2n\}}(z\ln z) = \frac{-1}{z(n(n+1)\ln^2 z + \alpha_n \ln z + \beta_n)}, \tag{6.27б} $$

$$ {}^{\{2n+1\}}(z\ln z) = \frac{z^2(A_n\ln^3 z + B_n \ln^2 z + C_n \ln z + D_n)}{\ln z + \gamma_n}, \tag{6.27в} $$

де $A_n = n(n+1)^2(n+2)/2$, $B_n = 3n(n+1)^2(n+2)H_n - (n+1)(5n^3+12n^2+$ $+6n+2)/2$, $C_n = 6n(n+1)^2(n+2)H_n^2 - 2(n+1)(5n^3+12n^2+6n+2)H_n+$ $+n(21n^3+64n^2+57n+18)/4$, $D_n = 4n(n+1)^2(n+2)H_n^3 - 2(n+1)(5n^3+$ $+12n^2+6n+2)H_n^2 + n(21n^3+64n^2+57n+18)H_n/2 - n(16n^3+43n^2+27n+2)/4$,

$$ \begin{aligned} &\alpha_n = 4n(n+1)H_n - (2n^2+2n+1), \quad \gamma_n = 2H_n + 1/(n+1), \\ &\beta_n = 4n(n+1)H_n^2 - 2(2n^2+2n+1)H_n + 2n(n+1), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{6.28} $$

(B) *Коефіцієнти розвинення функції в околі точки $z = z_*$ в Т–КЛД рівні*

$$ d_0(z_*) = \frac{1}{z_*\mathfrak{z}}, \quad d_1(z_*) = \frac{-z_*^2\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{z}+1}, \qquad \mathfrak{z} = \ln z_*, \tag{6.29а} $$

$$ d_2(z_*) = \frac{-2(\mathfrak{z}+1)^2}{z_*\mathfrak{z}(2\mathfrak{z}^2+3\mathfrak{z}+2)}, \quad d_3(z_*) = \frac{3z_*^2(2\mathfrak{z}^2+3\mathfrak{z}+2)^2}{2(\mathfrak{z}+1)(\mathfrak{z}+\frac{5}{2})}, \tag{6.29б} $$

$$ d_{2n}(z_*) = \frac{2n(\mathfrak{z}+\gamma_{n-1})^2}{z_*((n-1)n\mathfrak{z}^2+\alpha_{n-1}\mathfrak{z}+\beta_{n-1})(n(n+1)\mathfrak{z}^2+\alpha_n\mathfrak{z}+\beta_n)}, \tag{6.29в} $$

$$ d_{2n+1}(z_*) = \frac{(2n+1)z_*^2\big(n(n+1)\mathfrak{z}^2+\alpha_n\mathfrak{z}+\beta_n\big)^2}{n(n+1)\big(\mathfrak{z}+\gamma_{n-1}\big)\big(\mathfrak{z}+\gamma_n\big)}, \; n \in \mathbb{N}_2. \tag{6.29г} $$

Доведення. **(A)** Формули (6.27а) випливають безпосередньо із означення оберненої похідної 2–го типу. Скористаємося методом повної математичної індукції. Легко показати, що

$$^{\{2\}}(z\ln z)=\frac{-1}{z(2\ln^2 z+3\ln z+2)},\ ^{\{3\}}(z\ln z)=\frac{z^2(6\ln^3 z+11\ln^2 z+12\ln z+6)}{\ln z+5/2}.$$

Отже, формули (6.27б)–(6.27в) виконуються для $n=1$. Зробимо припущення, що ці формули мають місце для $n=k-1$. Тоді із рекурентних співвідношень (6.2) випливає, що

$$^{\{2k\}}(z\ln z)=2k\Big/\left(\frac{z^2(A_{k-1}\ln^3 z+B_{k-1}\ln^2 z+C_{k-1}\ln z+D_{k-1})}{\ln z+\gamma_{k-1}}\right)'-$$

$$-1/z\Big((k-1)k\ln^2+\alpha_{k-1}\ln z+\beta_{k-1}\Big)=2k(\ln z+\gamma_{k-1})^2\Big/z\Big(2A_{k-1}\ln^4 z+$$

$$+\Big(2B_{k-1}+2A_{k-1}(1+\gamma_{k-1})\Big)\ln^3 z+\Big(2C_{k-1}+B_{k-1}(1+2\gamma_{k-1})+3A_{k-1}\gamma_{k-1}\Big)\times$$

$$\times(\ln^2 z+2D_{k-1}+(2C_{k-1}+2B_{k-1})\gamma_{k-1})\ln z+(2D_{k-1}+C_{k-1})\gamma_{k-1}-D_{k-1}\Big)-$$

$$-1/z((k-1)k\ln^2+\alpha_{k-1}\ln z+\beta_{k-1}).$$

Підставимо значення $\alpha_{k-1},\beta_{k-1},\gamma_{k-1},A_{k-1},B_{k-1},C_{k-1}$. Отримаємо

$$^{\{2k\}}(z\ln z)=2k(\ln z+2H_{k-1}+\tfrac{1}{k})^2\Big/z\Big((k^2-1)k^2\ln^4 z+\Big(8(k^2-1)k^2H_{k-1}-$$

$$-2k(2k^3-2k^2-k+2)\Big)\ln^3 z+\Big(24(k^2-1)k^2H_{k-1}^2-12(2k^3-2k^2-k+2)H_{k-1}+$$

$$+8k^4-12k^3+6k-5\Big)\ln^2 z+\Big(32(k^2-1)k^2H_{k-1}^3-24k(2k^3-2k^2-k+2)H_{k-1}^2+$$

$$+4(8k^4-12k^3+6k-5)H_{k-1}-\tfrac{2}{k}(4k^5-8k^4+2k^3-2k+1)\Big)\ln z+$$

$$+16(k^2-1)k^2H_{k-1}^4-16k(2k^3-2k^2-k+2)H_{k-1}^3+4(8k^4-12k^3+6k-5)H_{k-1}^2-$$

$$-\tfrac{4}{k}(4k^5-8k^4+2k^3+4k^2-2k+1)H_{k-1}+4(k-1)(k^3-k^2+1)\Big)-$$

$$-1/z\Big((k-1)k\ln^2 z+\Big(4(k-1)kH_{k-1}-2k^2+2k-1\Big)\ln z+4(k-1)kH_{k-1}^2-$$

$$-2(2k^2-2k+1)H_{k-1}+2(k-1)k\Big).$$

Знаменник першого дробу може бути поданий у вигляді добутку

$$z\Big(((k-1)k\ln^2 z+\Big(4(k-1)kH_{k-1}-2k^2+2k-1\Big)\ln z+4(k-1)kH_{k-1}^2-$$

$$-2(2k^2-2k+1)H_{k-1}+2(k-1)k)\Big)\Big(k(k+1)\ln^2 z+\big(4k(k+1)H_{k-1}-$$

$$-2k^2+2k+3\big)\ln z+4k(k+1)H_{k-1}^2-2(2k^2-2k-3)H_{k-1}+\tfrac{2}{k}(k^3-k^2+1)\Big).$$

Звівши до спільного знаменника та виконавши заміну $H_{k-1}=H_k-\frac{1}{k}$ кінцеве отримаємо

$$^{\{2k\}}(z\ln z)=-1/z\Big(k(k+1)\ln^2 z+\big(4k(k+1)H_k-2k^2-2k-1\big)\ln z+$$

$$+4k(k+1)H_k^2-2(2k^2+2k+1)H_k+2k(k+1)\Big)=\frac{-1}{k(k+1)\ln^2 z+\alpha_k\ln z+\beta_k}.$$

Аналогічно

$$^{\{2k+1\}}(z\ln z)=(2k+1)\Big/\left(\frac{-1}{z(k(k+1)\ln^2 z+\alpha_k\ln z+\beta_k)}\right)'+$$

$$+z^2(A_{k-1}\ln^3 z+B_{k-1}\ln^2 z+C_{k-1}\ln z+D_{k-1})\big/(\ln z+\gamma_{k-1})=$$

$$=\frac{(2k+1)z^2(k(k+1)\ln^2 z+\alpha_k\ln z+\beta_k)^2}{k(k+1)\ln^2 z+(\alpha_k+2k(k+1))\ln z+\alpha_k+\beta_k}+$$

$$+\frac{z^2(A_{k-1}\ln^3 z+B_{k-1}\ln^2 z+C_{k-1}\ln z+D_{k-1})}{\ln z+\gamma_{k-1}}.$$

В знаменниках дробів підставимо значення α_k,β_k та γ_{k-1}, маємо

$$k(k+1)\ln^2 z+(\alpha_k+2k(k+1))\ln z+\alpha_k+\beta_k=k(k+1)\ln^2 z+$$

$$+(4k(k+1)H_k-1)\ln z+4k(k+1)H_k^2-2H_k-1=$$

$$=\big(\ln z+2H_k-\tfrac{1}{k}\big)\big(k(k+1)\ln z+2k(k+1)H_k+k\big),$$

$$\ln z+\gamma_{k-1}=\ln z+2H_k-\tfrac{1}{k}.$$

Підставивши в чисельниках значення $\alpha_k,\beta_k,A_{k-1},B_{k-1},C_{k-1},D_{k-1}$ та звівши до спільного знаменника отримуємо, що

$$^{\{2k+1\}}(z\ln z)=z^2\Big(\tfrac{k^2(k+1)^3(k+2)}{2}\ln^4 z+\big(4k^2(k+1)^3(k+2)H_k-$$

$$-\tfrac{k(k+1)^2}{2}(5k^3+13k^2+9k+4)\big)\ln^3 z+\big(12k^2(k+1)^3(k+2)H_k^2-$$

$$-3k(k+1)^2(5k^3+13k^2+9k+4)H_k+\tfrac{k+1}{4}(21k^5+74k^4+91k^3+54k^2+$$

$$+16k+4)\big)\ln^2 z+\big(16k^2(k+1)^3(k+2)H_k^3-6k(k+1)^2(5k^3+13k^2+9k+4)H_k^2+$$

$$+(k+1)(21k^5+74k^4+91k^3+54k^2+16k+4)H_k-\tfrac{k(k+1)}{4}(16k^4+64k^3+91k^2+$$

$$+59k+18)\big)\ln z+8k^2(k+1)^3(k+2)H_k^4-4k(k+1)^2(5k^3+13k^2+9k+4)H_k^3+$$

$$+(k+1)(21k^5+74k^4+91k^3+54k^2+16k+4)H_k^2-\tfrac{k(k+1)}{2}\times$$

$$\times(16k^4+64k^3+91k^2+59k+18)H_k+\tfrac{k(k+1)}{4}(16k^3+43k^2+27k+2)\Big)\times$$

$$\times\Big(\big(\ln z+2H_k-\tfrac{1}{k}\big)\big(k(k+1)\ln z+2k(k+1)H_k+k\big)\Big)^{-1}.$$

Поділимо чисельник та знаменник на $k(k+1)\ln z+2k(k+1)H_k-k-1$. Тоді маємо, що

$$^{\{2k+1\}}(z\ln z)=\Big(\tfrac{k(k+1)^2(k+2)}{2}\ln^3 z+\Big(3k(k+1)^2(k+2)H_k-\tfrac{k+1}{2}(5k^2+12k^2+$$

$$+6k+2)\big)\ln^2 z+\big(6k(k+1)^2(k+2)H_k^2-(k+1)(10k^3+24k^2+12k+4)H_k+$$

$$+\tfrac{k}{4}(21k^3+64k^2+75k+18)\big)\ln z+4k(k+1)^2(k+2)H_k^3-2(k+1)(5k^3+12k^2+$$

$$+6k+2)H_k^2+\tfrac{k}{2}(21k^3+64k^2+57k+18)H_k-\tfrac{k}{4}(16k^3+43k^2+27k+2)\Big)\ :$$

$$:\ \big(\ln z+2H_k+\tfrac{1}{k+1}\big).$$

Тобто

$$^{\{2k+1\}}(z\ln z)=\frac{z^2(A_k\ln^3 z+B_k\ln^2 z+C_k\ln z+D_k)}{\ln z+\gamma_k}.$$

Формули (6.27) доведені.

(B) При $n=0,1$ формули (6.29а)–(6.29б) випливають безпосередньо з формул (6.27а)–(6.27в). Згідно із співвідношенням (6.27б) маємо, що

$$^{\{2n\}}(z\ln z)-{}^{\{2n-2\}}(z\ln z)=\frac{-1}{z(n(n+1)\ln^2 z+\alpha_n\ln z+\beta_n)}+$$

$$+\frac{1}{z((n-1)n\ln^2 z+\alpha_{n-1}\ln z+\beta_{n-1})}=\big(2n\ln^2 z+(\alpha_n-\alpha_{n-1})\ln z+\beta_n-$$

$$-\beta_{n-1}\big)/\big(z((n-1)n\ln^2 z+\alpha_{n-1}\ln z+\beta_{n-1})(n(n+1)\ln^2 z+\alpha_n\ln z+\beta_n)\big).$$

Підставивши значення $\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \alpha_n, \beta_n$ з (6.11) отримуємо, що в околі точки $z = z_*$

$$d_{2n}(z_*) = \frac{2n(\mathfrak{z} + \gamma_{n-1})^2}{z_*((n-1)n\mathfrak{z}^2 + \alpha_{n-1}\mathfrak{z} + \beta_{n-1})(n(n+1)\mathfrak{z}^2 + \alpha_n\mathfrak{z} + \beta_n)}.$$

Тобто формула (6.29в) виконується.

Аналогічно

$$^{\{2n+1\}}(z\ln z) - {}^{\{2n-1\}}(z\ln z) = \frac{z^2(A_n\ln^3 z + B_n\ln^2 z + C_n\ln z + D_n)}{\ln z + \gamma_n} -$$

$$-\frac{z^2(A_{n-1}\ln^3 z + B_{n-1}\ln^2 z + C_{n-1}\ln z + D_{n-1})}{\ln z + \gamma_{n-1}}.$$

Звівши до спільного знаменника та підставивши значення $A_n, B_n, C_n, D_n, \gamma_n, A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1}, D_{n-1}, \gamma_{n-1}$, будемо мати:

$$^{\{2n+1\}}(z\ln z) - {}^{\{2n-1\}}(z\ln z) = (2n+1)z^2\Big(n(n+1)\ln^4 z + \big(8n(n+1)H_n -$$

$$-2(2n^2+2n+1)\big)\ln^3 z + \big(24n(n+1)H_n^2 - 12(2n^2+2n+1)H_n +$$

$$+\tfrac{4n(n+1)(2n^2+2n+1)+1}{n(n+1)}\big)\ln^2 z + \big(32n(n+1)H_n^3 - 24(2n^2+2n+1)H_n^2 +$$

$$+\tfrac{4(4n(n+1)(2n^2+2n+1)+1)}{n(n+1)}H_n - 4(2n^2+2n+1)\big)\ln z + 16n(n+1)H_n^4 -$$

$$-16(2n^2+2n+1)H_n^3 + \tfrac{4(4n(n+1)(2n^2+2n+1)+1)}{n(n+1)}H_n^2 - 8(2n^2+2n+1)H_n +$$

$$+4n(n+1)\Big)\Big/\Big(\big(\ln z + \gamma_{n-1}\big)\big(\ln z + \gamma_n\big)\Big).$$

Помноживши чисельник і знаменник на $n(n+1)$ та підставивши $z = z_*$ кінцеве отримуємо, що

$$d_{2n+1}(z_*) = \frac{(2n+1)z_*^2\big(n(n+1)\mathfrak{z}^2 + \alpha_n\mathfrak{z} + \beta_n\big)^2}{n(n+1)\big(\mathfrak{z} + \gamma_{n-1}\big)\big(\mathfrak{z} + \gamma_n\big)}.$$

Співвідношення (6.29г) також доведено. Отже, формули (6.29) вірні. □

Із теореми 6.17 випливає, що функція $z\ln z$ в околі точки $z=z_*$ розвивається в Т–КЛД вигляду

$$z\ln z=\left(\frac{1}{z_*\mathfrak{z}}+\cfrac{z-z_*}{\frac{-z_*^2\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{z}+1}+\cfrac{z-z_*}{\frac{-2(\mathfrak{z}+1)^2}{z_*\mathfrak{z}(2\mathfrak{z}^2+3\mathfrak{z}+2)}+\cfrac{z-z_*}{\frac{3z_*^2(2\mathfrak{z}^2+3\mathfrak{z}+2)^2}{2(\mathfrak{z}+1)(\mathfrak{z}+5/2)}+\cfrac{z-z_*}{\frac{4(\mathfrak{z}+5/2)^2}{z_*(2\mathfrak{z}^2+3\mathfrak{z}+2)(6\mathfrak{z}^2+23\mathfrak{z}+27)}+}}}}\right.$$

$$+\cdots+\cfrac{z-z_*}{\frac{2n(\mathfrak{z}+\gamma_{n-1})^2}{z_*((n-1)n\mathfrak{z}^2+\alpha_{n-1}\mathfrak{z}+\beta_{n-1})(n(n+1)\mathfrak{z}^2+\alpha_n\mathfrak{z}+\beta_n)}+}$$

$$\left.+\cfrac{z-z_*}{\frac{(2n+1)z_*^2(n(n+1)\mathfrak{z}^2+\alpha_n\mathfrak{z}+\beta_n)^2}{n(n+1)(\mathfrak{z}+\gamma_{n-1})(\mathfrak{z}+\gamma_n)}+\cdots}\right)^{-1}. \tag{6.30}$$

В частинному випадку, коли $\mathfrak{z}=1$, $z_*=e$, маємо

$$z\ln z=\left(\frac{1}{e}+\cfrac{z-e}{-e^2/2+\cfrac{z-e}{-8/7e+\cfrac{z-e}{21e^2/2+\cfrac{z-e}{1/8e+\cfrac{z-e}{2240e^2/13+\cdots+}}}}}\right.$$

$$\left.+\cfrac{z-e}{\frac{2n(2H_n+(n-1)/n)^2}{e(4(n-1)nH_{n-1}^2-2H_{n-1}+n^2-n-1)}+\cfrac{z-e}{\frac{(2n+1)e^2(4n(n+1)H_n^2-2H_n+n^2+n-1)^2}{n(n+1)(2H_n+(n-1)/n)(2H_{n+1}+n/(n+1))}+\cdots}}\right)^{-1}.$$

6.7.5. Функція $\operatorname{tg} z$**.** Має місце наступна теорема.

Теорема 6.18. ***(A)*** *Функція* $\operatorname{tg} z$ *має обернені похідні 2–го типу довільного порядку, які визначаються за формулами*

$$\begin{gathered}{}^{\{4n\}}\operatorname{tg} z=\frac{1}{\operatorname{tg} z},\ {}^{\{4n+1\}}\operatorname{tg} z=-\frac{(2n+1)\left(n+(n+1)\operatorname{tg}^2 z\right)}{1+\operatorname{tg}^2 z},\ n\in\mathbb{N}_0,\\ {}^{\{4n+2\}}\operatorname{tg} z=-\operatorname{tg} z,\ {}^{\{4n+3\}}\operatorname{tg} z=-\frac{(n+1)\left(2n+3+(2n+1)\operatorname{tg}^2 z\right)}{1+\operatorname{tg}^2 z}.\end{gathered} \tag{6.31}$$

(B) *Коефіцієнти розвинення функціх в Т–КЛД в околі* $z=z_*$ *рівні*

$$\begin{gathered}d_0(z_*)=\frac{1}{\operatorname{tg} z_*},\ d_{4n+1}(z_*)=-\frac{(4n+1)\operatorname{tg}^2 z_*}{1+\operatorname{tg}^2 z_*},\ d_{4n+2}(z_*)=-\frac{1+\operatorname{tg}^2 z_*}{\operatorname{tg} z_*},\\ d_{4n+3}(z_*)=-\frac{4n+3}{1+\operatorname{tg}^2 z_*},\ d_{4n+4}(z_*)=\frac{1+\operatorname{tg}^2 z_*}{\operatorname{tg} z_*},\qquad n\in\mathbb{N}_0.\end{gathered} \tag{6.32}$$

Доведення. **(A)** Для доведення теореми скористаємося рекурентними співвідношеннями (6.2) та методом повної математичної індукції. Легко переконатися, що ${}^{\{0\}}\operatorname{tg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z}$, ${}^{\{1\}}\operatorname{tg} z = \frac{-\operatorname{tg}^2 z}{1+\operatorname{tg}^2 z}$, ${}^{\{2\}}\operatorname{tg} z = -\operatorname{tg} z$, ${}^{\{3\}}\operatorname{tg} z = -\frac{3+\operatorname{tg}^2 z}{1+\operatorname{tg}^2 z}$. Тобто, коли $n = 0$, то формули справедливі. Припустимо, що вони виконуються, коли $n = k-1$. Тоді із рекурентних формул (6.2) для $n = k$ отримуємо:

$$
{}^{\{4k\}}\operatorname{tg} z = \frac{4k}{\left({}^{\{4k-1\}}\operatorname{tg} z\right)'} + {}^{\{4k-2\}}\operatorname{tg} z = \frac{-4k}{\left(\frac{k(2k+1+(2k-1)\operatorname{tg}^2 z)}{1+\operatorname{tg}^2 z}\right)'} - \operatorname{tg} z =
$$

$$
= \frac{-4(1+\operatorname{tg}^2 z)^2}{2(2k-1)\operatorname{tg} z(1+\operatorname{tg}^2 z)^2 - 2(2k+1+(2k-1)\operatorname{tg}^2 z)\operatorname{tg} z(1+\operatorname{tg}^2 z)} -
$$

$$
-\operatorname{tg} z = \frac{-2(1+\operatorname{tg}^2 z)}{\operatorname{tg} z\big((2k-1)(1+\operatorname{tg}^2 z) - (2k+1) - (2k-1)\operatorname{tg}^2 z\big)} - \operatorname{tg} z =
$$

$$
= \frac{1+\operatorname{tg}^2 z}{\operatorname{tg} z} - \operatorname{tg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z},
$$

$$
{}^{\{4k+1\}}\operatorname{tg} z = \frac{4k+1}{\left({}^{\{4k\}}\operatorname{tg} z\right)'} + {}^{\{4k-1\}}\operatorname{tg} z = -\frac{(4k+1)\operatorname{tg}^2 z}{1+\operatorname{tg}^2 z} -
$$

$$
-\frac{k\left(2k+1+(2k-1)\operatorname{tg}^2 z\right)}{1+\operatorname{tg}^2 z} = -\frac{(2k+1)(k+(k+1)\operatorname{tg}^2 z)}{1+\operatorname{tg}^2 z},
$$

$$
{}^{\{4k+2\}}\operatorname{tg} z = \frac{4k+2}{\left({}^{\{4k+1\}}\operatorname{tg} z\right)'} + {}^{\{4k\}}\operatorname{tg} z = \frac{-(4k+2)}{\left(\frac{(2k+1)(k+(k+1)\operatorname{tg}^2 z)}{1+\operatorname{tg}^2 z}\right)'} + \frac{1}{\operatorname{tg} z} =
$$

$$
= \frac{-(4k+2)(1+\operatorname{tg}^2 z)^2}{2(2k+1)(k+1)\operatorname{tg} z(1+\operatorname{tg}^2 z)^2 - 2(2k+1)(k+(k+1)\operatorname{tg}^2 z)\operatorname{tg} z(1+\operatorname{tg}^2 z)} +
$$

$$
+\frac{1}{\operatorname{tg} z} = \frac{-(1+\operatorname{tg}^2 z)}{\operatorname{tg} z\big((k+1)(1+\operatorname{tg}^2 z) - (k+(k+1)\operatorname{tg}^2)\big)} + \frac{1}{\operatorname{tg} z} = -\operatorname{tg} z,
$$

$$
{}^{\{4k+3\}}\operatorname{tg} z = \frac{4k+3}{\left({}^{\{4k+2\}}\operatorname{tg} z\right)'} + {}^{\{4k+1\}}\operatorname{tg} z = -\frac{(2k+1)(k+(k+1)\operatorname{tg}^2 z)}{1+\operatorname{tg}^2 z} -
$$

$$
-\frac{(4k+3)}{1+\operatorname{tg}^2 z} = -\frac{(k+1)(2k+3+(2k+1)\operatorname{tg}^2 z)}{1+\operatorname{tg}^2 z}.
$$

Отже, формули (6.31) вірні для довільного n.

(B) Із формул (6.11) та (6.31) випливають співвідношення (6.32). □

Із теореми 6.18 отримуємо розвинення функції $\operatorname{tg} z$ в Т–КЛД

$$\operatorname{tg} z = \left(\frac{1}{\mathfrak{z}} + \frac{z-z_*}{-\mathfrak{z}^2/(1+\mathfrak{z}^2)} + \frac{z-z_*}{-(1+\mathfrak{z}^2)/\mathfrak{z}} + \frac{z-z_*}{-3/(1+\mathfrak{z}^2)} + \frac{z-z_*}{(1+\mathfrak{z}^2)/\mathfrak{z}} + \right.$$
$$+ \cdots + \frac{z-z_*}{-(4n+1)\mathfrak{z}^2/(1+\mathfrak{z}^2)} + \frac{z-z_*}{-(1+\mathfrak{z}^2)/\mathfrak{z}} +$$
$$\left. + \frac{z-z_*}{-(4n+3)/(1+\mathfrak{z}^2)} + \frac{z-z_*}{(1+\mathfrak{z}^2)/\mathfrak{z}} + \cdots\right)^{-1}, \quad \mathfrak{z} = \operatorname{tg} z_*. \tag{6.33}$$

В околі точки $z = \pi/4$ маємо:

$$\operatorname{tg} z = \left(1 + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1/2} + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-2} + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-3/2} + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{2} + \frac{z-\pi/4}{-5/2} + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-7/2} + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{2} + \cdots + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{(-1)^n 2} + \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-(2n+1)/2} + \cdots\right)^{-1}.$$

6.7.6. Функція $\operatorname{ctg} z$**.** Як і у попередніх випадках, має місце теорема.

Теорема 6.19. ***(A)*** *Функція* $\operatorname{ctg} z$ *має обернені похідні 2–го типу довільного порядку, які знаходяться за формулами*

$$\begin{aligned} &{}^{\{4n\}}\operatorname{ctg} z = \frac{1}{\operatorname{ctg} z}, \ {}^{\{4n+1\}}\operatorname{ctg} z = \frac{(2n+1)\left(n+(n+1)\operatorname{ctg}^2 z\right)}{1+\operatorname{ctg}^2 z}, n \in \mathbb{N}_0, \\ &{}^{\{4n+2\}}\operatorname{ctg} z = -\operatorname{ctg} z, \ {}^{\{4n+3\}}\operatorname{ctg} z = \frac{(n+1)\left(2n+3+(2n+1)\operatorname{ctg}^2 z\right)}{1+\operatorname{ctg}^2 z}. \end{aligned} \tag{6.34}$$

(B) *Коефіцієнти розвинення функції в Т–КЛД в околі точки* $z = z_*$ *рівні*

$$\begin{aligned} &d_0(z_*) = \frac{1}{\operatorname{ctg} z_*}, \ d_{4n+1}(z_*) = \frac{(4n+1)\operatorname{ctg}^2 z_*}{1+\operatorname{ctg}^2 z_*}, \ d_{4n+2}(z_*) = -\frac{1+\operatorname{ctg}^2 z_*}{\operatorname{ctg} z_*}, \\ &d_{4n+3}(z_*) = \frac{4n+3}{1+\operatorname{ctg}^2 z_*}, \ d_{4n+4}(z_*) = \frac{1+\operatorname{ctg}^2 z_*}{\operatorname{ctg} z_*}, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Доведення. **(A)** Доведемо твердження за індукцією. Скористаємося рекурентними формулами (6.2). Легко бачити, що

$${}^{\{0\}}\operatorname{ctg} z = \frac{1}{\operatorname{ctg} z}, \ {}^{\{1\}}\operatorname{ctg} z = \frac{\operatorname{ctg}^2 z}{1+\operatorname{ctg}^2 z}, \ {}^{\{2\}}\operatorname{ctg} z = -\operatorname{ctg} z, \ {}^{\{3\}}\operatorname{ctg} z = \frac{3+\operatorname{ctg}^2 z}{1+\operatorname{ctg}^2 z}.$$

Тобто, коли $n = 0$, то формули (6.34) справедливі. Припустимо, що вони виконуються коли $n = k-1$. Тоді для $n = k$ із рекурентних співвідношень (6.2) отримуємо, що

$$
{}^{\{4k\}}\operatorname{ctg} z = \frac{4k}{\left({}^{\{4k-1\}}\operatorname{ctg} z\right)'} + {}^{\{4k-2\}}\operatorname{ctg} z = \frac{4k}{\left(\frac{k(2k+1+(2k-1)\operatorname{ctg}^2 z)}{1+\operatorname{ctg}^2 z}\right)'} - \operatorname{ctg} z =
$$

$$
= \frac{2(1+\operatorname{ctg}^2 z)}{\operatorname{ctg} z((2k+1+(2k-1)\operatorname{ctg}^2 z) - (2k-1)(1+\operatorname{ctg}^2 z))} - \operatorname{ctg} z =
$$

$$
= \frac{1+\operatorname{ctg}^2 z}{\operatorname{ctg} z} - \operatorname{ctg} z = \frac{1}{\operatorname{ctg} z},
$$

$$
{}^{\{4k+1\}}\operatorname{ctg} z = \frac{4k+1}{\left({}^{\{4k\}}\operatorname{ctg} z\right)'} + {}^{\{4k-1\}}\operatorname{ctg} z = \frac{(4k+1)\operatorname{ctg}^2 z}{1+\operatorname{ctg}^2 z} +
$$

$$
+ \frac{k(2k+1+(2k-1)\operatorname{ctg}^2 z)}{1+\operatorname{ctg}^2 z} = \frac{(2k+1)(k+(k+1)\operatorname{ctg}^2 z)}{1+\operatorname{ctg}^2 z},
$$

$$
{}^{\{4k+2\}}\operatorname{ctg} z = \frac{4k+2}{\left({}^{\{4k+1\}}\operatorname{ctg} z\right)'} + {}^{\{4k\}}\operatorname{ctg} z = \frac{4k+2}{\left(\frac{(2k+1)(k+(k+1)\operatorname{ctg}^2 z)}{1+\operatorname{ctg}^2 z}\right)'} + \frac{1}{\operatorname{ctg} z} =
$$

$$
= \frac{1+\operatorname{ctg}^2 z}{\operatorname{ctg} z(k+(k+1)\operatorname{ctg}^2 z - (k+1)(1+\operatorname{ctg}^2 z)} + \frac{1}{\operatorname{ctg} z} =
$$

$$
= \frac{1+\operatorname{ctg}^2 z}{-\operatorname{ctg} z} + \frac{1}{\operatorname{ctg} z} = -\operatorname{ctg} z,
$$

$$
{}^{\{4k+3\}}\operatorname{ctg} z = \frac{4k+3}{\left({}^{\{4k+2\}}\operatorname{ctg} z\right)'} + {}^{\{4k+1\}}\operatorname{ctg} z = \frac{4k+3}{1+\operatorname{ctg}^2 z} +
$$

$$
+ \frac{(2k+1)(k+(k+1)\operatorname{ctg}^2 z)}{1+\operatorname{ctg}^2 z} = \frac{(k+1)(2k+3+(2k+1)\operatorname{ctg}^2 z)}{1+\operatorname{ctg}^2 z}.
$$

Отже, формули виконуються і в цьому випадку.

(B) Формули (6.35) випливають з формул (6.11) та (6.34). $\square$

Маємо розвинення функції $\operatorname{ctg} z$ у Т–КЛД в околі точки $z = z_*$

$$
\operatorname{ctg} z = \Bigg(\frac{1}{\mathfrak{z}} + \frac{z-z_*}{\mathfrak{z}^2/(1+\mathfrak{z}^2)} + \frac{z-z_*}{-(1+\mathfrak{z}^2)/\mathfrak{z}} + \frac{z-z_*}{3/(1+\mathfrak{z}^2)} + \frac{z-z_*}{(1+\mathfrak{z}^2)/\mathfrak{z}} +
$$

$$
+ \frac{z-z_*}{5\mathfrak{z}^2/(1+\mathfrak{z}^2)} + \frac{z-z_*}{-(1+\mathfrak{z}^2)/\mathfrak{z}} + \frac{z-z_*}{7/(1+\mathfrak{z}^2)} + \frac{z-z_*}{(1+\mathfrak{z}^2)/\mathfrak{z}} + \cdots +
$$

$$+\frac{z-z_*}{(4n+1)\mathfrak{z}^2/(1+\mathfrak{z}^2)}+\frac{z-z_*}{-(1+\mathfrak{z}^2)/\mathfrak{z}}+\frac{z-z_*}{(4n+3)/(1+\mathfrak{z}^2)}+$$
$$+\left.\frac{z-z_*}{(1+\mathfrak{z}^2)/\mathfrak{z}}+\cdots\right)^{-1}, \qquad \mathfrak{z}=\operatorname{ctg} z_*. \tag{6.36}$$

В частинному випадку для $z=\pi/4$ маємо розвинення функції $\operatorname{ctg} z$

$$\operatorname{ctg} z=\left(1+\frac{z-\frac{\pi}{4}}{1/2}+\frac{z-\frac{\pi}{4}}{-2}+\frac{z-\frac{\pi}{4}}{3/2}+\frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}+\frac{z-\frac{\pi}{4}}{5/2}+\frac{z-\frac{\pi}{4}}{-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{z-\frac{\pi}{4}}{7/2}+\frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}+\cdots+\frac{z-\frac{\pi}{4}}{(-1)^n 2}+\frac{z-\frac{\pi}{4}}{(2n+1)/2}+\cdots\right)^{-1}.$$

6.7.7. Функції $\operatorname{th} z$ та $\operatorname{cth} z$. Як і у випадку тригонометричних функцій $\operatorname{tg} z$ та $\operatorname{ctg} z$ можна довести аналогічні твердження для гіперболічних функцій $\operatorname{th} z$ та $\operatorname{cth} z$.

Теорема 6.20. ***(A)*** *Функція $\operatorname{th} z$ має обернені похідні 2–го типу довільного порядку, які обчислюються за допомогою формул*

$${}^{\{4n\}}\operatorname{th} z=\frac{1}{\operatorname{th} z}, \quad {}^{\{4n+1\}}\operatorname{th} z=\frac{(2n+1)\left(n-(n+1)\operatorname{th}^2 z\right)}{1-\operatorname{th}^2 z},$$
$${}^{\{4n+2\}}\operatorname{th} z=\operatorname{th} z, \quad {}^{\{4n+3\}}\operatorname{th} z=\frac{(n+1)\left(2n+3-(2n+1)\operatorname{th}^2 z\right)}{1-\operatorname{th}^2 z}, \ n\in\mathbb{N}_0.$$

(B) *Коефіцієнти розвинення функції в околі точки $z=z_*$ в Т–КЛД рівні*

$$\begin{gathered}d_0(z_*)=\frac{1}{\operatorname{th} z_*},\ d_{4n+1}(z_*)=\frac{(4n+1)\operatorname{th}^2 z_*}{\operatorname{th}^2 z_*-1},\ d_{4n+2}(z_*)=\frac{\operatorname{th}^2 z_*-1}{\operatorname{th} z_*},\\ d_{4n+3}(z_*)=\frac{4n+3}{1-\operatorname{th}^2 z_*},\ d_{4n+4}(z_*)=\frac{1-\operatorname{th}^2 z_*}{\operatorname{th} z_*}, \qquad n\in\mathbb{N}_0.\end{gathered} \tag{6.37}$$

Розвинення гіперболічного тангенса в Т–КЛД в околі точки $z=z_*$ матиме вигляд

$$\operatorname{th} z=\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}+\frac{z-z_*}{\frac{\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{z}^2-1}}+\frac{z-z_*}{\frac{\mathfrak{z}^2-1}{\mathfrak{z}}}+\frac{z-z_*}{\frac{3}{1-\mathfrak{z}^2}}+\frac{z-z_*}{\frac{1-\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{z}}}+\cdots+\frac{z-z_*}{\frac{(4k+1)\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{z}^2-1}}+\right.$$
$$\left.+\frac{z-z_*}{\frac{\mathfrak{z}^2-1}{\mathfrak{z}}}+\frac{z-z_*}{\frac{4k+3}{1-\mathfrak{z}^2}}+\frac{z-z_*}{\frac{1-\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{z}}}+\cdots\right)^{-1}, \quad \mathfrak{z}=\operatorname{th} z_*. \tag{6.38}$$

В частинному випадку в околі точки $z=\ln\sqrt{2}$ розвинення запишеться наступним чином

$$\operatorname{th} z=\left(3+\frac{z-\ln\sqrt{2}}{-1/8}+\frac{z-\ln\sqrt{2}}{-8/3}+\frac{z-\ln\sqrt{2}}{27/8}+\frac{z-\ln\sqrt{2}}{8/3}+\cdots+\right.$$
$$\left.+\frac{z-\ln\sqrt{2}}{-(4k+1)/8}+\frac{z-\ln\sqrt{2}}{-8/3}+\frac{z-\ln\sqrt{2}}{9(4k+3)/8}+\frac{z-\ln\sqrt{2}}{8/3}+\cdots\right)^{-1}.$$

Теорема 6.21. ***(A)*** *Функція* $\operatorname{cth} z$ *має обернені похідні 2–го типу довільного порядку і вони обчислюються за допомогою формул*

$$^{\{4n\}}\operatorname{cth} z=\frac{1}{\operatorname{cth} z},\quad ^{\{4n+1\}}\operatorname{cth} z=\frac{(2n+1)\left(n-(n+1)\operatorname{cth}^2 z\right)}{1-\operatorname{cth}^2 z},\ n\in\mathbb{N}_0$$

$$^{\{4n+2\}}\operatorname{cth} z=\operatorname{cth} z,\quad ^{\{4n+3\}}\operatorname{cth} z=\frac{(n+1)\left(2n+3-(2n+1)\operatorname{cth}^2 z\right)}{1-\operatorname{cth}^2 z}.$$

(B) *Коефіцієнти розвинення функції Т–КЛД в околі точки* $z=z_*$ *рівні*

$$\begin{aligned}&d_0(z_*)=\frac{1}{\operatorname{cth} z_*},\ d_{4n+1}(z_*)=\frac{(4n+1)\operatorname{cth}^2 z_*}{\operatorname{cth}^2 z_*-1},\ d_{4n+2}(z_*)=\frac{\operatorname{cth}^2 z_*-1}{\operatorname{cth} z_*},\\&d_{4n+3}(z_*)=\frac{4n+3}{1-\operatorname{cth}^2 z_*},\ d_{4n+4}(z_*)=\frac{1-\operatorname{cth}^2 z_*}{\operatorname{cth} z_*},\qquad n\in\mathbb{N}_0.\end{aligned}\tag{6.39}$$

Як наслідок із теореми отримуємо розвинення гіперболічного котангенса в Т–КЛД в околі точки $z=z_*$

$$\operatorname{cth} z=\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}+\frac{z-z_*}{\frac{\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{z}^2-1}}+\frac{z-z_*}{\frac{\mathfrak{z}^2-1}{\mathfrak{z}}}+\frac{z-z_*}{\frac{3}{1-\mathfrak{z}^2}}+\frac{z-z_*}{\frac{(1-\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{z}}}+\cdots+\frac{z-z_*}{\frac{(4n+1)\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{z}^2-1}}+\right.$$
$$\left.+\frac{z-z_*}{\frac{\mathfrak{z}^2-1}{\mathfrak{z}}}+\frac{z-z_*}{\frac{4n+3}{1-\mathfrak{z}^2}}+\frac{z-z_*}{\frac{1-\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{z}}}+\cdots\right)^{-1},\quad \mathfrak{z}=\operatorname{cth} z_*.\tag{6.40}$$

В частинному випадку маємо розвинення функції $\operatorname{cth} z$ в околі точки $z=\ln\sqrt{2}$

$$\operatorname{cth} z=\left(\frac{1}{3}+\frac{z-\ln\sqrt{2}}{9/8}+\frac{z-\ln\sqrt{2}}{8/3}+\frac{z-\ln\sqrt{2}}{-3/2}+\frac{z-\ln\sqrt{2}}{-8/3}+\cdots+\right.$$
$$\left.+\frac{z-\ln\sqrt{2}}{9(4n+1)/8}+\frac{z-\ln\sqrt{2}}{8/3}+\frac{z-\ln\sqrt{2}}{-(4n+3)/2}+\frac{z-\ln\sqrt{2}}{-8/3}+\cdots\right)^{-1}.$$

6.8. Коефіцієнти розвинення функції в С–КЛД

Запишемо Т–КЛД (6.10) у такому вигляді

$$f(z) = \left(e_0(z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty} \frac{e_n(z_*)(z - z_*)}{1}\right)^{-1}, \tag{6.41}$$

де

$$e_0(z_*) = d_0(z_*),\ e_1(z_*) = \frac{1}{d_1(z_*)},\ e_n = \frac{1}{d_{n-1}(z_*)d_n(z_*)},\ n \in \mathbb{N}_2. \tag{6.42}$$

Згідно із формулами (6.11) маємо, що коефіцієнти ланцюгового дробу (6.41) визначаються через обернені похідні 2–го типу наступним чином

$$e_0(z_*) = \frac{1}{f(z_*)},\ e_1(z_*) = \frac{1}{{}^{\{1\}}f(z_*)},\ e_n(z_*) = \frac{\left({}^{\{n-2\}}f(z_*)\right)' \cdot \left({}^{\{n-1\}}f(z_*)\right)'}{(n-1)\cdot n}. \tag{6.43}$$

Ланцюговий дріб (6.41) називається квазі–оберненим ланцюговим дробом типу С–дробу (С–КЛД). С–КЛД еквівалентний Т–КЛД (6.10) за побудовою.

Надалі будемо припускати, що значення $f(z_*)$, ${}^{\{1\}}f(z_*)$, $({}^{\{n-1\}}f(z_*))'$, коли $n \in \mathbb{N}$, визначені, а отже коефіцієнти можна знайти за формулами (6.43).

Означення 6.2. Розвинення функції в ланцюговий дріб (6.41), коефіцієнти якого обчислюються за формулами (6.43), називається розвиненням функції $f(z)$ у С–КЛД в околі точки $z = z_*$.

Теорема 6.22. *Нехай $H_k^{(n)}(z_*)$ є визначник Ганкеля, елементи якого рівні $c_m(z_*) = f^{(m)}(z_*)/m!$, $m \in \mathbb{N}_0$. Коефіцієнти С–КЛД (6.41) функції f в околі точки $z = z_*$ визначаються через відношення визначників Ганкеля наступним чином*

$$e_0(z_*) = \frac{1}{H_1^{(0)}(z_*)}, \quad e_1(z_*) = \frac{-H_1^{(1)}(z_*)}{\left(H_1^{(0)}(z_*)\right)^2}, \quad e_{2k}(z_*) = \frac{-H_{k+1}^{(0)}(z_*)H_{k-1}^{(1)}(z_*)}{H_k^{(0)}(z_*)H_k^{(1)}(z_*)},$$

$$e_{2k+1}(z_*) = \frac{-H_k^{(0)}(z_*)H_{k+1}^{(1)}(z_*)}{H_{k+1}^{(0)}(z_*)H_k^{(1)}(z_*)}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Доведення. Формули безпосередньо випливають з формул (6.13) теореми 6.10. □

6.9. Збіжність С–КЛД до функції. Апостеріорна оцінка

Теореми 1.30 та 1.31 стосувалися правильного ланцюгового С–дробу. Уточнимо формулювання вказаних теорем для С–КЛД.

Теорема 6.23. *Нехай елементи С–КЛД* (6.41) *такі, що*

$$\lim_{n\to\infty} e_n = 0, \quad e_n \neq 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{6.44}$$

Тоді: ***(A)*** *С–КЛД* (6.41) *збігаєтьса до мероморфної функції* $f(z)$*;* ***(B)*** *збіжність буде рівномірна на кожному компакті* $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$*, який не містить полюсів* $f(z)$*;* ***(C)*** *функція* $f(z)$ *голоморфна в точці* $z = z_*$ *і* $f(z_*) = 1/e_0$.

Доведення. Зробимо позначення $\bar{z} = z - z_*$ та запишемо ланцюговий дріб (6.41) у вигляді

$$\left(e_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty} \frac{e_n(z - z_*)}{1}\right)^{-1} = \frac{1}{e_0 \cdot G(\bar{z})}, \tag{6.45}$$

де

$$G(\bar{z}) = 1 + \frac{e_1\bar{z}/e_0}{1} \underset{+}{} \frac{e_2\bar{z}}{1} \underset{+}{} \frac{e_3\bar{z}}{1} \underset{+}{} \cdots. \tag{6.46}$$

За припущенням умови (6.44) мають місце. Тоді правильний ланцюговий С–дріб (6.46) згідно із теоремою 1.30: а) збігається до мероморфної функції $\tilde{f}(\bar{z})$; б) на довільному компакті $K \subset \mathbb{C}$, який не містить полюсів функції $\tilde{f}(\bar{z})$, збіжність буде рівномірною; в) функція $\tilde{f}(\bar{z})$ буде голоморфна в точці $\bar{z} = 0$ і $\tilde{f}(0) = 1$. Враховуючи (6.45) отримуємо твердження теореми. □

Теорема 6.24. *Нехай* $R_a = \{z : |\arg(a(z - z_*) + 1/4)| < \pi\}$ *і елементи С–КЛД* (6.41) *такі, що*

$$\lim_{n\to\infty} e_n = a \neq 0, \quad a \in \mathbb{C}. \tag{6.47}$$

Тоді: ***(A)*** *ланцюговий дріб збігаєтьса до функції* $f(z)$*, яка мероморфна в* R_a*;* ***(B)*** *збіжність буде рівномірна на кожній компактній підмножині* $\mathcal{Z}$ *із* R_a*, яка не містить полюсів* $f(z)$*;* ***(C)*** *функція* $f(z)$ *голоморфна в точці* $z = z_*$.

Доведення. Аналогічно, як і при доведенні теореми 6.23, позначимо через $\bar{z} = z - z_*$ та запишемо ланцюговий дріб (6.41) у вигляді (6.45). Оскільки за припущенням умови (6.47) виконуються, то для правильного ланцюгового C–дробу (6.46) будуть вірними твердження **(A)**–**(C)** теореми 1.31, а тоді в силу співвідношення (6.45) мають місце твердження даної теореми. $\square$

Розглянемо ланцюговий дріб вигляду

$$f = \left(a_0 e^{i\varphi_0} + \operatorname*{K}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k e^{i\varphi_k}}{1} \right)^{-1}, \qquad a_k \in \mathbb{R}. \tag{6.48}$$

Теорема 6.25. *Нехай елементи ланцюгового дробу*

$$F = \frac{1}{a_0} - \frac{a_1}{1} - \frac{a_2}{1} - \cdots \tag{6.49}$$

задовольняють умови

$$a_0 \geqslant 1, \quad 0 < a_k \leqslant 1/4, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{6.50}$$

Тоді ланцюговий дріб (6.49) *збігається і* $0 < F \leqslant 1 + 1/a_0$.

Доведення. Нехай $F_n = A_n/B_n$ є n–й підхідний дріб ланцюгового дробу (6.49). За індукцією покажемо, що

$$B_n \geqslant \frac{n+2}{2^{n+1}}, \quad B_n \geqslant \frac{n+2}{2(n+1)} B_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{6.51}$$

Очевидно, що $B_0 = a_0 \geqslant 1, B_1 = a_0 - a_1 \geqslant 3/4, B_1 = a_0 - a_1 \geqslant 3B_0/4$. Отже, для $n = 1$ нерівності (6.51) мають місце. Припустимо, що вказані нерівності виконуються для $n = k - 1$. З формул Валліса (1.6) маємо, що $B_k = B_{k-1} - a_k B_{k-2} \geqslant B_{k-1} - \frac{1}{4}\frac{2k}{k+1} B_{k-1} = \frac{k+2}{2(k+1)} B_{k-1}$, $B_k = B_{k-1} - a_k B_{k-2} \geqslant$ $\geqslant \frac{k+1}{2^k} - \frac{1}{4}\frac{k}{2^{k-1}} = \frac{k+2}{2^{k+1}}$. Отже, нерівності (6.51) вірна для довільного n.

Підхідний дріб F_n визначається через елементи дробу за формулою (3.5). В цьому випадку $b_0^{(r)}(z) = a_0, a_i^{(r)} = -a_i$, $i \in \mathbb{N}$. Тоді

$$F_n = \frac{1}{a_0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_1 a_2 \ldots a_k}{B_k\, B_{k-1}}.$$

В свою чергу з нерівностей (6.51) маємо, що

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_k}{B_k\, B_{k-1}} \leqslant \frac{2}{(k+1)(k+2)}, \quad F_n \leqslant \frac{1}{a_0} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)},$$

а тоді $F = \lim_{n\to\infty} F_n \leqslant 1 + \frac{1}{a_0}$. □

Теорема 6.26. *Якщо елементи ланцюгових дробів* (6.48) *і* (6.49) *задовольняють умови* (6.50), *то дріб* (6.48) *збігається рівномірно і* $|f| < F$.

Доведення. Нехай підхідні дроби розглядуваних ланцюгових дробів відповідно рівні $f_n(z) = P_n(z)/Q_n(z)$, $F_n = A_n/B_n$. За допомогою індукції доведемо одне допоміжне твердження

$$|Q_n(z)| \geqslant B_n, \quad |Q_n(z)/Q_{n-1}(z)| \geqslant B_n/B_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{6.52}$$

Легко бачити, що $|Q_0(z)| = |a_0 e^{i\varphi_0}| = a_0 = B_0$, $|Q_1(z)| = |a_0 e^{i\varphi_0} + a_1 e^{i\varphi_1}| \geqslant$ $\geqslant a_0 - a_1 = B_1$, $|Q_1(z)/Q_0(z)| \geqslant B_1/B_0$. Припустимо, що нерівності (6.52) виконуються для $n = m-1$. Тоді

$$|Q_m(z)| = |Q_{m_1}(z) + a_m e^{i\varphi_m} Q_{m-2})(z)| \geqslant \big||Q_{m-1}(z)| - |a_m e^{i\varphi_m}||Q_{m-2}(z)|\big| =$$

$$= |Q_{m-1}(z)| \left|1 - |a_m e^{i\varphi_m}|\,\frac{|Q_{m-2}(z)|}{|Q_{m-1}(z)|}\right| \geqslant B_{m-1}\left(1 - a_m \frac{B_{m-2}}{B_{m-1}}\right) = B_m.$$

Крім того

$$\frac{|Q_m(z)|}{|Q_{m-1}(z)|} = \frac{|Q_{m-1}(z) + a_m e^{i\varphi_m} Q_{m-2}(z)|}{|Q_{m-1}(z)|} = \left|1 - |a_m e^{i\varphi_m}| \frac{|Q_{m-2}(z)|}{|Q_{m-1}(z)|}\right| \geqslant$$

$$\geqslant 1 - a_m \frac{B_{m-2}}{B_{m-1}} = \frac{B_m}{B_{m-1}}.$$

Отже, оцінки (6.52) виконується для довільного n.

