

Надійшов до редакції журналу "Вісник ради" 26.206.01 18.01.2019р.
Секретар ради /Сатур О.Р./



ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію Пагірі Михайла Михайловича „Узагальнення класичних ланцюгових дробів та наближення функцій“, подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Актуальність дослідження та його мета.

Об'єктами дослідження у дисертаційній роботі є функціональні ланцюгові (неперервні) дроби та деякі їх узагальнення: інтегральні ланцюгові дроби, скінченні неперервні дроби, частинними чисельниками яких є нескінченні ланцюгові дроби. Вони використовуються для інтерполяції та апроксимації функцій дійсної та комплексної змінної.

Поряд з многочленами, узагальненими многочленами, сплайнами для наближення функцій використовуються раціональні апроксимації. Вони конструктивно будуються за допомогою неперервних дробів чи їх узагальнень – апроксимацій Паде. Апарат ланцюгових дробів володіє властивістю стійкості до збурень (не нагромадження похибок у процесі обчислення). У багатьох випадках швидкість збіжності раціональних наближень є кращою, ніж швидкість збіжності поліномів, області збіжності неперервних дробів є ширшими, ніж області збіжності відповідних степеневих рядів.

Задачі інтерполяції функцій ланцюговими дробами вивчалися в роботах Ю.М. Вронського, Т.Н. Тіле, Н.Е. Ньорлунда, Ф.Е. Гілдебранда, Ф.М. Ларкіна, С.С. Хлопоніна, Л.В. Загородняк, Й. Тайн, К. Чжао, П. Ці та інших.

Важливе значення у розвитку даної тематики мала стаття В.Л. Макарова, В.В. Хлобістова за 1989 р., де було розглянуто та досліджено поліноміальну інтерполяцію функціоналів у просторі кусково-неперервних функцій. У роботах І.І. Демківа та Б.Р. Михальчука побудовано та досліджено скінченні інтегральні ланцюгові дроби як інтерполянти нелінійних функціоналів.

У контексті розвитку аналітичної теорії ланцюгових дробів у задачах інтерполяції функцій залишилось багато невирішених проблем, зокрема: нові інтерполяційні формули, вигляд та оцінка залишкових членів, дослідження збіжності інтерполяційного процесу.

Вивчаючи функціональні неперервні дроби, що є аналогами рядів Тейлора, цілком природно приходимо до поняття оберненої похідної. Цей нелінійний об'єкт є малодослідженим. В роботах Т.Н. Тіле, Н.Е. Ньорлунда, Ф.Е. Гілдебранда, П.Д. Клеменса, Г. Салзера, Д. Якобса встановлено деякі властивості обернених похідних, використовуючи які побудовано розвинення деяких елементарних функцій у ланцюгові дроби. Важливо означити і значно глибше вивчити різні типи обернених похідних і застосувати їх до побудови розвинень функцій у функціональні ланцюгові дроби різної структури. Це один із мало вивчених напрямків побудови та дослідження розвинення аналітичних функцій у неперервні дроби.

Частіше використовують метод Лагранжа, що базується на алгоритмі розв'язання рівняння Ріккати (Ж. Лагранж, Л. Ейлер, С. Санілевич, К. Купер, С. Купер, В. Джонс, Е. Меркес, В. Скотт, А. Стокес).

Другим важливим напрямком у даній тематиці є дослідження відповідності між степеневими рядами і неперервними дробами, запропоноване К. Гауссом у 1813 р. Цей підхід активно використовували Т. Стілтєс і П. Л. Чебишев. Цей метод для наближень Паде вперше запропонував К. Якобі у 1846 р. Його розвинули Д. Фробеніус та А. Паде в кінці ХІХ століття.

Не для всіх елементарних функцій відомі розвинення у неперервні дроби зокрема немає таких розвинень для $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$. Тут принципово важливим є результат, встановлений В.К.Дзядиком у 1979 р., де він побудував апроксиманти Паде $R^{[2n+1,2n]}$ та встановив асимптотичні формули оцінок наближення для цих функцій. Дослідження в даному напрямі продовжують А.П. Голуб та його учні.