Оскільки згідно з співвідношенням (3.5)

$$f_n = \frac{1}{a_0 e^{i\varphi_0}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \prod_{m=1}^{k} a_m e^{i\varphi_m}}{Q_k(z) Q_{k-1}(z)}, \quad \text{то} \quad |f_n| \leqslant \frac{1}{a_0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{m=1}^{k} a_m}{B_k B_{k-1}}.$$

За теоремою 6.25 ланцюговий дріб (6.49) збіжний і $|f| < F = 1 + \frac{1}{a_0}$. □

Теорема 6.27. *Якщо елементи ланцюгового дробу* (6.48) *задовольняють умови* $a_0 \geqslant 1$, $0 < a_i \leqslant 1/4 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon \leqslant 1/4$, $i \in \mathbb{N}_0$, *то*

$$\left| f - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} \right| \leqslant \left(\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} - 1 \right) \left| \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} - \frac{P_{n-1}(z)}{Q_{n-1}(z)} \right|. \tag{6.53}$$

Доведення. Оскільки $f = (P_n(z) + \bar{\omega} P_{n-1}(z))/(Q_n(z) + \bar{\omega} Q_{n-1}(z))$, де $\bar{\omega} = \mathbf{K}_{k=n+1}^{\infty}(a_k e^{i\varphi_k}/1)$ є $(n+1)$–й залишок ланцюгового дробу (6.48), то

$$f - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{P_n(z) + \bar{\omega} P_{n-1}(z)}{Q_n(z) + \bar{\omega} Q_{n-1}(z)} - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} =$$

$$= \frac{-\bar{\omega}(P_n(z) Q_{n-1}(z) - P_{n-1}(z) Q_n(z))}{Q_n(z) Q_{n-1}(z) (\frac{Q_n(z)}{Q_{n-1}} + \bar{\omega})} = \frac{-\bar{\omega}\left(\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} - \frac{P_{n-1}(z)}{Q_{n-1}(z)} \right)}{\frac{Q_n(z)}{Q_{n-1}} + \bar{\omega}}.$$

В роботі [122] показано, що коли виконуються умови теореми, то має місце оцінка $|\bar{\omega}| \leqslant \frac{1}{2} - \sqrt{\varepsilon}$. Із нерівностей (6.51) та (6.52) випливає, що $\frac{|Q_n(z)|}{|Q_{n-1}(z)|} > \frac{1}{2}$. Тоді кінцеве отримуємо, що нерівність (6.53) вірна. □

6.10. Розвинення функцій в С–КЛД

Розглянемо розвинення деяких функцій в С–КЛД та встановимо області збіжності отриманих розвинень.

6.10.1. Функція e^z.

З формул (6.14) та (6.42) випливає, що коефіцієнти розвинення функції в С–КЛД в околі точки $z = z_*$ будуть рівні

$$e_0(z_*) = e^{-z_*},\ e_1(z_*) = -e^{-z_*},\ e_{2k}(z_*) = \frac{1}{2(2k-1)},\ e_{2k+1}(z_*) = \frac{-1}{2(2k+1)},\ k \in \mathbb{N}.$$

Функція e^z має наступне розвинення в С–КЛД в околі точки $z = z_*$

$$e^z = e^{z_*} \left(1 - \frac{z - z_*}{1} + \frac{(z - z_*)/2}{1} - \frac{(z - z_*)/6}{1} + \frac{(z - z_*)/6}{1} - \dots + \right.$$
$$\left. + \frac{(z - z_*)/(2\,(2k-1))}{1} - \frac{(z - z_*)/(2\,(2k+1))}{1} + \dots \right)^{-1}. \tag{6.54}$$

В частинному випадку в околі точки $z=0$ розвинення набуде вигляду

$$e^z=\left(1-\frac{z}{1}+\frac{z/2}{1}-\frac{z/6}{1}+\frac{z/6}{1}-\frac{z/10}{1}+\frac{z/10}{1}-\frac{z/14}{1}+\frac{z/14}{1}-\right.$$

$$\left.-\dots+\frac{z/(2\,(2k-1))}{1}-\frac{z/(2\,(2k+1))}{1}+\dots\right)^{-1}.$$

Теорема 6.28. ***(A)*** *С–КЛД* (6.54) *та еквівалентний Т–КЛД* (6.15) *збігаються до функції* e^z *на всій комплексній площині* $\mathbb{C}$; ***(B)*** *на довільному компакті* $\mathcal{Z}\subset\mathbb{C}$ *ланцюгові дроби збігаються рівномірно.*

Доведення. Оскільки $e_k(z_*)\neq 0$ і

$$\lim_{k\to\infty}e_{2k}(z_*)=\lim_{k\to\infty}e_{2k+1}(z_*)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2(2k-1)}=\lim_{k\to\infty}\frac{-1}{2(2k+1)}=0,$$

то в силу теореми 6.23 твердження теореми мають місце. □

Теорема 6.29. *Якщо* $|z-z_*|\leqslant\frac{1}{4}-\varepsilon$, *де* $0<\varepsilon\leqslant\frac{1}{4}$, *то для* n*–го підхідного дробу* $f_n(z)$ *розвинення функції* e^z *в С–КЛД в околі точки* $z=z_*$ *має місце апостеріорна оцінка*

$$|e^z-f_n(z)|\leqslant\Big(\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}-1\Big)\big|f_n(z)-f_{n-1}(z)\big|. \tag{6.55}$$

Доведення. Оцінка (6.55) безпосередньо випливає з теореми 6.27. □

6.10.2. Функція $(c+z)^{\alpha}$**.** Згідно із формулами (6.20) та (6.42) маємо, що коефіцієнти розвинення в С–КЛД в околі точки $z=z_*$ функції $(c+z)^{\alpha}$, де $c=const$, $\alpha\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, рівні $e_0(z_*)=(c+z_*)^{-\alpha}$, $e_1(z_*)=\frac{-\alpha}{(c+z_*)^{1+\alpha}}$, $e_{2n}(z_*)=$ $=\frac{n+\alpha}{2(2n-1)(c+z_*)}$, $e_{2n+1}(z_*)=\frac{n-\alpha}{2(2n+1)(c+z_*)}$, $n\in\mathbb{N}$. Маємо розвинення функції в С–КЛД

$$(c+z)^{\alpha}=\frac{\mathfrak{z}^{\alpha}}{1}-\frac{\frac{\alpha}{\mathfrak{z}}(z-z_*)}{1}+\frac{\frac{1+\alpha}{2\mathfrak{z}}(z-z_*)}{1}+\frac{\frac{1-\alpha}{6\mathfrak{z}}(z-z_*)}{1}+\frac{\frac{2+\alpha}{6\mathfrak{z}}(z-z_*)}{1}+$$

$$+\frac{\frac{2-\alpha}{10\mathfrak{z}}(z-z_*)}{1}+\dots+\frac{\frac{n+\alpha}{2(2n-1)\mathfrak{z}}(z-z_*)}{1}+\frac{\frac{n-\alpha}{2(2n+1)\mathfrak{z}}(z-z_*)}{1}+\dots, \tag{6.56}$$

де $\mathfrak{z}=c+z_*$.

Теорема 6.30. ***(A)*** *С–КЛД* (6.56) *та Т–КЛД* (6.21) *збігаються до функції* $(c+z)^\alpha$ *на множині* $\mathbf{R}(c, z_*) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(c+z) - \arg(c+ + z_*)| < \pi\}$; ***(B)*** *на довільному компакті* $\mathcal{Z} \subset \mathbf{R}(c, z_*)$ *ланцюгові дроби збігаються рівномірно.*

Доведення. Оскільки $\lim_{n\to\infty} \frac{n+\alpha}{2(2n-1)\mathfrak{z}} = \lim_{k\to\infty} \frac{n-\alpha}{2(2n+1)\mathfrak{z}} = \frac{1}{4\mathfrak{z}}$, то тоді $\arg\left(\frac{z-z_*}{4(z_*+c)} + \frac{1}{4}\right) = \arg\left(\frac{z+c}{4(c+z_*)}\right) = \arg(z+c) - \arg(c+z_*)$. Згідно із теоремою 6.24 маємо, що ланцюгові дроби збігаються до функції $(c+z)^\alpha$ і на компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbf{R}(c, z_*)$ ланцюгові дроби збігаються рівномірно. □

У випадку, коли $\alpha = k, k \in \mathbb{N}$, отримаємо зображення функції $(c+z)^k$ скінченним С–КЛД

$$(c+z)^k = \frac{\mathfrak{z}^k}{1} - \frac{k(z-z_*)/\mathfrak{z}}{1} + \frac{(1+k)(z-z_*)/2\mathfrak{z}}{1} + \frac{(1-k)(z-z_*)/6\mathfrak{z}}{1} + \\ + \frac{(2+k)(z-z_*)/6\mathfrak{z}}{1} + \dots + \frac{(z-z_*)/2(2k-1)\mathfrak{z}}{1} + \frac{2k(z-z_*)/2(2k-1)\mathfrak{z}}{1}.$$

Аналогічно функція $(c+z)^{-k}, k \in \mathbb{N}$, може бути подана скінченним С–КЛД

$$(c+z)^{-k} = \frac{\mathfrak{z}^{-k}}{1} + \frac{k(z-z_*)/\mathfrak{z}}{1} + \frac{(1-k)(z-z_*)/2\mathfrak{z}}{1} + \frac{(1+k)(z-z_*)/6\mathfrak{z}}{1} + \\ + \dots + \frac{(z-z_*)/2(2k-3)\mathfrak{z}}{1} + \frac{(2k-1)(z-z_*)/2(2k-1)\mathfrak{z}}{1}.$$

6.10.3. Функція $\ln(c+z)$**.** Якщо використати позначення (6.25), то коефіцієнти розвинення функції $\ln(c+z)$ в С–КЛД в околі точки $z = z_*$ згідно із формулами (6.24) та (6.42) збудуть рівні: $e_0(z_*) = 1/S_0^*$, $e_1(z_*) = = -1/\mathfrak{z}(S_0^*)^2$, $e_{2n}(z_*) = nS_n^*/2(2n-1)\mathfrak{z}S_{n-1}^*$, $e_{2n+1}(z_*) = nS_{n-1}^*/2(2n+1)\mathfrak{z}S_n^*$, $n \in \mathbb{N}$. Маємо розвинення функції в С–КЛД

$$\ln(c+z) = \frac{S_0^*}{1} - \frac{(z-z_*)S_{-1}^*/\mathfrak{z}S_0^*}{1} + \frac{(z-z_*)S_1^*/2\mathfrak{z}S_0^*}{1} + \frac{(z-z_*)S_0^*/6\mathfrak{z}S_1^*}{1} + \\ + \frac{(z-z_*)2S_2^*/6\mathfrak{z}S_1^*}{1} + \frac{(z-z_*)2S_1^*/10\mathfrak{z}S_2^*}{1} + \dots + \\ + \frac{(z-z_*)nS_n^*/2(2n-1)\mathfrak{z}S_{n-1}^*}{1} + \frac{(z-z_*)nS_{n-1}^*/2(2n+1)\mathfrak{z}S_n^*}{1} + \dots . \quad (6.57)$$

Теорема 6.31. ***(A)*** *С–КЛД* (6.57) *та Т–КЛД* (6.26) *збігаються до функції* $\ln(c+z)$ *на множині* $\mathbf{R}(c, z_*) = \{z \in \mathbb{C}\backslash\{-c\} : |\arg(z+c) - -\arg(c+z_*)| < \pi\}$; ***(B)*** *ланцюгові дроби збігаються рівномірно на довільному компакті* $\mathcal{Z} \subset \mathbf{R}(c, z_*)$.

Доведення. Знайдемо границю

$$\lim_{n\to\infty} e_{2n}(z_*) = \lim_{n\to\infty} \frac{nS_n^*}{2(2n-1)\mathfrak{z}S_{n-1}^*} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2H_n + \ln\mathfrak{z})}{2(2n-1)\mathfrak{z}(2H_{n-1} + \ln\mathfrak{z})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(2-1/n)\mathfrak{z}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2 + 2/H_{n-1} + \ln\mathfrak{z}/H_{n-1}}{2 + \ln\mathfrak{z}/H_{n-1}} = \frac{1}{4(c+z_*)} .$$

Аналогічно

$$\lim_{n\to\infty} e_{2n+1}(z_*) = \lim_{n\to\infty} \frac{nS_{n-1}^*}{2(2n+1)\mathfrak{z}S_n^*} = \frac{1}{4(c+z_*)} .$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} e_{2n}(z_*) = \lim_{n\to\infty} e_{2n+1}(z_*) = \frac{1}{4(c+z_*)},$$

та

$$\arg\left(\frac{z-z_*}{4(z_*+c)} + \frac{1}{4}\right) = \arg\left(\frac{z+c}{4(c+z_*)}\right) = \arg(z+c) - \arg(c+z_*),$$

то згідно із теоремою 6.24 виконується дана теореми виконуються. $\square$

6.10.4. Функція $z\ln z$**.** Коефіцієнти розвинення функції $z\ln z$ в околі точки $z = z_*$ в С–КЛД згідно із формулами (6.29) та (6.42) будуть рівні

$$\begin{aligned}
e_0(z_*) &= \frac{1}{z_*\mathfrak{z}}, \quad e_1(z_*) = \frac{-(\mathfrak{z}+1)}{z_*^2\mathfrak{z}^2}, \\
e_2(z_*) &= \frac{2\mathfrak{z}^2 + 3\mathfrak{z} + 2}{2z_*\mathfrak{z}(\mathfrak{z}+1)}, \quad e_3(z_*) = \frac{-\mathfrak{z}(\mathfrak{z}+5/2)}{3z_*(\mathfrak{z}+1)(2\mathfrak{z}^2+3\mathfrak{z}+2)}, \\
e_{2n}(z_*) &= \frac{(n-1)(\mathfrak{z}+\gamma_{n-2})(n(n+1)\mathfrak{z}^2 + \alpha_n\mathfrak{z} + \beta_n))}{2(2n-1)z_*(\mathfrak{z}+\gamma_{n-1})((n-1)n\mathfrak{z}^2 + \alpha_{n-1}\mathfrak{z} + \beta_{n-1})}, \\
e_{2n+1}(z_*) &= \frac{(n+1)(\mathfrak{z}+\gamma_n)((n-1)n\mathfrak{z}^2 + \alpha_{n-1}\mathfrak{z} + \beta_{n-1}))}{2(2n+1)z_*(\mathfrak{z}+\gamma_{n-1})(n(n+1)\mathfrak{z}^2 + \alpha_n\mathfrak{z} + \beta_n)},
\end{aligned} \tag{6.58}$$

де $n \in \mathbb{N}_2, \mathfrak{z} = \ln z_*$, а величини $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ визначені в (6.28).

Для спрощення записів введемо позначення

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{p}_n =&\mathfrak{z} + \gamma_n = \ln z_* + 2H_n + 1/(n+1), \qquad n \in \mathbb{N}_0,\\
\mathfrak{q}_n =&n(n+1)\mathfrak{z}^2 + \alpha_n \mathfrak{z} + \beta_n = n(n+1)\ln^2 z_* + \\
&+ \big(4n(n+1)H_n - 2n^2 - 2n - 1\big)\ln z_* + 4n(n+1)H_n^2 - \\
&- 2(2n^2 + 2n + 1)H_n + 2n(n+1).
\end{aligned}
\tag{6.59}
$$

Скориставшись позначеннями (6.59) в записах коефіцієнтів (6.58) отримуємо розвинення функції $z \ln z$ в С–КЛД в околі точки $z = z_*$

$$
\begin{aligned}
z\ln z = \frac{z_*\ln z_*}{1} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{p}_0/z_*\mathfrak{q}_0}{1} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{q}_1/2z_*\ln z_*\mathfrak{p}_0}{1} + \\
+ \frac{(z-z_*)\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_0/3z_*\mathfrak{p}_0\mathfrak{q}_1}{1} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{p}_0\mathfrak{q}_2/6z_*\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1}{1} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_1/10z_*\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_2}{1} + \\
+ \cdots + \frac{(z-z_*)(n-1)\mathfrak{p}_{n-2}\mathfrak{q}_n/2(2n-1)z_*\mathfrak{p}_{n-1}\mathfrak{q}_{n-1}}{1} + \\
+ \frac{(z-z_*)(n+1)\mathfrak{p}_n\mathfrak{q}_{n-1}/2(2n+1)z_*\mathfrak{p}_{n-1}\mathfrak{q}_n}{1} + \cdots .
\end{aligned}
\tag{6.60}
$$

Якщо $z_* = e$, то розвинення (6.60) набуде вигляду

$$
\begin{aligned}
z\ln z = \frac{e}{1} + \frac{(z-e)\mathfrak{p}_0^e/e\mathfrak{q}_0^e}{1} + \frac{(z-e)\mathfrak{q}_1^e/2e\mathfrak{p}_0^e}{1} + \frac{(z-e)\mathfrak{p}_1^e\mathfrak{q}_0^e/3e\mathfrak{p}_0^e\mathfrak{q}_1^e}{1} + \\
+ \frac{(z-e)\mathfrak{p}_0^e\mathfrak{q}_2^e/6e\mathfrak{p}_1^e\mathfrak{q}_1^e}{1} + \frac{(z-e)\mathfrak{p}_2^e\mathfrak{q}_1^e/10e\mathfrak{p}_1^e\mathfrak{q}_2^e}{1} + \cdots + \\
+ \frac{(z-e)(n-1)\mathfrak{p}_{n-2}^e\mathfrak{q}_n^e/2(2n-1)e\mathfrak{p}_{n-1}^e\mathfrak{q}_{n-1}^e}{1} + \\
+ \frac{(z-e)(n+1)\mathfrak{p}_n^e\mathfrak{q}_{n-1}^e/2(2n+1)e\mathfrak{p}_{n-1}^e\mathfrak{q}_n^e}{1} + \cdots ,
\end{aligned}
$$

де $\mathfrak{p}_n^e = 2H_{n+1} + n/(n+1)$, $\mathfrak{q}_n^e = 4n(n+1)H_n^2 - 2H_n + n^2 + n - 1$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Теорема 6.32. ***(A)*** *С–КЛД* (6.60) *та Т–КЛД* (6.30) *збігаються до функції* $z \ln z$ *на множині* $\mathbf{R}(0, z_*) = \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\arg(z) - \arg(z_*)| < \pi\}$; ***(B)*** *ланцюгові дроби збігаються рівномірно на компакті* $\mathcal{Z} \subset \mathbf{R}(0, z_*)$.

Доведення. Знайдемо границю

$$\lim_{n\to\infty} e_{2n}(z_*) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)\mathfrak{p}_{n-2}\mathfrak{q}_n}{2(2n-1)z_*\mathfrak{p}_{n-1}\mathfrak{q}_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2(2n-1)z_*}\times$$

$$\times \lim_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{z}+2H_{n-2}+\frac{1}{n-1}}{\mathfrak{z}+2H_{n-1}+\frac{1}{n}} \lim_{n\to\infty} \Big(n(n+1)\mathfrak{z}^2 + \big(4n(n+1)H_n - 2n^2 - 2n - 1\big)\mathfrak{z}+$$

$$+4n(n+1)H_n^2 - 2(2n^2+2n+1)H_n + 2n(n+1)\Big)\Big/\Big(n(n-1)\mathfrak{z}^2+$$

$$+\big(4n(n-1)H_{n-1} - 2n^2 + 2n - 1\big)\mathfrak{z} + 4n(n-1)H_{n-1}^2-$$

$$-2(2n^2-2n+1)H_{n-1} + 2n(n-1)\Big).$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} H_n/H_{n-1} = 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{z}+2H_{n-2}+\frac{1}{n-1}}{\mathfrak{z}+2H_{n-1}+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{z}/2H_{n-2}+1+1/2(n-1)H_{n-2}}{\mathfrak{z}/2H_{n-2}+H_{n-1}/H_{n-2}+1/2nH_{n-2}} = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} \Big(n(n+1)\mathfrak{z}^2+\big(4n(n+1)H_n-2n^2-2n-1\big)\mathfrak{z}+4n(n+1)H_n^2-2(2n^2+2n+1)H_n+$$

$$+2n(n+1)\Big)\Big/\Big(n(n-1)\mathfrak{z}^2+\big(4n(n-1)H_{n-1}-2n^2+2n-1\big)\mathfrak{z}+4n(n-1)H_{n-1}^2-$$

$$-2(2n^2-2n+1)H_{n-1}+2n(n-1)\Big) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n(n+1)\mathfrak{z}^2}{4n^2H_{n-1}^2} + \frac{4n(n+1)H_n\mathfrak{z}}{4n^2H_{n-1}^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{(2n^2+2n+1)\mathfrak{z}}{4n^2H_{n-1}^2}\mathfrak{z} + \frac{4n(n+1)H_n^2}{4n^2H_{n-1}^2} - \frac{2(2n^2+2n+1)H_n}{4n^2H_{n-1}^2} + \frac{2n(n+1)}{4n^2H_{n-1}^2}\right) :$$

$$:\left(\frac{n(n-1)\mathfrak{z}^2}{4n^2H_{n-1}^2} + \frac{4n(n-1)H_{n-1}\mathfrak{z}}{4n^2H_{n-1}^2} - \frac{(2n^2-2n+1)\mathfrak{z}}{4n^2H_{n-1}^2} + \frac{4n(n-1)H_{n-1}^2}{4n^2H_{n-1}^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{2(2n^2-2n+1)H_{n-1}}{4n^2H_{n-1}^2} + \frac{2n(n-1)}{4n^2H_{n-1}^2}\right) = 1.$$

А тоді $\lim\limits_{n\to\infty} e_{2n}(z_*) = 1/4z_*$. Аналогічно: $\lim\limits_{n\to\infty} e_{2n+1}(z_*) = 1/4z_*$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} e_n(z_*) = \frac{1}{4z_*}$. Далі $\arg\left(\frac{z-z_*}{4z_*}+\frac{1}{4}\right) = \arg(z) - \arg(z_*)$. Умови теореми 6.24 виконують, а отже дана теорема має місце. □

В розвинені функції $\ln(c+z)$ в С–КЛД (6.57) в околі точки $z = z_*$ візьмемо $c = 0$ і помножимо на z. Тоді маємо

$$z\ln z = \frac{z\ln z_*}{1} + \frac{(z-z_*)/z_*\ln z_*}{1} + \frac{(z-z_*)(2+\ln z_*)/2z_*\ln z_*}{1} +$$

$$+\frac{(z-z_*)\ln z_*/6z_*(2+\ln z_*)}{1}+\frac{(z-z_*)(3+\ln z_*)/3z_*(2+\ln z_*)\ln z_*}{1}+$$

$$+\cdots+\frac{(z-z_*)n\bar{S}_n/2(2n-1)z_*\bar{S}_{n-1}}{1}+$$

$$+\frac{(z-z_*)n\bar{S}_{n-1}/2(2n+1)z_*\bar{S}_n}{1}+\cdots, \quad \bar{S}_n=2H_n+\ln z_*,\ n\in\mathbb{N}. \tag{6.61}$$

Підхідні дроби ланцюгового дробу (6.61) утворюють послідовність раціональних функцій $\bar{P}_n(z)/\bar{Q}_n(z)$, де степені многочленів чисельника та знаменника задовольняють умови $\mathbf{deg}\,\bar{P}_n(z)\leqslant\left[\frac{n+2}{2}\right]$, $\mathbf{deg}\,\bar{Q}_n(z)\leqslant\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

З іншого боку функція $z\ln z$ в околі точки $z=z_*$ розвивається в С–КЛД вигляду (6.60) підхідні дроби якого, в свою чергу, утворюють послідовність раціональних функцій $\hat{P}_n(z)/\hat{Q}_n(z)$, де степені многочленів чисельника та знаменника задовольняють умови $\mathbf{deg}\,\hat{P}_n(z)\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$, $\mathbf{deg}\,\hat{Q}_n(z)\leqslant\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Вказані ланцюгові дроби не будуть еквівалентними, але мають спільну область збіжності.

6.10.5. Функція $\operatorname{tg} z$**.** Згідно із формулами (6.32) та (6.42) коефіцієнти розвинення функції $\operatorname{tg} z$ в С–КЛД в околі точки $z=z_*$ рівні: $e_0(z_*)=$ $=1/\mathfrak{z}$, $e_1(z_*)=-(1+\mathfrak{z}^2)/\mathfrak{z}^2$, $e_{2n}(z_*)=(-1)^{n-1}\mathfrak{z}^{(-1)^n}/(2n-1)$, $e_{2n+1}(z_*)=$ $=(-1)^{n-1}\mathfrak{z}^{(-1)^{n-1}}/(2n+1)$, $\mathfrak{z}=\operatorname{tg} z_*$, $n\in\mathbb{N}$. Маємо розвинення

$$\operatorname{tg} z=\frac{\mathfrak{z}}{1}-\frac{(z-z_*)(1+\mathfrak{z}^2)/\mathfrak{z}}{1}+\frac{(z-z_*)/\mathfrak{z}}{1}+\frac{(z-z_*)\mathfrak{z}/3}{1}-\frac{(z-z_*)\mathfrak{z}/3}{1}-$$

$$-\frac{(z-z_*)/5\mathfrak{z}}{1}+\frac{(z-z_*)/5\mathfrak{z}}{1}+\cdots+\frac{(z-z_*)(-1)^{n-1}\mathfrak{z}^{(-1)^n}/(2n-1)}{1}+$$

$$+\frac{(z-z_*)(-1)^{n-1}\mathfrak{z}^{(-1)^{n+1}}/(2n+1)}{1}+\cdots. \tag{6.62}$$

В околі точки $z=\pi/4$ розвинення функції $\operatorname{tg} z$ в С–КЛД матиме вигляд

$$\operatorname{tg} z=\frac{1}{1}-\frac{2(z-\frac{\pi}{4})}{1}+\frac{z-\frac{\pi}{4}}{1}+\frac{(z-\frac{\pi}{4})/3}{1}-\frac{(z-\frac{\pi}{4})/3}{1}+\cdots+$$

$$+\frac{(-1)^{k-1}(z-\frac{\pi}{4})/(2k-1)}{1}+\frac{(-1)^{k-1}(z-\frac{\pi}{4})/(2k+1)}{1}+\cdots. \tag{6.63}$$

Теорема 6.33. ***(A)*** *С–КЛД* (6.62) *та Т–КЛД* (6.33) *збігаються до функції* $\operatorname{tg} z$ *на на всій комплексній площині* $\mathbb{C}$ *за винятком особливих точок функції;* ***(B)*** *на довільному компакті* $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C} \backslash \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ *ланцюгові дроби збігаються рівномірно.*

Доведення. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} = \frac{(-1)^{n-1}(\operatorname{tg} z_*)^{(-1)^n}}{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}(\operatorname{tg} z_*)^{(-1)^{n-1}}}{2n+1} = 0$, то в силу теореми 6.24 має місце дана теорема. □

Теорема 6.34. *Якщо в деякого значення* z_* *виконуеться нерівність* $\frac{1}{5} \leqslant |\operatorname{tg} z_*| \leqslant 1$, *то для ланцюгового дробу* (6.62) *має місце апостеріорна оцінка* (6.53) *для всіх* z *з компакту* $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C} \backslash \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$, *які задовольняють умову* $|z - z_*| \leqslant \frac{1}{26}\big(\frac{1}{4} - \varepsilon\big)$.

Доведення. З умов теореми маємо, що $|e_0(z_*)| \geqslant 1$, $|e_i(z_*)(z - z_*)| \leqslant \leqslant \frac{1}{4} - \varepsilon$. Умови теореми 6.27 задовольняються. Звідки випливає, що має місце оцінка (6.53). □

Аналогічним чином доводиться наступне твердження

Теорема 6.35. *Для всіх* z *з компакту* $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C} \backslash \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ *таких, що* $|z - \frac{\pi}{4}| \leqslant \frac{1}{2}\big(\frac{1}{4} - \varepsilon\big)$ *С–КЛД* (6.63) *задовольняє апостеріорну оцінку* (6.53).

6.10.6. Функція $\operatorname{ctg} z$. З формул (6.35) та (6.42) маємо, що коефіцієнти розвинення функції $\operatorname{ctg} z$ в С–КЛД в околі точки $z = z_*$ будуть рівні:

$e_0(z_*) = \frac{1}{\mathfrak{z}}$, $e_1(z_*) = \frac{1+\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{z}^2}$, $e_{2n}(z_*) = \frac{(-1)^n\,(\mathfrak{z})^{(-1)^n}}{2n-1}$, $e_{2n+1}(z_*) = \frac{(-1)^n\,(\mathfrak{z})^{(-1)^{n+1}}}{2n+1}$, $\mathfrak{z} = \operatorname{ctg} z_*$, $n \in \mathbb{N}$. Розвинення функції в С–КЛД матиме вигляд

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\mathfrak{z}}{1} + \frac{(z-z_*)(1+\mathfrak{z}^2)/\mathfrak{z}}{1} - \frac{(z-z_*)/\mathfrak{z}}{1} - \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}/3}{1} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}/3}{1} + \\ + \frac{(z-z_*)/5\mathfrak{z}}{1} - \frac{(z-z_*)/5\mathfrak{z}}{1} - \cdots + \frac{(-1)^n(z-z_*)\mathfrak{z}^{(-1)^n}/(2n-1)}{1} + \\ + \frac{(-1)^n(z-z_*)\mathfrak{z}^{(-1)^{n+1}}/(2n+1)}{1} + \cdots. \tag{6.64}$$

Розвинення функції $\operatorname{ctg} z$ в околі точки $z = \pi/4$ запишеться у вигляді

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{1} + \frac{2(z-\frac{\pi}{4})}{1} - \frac{z-\frac{\pi}{4}}{1} - \frac{(z-\frac{\pi}{4})/3}{1} + \frac{(z-\frac{\pi}{4})/3}{1} + \cdots +$$

$$+ \frac{(-1)^n\,(z-\frac{\pi}{4})/(2n-1)}{1} + \frac{(-1)^n\,(z-\frac{\pi}{4})/(2n+1)}{1} + \cdots. \tag{6.65}$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n(\operatorname{ctg} z_*)^{(-1)^n}}{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n(\operatorname{ctg} z_*)^{(-1)^{n+1}}}{2n+1} = 0$, то в силу теореми 6.24 має місце наступне твердження.

Теорема 6.36. ***(A)*** *С–КЛД* (6.64) *та Т–КЛД* (6.36) *збігаються до функції* $\operatorname{ctg} z$ *на на всій комплексній площині* $\mathbb{C}$ *за винятком особливих точок функції;* ***(B)*** *на довільному компакті* $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}\backslash\{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ *ланцюгові дроби збігаються рівномірно.*

Зауваження 6.3. Легко бачити, що коефіцієнти ланцюгових дробів (6.62) та (6.64), а також ланцюгових дробів (6.63) та (6.65) відрізняються лише знаками, то для розвинення функції $\operatorname{ctg} z$ в С–КЛД (6.64) в околі точки $z = z_*$ та розвинення в С–КЛД (6.65) в околі точки $z = \frac{\pi}{4}$ мають місце теореми 6.34 та 6.35, які встановлюють апостеріорні оцінки.

6.10.7. Функції $\operatorname{th} z$ та $\operatorname{cth} z$. З формул (6.37) та (6.42) маємо, що коефіцієнти розвинення функції $\operatorname{th} z$ в С–КЛД в околі точки $z = z_*$ рівні:

$$e_0(z_*) = \frac{1}{\mathfrak{z}},\ e_1(z_*) = \frac{\mathfrak{z}^2-1}{\mathfrak{z}^2},\ e_{2n}(z_*) = \frac{(\mathfrak{z})^{(-1)^n}}{2n-1},\ e_{2n+1}(z_*) = \frac{-(\mathfrak{z})^{(-1)^{n+1}}}{2n+1},$$

де $\mathfrak{z} = \operatorname{th} z_*$, $n \in \mathbb{N}$, і розвинення функції набуде вигляду

$$\operatorname{th} z = \frac{\mathfrak{z}}{1} - \frac{(z-z_*)(1-\mathfrak{z}^2)/\mathfrak{z}}{1} + \frac{(z-z_*)/\mathfrak{z}}{1} - \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}/3}{1} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}/3}{1} -$$

$$- \frac{(z-z_*)/5\mathfrak{z}}{1} + \frac{(z-z_*)/5\mathfrak{z}}{1} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}/7}{1} - \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}/7}{1} + \cdots +$$

$$+ \frac{(z-z_*)(\mathfrak{z})^{(-1)^n}/(2n-1)}{1} - \frac{(z-z_*)(\mathfrak{z})^{(-1)^{n+1}}/(2n+1)}{1} + \cdots. \tag{6.66}$$

У випадку, коли $z = \ln\sqrt{3}$, матимемо розвинення

$$\operatorname{th} z = \frac{1}{2} - \frac{3(z-\ln\sqrt{3})}{1} + \frac{2(z-\ln\sqrt{3})}{1} - \frac{(z-\ln\sqrt{3})/6}{1} + \frac{(z-\ln\sqrt{3})/6}{1} -$$

$$-\frac{2(z-\ln\sqrt{3})/5}{1} + \frac{2(z-\ln\sqrt{3})/5}{1} - \frac{(z-\ln\sqrt{3})/14}{1} + \cdots +$$
$$+\frac{2^{(-1)^{k+1}}(z-\ln\sqrt{3})/(2k-1)}{1} - \frac{2^{(-1)^{k+2}}(z-\ln\sqrt{3})/(2k+1)}{1} + \cdots. \qquad (6.67)$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\operatorname{th} z_*)^{(-1)^n}}{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\operatorname{th} z_*)^{(-1)^{n+1}}}{2n+1} = 0$, то виконується твердження.

Теорема 6.37. ***(A)*** *С–КЛД* (6.66) *та Т–КЛД* (6.38) *збігаються до мероморфної функції* $\operatorname{th} z$ *на всій комплексній площині* $\mathbb{C}$ *за винятком особливих точок функції;* ***(B)*** *на компакті* $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}\backslash\{\frac{ik\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ *ланцюгові дроби збігаються рівномірно.*

Теорема 6.38. ***(A)*** *Якщо в деякій точці* $z_* \in \mathcal{Z}$ *виконується нерівність* $|\operatorname{th} z_*| \geqslant a, 0 < a < 1$, *то С–КЛД* (6.66) *задовольняє апостеріорну оцінку* (6.53) *для всіх таких* $z \in \mathcal{Z} \subset \mathbb{C}\backslash\{\frac{ik\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$, *що* $|z - z_*| \leqslant \frac{1}{a}\big(\frac{1}{4} - \varepsilon\big)$; ***(B)*** *С–КЛД* (6.67) *задовольняє апостеріорну оцінку* (6.53) *для всіх таких* $z \in \mathcal{Z} \subset \mathbb{C}\backslash\{\frac{ik\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$, *що* $|z - z_*| \leqslant 2\big(\frac{1}{4} - \varepsilon\big)$.

Доведення. **(A)** Нехай $|\operatorname{th} z_*| \geqslant a, 0 < a < 1$. Звідси випливає, що $|e_0(z_*)| > 1$, $|e_i(z_*)(z - z_*)| < \frac{1}{4} - \varepsilon, i \in \mathbb{N}$. Тоді згідно із теоремою 6.27 С–КЛД (6.66) задовольняє (6.53). Випадок **(B)** безпосередньо випливає з **(A)**, коли $a = \frac{1}{2}$. □

Для функції $\operatorname{cth} z$ з формул (6.39) та (6.42) отримуємо, що коефіцієнти розвинення в С–КЛД в околі точки $z = z_*$ рівні $e_0(z_*) = 1/\mathfrak{z}$, $e_1(z_*) = (\mathfrak{z}^2 - 1)/\mathfrak{z}^2$, $e_{2n}(z_*) = (\mathfrak{z})^{(-1)^n}/(2n-1)$, $e_{2n+1}(z_*) = -(\mathfrak{z})^{(-1)^{n+1}}/(2n+1)$, де $\mathfrak{z} = \operatorname{cth} z_*$, $n \in \mathbb{N}$. Розвинення функції в С–КЛД має вигляд

$$\operatorname{cth} z = \Big(\frac{1}{\mathfrak{z}} - \frac{(z-z_*)(1-\mathfrak{z}^2)/\mathfrak{z}^2}{1} + \frac{(z-z_*)/\mathfrak{z}}{1} - \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}/3}{1} + \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}/3}{1} -$$
$$- \cdots + \frac{(z-z_*)(\mathfrak{z})^{(-1)^n}/(2n-1)}{1} - \frac{(z-z_*)(\mathfrak{z})^{(-1)^{n+1}}/(2n+1)}{1} + \cdots\Big)^{-1}. \qquad (6.68)$$

В частинному випадку в околі точки $z = \ln\sqrt{3}$ отримуємо розвинення

$$\operatorname{cth} z = \Big(\frac{1}{2} + \frac{3(z-\ln\sqrt{3})/4}{1} + \frac{(z-\ln\sqrt{3})/2}{1} - \frac{2(z-\ln\sqrt{3})/3}{1} +$$

$$+\frac{2^{(-1)^n}(z-\ln\sqrt{3})/(2n-1)}{1}-\frac{2^{(-1)^{n+1}}(z-\ln\sqrt{3})/(2n+1)}{1}+\ldots\Big)^{-1}.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\operatorname{cth} z_*)^{(-1)^n}}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\operatorname{cth} z_*)^{(-1)^{n+1}}}{2n+1}=0,$$

то вірною буде наступна теорема.

Теорема 6.39. ***(A)*** *С–КЛД* (6.68) *та Т–КЛД* (6.40) *збігаються до функції* $\operatorname{cth} z$ *на всій комплексній площині* $\mathbb{C}$ *за винятком особливих точок функції;* ***(B)*** *на довільному компакті* $\mathcal{Z}\subset\mathbb{C}\backslash\{\frac{ik\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\}$ *ланцюгові дроби збігаються рівномірно.*

Зауваження 6.4. Оскільки $|\operatorname{cth} z|>1$, то коефіцієнт ланцюгового дробу (6.68) $e_0=1/\operatorname{cth} z$ не задовольняє умову $|e_0|\geqslant 1$ в жодній точці області визначення. А тому теоремою 6.27 не можна скористатися у випадку розвинення функції $\operatorname{cth} z$ у С–КЛД.

6.11. Висновки до розділу 6

В розділі введено до розгляду обернені похідні 2–го типу. Встановлено рекурентне співвідношення для обчислення значень обернених похідних 2–го типу функції $f(z)$. В теоремах 6.1–6.7 обґрунтовані властивості обернених похідних 2–го типу. Встановлено формулу типу Тіле, яка ґрунтується на обернених похідних 2–го типу, Отримано розвинення функцій в квазі–обернений ланцюговий дріб. Показано зв'язок між оберненими похідними 2–го типу та похідними функції, а також зв'язок обернених похідних 2–го типу з оберненими похідними Тіле. Доведено теорему 6.11 про обернену похідну 2–го типу многочлена та теорему 6.12 про обернену похідну 2–го типу раціональної функції. В якості ілюстрації отримано розвинення функцій $e^z,(c+z)^\alpha,\ln(c+z),z\ln z,\operatorname{tg} z,\operatorname{ctg} z,\operatorname{th} z,\operatorname{cth} z$ в Т–КЛД в околі довільної точки $z=z_*$. Доведено теореми 6.23 та 6.24, в яких встановлено умови збіжності та рівномірної збіжності С–КЛД до мероморфної функції та теорема 6.27, в якій обґрунтовано апостеріорна оцінка для обернених ланцюгових дробів. Знайдено розвинення вище вказаних функцій в С–КЛД, доведено збіжність та рівномірна збіжність отриманих розвинень, отримано апостеріорні оцінки.

Результати розділу 6 опубліковано в роботах [79, 81, 84, 88, 91, 171] та розділах монографії [92, с. 305–359].

РОЗДІЛ 7
ЗОБРАЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ФУНКЦІОНАЛЬНИМИ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ

7.1. Обернені g–похідні

При побудові Т–ФІЛД (4.3) робилися припущення, що всі інтерполяційні вузли $z_i \in \mathbf{Z}, i = \overline{0,n}$, різні. Перейдемо до граничного випадку, коли всі вузли, чи деяка їх частина, прямують до одного і того ж значення z. Нехай функція $f(z)$ аналітична, а базис–функція $g(z)$ однолиста та аналітична на компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$.

Означення 7.1. Якщо існує граничне значення, скінченне число чи нескінченність, оберненої g–різниці k–го порядку (4.7), коли інтерполяційні вузли $z_0, z_1, \ldots, z_k$, $z_i \in \mathbf{Z}, i = \overline{0,k}$, прямують до деякого значення $z \in \mathcal{Z}$, то це граничне значення називається оберненою g–похідною k–го порядку функції $f(z)$.

Будемо позначати обернену g–похідна k–го порядку функції $f(z)$ наступним чином ${}^{\{k\}}f_g(z)$. З означення маємо, що

$$ {}^{\{k\}}f_g(z) = \rho_k[g; \underbrace{z, \ldots, z}_{k+1}; f] = \lim_{z_0, z_1, \ldots, z_k \to z} \rho_k[g; z_0, z_1, \ldots, z_k; f]. \tag{7.1} $$

Із співвідношень (4.8) та (7.1) випливає, що

$$ {}^{\{1\}}f_g(z) = \rho_1[g; z, z; f] = \lim_{z_0, z_1 \to z} \frac{\begin{vmatrix} 1 & g(z_0) \\ 1 & g(z_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(z_0) \\ 1 & f(z_1) \end{vmatrix}} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\begin{vmatrix} 1 & g(z) \\ 1 & g(z + \Delta z) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(z) \\ 1 & f(z + \Delta z) \end{vmatrix}} = $$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\begin{vmatrix} 1 & g(z) \\ 0 & \frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(z) \\ 0 & \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & g(z) \\ 0 & g'(z) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(z) \\ 0 & f'(z) \end{vmatrix}} = \frac{g'(z)}{f'(z)}.$$

Зауваження 7.1. Очевидно, що ${}^{\{1\}}f_g(z) = g'(z) \cdot {}^{(1)}f(z)$, де ${}^{(1)}f(z)$ обернена похідна Тіле 1–го порядку. Коли $g(z) = z$, то обернена g–похідна 1–го порядку збігається із оберненою похідною Тіле 1–го порядку (1.68).

Із формул (4.11) та (7.1) для $k = 1$ аналогічно отримуємо, що

$${}^{\{2\}}f_g(z) = \rho_2[g; z, z, z; f] = \lim_{z_0, z_1, z_2 \to z} \begin{vmatrix} 1 & f(z_0) & f(z_0)g(z_0) \\ 1 & f(z_1) & f(z_1)g(z_1) \\ 1 & f(z_2) & f(z_2)g(z_2) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & f(z_0) & g(z_0) \\ 1 & f(z_1) & g(z_1) \\ 1 & f(z_2) & g(z_2) \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ z_2 \to z}} \begin{vmatrix} 1 & f(z) & f(z)g(z) \\ 1 & f(z+\Delta z) & f(z+\Delta z)g(z+\Delta z) \\ 1 & f(z_2) & f(z_2)g(z_2) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & f(z) & g(z) \\ 1 & f(z+\Delta z) & g(z+\Delta z) \\ 1 & f(z_2) & g(z_2) \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ z_2 \to z}} \begin{vmatrix} 1 & f(z) & f(z)g(z) \\ 0 & \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} & \frac{f(z+\Delta z)g(z+\Delta z)-f(z)g(z)}{\Delta z} \\ 1 & f(z_2) & f(z_2)g(z_2) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & f(z) & g(z) \\ 0 & \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} & \frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z} \\ 1 & f(z_2) & g(z_2) \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \begin{vmatrix} 1 & f(z) & f(z)g(z) \\ 0 & f'(z) & \big(f(z)g(z)\big)' \\ 1 & f(z+\Delta z) & f(z+\Delta z)g(z+\Delta z) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & f(z) & g(z) \\ 0 & f'(z) & g'(z) \\ 1 & f(z+\Delta z) & g(z+\Delta z) \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(z) & f(z)g(z) \\ 0 & f'(z) & \big(f(z)g(z)\big)' \\ 0 & \frac{f(z+\Delta z)-f(z)-\Delta z f'(z)}{(\Delta z)^2} & \frac{f(z+\Delta z)g(z+\Delta z)-f(z)g(z)-\Delta z (f(z)g(z))'}{(\Delta z)^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(z) & g(z) \\ 0 & f'(z) & g'(z) \\ 0 & \frac{f(z+\Delta z)-f(z)-\Delta z f'(z)}{(\Delta z)^2} & \frac{g(z+\Delta z)-g(z)-\Delta z g'(z)}{(\Delta z)^2} \end{vmatrix}} =$$

$$= \begin{vmatrix} f'(z) & \big(f(z)g(z)\big)' \\ \dfrac{f''(z)}{2!} & \dfrac{\big(f(z)g(z)\big)''}{2!} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f'(z) & g'(z) \\ \dfrac{f''(z)}{2!} & \dfrac{g''(z)}{2!} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'(z) & \big(f(z)g(z)\big)' \\ f''(z) & \big(f(z)g(z)\big)'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f'(z) & g'(z) \\ f''(z) & g''(z) \end{vmatrix}.$$

Отримаємо формули для оберненої g–похідної k–го порядку у загальному випадку. Розглянемо два випадки: a) $k = 2m$; b) $k = 2m + 1$.

a) Нехай $k = 2m$. Тоді згідно із формулами (4.11) та (7.1) маємо, що

$${}^{\{2m\}}f_g(z) = \rho_{2m}[g; \underbrace{z, z, \cdots, z}_{2m+1}; f] = \lim_{z_0,\cdots,z_{2m}\to z} \rho_{2m}[g; z_0, z_1, \cdots, z_{2m}; f] =$$

$$= \lim_{z_0,\cdots,z_{2m}\to z} \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(z_0) & g(z_0) & \cdots & g^{m-1}(z_0)\, f(z_0) & g^m(z_0)\, f(z_0) \\ 1 & f(z_1) & g(z_1) & \cdots & g^{m-1}(z_1)\, f(z_1) & g^m(z_1)\, f(z_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & f(z_{2m}) & g(z_{2m}) & \cdots & g^{m-1}(z_{2m})\, f(z_{2m}) & g^m(z_{2m})\, f(z_{2m}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(z_0) & g(z_0) & \cdots & g^{m-1}(z_0)\, f(z_0) & g^m(z_0) \\ 1 & f(z_1) & g(z_1) & \cdots & g^{m-1}(z_1)\, f(z_1) & g^m(z_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & f(z_{2m}) & g(z_{2m}) & \cdots & g^{m-1}(z_{2m})\, f(z_{2m}) & g^m(z_{2m}) \end{vmatrix}}.$$

Будемо здійснювати поступовий перехід до границі у визначниках чисельника і знаменника. Підставимо z замість z_0 та $z+\Delta z$ замість z_1, віднімемо у визначниках від 2–го рядка 1–й рядок, розділимо 2–й рядок на Δz та перейдемо до границі коли $\Delta z \to 0$; далі замість z_2 підставимо $z+\Delta z$, а потім від 3–го рядка віднімемо 1–й рядок та 2–й рядок помножений на Δz, поділимо 3–й рядок на $(\Delta z)^2$ і перейдемо до границі коли $\Delta z \to 0$; і т.д. У загальному випадку на i-му кроці, $i = \overline{1, 2m}$, підставимо $z+\Delta z$ замість z_i і від $(i+1)$–го рядка віднімемо поступово 1–й рядок, 2–й рядок помножений на Δz, 3–й рядок помножений на $(\Delta z)^2$ і т.д. i–й рядок помножений на $(\Delta z)^{i-1}$, поділимо $(i+1)$–й рядок на $(\Delta z)^i$ та перейдемо до границі коли

$\Delta z \to 0$. Після $(2m)$ таких кроків врешті отримаємо

$$
{}^{\{2m\}}f_g(z) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f & g & gf & \cdots & g^{m-1}f & g^m f \\ 0 & f' & g' & \big(gf\big)' & \cdots & \big(g^{m-1}f\big)' & \big(g^m f\big)' \\ 0 & \dfrac{f''}{2!} & \dfrac{g''}{2!} & \dfrac{(gf)''}{2!} & \cdots & \dfrac{(g^{m-1}f)''}{2!} & \dfrac{(g^m f)''}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dfrac{f^{(2m)}}{(2m)!} & \dfrac{g^{(2m)}}{(2m)!} & \dfrac{(gf)^{(2m)}}{(2m)!} & \cdots & \dfrac{(g^{m-1}f)^{(2m)}}{(2m)!} & \dfrac{(g^m f)^{(2m)}}{(2m)!} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f & g & gf & \cdots & g^{m-1}f & g^m \\ 0 & f' & g' & (gf)' & \cdots & (g^{m-1}f)' & (g^m)' \\ 0 & \dfrac{f''}{2!} & \dfrac{g''}{2!} & \dfrac{(gf)''}{2!} & \cdots & \dfrac{(g^{m-1}f)''}{2!} & \dfrac{(g^m)''}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dfrac{f^{(2m)}}{(2m)!} & \dfrac{g^{(2m)}}{(2m)!} & \dfrac{(gf)^{(2m)}}{(2m)!} & \cdots & \dfrac{(g^{m-1}f)^{(2m)}}{(2m)!} & \dfrac{(g^m)^{(2m)}}{(2m)!} \end{vmatrix}}\,.
$$

Після очевидних спрощень маємо

$$
{}^{\{2m\}}f_g(z) = \frac{\begin{vmatrix} f' & g' & \big(gf\big)' & \cdots & \big(g^{m-1}f\big)' & \big(g^m f\big)' \\ f'' & g'' & (gf)'' & \cdots & (g^{m-1}f)'' & (g^m f)'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f^{(2m)} & g^{(2m)} & (gf)^{(2m)} & \cdots & (g^{m-1}f)^{(2m)} & (g^m f)^{(2m)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f' & g' & (gf)' & \cdots & (g^{m-1}f)' & (g^m)' \\ f'' & g'' & (gf)'' & \cdots & (g^{m-1}f)'' & (g^m)'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f^{(2m)} & g^{(2m)} & (gf)^{(2m)} & \cdots & (g^{m-1}f)^{(2m)} & (g^m)^{(2m)} \end{vmatrix}}\,. \tag{7.2}
$$

b) У випадку, коли $k = 2m+1$, аналогічним чином маємо, що

$$
{}^{\{2m+1\}}f_g(z) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f & g & gf & \cdots & g^m & g^{m+1} \\ 0 & f' & g' & (gf)' & \cdots & (g^m)' & (g^{m+1})' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dfrac{f^{(k)}}{k!} & \dfrac{g^{(k)}}{k!} & \dfrac{(gf)^{(k)}}{k!} & \cdots & \dfrac{(g^m)^{(k)}}{k!} & \dfrac{(g^{m+1})^{(k)}}{k!} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f & g & gf & \cdots & g^m & g^m f \\ 0 & f' & g' & (gf)' & \cdots & (g^m)' & (g^m f)' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dfrac{f^{(k)}}{k!} & \dfrac{g^{(k)}}{k!} & \dfrac{(gf)^{(k)}}{k!} & \cdots & \dfrac{(g^m)^{(k)}}{(k)!} & \dfrac{(g^m f)^{(k)}}{k!} \end{vmatrix}} =
$$

$$
= \frac{\begin{vmatrix} f' & g' & (gf)' & \cdots & (g^m)' & (g^{m+1})' \\ f'' & g'' & (gf)'' & \cdots & (g^m)'' & (g^{m+1})'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f^{(2m+1)} & g^{(2m+1)} & (gf)^{(2m+1)} & \cdots & (g^m)^{(2m+1)} & (g^{m+1})^{(2m+1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f' & g' & (gf)' & \cdots & (g^m)' & (g^m f)' \\ f'' & g'' & (gf)'' & \cdots & (g^m)'' & (g^m f)'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f^{(2m+1)} & g^{(2m+1)} & (gf)^{(2m+1)} & \cdots & (g^m)^{(2m+1)} & (g^m f)^{(2m+1)} \end{vmatrix}}. \tag{7.3}
$$

У формулах (7.2)–(7.3) аргументи функцій та їх похідних опущені.

Доведено наступне твердження.

Теорема 7.1. *Якщо для деякого значення m визначники*

$$
E_{2m}^{(1)}(z) = \begin{vmatrix} f' & g' & \big(gf\big)' & \cdots & \big(g^{m-1}f\big)' & \big(g^m f\big)' \\ f'' & g'' & (gf)'' & \cdots & (g^{m-1}f)'' & (g^m f)'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f^{(2m)} & g^{(2m)} & (gf)^{(2m)} & \cdots & (g^{m-1}f)^{(2m)} & (g^m f)^{(2m)} \end{vmatrix},
$$

$$E^{(2)}_{2m}(z)=\begin{vmatrix} f' & g' & (gf)' & \cdots & (g^{m-1}f)' & (g^m)' \\ f'' & g'' & (gf)'' & \cdots & (g^{m-1}f)'' & (g^m)'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f^{(2m)} & g^{(2m)} & (gf)^{(2m)} & \cdots & (g^{m-1}f)^{(2m)} & (g^m)^{(2m)} \end{vmatrix}$$

відмінні від нуля в деякій точці $z\in\mathcal{Z}$, то у вказаній точці функція $f(z)$ має обернену g–похідну $(2m)$–го порядку і

$$^{\{2\}}f_g(z)=\begin{vmatrix} f' & (fg)' \\ f'' & (fg)'' \end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix}, \quad {}^{\{2m\}}f_g(z)=\frac{E^{(1)}_{2m}(z)}{E^{(2)}_{2m}(z)}, \quad m\in\mathbb{N}_2.$$

Якщо для деякого значення m визначники

$$E^{(3)}_{2m+1}(z)=\begin{vmatrix} f' & g' & (gf)' & \cdots & (g^m)' & (g^{m+1})' \\ f'' & g'' & (gf)'' & \cdots & (g^m)'' & (g^{m+1})'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f^{(2m+1)} & g^{(2m+1)} & (gf)^{(2m+1)} & \cdots & (g^m)^{(2m+1)} & (g^{m+1})^{(2m+1)} \end{vmatrix},$$

$$E^{(4)}_{2m+1m}(z)=\begin{vmatrix} f' & g' & (gf)' & \cdots & (g^m)' & (g^mf)' \\ f'' & g'' & (gf)'' & \cdots & (g^m)'' & (g^mf)'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f^{(2m+1)} & g^{(2m+1)} & (gf)^{(2m+1)} & \cdots & (g^m)^{(2m+1)} & (g^mf)^{(2m+1)} \end{vmatrix}$$

відмінні від нуля в деякій точці $z\in\mathcal{Z}$, то цій точці функція $f(z)$ має обернену g–похідну $(2m+1)$–го порядку і

$$^{\{1\}}f_g(z)=\frac{g'(z)}{f'(z)}, \quad {}^{\{2m+1\}}f_g(z)=\frac{E^{(3)}_{2m+1}(z)}{E^{(4)}_{2m+1}(z)} \quad m\in\mathbb{N}.$$

Зауваження 7.2. Якщо $g(z)=z$, то формули (7.2) та (7.3) після деяких спрощень будуть збігатися із формулами (5.4).

Визначимо рекурентне співвідношення для обернених g–похідних. З формул (4.7) випливає, що

$$\frac{\rho_{k-1}[g; z_0, \ldots, z_{k-1}; f] - \rho_{k-1}[g; z_0, \ldots, z_{k-2}, z_k; f]}{g(z_{k-1}) - g(z_k)} =$$

$$= \frac{1}{\rho_k[g; z_0, \ldots, z_k; f] - \rho_{k-2}[g; z_0, \ldots, z_{k-2}; f]}.$$

Нехай в останньому співвідношенні $z_0 = z_1 = \cdots = z_{k-1} = z$, а $z_k = u$. Тоді

$$\frac{\rho_{k-1}[g; z, \ldots, z, z; f] - \rho_{k-1}[g; z, \ldots, z, u; f]}{g(z) - g(u)} =$$

$$= \frac{1}{\rho_k[g; z, \ldots, z, u; f] - \rho_{k-2}[g; z, \ldots, z, z; f]}.$$

Аналогічно, якщо $z_0 = z_1 = \cdots = z_{k-3} = z_{k-1} = z$, а $z_{k-2} = z_k = u$, то враховуючи симетричність обернених g–різниць, можна отримати

$$\frac{\rho_{k-1}[g; z, \ldots, z, u; f] - \rho_{k-1}[g; z, \ldots, z, u, u; f]}{g(z) - g(u)} =$$

$$= \frac{1}{\rho_k[g; z, \ldots, z, u, u; f] - \rho_{k-2}[g; z, \ldots, z, u; f]},$$

якщо $z_0 = z_1 = \cdots = z_{k-4} = z_{k-1} = z$, а $z_{k-3} = z_{k-2} = z_k = u$, то

$$\frac{\rho_{k-1}[g; z, \ldots, z, u, u; f] - \rho_{k-1}[g; z, \ldots, z, u, u, u; f]}{g(z) - g(u)} =$$

$$= \frac{1}{\rho_k[g; z, \ldots, z, u, u, u; f] - \rho_{k-2}[g; z, \ldots, z, u, u; f]},$$

. . . .

$$\frac{\rho_{k-1}[g; z, u, \ldots, u; f] - \rho_{k-1}[g; u, \ldots, u; f]}{g(z) - g(u)} =$$

$$= \frac{1}{\rho_k[g; z, u, \dots, u; f] - \rho_{k-2}[g; u, \dots, u; f]}.$$

Додавши k співвідношень маємо

$$\frac{\rho_{k-1}[g; z, z, \cdots, z; f] - \rho_{k-1}[g; u, u, \cdots, u; f]}{g(z) - g(u)} =$$

$$= \frac{1}{\rho_k[g; z, z, \cdots, z, u; f] - \rho_{k-2}[g; z, z, \cdots, z; f]} +$$

$$+ \frac{1}{\rho_k[g; z, \cdots, z, u, u; f] - \rho_{k-2}[g; z, \cdots, z, u; f]} +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{\rho_k[g; z, u, \cdots, u; f] - \rho_{k-2}[g; u, \cdots, u; f]} \,.$$

Перейшовши до границі у лівій та правій частинах коли $u \to z$ отримуємо:

$$\frac{\left({}^{\{k-1\}}f_g(z)\right)'}{g'(z)} = \frac{k}{{}^{\{k\}}f_g(z) - {}^{\{k-2\}}f_g(z)} \,.$$

Врешті маємо рекурентну формулу для обернених g–похідних

$$\begin{aligned} &{}^{\{k\}}f_g(z) = \frac{k \cdot g'(z)}{\left({}^{\{k-1\}}f_g(z)\right)'} + {}^{\{k-2\}}f_g(z), \qquad k \in \mathbb{N}_2, \\ &{}^{\{0\}}f_g(z) = f(z), \quad {}^{\{1\}}f_g(z) = \frac{g'(z)}{f'(z)}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Із формул (4.3) та (4.6) випливає, що в околі точки $z = z_*$ має місце функціональна формула типу Тіле

$$f(z) = f(z_*) + \frac{g(z) - g(z_*)}{{}^{\{1\}}f_g(z_*)} + \frac{g(z) - g(z_*)}{2g'(z)/\left({}^{\{1\}}f_g(z_*)\right)'} + \frac{g(z) - g(z_*)}{3g'(z)/\left({}^{\{2\}}f_g(z_*)\right)'} +$$

$$+ \cdots + \frac{g(z) - g(z_*)}{n\, g'(z)/\left({}^{\{n-1\}}f_g(z_*)\right)'} + \frac{g(z) - g(z_*)}{R_n(g; z)} \,, \tag{7.5}$$

де $R_n(g; z) = v_{n+}(g; z)$ із (4.1).

Зауваження 7.3. Якщо $g(z) = z$, то $g'(z) = 1$, ${}^{\{n\}}f_g(z) = {}^{(n)}f(z)$ і формула (7.5) збігається з формулою Тіле (1.71).

Зауваження 7.4. Формула (7.5), як результат формальної підстановки у формулу Тіле замість незалежної змінної z деякої функції $g(z)$, наведена в монографії Ф. Б. Гільдебранда [139, с. 512–513]. При цьому ніяких умов на функцію $g(z)$ не накладалося. В явному вигляді виписані три перші обернені g–похідні. Формула оберненої g–похідної k–го порядку не була встановлена.

7.2. Властивості обернених g–похідних

Теорема 7.2. *Нехай $z_* \in \mathcal{Z}$. **(A)** Якщо $f'(z_*) = 0$, $g'(z_*) \neq 0$, або $f'(z_*) \neq 0$, $g'(z_*) = \infty$, то ${}^{\{1\}}f_g(z_*) = \infty$; **(B)** якщо $f'(z_*) = \infty$, $g'(z_*) \neq 0$, або $f'(z_*) \neq 0$, $g'(z_*) = 0$, то тоді ${}^{\{1\}}f_g(z_*) = 0$.*

Теорема 7.2 безпосередньо випливає із (7.4) та властивостей "звичайних" похідних функції [57, 58].

Зауваження 7.5. У випадку, коли функція $f(x)$ та базис–функція $g(x)$ визначені на компакті $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$ і базис–функція g здійснює взаємно–однозначне відображення $\mathcal{R}$ в $\mathbf{G} \subset \mathbb{R}$, то за аналогією із "звичайними" похідними, для обернених g–похідних можна означити обернену g–ліву похідну ${}^{\{1\}}f_{g-}(x)$ та обернену g–праву похідну ${}^{\{1\}}f_{g+}(x)$ та аналог похідних чисел [110] (див. зауваження 5.1 на с. 165).

Із теореми 7.2 та формули (7.4) випливає наступне твердження.

Теорема 7.3. *Нехай $z_* \in \mathcal{Z}$, ${}^{\{n-2\}}f_g(z_*) = C$, де $C = const$, $n \in \mathbb{N}_2$. **(A)** Якщо ${}^{\{n-1\}}f_g(z_*) = 0$, $g'(z_*) \neq 0$, або ${}^{\{n-1\}}f_g(z_*) \neq 0$, $g'(z_*) = \infty$, то тоді ${}^{\{n\}}f_g(z_*) = \infty$; **(B)** якщо ${}^{\{n-1\}}f_g(z_*) = \infty$, $g'(z) \neq 0$, або ${}^{\{n-1\}}f_g(z_*) \neq 0$, $g'(z_*) = 0$, то тоді ${}^{\{n\}}f_g(z_*) = C$.*

З означення оберненої g–похідної, похідної складеної функції та похідної оберненої функції [43, с. 21–23] легко довести такі теореми.

Теорема 7.4. *Нехай функція $w = \varphi(z)$ має похідну (скінченне значення або ∞) в точці z_*, а функція $u = f(w)$ має обернену g–похідну в точці*

w_*, де $w_* = \varphi(z_*)$. Тоді складена функція $u = F(z) = f(\varphi(z))$ має в точці z_* обернену g–похідну, яка обчислюється наступним чином

$$^{\{1\}}F_g(z_*) = \frac{1}{\varphi'(z_*)} \cdot {}^{\{1\}}f_g(\varphi(z_*)) \ .$$

За аналогією з теоремою 5.8 з теореми 7.4 як наслідок випливає наступне твердження.

Теорема 7.5. *Нехай функція f має обернені g–похідні до n–го порядку включно, $C = const$, тоді*

$$^{\{2k\}}\big(f(Cz)\big)_g = {}^{\{2k\}}f_g(v)\Big|_{v=Cz}, \ ^{\{2k+1\}}\big(f(Cz)\big)_g = \tfrac{1}{C} \cdot {}^{\{2k+1\}}f_g(v)\Big|_{v=Cz}, \ k = \overline{0, [\tfrac{n}{2}]}.$$

Теорема 7.6. *Нехай аналітична на $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ функцій $f(z)$ здійснює взаємно–однозначне відображення на $\bar{\mathcal{Z}} \subset \mathbb{C}$. Якщо в $z_* \in \mathcal{Z}$ функція $f(z)$ має обернену g–похідну $^{\{1\}}f_g(z_*) \neq 0$ і функція $g'(w)$ визначена в точці w_*, де $w_* = f(z_*)$, то обернена функція $z = \varphi(w)$ має обернену g–похідну в точці w_0, яка рівна $^{\{1\}}\varphi_g(w_*) = \frac{g'(z_*)\, g'(f(z_*))}{^{\{1\}}f_g(z_*)}$.*

Теорема 7.7. *Для довільного $n \in \mathbb{N}_0$ мають місце співвідношення*

$$^{\{2n\}}(Cf(z))_g = C \cdot {}^{\{2n\}}f_g(z) \ , {}^{\{2n+1\}}(Cf(z))_g = \tfrac{1}{C} \cdot {}^{\{2n+1\}}f_g(z) \ , \quad C = const.$$

Доведення. Для доведення теореми скористаємося методом повної математичної індукції. Із рекурентного співвідношення (7.4) маємо, що

$$^{\{1\}}(Cf(z))_g = \tfrac{1}{C} \cdot {}^{\{1\}}f_g(z), {}^{\{2\}}(Cf(z))_g = \frac{2}{\left({}^{\{1\}}(Cf(z))_g\right)'} + Cf(z) = C \cdot {}^{\{2\}}f_g(z).$$

Припустимо, що твердження теореми виконується для $n = k$. Тоді для $n = k+1$ із рекурентної формули (7.4) маємо, що

$$^{\{2k+2\}}(Cf(z))_g = \frac{2k+2}{\left({}^{\{2k+1\}}(Cf(z))_g\right)'} + {}^{\{2k\}}(Cf(z)) = \frac{2k+2}{\left(\frac{1}{C} \cdot {}^{\{2k+1\}}f_g(z)\right)'} +$$

$$+C \cdot {}^{\{2k\}}f_g(z) = C \cdot {}^{\{2k+2\}}f_g(z) \ ,$$

$$^{\{2k+3\}}(Cf(z))_g = \frac{2k+3}{\left({}^{\{2k+2\}}(Cf(z))_g\right)'} + {}^{\{2k+1\}}(Cf(z))_g = \frac{2k+3}{\left(C \cdot {}^{\{2k+2\}}f_g(z)\right)'} +$$

$$+\frac{1}{C}\cdot {}^{\{2k+1\}}f_g(z)=\frac{1}{C}\cdot {}^{\{2k+3\}}f_g(z)\ .$$

Отже, твердження теореми має місце для довільного n. □

Теорема 7.8. *Нехай $C = const$. Для довільного $n \in \mathbb{N}_0$ виконуються співвідношення*

$${}^{\{2n\}}(f(z)+C)_g = {}^{\{2n\}}f_g(z)+C, \qquad {}^{\{2n+1\}}(f(z)+C)_g = {}^{\{2n+1\}}f_g(z)\ .$$

Доведення. Як і в попередньому випадку, доведемо теорему за індукцією. При $n = 0, 1$ твердження виконується. Припустимо, що воно виконується для $n = \overline{0,k}$. Тоді для $n = k+1$ із формули (7.4) маємо

$${}^{\{2k+2\}}(f(z)+C)_g = \frac{2k+2}{\left({}^{\{2k+1\}}(f(z)+C)_g\right)'} + {}^{\{2k\}}(f(z)+C)_g = \frac{2k+2}{\left({}^{\{2k+1\}}f_g(z)\right)'}+$$

$$+{}^{\{2k\}}f_g(z)+C = {}^{\{2k+2\}}f_g(z)+C\ , \qquad {}^{\{2k+3\}}(f(z)+C)_g = \frac{2k+3}{\left({}^{\{2k+2\}}(f(z)+C)_g\right)'}+$$

$$+{}^{\{2k+1\}}(f(z)+C)_g = \frac{2k+3}{\left({}^{\{2k+2\}}f_g(z)+C\right)'} + {}^{\{2k+1\}}f_g(z) = {}^{\{2k+3\}}f_g(z)\ .$$

Теорема вірна. □

Зауваження 7.6. Теореми 7.7 та 7.8 можна також довести, якщо відповідно у формулах (4.15)–(4.16) та (4.17)–(4.18) перейти до границі, коли $z_0, z_1, \ldots, z_k \to z$, де $k \in \{2m, 2m+1\}$.

Теорема 7.9. *Нехай A, B, C, D деякі сталі. При $n \in \mathbb{N}$ виконуються співвідношення*

$${}^{\{2n\}}\left[\frac{1}{f(z)}\right]_g = \frac{1}{{}^{\{2n\}}f_g(z)}, \qquad {}^{\{2n\}}\left[\frac{A+B\cdot f(z)}{C+D\cdot f(z)}\right]_g = \frac{A+B\cdot {}^{\{2n\}}f_g(z)}{C+D\cdot {}^{\{2n\}}f_g(z)}\ .$$

Доведення. Здійснивши граничний перехід, коли у формулах (4.21)–(4.22) $z_0, z_1, \ldots, z_{2n} \to z$, отримаємо твердження теореми. □

Припустимо, що функції $f(z), h(z),\ f_1(z),\ f_2(z), \ldots, f_n(z)$ мають в точках компакта $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ скінченні відмінні від нуля обернені g–похідні.

Теорема 7.10. *Нехай існують обернені g–похідні функцій $u = f(z)$ та $v = h(z)$. Тоді обернена g–похідна суми, різниці, добутку та частки цих функцій визначаються за формулами*

$$^{\{1\}}(u \pm v)_g = \frac{^{\{1\}}u_g \cdot {}^{\{1\}}v_g}{^{\{1\}}v_g \pm {}^{\{1\}}u_g}\ , \tag{7.6}$$

$$^{\{1\}}(u\, v)_g = \frac{^{\{1\}}u_g \cdot {}^{\{1\}}v_g}{^{\{1\}}u_g \cdot u + {}^{\{1\}}v_g \cdot v}\ , \tag{7.7}$$

$$^{\{1\}}(u/v)_g = \frac{v^2 \cdot {}^{\{1\}}u_g \cdot {}^{\{1\}}v_g}{^{\{1\}}v_g \cdot v - {}^{\{1\}}u_g \cdot u}\ . \tag{7.8}$$

Доведення. Із формул (7.4) маємо, що

$$^{\{1\}}(u \pm v)_g = \frac{g'}{u' \pm v'} = \frac{g'}{g'/{}^{\{1\}}u_g \pm g'/{}^{\{1\}}v_g} = \frac{^{\{1\}}v_g \cdot {}^{\{1\}}u_g}{^{\{1\}}v_g \pm {}^{\{1\}}u_g}\ .$$

Аналогічно у випадку добутку функцій отримуємо

$$^{\{1\}}(u \cdot v)_g = \frac{g'}{(u \cdot v)'} = \frac{g'}{u' \cdot v + u \cdot v'} = \frac{g'}{v \cdot g'/{}^{\{1\}}u_g + u \cdot g'/{}^{\{1\}}v_g} = \frac{^{\{1\}}v_g \cdot {}^{\{1\}}u_g}{^{\{1\}}v_g \cdot v + {}^{\{1\}}u_g \cdot u}.$$

У випадку частки двох функцій маємо

$$^{\{1\}}(u/v)_g = \frac{g'}{(u/v)'} = \frac{v^2 \cdot g'}{u' \cdot v - u \cdot v'} = \frac{v^2 \cdot g'}{v \cdot g'/{}^{\{1\}}u_g - u \cdot g'/{}^{\{1\}}v_g} = \frac{v^2 \cdot {}^{\{1\}}v_g \cdot {}^{\{1\}}u_g}{^{\{1\}}v_g \cdot v - {}^{\{1\}}u_g \cdot u}.$$

Формули (7.6)–(7.8) доведено. □

Теорема 7.11. *Якщо функції $f_k(z)$, $k = \overline{1,n}$, мають обернені g–похідні, то*

$$^{\{1\}}\Big(\sum_{k=1}^{n} f_k(z)\Big)_g = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} {}^{\{1\}}(f_k(z))_g}{\sum\limits_{k=1}^{n} \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} {}^{\{1\}}(f_j(z))_g},\quad {}^{\{1\}}\Big(\prod_{k=1}^{n} f_k(z)\Big)_g = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} {}^{\{1\}}(f_k(z))_g}{\sum\limits_{k=1}^{n} \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} {}^{\{1\}}(f_j(z))_g \cdot f_j(z)}.$$

Доведення. Співвідношення теореми доводяться за індукцією спираючись на формули (7.6) та (7.7). □

Як наслідок із теореми 7.11 випливає наступне твердження.

Теорема 7.12. *Якщо існує g–обернена похідна функції $f(z)$, то*

$$^{\{1\}}((f(z))^n)_g = \frac{^{\{1\}}f_g(z)}{n\,(f(z))^{n-1}}\ , \qquad ^{\{1\}}(nf(z))_g = \frac{^{\{1\}}f_g(z)}{n}\ .$$

7.3. Розвинення функцій у функціональні ланцюгові дроби

Із формули (7.5) випливає, що аналітична в $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ функція $f(z)$ в околі точки $z = z_*$ може бути розвинута за базис–функцією $g(z)$ у функціональний ланцюговий дріб типу Тіле (Т–ФЛД)

$$f(z) = b_0(g; z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty} \frac{g(z) - g(z_*)}{b_n(g; z_*)}, \tag{7.9}$$

де $b_0(g; z_*) = f(z_*), b_1(g; z_*) = \frac{g'(z_*)}{f'(z_*)}, b_n(g; z_*) = {}^{\{n\}}f_g(z_*) - {}^{\{n-2\}}f_g(z_*),\ n \in \mathbb{N}_2$.

Запишемо Т–ФЛД (7.9) у вигляді еквівалентного ланцюгового дробу

$$f(z) = a_0(g; z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(g; z_*)(g(z) - g(z_*))}{1}, \tag{7.10}$$

де

$$\begin{aligned} &a_0(g; z_*) = b_0(g; z_*),\ a_1(g; z_*) = \frac{1}{b_1(g; z_*)}, \\ &a_n(g; z_*) = \frac{1}{b_{n-1}(g; z_*) b_n(g; z_*)}, \qquad n \in \mathbb{N}_2. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Ланцюговий дріб (7.10) називається функціональним ланцюговим дробом типу С–дробу (С–ФЛД).

Розглянемо приклади розвинення функцій комплексної змінної у функціональні ланцюгові дроби вказаних типів та встановимо області збіжності отриманих розвинень.

7.3.1. Функція $(c + e^z)^\alpha$.

Має місце теорема.

Теорема 7.13. *Нехай G — область однолистості функції e^z. **(A)** Функція $\mathrm{w} = (c+e^z)^\alpha$, де c є стала, $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, має обернені g–похідні за базис–функцією $g(z) = e^z$ довільного порядку в області G, які визначаються згідно із формулами*

$$ {}^{\{2n-1\}}\mathrm{w}_g = \frac{n\prod_{i=2}^{n}(i-\alpha)(c+e^z)}{\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha+i)\mathrm{w}}, \quad {}^{\{2n\}}\mathrm{w}_g = \frac{\prod_{i=1}^{n}(\alpha+i)\mathrm{w}}{\prod_{i=1}^{n}(i-\alpha)}, \quad n \in \mathbb{N}; \qquad (7.12) $$

(B) *функція $\mathrm{w} = (c+e^z)^m$, $m \in \mathbb{N}$, має обернені g–похідні включно до $(2m-1)$–го порядку, які знаходяться за формулами* (7.12)*. Крім того, ${}^{\{2m-1\}}\,\mathrm{w}_g = 0$ для $m \in \mathbb{N}_2$ і ${}^{\{1\}}\,\mathrm{w}_g = 1$ для $m = 1$; **(C)** функція $\mathrm{w} = (c+e^z)^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$, має обернені g–похідні до $(2m)$–го порядку включно, які знаходяться за формулами* (7.12) *і ${}^{\{2m\}}\,\mathrm{w}_g = 0$; **(D)** коефіцієнти розвинення функції $(c+e^z)^\alpha$ в околі точки $z_* \in G$ в T–ФЛД* (7.9) *будуть рівні*

$$ \begin{aligned} &b_0(e^z; z_*) = \mathfrak{z}, \quad b_{2n-1}(e^z; z_*) = \frac{(2n-1)\prod_{i=1}^{n-1}(i-\alpha)\mathfrak{z}^{1-\alpha}}{\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha+i)}, \\ &b_{2n}(e^z; z_*) = \frac{2\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha+i)\mathfrak{z}^{\alpha}}{\prod_{i=1}^{n}(i-\alpha)}, \quad \mathfrak{z} = c+e^{z_*}, \qquad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \qquad (7.13) $$

Доведення. **(A)** Доведемо співвідношення (7.12) за індукцією. Згідно із рекурентними формулами (7.4) маємо, що ${}^{\{1\}}\,\mathrm{w}_g = \frac{(e^z)'}{((c+e^z)^\alpha)'} = \frac{(c+e^z)^{1-\alpha}}{\alpha} = \frac{c+e^z}{\alpha \mathrm{w}}$, ${}^{\{2\}}\,\mathrm{w}_g = \frac{2(e^z)'}{\left((c+e^z)^{1-\alpha}/\alpha\right)'} + (c+e^z)^\alpha = \frac{\alpha+1}{1-\alpha}(c+e^z)^\alpha = \frac{\alpha+1}{1-\alpha}\mathrm{w}$. Таким чином, для $n = 1$ формули (7.12) виконуються. Зробимо припущення, що (7.12) вірні для $n = k-1$. Тоді для $n = k$ із формул (7.4) маємо, що

$$ {}^{\{2k\}}\mathrm{w}_g = \frac{2k(e^z)'}{\frac{k\prod_{i=2}^{k}(i-\alpha)}{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha+i)}\left((c+e^z)^{1-\alpha}\right)'} + \frac{\prod_{i=1}^{k-1}(\alpha+i)}{\prod_{i=1}^{k-1}(i-\alpha)}(c+e^z)^\alpha = \frac{\prod_{i=1}^{k}(\alpha+i)}{\prod_{i=1}^{k}(i-\alpha)}\mathrm{w}. $$

Аналогічно

$$ {}^{\{2k+1\}}\mathrm{w}_g = \frac{(2k+1)(e^z)'}{\frac{\prod\limits_{i=1}^{k}(\alpha+i)}{\prod\limits_{i=1}^{k}(i-\alpha)}\left((c+e^z)^\alpha\right)'} + \frac{k\prod\limits_{i=2}^{k}(i-\alpha)}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(\alpha+i)}(c+e^z)^{1-\alpha} = \frac{(k+1)\prod\limits_{i=2}^{k+1}(i-\alpha)(c+e^z)}{\prod\limits_{i=0}^{k}(\alpha+i)\mathrm{w}}. $$

Формули (7.12) виконуються і в цьому випадку.

Твердження теореми **(B)**–**(D)** безпосередньо випливають з (7.12). □

Із теореми отримуємо, що розвинення функції $(c+e^z)^\alpha$ в околі точки $z=z_*$ в Т–ФЛД має вигляд

$$(c+e^z)^\alpha = \mathfrak{z}^\alpha + \cfrac{e^z-e^{z_*}}{\frac{\mathfrak{z}^{1-\alpha}}{\alpha} + \cfrac{e^z-e^{z_*}}{\frac{2\alpha\mathfrak{z}^\alpha}{1-\alpha} + \cfrac{e^z-e^{z_*}}{\frac{3(1-\alpha)\mathfrak{z}^{1-\alpha}}{\alpha(\alpha+1)} + \cfrac{e^z-e^{z_*}}{\frac{2\alpha(\alpha+1)\mathfrak{z}^\alpha}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + \dots +}}}}$$

$$+ \cfrac{e^z-e^{z_*}}{\frac{(2n-1)\prod_{i=1}^{n-1}(i-\alpha)\mathfrak{z}^{1-\alpha}}{\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha+i)} + \cfrac{e^z-e^{z_*}}{\frac{2\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha+i)\mathfrak{z}^\alpha}{\prod_{i=1}^{n}(i-\alpha)} + \dots}}, \qquad \mathfrak{z} = c+e^{z_*}. \tag{7.14}$$

З формул (7.11) та (7.13) отримуємо розвинення функції $(c+e^z)^\alpha$ в С–ФЛД

$$(c+e^z)^\alpha = \mathfrak{z}^\alpha\left(1 + \cfrac{\frac{\alpha}{\mathfrak{z}}(e^z-e^{z_*})}{1 + \cfrac{\frac{(1-\alpha)}{2\mathfrak{z}}(e^z-e^{z_*})}{1 + \cfrac{\frac{(1+\alpha)}{6\mathfrak{z}}(e^z-e^{z_*})}{1 +}}}\right.$$

$$+ \cfrac{\frac{(2-\alpha)}{6\mathfrak{z}}(e^z-e^{z_*})}{1 + \cfrac{\frac{(2+\alpha)}{10\mathfrak{z}}(e^z-e^{z_*})}{1 + \cfrac{\frac{(3-\alpha)}{10\mathfrak{z}}(e^z-e^{z_*})}{1 + \dots +}}}$$

$$\left. + \cfrac{\frac{(n+\alpha-1)}{2(2n-1)\mathfrak{z}}(e^z-e^{z_*})}{1 + \cfrac{\frac{(n-\alpha)}{2(2n-1)\mathfrak{z}}(e^z-e^{z_*})}{1 + \dots}}\right). \tag{7.15}$$

Теорема 7.14. *Нехай $G\subset\mathbb{C}$ — область однолистості функції e^z. Ланцюгові дроби (7.14) та (7.15) збігаються до функції $(c+e^z)^\alpha$ в області G. На довільному компакті $\mathcal{Z}\subset\mathbf{R}(c,z_*)$, де*

$$\mathbf{R}(c,z_*) = \{z\in\mathbb{C} : z, z_*\in G, \left|\arg\left(\frac{e^z-e^{z_*}}{4(c+z_*)}+\frac{1}{4}\right)\right|<\pi\},$$

ланцюгові дроби збігаються рівномірно.

Доведення. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+\alpha-1}{2(2n-1)\mathfrak{z}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-\alpha}{2(2n-1)\mathfrak{z}} = \frac{1}{4\mathfrak{z}}$, то згідно із теоремою 5.26 С–ФЛД та Т–ФЛД збігаються до функції $(c+e^z)^\alpha$ і на довільному компакті $\mathcal{Z}$ збіжність буде рівномірна. □

В 5.4.1 показано, що функція e^z розвивається в Т–ЛД, який згідно із теоремою 5.29 збігається на всій комплексній площині до цієї функції. В околі точки $z = z_*$ з (5.13) отримуємо розвинення

$$\Bbbk(z_*, z) = e^z - e^{z_*} = e^{z_*}\left(\frac{z - z_*}{1} + \frac{z - z_*}{-2} + \frac{z - z_*}{-3} + \frac{z - z_*}{2} + \frac{z - z_*}{5} + \right.$$

$$\left. + \frac{z - z_*}{-2} + \frac{z - z_*}{-7} + \dots + \frac{z - z_*}{(-1)^n 2} + \frac{z - z_*}{(-1)^n(2n+1)} + \dots \right). \tag{7.16}$$

Тоді Т–ФЛД (7.14) набуває вигляду

$$(c + e^z)^\alpha = \mathfrak{z}^\alpha + \frac{\Bbbk(z_*, z)}{\frac{\mathfrak{z}^{1-\alpha}}{\alpha}} + \frac{\Bbbk(z_*, z)}{\frac{2\alpha\mathfrak{z}^\alpha}{1-\alpha}} + \frac{\Bbbk(z_*, z)}{\frac{3(1-\alpha)\mathfrak{z}^{1-\alpha}}{\alpha(\alpha+1)}} + \frac{\Bbbk(z_*, z)}{\frac{2\alpha(\alpha+1)\mathfrak{z}^\alpha}{(1-\alpha)(2-\alpha)}} + \dots +$$

$$+ \frac{\Bbbk(z_*, z)}{\frac{(2n-1)\prod_{i=1}^{n-1}(i-\alpha)\mathfrak{z}^{1-\alpha}}{\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha+i)}} + \frac{\Bbbk(z_*, z)}{\frac{2\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha+i)\mathfrak{z}^\alpha}{\prod_{i=1}^{n}(i-\alpha)}} + \dots .$$

Аналогічно С–ФЛД (7.15) запишеться наступним чином

$$(c + e^z)^\alpha = \mathfrak{z}^\alpha\left(1 + \frac{\frac{\alpha}{\mathfrak{z}}\Bbbk(z_*, z)}{1} + \frac{\frac{(1-\alpha)}{2\mathfrak{z}}\Bbbk(z_*, z)}{1} + \frac{\frac{(1+\alpha)}{6\mathfrak{z}}\Bbbk(z_*, z)}{1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{(2-\alpha)}{6\mathfrak{z}}\Bbbk(z_*, z)}{1} + \dots + \frac{\frac{(n+\alpha-1)}{2(2n-1)\mathfrak{z}}\Bbbk(z_*, z)}{1} + \frac{\frac{(n-\alpha)}{2(2n-1)\mathfrak{z}}\Bbbk(z_*, z)}{1} + \dots \right).$$

7.3.2. Функція $\operatorname{tg} z^m$. Розглянемо функцію $w = \operatorname{tg} z^m$, $m \in \mathbb{N}_2$. Нехай базис–функція $g(z) = z^m$.

Теорема 7.15. *В області $G \subset \mathbb{C}$ однолистості функції z^m.* ***(A)*** *Функція $\mathrm{w} = \operatorname{tg} z^m$, $m \in \mathbb{N}_2$, має обернені g–похідні довільного порядку, які знаходяться за формулами*

$$^{\{4n\}}\,\mathrm{w}_g = \operatorname{tg} z^m, \;\; ^{\{4n+1\}}\,\mathrm{w}_g = \frac{(2n+1)(n\operatorname{tg}^2 z^m + n + 1)}{\operatorname{tg}^2 z^m + 1},$$

$$^{\{4n+2\}}\,\mathrm{w}_g = \frac{-1}{\operatorname{tg} z^m}, \; ^{\{4n+3\}}\,\mathrm{w}_g = \frac{(n+1)((2n+3)\operatorname{tg}^2 z^m + 2n + 1)}{\operatorname{tg}^2 z^m + 1}, \; n \in \mathbb{N}_0.$$

(B) *Коефіцієнти розвинення функції в Т–ФЛД в околі точки* $z_* \in G$ *рівні*

$$
\begin{aligned}
&b_0(z^m; z_*) = \operatorname{tg} z_*^m,\ b_{4n+1}(z^m; z_*) = \frac{4n+1}{1+\operatorname{tg}^2 z_*^m},\\
&b_{4n+2}(z^m; z_*) = -\frac{1+\operatorname{tg}^2 z_*^m}{\operatorname{tg} z_*^m}, \quad b_{4n+3}(z^m; z_*) = \frac{(4n+3)\operatorname{tg}^2 z_*^m}{1+\operatorname{tg}^2 z_*^m},\\
&b_{4n+4}(z^m; z_*) = \frac{1+\operatorname{tg}^2 z_*^m}{\operatorname{tg} z_*^m}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned} \tag{7.17}
$$

Теорема 7.15 доводиться аналогічно до теореми 5.18. Із формул (7.17) після еквівалентних перетворень отримуємо розвинення функції $\operatorname{tg} z^m$ в околі точки $z_* \in G$ в Т–ФЛД

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg} z^m = \mathfrak{z} + \frac{(z^m - z_*^m)(1+\mathfrak{z}^2)}{1} + \frac{(z^m - z_*^m)\mathfrak{z}}{-1} + \frac{z^m - z_*^m}{3\mathfrak{z}} + \frac{z^m - z_*^m}{1} + \\
+ \frac{(z^m - z_*^m)\mathfrak{z}}{5} + \dots + \frac{(z^m - z_*^m)\mathfrak{z}}{-1} + \frac{z^m - z_*^m}{(4k-1)\mathfrak{z}} + \\
+ \frac{z^m - z_*^m}{1} + \frac{(z^m - z_*^m)\mathfrak{z}}{4k+1} + \dots, \qquad \mathfrak{z} = \operatorname{tg} z_*^m.
\end{aligned} \tag{7.18}
$$

Ланцюговий дріб (7.18) запишемо у вигляді еквівалентного С–ФЛД

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg} z^m = \mathfrak{z} + \frac{(1+\mathfrak{z}^2)(z^m - z_*^m)}{1} - \frac{\mathfrak{z}(z^m - z_*^m)}{1} - \frac{\frac{z^m - z_*^m}{3\mathfrak{z}}}{1} + \frac{\frac{z^m - z_*^m}{3\mathfrak{z}}}{1} + \\
+ \frac{\frac{\mathfrak{z}(z^m - z_*^m)}{5}}{1} - \frac{\frac{\mathfrak{z}(z^m - z_*^m)}{5}}{1} - \frac{\frac{z^m - z_*^m}{7\mathfrak{z}}}{1} + \frac{\frac{z^m - z_*^m}{7\mathfrak{z}}}{1} + \dots + \\
+ \frac{(-1)^n \mathfrak{z}^{(-1)^{n-1}} \frac{z^m - z_*^m}{2n-1}}{1} + \frac{(-1)^n (\mathfrak{z})^{(-1)^n} \frac{z^m - z_*^m}{2n+1}}{1} + \dots .
\end{aligned} \tag{7.19}
$$

Легко бачити, що для довільного $z_* \in G$

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n (\operatorname{tg} z_*^m)^{(-1)^{n-1}}}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n (\operatorname{tg} z_*^m)^{(-1)^n}}{2n+1} = 0.
$$

В силу теореми 5.27 має місце наступна твердження.

Теорема 7.16. *Нехай G є область однолистості функції z^m. Тоді:* ***(A)*** *Т–ФЛД* (7.18) *та С–ФЛД* (7.19) *збігаються до функції* $\operatorname{tg} z^m$ *у всіх точках області G, крім особливих очок функції;* ***(B)*** *на довільному компакті $\mathscr{Z} \subset G \backslash \{ \sqrt[m]{(2k+1)\frac{\pi}{2}}, k \in \mathbb{Z}\}$ ланцюгові дроби збігаються рівномірно.*

Згідно із пунктом **(B)** теореми 5.15 функція z^m має скінченні обернені похідні Тіле до $(2m-1)$–го порядку включно і ${}^{(2m-1)}z^m = 0$. Тоді в околі точки $z = z_*$ функція z^m може бути подана скінченним ланцюговим дробом Тіле наступним чином:

$$z^m = z_*^m \Bigg(1 + \frac{m(z-z_*)}{z_*} + \frac{(1-m)(z-z_*)}{2} + \frac{(m+1)(z-z_*)}{3z_*} + \\ + \frac{(2-m)(z-z_*)}{2} + \cdots + \frac{(2m-3)(z-z_*)}{(2m-5)z_*} + \frac{-2(z-z_*)}{2} + \\ + \frac{(2m-2)(z-z_*)}{(2m-3)z_*} + \frac{-(z-z_*)}{2} + \frac{(2m-1)(z-z_*)}{(2m-1)z_*} \Bigg),$$

а тоді

$$\mathrm{m}(z_*, z) = z^m - z_*^m = z_*^m \Bigg(\frac{m(z-z_*)}{z_*} + \frac{(1-m)(z-z_*)}{2} + \frac{(m+1)(z-z_*)}{3z_*} + \\ + \cdots + \frac{(2m-2)(z-z_*)}{(2m-3)z_*} + \frac{-(z-z_*)}{2} + \frac{(2m-1)(z-z_*)}{(2m-1)z_*} \Bigg). \tag{7.20}$$

Підставивши (7.20) у (7.18) та (7.19) отримаємо

$$\operatorname{tg} z^m = \mathfrak{z} + \frac{\mathrm{m}(z_*, z)(1+\mathfrak{z}^2)}{1} + \frac{\mathrm{m}(z_*, z)\mathfrak{z}}{-1} + \frac{\mathrm{m}(z_*, z)}{3\mathfrak{z}} + \frac{\mathrm{m}(z_*, z)}{1} + \\ + \frac{\mathrm{m}(z_*, z)\mathfrak{z}}{5} + \cdots + \frac{\mathrm{m}(z_*, z)\mathfrak{z}}{-1} + \frac{\mathrm{m}(z_*, z)}{(4k-1)\mathfrak{z}} + \frac{\mathrm{m}(z_*, z)}{1} + \frac{\mathrm{m}(z_*, z)\mathfrak{z}}{4k+1} + \cdots,$$

та

$$\operatorname{tg} z^m = \mathfrak{z} + \frac{\mathrm{m}(z_*, z)(1+\mathfrak{z}^2)}{1} - \frac{\mathrm{m}(z_*, z)\mathfrak{z}}{1} - \frac{\mathrm{m}(z_*, z)/3\mathfrak{z}}{1} + \frac{\mathrm{m}(z_*, z)/3\mathfrak{z}}{1} + \\ + \frac{\mathrm{m}(z_*, z)\mathfrak{z}/5}{1} - \frac{\mathrm{m}(z_*, z)\mathfrak{z}/5}{1} - \frac{\mathrm{m}(z_*, z)/7\mathfrak{z}}{1} + \frac{\mathrm{m}(z_*, z)/7\mathfrak{z}}{1} + \cdots + \\ + \frac{(-1)^n \mathrm{m}(z_*, z)\mathfrak{z}^{(-1)^{n-1}}/(2n-1)}{1} + \frac{(-1)^n \mathrm{m}(z_*, z)\mathfrak{z}^{(-1)^n}/(2n+1)}{1} + \cdots.$$

7.3.3. Функція $\operatorname{cth}\sqrt{z}$**.** За базис–функцію виберемо $g(z) = \sqrt{z}$.

Теорема 7.17. *Нехай в однозв'язній області G, яка не містить початку координат, вибрано однозначну гілку функції $\sqrt{z}$.* ***(A)*** *Обернені g–похідні функції* $\mathrm{w} = \operatorname{cth}\sqrt{z}$ *визначаються згідно із формулами*

$$ {}^{\{4n\}}\mathrm{w}_g = \operatorname{cth}\sqrt{z},\ {}^{\{4n+1\}}\mathrm{w}_g = \frac{(2n+1)(n\operatorname{cth}^2\sqrt{z} - n - 1)}{\operatorname{cth}^2\sqrt{z} - 1},\ n \in \mathbb{N}_0, $$
$$ {}^{\{4n+2\}}\mathrm{w}_g = \frac{1}{\operatorname{cth}\sqrt{z}},\ {}^{\{4n+3\}}\mathrm{w}_g = \frac{(n+1)((2n+3)\operatorname{cth}^2\sqrt{z} - 2n - 1)}{\operatorname{cth}^2\sqrt{z} - 1}. $$

(B) *Якщо $z_* \in G$, то коефіцієнти розвинення функції* $\operatorname{cth}\sqrt{z}$ *в околі точки $z = z_*$ в Т–ФЛД рівні*

$$ \begin{aligned} & b_0(\sqrt{z}; z_*) = \operatorname{cth}\sqrt{z_*}, \quad b_{4n+1}(\sqrt{z}; z_*) = -\frac{4n+1}{\operatorname{cth}^2\sqrt{z_*} - 1}, \\ & b_{4n+2}(\sqrt{z}; z_*) = \frac{1 - \operatorname{cth}^2\sqrt{z_*}}{\operatorname{cth}\sqrt{z_*}},\ b_{4n+3}(\sqrt{z}; z_*) = \frac{(4n+3)\operatorname{cth}^2\sqrt{z_*}}{\operatorname{cth}^2\sqrt{z_*} - 1}, \\ & b_{4n+4}(\sqrt{z}; z_*) = \frac{\operatorname{cth}^2\sqrt{z_*} - 1}{\operatorname{cth}\sqrt{z_*}}, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{7.21} $$

Доведення. Твердження теореми доводяться за індукцією аналогічно як в теоремі 5.22. □

Із теореми 7.17 випливає, що розвинення функції $\operatorname{cth}\sqrt{z}$ в Т–ФЛД має вигляд

$$ \operatorname{cth}\sqrt{z} = b_0(\sqrt{z}; z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{z_*}}{b_n(\sqrt{z}; z_*)}, \tag{7.22} $$

де коефіцієнти $b_n(\sqrt{z}; z_*), n \in \mathbb{N}_0$, визначені формулами (7.21).

Запишемо Т–ФЛД (7.22) у вигляді еквівалентного С–ФЛД

$$ \operatorname{cth}\sqrt{z} = a_0(\sqrt{z}; z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\sqrt{z}; z_*)(\sqrt{z} - \sqrt{z_*})}{1}, \tag{7.23} $$

коефіцієнти якого, згідно із формулами (7.11), будуть рівні

$$ a_0(\sqrt{z}; z_*) = \operatorname{cth}\sqrt{z_*},\ a_1(\sqrt{z}; z_*) = -(\operatorname{cth}^2\sqrt{z_*} - 1),\ a_2(\sqrt{z}; z_*) = \operatorname{cth}\sqrt{z_*}, $$

$$a_{2n-1}(\sqrt{z};z_*)=\frac{-\big(\operatorname{cth}\sqrt{z_*}\big)^{(-1)^{n-1}}}{2n-1},\ a_{2n}(\sqrt{z};z_*)=\frac{\big(\operatorname{cth}\sqrt{z_*}\big)^{(-1)^{n-1}}}{2n-1},$$

де $n\in\mathbb{N}_2$.

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}(\sqrt{z};z_*)=\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}(\sqrt{z};z_*)=0$, то має місце твердження аналогічне теоремі 5.36.

Теорема 7.18. *Нехай в однозв'язній області $G\subset\mathbb{C}$, яка не містить початку координат, вибрано однозначну гілку функції $\sqrt{z}$.* ***(A)*** *Ланцюгові дроби* (7.22) *та* (7.23) *збігаються до функції* $\operatorname{cth}\sqrt{z}$ *у всіх точках області G крім особливих точок функції;* ***(B)*** *на довільному компакті $\mathscr{K}\subset G\backslash\{-\big(\frac{k\pi}{2}\big)^2,k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$ ланцюгові дроби збігаються рівномірно.*

Якщо в околі точки $z=z_*$ замість функції $\sqrt{z}$ взяти її розвинення в Т–ЛД (5.12), то будемо мати

$$\mathbb{r}(z_*,z)=\sqrt{z}-\sqrt{z_*}=\operatorname*{K}_{n=1}^{\infty}\frac{z-z_*}{2\sqrt{z_*}}.\tag{7.24}$$

Підставимо розвинення (7.24) в ланцюговий дріб (7.22). Маємо

$$\operatorname{cth}\sqrt{z}=b_0(\sqrt{z};z_*)+\operatorname*{K}_{i=1}^{\infty}\frac{\mathbb{r}(z_*,z)}{b_i(\sqrt{z};z_*)}.$$

Аналогічно, якщо підставити розвинення (7.24) в ланцюговий дріб (7.23), то отримаємо

$$\operatorname{cth}\sqrt{z}=a_0(\sqrt{z};z_*)+\operatorname*{K}_{i=1}^{\infty}\frac{a_i(\sqrt{z};z_*)\mathbb{r}(z_*,z)}{1}.$$

7.4. Зображення функцій $\operatorname{sh}z,\operatorname{ch}z,\sin z,\cos z$ функціональними ланцюговими дробами

Для функцій $\operatorname{sh}z,\operatorname{ch}z$, $\sin z,\cos z$ не відомі коефіцієнти диференціального рівняння Ріккаті (1.58), розв'язком якого були б розглядувані функції. Для даних функцій не встановлені у загальному вигляді формули обернених похідних Тіле та обернених похідних 2–го типу, а тому не вдається отримати розвинення функцій $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z, \sin z$ та $\cos z$ в ланцюговий дріб Тіле та квазі–обернений ланцюговий дріб типу Тіле. Можна послідовно знаходити обернені похідні Тіле та обернені похідні 2–го типу цих функцій. В монографії автора [92, с. 271–278] знайдені підхідні дроби ланцюгового дробу Тіле. Метод Вісковатова також дозволяє отримати підхідні дроби для вказаних функцій [116, с. 162–168], [131, с. 113], але розвинення в ланцюговий дріб в загальному вигляді не знайдено. Використовуючи тотожність Ойлера можна записати степеневі ряди функцій $\sin z, \cos z$ загальним ланцюговим T–дробом, але отримані ланцюгові дроби не мають жодних переваг над степеневими рядами [131, с. 201]. Відомо, що побудовані за формулою Обрешкова раціональні наближення функцій $\sin x$ та $\cos x$ мають невисокий порядок точності [116, с. 153]. Узагальненням ланцюгових C–дробів є ланцюгові δ–дроби Ланге [154]. Можна послідовно знаходити підхідні дроби ланцюгових δ–дробів вказаних функцій, але не встановлено загальний вигляд розвинення функцій $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$, $\sin z, \cos z$ в ланцюгові δ–дроби.