Беручи це все до уваги, доходимо висновку, що розвиток аналітичної теорії неперервних дробів, зокрема побудова та дослідження різних типів інтерполяційних ланцюгових дробів, побудова та дослідження розвинень у неперервні дроби аналітичних функцій на основі обернених похідних та їх узагальнень є важливою та актуальною задачею.

Наукова новизна результатів дисертаційної роботи. Усі результати, отримані в дисертаційній роботі, є новими. У дисертації розв'язано ряд актуальних задач з аналітичної теорії ланцюгових дробів. Побудовано нові інтерполяційні формули у вигляді функціональних ланцюгових дробів. Знайдено та обґрунтовано формули для їх залишкових членів. Використовуючи умови на елементи побудованих інтерполяційних дробів, які накладаються в ознаках збіжності Слешинського-Прінгсгейма та Лейтона-Уолла, експериментально перевірено ефективність наближення інтерполяційними формулами. Досліджено задачу інтерполяції функціонала, який заданий на множині континуальних вузлів, інтегральним ланцюговим дробом, показано, що в частинному випадку побудований інтегральний ланцюговий дріб містить в собі інтерполяційний ланцюговий дріб.

Вперше введено поняття обернених різниць 2-го типу, обернених g -різниць та обернених g -різниць 2-го типу, досліджено їх властивості. Встановлено нові властивості обернених похідних Тіле. Вперше означено та досліджено властивості обернених похідних 2-го типу, обернених g - похідних та обернених g - похідних 2-го типу. Цікавими є теореми про обернені похідні різних типів від многочлена та раціональної функції. Використовуючи поняття обернених похідних різних типів та їх властивості, побудовано нові розвинення багатьох елементарних функцій, зокрема: $(c + z)^\alpha$, e^z , $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{th} z$, $\ln(c + z)$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{cth} z$, $z \ln z$, $(c + e^z)^\alpha$, $\operatorname{tg} z^m$, $\operatorname{cth} \sqrt{z}$ у різні типи функціональних ланцюгових дробів. Використовуючи ознаки збіжності гранично-періодичних ланцюгових дробів, досліджено збіжність побудованих розвинень.

Оригінальними є розвинення $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ у скінченні неперервні дроби, частинними чисельниками яких є нескінченні ланцюгові дроби

Обґрунтованість і правильність результатів дисертації. Всі формулювання основних математичних результатів дисертаційної роботи Пагірі М.М. є правильними та новими. Їхні доведення строго обґрунтовані, а правильність міркувань та висновків не викликає сумнівів.

Зауваження. Дисертаційну роботу оформлено на належному науковому рівні. Тим не менш, у ній наявна певна кількість недоглядів та неточностей.

Перелік зауважень:

1) Не погоджуюсь з думкою дисертанта на С.24 та на С.190 про те, що не знайдено диференціальних рівнянь Ріккати для функцій $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$. Ці функції задовольняють лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку, які зводяться до диференціальних рівнянь Ріккати. Не відома закономірність у формулах коефіцієнтів дробово-раціональних інваріантів цього рівняння, ітерація яких дає розвинення розв'язку у ланцюговий дріб.

2) Не зовсім коректним є означення 1.5 оберненого ланцюгового дроби на С. 37. Оберненим до $b_0 + K \frac{a_i}{b_i}$ є ланцюговий дріб $(b_0 + K \frac{a_i}{b_i})^{-1}$. Його вільний член $g_0 = 0$, а $g_1 = \frac{1}{b_0}$ і співвідношення $f_n g_n = 1, n \geq 0$ не виконується.

3) Є описки на С.57 при визначенні порядку полюса.

4) Бажано уточнити вигляд функції (2.17) $\Omega_n(t)$ на С.79 при значеннях змінної $0 < t < 1/2$ і $t = 1/2$, враховуючи умови теореми.

5) Не зрозумілим є введення додаткового індексу r у записі ланцюгового дроби (3.1) та в усіх виразах, що зустрічаються у підрозділі 3.1.

6) У формулюванні теореми 3.5 ставляться певні умови на елементи $d_k^{(n)}$ ланцюгового дроби (3.15), хоча його частинними знаменниками є числа d_k . Аналогічна описка допущена і при формулюванні теореми 4.10.