Відомо, що функція $\sin z$ задовольняє інтегральне рівняння

$$w(\xi) = \xi - \int\limits_0^{\xi} (\xi - \zeta) w(\zeta) d\zeta \qquad \text{для всіх } \xi \in [0, z].$$

Нехай

$$\gamma_{2j+1} = \begin{vmatrix} B(2,2) & B(2,4) & \cdots & B(2,2j+2) \\ B(4,2) & B(4,4) & \cdots & B(4,2j+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(2j+2,2) & B(2j+2,4) & \cdots & B(2j+2,2j+2) \end{vmatrix},$$

$j = 0, 1, \dots, \varepsilon_n = \mathbf{sign}\,\gamma_{2n-1}, B(\alpha, \beta)$ — бета–функція,

$$A_{2n+1}(t) = \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{|\gamma_{2n-1}\gamma_{2n+1}|}} \begin{vmatrix} B(2,2) & B(2,4) & \cdots & B(2,2n+2) \\ B(4,2) & B(4,4) & \cdots & B(4,2n+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(2n,2) & B(2n,4) & \cdots & B(2n,2n+2) \\ t & t^3 & \cdots & t^{2n+1} \end{vmatrix}.$$

Теорема 7.19 (В. К. Дзядика [27, с. 250]). *Для кожного натурального n апроксиманти Паде $R^{[2n+1,2n]}(z)$ порядку $(2n+1, 2n)$ функції $\sin z$ виражаються за формулами*

$$R^{[2n+1,2n]}(z) = \frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k A_{2n+1}^{(2n-2k)}(1) z^{2k+1}}{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k A_{2n+1}^{(2n-2k+1)}(0) z^{2k}}\ ,$$

і здійснюють у кожній точці $z \in \mathbb{C}$ наближення функції $\sin z$, яке виражається за наступною асимптотичною формулою

$$\sin z - R^{[2n+1,2n]}(z) = \frac{-z^{4n+3}}{[(2n+1)!]^2}\,\frac{\gamma_{2n+1}}{\gamma_{2n-1}}\left[1 + O\big(|z|^2/n\big)\right].$$

В монографії В. К. Дзядика [27, с. 247–250] показано, що в крузі $K_R = \{z\,;\ |z| \leqslant R\}$ радіуса $R > 0$ апроксиманти Паде $R^{[2n+1,2n]}(\sin\xi; z)$ здійснюють асимптотично найкраще наближення функції в класі $\mathbb{R}_{2n+1,2n}(z)$, де $\mathbb{R}_{n,m}(z)$ — клас раціональних функцій вигляду $R_{n,m}(z) = P_n(z)/Q_m(z)$, де $P_n(z), Q_m(z)$ — многочлени степеня відповідно не вище n та m. В роботі Дзядика [28] наведені аналогічні твердження для функцій $\cos z, \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$.

Розглянемо зображення функцій $\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z, \cos z, \sin z$ функціональними ланцюговими дробами.

7.4.1. Функції $\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$. Нехай базис–функція $g(z) = e^z$. Знайдемо обернені g–похідні функції $\mathrm{w} = \operatorname{ch} z$. Із формул (7.4) маємо, що

$${}^{\{1\}}\mathrm{w}_g = \frac{e^z}{\operatorname{sh} z},\quad {}^{\{2\}}\mathrm{w}_g = \frac{(\operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z)(2\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z)}{\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z},\quad {}^{\{3\}}\mathrm{w}_g = \frac{2e^z}{\operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z}.$$

Але $({}^{\{3\}}\,\mathrm{w}_g)' = 0$. З частини **(A)** теореми 7.3 випливає, що ${}^{\{4\}}\,\mathrm{w}_g = \infty$ для всіх значень $z \in \mathbb{C}$. Тоді в околі точки $z = z_*$, де $z_* \neq 0$, функція $\operatorname{ch} z$ може бути зображена лише скінченним Т–ФЛД вигляду

$$\operatorname{ch} z = b_0(e^z; z_*) + \frac{e^z - e^{z_*}}{b_1(e^z; z_*)} \underset{+}{} \frac{e^z - e^{z_*}}{b_2(e^z; z_*)} \underset{+}{} \frac{e^z - e^{z_*}}{b_3(e^z; z_*)},$$

де $b_0(e^z; z_*) = \operatorname{ch} z_*$, $b_1(e^z; z_*) = e^{z_*}/\operatorname{sh} z_*$, $b_2(e^z; z_*) = 2\operatorname{sh}^2 z_*/(\operatorname{sh} z_* - \operatorname{ch} z_*)$, $b_3(e^z; z_*) = e^{z_*}(\operatorname{sh} z_* - \operatorname{ch} z_*)/\operatorname{sh} z_*(\operatorname{sh} z_* + \operatorname{ch} z_*)$.

Підставивши замість $e^z - e^{z_*}$ розвинення (7.16) врешті будемо мати

$$\operatorname{ch} z = b_0(e^z; z_*) + \frac{\Bbbk(z_*, z)}{b_1(e^z; z_*)} \underset{+}{} \frac{\Bbbk(z_*, z)}{b_2(e^z; z_*)} \underset{+}{} \frac{\Bbbk(z_*, z)}{b_3(e^z; z_*)}.$$

Ланцюговий дріб можна також записати у вигляді еквівалентного скінченного С–ФЛД наступним чином

$$\operatorname{ch} z = a_0(e^z; z_*) + \frac{a_1(e^z; z_*)\Bbbk(z_*, z)}{1} \underset{+}{} \frac{a_2(e^z; z_*)\Bbbk(z_*, z)}{1} \underset{+}{} \frac{a_3(e^z; z_*)\Bbbk(z_*, z)}{1},$$

де $a_0(e^z; z_*) = \operatorname{ch} z_*$, $a_1(e^z; z_*) = \operatorname{sh} z_*/e^{z_*}$, $a_2(e^z; z_*) = (\operatorname{sh} z_* - \operatorname{ch} z_*) : : 2e^{z_*}\operatorname{sh} z_*$, $a_3(e^z; z_*) = (\operatorname{sh} z_* + \operatorname{ch} z_*)/2e^{z_*}\operatorname{sh} z_*$.

Розглянемо функцію $\mathrm{w} = \operatorname{sh} z$. Якщо в якості базис–функції взяти $g(z) = e^z$, то перші три обернені g–похідні функції будуть рівні

$${}^{\{1\}}\mathrm{w}_g = \frac{e^z}{\operatorname{ch} z}, \quad {}^{\{2\}}\mathrm{w}_g = \frac{(\operatorname{sh} z - 2\operatorname{ch} z)(\operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z)}{\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z}, \quad {}^{\{3\}}\mathrm{w}_g = \frac{2e^z}{\operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z}.$$

Оскільки $\left({}^{\{3\}}\mathrm{w}_g\right)' = 0$ для всіх значень $z \in \mathbb{C}$, то згідно з теоремою 7.3 ${}^{\{4\}}\mathrm{w}_g = \infty$. Маємо зображення функції $\operatorname{sh} z$ скінченним Т–ФЛД

$$\operatorname{sh} z = b_0(e^z; z_*) + \frac{e^z - e^{z_*}}{b_1(e^z; z_*)} \underset{+}{} \frac{e^z - e^{z_*}}{b_2(e^z; z_*)} \underset{+}{} \frac{e^z - e^{z_*}}{b_3(e^z; z_*)},$$

де $b_0(e^z; z_*) = \operatorname{sh} z_*$, $b_1(e^z; z_*) = e^{z_*}/\operatorname{ch} z_*$, $b_2(e^z; z_*) = 2\operatorname{ch}^2 z_*/(\operatorname{ch} z_* - \operatorname{sh} z_*)$, $b_3(e^z; z_*) = e^{z_*}(\operatorname{ch} z_* - \operatorname{sh} z_*)/\operatorname{ch} z_*(\operatorname{sh} z_* + \operatorname{ch} z_*)$.

Зображення еквівалентним скінченним С–ФЛД матиме вигляд

$$\operatorname{sh} z = a_0(e^z; z_*) + \frac{a_1(e^z; z_*)(e^z - e^{z_*})}{1} \underset{+}{} \frac{a_2(e^z; z_*)(e^z - e^{z_*})}{1} \underset{+}{} \frac{a_3(e^z; z_*)(e^z - e^{z_*})}{1},$$

де $a_0(e^z;z_*) = \operatorname{sh} z_*$, $a_2(e^z;z_*) = \operatorname{ch} z_*/e^{z_*}$, $a_2(e^z;z_*) = (\operatorname{ch} z_* - \operatorname{sh} z_*) : : 2e^{z_*}\operatorname{ch} z_*$, $a_3(e^z;z_*) = (\operatorname{sh} z_* + \operatorname{ch} z_*)/2e^{z_*}\operatorname{ch} z_*$.

Як і в попередньому випадку, підставимо замість $e^z - e^{z_*}$ розвинення (7.16). Отримуємо

$$\operatorname{sh} z = b_0(e^z;z_*) + \frac{\Bbbk(z_*,z)}{b_1(e^z;z_*)} + \frac{\Bbbk(z_*,z)}{b_2(e^z;z_*)} + \frac{\Bbbk(z_*,z)}{b_3(e^z;z_*)},$$

або

$$\operatorname{sh} z = a_0(e^z;z_*) + \frac{a_1(e^z;z_*)\Bbbk(z_*,z)}{1} + \frac{a_2(e^z;z_*)\Bbbk(z_*,z)}{1} + \frac{a_3(e^z;z_*)\Bbbk(z_*,z)}{1}.$$

Як частинний випадок в околі точки $z_* = 0$ маємо зображення функції $\operatorname{sh} z = \frac{\Bbbk(0,z)}{1} + \frac{\Bbbk(0,z)}{2} + \frac{\Bbbk(0,z)}{1}$, або $\operatorname{sh} z = \frac{\Bbbk(0,z)}{1} + \frac{0,5\,\Bbbk(0,z)}{1} + \frac{0,5\,\Bbbk(0,z)}{1}$, де $\Bbbk(0,z) = \frac{z}{1} + \frac{z}{-2} + \frac{z}{-3} + \frac{z}{2} + \frac{z}{5} + \cdots + \frac{z}{(-1)^n 2} + \frac{z}{(-1)^n(2n+1)} + \cdots$.

7.4.2. Функція $\sin z$**.** Виберемо за базис–функцію $g(z) = e^{iz}$ і знайдемо зображення функції $\mathrm{w} = \sin z$ Т–ФЛД. Обернені g–похідні функції $\sin z$ будуть рівні

$${}^{\{1\}}\mathrm{w}_g = \frac{ie^{iz}}{\cos z},\quad {}^{\{2\}}\mathrm{w}_g = \frac{\sin z\cos z - i(\cos^2 z + 1)}{\cos z - i\sin z},\quad {}^{\{3\}}\mathrm{w}_g = 2e^{iz}(\sin z + i\cos z).$$

Оскільки $\big(e^{iz}(\sin z + i\cos z)\big)' = 0$, то згідно із теоремою 7.3 маємо, що ${}^{\{4\}}\mathrm{w}_g = \infty$. В околі точки $z = z_*$, де $z_* \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}$, функція $\sin z$ зображається скінченним Т–ФЛД

$$\sin z = b_0(e^{iz};z_*) + \frac{e^{iz} - e^{iz_*}}{b_1(e^{iz};z_*)} + \frac{e^{iz} - e^{iz_*}}{b_2(e^{iz};z_*)} + \frac{e^{iz} - e^{iz_*}}{b_3(e^{iz};z_*)},$$

де $b_0(e^{iz};z_*) = \sin z_*, b_1(e^{iz};z_*) = ie^{iz_*}/\cos z_*, b_2(e^{iz};z_*) = 2i\cos^2 z_*/(i\sin z_* - - \cos z_*)$, $b_3(e^{iz};z_*) = e^{iz_*}(\sin 2z_* + i\cos 2z_*)/\cos z_*$.

Із розвинення (5.15) отримуємо

$$\mathbb{e}(z_*,z) = e^{iz} - e^{iz_*} = e^{iz_*}\Big(\frac{z-z_*}{-i} + \frac{z-z_*}{-2} + \frac{z-z_*}{3i} + \frac{z-z_*}{2} +$$

$$+\frac{z-z_*}{-5i}+\frac{z-z_*}{-2}+\cdots+\frac{z-z_*}{(-1)^n\,(2n-1)i}+\frac{z-z_*}{(-1)^n\,2}+\cdots\Bigg). \qquad (7.25)$$

Тоді зображення функції $\sin z$ скінченним Т–ФЛД набуде вигляду

$$\sin z = b_0(e^{iz};z_*)+\frac{\text{ꬲ}(z_*,z)}{b_1(e^{iz};z_*)}+\frac{\text{ꬲ}(z_*,z)}{b_2(e^{iz};z_*)}+\frac{\text{ꬲ}(z_*,z)}{b_3(e^{iz};z_*)}.$$

В частинному випадку для $z=0$ маємо $\sin z = \dfrac{\text{ꬲ}(0,z)}{i}+\dfrac{\text{ꬲ}(0,z)}{-2i}+\dfrac{\text{ꬲ}(0,z)}{i}$,

де $\text{ꬲ}(0,z)=\dfrac{z}{-i}+\dfrac{z}{-2}+\dfrac{z}{3i}+\dfrac{z}{2}+\cdots+\dfrac{z}{(-1)^n\,(2n-1)i}+\dfrac{z}{(-1)^n\,2}+\cdots$.

Можна зобразити функцію $\sin z$ скінченним С–ФЛД наступним чином

$$\sin z = a_0(e^{iz};z_*)+\frac{a_1(e^{iz};z_*)\text{ꬲ}(z_*,z)}{1}+\frac{a_2(e^{iz};z_*)\text{ꬲ}(z_*,z)}{1}+\frac{a_3(e^{iz};z_*)\text{ꬲ}(z_*,z)}{1},$$

де $a_0(e^{iz};z_*)=\sin z_*$, $a_1(e^{iz};z_*)=\cos z_*/ie^{iz_*}$, $a_2(e^{iz};z_*)=(\cos z_*-i\sin z_*):$ $:2e^{iz_*}\cos z_*$, $a_3(e^{iz};z_*)=(\cos z_*-i\sin z_*)/2\cos z_* e^{iz_*}(\cos 2z_*-i\sin z_*)$.

В околі точки $z=0$ будемо мати зображення

$$\sin z = \frac{-\,i\,\text{ꬲ}(0,z)}{1}+\frac{0{,}5\,\text{ꬲ}(0,z)}{1}+\frac{0{,}5\,\text{ꬲ}(0,z)}{1}.$$

Якщо в якості базис–функції вибрати $g(z)=\operatorname{tg}\frac{z}{2}$, то обернені g–похідні функції $\mathrm{w}=\sin z$ будуть рівні

$${}^{\{0\}}\mathrm{w}_g=\frac{2\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}},\ {}^{\{1\}}\mathrm{w}_g=\frac{(1+\operatorname{tg}^2\frac{z}{2})^2}{2(1-\operatorname{tg}^2\frac{z}{2})},\ {}^{\{2\}}\mathrm{w}_g=\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{z}{2}(3-\operatorname{tg}^2\frac{z}{2})},$$

$${}^{\{3\}}\mathrm{w}_g=\frac{1}{2}\Big((\operatorname{tg}^2\tfrac{z}{2}-1)^2-4\operatorname{tg}^2\tfrac{z}{2}\Big),\ {}^{\{4\}}\mathrm{w}_g=0.$$

Обернена g–похідна 5–го порядку ${}^{\{5\}}\,\mathrm{w}_g=\infty$ оскільки $({}^{\{4\}}\,\mathrm{w}_g)'=0$.

Коефіцієнти зображення функції $\sin z$ скінченним Т–ФЛД в околі точки $z=z_*$ будуть рівні

$$b_0(\operatorname{tg}\tfrac{z}{2};z_*)=\frac{2\mathfrak{z}}{1+\mathfrak{z}^2},\ b_1(\operatorname{tg}\tfrac{z}{2};z_*)=\frac{(\mathfrak{z}^2+1)^2}{2(1-\mathfrak{z}^2)},\ b_2(\operatorname{tg}\tfrac{z}{2};z_*)=\frac{2(1-\mathfrak{z}^2)^2}{\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2+1)(3-\mathfrak{z}^2)},$$

$$b_3(\operatorname{tg}\tfrac{z}{2};z_*)=\frac{\mathfrak{z}^2(3-\mathfrak{z}^2)^2}{2(\mathfrak{z}^2-1)},\ b_4(\operatorname{tg}\tfrac{z}{2};z_*)=\frac{2}{\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2-3)},\qquad \mathfrak{z}=\operatorname{tg}\tfrac{z_*}{2}.$$

Тоді

$$\sin z = b_0(\operatorname{tg}\tfrac{z}{2}; z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{4} \frac{\operatorname{tg}\frac{z}{2} - \operatorname{tg}\frac{z_*}{2}}{b_k(\operatorname{tg}\frac{z}{2}; z_*)}\,. \tag{7.26}$$

Із теорем 5.8 та 5.18 випливає, що функція $\operatorname{tg}\frac{z}{2}$ в околі точки $z = z_*$ може бути розвинути в ланцюговий дріб Тіле, який після еквівалентних перетворень запишеться наступним чином

$$\operatorname{tg}\tfrac{z}{2} = \mathfrak{z} + \frac{(z-z_*)(1+\mathfrak{z}^2)}{2} \underset{+}{} \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-1} \underset{+}{} \frac{z-z_*}{6\mathfrak{z}} \underset{+}{} \frac{z-z_*}{1} \underset{+}{} \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{10} \underset{+}{}$$

$$\underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-1} \underset{+}{} \frac{z-z_*}{2(4n+3)\mathfrak{z}} \underset{+}{} \frac{z-z_*}{1} \underset{+}{} \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{2(4n+5)} \underset{+}{} \cdots, \qquad \mathfrak{z} = \operatorname{tg}\tfrac{z_*}{2}.$$

Тоді

$$\mathfrak{t}(z_*, z) = \operatorname{tg}\tfrac{z}{2} - \operatorname{tg}\tfrac{z_*}{2} = \frac{(z-z_*)(1+\mathfrak{z}^2)}{2} \underset{+}{} \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-1} \underset{+}{} \frac{z-z_*}{6\mathfrak{z}} \underset{+}{} \frac{z-z_*}{1} \underset{+}{}$$

$$\underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{-1} \underset{+}{} \frac{z-z_*}{2(4n+3)\mathfrak{z}} \underset{+}{} \frac{z-z_*}{1} \underset{+}{} \frac{(z-z_*)\mathfrak{z}}{2(4n+5)} \underset{+}{} \cdots. \tag{7.27}$$

Підставивши розвинення (7.27) в ланцюговий дріб (7.26) врешті отримаємо

$$\sin z = b_0(\operatorname{tg}\tfrac{z}{2}; z_*) + \frac{\mathfrak{t}(z_*, z)}{b_1(\operatorname{tg}\frac{z}{2}; z_*)} \underset{+}{} \frac{\mathfrak{t}(z_*, z)}{b_2(\operatorname{tg}\frac{z}{2}; z_*)} \underset{+}{} \frac{\mathfrak{t}(z_*, z)}{b_3(\operatorname{tg}\frac{z}{2}; z_*)} \underset{+}{} \frac{\mathfrak{t}(z_*, z)}{b_4(\operatorname{tg}\frac{z}{2}; z_*)}.$$

Еквівалентний скінченний С–ФЛД запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} \sin z = {} & a_0(\operatorname{tg}\tfrac{z}{2}; z_*) + \frac{a_1(\operatorname{tg}\frac{z}{2}; z_*)\mathfrak{t}(z_*, z)}{1} \underset{+}{} \frac{a_2(\operatorname{tg}\frac{z}{2}; z_*)\mathfrak{t}(z_*, z)}{1} \underset{+}{} \\ & \underset{+}{} \frac{a_3(\operatorname{tg}\frac{z}{2}; z_*)\mathfrak{t}(z_*, z)}{1} \underset{+}{} \frac{a_4(\operatorname{tg}\frac{z}{2}; z_*)\mathfrak{t}(z_*, z)}{1}, \end{aligned}$$

де $a_0(\operatorname{tg}\frac{z}{2}; z_*) = 2\mathfrak{z}/(1+\mathfrak{z}^2)$, $a_1(\operatorname{tg}\frac{z}{2}; z_*) = 2(1-\mathfrak{z}^2)/(\mathfrak{z}^2+1)^2$, $a_2(\operatorname{tg}\frac{z}{2}; z_*) = {}$ $= \mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2-3)^2(\mathfrak{z}^4-1)$, $a_3(\operatorname{tg}\frac{z}{2}; z_*) = (\mathfrak{z}^2+1)\mathfrak{z}(1-\mathfrak{z}^2)(\mathfrak{z}^2-3)$, $a_4(\operatorname{tg}\frac{z}{2}; z_*) = {}$ $= (\mathfrak{z}^2-1)\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2-3)$.

Якщо $z_* = \frac{\pi}{4}$, то $\mathfrak{z} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$ і коефіцієнти подання функції $\sin z$ скінченним Т–ФЛД та С–ФЛД будуть рівні $b_0(\operatorname{tg}\frac{z}{2}; \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b_1(\operatorname{tg}\frac{z}{2}; \frac{\pi}{4}) = {}$ $= 2(\sqrt{2}-1)$, $b_2(\operatorname{tg}\frac{z}{2}; \frac{\pi}{4}) = 1$, $b_3(\operatorname{tg}\frac{z}{2}; \frac{\pi}{4}) = -2(\sqrt{2}-1)$, $b_4(\operatorname{tg}\frac{z}{2}; \frac{\pi}{4}) = -\frac{(\sqrt{2}+2)}{2}$,

$a_0(\operatorname{tg}\frac{z}{2};\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}, a_1(\operatorname{tg}\frac{z}{2};\frac{\pi}{4})=\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}, a_2(\operatorname{tg}\frac{z}{2};\frac{\pi}{4})=\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}, a_3(\operatorname{tg}\frac{z}{2};\frac{\pi}{4})=\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}$, $a_4(\operatorname{tg}\frac{z}{2};\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Отже, в околі точки $z_*=\frac{\pi}{4}$ зображення функції $\sin z$ Т–ФЛД має вигляд

$$\sin z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\mathbb{t}(\frac{\pi}{4},z)}{2(\sqrt{2}-1)}+\frac{\mathbb{t}(\frac{\pi}{4},z)}{1}+\frac{\mathbb{t}(\frac{\pi}{4},z)}{-2(\sqrt{2}-1)}+\frac{\mathbb{t}(\frac{\pi}{4},z)}{-(2+\sqrt{2})/2}.$$

Аналогічно зображення функції С–ФЛД запишеться наступним чином

$$\sin z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2}\mathbb{t}(\frac{\pi}{4},z)}{1}+\frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2}\mathbb{t}(\frac{\pi}{4},z)}{1}+\frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2}\mathbb{t}(\frac{\pi}{4},z)}{1}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbb{t}(\frac{\pi}{4},z)}{1}.$$

7.4.3. Функція $\cos z$. Виберемо за базис–функція $g(z)=e^{iz}$. Обернені g–похідні функції $\mathrm{w}=\cos z$ будуть рівні:

$${}^{\{1\}}\mathrm{w}_g=\frac{-ie^{iz}}{\sin z},\ {}^{\{2\}}\mathrm{w}_g=\frac{\sin z\cos z+i(\sin^2 z+1)}{\sin z+i\cos z},\ {}^{\{3\}}\mathrm{w}_g=2e^{iz}(\cos z-i\sin z).$$

Але ${}^{\{4\}}\,\mathrm{w}_g=\infty$ оскільки $(e^{iz}(\cos z-i\sin z))'=0$. В околі точки $z=z_*$, де $z_*\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$, функцію можна зобразити скінченним Т–ФЛД наступним чином

$$\cos z=b_0(e^{iz};z_*)+\frac{e^{iz}-e^{iz_*}}{b_1(e^{iz};z_*)}+\frac{e^{iz}-e^{iz_*}}{b_2(e^{iz};z_*)}+\frac{e^{iz}-e^{iz_*}}{b_3(e^{iz};z_*)},$$

де $b_0(e^{iz};z_*)=\cos z_*$, $b_1(e^{iz};z_*)=-ie^{iz_*}/\sin z_*$, $b_2(e^{iz};z_*)=2i\sin^2 z_*:$ $:(\sin z_*+i\cos z_*)$, $b_3(e^{iz};z_*)=e^{iz_*}(\sin 2z_*+i\cos 2z_*)/\sin z_*$.

З врахуванням розвинення (7.25) маємо, що

$$\cos z=b_0(e^{iz};z_*)+\frac{\mathbb{e}(z_*,z)}{b_1(e^{iz};z_*)}+\frac{\mathbb{e}(z_*,z)}{b_2(e^{iz};z_*)}+\frac{\mathbb{e}(z_*,z)}{b_3(e^{iz};z_*)}.$$

Якщо $z=\frac{\pi}{2}$, то $\cos z=\dfrac{\mathbb{e}(\frac{\pi}{2},z)}{1}+\dfrac{\mathbb{e}(\frac{\pi}{2},z)}{2i}+\dfrac{\mathbb{e}(\frac{\pi}{2},z)}{1}$. Можна зобразити функцію $\cos z$ скінченним С–ФЛД

$$\cos z=a_0(e^{iz};z_*)+\frac{a_1(e^{iz};z_*)\,\mathbb{e}(z_*,z)}{1}+\frac{a_2(e^{iz};z_*)\,\mathbb{e}(z_*,z)}{1}+\frac{a_3(e^{iz};z_*)\,\mathbb{e}(z_*,z)}{1},$$

де $a_0(e^{iz};z_*)=\cos z_*$, $a_1(e^{iz};z_*)=i\sin z_*/e^{iz_*}$, $a_2(e^{iz};z_*)=(\sin z_*+i\cos z_*):$ $:2\sin z_* e^{iz_*}$, $a_3(e^{iz};z_*)=1/2\sin z_* e^{iz_*}(\sin z_*+i\cos z_*)$.

В околі точки $z=\frac{\pi}{2}$ наближення запишеться у вигляді:

$$\cos z = \frac{\mathbb{e}(z_*,z)}{1} + \frac{(-i/2)\,\mathbb{e}(z_*,z)}{1} + \frac{(-i/2)\,\mathbb{e}(z_*,z)}{1}\,.$$

Знайдемо зображення функції $\mathrm{w}=\cos z$ в Т–ФЛД, коли базис–функція $g(z)=\operatorname{tg}\frac{z}{2}$. Обернені g–похідні функції згідно із формулами (7.4) будуть рівні

$$^{\{1\}}\mathrm{w}_g = \frac{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}\right)^2}{-4\operatorname{tg}\frac{z}{2}},\ ^{\{2\}}\mathrm{w}_g = \frac{3\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}+1}{1-3\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}},\ ^{\{3\}}\mathrm{w}_g = 2\operatorname{tg}\tfrac{z}{2}(\operatorname{tg}^2\tfrac{z}{2}-1),\ ^{\{4\}}\mathrm{w}_g = -1.$$

Оскільки $(^{\{4\}}\,\mathrm{w}_g)'=0$, то $^{\{5\}}\,\mathrm{w}_g=\infty$.

Коефіцієнти зображення функції в околі точки $z=z_*$ скінченним Т–ФЛД будуть рівні

$$b_0(\operatorname{tg}\tfrac{z}{2};z_*) = \frac{1-\mathfrak{z}^2}{1+\mathfrak{z}^2},\ b_1(\operatorname{tg}\tfrac{z}{2};z_*) = \frac{(1+\mathfrak{z}^2)^2}{-4\mathfrak{z}},\ b_2(\operatorname{tg}\tfrac{z}{2};z_*) = \frac{8\mathfrak{z}^2}{(1+\mathfrak{z}^2)(1-3\mathfrak{z}^2)},$$

$$b_3(\operatorname{tg}\tfrac{z}{2};z_*) = \frac{(3\mathfrak{z}^2-1)^2}{4\mathfrak{z}},\ b_4(\operatorname{tg}\tfrac{z}{2};z_*) = \frac{2}{3\mathfrak{z}^2-1},\qquad \mathfrak{z}=\operatorname{tg}\tfrac{z_*}{2}.$$

Отже, функція $\cos z$ подається скінченним Т–ФЛД наступним чином

$$\cos z = b_0(\operatorname{tg}\tfrac{z}{2};z_*) + \frac{\operatorname{tg}\frac{z}{2}-\operatorname{tg}\frac{z_*}{2}}{b_1(\operatorname{tg}\frac{z}{2};z_*)} + \frac{\operatorname{tg}\frac{z}{2}-\operatorname{tg}\frac{z_*}{2}}{b_2(\operatorname{tg}\frac{z}{2};z_*)} + \frac{\operatorname{tg}\frac{z}{2}-\operatorname{tg}\frac{z_*}{2}}{b_3(\operatorname{tg}\frac{z}{2};z_*)} + \frac{\operatorname{tg}\frac{z}{2}-\operatorname{tg}\frac{z_*}{2}}{b_4(\operatorname{tg}\frac{z}{2};z_*)}.$$

Якщо підставити розвинення (7.27), то отримаємо

$$\cos z = b_0(\operatorname{tg}\tfrac{z}{2};z_*) + \frac{\mathbb{t}(z_*,z)}{b_1(\operatorname{tg}\frac{z}{2};z_*)} + \frac{\mathbb{t}(z_*,z)}{b_2(\operatorname{tg}\frac{z}{2};z_*)} + \frac{\mathbb{t}(z_*,z)}{b_3(\operatorname{tg}\frac{z}{2};z_*)} + \frac{\mathbb{t}(z_*,z)}{b_4(\operatorname{tg}\frac{z}{2};z_*)}.$$

Можна зобразити функцію $\cos z$ С–ФЛД:

$$\begin{aligned}\cos z = {} & a_0(\operatorname{tg}\tfrac{z}{2};z_*) + \frac{a_1(\operatorname{tg}\frac{z}{2};z_*)\mathbb{t}(z_*,z)}{1} + \frac{a_2(\operatorname{tg}\frac{z}{2};z_*)\mathbb{t}(z_*,z)}{1} + \\ & + \frac{a_3(\operatorname{tg}\frac{z}{2};z_*)\mathbb{t}(z_*,z)}{1} + \frac{a_4(\operatorname{tg}\frac{z}{2};z_*)\mathbb{t}(z_*,z)}{1}\,.\end{aligned}$$

В частинному випадку, коли $z_*=\frac{\pi}{2}$, коефіцієнти Т–ФЛД та С–ФЛД рівні

$$b_0(\operatorname{tg}\tfrac{z}{2};\tfrac{\pi}{2})=0,\ b_1(\operatorname{tg}\tfrac{z}{2};\tfrac{\pi}{2})=-1,\ b_2(\operatorname{tg}\tfrac{z}{2};\tfrac{\pi}{2})=-2,\ b_3(\operatorname{tg}\tfrac{z}{2};\tfrac{\pi}{2})=1,\ b_4(\operatorname{tg}\tfrac{z}{2};\tfrac{\pi}{2})=1,$$

та

$a_0(\mathrm{tg}\,\frac{z}{2};\frac{\pi}{2})=0, a_1(\mathrm{tg}\,\frac{z}{2};\frac{\pi}{2})=-1,\ a_2(\mathrm{tg}\,\frac{z}{2};\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2},\ a_3(\mathrm{tg}\,\frac{z}{2};\frac{\pi}{2})=\frac{-1}{2},\ a_4(\mathrm{tg}\,\frac{z}{2};\frac{\pi}{2})=1.$

Отримуємо: $\cos z = \dfrac{\mathbb{t}(\frac{\pi}{2},z)}{-1} \underset{+}{} \dfrac{\mathbb{t}(\frac{\pi}{2},z)}{-2} \underset{+}{} \dfrac{\mathbb{t}(\frac{\pi}{2},z)}{1} \underset{+}{} \dfrac{\mathbb{t}(\frac{\pi}{2},z)}{1}$, та

$$\cos z = \frac{-\,\mathbb{t}(\frac{\pi}{2},z)}{1} \underset{+}{} \frac{\frac{1}{2}\mathbb{t}(\frac{\pi}{2},z)}{1} \underset{+}{} \frac{-\,\frac{1}{2}\mathbb{t}(\frac{\pi}{2},z)}{1} \underset{+}{} \frac{\mathbb{t}(\frac{\pi}{2},z)}{1}.$$

7.5. Обернені g–похідні 2–го типу

При побудові Т–КФІЛД (4.41) робилися припущення, що всі інтерполяційні вузли $z_i \in \mathbf{Z}, i = \overline{0,n}$, різні. Розглянемо випадок, коли всі вузли, чи деяка їх частина, прямують до одного і того ж значення $z \in \mathcal{Z}$.

Означення 7.2. Якщо існує границя (скінченне значення або нескінченність) оберненої g–різниці 2–го типу k–го порядку (4.48), коли інтерполяційні вузли $z_0, \ldots, z_k$ прямують до деякого $z_* \in \mathcal{Z}$, то граничне значення називається оберненою g–похідною 2–го типу k–го порядку функції $f(z)$ в точці z_* .

Позначимо обернену g–похідну 2–го типу k–го порядку функції $f(z)$ в точці $z \in \mathcal{Z}$ наступним чином ${}^{[k]}f_g(z)$. З означення маємо, що

$$^{[k]}f_g(z) = \varrho_k^{(2)}[g; \underbrace{z, \ldots, z}_{k+1}; f] = \lim_{z_0, z_1, \ldots, z_k \to z} \varrho_k^{(2)}[g; z_0, z_1, \ldots, z_k; f]. \qquad (7.28)$$

Із (4.46), (4.47) та (7.28) випливає, що

$$^{[1]}f_g(z) = \varrho_1^{(2)}[g; z, z; f] = -\lim_{z_0, z_1 \to z} \begin{vmatrix} f(z_0) & g(z_0)f(z_0) \\ f(z_1) & g(z_1)f(z_1) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & f(z_0) \\ 1 & f(z_1) \end{vmatrix} =$$

$$= -\lim_{\Delta z \to 0} \begin{vmatrix} f(z) & g(z)f(z) \\ f(z+\Delta z) & g(z+\Delta z)f(z+\Delta z) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & f(z) \\ 1 & f(z+\Delta z) \end{vmatrix} =$$

$$= -\lim_{\Delta z\to 0}\begin{vmatrix} f(z) & g(z)f(z) \\ \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} & \frac{g(z+\Delta z)f(z+\Delta z)-g(z)f(z)}{\Delta z}\end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & f(z) \\ 0 & \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} f(z) & g(z)f(z) \\ f'(z) & \big(g(z)f(z)\big)'\end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & f(z) \\ 0 & f'(z)\end{vmatrix} = -\frac{f^2(z)g'(z)}{f'(z)}.$$

Із формул (4.57) та (7.28) для $k = 1$ аналогічно отримуємо, що

$$^{[2]}f_g(z) = \varrho_2^{(2)}[g; z, z, z; f] = \lim_{z_0,z_1,z_2\to z}\begin{vmatrix} 1 & f(z_0) & g(z_0) \\ 1 & f(z_1) & g(z_1) \\ 1 & f(z_2) & g(z_2)\end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & f(z_0) & g(z_0)f(z_0) \\ 1 & f(z_1) & g(z_1)f(z_1) \\ 1 & f(z_2) & g(z_2)f(z_2)\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} f'(z) & g'(z) \\ \frac{f''(z)}{2!} & \frac{g''(z)}{2!}\end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f'(z) & \big(f(z)g(z)\big)' \\ \frac{f''(z)}{2!} & \frac{\left(f(z)g(z)\right)''}{2!}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'(z) & g'(z) \\ f''(z) & g''(z)\end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f'(z) & \big(f(z)g(z)\big)' \\ f''(z) & \big(f(z)g(z)\big)''\end{vmatrix}.$$

Отримаємо формулу оберненої g–похідної 2–го типу k–го порядку. Введемо скорочені позначення: $f_i = f(z_i), g_i = g(z_i), i = \overline{0,k}$. Розглянемо два випадки: а) $k = 2m$; b) $k = 2m + 1$.

а) Нехай $k = 2m$. Тоді згідно із формулами (4.57) та (7.28) маємо, що

$$^{[2m]}f_g(z) = \varrho_{2m}^{(2)}[g; \underbrace{z, z, \ldots, z}_{2m+1}; f] = \lim_{z_0,\ldots,z_{2m}\to z}\varrho_{2m}[g; z_0, z_1, \cdots, z_{2m}; f] =$$

$$= \lim_{z_0,\cdots,z_{2m}\to z}\frac{\begin{vmatrix} 1 & f_0 & g_0 & \cdots & g_0^{m-1} & g_0^{m-1}f_0 & g_0^m \\ 1 & f_1 & g_1 & \cdots & g_1^{m-1} & g_1^{m-1}f_1 & g_1^m \\ 1 & f_2 & g_2 & \cdots & g_2^{m-1} & g_2^{m-1}f_2 & g_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & f_{2m} & g_{2m} & \cdots & g_{2m}^{m-1} & g_{2m}^{m-1}f_{2m} & g_{2m}^m\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f_0 & g_0 & \cdots & g_0^{m-1} & g_0^{m-1}f_0 & g_0^m f_0 \\ 1 & f_1 & g_1 & \cdots & g_1^{m-1} & g_1^{m-1}f_1 & g_1^m f_1 \\ 1 & f_2 & g_2 & \cdots & g_2^{m-1} & g_2^{m-1}f_2 & g_2^m f_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & f_{2m} & g_{2m} & \cdots & g_{2m}^{m-1} & g_{2m}^{m-1}f_{2m} & g_{2m}^m f_{2m}\end{vmatrix}}.$$

Будемо поступово переходити до границі у визначниках чисельника і знаменника.

На першому кроці, підставимо z замість z_0 та $(z + \Delta z)$ замість z_1, віднімемо у визначниках 1–й рядок від 2–го рядка, розділимо 2–й рядок на Δz та перейдемо до границі, коли $\Delta z \to 0$. На другому кроці, замість z_2 підставимо $(z + \Delta z)$, віднімемо 1–й рядок та 2–й рядок помножений на Δz від 3–го рядка, поділимо отриманий 3–й рядок на $(\Delta z)^2$ і перейдемо до границі, коли $\Delta z \to 0$. На i-му кроці, $i = 1, 2, \dots, 2m$, підставимо $(z + \Delta z)$ замість z_i, віднімемо 1–й рядок, 2–й рядок помножений на Δz, 3–й рядок помножений на $(\Delta z)^2$ і т.д. i–й рядок помножений на $(\Delta z)^{i-1}$ від $(i + 1)$–го рядка, поділимо отриманий $(i + 1)$–й рядок на $(\Delta z)^i$ та перейдемо до границі, коли $\Delta z \to 0$. Після $(2m)$ таких кроків врешті отримаємо

$$
{}^{[2m]}f_g(z) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f & g & gf & \cdots & g^{m-1}f & g^m \\ 0 & f' & g' & (gf)' & \cdots & (g^{m-1}f)' & (g^m)' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{f^{(2m)}}{(2m)!} & \frac{g^{(2m)}}{(2m)!} & \frac{(gf)^{(2m)}}{(2m)!} & \cdots & \frac{(g^{m-1}f)^{(2m)}}{(2m)!} & \frac{(g^m)^{(2m)}}{(2m)!} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f & g & gf & \cdots & g^{m-1}f & g^m f \\ 0 & f' & g' & \big(gf\big)' & \cdots & \big(g^{m-1}f\big)' & \big(g^m f\big)' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{f^{(2m)}}{(2m)!} & \frac{g^{(2m)}}{(2m)!} & \frac{(gf)^{(2m)}}{(2m)!} & \cdots & \frac{(g^{m-1}f)^{(2m)}}{(2m)!} & \frac{(g^m f)^{(2m)}}{(2m)!} \end{vmatrix}} .
$$

Після спрощень маємо

$$
{}^{[2m]}f_g(z) = \frac{\begin{vmatrix} f' & g' & (gf)' & \cdots & (g^{m-1}f)' & (g^m)' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f^{(2m)} & g^{(2m)} & (gf)^{(2m)} & \cdots & (g^{m-1}f)^{(2m)} & (g^m)^{(2m)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f' & g' & \big(gf\big)' & \cdots & \big(g^{m-1}f\big)' & \big(g^m f\big)' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f^{(2m)} & g^{(2m)} & (gf)^{(2m)} & \cdots & (g^{m-1}f)^{(2m)} & (g^m f)^{(2m)} \end{vmatrix}}.
$$

b) У випадку, коли $k = 2m+1$, аналогічним чином маємо, що

$$ {}^{[2m+1]}f_g(z) = \varrho^{(2)}_{2m+1}[g; \underbrace{z, \dots, z}_{2m+2}; f] = \lim_{z_0, \cdots, z_{2m+1} \to z} \varrho_{2m+1}[g; z_0, \dots, z_{2m+1}; f] = $$

$$ = \frac{\begin{vmatrix} f & g & gf & \dots & g^{m-1} & g^{m-1}f & g^m f & g^{m+1}f \\ f' & g' & (gf)' & \dots & (g^{m-1})' & (g^{m-1}f)' & (g^m f)' & (g^{m+1}f)' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(k)} & g^{(k)} & (gf)^{(k)} & \cdots & (g^{m-1})^{(k)} & (g^{m-1}f)^{(k)} & (g^m f)^{(k)} & (g^{m+1}f)^{(k)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f & g & gf & \cdots & g^{m-1} & g^{m-1}f & g^m & g^m f \\ f' & g' & (gf)' & \cdots & (g^{m-1})' & (g^{m-1}f)' & (g^m)' & (g^m f)' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(k)} & g^{(k)} & (gf)^{(k)} & \cdots & (g^{m-1})^{(k)} & (g^{m-1}f)^{(k)} & (g^m)^{(k)} & (g^m f)^{(k)} \end{vmatrix}}, $$

де $k = 2m+1$. У формулах аргументи функцій f, g та їх похідних опущені.

Отже доведено наступне твердження.

Теорема 7.20. ***(A)*** *Якщо для деякого $m \in \mathbb{N}$ визначники*

$$ F^{(1)}_{2m}(z) = \begin{vmatrix} f' & g' & (gf)' & \cdots & (g^{m-1}f)' & (g^m)' \\ f'' & g'' & (gf)'' & \cdots & (g^{m-1}f)'' & (g^m)'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f^{(2m)} & g^{(2m)} & (gf)^{(2m)} & \cdots & (g^{m-1}f)^{(2m)} & (g^m)^{(2m)} \end{vmatrix}, $$

$$ F^{(2)}_{2m}(z) = \begin{vmatrix} f' & g' & \big(gf\big)' & \cdots & \big(g^{m-1}f\big)' & \big(g^m f\big)' \\ f'' & g'' & (gf)'' & \cdots & (g^{m-1}f)'' & (g^m f)'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f^{(2m)} & g^{(2m)} & (gf)^{(2m)} & \cdots & (g^{m-1}f)^{(2m)} & (g^m f)^{(2m)} \end{vmatrix} $$

відмінні від нуля в деякій точці $z \in \mathcal{Z}$, то у вказаній точці функція $f(z)$

має обернену g–похідну 2–го типу $(2m)$–го порядку і

$$
{}^{[2]}f_g(z) = \frac{\begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f' & (fg)' \\ f'' & (fg)'' \end{vmatrix}}, \quad {}^{[2m]}f_g(z) = \frac{F_{2m}^{(1)}(z)}{F_{2m}^{(2)}(z)}, \quad m \in \mathbb{N}_2, \tag{7.29}
$$

(B) *якщо для деякого $m \in \mathbb{N}$ визначники*

$$
F_{2m+1}^{(3)}(z) = \begin{vmatrix} f & g & gf & \ldots & g^{m-1} & g^{m-1}f & g^m f & g^{m+1}f \\ f' & g' & (gf)' & \ldots & (g^{m-1})' & (g^{m-1}f)' & (g^m f)' & (g^{m+1}f)' \\ f'' & g'' & (gf)'' & \cdots & (g^{m-1})'' & (g^{m-1}f)'' & (g^m f)'' & (g^{m+1}f)'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(k)} & g^{(k)} & (gf)^{(k)} & \cdots & (g^{m-1})^{(k)} & (g^{m-1}f)^{(k)} & (g^m f)^{(k)} & (g^{m+1}f)^{(k)} \end{vmatrix},
$$

$$
F_{2m+1}^{(4)}(z) = \begin{vmatrix} f & g & gf & \cdots & g^{m-1} & g^{m-1}f & g^m & g^m f \\ f' & g' & (gf)' & \cdots & (g^{m-1})' & (g^{m-1}f)' & (g^m)' & (g^m f)' \\ f'' & g'' & (gf)'' & \cdots & (g^{m-1})'' & (g^{m-1}f)'' & (g^m)'' & (g^m f)'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(k)} & g^{(k)} & (gf)^{(k)} & \cdots & (g^{m-1})^{(k)} & (g^{m-1}f)^{(k)} & (g^m)^{(k)} & (g^m f)^{(k)} \end{vmatrix},
$$

де $k = 2m+1$, відмінні від нуля в деякій точці $z \in \mathcal{Z}$, то цій точці функція $f(z)$ має обернену g–похідну 2–го типу $(2m+1)$–го порядку і

$$
{}^{[1]}f_g(z) = -\frac{f^2(z)g'(z)}{f'(z)}, \quad {}^{[2m+1]}f_g(z) = \frac{F_{2m+1}^{(3)}(z)}{F_{2m+1}^{(4)}(z)}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{7.30}
$$

Зауваження 7.7. Якщо $g(z) = z$, то формули (7.29) та (7.30) після спрощень будуть збігатися із формулами (6.12).

Аналогічно, як це було зроблено в попередніх випадках, із (4.49) отримуємо рекурентну формулу для знаходження обернених g–похідних 2–го типу

$$
\begin{aligned}
&{}^{[k]}f_g(z) = \frac{k\,g'(z)}{\left({}^{[k-1]}f_g(z)\right)'} + {}^{[k-2]}f_g(z), \qquad k \in \mathbb{N}_2,\\
&{}^{[0]}f_g(z) = \frac{1}{f(z)}, \quad {}^{[1]}f_g(z) = \frac{-f^2(z)g'(z)}{f'(z)},
\end{aligned} \tag{7.31}
$$

Із формул (4.50), (4.51) та (7.28) випливає, що якщо функція $f(z)$ є аналітична в $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$, базис–функція $g(z)$ є однолиста в $\mathcal{Z}$ і функція $f(z)$ має обернені g–похідні 2–го типу довільного порядку, то в околі $z = z_*$ функція f може бути розвинута в квазі–обернений функціональний ланцюговий дріб типу Тіле (Т–КФЛД)

$$
f(z) = \left({}^{[0]}f_g(z_*) + \frac{g(z)-g(z_*)}{{}^{[1]}f_g(z_*)} \underset{+}{} \frac{g(z)-g(z_*)}{2g'(z)/({}^{[1]}f_g(z_*))'} \underset{+}{} \frac{g(z)-g(z_*)}{3g'(z)/\left({}^{[2]}f_g(z_*)\right)'} \underset{+}{} \right.
$$

$$
\left. \underset{+}{} \frac{g(z)-g(z_*)}{4g'(z)/\left({}^{[3]}f_g(z_*)\right)'} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{g(z)-g(z_*)}{n\,g'(z)/\left({}^{[n-1]}f_g(z_*)\right)'} \underset{+}{} \cdots \right)^{-1}. \tag{7.32}
$$

Із означення оберненої g–похідної 2–го порядку випливають твердження.

Теорема 7.21. *Нехай $z_* \in \mathcal{Z}$. **(A)** Якщо або $f'(z_*) = 0$, $f(z_*)g'(z_*) \neq 0$, або $f'(z_*) \neq 0$, $f(z_*)g'(z_*) = \infty$, то ${}^{[1]}f_g(z_*) = \infty$. **(B)** Якщо або $f'(z_*) = \infty$, $f(z_*)g'(z_*) \neq 0$, або $f'(z_*) \neq 0$, $f(z_*)g'(z_*) = 0$, то ${}^{[1]}f_g(z_*) = 0$.*

Теорема 7.22. *Нехай $z_* \in \mathcal{Z}$, ${}^{[n-2]}f_g(z_*) = C$, $C = const$, $n \in \mathbb{N}_2$,: **(A)** якщо або ${}^{[n-1]}f_g(z_*) = 0$, $g'(z_*) \neq 0$, або ${}^{[n-1]}f_g(z_*) \neq 0$, $g'(z_*) = \infty$, то ${}^{[n]}f_g(z_*) = \infty$; **(B)** якщо або ${}^{[n-1]}f_g(z_*) = \infty$, $g'(z) \neq 0$, або ${}^{[n-1]}f_g(z_*) \neq 0$, $g'(z_*) = 0$, то ${}^{[n]}f_g(z_*) = C$.*

Теорема 7.23. *Нехай функція $f(z)$ для довільного $z \in \mathcal{Z}$ має обернену g–похідну 2–го типу n–го порядку, $n \in \mathbb{N}$, $C \neq 0$ є стала, тоді*

$$
{}^{[2n]}(Cf(z))_g = \frac{1}{C} \cdot {}^{[2n]}f_g(z)\ ,\ {}^{[2n+1]}(Cf(z))_g = C \cdot {}^{[2n+1]}f_g(z)\ .
$$

Доведення. Доведемо теорему за індукцією. Легко бачити, що

$$
{}^{[0]}(Cf(z))_g = \frac{1}{C} \cdot {}^{[0]}f_g(z),\ {}^{[1]}(Cf(z))_g = C \cdot {}^{[1]}f_g(z),\ {}^{[2]}(Cf(z))_g = \frac{1}{C} \cdot {}^{[2]}f_g(z).
$$

Припустимо, що твердження теореми виконується для $n = k$. Тоді для $n = k+1$ із рекурентної формули (7.31) маємо, що

$$ {}^{[2k+2]}(Cf(z))_g = \frac{(2k+2)g'(z)}{\left({}^{[2k+1]}(Cf(z))_g\right)'} + {}^{[2k]}(Cf(z)) = \frac{1}{C} \cdot {}^{[2k+2]}f_g(z). $$

$$ {}^{[2k+3]}(Cf(z))_g = \frac{(2k+3)g'(z)}{\left({}^{[2k+2]}(Cf(z))_g\right)'} + {}^{[2k+1]}(Cf(z))_g = C \cdot {}^{[2k+3]}f_g(z)\ . $$

Теорема має місце для довільному n. □

Зауваження 7.8. Аналог теореми 7.8 для оберненої g–похідної не має місця для оберненої g–похідної 2–го типу, оскільки

$$ {}^{[0]}\big(f(z)+C\big)_g = \frac{1}{f(z)+C},\ {}^{[1]}\big(f(z)+C\big)_g = -\frac{(f(z)+C)^2\, g'(z)}{f'(z)},\ C = const. $$

7.6. Правила оберненого g–диференціювання 2–го типу

Нехай функції $f(z), h(z), f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ мають в точках компакта $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ скінченні відмінні від нуля обернені g–похідні 2–го типу.

Теорема 7.24. *Нехай існують обернені g–похідні 2–го типу функцій $u = f(z)$ та $v = h(z)$. Обернені g–похідні 2–го типу суми, різниці, добутку та частки цих функцій визначаються за формулами*

$$ {}^{[1]}(u \pm v)_g = \frac{(u \pm v)^2 \cdot {}^{[1]}v_g \cdot {}^{[1]}u_g}{u^2 \cdot {}^{[1]}v_g \pm v^2 \cdot {}^{[1]}u_g}\ , \tag{7.33} $$

$$ {}^{[1]}(u\,v)_g = \frac{u\,v \cdot {}^{[1]}u_g \cdot {}^{[1]}v_g}{u \cdot {}^{[1]}v_g + v \cdot {}^{[1]}u_g}\ , \tag{7.34} $$

$$ {}^{[1]}(u/v)_g = \frac{(u/v) \cdot {}^{[1]}u_g \cdot {}^{[1]}v_g}{u \cdot {}^{[1]}v_g - v \cdot {}^{[1]}u_g}\ . \tag{7.35} $$

Доведення. Із (7.31) маємо, що

$$ {}^{[1]}(u \pm v)_g = -\frac{(u \pm v)^2 g'}{u' \pm v'} = \frac{-\,(u \pm v)^2 g'}{\frac{-u^2 g'}{{}^{[1]}u_g} \pm \frac{-v^2 g'}{{}^{[1]}v_g}} = \frac{(u \pm v)^2 \cdot {}^{[1]}v_g \cdot {}^{[1]}u_g}{u^2 \cdot {}^{[1]}v_g \pm v^2 \cdot {}^{[1]}u_g}\ . $$

Аналогічно

$$ {}^{[1]}(u \cdot v)_g = \frac{-(u \cdot v)^2 g'}{u' \cdot v + u \cdot v'} = \frac{-(uv)^2 g'}{\frac{-v\,u^2\,g'}{{}^{[1]}u_g} + \frac{-u\,v^2\,g'}{{}^{[1]}v_g}} = \frac{u\,v \cdot {}^{[1]}u_g \cdot {}^{[1]}v_g}{u \cdot {}^{[1]}v_g + v \cdot {}^{[1]}u_g}, $$

$$^{[1]}(u/v)_g = \frac{-(u/v)^2\, g'}{\frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}} = \frac{-u^2 \cdot g'}{\frac{-v\,u^2\,g'}{^{[1]}u} + \frac{u\,v^2\,g'}{^{[1]}v}} = \frac{(u/v) \cdot {}^{[1]}u_g \cdot {}^{[1]}v_g}{u \cdot {}^{[1]}v_g - v \cdot {}^{[1]}u_g}\,.$$

Формули (7.33)–(7.35) доведені. □

Теорема 7.25. *Якщо функції $f_k(z)$, $k = \overline{1, n}$, мають обернені g–похідні 2–го типу, тоді*

$$^{[1]}\Big(\sum_{k=1}^{n} f_k(z)\Big)_g = \frac{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)\Big)^2 \prod\limits_{k=1}^{n} {}^{[1]}(f_k(z))_g}{\sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2(z) \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} {}^{[1]}(f_j(z))_g}, \tag{7.36}$$

$$^{[1]}\Big(\prod_{k=1}^{n} f_k(z)\Big)_g = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} f_k(z) \cdot {}^{[1]}(f_k(z))_g}{\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z) \cdot \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} {}^{[1]}(f_j(z))_g}. \tag{7.37}$$

Доведення. Співвідношення (7.36)–(7.37) будемо доводити за індукцією. При $n = 2$ формула (7.36) вірна. Коли $n = 3$ з (7.33) маємо

$$^{[1]}\big(f_1 + f_2 + f_3\big)_g = \frac{(f_1 + f_2 + f_3)^2 \cdot {}^{[1]}(f_1 + f_2)_g \cdot {}^{[1]}(f_3)_g}{(f_1 + f_2)^2 \cdot {}^{[1]}(f_3)_g + f_3^2 \cdot {}^{[1]}(f_1 + f_2)_g} =$$

$$= \frac{(f_1 + f_2 + f_3)^2 \cdot \frac{(f_1+f_2)^2 \cdot {}^{[1]}(f_1)_g \cdot {}^{[1]}(f_2)_g}{f_1^2 \cdot {}^{[1]}(f_2)_g + f_2^2 \cdot {}^{[1]}(f_1)_g} \cdot {}^{[1]}(f_3)_g}{(f_1 + f_2)^2 \cdot {}^{[1]}(f_3)_g + f_3^2 \cdot \frac{(f_1+f_2)^2 \cdot {}^{[1]}(f_1)_g \cdot {}^{[1]}(f_2)_g}{f_1^2 \cdot {}^{[1]}(f_2)_g + f_2^2 \cdot {}^{[1]}(f_1)_g}} =$$

$$= \frac{(f_1 + f_2 + f_3)^2 \cdot {}^{[1]}(f_1)_g \cdot {}^{[1]}(f_2)_g \cdot {}^{[1]}(f_3)_g}{f_1^2 \cdot {}^{[1]}(f_2)_g \cdot {}^{[1]}(f_3)_g + f_2^2 \cdot {}^{[1]}(f_1)_g \cdot {}^{[1]}(f_3)_g + f_3^2 \cdot {}^{[1]}(f_1)_g \cdot {}^{[1]}(f_2)_g}\,.$$

Припустимо, що (7.36) виконується для $n = m - 1$. Тоді

$$^{[1]}\Big(\sum_{k=1}^{m} f_k\Big)_g = \frac{\Big(\sum\limits_{k=1}^{m} f_k\Big)^2 \cdot {}^{[1]}\Big(\sum\limits_{k=1}^{m-1} f_k\Big)_g \cdot {}^{[1]}(f_m)_g}{\Big(\sum\limits_{k=1}^{m-1} f_k\Big)^2 \cdot {}^{[1]}(f_m)_g + f_m^2 \cdot {}^{[1]}\Big(\sum\limits_{k=1}^{m-1} f_k\Big)_g} =$$

$$= \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{m} f_k\right)^2 \cdot \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{m-1} f_k\right)^2 \prod\limits_{k=1}^{m-1} {}^{[1]}(f_k)_g}{\sum\limits_{k=1}^{m-1} f_k^2 \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m-1} {}^{[1]}(f_j)_g} \cdot {}^{[1]}(f_m)_g}{\left(\sum\limits_{k=1}^{m-1} f_k\right)^2 \cdot {}^{[1]}(f_m)_g + f_m^2 \cdot \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{m-1} f_k\right)^2 \prod\limits_{k=1}^{m-1} {}^{[1]}(f_k)_g}{\sum\limits_{k=1}^{m-1} f_k^2 \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m-1} {}^{[1]}(f_j)_g}} = \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{m} f_k\right)^2 \prod\limits_{k=1}^{m} {}^{[1]}(f_k)_g}{\sum\limits_{k=1}^{m} f_k^2 \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m} {}^{[1]}(f_j)_g}.$$

Аналогічно, для $n = 2$ формула (7.37) виконується. Коли $n = 3$ з (7.34) випливає

$${}^{[1]}(f_1 f_2 f_3)_g = \frac{f_1 f_2 f_3 \cdot {}^{[1]}(f_1 f_2)_g \cdot {}^{[1]}(f_3)_g}{f_1 f_2 \cdot {}^{[1]}(f_3)_g + f_3 \cdot {}^{[1]}(f_1 f_2)_g} =$$

$$= \frac{f_1 f_2 f_3 \cdot \frac{f_1 f_2 \cdot {}^{[1]}(f_1)_g \cdot {}^{[1]}(f_2)_g}{f_1 \cdot {}^{[1]}(f_2)_g + f_2 \cdot {}^{[1]}(f_1)_g} \cdot {}^{[1]}(f_3)_g}{f_1 f_2 \cdot {}^{[1]}(f_3)_g + f_3 \cdot \frac{f_1 f_2 \cdot {}^{[1]}(f_1)_g \cdot {}^{[1]}(f_2)_g}{f_1 \cdot {}^{[1]}(f_2)_g + f_2 \cdot {}^{[1]}(f_1)_g}} =$$

$$= \frac{f_1 f_2 f_3 \cdot {}^{[1]}(f_1)_g \cdot {}^{[1]}(f_2)_g \cdot {}^{[1]}(f_3)_g}{f_1 \cdot {}^{[1]}(f_2)_g \cdot {}^{[1]}(f_3)_g + f_2 \cdot {}^{[1]}(f_1)_g \cdot {}^{[1]}(f_3)_g + f_3 \cdot {}^{[1]}(f_1)_g \cdot {}^{[1]}(f_2)_g}.$$

Припустимо, що (7.37) виконується для $n = m - 1$. Тоді з (7.34) маємо

$${}^{[1]}\left(\prod_{k=1}^{m} f_k\right)_g = \frac{\prod\limits_{k=1}^{m} f_k \cdot {}^{[1]}\left(\prod\limits_{k=1}^{m-1} f_k\right)_g \cdot {}^{[1]}(f_m)_g}{\prod\limits_{k=1}^{m-1} f_k \cdot {}^{[1]}f_m + f_m \cdot {}^{[1]}\left(\prod\limits_{k=1}^{m-1} f_k\right)_g} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{k=1}^{m} f_k \cdot \frac{\prod\limits_{k=1}^{m-1} f_k \cdot {}^{[1]}(f_k)_g}{\sum\limits_{k=1}^{m-1} f_k \cdot \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m-1} {}^{[1]}(f_j)_g} \cdot {}^{[1]}(f_m)_g}{\prod\limits_{k=1}^{m-1} f_k \cdot {}^{[1]}f_m + f_m \cdot \frac{\prod\limits_{k=1}^{m-1} f_k \cdot {}^{[1]}(f_k)_g}{\sum\limits_{k=1}^{m-1} f_k \cdot \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m-1} {}^{[1]}(f_j)_g}} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{m} f_k \cdot {}^{[1]}(f_k)_g}{\sum\limits_{k=1}^{m} f_k \cdot \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m} {}^{[1]}(f_j)_g}.$$

$\square$

7.7. Розвинення функцій в квазі–обернені функціональні ланцюгові дроби типу Тіле та типу С–дробу

В цьому розділі розглянемо зображення функцій комплексної змінної в Т–КФЛД (7.32). Поряд із зображенням функції $f(z)$ в Т–КФЛД за базис–функцією $g(z)$ в околі точки $z = z_*$

$$f(z) = \left(d_0(g(z); z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty} \frac{g(z) - g(z_*)}{d_n(g(z); z_*)} \right)^{-1},$$

де

$$\begin{aligned} d_0(g(z); z_*) &= \frac{1}{f(z_*)},\ d_1(g(z); z_*) = {}^{[1]}f_g(z_*) = \frac{-f^2(z_*)g'(z_*)}{f'(z_*)}, \\ d_n(g(z); z_*) &= \frac{ng'(z_*)}{\left({}^{[n-1]}f_g(z_*)\right)'} = {}^{[n]}f_g(z_*) - {}^{[n-1]}f_g(z_*), \qquad n \in \mathbb{N}_2, \end{aligned} \tag{7.38}$$

будемо розглядати зображення функції $f(z)$ еквівалентним квазі–оберненим функціональним ланцюговим дробом типу С–дробу (С–КФЛД)

$$f(z) = \left(e_0(g(z); z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty} \frac{e_n(g(z); z_*)(g(z) - g(z_*))}{1} \right)^{-1}, \tag{7.39}$$

коефіцієнти якого визначаються через коефіцієнти (7.38) наступним чином

$$\begin{aligned} e_0(g(z); z_*) &= d_0(g(z); z_*), \quad e_1(g(z); z_*) = \frac{1}{d_1(g(z); z_*)}, \\ e_n(g(z); z_*) &= \frac{1}{d_{n-1}(g(z); z_*) \cdot d_n(g(z); z_*)}, \qquad n \in \mathbb{N}_2. \end{aligned} \tag{7.40}$$

7.7.1. Функція $\operatorname{ch} z$. За базис–функцію виберемо $g(z) = e^z$. Скориставшись формулами (7.31), знайдемо обернену g–похідні 2–го типу функції $\operatorname{ch} z$. Маємо

$${}^{[1]}(\operatorname{ch} z)_g = \frac{(e^{2z}+1)^2}{2(1-e^{2z})}, \quad {}^{[2]}(\operatorname{ch} z)_g = \frac{2}{e^z(3-e^{2z})},$$

$${}^{[3]}(\operatorname{ch} z)_g = (e^{4z} - 6e^{2z} + 1)/2, \quad {}^{[4]}(\operatorname{ch} z)_g = 0.$$

Звідки випливає, що функція $\operatorname{ch} z$ в околі точки z_*, яка належить області визначення обернених g–похідних 2–го типу функції $\operatorname{ch} z$, може бути зображена скінченним Т–КФЛД вигляду

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{d_0(e^z; z_*)} + \frac{e^z - e^{z_*}}{d_1(e^z; z_*)} + \frac{e^z - e^{z_*}}{d_2(e^z; z_*)} + \frac{e^z - e^{z_*}}{d_3(e^z; z_*)} + \frac{e^z - e^{z_*}}{d_4(e^z; z_*)},$$

де коефіцієнти, згідно із (7.38), будуть рівні

$$d_0(e^z; z_*) = \frac{2e^{z_*}}{e^{2z_*}+1},\ d_1(e^z; z_*) = \frac{(e^{2z_*}+1)^2}{2(1-e^{2z_*})},\ d_2(e^z; z_*) = \frac{2(e^{2z_*}-1)^2}{e^{z_*}(3-e^{2z_*})(e^{2z_*}+1)},$$

$$d_3(e^z; z_*) = \frac{e^{2z_*}(e^{2z_*}-3)^2}{2(e^{2z_*}-1)}, \quad d_4(e^z; z_*) = \frac{2}{e^{z_*}(e^{2z_*}-3)}.$$

Аналогічно, в цьому випадку С–КФЛД (7.39) також буде скінченним

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{e_0(e^z; z_*)} + \frac{e_1(e^z; z_*)(e^z - e^{z_*})}{1} + \frac{e_2(e^z; z_*)(e^z - e^{z_*})}{1} + $$

$$+ \frac{e_3(e^z; z_*)(e^z - e^{z_*})}{1} + \frac{e_4(e^z; z_*)(e^z - e^{z_*})}{1}.$$

Згідно із формулами (7.40) коефіцієнти зображення функції $\operatorname{ch} z$ в околі точки z_* скінченним С–КФЛД будуть рівні

$$e_0(e^z; z_*) = \frac{2e^{z_*}}{e^{2z_*}+1},\ e_1(e^z; z_*) = \frac{2(1-e^{2z_*})}{(e^{2z_*}+1)^2},\ e_2(e^z; z_*) = \frac{e^{z_*}(e^{2z_*}-3)}{e^{2z_*}+1},$$

$$e_3(e^z; z_*) = \frac{e^{2z_*}+1}{e^{z_*}(e^{2z_*}-1)(3-e^{2z_*})}, \quad e_4(e^z; z_*) = \frac{e^{2z_*}-1}{e^{z_*}(e^{2z_*}-3)}.$$

Підставимо в зображення функції $\operatorname{ch} z$ Т–КФЛД та С–КФЛД розвинення $e^z - e^{z_*}$ в Т–ЛД (7.16). Згідно із теоремою 5.29 Т–ЛД збігається на всій комплексній площині. Тоді отримуємо

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{d_0(e^z; z_*)} + \frac{\Bbbk(z_*, z)}{d_1(e^z; z_*)} + \frac{\Bbbk(z_*, z)}{d_2(e^z; z_*)} + \frac{\Bbbk(z_*, z)}{d_3(e^z; z_*)} + \frac{\Bbbk(z_*, z)}{d_4(e^z; z_*)},$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{e_0(e^z;z_*)} + \frac{e_1(e^z;z_*)\Bbbk(z_*,z)}{1} + \frac{e_2(e^z;z_*)\Bbbk(z_*,z)}{1} +$$

$$+ \frac{e_3(e^z;z_*)\Bbbk(z_*,z)}{1} + \frac{e_4(e^z;z_*)\Bbbk(z_*,z)}{1}.$$

В частинному випадку в околі точки $z_* = \ln 2$ маємо зображення функції

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{\frac{4}{5}} + \frac{\Bbbk(\ln 2,z)}{-\frac{25}{6}} + \frac{\Bbbk(\ln 2,z)}{-\frac{9}{5}} + \frac{\Bbbk(\ln 2,z)}{\frac{2}{3}} + \frac{\Bbbk(\ln 2,z)}{1},$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{\frac{4}{5}} + \frac{-\frac{6}{25}\Bbbk(\ln 2,z)}{1} + \frac{\frac{2}{15}\Bbbk(\ln 2,z)}{1} + \frac{-\frac{5}{6}\Bbbk(\ln 2,z)}{1} + \frac{\frac{3}{2}\Bbbk(\ln 2,z)}{1},$$

де

$$\Bbbk(\ln 2,z) = 2\left(\frac{z-\ln 2}{1} + \frac{z-\ln 2}{-2} + \frac{z-\ln 2}{-3} + \frac{z-\ln 2}{2} + \frac{z-\ln 2}{5} + \right.$$

$$\left. + \frac{z-\ln 2}{-2} + \frac{z-\ln 2}{-7} + \cdots + \frac{z-\ln 2}{(-1)^n 2} + \frac{z-\ln 2}{(-1)^n(2n+1)} + \cdots\right).$$

Якщо скористатися розвиненням функції e^z в Т–КЛД (6.15), то будемо мати, що

$$\Bbbk_r(z_*,z) = e^z - e^{z_*} = e^{z_*}\left(\frac{1}{1} + \frac{z-z_*}{-1} + \frac{z-z_*}{-2} + \frac{z-z_*}{3} + \frac{z-z_*}{2} + \right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{z-z_*}{(-1)^k\,2} + \frac{z-z_*}{(-1)^{k+1}\,(2k+1)} + \cdots - 1\right). \tag{7.41}$$

Згідно із теоремою 6.28 ланцюговий дріб (7.41) збігається на всій комплексній площині. Тоді функція $\operatorname{ch} z$ може бути зображена або скінченним Т–КФЛД

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{d_0(e^z;z_*)} + \frac{\Bbbk_r(z_*,z)}{d_1(e^z;z_*)} + \frac{\Bbbk_r(z_*,z)}{d_2(e^z;z_*)} + \frac{\Bbbk_r(z_*,z)}{d_3(e^z;z_*)} + \frac{\Bbbk_r(z_*,z)}{d_4(e^z;z_*)},$$

або скінченним С–КФЛД

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{e_0(e^z;z_*)} + \frac{e_1(e^z;z_*)\Bbbk_r(z_*,z)}{1} + \frac{e_2(e^z;z_*)\Bbbk_r(z_*,z)}{1} +$$

$$+\frac{e_3(e^z;z_*)\Bbbk_r(z_*,z)}{1}+\frac{e_4(e^z;z_*)\Bbbk_r(z_*,z)}{1}.$$

В околі точки $z_*=\ln 3$ ці зображення мають вигляди

$$\operatorname{ch} z=\frac{1}{\frac{3}{5}}+\frac{\Bbbk_r(\ln 3,z)}{-\frac{25}{4}}+\frac{\Bbbk_r(\ln 3,z)}{-\frac{32}{45}}+\frac{\Bbbk_r(\ln 3,z)}{\frac{81}{4}}+\frac{\Bbbk_r(\ln 3,z)}{\frac{1}{9}},$$

та

$$\operatorname{ch} z=\frac{1}{\frac{3}{5}}+\frac{\frac{-4}{25}\Bbbk_r(\ln 3,z)}{1}+\frac{\frac{9}{40}\Bbbk_r(\ln 3,z)}{1}+\frac{\frac{-5}{72}\Bbbk_r(\ln 3,z)}{1}+\frac{\frac{4}{9}\Bbbk_r(\ln 3,z)}{1}.$$

Можна отримати інше зображення функції $\operatorname{ch} z$ в ланцюговий дріб, якщо за базис–функцію вибрати $g(z)=e^{z/2}$.

7.7.2. Функція $\operatorname{sh} z$**.** Нехай базис–функції $g(z)=e^z$, тоді обернені g–похідні 2–го типу функції $\operatorname{sh} z$ будуть рівні

$${}^{[1]}\big(\operatorname{sh} z\big)_g=-\frac{(e^{2z}-1)^2}{2(e^{2z}+1)},\quad {}^{[2]}\big(\operatorname{sh} z\big)_g=\frac{2}{e^z(e^{2z}+3)},$$

$${}^{[3]}\big(\operatorname{sh} z\big)_g=-\frac{e^{4z}+6e^{2z}+1}{2},\quad {}^{[4]}\big(\operatorname{sh} z\big)_g=0.$$

Коефіцієнти зображення скінченним Т–КФЛД функції $\operatorname{sh} z$ в околі точки $z_*\notin\{0,i\frac{\pi}{2},\ln\sqrt{3}+i\frac{\pi}{2}\}$ рівні

$$d_0(e^z;z_*)=\frac{2e^{z_*}}{e^{2z_*}-1},\ d_1(e^z;z_*)=\frac{-(e^{2z_*}-1)^2}{2(e^{2z_*}+1)},\ d_2(e^z;z_*)=\frac{2(e^{2z_*}+1)^2}{e^{z_*}(1-e^{2z_*})(e^{2z_*}+3)},$$

$$d_3(e^z;z_*)=\frac{-e^{2z_*}(e^{2z_*}+3)^2}{2(e^{2z_*}+1)},\quad d_4(e^z;z_*)=\frac{-2}{e^{z_*}(e^{2z_*}+3)}.$$

Тоді коефіцієнти еквівалентного С–КФЛД будуть рівні

$$e_0(e^z;z_*)=\frac{2e^{z_*}}{e^{2z_*}-1},\ e_1(e^z;z_*)=\frac{-2(e^{2z_*}+1)}{(e^{2z_*}-1)^2},\ e_2(e^z;z_*)=\frac{e^{z_*}(e^{2z_*}+3)}{e^{4z_*}-1},$$

$$e_3(e^z;z_*)=\frac{e^{2z_*}-1}{e^{z_*}(e^{2z_*}+1)(e^{2z_*}+3)},\quad e_4(e^z;z_*)=\frac{e^{2z_*}+1}{e^{z_*}(e^{2z_*}+3)}.$$

Підставивши замість $e^z - e^{z_*}$ розвинення в Т–ЛД (7.16), отримуємо зображення функції $\operatorname{sh} z$ в околі точки $z = z_*$ скінченним Т–КФЛД та скінченним С–КФЛД

$$\operatorname{sh} z = \left(d_0(e^z; z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{4} \frac{\Bbbk(z_*, z)}{d_k(e^z; z_*)} \right)^{-1},$$

$$\operatorname{sh} z = \left(e_0(e^z; z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{4} \frac{e_k(e^z; z_*)\Bbbk(z_*, z)}{1} \right)^{-1}.$$

В частинному випадку в околі точки $z_* = \ln \frac{1}{2}$ будемо мати

$$\operatorname{sh} z = \left(-\frac{4}{3} + \frac{\Bbbk(\ln\frac{1}{2}, z)}{-\frac{9}{40}} + \frac{\Bbbk(\ln\frac{1}{2}, z)}{\frac{100}{39}} + \frac{\Bbbk(\ln\frac{1}{2}, z)}{-\frac{169}{160}} + \frac{\Bbbk(\ln\frac{1}{2}, z)}{-\frac{16}{13}} \right)^{-1},$$

$$\operatorname{sh} z = \left(-\frac{4}{3} + \frac{-\frac{40}{9}\Bbbk(\ln\frac{1}{2}, z)}{1} + \frac{-\frac{26}{15}\Bbbk(\ln\frac{1}{2}, z)}{1} + \right.$$

$$\left. + \frac{-\frac{24}{65}\Bbbk(\ln\frac{1}{2}, z)}{1} + \frac{\frac{10}{13}\Bbbk(\ln\frac{1}{2}, z)}{1} \right)^{-1}.$$

Якщо базис–функція $g(z) = \operatorname{th} \frac{z}{2}$, то отримаємо інше зображення функції $\operatorname{sh} z$ Т–КФЛД та С–КФЛД.

7.7.3. Функкція $\sin z$**.** В якості базис–функції виберемо $g(z) = e^{iz/2}$. Обернені g–похідні 2–го типу функції $\sin z$ будуть рівні

$${}^{[1]}\big(\sin z\big)_g = \frac{i(e^{i2z} - 1)^2}{4e^{iz/2}(e^{i2z} + 1)}, \quad {}^{[2]}\big(\sin z\big)_g = \frac{-2ie^{iz}(e^{i2z} - 3)}{3e^{i4z} + 12e^{i2z} + 1},$$

$${}^{[3]}\big(\sin z\big)_g = -\frac{2ie^{i3z/2}(e^{i4z} + 10e^{i2z} + 5)}{e^{i4z} - 14e^{i2z} + 1}, \quad {}^{[4]}\big(\sin z\big)_g = \frac{2i(5e^{i2z} + 1)}{e^{iz}(e^{i4z} - 40e^{i2z} + 15)},$$

$${}^{[5]}\big(\sin z\big)_g = \frac{ie^{i3z/2}(e^{i4z} - 90e^{i2z} + 105)}{12(e^{i2z} + 1)}, \quad {}^{[6]}\big(\sin z\big)_g = \frac{-2i}{7e^{iz}(e^{i2z} + 3)},$$

$${}^{[7]}\big(\sin z\big)_g = -4ie^{i3z/2}(e^{i2z} + 7), \quad {}^{[8]}\big(\sin z\big)_g = 0\,.$$

Нехай в точці $z = z_*$ обернені g–похідні ${}^{[k]}(\sin z)_g$, $k = \overline{0,6}$, набувають скінченних значень. Коефіцієнти зображення функції $\sin z$ Т–КФЛД будуть рівні

$$d_0(e^{iz/2}; z_*) = \frac{2i\, e^{iz_*}}{e^{i2z_*} - 1}, \quad d_1(e^{iz/2}; z_*) = \frac{i(e^{i2z_*} - 1)^2}{4e^{iz_*/2}(e^{i2z_*} + 1)},$$

$$d_2(e^{iz/2}; z_*) = -\frac{8ie^{iz_*}(e^{i2z_*} + 1)^2}{(e^{i2z_*} - 1)(3e^{i4z_*} + 12e^{i2z_*} + 1)},$$

$$d_3(e^{iz/2}; z_*) = -\frac{i(3e^{i4z_*} + 12e^{i2z_*} + 1)^2}{4e^{iz_*/2}(e^{i2z_*} + 1)(e^{i4z_*} - 14e^{i2z_*} + 1)},$$

$$d_4(e^{iz/2}; z_*) = \frac{2i(e^{i4z_*} - 14e^{i2z_*} + 1)^2}{e^{iz_*}(e^{i4z_*} - 40e^{i2z_*} + 15)(3e^{i4z_*} + 12e^{i2z_*} + 1)},$$

$$d_5(e^{iz/2}; z_*) = \frac{ie^{i3z_*/2}(e^{i4z_*} - 40e^{i2z_*} + 15)^2}{12(e^{i2z_*} + 1)(e^{i4z_*} - 14e^{i2z_*} + 1)},$$

$$d_6(e^{iz/2}; z_*) = -\frac{72i(e^{i2z_*} + 1)^2}{7e^{iz_*}(e^{i2z_*} + 3)(e^{i4z_*} - 40e^{i2z_*} + 15)},$$

$$d_7(e^{iz/2}; z_*) = -\frac{49ie^{i3z_*/2}(e^{i2z_*} + 3)^2}{12(e^{i2z_*} + 1)}, \quad d_8(e^{iz/2}; z_*) = \frac{2i}{7e^{iz_*}(e^{i2z_*} + 3)}.$$

Зображення функції $\sin z$ Т–КФЛД в околі точки $z = z_*$ матиме вигляд

$$\sin z = \left(d_0(e^{iz/2}; z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{8} \frac{e^{iz/2} - e^{iz_*/2}}{d_k(e^{iz/2}; z_*)} \right)^{-1}. \tag{7.42}$$

Оскільки коефіцієнти еквівалентного С–КФЛД набувають значень

$$e_0(e^{iz/2}; z_*) = \frac{2ie^{iz_*}}{e^{i2z_*} - 1}, \quad e_1(e^{iz/2}; z_*) = -\frac{4ie^{iz_*/2}(e^{i2z_*} + 1)}{(e^{i2z_*} - 1)^2},$$

$$e_2(e^{iz/2}; z_*) = \frac{3e^{i4z_*} + 12e^{i2z_*} + 1}{2e^{iz_*/2}(e^{i4z_*} - 1)},$$

$$e_3(e^{iz/2}; z_*) = -\frac{(e^{i2z_*} - 1)(e^{i4z_*} - 14e^{i2z_*} + 1)}{2e^{iz_*/2}(e^{i2z_*} + 1)(3e^{i4z_*} + 12e^{i2z_*} + 1)},$$

$$e_4(e^{iz/2}; z_*) = \frac{2e^{i3z_*/2}(e^{i2z_*} + 1)(e^{i4z_*} - 40e^{i2z_*} + 15)}{(e^{i4z_*} - 14e^{i2z_*} + 1)(3e^{i4z_*} + 12e^{i2z_*} + 1)},$$

$$e_5(e^{iz/2}; z_*) = \frac{6(e^{i2z_*} + 1)(3e^{i4z_*} + 12e^{i2z_*} + 1)}{e^{iz_*/2}(e^{i4z_*} - 14e^{i2z_*} + 1)(e^{i4z_*} - 40e^{i2z_*} + 15)},$$

$$e_6(e^{iz/2};z_*)=\frac{7(e^{i2z_*}+3)(e^{i4z_*}-14e^{i2z_*}+1)}{6e^{iz_*/2}(e^{i2z_*}+1)(e^{i4z_*}-40e^{i2z_*}+15)},$$

$$e_7(e^{iz/2};z_*)=\frac{e^{i4z_*}-40e^{i2z_*}+15}{42e^{iz_*/2}(e^{i2z_*}+1)(e^{i2z_*}+3)},\ e_8(e^{iz/2};z_*)=\frac{6(e^{i2z_*}+1)}{7e^{iz_*/2}(e^{i2z_*}+3)},$$

то функцію $\sin z$ можна також подати у вигляді

$$\sin z=\left(e_0(e^{iz/2};z_*)+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{8}\frac{e_k(e^{iz/2};z_*)(e^{iz/2}-e^{iz_*/2})}{1}\right)^{-1}. \tag{7.43}$$

Згідно із теоремою 5.8 маємо, що обернені похідні Тіле функції $e^{iz/2}$ обчислюються за формулами

$$^{(2n)}e^{iz/2}=(-1)^n e^{iz/2},\ ^{(2n+1)}e^{iz/2}=i(-1)^{n+1}2(n+1)e^{-iz/2},\qquad n\in\mathbb{N}_0,$$

а тоді коефіцієнти розвинення функції в околі точки $z=z_*$ в Т–ЛД рівні

$$b_0(z_*)=e^{iz_*/2},\quad b_1(z_*)=-i\,2e^{-iz_*/2},\quad b_{2n}(z_*)=(-1)^n\,2e^{iz_*/2},$$
$$b_{2n+1}(z_*)=i\,(-1)^{n+1}2(2n+1)e^{-iz_*/2},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Звідси маємо, що після еквівалентних перетворень, розвинення функції $e^{iz/2}$ в Т–ЛД матиме вигляд

$$e^{iz/2}=e^{iz_*/2}\Big(1+\frac{z-z_*}{-2i}+\frac{z-z_*}{-2}+\frac{z-z_*}{6i}+\frac{z-z_*}{2}+\frac{z-z_*}{-10i}+$$
$$+\frac{z-z_*}{-2}+\dots+\frac{z-z_*}{(-1)^n2(2n-1)i}+\frac{z-z_*}{(-1)^n2}+\dots\Big).$$

Тоді

$$\mathrm{m}(z_*,z)=e^{iz/2}-e^{iz_*/2}=e^{iz_*/2}\bigg(\frac{z-z_*}{-2i}+\frac{z-z_*}{-2}+\frac{z-z_*}{6i}+\frac{z-z_*}{2}+$$
$$+\frac{z-z_*}{-10i}+\frac{z-z_*}{-2}+\dots+\frac{z-z_*}{(-1)^n2(2n-1)i}+\frac{z-z_*}{(-1)^n2}+\dots\bigg). \tag{7.44}$$

Підставивши (7.44) в (7.42) та (7.43) отримуємо зображення функції Т–КФЛД

$$\sin z=\left(d_0(e^{iz/2};z_*)+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{8}\frac{\mathrm{m}(z_*,z)}{d_k(e^{iz/2};z_*)}\right)^{-1},$$

та С–КФЛД

$$\sin z = \left(e_0(e^{iz/2}; z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{8} \frac{e_k(e^{iz/2}; z_*)\mathfrak{m}(z_*, z)}{1} \right)^{-1}.$$

Якщо $z_* = -i\ln 4$, то зображення запишуться наступним чином

$$\sin z = \left(\frac{8i}{15} + \frac{\mathfrak{m}(-i\ln 4, z)}{225i/136} + \frac{\mathfrak{m}(-i\ln 4, z)}{-9248i/14415} + \frac{\mathfrak{m}(-i\ln 4, z)}{-923521i/4488} + \right.$$

$$+ \frac{\mathfrak{m}(-i\ln 4, z)}{-121i/78802} + \frac{\mathfrak{m}(-i\ln 4, z)}{30258i/187} + \frac{\mathfrak{m}(-i\ln 4, z)}{578i/5453} +$$

$$\left. + \frac{\mathfrak{m}(-i\ln 4, z)}{-35378i/51} + \frac{\mathfrak{m}(-i\ln 4, z)}{i/266} \right)^{-1},$$

та

$$\sin z = \left(\frac{8i}{15} + \frac{(-136i/225)\,\mathfrak{m}(-i\ln 4, z)}{1} + \frac{(961/1020)\mathfrak{m}(-i\ln 4, z)}{1} + \right.$$

$$+ \frac{(-495/65348)\,\mathfrak{m}(-i\ln 4, z)}{1} + \frac{(-33456/10571)\,\mathfrak{m}(-i\ln 4, z)}{1} +$$

$$+ \frac{(16337/4059)\,\mathfrak{m}(-i\ln 4, z)}{1} + \frac{(-1463/25092)\,\mathfrak{m}(-i\ln 4, z)}{1} +$$

$$\left. + \frac{(123/9044)\,\mathfrak{m}(-i\ln 4, z)}{1} + \frac{(51/133)\,\mathfrak{m}(-i\ln 4, z)}{1} \right)^{-1}.$$

Якщо в якості базис–функції вибрати $g(z) = \operatorname{tg}\frac{z}{4}$, то функція $\sin z$ буде мати лише сім скінченних перших обернених g–похідних 2–го типу, які будуть рівні

$${}^{[1]}(\sin z)_g = \frac{-4\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}(\operatorname{tg}^2\frac{z}{4} - 1)^2}{(\operatorname{tg}^2\frac{z}{4} + 1)(\operatorname{tg}^4\frac{z}{4} - 6\operatorname{tg}^2\frac{z}{4} + 1)},$$

$${}^{[2]}(\sin)_g = \frac{\operatorname{tg}\frac{z}{4}(\operatorname{tg}^2\frac{z}{4} + 1)^2(\operatorname{tg}^4\frac{z}{4} - 14\operatorname{tg}^2\frac{z}{4} + 9)}{4(\operatorname{tg}^6\frac{z}{4} + 15\operatorname{tg}^4\frac{z}{4} - 3\operatorname{tg}^2\frac{z}{4} + 1)},$$

$${}^{[3]}(\sin z)_g = \frac{-4(3\operatorname{tg}^8\frac{z}{4} + 28\operatorname{tg}^6\frac{z}{4} - 2\operatorname{tg}^4\frac{z}{4} + 4\operatorname{tg}^2\frac{z}{4} - 1)}{(\operatorname{tg}^4\frac{z}{4} + 10\operatorname{tg}^2\frac{z}{4} + 1)(3\operatorname{tg}^4\frac{z}{4} - 2\operatorname{tg}^2\frac{z}{4} + 3)},$$

$${}^{[4]}(\sin z)_g = \frac{3\operatorname{tg}^{10}\frac{z}{4} + 45\operatorname{tg}^8\frac{z}{4} - 50\operatorname{tg}^6\frac{z}{4} + 170\operatorname{tg}^4\frac{z}{4} + 15\operatorname{tg}^2\frac{z}{4} + 9}{16\operatorname{tg}\frac{z}{4}(3\operatorname{tg}^4\frac{z}{4} - 10\operatorname{tg}^2\frac{z}{4} - 5)},$$

$$^{[5]}(\sin z)_g=\frac{-4(3\operatorname{tg}^6\frac{z}{4}-15\operatorname{tg}^4\frac{z}{4}-15\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}-1)}{3(\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}+1)(\operatorname{tg}^4\frac{z}{4}-6\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}+1)},$$

$$^{[6]}(\sin z)_g=\frac{-\operatorname{tg}\frac{z}{4}(3\operatorname{tg}^6\frac{z}{4}-21\operatorname{tg}^4\frac{z}{4}-35\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}+21)}{16},\quad ^{[7]}(\sin z)_g=-4.$$

Нехай z_* належить до множини визначення всіх обернених g–похідних 2–го типу функції $\sin z$. Тоді коефіцієнти Т–КФЛД будуть рівні

$$d_0(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4};z_*)=\frac{(1+\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4})^2}{4\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}(1-\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4})},d_1(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4};z_*)=\frac{-4\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}(\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}-1)^2}{(\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1)(\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-6\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1)},$$

$$d_2(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4};z_*)=\frac{(\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1)^2(\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-6\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1)}{4\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}(\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}-1)(3\operatorname{tg}^6\frac{z_*}{4}+15\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-3\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1)},$$

$$d_3(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4};z_*)=4(3\operatorname{tg}^6\tfrac{z_*}{4}+15\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-3\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)^2/(\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)\times$$

$$\times(\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-6\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)(\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}+10\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)(3\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-2\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+3),$$

$$d_4(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4};z_*)=(\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}+10\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)^2(3\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-2\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+3)^2/16\operatorname{tg}\tfrac{z_*}{4}\times$$

$$\times(3\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-10\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}-5)(3\operatorname{tg}^6\tfrac{z_*}{4}+15\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-3\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1),$$

$$d_5(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4};z_*)=16\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}(3\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-10\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}-5)^2/3(\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)\times$$

$$\times(\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-6\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)(\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}+10\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)(3\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-2\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+3),$$

$$d_6(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4};z_*)=\frac{-9(\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1)^2(\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-6\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1)^2}{16\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}(3\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-10\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}-5)},$$

$$d_7(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4};z_*)=\frac{-16}{3(\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1)(\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-6\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1)}.$$

Функцію $\sin z$ можна зобразити Т–КФЛД наступним чином

$$\sin z=\left(d_0(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4};z_*)+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{7}\frac{\operatorname{tg}\frac{z}{4}-\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}}{d_k(\operatorname{tg}\frac{z}{4};z_*)}\right)^{-1}. \tag{7.45}$$

Оскільки коефіцієнти еквівалентного С–КФЛД рівні

$$e_0(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4};z_*)=\frac{(\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1)^2}{4\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}(1-\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4})},\ e_1(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4};z_*)=\frac{-(\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1)(\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-6\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1)}{4\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}(\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}-1)^2},$$

$$e_2(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4};z_*)=\frac{3\operatorname{tg}^6\frac{z_*}{4}+15\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-3\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1}{\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}(\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-1)(\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-6\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1)},$$

$$e_3(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4};z_*)=\operatorname{tg}\tfrac{z_*}{4}\,(\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}-1)(\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}+10\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)(3\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-2\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+3)\;:$$
$$:\Big((\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)(\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-6\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)(3\operatorname{tg}^6\tfrac{z_*}{4}+15\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-3\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)\Big),$$
$$e_4(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4};z_*)=4\operatorname{tg}\tfrac{z_*}{4}(\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)(\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-6\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)(3\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-10\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}-5)\;:$$
$$:\Big((\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}+10\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)(3\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-2\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+3)(3\operatorname{tg}^6\tfrac{z_*}{4}+15\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-3\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)\Big),$$
$$e_5(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4};z_*)=3(\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-6\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)(3\operatorname{tg}^6\tfrac{z_*}{4}+15\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-3\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)\times$$
$$\times(\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)\Big/\Big(\operatorname{tg}\tfrac{z_*}{4}\,(\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}+10\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)(3\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-10\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}-5)\times$$
$$\times(3\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-2\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+3)\Big),$$
$$e_6(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4};z_*)=(\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}+10\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)(3\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-2\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+3)\Big/\Big(3\operatorname{tg}\tfrac{z_*}{4}\times$$
$$\times(\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)\,(\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-6\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)(3\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-10\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}-5)\Big),$$
$$e_7(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4};z_*)=\frac{\operatorname{tg}\tfrac{z_*}{4}(3\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-10\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}-5)}{3(\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)(\operatorname{tg}^4\tfrac{z_*}{4}-6\operatorname{tg}^2\tfrac{z_*}{4}+1)},$$

то маємо зображення функції $\sin z$ вигляду скінченного С–КФЛД

$$\sin z=\left(e_0(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4};z_*)+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{7}\frac{e_k(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4};z_*)(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4}-\operatorname{tg}\tfrac{z_*}{4})}{1}\right)^{-1}. \tag{7.46}$$

Згідно із теоремою 5.8 функція $\operatorname{tg}\frac{z}{4}$ має обернені похідні Тіле довільного порядку, які знаходяться за формулами

$$^{(4n)}(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4})=\operatorname{tg}\tfrac{z}{4},\ ^{(4n+1)}(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4})=\frac{4(2n+1)(n\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}+n+1)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}},\quad n\in\mathbb{N}_0,$$
$$^{(4n+2)}(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4})=-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{z}{4}},\ ^{(4n+3)}(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4})=\frac{4(n+1)\big((2n+3)\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}+2n+1\big)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}},$$

коефіцієнти розвинення функції $\operatorname{tg}\frac{z}{4}$ в ланцюговий дріб за формулою Тіле в околі точки $z=z_*$ рівні

$$b_0(z_*)=\operatorname{tg}\tfrac{z_*}{4},\quad b_{4n+1}(z_*)=\frac{4(4n+1)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}},\quad b_{4n+2}(z_*)=-\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}}{\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}},$$
$$b_{4n+3}(z_*)=\frac{4(4n+3)\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}},\quad b_{4n+4}(z_*)=\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}}{\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}},\qquad n\in\mathbb{N}_0.$$

Тоді, після еквівалентних перетворень,

$$\mathrm{q}(z_*, z) = \operatorname{tg}\tfrac{z}{4} - \operatorname{tg}\tfrac{z_*}{4} = \frac{(z - z_*)(1 + \operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4})}{4} + \frac{(z - z_*)\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}}{-1} + \frac{z - z_*}{12\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}} +$$

$$+ \frac{z - z_*}{1} + \frac{(z - z_*)\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}}{20} + \frac{(z - z_*)\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}}{-1} + \frac{z - z_*}{28\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}} + \cdots + \frac{z - z_*}{1} +$$

$$+ \frac{(z - z_*)\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}}{4(4n+1)} + \frac{(z - z_*)\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}}{-1} + \frac{z - z_*}{4(4n+3)\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}} + \cdots \tag{7.47}$$

Аналогічно, як це доведено в підрозділі 5.5.3, можна показати, що ланцюговий дріб (7.47) збігаються до функції $\operatorname{tg}\frac{z}{4}$ на всій комплексній площині $\mathbb{C}$ за винятком особливих точок функції і на довільному компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C} \backslash \{2(2k+1)\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ ланцюговий дріб збігається рівномірно.

Підставимо (7.47) в (7.45) та (7.46). Маємо зображення функції $\sin z$ Т–КФЛД

$$\sin z = \left(d_0(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4}; z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{7} \frac{\mathrm{q}(z_*, z)}{d_k(\operatorname{tg}\frac{z}{4}; z_*)} \right)^{-1},$$

та С–КФЛД

$$\sin z = \left(e_0(\operatorname{tg}\tfrac{z}{4}; z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{7} \frac{e_k(\operatorname{tg}\frac{z}{4}; z_*)\mathrm{q}(z_*, z)}{1} \right)^{-1}.$$

В частинному випадку, коли $z_* = \frac{4\pi}{3}$ отримуємо

$$\sin z = \left(\frac{-2\sqrt{3}}{3} + \frac{\mathrm{q}(\frac{4\pi}{3}, z)}{3/2} + \frac{\mathrm{q}(\frac{4\pi}{3}, z)}{8\sqrt{3}/39} + \frac{\mathrm{q}(\frac{4\pi}{3}, z)}{-169/30} + \frac{\mathrm{q}(\frac{4\pi}{3}, z)}{-150\sqrt{3}/13} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{q}(\frac{4\pi}{3}, z)}{-1/30} + \frac{\mathrm{q}(\frac{4\pi}{3}, z)}{24\sqrt{3}} + \frac{\mathrm{q}(\frac{4\pi}{3}, z)}{1/6} \right)^{-1},$$

та

$$\sin z = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\frac{2}{3}\mathrm{q}(\frac{4\pi}{3}, z)}{1} + \frac{\frac{13\sqrt{3}}{12}\mathrm{q}(\frac{4\pi}{3}, z)}{1} + \frac{\frac{15\sqrt{3}}{52}\mathrm{q}(\frac{4\pi}{3}, z)}{1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{\sqrt{3}}{195}\mathrm{q}(\frac{4\pi}{3}, z)}{1} + \frac{\frac{-5\sqrt{3}}{12}\mathrm{q}(\frac{4\pi}{3}, z)}{1} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{12}\mathrm{q}(\frac{4\pi}{3}, z)}{1} \right)^{-1},$$

де

$$\mathrm{q}(\tfrac{4\pi}{3},z)=\frac{z-\frac{4\pi}{3}}{1}+\frac{z-\frac{4\pi}{3}}{-4\sqrt{3}/3}+\frac{z-\frac{4\pi}{3}}{9}+\frac{z-\frac{4\pi}{3}}{4\sqrt{3}/3}+\frac{z-\frac{4\pi}{3}}{5}+\frac{z-\frac{4\pi}{3}}{-4\sqrt{3}/3}+$$

$$+\frac{z-\frac{4\pi}{3}}{21}+\frac{z-\frac{4\pi}{3}}{4\sqrt{3}/3}+\cdots+\frac{z-\frac{4\pi}{3}}{4n+1}+\frac{z-\frac{4\pi}{3}}{-4\sqrt{3}/3}+\frac{z-\frac{4\pi}{3}}{3(4n+3)}+\frac{z-\frac{4\pi}{3}}{4\sqrt{3}/3}+\cdots.$$

7.7.4. Функція $\cos z$. Виберемо в якості базис–функції $g(z)=e^{iz/3}$. Обернені g–похідні 2–го типу будуть рівні

$$^{[1]}(\cos z)_g=-\frac{(e^{i2z}+1)^2}{6\,e^{i2z/3}(e^{i2z}-1)},\quad ^{[2]}(\cos z)_g=\frac{-2\,e^{iz}(e^{i2z}+2)}{2\,e^{i4z}-9\,e^{i2z}+1},$$

$$^{[3]}(\cos z)_g=\frac{10e^{i6z}-125e^{i4z}+80\,e^{i2z}-1}{6e^{i2z/3}(2\,e^{i4z}+23e^{i2z}+2)},$$

$$^{[4]}(\cos z)_g=\frac{2e^{iz}(e^{i4z}-65e^{i2z}+10)}{10e^{i6z}+395e^{i4z}+215e^{i2z}+1},$$

$$^{[5]}(\cos z)_g=\frac{-3\,e^{i4z/3}(5\,e^{i6z}+525\,e^{i4z}+1015\,e^{i2z}+42)}{2(e^{i2z}-1)(e^{i4z}-245\,e^{i2z}+1)},$$

$$^{[6]}(\cos z)_g=\frac{-2(28\,e^{i4z}+133\,e^{i2z}+1)}{e^{iz}(e^{i6z}-707\,e^{i4z}+2653\,e^{i2z}-84)},$$

$$^{[7]}(\cos z)_g=\frac{e^{i4z/3}(e^{i6z}-1708\,e^{i4z}+18186\,e^{i2z}-2520)}{18(4\,e^{i4z}+73\,e^{i2z}+4)},$$

$$^{[8]}(\cos z)_g=\frac{2(4\,e^{i2z}-1)}{5\,e^{iz}(e^{i4z}+53\,e^{i2z}+12)},$$

$$^{[9]}(\cos z)_g=\frac{11\,e^{i4z/3}(e^{i4z}+129\,e^{i2z}+90)}{18(1-e^{i2z})},\quad ^{[10]}(\cos z)_g=\frac{-2}{55\,e^{iz}(e^{i2z}-3)},$$

$$^{[11]}(\cos z)_g=\frac{33\,e^{i4z/3}(2\,e^{i2z}-15)}{2},\quad ^{[12]}(\cos z)_g=0.$$

Якщо точка z_* належить області визначення обернених g–похідних 2–го типу функції $\cos z$, то коефіцієнти Т–КФЛД набувають значень

$$d_0(e^{iz/3};z_*)=\frac{2\,e^{iz_*}}{e^{i2z_*}+1},\quad d_1(e^{iz/3};z_*)=\frac{-(e^{i2z_*}+1)^2}{6\,e^{i2z_*/3}(e^{i2z_*}-1)},$$

$$d_2(e^{iz/3};z_*)=-\frac{6\,e^{iz_*}(e^{i2z_*}-1)^2}{(e^{i2z_*}+1)(2\,e^{i4z_*}-9\,e^{i2z_*}+1)},$$

$$d_3(e^{iz/3};z_*)=\frac{(2\,e^{i4z_*}-9\,e^{i2z_*}+1)^2}{2\,e^{i2z_*/3}(e^{i2z_*}-1)(2\,e^{i4z_*}+23\,e^{i2z_*}+2)},$$

$$d_4(e^{iz/3};z_*)=\frac{6\,e^{iz_*}(2\,e^{i4z_*}+23\,e^{i2z_*}+2)^2}{(2\,e^{i4z_*}-9\,e^{i2z_*}+1)(10\,e^{i6z_*}+395\,e^{i4z_*}+215\,e^{i2z_*}+1)},$$

$$d_5(e^{iz/3};z_*)=-(10\,e^{i6z_*}+395\,e^{i4z_*}+215\,e^{i2z_*}+1)^2\Big/\Big(6\,e^{i2z_*/3}(e^{i2z_*}-1)\times$$

$$\times(e^{i4z_*}-245\,e^{i2z_*}+1)(2\,e^{i4z_*}+23\,e^{i2z_*}+2)\Big),$$

$$d_6(e^{iz/3};z_*)=-2(e^{i2z_*}-1)^2\,(e^{i4z_*}-245\,e^{i2z_*}+1)^2\ :$$

$$:\ \Big(e^{iz_*}(e^{i6z_*}-707\,e^{i4z_*}+2653\,e^{i2z_*}-84)(10\,e^{i6z_*}+395\,e^{i4z_*}+215\,e^{i2z_*}+1)\Big),$$

$$d_7(e^{iz/3};z_*)=\frac{e^{i4z_*/3}(e^{i6z_*}-707\,e^{i4z_*}+2653\,e^{i2z_*}-84)^2}{18(e^{i2z_*}-1)(e^{i4z_*}-245\,e^{i2z_*}+1)\,(4\,e^{i4z_*}+73\,e^{i2z_*}+4)},$$

$$d_8(e^{iz/3};z_*)=\frac{18(4\,e^{i4z_*}+73\,e^{i2z_*}+4)^2}{5e^{iz_*}(e^{i4z_*}+53e^{i2z_*}+12)(e^{i6z_*}-707e^{i4z_*}+2653e^{i2z_*}-84)},$$

$$d_9(e^{iz/3};z_*)=\frac{-5\,e^{i4z_*/3}(e^{i4z_*}+53\,e^{i2z_*}+12)^2}{2(e^{i2z_*}-1)(4\,e^{i4z_*}+73\,e^{i2z_*}+4)},$$

$$d_{10}(e^{iz/3};z_*)=\frac{-18(e^{i2z_*}-1)^2}{11\,e^{iz_*}(e^{i2z_*}-3)(e^{i4z_*}+53\,e^{i2z_*}+12)},$$

$$d_{11}(e^{iz/3};z_*)=\frac{605\,e^{i4z_*/3}(e^{i2z_*}-3)^2}{18(e^{i2z_*}-1)},\quad d_{12}(e^{iz/3};z_*)=\frac{2}{55\,e^{iz_*}(e^{i2z_*}-1)}.$$

Зображення функції $\cos z$ в околі точки $z=z_*$ Т–КФЛД має вигляд

$$\cos z=\left(d_0(e^{iz/3};z_*)+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{12}\frac{e^{iz/3}-e^{iz_*/3}}{d_k(e^{iz/3};z_*)}\right)^{-1}. \tag{7.48}$$

Коефіцієнти еквівалентного С–КФЛД будуть рівні

$$e_0(e^{iz/3};z_*)=\frac{2e^{iz_*}}{e^{i2z_*}+1},\quad e_1(e^{iz/3};z_*)=-\frac{6e^{i2z_*/3}(e^{i2z_*}-1)}{(e^{i2z_*}+1)^2},$$

$$e_2(e^{iz/3};z_*)=\frac{2\,e^{i4z_*}-9e^{i2z_*}+1}{e^{iz_*/3}(e^{i4z_*}-1)},$$

$$e_3(e^{iz/3};z_*)=\frac{-(e^{i2z_*}+1)(2\,e^{i4z_*}+23e^{i2z_*}+2)}{3e^{iz_*/3}(e^{i2z_*}-1)(2e^{i4z_*}-9e^{i2z_*}+1)},$$

$$e_4(e^{iz/3};z_*)=\frac{(e^{i2z_*}-1)(10\,e^{i6z_*}+395\,e^{i4z_*}+215\,e^{i2z_*}+1)}{3\,e^{iz_*/3}(2\,e^{i4z_*}-9\,e^{i2z_*}+1)(2e^{i4z_*}+23\,e^{i2z_*}+2)},$$

$$e_5(e^{iz/3};z_*)=\frac{-(e^{i2z_*}-1)(e^{i4z_*}-245e^{i2z_*}+1)(2\,e^{i4z_*}-9e^{i2z_*}+1)}{e^{iz_*/3}(2e^{i4z_*}+23e^{i2z_*}+2)(10e^{i6z_*}+395e^{i4z_*}+215e^{i2z_*}+1)},$$

$$e_6(e^{iz/3};z_*)=3\,e^{i5z_*/3}(2\,e^{i4z_*}+23\,e^{i2z_*}+2)(e^{i6z_*}-707\,e^{i4z_*}+2653\,e^{i2z_*}-84)\Big/$$
$$\Big((e^{i2z_*}-1)(e^{i4z_*}-245\,e^{i2z_*}+1)(10\,e^{i6z_*}+395\,e^{i4z_*}+215\,e^{i2z_*}+1)\Big),$$

$$e_7(e^{iz/3};z_*)=-9(4\,e^{i4z_*}+73\,e^{i2z_*}+4)(10\,e^{i6z_*}+395\,e^{i4z_*}+215\,e^{i2z_*}+1)\Big/$$
$$\Big(e^{iz_*/3}(e^{i2z_*}-1)(e^{i4z_*}-245\,e^{i2z_*}+1)(e^{i6z_*}-707\,e^{i4z_*}+2653\,e^{i2z_*}-84)\Big),$$

$$e_8(e^{iz/3};z_*)=\frac{5(e^{i2z_*}-1)(e^{i4z_*}-245\,e^{i2z_*}+1)(e^{i4z_*}+53\,e^{i2z_*}+12)}{e^{iz_*/3}(4e^{i4z_*}+73e^{i2z_*}+4)(e^{i6z_*}-707e^{i4z_*}+2653e^{i2z_*}-84)},$$

$$e_9(e^{iz/3};z_*)=\frac{-(e^{i2z_*}-1)(e^{i6z_*}-707\,e^{i4z_*}+2653\,e^{i2z_*}-84)}{9\,e^{iz_*/3}(e^{i4z_*}+53\,e^{i2z_*}+12)(4\,e^{i4z_*}+73\,e^{i2z_*}+4)},$$

$$e_{10}(e^{iz/3};z_*)=\frac{11(e^{i2z_*}-3)(4\,e^{i4z_*}+73\,e^{i2z_*}+4)}{45\,e^{iz_*/3}(e^{i2z_*}-1)(e^{i4z_*}+53\,e^{i2z_*}+12)},$$

$$e_{11}(e^{iz/3};z_*)=\frac{-(e^{i4z_*}+53e^{i2z_*}+12)}{55e^{iz_*/3}(e^{i2z_*}-1)(e^{i2z_*}-3)},\ e_{12}(e^{iz/3};z_*)=\frac{9(e^{i2z_*}-1)}{11e^{iz_*/3}(e^{i2z_*}-3)}.$$

Функція $\cos z$ зображається С–КФЛД наступним чином

$$\cos z=\left(e_0(e^{iz/3};z_*)+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{12}\frac{e_k(e^{iz/3};z_*)\,(e^{iz/3}-e^{iz_*/3})}{1}\right)^{-1}. \tag{7.49}$$

Згідно із теоремаю 5.8 обернені похідні Тіле функції $e^{iz/3}$ рівні

$$^{(2n)}\Big(e^{iz/3}\Big)=(-1)^n e^{iz/3},\quad ^{(2n+1)}=(-1)^{n+1}3(n+1)e^{-iz/3},\qquad n\in\mathbb{N}_0,$$

а коефіцієнти розвинення в Т–ЛД в околі точки $z=z_*$ мають вигляд:

$$b_0(z_*)=e^{iz_*/3},\quad b_1(z_*)=-3\,e^{-iz_*/3}\,i,\quad b_{2n}(z_*)=(-1)^n\,2\,e^{iz_*/3},$$
$$b_{2n+1}(z_*)=(-1)^{n+1}3\,(2n+1)\,e^{-iz_*/3}\,i,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Після еквівалентних перетворень маємо, що

$$\mathfrak{u}(z_*,z)=e^{iz/3}-e^{iz_*/3}=e^{iz_*/3}\Big(\frac{z-z_*}{-3i}+\frac{z-z_*}{-2}+\frac{z-z_*}{9i}+\frac{z-z_*}{2}+$$

$$+\cdots+\frac{z-z_*}{(-1)^n\,3\,(2n-1)\,i}+\frac{z-z_*}{(-1)^n\,2}+\cdots\Bigg). \tag{7.50}$$

Можна показати, що ланцюговий дріб (7.50) буде збігатися до функції $e^{iz/3}$ на всій комплексній площині і на довільному компакті $\mathcal{Z}\subset\mathbb{C}$ збіжність буде рівномірна.

Підставивши (7.50) в (7.48) та (7.49), врешті отримуємо зображення функції $\cos z$ Т-КФЛД

$$\cos z=\left(d_0(e^{iz/3};z_*)+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{12}\frac{\mathbb{u}(z_*,z)}{d_k(e^{iz/3};z_*)}\right)^{-1}.$$

та С–КФЛД

$$\cos z=\left(e_0(e^{iz/3};z_*)+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{12}\frac{e_k(e^{iz/3};z_*)\,\mathbb{u}(z_*,z)}{1}\right)^{-1}.$$

В частинному випадку, коли $z_*=-i\ln 2$, зображення функції набувають вигляду

$$\cos z=\Bigg(\frac{4}{5}+\frac{\mathbb{u}(-i\ln 2,z)}{-25\sqrt[3]{2}/36}+\frac{\mathbb{u}(-i\ln 2,z)}{36/5}+\frac{\mathbb{u}(-i\ln 2,z)}{\sqrt[3]{2}/168}+\frac{\mathbb{u}(-i\ln 2,z)}{-7056/869}+$$

$$+\frac{\mathbb{u}(-i\ln 2,z)}{755161\sqrt[3]{2}/53928}+\frac{\mathbb{u}(-i\ln 2,z)}{103041/69520}+\frac{\mathbb{u}(-i\ln 2,z)}{-160\sqrt[3]{2}/2889}+$$

$$+\frac{\mathbb{u}(-i\ln 2,z)}{-27/20}+\frac{\mathbb{u}(-i\ln 2,z)}{-800\sqrt[3]{2}/3}+\frac{\mathbb{u}(-i\ln 2,z)}{-27/880}+\frac{\mathbb{u}(-i\ln 2,z)}{1/55}\Bigg)^{-1},$$

$$\cos z=\Bigg(\frac{4}{5}+\frac{(-18\sqrt[3]{2}/25)\,\mathbb{u}(-i\ln 2,z)}{1}+\frac{(-\sqrt[3]{4}/10)\,\mathbb{u}(-i\ln 2,z)}{1}+$$

$$+\frac{(35\sqrt[3]{4}/3)\,\mathbb{u}(-i\ln 2,z)}{1}+\frac{(-869\sqrt[3]{4}/84)\,\mathbb{u}(-i\ln 2,z)}{1}+$$

$$+\frac{(-107\sqrt[3]{4}/24332)\,\mathbb{u}(-i\ln 2,z)}{1}+\frac{(2240\sqrt[3]{4}/92983)\,\mathbb{u}(-i\ln 2,z)}{1}+$$

$$+\frac{(-2607\sqrt[3]{4}/428)\,\mathbb{u}(-i\ln 2,z)}{1}+\frac{(107\sqrt[3]{4}/16)\,\mathbb{u}(-i\ln 2,z)}{1}+$$

$$
+\frac{(\sqrt[3]{4}/720)\,\mathbb{u}(-i\ln 2,z)}{1}+\frac{(11\sqrt[3]{4}/180)\,\mathbb{u}(-i\ln 2,z)}{1}+
$$
$$
+\frac{(-8\sqrt[3]{4}/11)\,\mathbb{u}(-i\ln 2,z)}{1}+\frac{(27\sqrt[3]{4}/22)\,\mathbb{u}(-i\ln 2,z)}{1}\Bigg)^{-1}.
$$

Можна отримати зображення функції $\cos z$ Т–КФЛД та С–КФЛД, якщо вибрати $g(z)=\operatorname{ctg}\frac{z}{2}$.

7.8. Висновки до розділу 7

Введено в розгляд аналог обернених похідних Тіле — обернені g–похідні, які визначається за однолистою аналітичною базис–функцією $g(z)$. В теоремі 7.1 отримано формули обчислення обернених g–похідних у вигляді відношення визначників, які складені із похідних функцій $f(z)$ та $g(z)$. Обґрунтовано рекурентне співвідношення для визначення обернених g–похідних та функціональна формула типу Тіле. В теоремах 7.2–7.12 доведено властивості обернених g–похідних. В якості ілюстрації використання функціональної формули типу Тіле отримано зображення функцій $(c+e^z)^\alpha, \operatorname{tg} z^m, \operatorname{cth}\sqrt{z}$ в ФЛД та доведено рівномірну збіжність розвинень до цих функцій. Отримано зображення функцій $\sin z, \cos z, \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ скінченними функціональними ланцюговими дробами частинні елементи яких є розвинення деякої базис–функції в ланцюговий дріб.

Розглянуто обернені g–похідні 2–го типу. Формулу обчислення оберненої g–похідної 2–го типу через похідні функцій $f(z)$ та $g(z)$ отримано в теоремі 7.20. Показано, що функція може бути зображена Т–КФЛД або С–КФЛД, якщо використовувати аналог формули Тіле для КФЛД. В теоремах 7.21–7.25 обґрунтовано властивості обернених g–похідних 2–го типу. В якості ілюстрації отримано зображення функцій $\sin z, \cos z, \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ Т–КФЛД та С–КФЛД за різними базис–функціями.

Результати розділу 7 опубліковано в роботах [93, 172] та розділі монографії [92, с.360–389].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Авербух В. И., Смолянов О. Г. Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах // Успехи мат.наук. — 1967. — Т. 22, № 6. — С. 201–260.
2. Антонова Т. М., Сусь О. М. Формула різниці для одного з фігурних наближень двовимірних неперервних дробів // Мат. методи та фіз.–мех. поля. — 2012. — Т. 55, № 1. — С. 7–18.
3. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. — Москва: Наука, 1965. — 408 с.
4. Бабенко К. И. Основы численного анализа. — Москва–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002. — 848 с.
5. Бахвалов Н. С. Численные методы: анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. 2–е. — Москва: Наука, 1975. — 632 с.
6. Бейкер (мл.) Дж., Грейвс–Моррис П. Аппроксимации Паде. — Москва: Мир, 1986. — 502 с.
7. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений: в 2 т. Т. 1. — Москва: ГИФМЛ, 1959. — 464 с.
8. Бернштейн С. Н. Quelques remarques sur l'interpolation // Сообщ. Харьк. матем. об–ва. — 1916. — Т. 15., Сер. 2, — С. 49–61.
9. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. — Москва: ГИФМЛ, 1969. — 240 с.
10. Благовещенский Ю. В., Теслер Г. С. Вычисление элементарных функций на ЭВМ. — Київ: Техніка, 1977. — 208 с.
11. Боднар Д. И. Ветвящиеся цепные дроби. — Київ: Наукова думка, 1986. — 176 с.

12. Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я. Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. — Київ: Наукова думка, 1974. — 272 с.

13. Боярчук А. К. Справочное пособие по высшей математике: в 5 т. Т. 4: Функции комплексного переменного: теория и практика. — Москва: Едиториал, УРСС, 2001. — 352 с.

14. Возна С. М., Кучмінська Х. Й., Сусь О. М. Апроксимативні властивості двовимірних неперервних дробів // Укр. мат. журнал. — 2003. — **55**, № 1. — С. 30–44.

15. Возна С. М.,Кучмінська Х. Й. Апроксимаційна формула у вигляді приєднаного непереререрного дробу // Мат. методи та фіз.–мех. поля. — 2007. — Т. 50, № 1. – С. 7-15.

16. Гаврилюк І. П.,Макаров В. Л. Методи обчислень. У 2 ч. Ч. 1. — Київ: Вища школа, 1995. — 367 с.

17. Гончар А. А., Суетин С. П. Об аппроксимации Паде мероморфных функций марковского типа // Современные проблемы математики. Вып. 5. — Москва, МИАН, 2004. — С. 3–67.

18. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. Изд. 3–е. — Москва: Наука, 1967. — 376 с.

19. Гоєнко Н. П., Гладун В. Р., Манзій О. С. Про нескінченні залишки гіллястого ланцюгового дробу Ньордунда для гіпергеометричних функцій Аппеля// Карпатські математичні публікації. — 2014. — Т.6., № 1. — С. 11–25.

20. Голуб А. П. Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — Київ, Ін–т математики НАН України, 2002. — 222 с.

21. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Изд. 2–е. — Москва–Ленинград: ГИТТЛ, 1950. — 436 с.

22. Голубев В. В. Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции. — Москва, Физматгиз, 1961. — 455 с.

23. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4–е. — Москва, Физматгиз, 1963. — 1100 с.

24. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. Изд. 3–е. — Москва: Наука, 1967. — 368 с.

25. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. — Москва: Мир, 1985. — 414 с.

26. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — Москва: Наука, 1977. — 512 с.

27. Дзядык В. К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — Киев: Наукова думка, 1988. — 304 с.

28. Дзядык В. К. Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z, \cos z, \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ // Математический сборник. — 1979. — Т. 108 (150)., Вып. 2. — С. 247–267.

29. Дмитришин Р. І. Приєднані гіллясті ланцюгові дроби з двома нерівнозначними змінними // Укр. мат. жур. — 2014. — **66**, № 9. — С. 1175-1184.

30. Зарудняк Л. В. Интерполирование цепными дробями вида $\omega(x) = g_0 + l_0 x + \mathbf{K}(k_n x^2 + m_n x + d_n/g_n + l_n x)$ // Вычислительная математика и математическая физика. Сбор. — Москва, 1975. — Вып. II. — С. 242–251.

31. Евграфов М. А. Интерполяционная задача Абеля–Гончарова. — Москва: ГИТТЛ, 1954. — 126 с.

32. Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближений. — Москва: Наука, 1984. — 352 с.

33. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. — Москва, Наука, 1987. — 424 с.

34. Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. — Киев, Наукова думка, 1992. — 304 с.

35. Кацала Р. А. Зв'язок між оберненими похідними та похідними функції однієї дійсної змінної // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2008. — Вип. 16. — С. 73–81.

36. Кацала Р. А. Розвинення функцій у ланцюговий дріб: дис. . . . канд. фіз.–мат. наук: 01.01.01 — Ужгород, 2012. — 164 с.

37. Каханер Д., Моулер К., Неш С. Численные методы и программное обеспечение. — Москва: Мир, 1998. — 576 с.

38. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. — Москва: Наука, 1978. — 278 с.

39. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Изд. 11–е. — Москва: Наука, 1975. — 432 с.

40. Кучмінська Х. Й. Двовимірні неперервні дроби. — Львів: Ін–т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2010. — 218 с.

41. Кравчук М. П. Вибрані математичні праці/Про збіжність деяких ланцюгових (ступанкових) дробів. — Київ–Нью–Йорк: Укр. вільна акад. у США – Нац. акад. наук України, 2002. — С. 185–195.

42. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Начала теории вычислительных методов. Интерполирование и интегрирование. — Минск: Наука и техника, 1983. — 287 с.

43. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — Москва–Ленинград: ГИТТЛ, 1951. — 606 с.

44. Литвин О. М. Методи обчислень. Додаткові розділи: Навч. посіб. — Київ: Наукова думка, 2005. — 344 с.

45. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. — Москва: Мир, 1980. — 608 с.

46. Макаров В. Л., Демків І. І. Новий клас інтерполяційних інтегральних ланцюгових дробів // Доп. НАН України. — 2008. — № 11. — С. 17–23.

47. Макаров В. Л., Демків І. І. Інтерполяційний інтегральний ланцюговий дріб типу Тіле // Мат. методи та фіз.–мех. поля. — 2014. — Т. **57**, № 4. — С. 44–50.

48. Макаров В. Л., Демків І. І. Інтегральний інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле // Доп. НАН України. — 2016. — № 1. — С. 12–18.

49. Макаров В. Л., Демків І. І. Абстрактний інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле // Мат. методи та фіз.–мех. поля. — 2016. — Т. **59**, № 2. — С. 50–57.

50. Макаров В. Л., Пагіря М. М. Інтерполяція функціоналів інтегральними ланцюговими C–дробами // Доп. НАН України. — 2018. — № 3. — С. 12–21.

    Те саме: Makarov V. L., Pahirya M. M. Interpolation of functional by integral continued C–fractions // arXiv: 1801.06852v1 [math.CA]. — 2018. — 9 p.

51. Макаров В. Л., Хлобыстов В. В. Основы теории полиномиального операторного интерполирования. — Київ: Інститут математики НАН України, 1999. — 278 с.

52. Макаров В. Л., Хлобыстов В. В. Сплайн–аппроксимации функций. — Москва: Высшая школа, 1983. — 80 с.

53. Макаров В. Л., Хлобистов В. В., Демків І. І. Інтерполяційні інтегральні операторні дроби в банахових просторах // Доп. НАН України. — 2008. — № 3. — С. 17–23.

54. Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Кашпур Е. Ф., Михальчук Б. Р. Интегральные полиномы типа Ньютона с континуальными узлами // Укр.мат.журн. — 2003. — Т. **55**, № 6. — С. 779–789.

55. Макаров В. Л., Хлобистов В. В., Михальчук Б. Р. Інтерполяційні інтегральні ланцюгові дроби // Укр.мат.журн. — 2003. — Т. **55**, № 4. — С. 479–488.

56. Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А. Интерполирование операторов.— Киев: Наукова. думка, 2000. — 406 с.
57. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. — Москва–Ленинград: ГИТТЛ, 1950. — 703 с.
58. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций: В 2–х т. Т. 1. Начала теории. — Москва: Наука, 1967. — 488 с. ; Т. 2 Дальнейшее построение теории. — Москва: Наука, 1968. — 624 с.
59. Математический анализ. Вычисление элементарных функций. — Москва: ГИФМЛ, 1963. — 247 с.
60. Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби. — Москва: ГИФМЛ, 1961. — 439 с.
61. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. 3–е. — Москва: Высшая школа, 1967. — 564 с.
62. Микеладзе Ш. Е. Численные методы математического анализа. — Москва: ГИТТЛ, 1953. — 527 с.
63. Михальчук Б. Р. Інтерполяція нелінійних функціоналів за допомогою інтегральних ланцюгових дробів // Укр.мат.журн. — 1999. — Т. **51**, № 3. — С. 364–375.
64. Лоран П.–Ж. Аппроксимация и оптимизация. — Москва: Мир, 1975. — 496 с.
65. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. — Москва–Ленинград: ГИТТЛ, 1949. — 688 с.
66. Недашковський М. О., Ковальчук О. Я. Обчислення з λ–матрицями. — Київ: Наукова думка, 2007. — 294 с.
67. Никишин Е. М., Сорокин В. Н. Рациональные аппроксимации и ортогональность. — Москва: Наука, 1988. — 256 с.
68. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Изд. 2–е. — Москва: Наука, 1977. — 456 с.

69. Носач В. В. Решение задач аппроксимации с помощью персональных компютеров. — Москва: МИКАП, 1994. — 382 с.

70. Пагіря М. М. Інтерполяція функцій ланцюговим дробом та гіллястим ланцюговим дробом спеціального виду // Наук. Вісник Ужгород. ун-ту. Сер. мат. — 1994. — Вип. I. — С. 72–79.

71. Пагіря М. М. Інтерполювання функцій ланцюговим дробом Тіле // Збірник наук. праць з обчис. матем. — Ужгород, 1997. — С. 21–26.

72. Пагіря М. М. Деякі типи інтерполяційних ланцюгових дробів // Комп'ютерна математика. Оптимізація обчислень: Збір. наук. праць. НАН України, Ін–т кібернетики ім. В.М. Глушкова. — Т. 1. — Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, 2001. — С. 328–333.

73. Пагіря М. М. Про ефективність наближення функцій деякими типами інтерполяційних ланцюгових дробів // Мат. методи та фіз.–мех. поля. — 2003. — Т. 46. — № 4. — С. 57–64.

74. Пагіря М. М. Задача інтерполяції функцій ланцюговими дробами // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2005. — Вип. 10–11. — С. 77–87.

75. Пагіря М. М., Свида Т. С. Задача інтерполяції функцій двовимірними ланцюговими дробами // Укр. мат. жур. — 2006. — **58**, № 6. — С. 842–851.

76. Пагіря М. М., Кацала Р. А. Розвинення деяких функцій у ланцюгові дроби // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2007. — Вип. 14–15. — С. 107–116.

77. Пагіря М. М. Еквівалентні інтерполяційному багаточлену ланцюгові дроби // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2008. — Вип. 16. — С. 127–134.

78. Пагіря М. М. Оцінка залишкового члена інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле // Укр. мат. жур. — 2008. — **60**, №. 11. — С. 1548–1554.

79. Пагіря М. М. Обернений ланцюговий дріб Тіле // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2008. — Вип. 17. — С. 179–192.
80. Пагіря М. М., Кацала Р. А. Еквівалентність двох методів побудови правильних ланцюгових C–дробів // Укр. мат. жур. — 2009. — **61**, № 7. — С. 1005–1009.
81. Пагіря М. М. Обернені похідні 2–го типу та їх властивості // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2009. — Вип. 18. — С. 99–105.
82. Пагіря М. М., Кацала Р. А. Властивості обернених похідних // Укр. мат. жур. — 2010. — **62**, № 5.— С. 708–713.
83. Пагіря М. М. Функціональні ланцюгові дроби типу Тіле // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2010. — Вип. 20. — С. 98–110.
84. Пагіря М. М., Кацала Р. А. Зв'язки обернених похідних другого типу з похідними та оберненими похідними // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2011. — Вип. 22, № 1. — С. 102–110.
85. Пагіря М. М. Наближення функцій інтерполяційними функціональними ланцюговими дробами // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2012. — Вип. 23, № 1. — С. 89–98.
86. Пагіря М. М. Оцінка залишкових членів квазі–обернених інтерполяційних ланцюгових дробів // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2013. — Вип. 24, № 2. — С. 130–137.
87. Пагіря М. М. Оцінка залишкового члена інтерполяційного ланцюгового C–дробу // Укр. мат. жур. — 2014. — **66**, № 6. — С. 806–814.
88. Пагіря М. М. Розвинення функцій комплексної змінної в квазі–обернений ланцюговий дріб типу Тіле // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2014. — Вип. 25, № 2. — С. 131–144.
89. Пагіря М. М. Дві властивості обернених похідних Тіле // Теорія наближень функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін–ту математики

НАН України. — 2015. – Т. 12, № 4. — С. 226–234.

90. Пагіря М. М. Розвинення функції $z \ln z$ в ланцюговий дріб // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2015. — Вип. 2 (27). — С. 123–136.
91. Пагіря М. М. Обернені похідні 2–го типу многочлена та раціональної функції // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін–ту математики НАН України, 2015. — Т. 12, № 5. – С. 132–139.
92. Пагіря М. М. Наближення функцій ланцюговими дробами. — Ужгород, Гражда, 2016. — 412 с.
93. Пагіря М. М. Зображення функцій $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z, \sin z, \cos z$ ланцюговими дробами // Укр. мат. жур. — 2018. — **70**, № 5. — С. 682–698.
94. Попов Б. А., Теслер Г. С. Приближение функций для технических приложений. — Киев: Наукова думка, 1980. — 352 с.
95. Привалов А. А. Теория интерполирования функций. В 2–х кн. — Саратов: Из-во Сарат. ун-та, 1990. — 424 с.
96. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. Изд. 13–е. — Москва: Наука, 1984. — 432 с.
97. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — Москва: Наука, 1981. — 800 с.
98. Рвачев В. Л., Рвачев В. А. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. — Киев: Наукова думка, 1979. — 196 с.
99. Риордан Дж. Комбинаторные тождества. — Москва: Наука, 1982. — 255 с.
100. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. — Минск: Из–во БГУ, 1979. — 176 с.
101. Рутисхаузер Г. Алгоритм частных и разностей. — Москва: ИЛ, 1960. — 93 с.

102. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. — Москва: Наука, 1989. — 432 с.

103. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — Москва: Наука, 1979. — 832 с.

104. Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. — Москва: Наука, 1983. — 312 с.

105. Степанец А. И. Методы теории приближений. В 2–х ч. — Киев: Ин–т математики НАН Украины, 2002 — Ч. I. — 427 с., Ч. II. — 468 с.

106. Стилтьес Т. И. Исследования о непрерывных дробях. — Харьков–Киев: Гос. науч.–техн. изд. Украины, 1936. — 155 с.

107. Стоилов С. Теория функций комплексного переменного. В 2 т. Т. 1 — Москва: ИЛ, 1962. — 364 с.

108. Сявавко М. С. Інтегральні ланцюгові дроби. — Київ: Наукова думка, 1994. — 205 с.

109. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. — Москва: ГИФМЛ, 1960. — 624 с.

110. Титчмарш Е. Теория функций. Изд. 2–е. — Москва: Наука, 1980. — 464 с.

111. Уолш Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. — Москва: ИЛ, 1961. — 508 с.

112. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Изд. 8–е. Т. I. — Москва: Наука, 2003. — 680 с.

113. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Изд. 8–е. Т. II. — Москва: Наука, 2003. — 864 с.

114. Харди Г. Х. Курс чистой математики. — Москва: ИЛ, 1949. — 512 с.

115. Хинчин А. Я. Цепные дроби.— Москва: Наука, 1978. — 112 с.

116. Хованский А. Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. — Москва: ГИТТЛ, 1956. — 203 с.

117. Хлопонин С. С. P–цепные дроби. Интерполирование цепными дробями // Изв. вузов. Математика — 1976. — № 1. — С. 124–128.

118. Цепные дроби. Сборник. — Ставрополь: Ставропольский госуд. институт, 1977. — 144 с.

119. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — Москва: Наука, 1976. — 580 с.

120. Шмойлов В. И., Редин А. А., Никулин Н. А. Непрерывные дроби в вычислительной математике. —Ростов–на–Дону: Изд–во ЮФУ, 2015. — 228 с.

121. Baltus C., Cooper S. C., Craviotto C., McCabe J. H. On the use of corresponding sequance algorithm for δ–fraction // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 1991. — Vol. 37. — P. 57–69.

122. Blanch G. Numerical evalution of continued fractions // SIAM Review. — 1964. — Vol. 6, No. 4. — P. 383–421.

123. Bodnar D. I., Bubniak M. M. On convergence $(2, 1, ..., 1)$ — periodic branched continued fraction of the special form // Carpathian Mathematical Publications. — 2015. — Vol. 7, No. 2. — P. 148–154.

124. Borwein P., Erdélyi T. Polynomials and polynomial inequalities. — Springer–Verlag, 1995. — 480 p.

125. Brezinski C. History of continued fractions and Pade approximations. Vol. 12. — Springer Science & Business Media, 2012. — 558 p.

126. Brezinski C., Zaglia M. R. Extrapolation methods: theory and practice. Vol. 2. — Elsevier, 2013. — 464 p.

127. Bultheel A. Devision algorithms for continued fractions and the Pade table // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 1980. — Vol. 6, No. 4. – P. 259–266.

128. Cheney E. W. Introduction to approximation theory. — Chelsea, 1966. — 259 p.

129. Conte S. D., de Boor C. Elementary numerical analysis. An algorithmic approach. 3^{rd} ed. — McGraw–Hill Book Company, 1980. — 432 p.

130. Cooper K. D., Cooper S. C., Jones W. B. More on C–fraction solutions to Riccati equations // Rocky Mountain Journal of Matemenatics. — 1991. — Vol. 21, No. 1. — P. 139–158.

131. Cuyt A., Brevik Petersen V., Verdonk B., Waadeland H., Jones W. B. Handbooks of continued fractions for special functions. — Springer, 2008. — XVI+431 p.

132. Cuyt A., Wuytack L. Nonlinear methods in numerical analysis. — Elsevier, 1987. — 278 p.

133. Euler L. De fractionibus continuis. dissertatio "De fractionibus continuis dissertatio" // Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. — 1737. — T. 9. — P. 98–137.

134. Gautschi W. Numerical analysis. — Springer, 2012. — XXVI+588 p.

135. Gautschi W. Computational aspects of three–term recurence relation // SIAM Review. — 1967. — Vol. 9, No. 1. — P. 24–82.

136. Gragg W. B., Warner D. D. Two constructive results in continued fraction // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1983. — Vol. 20, No. 6. — P. 1187–1197.

137. Graves–Morris P. R. Vactor value rational interpolants. I. // Numerische Mathematik. — 1983. — Vol. 42, Iss. 3. — P. 331–348.

138. Hastings C., Wayward J. T., Wong J. P. Approximations for digital computers. — Princeton University Press, 1955. — 201 p.

139. Hildebrand F. B. Introduction to numerical analysis. 2^{nd} ed. — Courier Corporation, 1987. — 669 p.

140. Henrici P. Applied and computational complex Analysis, Volume. 1.: Power series, integration, conformal mapping, location of zeros. — John Wiley& Sons, 1974. — XV+682 p.

141. *Henrici P.* Applied and computational complex analysis, Volume. 2.: Special functions, integral transforms, asymptotics, continued fractions. — John Wiley& Sons, 1977. — IX+662 p.

142. Henrici P., Pfluger P. Truncation error estimates for Stieltjes fractions // Numerische Mathematic. — 1966.— Vol.9. — P. 120–138.

143. Hensley D. Continued fractions. — World Scientific, 2006. — XIII+245 p.

144. Hoene–Wroński J. M. Introduction à la philosophie des mathématiques et technie de l'algorithmique. — Paris: Courcier, 1811. — 269 p.

145. Hoene–Wroński J. M. Philosophie de la technie algorithmique: loi suprême et universelle des mathématiques. — Paris: de L'imprimerie de P. Didot L'Aine, 1815–1817.– 286 p.

146. Jacobs, D. A. Remark on rational interpolation of function and derivatives // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). — 1966. — Vol. 17. Issue 1. — P. 195-197.

147. Jones W. B., Thron W. J. Continued fractions in numerical analysis // Applied numerical mathematics. — 1988. — Vol. 4. No. 2–4. — P. 143–230.

148. Jordan Ch. Calculus of finite differences. 3^{rd} ed. — Chelsea Publishing Company, 1979. — 654 p.

149. Khrushchev S. Orthogonal polynomials and continued fractions. — Cambridge University Press, 2008. — XVI+478 p.

150. Klemens, P. G. Resolution of Devices Actuated by Random Events // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. — 1948. — Vol. 39, Issue 295. — P. 656-660.

151. Kuchminskaya Kh. I., Siemaszko W. Rational Approximation and Interpolation of Functions by Branched Continued Fractions // Lecture Notes in Mathematics. — 1987. — V. 1237. — P. 24–40.

152. Khovanskii A. N. The application of continued fractions and their generalizations to problems in approximation theory. — Groningen: P. Noordhoff, 1963. — 212 p.

153. Lagrange J. L. Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral // Oeuvres de Lagrange, tome IV. — Paris, Gauthier–Villars, Imprimeur–Libraire, 1869. — P. 301–332.

154. Lange L. J. δ–fraction expansions of analytic functions // Analytic Theory of Continued Fractions. Springer Berlin Heidelberg, 1982. — P. 152-175.

155. Larkin F. M. Some techniques for rational interpolation // The Computer Journal. — 1967. — Vol. 10, Iss. 2. — P. 178–187.

156. Levrie P., Bultheel A. A note on Thiele n–fractions // Numerical Algorithms. — 1993. — Vol. 4, Iss. 2. — P. 225–239.

157. Lorentzen L., Waadeland H. Continue fraction with applications. — North–Holland, 1992. — 606 p.

158. Lorentzen L., Waadeland H. Continue Fraction. 2^{ed} ed. Vol. 1.: Convergence Theory. — Atlantis Press/Wold Scientific, 2008. — 308 p.

159. Lorentzen L. A priori truncation error bounds for continued fractions // Rocky Mountain Journal of Mathematics. — 2003. — Vol. 33., No. 2. — P. 409–474.

160. Makarov V. L, Khlobystov V. V., Yanovich L. A. Methods of operator interpolation. — Праці Ін–ту математики НАН України. — 2010. —Т.83. — 517 с.

161. Merkes E. P., Scott W. T. Continued Fraction Solution of the Riccati Equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1962. — Vol. 4. — P. 309–327.

162. Milne–Thomson L. M. The calculus of finite differences. 2^{nd} ed. — American Mathematical Society, 2000. — XXIV+558 p.

163. Needham T. Visual complex analysis. — Oxford, University Press, 2000. — XXIII+592 p.

164. Nörlund N. E. Vorlesungen über Differenzenrechnung. — Springer, 1924. — IX+551 S.

165. Olds C. D. Continued fractions. New mathematical library, Vol. 9. — Random House, 1963. — VIII+162 p.

166. Olds C. D., Lax An., Davidoff G. P. The geometry of numbers. New mathematical library, Vol. 41. — Mathematical Association of America, 2000. — XVI+176 pp.

167. Pachón R., Gonnet P., van Deun J. Fast and stable rational interpolation in roots in unity and chebyshev points // SIAM Journal on Numerical Analysis, 2012. — Vol. 50, No. 3. — P. 1713–1734.

168. Pahirya M. M. Some New Aspects of Thiele Interpolation Continued Fraction // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. — 2001. — Vol. IX. — P. 21–29.

169. Pahirya M. M. Interpolation Function of Non–Thiele Continued Fractions // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. — 2002. — Vol. X. — P. 59–62.

170. Pahirya M. M. The Problem of Interpolation Function of Thiele Continued Fraction (Some Examples) // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. — 2007. — Vol. XV. — P. 34–39.

171. Pahirya M. M. Expansion of function $z\ln z$ in the quasi–reciprocal continued fraction // International Journal of Advanced Research in Mathematics, 2016. — Vol. 7. — P. 1–9.

172. Pahirya M. M. A reciprocal g–derivatives of 2–nd type and its properties // International Journal of Advanced Research in Mathematics, 2017 — Vol. 8. – P. 1–11.

173. Paydon J. F.,Wall H. S. The Continued Fraction as a Sequence of Linear Transformation // Duke Mathematical Journal. — 1942. — Vol. 9, No. 2. — P. 360-372.

174. Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band I. — Stuttgart: Teubner, 1954. — 194 S.

175. Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band II. — Stuttgart: Teubner, 1957. — 315 S.
176. Phillips G. M. Interpolation and approximation by polynomials. — Springer-Verlag, 2003. — 312 p.
177. Runge C. Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten // Zeitschrift für Mathematik und Physik. — 1901. — Vol. 46. — P. 224–243.
178. Sanielevici S. Sur l'intégration des équations différentielles par les fractions continues // Annales Scientifiques de l'Universite de Jassy. — 1933. — Vol. 18. — P. 197–214.
179. Salzer H. An alternative definition of reciprocal differences // The Philosophical Magazine: A Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics. —1948. — Vol. 39., Issue 295. — P. 649–656.
180. Salzer H. Note on osculatory rational interpolation // Mathematics of Computation. — 1962. — Vol. 6. — P. 486–491.
181. Schweiger F. Continues fractions and their generalizations: A short history of f–expansion. — Docent press, 2016. — VI+184 p.
182. Sidi A. Practical extrapolation methods: Theory and applications. Vol. 10. — Cambridge University Press, 2003. — XXII+519 p.
183. Stokes A. N. Continued fraction solutions of the Riccati equation // Bulletin of the Australian Mathematical Society. — 1982. — Vol. 25, Iss. 2. — P. 207–214.
184. Stoer R., Bulirsch R. Introduction to numerical analysis. 2^{ed} ed. — Springer, 1993. — 660 p.
185. Tan J. The limiting case of Thiele's interpolationg continued fraction expantion // Jornal of Computational Mathematics. — 2001. — Vol. 19, No. 4. — P. 433–444.
186. Tan J. A compact determinantel representation for inverse difference // Journal of Mathematical Research & Exposition — 2000. — Vol. 20, No. 1.

— P. 32–36.

187. Tan J., Jiang P. A Neville–like method via continued fractions // Journal of Computational and Applied Mathematics.— 2004. — Vol. 163. — P. 219–232.

188. Thiele T. N. Interpolationsprechnung. — Leipzig: B.G. Teubner, 1909. — XII+175 S.

189. Wall H. S. Analytic theory of continued fractions. — D. Van Nostrand Co., 1948. — 433 p.

190. Zhao Q., Tan J. Block based Newton–like blending interpolation // Journal of Computational Mathematics. — 2006. — V. 24, No. 4. — P. 515–526.

191. Zhao Q., Tan J. Block based Lagrange–Thiele like blending rational interpolation // Journal of Information & Computatiol Science. — 2006. — V. 3, Issue 1. — P. 167–177.

Додаток А

А.1. Список публікацій здобувача

1. Пагіря М.М. Наближення функцій ланцюговими дробами. — Ужгород, Гражда, 2016. — 412 с.

2. Пагіря М.М. Деякі типи інтерполяційних ланцюгових дробів // Комп'ютерна математ. Оптимізація обчислень: Збір. наук. праць. НАН України, Ін–т кібернетики ім. В.М. Глушкова. — Т. 1. — Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, 2001. — С. 328–333.

3. Пагіря М.М. Про ефективність наближення функцій деякими типами інтерполяційних ланцюгових дробів // Мат. методи та фіз.–мех. поля. — 2003. — Т. 46. — № 4. — С. 57–64.

4. Пагіря М.М. Задача інтерполяції функцій ланцюговими дробами // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2005. — Вип. 10–11. — С. 77–87.

5. Пагіря М.М., Свида Т.С. Задача інтерполяції функцій двовимірними ланцюговими дробами // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 6. — С. 842–851.

6. Пагіря М.М., Кацала Р.А. Розвинення деяких функцій у ланцюгові дроби // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2007. — Вип. 14–15. — С. 107–116.

7. Пагіря М.М. Еквівалентні інтерполяційному багаточлену ланцюгові дроби // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2008. — Вип. 16. — С. 127–134.

8. Пагіря М.М. Оцінка залишкового члена інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, №. 11. — С. 1548–1554.

9. Пагіря М.М. Обернений ланцюговий дріб Тіле // Наук. вісник Ужго-

род. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2008. — Вип. 17. — С. 179–192.

10. Пагіря М.М., Кацала Р.А. Еквівалентність двох методів побудови правильних ланцюгових C–дробів // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 7. — С. 1005–1009.

11. Пагіря М.М. Обернені похідні 2–го типу та їх властивості // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2009. — Вип. 18. — С. 99–105.

12. Пагіря М.М., Кацала Р.А. Властивості обернених похідних // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 5.— С. 708–713.

13. Пагіря М.М. Функціональні ланцюгові дроби типу Тіле // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2010. — Вип. 20. — С. 98–110.

14. Пагіря М.М., Кацала Р.А. Зв'язки обернених похідних другого типу з похідними та оберненими похідними // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2011. — Вип. 22, № 1. — С. 102–110.

15. Пагіря М.М. Наближення функцій інтерполяційними функціональними ланцюговими дробами // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2012. — Вип. 23, № 1. — С. 89–98.

16. Пагіря М.М. Оцінка залишкових членів квазі–обернених інтерполяційних ланцюгових дробів // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2013. — Вип. 24, № 2. — С. 130–137.

17. Пагіря М.М. Оцінка залишкового члена інтерполяційного ланцюгового C–дробу // Укр. мат. журн. — 2014. — **66**, № 6. — С. 806–814.

18. Пагіря М.М. Розвинення функцій комплексної змінної в квазі–обернений ланцюговий дріб типу Тіле // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2014. — Вип. 25, № 2. — С. 131–144.

19. Пагіря М.М. Дві властивості обернених похідних Тіле // Теор. наближ. ф–й та суміжні питання: Зб. праць Ін–ту математики НАН України. — 2015. – Т. 12, № 4. — С. 226–234.

20. Пагіря М.М. Розвинення функції $z \ln z$ в ланцюговий дріб // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2015. — Вип. 2 (27). — С. 123–136.

21. Пагіря М.М. Обернені похідні 2–го типу многочлена та раціональної функції // Математ. пробл. механіки та обчис. матем.: Зб. праць Ін–ту математики НАН України, 2015. — Т. 12, № 5. – С. 132–139.

22. Пагіря М.М. Зображення функцій $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z, \sin z, \cos z$ ланцюговими дробами // Укр. мат. журн. — 2018. — **70**, № 5. — С. 682–698.

23. Макаров В.Л., Пагіря М.М. Інтерполяція функціоналів інтегральними ланцюговими С–дробами // Доп. НАН України. 2018. № 3. С. 12–21.

24. Pahirya M.M. Some new aspects of Thiele interpolation continued fraction // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. — 2001. — Vol. IX. — P. 21–29.

25. Pahirya M.M. Interpolation function of non–Thiele continued fractions // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. — 2002. — Vol. X. — P. 59–62.

26. Pahirya M.M. The problem of interpolation function of Thiele continued fraction (Some Examples) // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. — 2007. — Vol. XV. — P. 34–39.

27. Pahirya M.M. Expansion of function $z \ln z$ in the quasi–reciprocal continued fraction // International Journal of Advanced Research in Mathematics. — 2016. — Vol. 7. — P. 1–9.

28. Pahirya M.M. A reciprocal g–derivatives of 2–nd type and its properties // International Journal of Advanced Research in Mathematics. — 2017. — Vol. 8. — P. 1–11.

29. Pahirya M.M. Multidimensional Interpolating Continued Fractions // Український математичний конгрес, (Київ, 21–23 серпня 2001). — Теор. набл. та гармон.аналіз, секція 10, Тези доп. — С. 42.

30. Пагіря М.М., Крижановська І.В. Про побудову деяких типів інтер-

поляційних ланцюгових дробів // Міжнародна школа–семінар "Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування", (Ужгород, 19–24 серпня 2002). Тези доповідей.— С. 42–44.

31. Пагіря М.М., Свида Т.С. Наближення функцій інтерполяційними ланцюговими дробами та їх узагальненнями // Міжнародна конференція "Шості Боголюбовські читання", (Чернівці, 25–29 серпня 2003). Тези доповідей. — С. 166.

32. Пагіря М.М., Свида Т.С. Наближення функцій інтерполяційними ланцюговими дробами та їх узагальненнями // Міжнародна математична конференція ім. В.Я.Скоробогатька, (Дрогобич, 27 вересня– 1 жовтня 2004). Тези доповідей. — С. 159.

33. Пагіря М.М. Задача наближення функцій інтерполяційними ланцюговими дробами // Conference "Functional Methods in Approximation Theory, Operator Theory, Stochastic Analysis and Statistics", (Kyiv,October 1–5, 2004). Abstracts. — P. 93.

34. Пагіря М.М. Наближення функцій ланцюговими дробами // Міжнародна наукова конференція "Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування", (Ужгород, 18–23 вересня, 2006). Тези доповідей. — С. 76–77.

35. Пагіря М.М. Задача наближення функцій ланцюговими дробами // Міжнародна математична конференція ім. В.Я.Скоробогатька, (Дрогобич, 24–28 вересня, 2007). Тези доповідей. — С. 214.

36. Пагіря М.М., Кацала Р.А. Розвиток функцій у ланцюговий дріб // Сучасні проблеми механіки і математики, (Львів, 25–29 травня 2008). Тези доповідей. Т. 3. — С. 81–83.

37. Пагіря М.М. Наближення функцій однієї та двох змінних ланцюговими дробами та їх узагальненнями // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування", (Мелітополь, 16–21 червня 2008) Тези доповідей. — С. 88.

38. Пагіря М.М. Наближення функцій ланцюговими дробами // Conference "Functional Methods in Approx. Theory and Operator Theory III", (Світязь, 22–26 серпня 2009). Abstracts. — P. 69–70.

39. Пагіря М.М. Наближення функцій ланцюговими дробами // Український математичний конгрес. (Київ, 27–29 серпня 2009). — htpp://www.imath.kiev.ua/~congress2009 /Abstracts/Pahirya.pdf

40. Пагіря М.М., Кацала Р.А. Про два підходи до побудови правильних ланцюгових C–дробів та деякі властивості обернених похідних // International Conference on Complex Analysis, (Lviv, May 31–June 5, 2010). Abstracts. — P. 103–104.

41. Пагіря М.М. Наближення функцій функціональними ланцюговими дробами // International Conference in Modern Analysis. (Donetsk, June 20–23, 2011). Abstracts. — P. 84.

42. Пагіря М.М. Деякі способи наближення функцій ланцюговими дробами // Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", (Кам'янець–Подільський, 28 травня–3 червня, 2012). Тези доповідей. — С. 79–80.

43. Пагіря М.М. Наближення функцій інтерполяційними функціональними ланцюговими дробами // International Conference dedicate to the 120th anniversary of Stefan Banach. (L'viv, September 17–21, 2012). Abstracts of report. — P. 172.

44. Пагіря М.М. Функціональні ланцюгові дроби // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування", (Ужгород–Ченадієво, 27–29 вересня 2012). Матеріали конференції. — С. 64.

45. Пагіря М.М. Інтерполяція функцій ланцюговими дробами // Міжнародна математична конференція "Боголюбовські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування", Севастополь, 23–30 червня 2013). Тези доповідей. — С. 258.

46. Пагіря М.М. Деякі підходи до наближення функцій комплексної

змінної ланцюговими дробами // VII Міжнародна конференція імені академіка І.І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика", (Київ, 9–10 жовтня 2014). Матеріали конференції. — С. 74–75.

47. Pahirya M.M. Approximation of functions of complex variables by continued fractions // International V. Skorobohatko mathematical conference, (Drohobych, August 25–28, 2015). Abstracts. — P. 115.

48. Пагіря М.М. Деякі підходи до інтерполяції функцій ланцюговими дробами // VIII Міжнародна конференція імені академіка І.І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика", (Київ, 8–9 жовтня 2015). Матеріали конференції. — С. 67–68.

49. Пагіря М.М. Наближення функцій комплексної змінної ланцюговими дробами // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування", (Ужгород, 19–21 травня 2016). Тези доповідей. — С. 104.

50. Pahirya M.M. Expansion function of complex variable in the continued fraction // 24–th International conference on finite or infinite dimensional complex analysis and application,(Jaipur, India, August 22–26, 2016). Abstracts. — P. 87.

51. Пагіря М.М. Деякі підходи до розвинення функцій в ланцюгові дроби // Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", (Слов'янськ, 28 травня–3 червня, 2017). Тези доповідей.— С. 76.

А.2. Відомості про апробацію результатів дисертації

Результати роботи доповідалися на:

— Українському математичному конгресі – 2001 (до 200–річчя з дня народження М. В. Остроградського), Київ, 21–23 серпня 2001;

— Міжнародній школі–семінарі "Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування", (до 75–річчя з дня народження проф. В. Я. Скоробогатька), Ужгород, 19–24 серпня 2002;

— Міжнародній конференція "Шості Боголюбовські читання", Чернівці, 25–29 серпня 2003;

— Міжнародній математичний конференції ім. В. Я. Скоробогатька, Дрогобич, 27 вересня– 1 жовтня 2004;

— Конференції "Functional Methods in Approximation Theory, Operator Theory, Stochastic Analysis and Statistics", Київ, 1–5 жовтня, 2004;

— Міжнародній науковій конференція "Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування", Ужгород, 18–23 вересня, 2006;

— Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька, Дрогобич, 24–28 вересня, 2007;

— Конференції "Сучасні проблеми механіки і математики", Львів, 25–29 травня 2008;

— Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування", Мелітополь, 16–21 червня 2008р;

— Міжнародній науковій конференції "Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III", Світязь, 22–26 серпня 2009;

— Українському математичному конгресі –2009 (до 100–річчя від дня народження Миколи М. Боголюбова), Київ, 27–29 серпня 2009;

— International Conference on Complex Analysis, Львів, 31 травня – 5 червня, 2010;

— International Conference in Modern Analysis, Донецьк, 20–23 червня, 2011;

— Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування", присвяченій 70–річчю з дня народження члена–кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007), Кам'янець–Подільський, 28 травня–3 червня, 2012;

— International Conference dedicate to the 120th anniversary of Stefan Banach, Львів, 17–21 вересня, 2012;

— Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування" присвяченій 70–річчю професора В. В. Маринця, Ужгород, 27–29 вересня 2012;

— Міжнародній конференції "Боголюбовські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75–річчя з дня народження академіка НАН України А. М. Самойленка, Севастополь, 23–30 червня 2013;

— VII Міжнародній конференції імені академіка І. І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика", Київ, 9–10 жовтня 2014;

— International V. Skorobohatko mathematical conference, Дрогобич, 25–28 серпня, 2015;

— VIII Міжнародній конференції імені академіка І. І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика", Київ, 8–9 жовтня 2015;

— Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування" присвяченій 70–річчю академіка НАН України М. О. Перестюка, Ужгород, 19–21 травня 2016;

— 24–th International conference on finite or infinite dimensional complex analysis and application, Jaipur, India, August 22–26, 2016;

— Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", Слов'янськ, 28 травня – 3 червня, 2017;

— семінарах кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики Ужгородського національного університету (керівник семінару проф. Маринець В. В.);

— семінарах кафедри машинобудування, природничих дисциплін та інформаційних технологій Мукачівського держ. університету (керівники семінару проф. Мигалина Ю. В., доц. Питьовка О. Ю., доц. Кабацій В. М.);

— семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України, 8 червня 2007, 19 листопада 2010, 22 лютого, 20 грудня 2013, 27 березня 2014, 16 жовтня 2015, 15 квітня 2016, 10 лютого 2017 (керівники семінару член.–кор. НАН України, проф. $\boxed{\text{О. І. Степанець}}$, проф. А. С. Романюк);

— семінарі "Сучасний аналіз" в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, 14 грудня 2014 року, (керівники семінару проф. І. О. Шевчук, проф. О. О. Курченко, проф. В. М. Радченко);

— семінарі з аналітичної теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів, 23 березня 2014, 19 лютого, 14 травня 2015, (керівники семінару проф. Д. І. Боднар, док. фіз.–мат. наук Х. Й. Кучмінська);

— Львівському міжвузівському семінарі з теорії аналітичних функцій, 16 березня 2017, (керівник семінару проф. Скасків О. Б.);

— міжвузівському семінарі по теорії функцій в Дніпропетровському національному університеті імені Олеся Гончара, 18 березня 2015, (керівник семінару член.–кор. НАН України, проф. В. П. Моторний);

— на виїзному засіданні Бюро відділення математики НАН України і секції математики та математичного моделювання Західного наукового центру НАН України і МОН України, 24–25 листопада 2010 року, м. Ужгород.

Додаток Б

Приклади інтерполяції функцій ланцюговими дробами

Наведені в даному додатку результати числових експериментів отримані за допомогою власного програмного продукту, який реалізований на алгоритмічній мові FORTRAN–2003 в операційній системі Linux.

Б.1. Інтерполяція функцій Т–ІЛД

Розглянемо приклади інтерполяції функцій комплексної змінної Т–ІЛД, які будуть проілюструвати якість наближення функцій Т–ІЛД та ефективність оцінки теореми 2.7.

В теоремі 2.7 робилися такі припущення: **(A)** коефіцієнти Т–ІЛД (1.25), задовольняють умову (2.37); **(B)** існує множина точок $\mathscr{X} \subset \mathcal{Z}\backslash\mathbf{Z}$, що у довільній точці $z_* \in \mathscr{X}$ знаменник v_{n+1} ланцюгового дробу (1.23) задовольняє нерівність (2.38). Тоді має місце оцінка теореми (2.39).

З'ясуємо: 1) чи існує функція та область інтерполювання, що коефіцієнти Т–ІЛД будуть задовольняти умову Слєшинського–Прінґсгейма? 2) чи знайдеться така множина точок $\mathscr{X} \subset \mathcal{Z}\backslash\mathbf{Z}$, що у кожній точці множини має місце нерівність (2.38)? 3) якщо вибрана дискретна множина точок $Z_{test} \subset \mathcal{Z}$, то в якій кількості точок цієї множини нерівність (2.38) виконується, тобто яку частину Z_{test} складають точки $\mathscr{X}$? 4) яке співвідношення між оцінкою (2.39) та максимальною абсолютною похибкою Т–ІЛД на вибраній множині точок Z_{test}?

За область інтерполювання вибрано круг $\mathcal{Z} = \{z : |z - z_0| \leqslant R\}$. В якості вузлів інтерполяції вибирається $(n+1)$–а внутрішня точка круга:

$$z_j = z_0 + \tfrac{jR}{n}(\cos(\tfrac{2\pi j}{n}) + i\sin(\tfrac{2\pi j}{n})), \qquad j = \overline{0, n}. \tag{Б.1}$$

За допомогою генератора псевдовипадкових чисел отримується множина

$$Z_{test} = \{z_k^{test} : z_k^{test} \in \mathcal{Z}, k = \overline{1, 5.000.000}\}, \qquad (Б.2)$$

в яких проводяться обчислення. Визначалися величини

$$\Delta_{max} = \max_{w \in Z_{test}} |f(w) - D_n^{(t)}(w)|, \ \Lambda = \frac{(d_{\mathcal{Z}} - 1)^2 \max\limits_{w \in Z_{test}} \prod\limits_{i=0}^{n} |w - z_i|}{((d_{\mathcal{Z}})^{n+2} - 1)\,((d_{\mathcal{Z}})^{n+1} - 1)}, \ d_{\mathcal{Z}} = 2R.$$

Результати обчислювальних експериментів вміщено в таблицях. В таблиці внесено результати тільки для тих значень n, для яких всі коефіцієнти $b_k, k = \overline{1, n}$, Т–ІЛД (1.25) задовольняють умову (2.37). В першому стовпчику таблиці вказана кількість інтерполяційних вузлів n. В другому вміщено значення Δ_{max}, в третьому — Λ і в четвертому — кількість точок множини Z_{test}, в яких (2.38) має місце, тобто потужність множини $|\mathscr{Z}|$.

Таблиця Б.1

Функція $\cos(z/10)$, **круг** $|z - 10 - 10i| \leqslant 0{,}445$

n	Δ_{max}	Λ	$\lvert\mathscr{Z}\rvert$
4	$0{,}89314287408639 \cdot 10^{-08}$	$0{,}19886833612699 \cdot 10^{-02}$	5.000.000
5	$0{,}32669336182140 \cdot 10^{-10}$	$0{,}81687599739332 \cdot 10^{-03}$	5.000.000
6	$0{,}18027854530681 \cdot 10^{-12}$	$0{,}35244625688240 \cdot 10^{-03}$	5.000.000
7	$0{,}15112259987535 \cdot 10^{-14}$	$0{,}15868634836285 \cdot 10^{-03}$	5.000.000
8	$0{,}20435528243915 \cdot 10^{-16}$	$0{,}73373954782450 \cdot 10^{-04}$	5.000.000
9	$0{,}40913413416084 \cdot 10^{-19}$	$0{,}34636580079811 \cdot 10^{-04}$	5.000.000
10	$0{,}15076685575422 \cdot 10^{-21}$	$0{,}16620191454767 \cdot 10^{-04}$	5.000.000
11	$0{,}81437474372521 \cdot 10^{-24}$	$0{,}80839416901162 \cdot 10^{-05}$	4.999.995

Приклад 1. В крузі $|z - 10 - 10i| \leqslant 0{,}445$ інтерполювалася функція $\cos(z/10)$. Результати чисельних експериментів містяться в табл. Б.1. При $n = \overline{4, 11}$ всі коефіцієнти Т–ІЛД задовольняють умову Слєшинського–Прінґсгейма. Потужність множини $\mathscr{Z}$ збігається із кількістю точок мно-

жини Z_{test} при $n = \overline{4, 10}$. Коли $n = 11$, то умова (2.38) не виконується лише у 5 точках.

Приклад 2. Більш цікавий за кількістю результатів приклад було отримано у випадку інтерполяції функції $\sqrt{z}$ в крузі $|z - 1 - i| \leqslant 0{,}45$ (див. таб. Б.2). В цьому випадку при $n = \overline{3, 20}$, всі коефіцієнти Т–ІЛД (1.25) задовольняють умову Слєшинського–Прінґсгейма. Нерівність (2.38) мала місце при $n = \overline{3, 17}$ у всіх тестових точках. При $n = 18, 19, 20$ кількість тестових точок, в яких (2.38) не мала місця, була незначною.

Аналогічні результати отримані при інтерполюванні функції $(1/2)^z$ в крузі $|z| \leqslant 0{,}21$, функції $e^{z/2}$ в крузі $|z + 0{,}1 - 0{,}1i| \leqslant 0{,}415$ та функції $\sqrt[3]{z}$ в крузі $|z - 9 - 9i| \leqslant 0{,}15$.

В роботі [170] наведені результати інтерполяції функцій $2^x, e^x, \sqrt{x}$, де $x \in \mathcal{R} \subset \mathbb{R}$. В якості вузлів інтерполяції вибирали або корені ортогонального многочлена Чебишова 1–го роду, або точки рівномірного розбиття проміжку. Функція 2^x інтерполювалася на проміжку $[0, 3; 0{,}375]$ за своїми значеннями в 9 вузлах. Величини Δ_{max} та Λ були відповідно рівні $\Delta_{max} = 0{,}7776 \cdot 10^{-27}$, $\Lambda = 0{,}4684 \cdot 10^{-19}$, коли вибрали в якості вузлів корені многочлена Чебишова, та $\Delta_{max} = 0{,}5010 \cdot 10^{-26}$, $\Lambda = 0{,}3022 \cdot 10^{-18}$, коли за вузли інтерполяції вибрали точки рівномірного розбиття проміжку. Аналогічні результати отримані для функції e^x, коли $\mathcal{R} = [-0{,}575; -0{,}35]$. У випадку інтерполяції функції $\sqrt{x}$ на проміжку $\mathcal{R} = [2{,}0; 4{,}0]$, коли кількість вузлів інтерполяції $n = 19$, то значення вказаних величин були рівні: $\Delta_{max} = 0{,}6556 \cdot 10^{-26}, \Lambda = 0{,}8625 \cdot 10^{-24}$ для чебишовських вузлів, та $\Delta_{max} = 0{,}1231 \cdot 10^{-22}, \Lambda = 0{,}3619 \cdot 10^{-22}$ для випадку рівномірного розбиття. Отже і у випадку інтерполяції функції однієї дійсної змінної множина функцій, які задовольняють умови теореми, не є порожньою і запропонована оцінка ефективна.

Таблиця Б.2

Функція $\sqrt{z}$, круг $|z-1-i| \leqslant 0{,}45$

n	Δ_{max}	Λ	$\lvert\mathscr{Z}\rvert$
3	$0{,}20424740692079 \cdot 10^{-03}$	$0{,}49401978871986 \cdot 10^{-02}$	5.000.000
4	$0{,}18708360403455 \cdot 10^{-04}$	$0{,}20119692766161 \cdot 10^{-02}$	5.000.000
5	$0{,}15188733454712 \cdot 10^{-05}$	$0{,}82846176102738 \cdot 10^{-03}$	5.000.000
6	$0{,}14582257638627 \cdot 10^{-06}$	$0{,}35845956372346 \cdot 10^{-03}$	5.000.000
7	$0{,}12474490986563 \cdot 10^{-07}$	$0{,}16191429816717 \cdot 10^{-03}$	5.000.000
8	$0{,}11725050294986 \cdot 10^{-08}$	$0{,}75136357564407 \cdot 10^{-04}$	5.000.000
9	$0{,}10556070349955 \cdot 10^{-09}$	$0{,}35609548116056 \cdot 10^{-04}$	5.000.000
10	$0{,}96029732516597 \cdot 10^{-11}$	$0{,}17161197127386 \cdot 10^{-04}$	5.000.000
11	$0{,}87629431089762 \cdot 10^{-12}$	$0{,}83862460624301 \cdot 10^{-05}$	5.000.000
12	$0{,}79444493874921 \cdot 10^{-13}$	$0{,}41454382259295 \cdot 10^{-05}$	5.000.000
13	$0{,}72443938558083 \cdot 10^{-14}$	$0{,}20688653888044 \cdot 10^{-05}$	5.000.000
14	$0{,}65805163311872 \cdot 10^{-15}$	$0{,}10410025734645 \cdot 10^{-05}$	5.000.000
15	$0{,}59888275270696 \cdot 10^{-16}$	$0{,}52744221130968 \cdot 10^{-06}$	5.000.000
16	$0{,}54465171930508 \cdot 10^{-17}$	$0{,}26874095387596 \cdot 10^{-06}$	5.000.000
17	$0{,}49533807292922 \cdot 10^{-18}$	$0{,}13770768652294 \cdot 10^{-06}$	5.000.000
18	$0{,}45056995719634 \cdot 10^{-19}$	$0{,}70869341148258 \cdot 10^{-07}$	4.999.998
19	$0{,}40975434874151 \cdot 10^{-20}$	$0{,}36605548743295 \cdot 10^{-07}$	4.999.976
20	$0{,}37258486705425 \cdot 10^{-21}$	$0{,}18968201867128 \cdot 10^{-07}$	4.999.209

Б.2. Оцінки залишкового члена Т–ІЛД дійсної змінної

Розглянемо приклади, на яких проілюструємо теорему 2.9. Залишковий член (2.45) оцінимо згори величиною

$$\mathbf{M}^{(t)} = \frac{\max_{x_* \in X_{test}} \prod_{k=0}^{n} |x_* - x_k|}{(n+1)! \, \min_{x_* \in X_{test}} |Q_n^{(t)}(x_*)|} \, \bar{f}^* \, (b^*)^n \big(\kappa_{n+1}(\omega) +$$

$$+\sum_{m=1}^{l} \mathrm{C}_{n+1}^{m} \frac{1}{\beta^{2m}} \sum_{i=0}^{l-m} \frac{\omega^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n - 2(m+i) + j)\Big),$$

де

$$\bar{f}^* = \max_{0 \leqslant i \leqslant l} \max_{x_* \in X_{test}} |f^{(n+1-i)}(x_*)|, \tag{Б.3}$$

величини $l, b^*, \omega, \beta, \kappa_n(\omega)$ визначені в умові теореми 2.9, а

$$X_{test} = \{x_k^t \,:\, x_k^t \in \mathcal{R} \subset \mathbb{R},\ k = \overline{1, 5.000.000}\} \tag{Б.4}$$

— множина псевдовипадкових точок, на якій також обчислюється величина $\Delta_{max}^{(t)} = \max\limits_{x_* \in X_{test}} |f(x_*) - D^{(t)}(x_*)|$.

Приклад 3. Функція $\sqrt{x}$ інтерполюється на $\mathcal{R} = [2{,}0; 2{,}8]$. В якості інтерполяційних вузлів вибирали корені ортогонального многочлена Чебишова 1–го роду та точки рівномірного розбиття проміжку.

Таблиця Б.3

Функція $\sqrt{x}$, проміжок $[2{,}0; 2{,}8]$, чебишовські вузли

n	$\Delta_{max}^{(t)}$	$\mathbf{M}^{(t)}$
9	$0{,}218335014805222{\cdot}10^{-15}$	$0{,}390806006800361{\cdot}10^{-05}$
10	$0{,}498626824121908{\cdot}10^{-17}$	$0{,}245888253061112{\cdot}10^{-05}$
11	$0{,}113874744457319{\cdot}10^{-18}$	$0{,}161910381948751{\cdot}10^{-05}$
12	$0{,}260063092040203{\cdot}10^{-20}$	$0{,}111103537233609{\cdot}10^{-05}$
13	$0{,}593922197869133{\cdot}10^{-22}$	$0{,}791606625068744{\cdot}10^{-06}$
14	$0{,}135637545442410{\cdot}10^{-23}$	$0{,}583893334072485{\cdot}10^{-06}$
15	$0{,}309763196100051{\cdot}10^{-25}$	$0{,}444719800206469{\cdot}10^{-06}$
16	$0{,}707422957522598{\cdot}10^{-27}$	$0{,}348998862993809{\cdot}10^{-06}$
17	$0{,}161556633384923{\cdot}10^{-28}$	$0{,}281656088814590{\cdot}10^{-06}$

Значення величин $\Delta_{max}^{(t)}, \mathbf{M}^{(t)}$, коли за вузли вибрані корені многочлену Чебишова n–го порядку, де $n = \overline{9, 17}$, наведені в таб. Б.3.

Коли за інтерполяційні вузли вибрано точки рівномірного розбиття проміжку, то отримали значення величин $\Delta_{max}^{(t)}$, $\mathbf{M}^{(t)}$, які містяться в таб. Б.4

Таблиця Б.4

Функція $\sqrt{x}$, проміжок $[2{,}0; 2{,}8]$, рівномірне розбиття

n	$\Delta_{max}^{(t)}$	$\mathbf{M}^{(t)}$
9	$0{,}132737402554194 \cdot 10^{-14}$	$0{,}131083782600706 \cdot 10^{-03}$
10	$0{,}410692786322463 \cdot 10^{-16}$	$0{,}113517583764395 \cdot 10^{-03}$
11	$0{,}128136894706119 \cdot 10^{-17}$	$0{,}103454269980892 \cdot 10^{-03}$
12	$0{,}402536107348474 \cdot 10^{-19}$	$0{,}987233895227394 \cdot 10^{-04}$
13	$0{,}127178165657277 \cdot 10^{-20}$	$0{,}982199971349175 \cdot 10^{-04}$
14	$0{,}403751962398692 \cdot 10^{-22}$	$0{,}101524988660130 \cdot 10^{-03}$
15	$0{,}128709333674073 \cdot 10^{-23}$	$0{,}108700987230506 \cdot 10^{-03}$
16	$0{,}411772640943206 \cdot 10^{-25}$	$0{,}120248402372410 \cdot 10^{-03}$
17	$0{,}132133951253627 \cdot 10^{-26}$	$0{,}137126887023329 \cdot 10^{-03}$

Приклад 4. На проміжку $\mathcal{R} = [0{,}2; 0{,}5]$ інтерполювалася функція 2^x. Коли за вузли були вибрані корені многочлена Чебишова, то величини $\Delta_{max}^{(t)}$ та $\mathbf{M}^{(t)}$ при $n = \overline{6, 12}$ приймали значення, які вміщені в таб. Б.5.

Таблиця Б.5

Функція 2^x, проміжок $[0{,}2; 0{,}5]$, чебишовські вузли

n	$\Delta_{max}^{(t)}$	$\mathbf{M}^{(t)}$
6	$0{,}287980563477017 \cdot 10^{-13}$	$0{,}221371511065275 \cdot 10^{-04}$
7	$0{,}105528523371161 \cdot 10^{-15}$	$0{,}371163694252682 \cdot 10^{-04}$
8	$0{,}308816566046777 \cdot 10^{-18}$	$0{,}102975767813786 \cdot 10^{-04}$
9	$0{,}882549745238967 \cdot 10^{-21}$	$0{,}203296112049115 \cdot 10^{-04}$
10	$0{,}210741191752425 \cdot 10^{-23}$	$0{,}639118845329539 \cdot 10^{-05}$
11	$0{,}493640188500946 \cdot 10^{-26}$	$0{,}142392883262874 \cdot 10^{-04}$
12	$0{,}995628744050425 \cdot 10^{-29}$	$0{,}495684030441509 \cdot 10^{-05}$

В наступній таб. Б.6 наведені результати числових експериментів, коли в якості вузлів інтерполяції вибрали точки рівномірного розбиття проміжку.

Таблиця Б.6

Функція 2^x, проміжок $[0{,}2; 0{,}5]$, рівномірне розбиття

n	$\Delta_{max}^{(t)}$	$\mathbf{M}^{(t)}$
6	$0{,}798762417111186 \cdot 10^{-13}$	$0{,}173523491470610 \cdot 10^{-03}$
7	$0{,}381197361463531 \cdot 10^{-15}$	$0{,}267997226204995 \cdot 10^{-03}$
8	$0{,}147507773334470 \cdot 10^{-17}$	$0{,}100098000398309 \cdot 10^{-03}$
9	$0{,}565919758955225 \cdot 10^{-20}$	$0{,}183785254496833 \cdot 10^{-03}$
10	$0{,}183058388960875 \cdot 10^{-22}$	$0{,}798302982776845 \cdot 10^{-04}$
11	$0{,}586387861278633 \cdot 10^{-25}$	$0{,}166395182270903 \cdot 10^{-03}$
12	$0{,}162701020957878 \cdot 10^{-27}$	$0{,}814200943107928 \cdot 10^{-04}$

Із розглянутих ілюстративних прикладів випливає: а) максимальна абсолютна похибка $\Delta_{max}^{(t)}$ відхилення Т-ІЛД від інтерпольованої функції $f(x)$ на множині тестових псевдовипадкових точок X_{test} із зростанням кількості інтерполяційних вузлів зменшується як у випадку вузлів–коренів многочлену Чебишова, так і у випадку вузлів–точок рівномірного розбиття проміжку інтерполювання; б) величина $\mathbf{M}^{(t)}$ є верхньою оцінкою по модулю залишкового члена (2.45). В розглянутих випадках вказана величина не зростає.

Б.3. Порівняння якості інтерполяції функцій Т–ІЛД та многочленом у формі Ньютона

Нехай функція $f(z)$ визначена на компакті $\mathscr{X} \subset \mathbb{C}$. За значеннями функції в точках множини $\mathbf{Z}$ можна побудувати Т–ІЛД (1.25), коефіцієнти якого визначаються за рекурентним співвідношенням у вигляді ланцюгового дробу (2.33), або інтерполяційний многочлен у формі Ньютона (Н–ІМ) (1.19), коефіцієнти якого обчислюються за допомогою формул (1.18).

Таблиця Б.7

Функція $\sqrt{z}$, круг $|z - 2{,}5 - 2,5i| \leqslant 2$

n	$\Delta^{(t)}_{max}$	$\Delta^{(N)}_{max}$
17	$0{,}59916098170193 \cdot 10^{-12}$	$0{,}57666459752563 \cdot 10^{-05}$
18	$0{,}11758671384622 \cdot 10^{-12}$	$0{,}37326691393570 \cdot 10^{-05}$
19	$0{,}23080215969290 \cdot 10^{-13}$	$0{,}24276103494382 \cdot 10^{-05}$
20	$0{,}45316508101172 \cdot 10^{-14}$	$0{,}15850901239596 \cdot 10^{-05}$
21	$0{,}88945632075148 \cdot 10^{-15}$	$0{,}10392557756096 \cdot 10^{-05}$
22	$0{,}17461031760426 \cdot 10^{-15}$	$0{,}68386026532294 \cdot 10^{-06}$
23	$0{,}34276919433185 \cdot 10^{-16}$	$0{,}45133655691514 \cdot 10^{-06}$
24	$0{,}67285407823898 \cdot 10^{-17}$	$0{,}29868588576287 \cdot 10^{-06}$
25	$0{,}13219939972226 \cdot 10^{-17}$	$0{,}19816369331646 \cdot 10^{-06}$

Розглянемо декілька прикладів, на яких проілюструємо якість наближення функцій Т–ІЛД та Н–ІМ. Нехай Z_{test} — множина точок, яка визначена в (Б.2). Для кожного значення n обчислюються величини

$$\Delta^{(t)}_{max} = \max_{w \in Z_{test}} |f(w) - D^{(t)}_n(w)|, \qquad \Delta^{(N)}_{max} = \max_{w \in Z_{test}} |f(w) - N_n(w)|.$$

За вузли інтерполяції вибиралися точки, які визначенні в (Б.1). Обчислювальні експерименти здійснювалися, коли кількість вузлів $n = \overline{17, 25}$.

Приклад 5. В крузі $|z - 2{,}5 - 2,5i| \leqslant 2{,}0$ інтерполювалася функція $\sqrt{z}$. Із результатів числових експериментів, які вміщені в таб. Б.7, видно, що максимальна абсолютна похибка $\Delta^{(t)}_{max}$ Т–ІЛД значно менша за максимальну абсолютну похибку $\Delta^{(N)}_{max}$ Н–ІМ для кожного значення n. Із збільшенням кількості вузлів n величина $\Delta^{(t)}_{max}$ швидше спадає ніж $\Delta^{(N)}_{max}$.

Приклад 6. Функція $\sqrt[3]{z}$ інтерполювалася в крузі $|z - 4 - 4i| \leqslant 3$. В таб. Б.8 вміщено значення $\Delta^{(t)}_{max}$ та $\Delta^{(N)}_{max}$ при відповідних значеннях n. Із наведених результатів видно, що, як і в попередньому випадку, абсолютна похибка Т–ІЛД менша за абсолютну похибку Н–ІМ для кожного значення

Таблиця Б.8

Функція $\sqrt[3]{z}$, круг $|z-4-4i| \leqslant 3$

n	$\Delta_{max}^{(t)}$	$\Delta_{max}^{(N)}$
17	$0{,}10084592655533 \cdot 10^{-12}$	$0{,}23669839263024 \cdot 10^{-05}$
18	$0{,}17735509945137 \cdot 10^{-13}$	$0{,}14465228532796 \cdot 10^{-05}$
19	$0{,}31980420802385 \cdot 10^{-14}$	$0{,}88770223764055 \cdot 10^{-06}$
20	$0{,}56335774502611 \cdot 10^{-15}$	$0{,}54665362569632 \cdot 10^{-06}$
21	$0{,}10144875544337 \cdot 10^{-15}$	$0{,}33790497372895 \cdot 10^{-06}$
22	$0{,}17886015112772 \cdot 10^{-16}$	$0{,}20952934586862 \cdot 10^{-06}$
23	$0{,}32184719404572 \cdot 10^{-17}$	$0{,}13026442465334 \cdot 10^{-06}$
24	$0{,}56702694827138 \cdot 10^{-18}$	$0{,}81179055536044 \cdot 10^{-07}$
25	$0{,}10498185155616 \cdot 10^{-18}$	$0{,}50703176758124 \cdot 10^{-07}$

Таблиця Б.9

Функція $\ln(1+z)$, круг $|z-2-3i| \leqslant 1{,}5$

n	$\Delta_{max}^{(t)}$	$\Delta_{max}^{(N)}$
17	$0{,}15646633129240 \cdot 10^{-16}$	$0{,}87959744605954 \cdot 10^{-08}$
18	$0{,}15473158786072 \cdot 10^{-17}$	$0{,}36009798267715 \cdot 10^{-08}$
19	$0{,}16692664104132 \cdot 10^{-18}$	$0{,}14784002464624 \cdot 10^{-08}$
20	$0{,}16575025442223 \cdot 10^{-19}$	$0{,}60867949712087 \cdot 10^{-09}$
21	$0{,}17806295068650 \cdot 10^{-20}$	$0{,}25132241136827 \cdot 10^{-09}$
22	$0{,}17830451265940 \cdot 10^{-21}$	$0{,}10398435063492 \cdot 10^{-09}$
23	$0{,}12897171668591 \cdot 10^{-22}$	$0{,}43104560872374 \cdot 10^{-10}$
24	$0{,}29316046894571 \cdot 10^{-22}$	$0{,}17899067774994 \cdot 10^{-10}$
25	$0{,}14727457947300 \cdot 10^{-22}$	$0{,}74460102817095 \cdot 10^{-11}$

n. Якщо кількість вузлів збільшується, то абсолютна похибка $\Delta_{max}^{(t)}$ зменшується швидше ніж абсолютна похибка $\Delta_{max}^{(N)}$.

Приклад 7. В крузі $|z-2-3i| \leqslant 1{,}5$ функція $\ln(1+z)$ інтерполювалася Т–ІЛД та Н–ІМ. Результати обчислювальних експериментів внесено до таб. Б.9. Легко бачити, що $\Delta_{max}^{(t)}$ зменшується швидше за $\Delta_{max}^{(N)}$. Коли $n = \overline{17, 23}$, то збільшення кількості вузлів інтерполяції на одиницю приводить до зменшення абсолютної похибки $\Delta_{max}^{(t)}$ на один порядок. Абсолютна похибка $\Delta_{max}^{(N)}$ Н–ІМ спадає, але повільніше.

Таблиця Б.10

Функція e^z, круг $|z + 1 + i| \leqslant 2$

n	$\Delta_{max}^{(t)}$	$\Delta_{max}^{(N)}$
17	$0{,}29800070970315 \cdot 10^{-13}$	$0{,}29160593732950 \cdot 10^{-09}$
18	$0{,}19898423274592 \cdot 10^{-14}$	$0{,}36130527714593 \cdot 10^{-10}$
19	$0{,}11542327593390 \cdot 10^{-15}$	$0{,}42541022209807 \cdot 10^{-11}$
20	$0{,}69192066171231 \cdot 10^{-17}$	$0{,}47718813801249 \cdot 10^{-12}$
21	$0{,}36567409764456 \cdot 10^{-18}$	$0{,}51119162884428 \cdot 10^{-13}$
22	$0{,}19884772333480 \cdot 10^{-19}$	$0{,}52392005706512 \cdot 10^{-14}$
23	$0{,}97102704491442 \cdot 10^{-21}$	$0{,}51468886514544 \cdot 10^{-15}$
24	$0{,}47703319626552 \cdot 10^{-22}$	$0{,}48547696398192 \cdot 10^{-16}$
25	$0{,}51393505394086 \cdot 10^{-22}$	$0{,}44038999723794 \cdot 10^{-17}$

Приклад 8. Коли в крузі $|z + 1 + i| \leqslant 2$ здійснювалася інтерполяція функції e^z. В цьому випадку і Т–ІЛД, і Н–ІМ з високою точністю наближали розглядувану функцію. Але, в той же час, із таб. Б.10 випливає, що абсолютна похибка $\Delta_{max}^{(t)}$ менша за $\Delta_{max}^{(N)}$ при всіх значеннях $n = \overline{17, 25}$.

Приклад 9. В таб. Б.11 наведені результати інтерполяції функції $\operatorname{tg} z$ в одиничному крузі $|z| \leqslant 1$. І в цьому випадку Н–ІМ поступається Т–ІЛД.

З розглянутих прикладів бачимо, що якщо інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле та інтерполяційний многочлен у формі Ньютона визначенні на одній і тій же множині інтерполяційних вузлів, то Т–ІЛД краще наближає функцію ніж Н–ІМ.

Таблиця Б.11

Функція $\mathrm{tg}(z)$, **круг** $|z| \leqslant 1$

n	$\Delta_{max}^{(t)}$	$\Delta_{max}^{(N)}$
17	$0{,}11641772522439{\cdot}10^{-14}$	$0{,}79217006617017{\cdot}10^{-02}$
18	$0{,}58231357263854{\cdot}10^{-15}$	$0{,}37779506823677{\cdot}10^{-02}$
19	$0{,}18455390317632{\cdot}10^{-15}$	$0{,}46762011809707{\cdot}10^{-02}$
20	$0{,}20158914324681{\cdot}10^{-17}$	$0{,}20807947556447{\cdot}10^{-02}$
21	$0{,}13901503669157{\cdot}10^{-19}$	$0{,}26732568433011{\cdot}10^{-02}$
22	$0{,}57677998726839{\cdot}10^{-20}$	$0{,}12368741739831{\cdot}10^{-02}$
23	$0{,}15503881033243{\cdot}10^{-20}$	$0{,}14798512206487{\cdot}10^{-02}$
24	$0{,}16994864532922{\cdot}10^{-22}$	$0{,}77723005885430{\cdot}10^{-03}$
25	$0{,}12414318367813{\cdot}10^{-22}$	$0{,}79362757391884{\cdot}10^{-03}$

Б.4. Інтерполяція функцій С–ІЛД

Розглянемо приклади, які будуть ілюструвати якість наближення функції комплексної змінної С–ІЛД (2.63), та ефективність оцінки (2.69) теореми 2.12. Як і у випадку наближення функції Т–ІЛД (1.25), інтерполювання здійснюється в крузі, де за вузли інтерполяції вибрані точки вигляду (Б.1), множина тестових точок Z_{test} визначена в (Б.2).

В теоремі 2.12 робилися припущення: **(A)** всі коефіцієнти С–ІЛД відмінні від нуля і виконується умова типу Пейдона–Уолла (2.67); **(B)** знайдеться множина точок $\mathscr{X} \subset \mathscr{Z} \backslash \mathbf{Z}$, що для довільного $z_* \in \mathscr{X}$ виконуються умови (2.68). Тоді має місце оцінка (2.69).

На множині тестових точок Z_{test} обчислювалося значення

$$\Delta_{max} = \max_{w \in Z_{test}} |f(w) - D_n^{(c)}(w)|, \Lambda = \frac{\max\limits_{w \in Z_{test}} |v_{n+1}(w)(w - z_n)| \prod\limits_{i=1}^{n} |a_i(w - z_{i-1})|}{\Omega_n(t) \cdot \Omega_{n+1}(t)},$$

де величина $\Omega_n(t)$ визначена в (2.17).

Результати числових експериментів розміщено в таблицях. В першому

Таблиця Б.12

Функція 2^z, круг $|z + 2 - 2i| \leqslant 0{,}6$.

n	t	Δ_{max}	Λ	$\|\mathscr{Z}\|$
6	0,4593	$0{,}16946502465 \cdot 10^{-07}$	$0{,}47177921505 \cdot 10^{-07}$	5.000.000
7	0,4091	$0{,}58845843623 \cdot 10^{-09}$	$0{,}15127857216 \cdot 10^{-08}$	5.000.000
8	0,3855	$0{,}16478565242 \cdot 10^{-10}$	$0{,}38953825362 \cdot 10^{-10}$	5.000.000
9	0,3704	$0{,}44534066572 \cdot 10^{-12}$	$0{,}10101353789 \cdot 10^{-11}$	5.000.000
10	0,3598	$0{,}10150154223 \cdot 10^{-13}$	$0{,}21968374656 \cdot 10^{-13}$	5.000.000
11	0,3519	$0{,}22452837183 \cdot 10^{-15}$	$0{,}47496395665 \cdot 10^{-15}$	5.000.000
12	0,3458	$0{,}43166667622 \cdot 10^{-17}$	$0{,}88619791995 \cdot 10^{-17}$	5.000.000
13	0,3409	$0{,}80839795443 \cdot 10^{-19}$	$0{,}16362952448 \cdot 10^{-18}$	5.000.000
14	0,3369	$0{,}13442156070 \cdot 10^{-20}$	$0{,}26654226485 \cdot 10^{-20}$	5.000.000
15	0,4716	$0{,}21829356087 \cdot 10^{-22}$	$0{,}65630543843 \cdot 10^{-22}$	4.999.995
16	0,4982	$0{,}32006796594 \cdot 10^{-24}$	$0{,}99225369627 \cdot 10^{-24}$	4.999.431
17	0,4999	$0{,}27344833331 \cdot 10^{-26}$	$0{,}10294311739 \cdot 10^{-25}$	4.701.789

стовпчику таблиці вказується кількість інтерполяційних вузлів n, в другому — максимальне значення t в умові типу Пейдона–Уолла (2.67), при якому вказана умова виконується для всіх коефіцієнтів С–ІЛД (2.63) для заданого значення n, третій та четвертий стовпці таблиці, відповідно, містять значення Δ_{max} та Λ, в п'ятому — кількість точок множини Z_{test}, в яких має місце умова (2.68), тобто потужність множини $|\mathscr{Z}|$.

Приклад 10. Функції 2^z інтерполювалася в крузі $|z + 2 - 2i| \leqslant 0{,}6$. Результати обчислень вміщено в табл. Б.12. Як видно із даних таблиці, величина Λ добре наближає значення Δ_{max} і спадає із збільшенням кількості інтерполяційних вузлів n. При цьому, швидкість спадання Λ при зростанні n має той же порядок, що і швидкість спадання Δ_{max}. Для розглянутих значень $n = \overline{6, 17}$ всі коефіцієнти С–ІЛД задовольняють умову типу Пейдона–Уолла (2.67). Коли $n = \overline{6, 14}$, то кількість тестових точок, в яких умова

Таблиця Б.13

Функція $\ln(z+1)$, **круг** $|z-0{,}95-i| \leqslant 0{,}55$.

n	t	Δ_{max}	Λ	$\lvert\mathscr{Z}\rvert$
6	0,4096	$0{,}59466549311{\cdot}10^{-07}$	$0{,}15153706605{\cdot}10^{-06}$	5.000.000
7	0,4112	$0{,}47955001391{\cdot}10^{-08}$	$0{,}13056068975{\cdot}10^{-07}$	5.000.000
8	0,4131	$0{,}29728836995{\cdot}10^{-09}$	$0{,}86261710520{\cdot}10^{-09}$	5.000.000
9	0,4149	$0{,}22982533273{\cdot}10^{-10}$	$0{,}71851688775{\cdot}10^{-10}$	5.000.000
10	0,4165	$0{,}14672695945{\cdot}10^{-11}$	$0{,}48380650264{\cdot}10^{-11}$	5.000.000
11	0,4180	$0{,}11093738818{\cdot}10^{-12}$	$0{,}39460403534{\cdot}10^{-12}$	5.000.000
12	0,4193	$0{,}71960558515{\cdot}10^{-14}$	$0{,}26904124084{\cdot}10^{-13}$	5.000.000
13	0,4204	$0{,}53697928706{\cdot}10^{-15}$	$0{,}21612411463{\cdot}10^{-14}$	5.000.000
14	0,4215	$0{,}35194574671{\cdot}10^{-16}$	$0{,}14881600251{\cdot}10^{-15}$	5.000.000
15	0,4224	$0{,}26025047003{\cdot}10^{-17}$	$0{,}11823926008{\cdot}10^{-16}$	5.000.000
16	0,4232	$0{,}17185936558{\cdot}10^{-18}$	$0{,}82064430968{\cdot}10^{-18}$	5.000.000
17	0,4239	$0{,}12631220507{\cdot}10^{-19}$	$0{,}64636054350{\cdot}10^{-19}$	5.000.000
18	0,4738	$0{,}83918170992{\cdot}10^{-21}$	$0{,}52485805519{\cdot}10^{-20}$	4.999.977
19	0,4961	$0{,}61337488463{\cdot}10^{-22}$	$0{,}42425972507{\cdot}10^{-21}$	4.999.127

(2.68) має місце, повністю вичерпує множину Z_{test}, тобто $|\mathscr{Z}| = |Z_{test}|$. При $n = 15, 16, 17$ кількість точок, в яких умова (2.68) не виконується є незначною.

Приклад 11. Функція $\ln(z+1)$ інтерполювалася в $|z-0{,}95-i| \leqslant 0{,}55$. В табл. Б.13 вміщено результати обчислень. Із результатів таблиці видно, що всі коефіцієнти С–ІЛД задовольняють умови типу Пейдона–Уолла (2.67) при відповідних значення t, коли кількість вузлів інтерполяції $n = \overline{6, 19}$. Що стосується виконання умови (2.68), то вона має місце у всіх точках множини Z_{test}, коли $n = \overline{6, 17}$ і майже у всіх точках вказаної множини, коли $n = 18, 19$. Величина Λ, як і в попередньому випадну, має той самий порядок, що і максимальна похибка С–ІЛД на множині Z_{test}.

Б.5. Оцінка залишкового члена С–ІЛД дійсної змінної

Розглянемо приклади, щоб проілюструвати якість оцінки теореми 2.14. Оцінимо праву частину нерівності (2.70) величиною

$$\mathbf{M}^{(c)} = \frac{\bar{f}^* \max\limits_{x_* \in X_{test}} \prod\limits_{k=0}^{n} |x - x_k|}{(n+1)! \min\limits_{x_* \in X_{test}} |Q_n^{(c)}(x)|} \Big(\kappa_{n+1}(\rho) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{l} \mathrm{C}_{n+1}^{m} (a^*)^m \sum_{i=0}^{l-m} \frac{\rho^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n - 2(m+i) + j) \Big),$$

де $\bar{f}^*$ визначена в (Б.3), l, a^*, ρ — в умові теореми 2.14, $\kappa_n(\rho)$ — в (2.12),

Таблиця Б.14

Функція $\operatorname{sh} x$, **проміжок** $[0{,}0; 1{,}5]$, **чебишовські вузли**

n	$\Delta_{max}^{(c)}$	$\mathbf{M}^{(c)}$
15	$0{,}205843133715905 \cdot 10^{-19}$	$0{,}893380410772984 \cdot 10^{-08}$
16	$0{,}108103127101974 \cdot 10^{-20}$	$0{,}199672084724850 \cdot 10^{-08}$
17	$0{,}290692725420541 \cdot 10^{-23}$	$0{,}368226505517605 \cdot 10^{-09}$
18	$0{,}395908102492182 \cdot 10^{-25}$	$0{,}185294243966280 \cdot 10^{-09}$
20	$0{,}112342250843586 \cdot 10^{-27}$	$0{,}204516431027440 \cdot 10^{-10}$
21	$0{,}242281987003914 \cdot 10^{-30}$	$0{,}448663155271951 \cdot 10^{-12}$
22	$0{,}341852565128734 \cdot 10^{-32}$	$0{,}822454946387849 \cdot 10^{-13}$
23	$0{,}950927910041198 \cdot 10^{-33}$	$0{,}135514150057013 \cdot 10^{-13}$
24	$0{,}116919370110188 \cdot 10^{-32}$	$0{,}121351100526111 \cdot 10^{-15}$

X_{test} — множина тестових точок (Б.4) на $\mathcal{R}$. Також обчислювалося відхилення С–ІЛД від функції $f(x)$: $\Delta_{max}^{(c)} = \max\limits_{x_* \in X_{test}} |f(x_*) - D_n^{(c)}(x_*)|$.

Приклад 12. Функція $\operatorname{sh} x$ інтерполювалася на $\mathcal{R} = [0{,}0; 1{,}5]$. За вузли інтерполяції вибиралися корені многочлена Чебишова 1–го роду. Коли кількість вузлів $n = \overline{15, 24}$, то величини $\mathbf{M}^{(c)}$ та $\Delta_{max}^{(c)}$ набували значень, які наведені в таб. Б.14.

Таблиця Б.15

Функція $\operatorname{sh} x$**, проміжок** $[0{,}0; 1{,}5]$**, рівномірне розбиття**

n	$\Delta_{max}^{(c)}$	$\mathbf{M}^{(c)}$
15	$0{,}905380664365587 \cdot 10^{-18}$	$0{,}171895055094336 \cdot 10^{-04}$
16	$0{,}668431367106940 \cdot 10^{-19}$	$0{,}900273390076452 \cdot 10^{-05}$
17	$0{,}252178425787366 \cdot 10^{-21}$	$0{,}382192301183202 \cdot 10^{-05}$
18	$0{,}484728773598489 \cdot 10^{-23}$	$0{,}201420107259910 \cdot 10^{-05}$
19	$0{,}454149983378533 \cdot 10^{-24}$	$0{,}867826492271729 \cdot 10^{-06}$
20	$0{,}275701102295545 \cdot 10^{-25}$	$0{,}459705786079421 \cdot 10^{-06}$
21	$0{,}849731847043315 \cdot 10^{-28}$	$0{,}200464047002688 \cdot 10^{-06}$
22	$0{,}197116522395603 \cdot 10^{-29}$	$0{,}106646238150485 \cdot 10^{-06}$
23	$0{,}875332150458461 \cdot 10^{-30}$	$0{,}469726545539129 \cdot 10^{-07}$
24	$0{,}930224933511013 \cdot 10^{-27}$	$0{,}224962358404409 \cdot 10^{-07}$

Таблиця Б.16

Функція $\ln(x+1)$**, проміжок** $[0{,}5; 1{,}4]$**, чебишовські вузли**

n	$\Delta_{max}^{(c)}$	$\mathbf{M}^{(c)}$
14	$0{,}705446199460339 \cdot 10^{-21}$	$0{,}591882476669933 \cdot 10^{-06}$
15	$0{,}245929463745613 \cdot 10^{-22}$	$0{,}339885145570138 \cdot 10^{-06}$
16	$0{,}767952639821750 \cdot 10^{-24}$	$0{,}201739265096558 \cdot 10^{-06}$
17	$0{,}265974090585741 \cdot 10^{-25}$	$0{,}123071180055788 \cdot 10^{-06}$
18	$0{,}835303165085954 \cdot 10^{-27}$	$0{,}772597942515820 \cdot 10^{-07}$
19	$0{,}287802304204479 \cdot 10^{-28}$	$0{,}497284371996144 \cdot 10^{-07}$
20	$0{,}908027820529972 \cdot 10^{-30}$	$0{,}328284494736389 \cdot 10^{-07}$
21	$0{,}312963615962926 \cdot 10^{-31}$	$0{,}221728028582911 \cdot 10^{-07}$

Коли за вузли інтерполяції були вибрані точки рівномірного розбиття проміжку $\mathcal{R}$, то величини приймали значення, які містяться в таб. Б.15.

Приклад 13. На $\mathcal{R} = [0{,}5; 1{,}4]$ інтерполюється функція $\ln(x+1)$. Аналогічно попередньому випадку, значення величин $\Delta^{(c)}_{max}$ та $\mathbf{M}^{(c)}$ для чебишовських вузлів наведені в таб. Б.16. Значення вказаних величин у випадку рівномірного розбиття проміжку вміщено в таб. Б.17.

Із розглянутих прикладів можна зробити наступні висновки: а) Величина $\mathbf{M}^{(c)}$, як верхня оцінка правої частини нерівності (2.70), із зростанням кількості інтерполяційних вузлів n спадає як у випадку, коли за вузли вибрано корені чебишовського многочлена, так і у випадку, коли вузлами є точки рівномірного розбиття проміжку $\mathcal{R}$.

Таблиця Б.17

Функція $\ln(x+1)$, **проміжок** $[0{,}5; 1{,}4]$, **рівномірне розбиття**

n	$\Delta^{(c)}_{max}$	$\mathbf{M}^{(c)}$
14	$0{,}202278243182338{\cdot}10^{-19}$	$0{,}526320403732434{\cdot}10^{-03}$
15	$0{,}984340515578587{\cdot}10^{-21}$	$0{,}514249614274115{\cdot}10^{-03}$
16	$0{,}430371042530409{\cdot}10^{-22}$	$0{,}526337105161653{\cdot}10^{-03}$
17	$0{,}209419734339272{\cdot}10^{-23}$	$0{,}552365472233140{\cdot}10^{-03}$
18	$0{,}926238118896210{\cdot}10^{-25}$	$0{,}602076779895122{\cdot}10^{-03}$
19	$0{,}450696404454107{\cdot}10^{-26}$	$0{,}672183923785674{\cdot}10^{-03}$
20	$0{,}199908205998241{\cdot}10^{-27}$	$0{,}774847842748182{\cdot}10^{-03}$
21	$0{,}983846867615637{\cdot}10^{-29}$	$0{,}913633106666807{\cdot}10^{-03}$

б) Побудовані C–ІЛД з високою точністю наближають розглянуті функції на проміжках інтерполювання. Максимальна абсолютна похибка $\Delta^{(c)}_{max}$ відхилення C–ІЛД від функції $f(x)$ на множині X_{test} спадає із зростанням кількості інтерполяційних вузлів n.

Б.6. Інтерполяція функцій T–КІЛД

Розглянемо приклади, які проілюструють якість наближення функцій комплексної змінної T–КІЛД (3.15) та ефективність оцінки теореми 3.4.

В теоремі зроблені припущення: **(A)** всі коефіцієнти Т–КІЛД (3.15) задовольняють умову типу Слєшинського–Прінґсгейма (3.16); **(B)** існує множина точок $\mathscr{Z} \subset \mathcal{Z}\backslash\mathbf{Z}$, що для довільної точки $z_* \in \mathscr{Z}$ виконується умова (3.17). Тоді на множині $\mathscr{Z}$ має місце оцінка залишкового члена (3.18). Покажемо, що знайдуться такі функції та області, що теорема буде виконуватися.

Таблиця Б.18

Функція $w = 2^z$, **круг** $|z - 0{,}5| \leqslant 0{,}2$

n	Δ_{max}	Λ	$\lvert\mathscr{Z}\rvert$
3	$0{,}12157246737917{\cdot}10^{-04}$	$0{,}22573797107217{\cdot}10^{-01}$	5.000.000
4	$0{,}20861383051149{\cdot}10^{-06}$	$0{,}20128131357218{\cdot}10^{-03}$	5.000.000
5	$0{,}34565406050063{\cdot}10^{-08}$	$0{,}11104949015821{\cdot}10^{-04}$	5.000.000
6	$0{,}40266730002631{\cdot}10^{-10}$	$0{,}76074391380699{\cdot}10^{-06}$	5.000.000
7	$0{,}47373950709607{\cdot}10^{-12}$	$0{,}46086642098240{\cdot}10^{-07}$	5.000.000
8	$0{,}43070378174100{\cdot}10^{-14}$	$0{,}38914932379958{\cdot}10^{-08}$	5.000.000
9	$0{,}39402512314660{\cdot}10^{-16}$	$0{,}34711768224429{\cdot}10^{-09}$	5.000.000
10	$0{,}29275651341802{\cdot}10^{-18}$	$0{,}32655499466488{\cdot}10^{-10}$	5.000.000
11	$0{,}21904367141294{\cdot}10^{-20}$	$0{,}33640024697719{\cdot}10^{-11}$	4.999.998
12	$0{,}13773196877995{\cdot}10^{-22}$	$0{,}21733542333297{\cdot}10^{-12}$	5.000.000
13	$0{,}87234465786788{\cdot}10^{-25}$	$0{,}96514486494471{\cdot}10^{-15}$	4.725.325
14	$0{,}57391868558964{\cdot}10^{-27}$	$0{,}28975436256448{\cdot}10^{-17}$	4.859.267

Нехай компакт $\mathcal{Z} = \{z : |z - z_0| \leqslant R\}$. За інтерполяційні вузли вибираємо точки вигляду (Б.1), перевірка умов здійснюється на множині тестових псевдовипадкових точок Z_{test} (Б.2). Обчислюються величини

$$\Delta_{max} = \max_{w \in Z_{test}} |f(w) - \tilde{D}_n^{(t)}(w)|, \quad \Lambda = \frac{\max_{w \in Z_{test}} \prod_{i=0}^{n} |w - z_i|}{|\Upsilon_n|\,|\Upsilon_{n+1}|},$$

де $\Upsilon_{n+1}, \Upsilon_n$ визначені в умові теореми 3.4.

Приклад 14. Задано круг $|z-0{,}5| \leqslant 0{,}2$, в якому інтерполюється функція 2^z. Результати чисельних експериментів розміщені таблиці Б.18. Коефіцієнти побудованих Т–КІЛД задовольняли умову типу Слєшинського–Прінґсгейма (3.16), коли кількість вузлів $n = \overline{3,14}$. Для $n = \overline{3,10}, 12$, то умова (3.17) теореми виконується в кожній точці множини Z_{test}, тобто для цих значень $|\mathscr{Z}| = |Z_{test}|$. Коли $n = 11$ тільки в 2 точках із 5.000.000 тестових точок умова не має місця. При $n = 13, 14$ тестових точок, в яких умова (3.17) виконується, значно більше ніж кількість точок, де умова не має місця.

Що стосується якості наближення даної функції Т-КІЛД, то із результатів таблиці Б.18 видно, що величини Δ_{max} та Λ спадають із збільшенням кількості вузлів інтерполяції n. Водночас Λ спадає повільніше ніж Δ_{max}.

Таблиця Б.19

Функція $e^{z/5}$, **круг** $|z+2-i| \leqslant 0{,}95$

n	Δ_{max}	Λ	$\lvert\mathscr{Z}\rvert$
3	$0,20585631235905{\cdot}10^{-04}$	$0,38394545504426{\cdot}10^{-02}$	5.000.000
4	$0,47997876962637{\cdot}10^{-06}$	$0,38267216055316{\cdot}10^{-03}$	5.000.000
5	$0,10993330456451{\cdot}10^{-07}$	$0,90842501780627{\cdot}10^{-05}$	5.000.000
6	$0,17546033706205{\cdot}10^{-09}$	$0,11284530904017{\cdot}10^{-05}$	5.000.000
7	$0,28401985631361{\cdot}10^{-11}$	$0,14093417335907{\cdot}10^{-06}$	5.000.000
8	$0,35352660056395{\cdot}10^{-13}$	$0,21133362758702{\cdot}10^{-07}$	5.000.000
9	$0,44464269310929{\cdot}10^{-15}$	$0,34275059101872{\cdot}10^{-08}$	5.000.000
10	$0,45232856661003{\cdot}10^{-17}$	$0,58259121262663{\cdot}10^{-09}$	5.000.000
11	$0,46493622931311{\cdot}10^{-19}$	$0,10963867884282{\cdot}10^{-09}$	5.000.000
12	$0,40018231338329{\cdot}10^{-21}$	$0,17994515421947{\cdot}10^{-10}$	5.000.000
13	$0,34764524217517{\cdot}10^{-23}$	$0,95888621709742{\cdot}10^{-12}$	4.999.389
14	$0,25927271734135{\cdot}10^{-25}$	$0,39991694678455{\cdot}10^{-14}$	4.998.729

Приклад 15. Функція $e^{z/5}$ інтерполювалася в крузі $|z+2-i| \leqslant 0{,}95$.

Результати отриманих чисельних експериментів вміщено в табл. Б.19. Коли кількість вузлів $n = \overline{3,14}$, то всі коефіцієнти Т–КІЛД задовольняли умову (3.16). Що стосується умови (3.17), то вона виконувалася у всіх тестових точках множини Z_{test}, коли кількість вузлів $n = \overline{3,12}$, або в переважній кількості точок множини Z_{test}, коли $n = 13, 14$. Як і в попередньому випадку, величини Δ_{max} та Λ спадають із різною швидкістю при зростанні кількості інтерполяційних вузлів.

Розглянуті приклади дозволяють стверджувати, що існують такі функції, для яких теорема 3.4 має місце і оцінка (3.18) ефективна. Т–КІЛД наближає функції з високою точністю. Абсолютна похибка Δ_{max} зменшується із збільшенням кількості вузлів інтерполяції.

Б.7. Оцінка залишкового члена Т–КІЛД дійсної змінної

Розглянемо приклад, щоб проілюструвати ефективність оцінки (3.28) теореми 3.7. Оцінимо зверху праву частину (3.28) величиною

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(t)} = \frac{\bar{f}^* \, |B_0^{[n]}| \, \max_{x_* \in X_{test}} \prod_{k=0}^{n} |x_* - x_k|}{(n+1)! \, \min_{x_* \in X_{test}} |\tilde{Q}_n^{(t)}(x_*)|} \Bigg(\kappa_{n+2}(\omega) + $$
$$+ \sum_{m=1}^{r} \mathrm{C}_{n+1}^{m} \frac{1}{(d_*)^{2m}} \sum_{i=0}^{r-m} \frac{\omega^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n - 2(m+i) + j + 1) \Bigg) ,$$

де $B_0^{[n]}, d_*, \omega, r$ визначені в умові теореми 3.7, а $\kappa_n(\omega)$ визначена в (2.12),

$$\bar{f}^* = \max_{0 \leqslant i \leqslant r} \max_{x_* \in X_{test}} |f^{(n+1-i)}(x_*)|, \tag{Б.5}$$

X_{test} — множина точок (Б.4). Також обчислимо відхилення Т–КІЛД від функції на множині X_{test}: $\tilde{\Delta}_{max}^{(t)} = \max_{x_* \in X_{test}} |f(x_*) - \tilde{D}_n^{(t)}(x_*)|$

Приклад 16. Інтерполювалася функція e^x на проміжку $\mathcal{R} = [0{,}2; 0{,}6]$. Коли за вузли інтерполяції були вибрані корені многочлену Чебишова, то величини $\tilde{\mathbf{M}}^{(t)}$ та $\tilde{\Delta}_{max}^{(t)}$ приймали значенням, які містяться в таб. Б.20. Коли

Таблиця Б.20

Функція e^x, проміжок $[0{,}2; 0{,}6]$, чебишовські вузли

n	$\tilde{\Delta}^{(t)}_{max}$	$\tilde{\mathbf{M}}^{(t)}$
4	$0{,}506735143121308\cdot10^{-07}$	$0{,}322279550247230\cdot10^{-02}$
5	$0{,}524282698681820\cdot10^{-09}$	$0{,}388485523369637\cdot10^{-02}$
6	$0{,}361796410664654\cdot10^{-11}$	$0{,}395844450116440\cdot10^{-03}$
7	$0{,}265042714044567\cdot10^{-13}$	$0{,}520967720184619\cdot10^{-03}$
8	$0{,}143538015951060\cdot10^{-15}$	$0{,}500123199713950\cdot10^{-04}$
9	$0{,}813645287823794\cdot10^{-18}$	$0{,}706599869224066\cdot10^{-04}$
10	$0{,}362414944652722\cdot10^{-20}$	$0{,}642340975498780\cdot10^{-05}$
11	$0{,}167512179853568\cdot10^{-22}$	$0{,}965044261483027\cdot10^{-05}$
12	$0{,}633516304945671\cdot10^{-25}$	$0{,}834054121191504\cdot10^{-06}$
13	$0{,}247170960167741\cdot10^{-27}$	$0{,}132378206891270\cdot10^{-05}$
14	$0{,}812357250542536\cdot10^{-30}$	$0{,}109147323993757\cdot10^{-06}$
15	$0{,}308148791101958\cdot10^{-32}$	$0{,}182084244059521\cdot10^{-06}$
16	$0{,}385185988877447\cdot10^{-33}$	$0{,}140900250518299\cdot10^{-07}$
17	$0{,}577778983316171\cdot10^{-33}$	$0{,}990073741929012\cdot10^{-08}$

за вузли інтерполяції були вибрані точки рівномірного розбиття проміжку, то отримали результати, які наведені в таб. Б.21.

Оскільки $\tilde{\mathbf{M}}^{(t)}$ — оцінка зверху правої частини нерівності (3.28) і ця величина така, що із збільшенням кількості вузлів вона спадає, то із результатів таблиць випливає, що оцінка (3.28) в теоремі 3.7 ефективна. Максимальне відхилення $\tilde{\Delta}^{(t)}_{max}$ на множині тестових точок X_{test} також мале і із збільшенням кількості вузлів n зменшується, що вказує на точність наближення розглянутих функції Т–КІЛД.

Таблиця Б.21

Функція e^x, проміжок $[0{,}2; 0{,}6]$, рівномірне розбиття

n	$\tilde{\Delta}^{(t)}_{max}$	$\tilde{\mathbf{M}}^{(t)}$
3	$0{,}534761528091576{\cdot}10^{-05}$	$0{,}295350257125077{\cdot}10^{-01}$
4	$0{,}887702005230013{\cdot}10^{-07}$	$0{,}107149133600943{\cdot}10^{-01}$
5	$0{,}112536975035189{\cdot}10^{-08}$	$0{,}855644846355427{\cdot}10^{-02}$
6	$0{,}993180289618612{\cdot}10^{-11}$	$0{,}916310261802120{\cdot}10^{-03}$
7	$0{,}946083045011798{\cdot}10^{-13}$	$0{,}889368609510347{\cdot}10^{-03}$
8	$0{,}680696572031714{\cdot}10^{-15}$	$0{,}909570180216793{\cdot}10^{-04}$
9	$0{,}517478516025926{\cdot}10^{-17}$	$0{,}101188595714279{\cdot}10^{-03}$
10	$0{,}313097555746306{\cdot}10^{-19}$	$0{,}977841055820027{\cdot}10^{-05}$
11	$0{,}197769817432351{\cdot}10^{-21}$	$0{,}120987272743985{\cdot}10^{-04}$
12	$0{,}103078573294638{\cdot}10^{-23}$	$0{,}110426737229550{\cdot}10^{-05}$
13	$0{,}556574629443563{\cdot}10^{-26}$	$0{,}149145056433402{\cdot}10^{-05}$
14	$0{,}254478901341719{\cdot}10^{-28}$	$0{,}128902881936347{\cdot}10^{-06}$
15	$0{,}127303969323996{\cdot}10^{-30}$	$0{,}187597945762688{\cdot}10^{-06}$
16	$0{,}285037631769311{\cdot}10^{-31}$	$0{,}122996601022271{\cdot}10^{-07}$

Б.8. Інтерполяція функцій C–КІЛД

Розглянемо деякі приклади інтерполяції функцій комплексної змінної C–КІЛД (3.39). На цих прикладах проілюструємо якість наближення функцій C–КІЛД та ефективність оцінки (3.43) теореми 3.10.

В умові теореми робилися припущення: **(A)** всі коефіцієнти C–КІЛД відмінні від нуля і мають місце умови типу Пейдона–Уолла (3.40); **(B)** знайдеться така множина точок $\mathscr{X} \subset \mathcal{Z}\backslash\mathbf{Z}$, що для довільної точки $z_* \in \mathscr{X}$ виконується (3.42). Тоді залишковий член C–КІЛД (3.39) задовольняє нерівність (3.43). Покажемо, що існують такі функції, області інтерполювання та множини точок $\mathscr{X}$, що теорема справедлива.

Функції інтерполювалися в крузі $\mathcal{Z} = \{z : |z - z_0| \leqslant R\}$. Вузли інтерполяції вибиралися згідно з формулами (Б.1). Чисельні експерименти проводились на множині псевдовипадкових точок Z_{test} (Б.2).

Таблиця Б.22

Функція $\left(\frac{3}{4}\right)^z$**, круг** $|z - 1 - i| \leqslant 0{,}8$

n	t	Δ_{max}	Λ	$\lvert\mathscr{Z}\rvert$
5	0,3650	$0{,}39094842516 \cdot 10^{-07}$	$0{,}16675182578 \cdot 10^{-06}$	5.000.000
6	0,3672	$0{,}72815654656 \cdot 10^{-09}$	$0{,}32359637414 \cdot 10^{-08}$	5.000.000
7	0,3678	$0{,}13983055535 \cdot 10^{-10}$	$0{,}62883392329 \cdot 10^{-10}$	5.000.000
8	0,3677	$0{,}20707411179 \cdot 10^{-12}$	$0{,}95121720457 \cdot 10^{-12}$	5.000.000
9	0,3674	$0{,}30931868622 \cdot 10^{-14}$	$0{,}14295641034 \cdot 10^{-13}$	5.000.000
10	0,3670	$0{,}37867533468 \cdot 10^{-16}$	$0{,}17692862810 \cdot 10^{-15}$	5.000.000
11	0,3665	$0{,}46410585003 \cdot 10^{-18}$	$0{,}21730541354 \cdot 10^{-17}$	5.000.000
12	0,3661	$0{,}48311702914 \cdot 10^{-20}$	$0{,}22765070169 \cdot 10^{-19}$	5.000.000
13	0,3657	$0{,}50168274384 \cdot 10^{-22}$	$0{,}23664049444 \cdot 10^{-21}$	5.000.000
14	0,4960	$0{,}45378998511 \cdot 10^{-24}$	$0{,}30774033929 \cdot 10^{-23}$	4.999.886
15	0,4995	$0{,}50462144925 \cdot 10^{-26}$	$0{,}34141348904 \cdot 10^{-25}$	4.954.427

На множині Z_{test} обчислювалися величини

$$\Delta_{max} = \max_{w \in Z_{test}} |f(w) - \tilde{D}_n^{(c)}(w))|, \qquad \Lambda = \frac{\max_{w \in Z_{test}} \prod_{i=1}^{n+1} |e_i(w - z_{i-1})|}{|e_0|^2 \, \Omega_{n+1}(t) \, \Omega_{n+2}(t)},$$

де $\Omega_n(t)$ визначена в (2.17).

Результати обчислень вміщено в таблиці. В першому стовпчику таблиці вказана кількість інтерполяційних вузлів n, в другому максимальне значення t в умові Пейдона–Уолла, при якому всі коефіцієнти побудованого С–КІЛД задовольняють умову (3.40), в третьому, четвертому та п'ятому стовпчиках відповідно вміщено значення $\Delta_{max}, \Lambda, |\mathscr{Z}|$.

Приклад 17. В крузі $|z - 1 - i| \leqslant 0{,}8$ інтерполювалася функція $\left(\frac{3}{4}\right)^z$. Отримані результати вміщено в табл. Б.22. Якщо кількість вузлів інтерполяції $n = \overline{5, 15}$, то коефіцієнти С–КІЛД (3.39) задовольняють умову типу Пейдона–Уолла (3.40). При $n = \overline{5, 13}$ множина $\mathscr{Z}$ збігається з множиною Z_{test}, а у випадку $n = 14, 15$ кількість точок множини Z_{test} в яких умова (3.42) виконується складає переважну більшість. Величини Δ_{max} та Λ спадають із збільшенням кількості інтерполяційних вузлів.

Таблиця Б.23

Функція $\sqrt{z}$, круг $|z - 1{,}5 - 1{,}5i| \leqslant 0{,}5$

n	t	Δ_{max}	Λ	$\lvert\mathscr{Z}\rvert$
5	0,2881	$0{,}36286177581 \cdot 10^{-06}$	$0{,}39091377298 \cdot 10^{-06}$	5.000.000
6	0,2753	$0{,}16763900358 \cdot 10^{-07}$	$0{,}18870487063 \cdot 10^{-07}$	5.000.000
7	0,2675	$0{,}13702588683 \cdot 10^{-08}$	$0{,}17200776523 \cdot 10^{-08}$	5.000.000
8	0,1510	$0{,}92720742400 \cdot 10^{-15}$	$0{,}28322776792 \cdot 10^{-14}$	5.000.000
9	0,1509	$0{,}76990844031 \cdot 10^{-17}$	$0{,}23605654050 \cdot 10^{-16}$	5.000.000
10	0,1509	$0{,}52473238615 \cdot 10^{-19}$	$0{,}16162238779 \cdot 10^{-18}$	5.000.000
11	0,1508	$0{,}35713429175 \cdot 10^{-21}$	$0{,}11023209239 \cdot 10^{-20}$	5.000.000
12	0,4568	$0{,}20657026690 \cdot 10^{-23}$	$0{,}15188968074 \cdot 10^{-22}$	4.999.998
13	0,4964	$0{,}11923811347 \cdot 10^{-25}$	$0{,}94020997377 \cdot 10^{-25}$	4.999.447
14	0,4999	$0{,}26950216959 \cdot 10^{-27}$	$0{,}20890063069 \cdot 10^{-26}$	4.371.173

Приклад 18. В крузі $|z - 1, 5 - 1, 5i| \leqslant 0{,}5$ проводилася інтерполяція функції $\sqrt{z}$. Результати числових експериментів вміщено в табл. Б.23. Коефіцієнти побудованих С–КІЛД задовольняють умову типу Пейдона–Уолла, коли кількість вузлів $n = \overline{5, 14}$. Множина $\mathscr{Z}$, в точках якої має місце умова (3.42), або збігається з множиною Z_{test} при $n = \overline{5, 11}$, або складає переважну частину цієї множини при $n = 12, 13, 14$. Порівнюючи дані третього та четвертого стовпчиків таблиці бачимо, що оцінка Λ має майже ті ж порядки, що і оцінка Δ_{max}.

Можна зробити наступні висновки: а) у випадку інтерполяції функцій комплексної змінної С–КІЛД множина функцій, для яких виконуються умови теореми 3.10, не порожня. б) квазі–обернений інтерполяційний ланцюговий дріб типу C–дробу наближає розглянуті функції з високою точністю, оцінка (3.43) має той же порядок, що і максимальне відхилення C–КІЛД від функції на множині Z_{test}.

Б.9. Оцінка залишкового члена C–КІЛД дійсної змінної

Наведемо приклади, які будуть ілюструвати як ефективність оцінки (3.45) теореми 3.12 так і якість наближення функцій C–КІЛД. Праву частину нерівності (3.45) оцінимо згори величиною

Таблиця Б.24

Функція $\operatorname{ch} x$, **проміжок** $[0{,}3; 1{,}4]$, **чебишовські вузли**

n	$\tilde{\Delta}^{(c)}_{max}$	$\tilde{\mathbf{M}}^{(c)}$
12	$0{,}146372264439789 \cdot 10^{-16}$	$0{,}242570754856899 \cdot 10^{-08}$
13	$0{,}123022443918024 \cdot 10^{-18}$	$0{,}737619922932456 \cdot 10^{-08}$
14	$0{,}117157995382879 \cdot 10^{-19}$	$0{,}202467809422160 \cdot 10^{-05}$
15	$0{,}102971707104950 \cdot 10^{-20}$	$0{,}958345653321632 \cdot 10^{-06}$
16	$0{,}112782740577981 \cdot 10^{-23}$	$0{,}570860231565556 \cdot 10^{-10}$
17	$0{,}765375345107176 \cdot 10^{-26}$	$0{,}212694558250617 \cdot 10^{-12}$
18	$0{,}549404642631502 \cdot 10^{-27}$	$0{,}220213845053683 \cdot 10^{-14}$
19	$0{,}353038366245735 \cdot 10^{-28}$	$0{,}108767471436763 \cdot 10^{-13}$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(c)} = \frac{|e_0| \tilde{f}^* \max_{x_* \in X_{test}} \prod_{k=0}^{n} |x_* - x_k|}{(n+1)! \min_{x_* \in X_{test}} |\tilde{Q}_n^{(c)}(x_*)|} \Big(\kappa_{n+2}(\delta) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{r} \mathrm{C}_{n+1}^{m} (e^*)^m \sum_{i=0}^{r-m} \frac{\delta^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n - 2(m+i) + j + 1) \Big),$$

де $\tilde{f}^*$ визначено в (Б.5), r, δ, e^* — в умові теореми 3.12, а $\kappa_n(\delta)$ — в (2.12).

Нехай $\tilde{\Delta}^{(c)}_{max} = \max_{x_* \in X_{test}} |f(x_*) - \tilde{D}_n^{(c)}(x_*)|$ — відхилення C–КІЛД (3.44) від функції на множині X_{test}.

Таблиця Б.25

Функція $\operatorname{ch} x$, **проміжок** $[0{,}3; 1{,}4]$, **рівномірне розбиття**

n	$\tilde{\Delta}^{(c)}_{max}$	$\tilde{\mathbf{M}}^{(c)}$
12	$0{,}239470247723633 \cdot 10^{-15}$	$0{,}507797587487923 \cdot 10^{-05}$
13	$0{,}278369998576033 \cdot 10^{-17}$	$0{,}112219323473313 \cdot 10^{-05}$
14	$0{,}369219488141774 \cdot 10^{-18}$	$0{,}217475045892763 \cdot 10^{-06}$
15	$0{,}452976622787948 \cdot 10^{-19}$	$0{,}448211349677305 \cdot 10^{-07}$
16	$0{,}695987519014801 \cdot 10^{-22}$	$0{,}831721574001541 \cdot 10^{-08}$
17	$0{,}663663266158550 \cdot 10^{-24}$	$0{,}161197994810377 \cdot 10^{-08}$
18	$0{,}672293783484680 \cdot 10^{-25}$	$0{,}286835727794957 \cdot 10^{-09}$
19	$0{,}610584291764591 \cdot 10^{-26}$	$0{,}526296973126620 \cdot 10^{-10}$

Таблиця Б.26

Функція $\sin x$, **проміжок** $[0{,}2; 1{,}0]$, **чебишовські вузли**

n	$\tilde{\Delta}^{(c)}_{max}$	$\tilde{\mathbf{M}}^{(c)}$
11	$0{,}218050639814691 \cdot 10^{-16}$	$0{,}438337625871589 \cdot 10^{-09}$
12	$0{,}345980042655606 \cdot 10^{-18}$	$0{,}426201905208980 \cdot 10^{-10}$
13	$0{,}119718922319747 \cdot 10^{-19}$	$0{,}427446517608802 \cdot 10^{-11}$
14	$0{,}563358942228395 \cdot 10^{-22}$	$0{,}389067214596650 \cdot 10^{-12}$
15	$0{,}624494907233596 \cdot 10^{-24}$	$0{,}360156745204753 \cdot 10^{-13}$
16	$0{,}763629956650601 \cdot 10^{-26}$	$0{,}308814726796271 \cdot 10^{-14}$
17	$0{,}201623198465469 \cdot 10^{-27}$	$0{,}266813906287527 \cdot 10^{-15}$
18	$0{,}750101565090219 \cdot 10^{-30}$	$0{,}216689459450761 \cdot 10^{-16}$
19	$0{,}664445830813596 \cdot 10^{-32}$	$0{,}176234173171131 \cdot 10^{-17}$
20	$0{,}385185988877447 \cdot 10^{-33}$	$0{,}136196414116784 \cdot 10^{-18}$

Приклад 19. Функція $\operatorname{ch} x$ інтерполювалася на проміжку $[0{,}3; 1{,}4]$. Вибрано корені Чебишова 1–го роду в якості інтерполяційних вузлів. Коли кількість вузлів $n = \overline{12, 19}$, то величини $\tilde{\mathbf{M}}^{(c)}$ та $\tilde{\Delta}^{(c)}_{max}$ набувають значень,

які вміщено в таб. Б.24. У випадку вузлів рівномірного розбиття проміжку вказані величини приймали значення, які наведені в таб. Б.25.

Приклад 20. На $\mathcal{R} = [0{,}2; 1{,}0]$ інтерполювалася функція $\sin x$. Коли за вузли інтерполяції були вибрані корені многочлена Чебишова, то величини $\tilde{\Delta}^{(c)}_{max}$ та $\tilde{\mathbf{M}}^{(c)}$ при $n = \overline{11, 20}$ набувають значень із таб. Б.26. Якщо за інтерполяційні вузли були вибрані точки рівномірного розбиття проміжку $\mathcal{R}$, то величини $\tilde{\mathbf{M}}^{(c)}$ та $\tilde{\Delta}^{(c)}_{max}$ набували значень, які вміщено в таб. Б.27.

Таблиця Б.27

Функція $\sin x$, **проміжок** $[0{,}2; 1{,}0]$, **рівномірне розбиття**

n	$\tilde{\Delta}^{(c)}_{max}$	$\tilde{\mathbf{M}}^{(c)}$
11	$0{,}259826522178164 \cdot 10^{-15}$	$0{,}863604625338129 \cdot 10^{-02}$
12	$0{,}565234063909329 \cdot 10^{-17}$	$0{,}232107868505292 \cdot 10^{-02}$
13	$0{,}271440697911109 \cdot 10^{-18}$	$0{,}237654013130504 \cdot 10^{-02}$
14	$0{,}177682791042392 \cdot 10^{-20}$	$0{,}631771290448799 \cdot 10^{-03}$
15	$0{,}275006183594428 \cdot 10^{-22}$	$0{,}583664159006392 \cdot 10^{-03}$
16	$0{,}470150479211786 \cdot 10^{-24}$	$0{,}153454996039412 \cdot 10^{-03}$
17	$0{,}174903663974302 \cdot 10^{-25}$	$0{,}129277250433260 \cdot 10^{-03}$
18	$0{,}916693301573499 \cdot 10^{-28}$	$0{,}336176626435799 \cdot 10^{-04}$
19	$0{,}127015079832338 \cdot 10^{-29}$	$0{,}260569856919764 \cdot 10^{-04}$
20	$0{,}440556474778580 \cdot 10^{-31}$	$0{,}670263955105212 \cdot 10^{-05}$

Із розглянутих прикладів випливає, що оцінка залишкового члена (3.45) ефективна. Коли збільшується кількість інтерполяційних вузлів, то максимальна абсолютна похибка $\tilde{\Delta}^{(c)}_{max}$ спадає. Отже, С–КІЛД наближає функції розглянуті функції з високою точністю.

Б.10. Інтерполяції функцій Т–ФІЛД

Розглянемо приклади інтерполяції функцій Т-ФІЛД (4.4), які покажуть якість наближення функції Т–ФІЛД та проілюструють оцінку (4.25) теореми 4.3. Дослідження проводилися на множині точок Z_{test}, яка визначена

Таблиця Б.28

Функція $w = \sqrt[4]{z}$ **в крузі** $|z - 3.0 - i| \leqslant 0.75$, $g(z) = \sqrt{z}$

n	Δ_{max}	Λ	$\lvert\mathscr{Z}\rvert$
3	$0{,}478019332318719{\cdot}10^{-05}$	$0{,}369716388686157{\cdot}10^{-04}$	5.000.000
4	$0{,}136710914855435{\cdot}10^{-06}$	$0{,}313733566994571{\cdot}10^{-05}$	5.000.000
5	$0{,}503488550787610{\cdot}10^{-08}$	$0{,}294832578695568{\cdot}10^{-06}$	5.000.000
6	$0{,}163955548845496{\cdot}10^{-09}$	$0{,}301287770481951{\cdot}10^{-07}$	5.000.000
7	$0{,}567695974921578{\cdot}10^{-11}$	$0{,}308295336195959{\cdot}10^{-08}$	5.000.000
8	$0{,}191259399943220{\cdot}10^{-12}$	$0{,}319938263646907{\cdot}10^{-09}$	5.000.000
9	$0{,}651988278006305{\cdot}10^{-14}$	$0{,}335864142969589{\cdot}10^{-10}$	5.000.000
10	$0{,}221222026829373{\cdot}10^{-15}$	$0{,}354413057351018{\cdot}10^{-11}$	5.000.000
11	$0{,}751766617279866{\cdot}10^{-17}$	$0{,}375568822937459{\cdot}10^{-12}$	5.000.000
12	$0{,}255349082286885{\cdot}10^{-18}$	$0{,}398923369566249{\cdot}10^{-13}$	5.000.000
13	$0{,}867361974006822{\cdot}10^{-20}$	$0{,}424619313953032{\cdot}10^{-14}$	5.000.000
14	$0{,}294636127396480{\cdot}10^{-21}$	$0{,}452605648686418{\cdot}10^{-15}$	4.999.999
15	$0{,}100076099844454{\cdot}10^{-22}$	$0{,}482919045753692{\cdot}10^{-16}$	4.999.925
16	$0{,}341040910653261{\cdot}10^{-24}$	$0{,}515767405533266{\cdot}10^{-17}$	4.993.095

в (Б.2). В якості вузлів інтерполяції вибиралися точки, що задаються формулою (Б.1). Визначалися величини

$$\Delta_{max} = \max_{z \in Z_{test}} |f(z) - D_n^{(t)}(g; z)|,\ \Lambda = \frac{(\delta - 1)^2 \max\limits_{z \in Z_{test}} \prod\limits_{i=0}^{n} |g(z) - g(z_i)|}{(\delta^{n+2} - 1)(\delta^{n+1} - 1)}.$$

Приклад 21. Функція $\sqrt[4]{z}$ інтерполювалася в крузі $|z-3{,}0-i| \leqslant 0{,}75$. В якості базис–функції вибрано $g(z) = \sqrt{z}$. З результатів обчислень, які вміщені в таб. Б.28, випливає, що значення максимальної абсолютної похибки Δ_{max} на множині Z_{test} зменшується, коли кількість вузлів інтерполяції n зростає. При $n = \overline{3,16}$ коефіцієнти Т–ФІЛД задовольняють умову (4.23). Умова (4.24) має місце у всіх точках множини Z_{test}, коли $n = \overline{3,13}$, і тільки незначна частина точок Z_{test} не належить $\mathscr{Z}$ при $n = 14, 15, 16$. Значення Λ також зменшується із збільшенням кількості інтерполяційних вузлів.

Таблиця Б.29

Функція $w = e^{\sqrt{z}}$ **в крузі** $|z - 1.0 - 0.5i| \leqslant 0{,}02,\ g(z) = e^z$

n	Δ_{max}	Λ	$\lvert\mathscr{Z}\rvert$
3	$0{,}432841773660195{\cdot}10^{-07}$	$0{,}118687669898506{\cdot}10^{-04}$	5.000.000
4	$0{,}619640599038581{\cdot}10^{-09}$	$0{,}783299108233857{\cdot}10^{-06}$	5.000.000
5	$0{,}971394528102222{\cdot}10^{-11}$	$0{,}489488892163717{\cdot}10^{-07}$	5.000.000
6	$0{,}739739811420744{\cdot}10^{-13}$	$0{,}304902845739520{\cdot}10^{-08}$	5.000.000
7	$0{,}535270025382110{\cdot}10^{-15}$	$0{,}191410310079486{\cdot}10^{-09}$	5.000.000
8	$0{,}994445183089569{\cdot}10^{-17}$	$0{,}120237868514145{\cdot}10^{-10}$	5.000.000

Приклад 22. В крузі $|z - 1{,}0 - 0{,}5i| \leqslant 0{,}02$ інтерполювалася функції $w = e^{\sqrt{z}}$. В якості базис–функції була вибрана функція $g(z) = e^z$. Результати чисельних експериментів вміщено в табл. Б.29. Легко бачити, що як і в попередньому випадку Δ_{max} спадає із збільшенням числа вузлів інтерполяції, тобто Т–ФІЛД (4.4) володіє добрими апроксимаційними властивостями. Коефіцієнти ланцюгового дробу, коли $n = \overline{3,8}$, задовольняють умову Слєшинського–Прінґсгейма (4.23) і умова (4.24) виконується у всіх точках множини Z_{test}.

Із розглянутих прикладів випливає, що оцінка (4.25) теореми 4.3 ефективна і Т–ФІЛД наближає функції з високою точністю. В роботі [85] розглянуті приклади інтерполяції Т–ФІЛД функцій дійсної змінної.

Б.11. Інтерполяція функцій С–ФІЛД

Розглянемо приклади інтерполяції функцій С–ФІЛД (4.30) в крузі. На прикладах проілюструємо ефективність наближення функцій інтерполяційними ланцюговими дробами такого вигляду та якість оцінки (4.36) теореми 4.6.

Нехай функція $f(z)$ задається значеннями у вузлах, які визначаються за формулою (Б.1). На множині тестових точок Z_{test}, яка визначена в (Б.2), обчислювались величини

$$\Delta_{max} = \max_{w \in Z_{test}} |f(w) - D_n(g;w)|, \ \Lambda = \frac{\max\limits_{w \in Z_{test}} \prod\limits_{i=1}^{n+1} |a_i^{(g)}(g(w) - g(z_{i-1}))|}{\Omega_n(t)\,\Omega_{n+1}(t)}.$$

Таблиця Б.30

Функція $\ln(\sqrt{z}+1)$, **круг** $|z - 0,85 - i| \leqslant 0{,}825, \ g(z) = \sqrt{z}$

n	t	Δ_{max}	Λ	$\lvert\mathscr{Z}\rvert$
5	0,2721	$0{,}28153521335 \cdot 10^{-06}$	$0{,}29345493345 \cdot 10^{-06}$	5.000.000
6	0,2726	$0{,}14176603905 \cdot 10^{-07}$	$0{,}13212346040 \cdot 10^{-06}$	5.000.000
7	0,2731	$0{,}94869367015 \cdot 10^{-09}$	$0{,}78918555500 \cdot 10^{-08}$	5.000.000
8	0,2736	$0{,}45365051805 \cdot 10^{-10}$	$0{,}33954761214 \cdot 10^{-09}$	5.000.000
9	0,2741	$0{,}29119616937 \cdot 10^{-11}$	$0{,}19544608930 \cdot 10^{-10}$	5.000.000
10	0,2745	$0{,}15135053293 \cdot 10^{-12}$	$0{,}91246801359 \cdot 10^{-12}$	5.000.000
11	0,2749	$0{,}91503631524 \cdot 10^{-14}$	$0{,}49495652042 \cdot 10^{-13}$	5.000.000
12	0,2751	$0{,}48755379073 \cdot 10^{-15}$	$0{,}23670827569 \cdot 10^{-14}$	5.000.000
13	0,2754	$0{,}29366142968 \cdot 10^{-16}$	$0{,}12790825036 \cdot 10^{-15}$	5.000.000
14	0,2756	$0{,}15623686184 \cdot 10^{-17}$	$0{,}61073307273 \cdot 10^{-17}$	5.000.000
15	0,2758	$0{,}93904460769 \cdot 10^{-19}$	$0{,}32925686118 \cdot 10^{-18}$	5.000.000
16	0,4359	$0{,}50281392490 \cdot 10^{-20}$	$0{,}25930053236 \cdot 10^{-19}$	4.999.997
17	0,4893	$0{,}29974494509 \cdot 10^{-21}$	$0{,}15873178137 \cdot 10^{-20}$	4.999.837

Результати числових експериментів вміщено у таблиці. В першому стовпчику таблиці вказується кількість вузлів інтерполяції n, в другому — максимальне значення t в умові типу Пейдона–Уолла при якому коефіцієнти С–ФІЛД та $v_{n+1}(g, w), w \in Z_{test}$, задовольняють умови (4.34) та (4.35), в третьому та четвертому стовпчиках вміщено значення Δ_{max} та Λ, в останньому стовпчику — кількість тестових точок множини Z_{test} для яких виконуються умови теореми 4.6.

Приклад 23. В таблиці Б.30 наведено результати обчислювальних експериментів інтерполяції функції $\ln(\sqrt{z} + 1)$ в крузі $|z - 0{,}85 - i| \leqslant 0{,}825$. В якості базис–функції було вибрано функцію $g(z) = \sqrt{z}$. Результати таблиці показують, що із збільшенням кількості інтерполяційних вузлів С–ФІЛД більш точно наближає функцію. Для коефіцієнти С–ФІЛД виконується умова типу Пейдона–Уолла, коли кількість вузлів $n = \overline{5, 17}$. Оцінка теореми (4.36) також ефективна, оскільки Λ спадає, коли кількість вузлів зростає. Кількість тестових точок, в яких виконуються умови теореми або рівна кількості точок множини Z_{test} при $n = 5, 6, \ldots, 15$, або ці точки складають переважну більшість для $n = 16, 17$.

Приклад 24. В крузі $|z - 0{,}3 - 2i| \leqslant 0{,}29$ інтерполювалася функція $2^{\ln z}$. В якості базис–функція було вибрано функцію $g(z) = e^z$. Із результатів таблиці Б.31 видно, що, як і в попередньому випадку, С–ФІЛД добре наближає функцію, похибка Δ_{max} зменшується із збільшенням кількості інтерполяційних вузлів. Оцінка теореми також ефективна і мало відрізняється від максимальної абсолютної похибки С–ФІЛД на множині псевдовипадкових точок Z_{test}. Для коефіцієнтів С–ФІЛД, коли $n = \overline{5, 12}$, має місце умова типу Пейдона–Уолла. Кількість тестових точок, в яких виконуються умови теореми, або рівна загальній кількості точок множини Z_{test}, або ці точки складають переважну більшість.

Отже: а) С–ФІЛД добре наближає розглянуті функції; б) множина функцій та множина точок, в яких мають місце умови теореми 4.6, не є поро-

Таблиця Б.31

Функція $w = 2^{\ln z}$ **в крузі** $|z - 0{,}3 - 2i| \leqslant 0{,}29, \; g(z) = e^z$

n	t	Δ_{max}	Λ	$\|\mathscr{Z}\|$
5	0,2257	$0{,}13935733412{\cdot}10^{-05}$	$0{,}30186939241{\cdot}10^{-05}$	5.000.000
6	0,2223	$0{,}85328903469{\cdot}10^{-07}$	$0{,}21397111946{\cdot}10^{-06}$	5.000.000
7	0,2222	$0{,}69028595115{\cdot}10^{-08}$	$0{,}19519643745{\cdot}10^{-07}$	5.000.000
8	0,2224	$0{,}66698389709{\cdot}10^{-09}$	$0{,}19032846697{\cdot}10^{-08}$	5.000.000
9	0,3199	$0{,}10977709405{\cdot}10^{-09}$	$0{,}42007210156{\cdot}10^{-09}$	5.000.000
10	0,2854	$0{,}69690266678{\cdot}10^{-11}$	$0{,}29964084425{\cdot}10^{-10}$	5.000.000
11	0,2944	$0{,}24269643740{\cdot}10^{-12}$	$0{,}15115976486{\cdot}10^{-11}$	5.000.000
12	0,4999	$0{,}23456105365{\cdot}10^{-13}$	$0{,}29891407091{\cdot}10^{-12}$	4.391.145

жніми і оцінка (4.36) вказаної теореми ефективна. Приклади інтерполяції функції дійсної змінної С–ФІЛД розглянуто в роботі [85].

Б.12. Інтерполяція функцій Т–КФІЛД

Розглянемо приклади, які будуть ілюструвати якість наближення функцій комплексної змінної Т–КФІЛД та ефективність оцінки (4.45).

На множині Z_{test}, яка визначена в (Б.2), обчислюються величини

$$\Delta_{max} = \max_{z_* \in Z_{test}} |\tilde{D}_n^{(t)}(g; z_*) - f(z_*)|, \Lambda = \frac{\max_{z_* \in Z_{test}} \prod_{i=0}^{n} |g(z_*) - g(z_i)|}{|K_n| \cdot |K_{n+1}|},$$

де величина K_n визначена в умові теореми 4.9. В якості вузлів інтерполяції вибиралися точки множини (Б.1).

Приклад 25. Таблиця Б.32 містить результати інтерполяції Т–КФІЛД (4.41) функції $2^{\sqrt{z}}$ в крузі $|z - 0{,}4 - 0{,}4i| \leqslant 0{,}165$, коли в якості функції–базису вибрали функцію $g(z) = \sqrt{z}$. Результати обчислень вносилися до таблиці в тому випадку, якщо коефіцієнти побудованих Т–КФІЛД (4.41) задовольняли умову типу Слєшинського–Прінґсгейма (4.43). В розгляду-

Таблиця Б.32

Функція $2^{\sqrt{z}}$, **круг** $|z - 0{,}4 - 0{,}4i| \leqslant 0{,}165,\ g(z) = \sqrt{z}$

n	Δ_{max}	Λ	$\lvert\mathscr{Z}\rvert$
3	$0{,}130998571866272 \cdot 10^{-05}$	$0{,}427305837217538 \cdot 10^{-03}$	5.000.000
4	$0{,}101366263146788 \cdot 10^{-07}$	$0{,}100465686347692 \cdot 10^{-04}$	5.000.000
5	$0{,}828803577218108 \cdot 10^{-10}$	$0{,}199619701792063 \cdot 10^{-08}$	5.000.000
6	$0{,}499934794549169 \cdot 10^{-12}$	$0{,}117457749927521 \cdot 10^{-09}$	5.000.000
7	$0{,}303547032603137 \cdot 10^{-14}$	$0{,}396212171607713 \cdot 10^{-13}$	5.000.000
8	$0{,}142370908217384 \cdot 10^{-16}$	$0{,}243980866001197 \cdot 10^{-14}$	5.000.000
9	$0{,}672064840092313 \cdot 10^{-19}$	$0{,}527926185099404 \cdot 10^{-18}$	5.000.000
10	$0{,}258459096203208 \cdot 10^{-21}$	$0{,}326991731746709 \cdot 10^{-19}$	5.000.000
11	$0{,}999000456860883 \cdot 10^{-24}$	$0{,}476138832918382 \cdot 10^{-23}$	4.999.548
12	$0{,}325001586659511 \cdot 10^{-26}$	$0{,}295453939245737 \cdot 10^{-24}$	4.999.263

ваному випадку це мало місце, коли кількість вузлів інтерполяції $n = \overline{3, 12}$. Як видно із результатів таблиці, максимальна абсолютна похибка Δ_{max} відхилення Т–КФІЛД від функції на множині Z_{test} зменшується із збільшенням кількості інтерполяційних вузлів n. Величина Λ також спадає і добре оцінює значення Δ_{max} в кожному випадку. Кількість тестових точок, в яких має місце умова (4.44), або рівна кількості точок множини Z_{test} при $n = \overline{3, 10}$, або складає переважну більшість точок для $n = 11, 12$.

Приклад 26. В наступній таблиці Б.33 наведені результати інтерполяції в крузі $|z - 0{,}4 - 0{,}4i| \leqslant 0{,}38$ функції $(3/2)^{z^2}$, коли базис–функція $g(z) = z^2$. Аналогічно як і в попередньому випадку, величини Δ_{max} та Λ спадають із збільшенням кількості вузлів інтерполяції. Величина Λ добре оцінює значення Δ_{max}. Крім того умова (4.44) має місце або у всіх точках множини Z_{test} для $n = \overline{4, 12}$, або точки множини $\mathscr{Z}$ складають переважну більшість точок із Z_{test} для $n = 13, 14$.

Можна зробити такі висновки: а) множина функцій комплексної змін-

Таблиця Б.33

Функція $(3/2)^{z^2}$, **круг** $|z-0{,}4-0{,}4i|\leqslant 0{,}38,\ g(z)=z^2$

n	Δ_{max}	Λ	$\lvert\mathscr{Z}\rvert$
4	$0{,}149829198065045{\cdot}10^{-05}$	$0{,}860208722870196{\cdot}10^{-04}$	5.000.000
5	$0{,}401864038803829{\cdot}10^{-07}$	$0{,}183164077283339{\cdot}10^{-06}$	5.000.000
6	$0{,}784550870841000{\cdot}10^{-09}$	$0{,}213021451619291{\cdot}10^{-07}$	5.000.000
7	$0{,}148731993974349{\cdot}10^{-10}$	$0{,}312585877851707{\cdot}10^{-10}$	5.000.000
8	$0{,}223998985812286{\cdot}10^{-12}$	$0{,}366031166723290{\cdot}10^{-11}$	5.000.000
9	$0{,}330861659648509{\cdot}10^{-14}$	$0{,}326110870818742{\cdot}10^{-14}$	5.000.000
10	$0{,}405962222662052{\cdot}10^{-16}$	$0{,}382326432940668{\cdot}10^{-15}$	5.000.000
11	$0{,}490587545808000{\cdot}10^{-18}$	$0{,}227328343547458{\cdot}10^{-17}$	5.000.000
12	$0{,}508039591609651{\cdot}10^{-20}$	$0{,}266733803871449{\cdot}10^{-19}$	5.000.000
13	$0{,}519935224580711{\cdot}10^{-22}$	$0{,}113330305075948{\cdot}10^{-21}$	4.997.590
14	$0{,}474905436559541{\cdot}10^{-24}$	$0{,}133129037045762{\cdot}10^{-23}$	4.991.555

ної, для яких виконуються умови теореми 4.9, не є порожньою; б) кількість тестових точок в яких умова (4.44) має місце також не порожня множина; в) оцінка залишкового члена (4.45) ефективна.

Б.13. Інтерполяція функцій С–КФІЛД

Розглянемо приклади інтерполяції в крузі $|z-z_0|\leqslant R$ функцій комплексної змінної С–КФІЛД. На цих прикладах проілюструємо якість наближення функцій С–КФІЛД та ефективність оцінки (4.64) теореми 4.12.

На множині Z_{test} обчислювались величини

$$\Delta_{max}=\max_{z_*\in Z_{test}}\left|f(z_*)-\tilde{D}_n^{(c)}(g;z_*)\right|,\ \Lambda=\frac{\max\limits_{z_*\in Z_{test}}\prod\limits_{i=1}^{n+1}|e_i^{(g)}(g(z_*)-g(z_{i-1}))|}{|e_0^{(g)}|^2\,\Omega_{n+1}(t)\,\Omega_{n+2}(t)},$$

де $\Omega_n(t)$ визначена в (2.17). В якості вузлів інтерполяції вибиралися точки

Таблиця Б.34

Функція $e^{\sin z}$, круг $|z| \leqslant 0{,}25,\ g(z) = \sin z$

n	t	Δ_{max}	Λ	$\lvert\mathscr{Z}\rvert$
6	0,4271	$0{,}19030905146{\cdot}10^{-08}$	$0{,}52338873441{\cdot}10^{-08}$	5.000.000
7	0,4260	$0{,}40871887814{\cdot}10^{-10}$	$0{,}11233047328{\cdot}10^{-09}$	5.000.000
8	0,4261	$0{,}67261437508{\cdot}10^{-12}$	$0{,}18656184818{\cdot}10^{-11}$	5.000.000
9	0,4268	$0{,}11210256552{\cdot}10^{-13}$	$0{,}31093537156{\cdot}10^{-13}$	5.000.000
10	0,4277	$0{,}15073120787{\cdot}10^{-15}$	$0{,}42128043840{\cdot}10^{-15}$	5.000.000
11	0,4287	$0{,}20519232723{\cdot}10^{-17}$	$0{,}57413375425{\cdot}10^{-17}$	5.000.000
12	0,4296	$0{,}23346037174{\cdot}10^{-19}$	$0{,}65722144831{\cdot}10^{-19}$	5.000.000
13	0,4305	$0{,}26851495479{\cdot}10^{-21}$	$0{,}75703004421{\cdot}10^{-21}$	5.000.000
14	0,4880	$0{,}26483400501{\cdot}10^{-23}$	$0{,}86154189059{\cdot}10^{-23}$	4.999.980

множини, яка задана формулою (Б.1).

В таблиці Б.34–Б.36 результати інтерполяції функцій С–КФІЛД вміщувалися в тому випадку, якщо коефіцієнти побудованих С–КФІЛД задовольняли умову типу Пейдона–Уолла (4.62). В першому стовпчику таблиці вказано кількість інтерполяційних вузлів n, в другому — максимальне значення параметру t, для якого коефіцієнти С–КФІЛД задовольняють умову типу Пейдона–Уолла. В третьому стовпчику міститься значення Δ_{max}, в четвертому — Λ і у п'ятому — кількість точок множини Z_{test}, які задовольняють умову (4.63).

Приклад 27. В таблиці Б.34 маємо результати інтерполяції функції $e^{\sin z}$ в крузі $|z| \leqslant 0{,}25$. В якості функції–базису вибрали $g(z) = \sin z$. Із результатів таблиці випливає, що значення максимальної абсолютної похибки Δ_{max} та оцінки Λ спадають, якщо кількість вузлів інтерполяції зростає. Оцінка Λ досить мало відрізняється від Δ. Кількість точок множини $\mathscr{Z}$, або рівна кількості точок множини Z_{test} при $n = \overline{6,13}$, або складає переважну більшість точок множини Z_{test} при $n = 14$.

Таблиця Б.35

Функція $\operatorname{sh}\sqrt{z}$, **круг** $|z-1{,}7-i| \leqslant 0{,}8,\ g(z)=\sqrt{z}$

n	t	Δ_{max}	Λ	$\lvert\mathscr{Z}\rvert$
8	0,3411	$0{,}41267568396{\cdot}10^{-09}$	$0{,}43820244870{\cdot}10^{-09}$	5.000.000
9	0,3369	$0{,}11800012859{\cdot}10^{-10}$	$0{,}79264416978{\cdot}10^{-10}$	5.000.000
10	0,3332	$0{,}50198946081{\cdot}10^{-13}$	$0{,}35891391109{\cdot}10^{-12}$	5.000.000
11	0,3300	$0{,}33425290242{\cdot}10^{-14}$	$0{,}24695610167{\cdot}10^{-13}$	5.000.000
12	0,3272	$0{,}20479523965{\cdot}10^{-15}$	$0{,}13745599527{\cdot}10^{-14}$	5.000.000
13	0,3247	$0{,}38464710336{\cdot}10^{-17}$	$0{,}24826674909{\cdot}10^{-16}$	5.000.000
14	0,3226	$0{,}12303634076{\cdot}10^{-19}$	$0{,}82220514948{\cdot}10^{-18}$	5.000.000
15	0,4382	$0{,}61831040708{\cdot}10^{-21}$	$0{,}60893599622{\cdot}10^{-20}$	4.999.996
16	0,4887	$0{,}28353022190{\cdot}10^{-22}$	$0{,}30019041784{\cdot}10^{-21}$	4.999.929
17	0,4982	$0{,}39713861344{\cdot}10^{-24}$	$0{,}41713837003{\cdot}10^{-23}$	4.995.988

Приклад 28. В крузі $|z-1{,}7-i| \leqslant 0{,}8$ інтерполювалася функція $\operatorname{sh}\sqrt{z}$. В цьому випадку функція–базис $g(z)=\sqrt{z}$. Із результатів таблиці Б.35 можна зробити висновок, що величини Δ_{max} та Λ спадають, якщо кількість інтерполяційних вузлів збільшується. Оцінка Λ досить близька до значення максимальної абсолютної похибки Δ_{max} на множині тестових точок Z_{test}. Умова (4.63) має місце або у всіх тестових точках при $n=\overline{8,14}$, або в переважній більшості точок множини Z_{test} при $n=15,16,17$.

Приклад 29. Якщо в крузі $|z-0{,}5-i| \leqslant 0{,}2$ для інтерполяції функції $\operatorname{sh}\sqrt{z}$ в якості функції–базису взяти функцію $g(z)=e^z$, то будемо мати результати, які містяться в таблиці Б.36. Як і в попередніх випадках маємо, що величини Δ_{max} та Λ спадають із однаковою швидкістю, коли кількість інтерполяційних вузлів n зростає. Оцінка Λ має той же порядок, що і максимальна похибка Δ_{max}. Для всіх значень $n=\overline{3,14}$ умова (4.63) виконується у всіх тестових точках множини Z_{test}.

Із результатів прикладів випливає: а) множина функцій комплексної

Таблиця Б.36

Функція $w = \operatorname{sh}\sqrt{z}$ **в крузі** $|z - 0{,}5 - i| \leqslant 0{,}2,\ g(z) = e^z$

n	t	Δ_{max}	Λ	$\lvert\mathscr{Z}\rvert$
3	0,3536	$0{,}39741288307{\cdot}10^{-04}$	$0{,}72064222288{\cdot}10^{-04}$	5.000.000
4	0,3115	$0{,}46361152083{\cdot}10^{-05}$	$0{,}10017351755{\cdot}10^{-04}$	5.000.000
5	0,3179	$0{,}66914968081{\cdot}10^{-06}$	$0{,}16806208097{\cdot}10^{-05}$	5.000.000
6	0,3275	$0{,}23761767985{\cdot}10^{-07}$	$0{,}59022199643{\cdot}10^{-07}$	5.000.000
8	0,3755	$0{,}34081658991{\cdot}10^{-09}$	$0{,}94953670303{\cdot}10^{-09}$	5.000.000
9	0,3564	$0{,}27303277307{\cdot}10^{-10}$	$0{,}94938684511{\cdot}10^{-10}$	5.000.000
10	0,3162	$0{,}12060176167{\cdot}10^{-11}$	$0{,}51463455112{\cdot}10^{-11}$	5.000.000
11	0,2808	$0{,}12188521998{\cdot}10^{-12}$	$0{,}59101631237{\cdot}10^{-12}$	5.000.000
12	0,2725	$0{,}88447239996{\cdot}10^{-14}$	$0{,}49255794148{\cdot}10^{-13}$	5.000.000
13	0,2596	$0{,}47037349872{\cdot}10^{-15}$	$0{,}28165755698{\cdot}10^{-14}$	5.000.000
14	0,2456	$0{,}13943989409{\cdot}10^{-16}$	$0{,}75832693931{\cdot}10^{-16}$	5.000.000

змінної, для яких виконуються умови теореми 4.12, та множина точок, в яких умова (4.63) має місце, не є порожніми; б) оцінка залишкового члена С–КФІЛД на множині точок Z_{test} достатньо ефективна.