7) При доведенні теореми 5.14 використовуються результати наступної теореми 5.15, при доведенні теореми 6.12 – теорема 6.14, при доведенні теореми 6.11 використовується формула (6.18) з наступного підрозділу.

8) На С.210 при записі обернених різниць 2-го типу під знаком границі пропущена буква f .

9) Не вірною є теорема 1.1, на яку посилається дисертант в огляді літератури. Для збіжності до заданої функції її формального розвинення у неперервний дріб крім рівномірної збіжності потрібна ще відповідність до степеневому ряду, який є

розвиненням даної функції. Ця теорема в подальших дослідженнях у дисертації не використовуються.

10) На С. 23₄ та на С. 53₁₄ замість «Д.В. Зарудняка» має бути «Д.В. Зарудняк».

11) В роботі допущені окремі граматичні помилки, вживаються деякі русизми. Наприклад, замість твердження «мають місце співвідношення» краще використовувати твердження «справджуються співвідношення» або «є вірними співвідношення».

12) В якості побажання було б дуже важливо отримати аналогічні результати для функцій багатьох змінних.

Звісно, перераховані неточності не чинять істотного впливу на сприйняття наукових положень дисертації та не викликають сумнівів у правильності основних математичних здобутків дисертанта.

Публікації та апробація результатів роботи. Результати дисертації опубліковано в 51 роботах, з них 28 статей в українських та закордонних фахових виданнях із фізико-математичних наук, 6 із них надруковано у виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз (Web of Science, Scopus), 1 – монографія. Здобувач доповідав на численних міжнародних конференціях, в тому числі на „24 th International conference on finite or infinite dimensional complex analysis and application“ (2016, Jaipur, India). Крім конференцій, результати дисертації доповідалися на семінарах у Львові, Києві, Дніпрі, Ужгороді, Мукачеві, тобто пройшли відповідну апробацію.

Автореферат належним чином описує основні положення та зміст дисертаційної роботи. Результати сповна опубліковані у наукових виданнях.

Практичне значення результатів роботи. Дисертація має теоретичний характер, а отримані у ній результати істотно доповнюють аналітичну теорію ланцюгових дробів і теорію наближення функцій. Практичне значення полягає в тому, що розроблені автором алгоритми можуть бути імплементовані у сучасне математичне забезпечення ЕОМ, у тій частині, що стосується інтерполяції та апроксимації функцій. Вони, поза всяким сумнівом, будуть вагомим підґрунтям для подальших досліджень у даному науковому напрямі.

Висновки. У роботі суттєво доповнюється результати аналітичної теорії ланцюгових дробів та теорії апроксимації функцій дійсної і комплексної змінної. Найвагомим досягненням дисертанта є означення та дослідження властивостей обернених похідних 2-го типу, обернених g - похідних та обернених g - похідних 2-го типу, використання цих понять та їх властивостей до побудови нових розвинень багатьох елементарних функцій у різні типи функціональних ланцюгових дробів, дослідження збіжності побудованих розвинень. Оригінальними є розвинення $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ у скінченні неперервні дроби, частинними чисельниками яких є нескінченні ланцюгові дроби. Дисертантом побудовані різних типів нових інтерполяційних ланцюгових дробів, встановлено вид їх залишкових членів. Чисельні експерименти, наведені в додатках, підтверджують ефективність побудованих інтерполяційних формул.

Наведені вище зауваження не зменшують наукової цінності дисертації.

Все це дає підстави стверджувати, що дисертаційна робота М.М. Пагірі є завершеним, виконаним на актуальну тематику науковим дослідженням з новим внеском в аналітичну теорію ланцюгових дробів. Дисертація М.М. Пагірі „Узагальнення класичних ланцюгових дробів та наближення функцій“, подана на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз, відповідає вимогам „Порядку присудження наукових ступенів“, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України №567 від 24 липня 2013 р., а її автор Пагіря Михайло Михайлович заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Офіційний опонент,
професор, доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри економічної кібернетики та інформатики
Тернопільського національного
економічного університету



Д. І. Боднар

Підпис	<i>Д. І. Боднар</i>
Завіряю:	<i>Тарасова Г. С.</i>
Зав. загальним відділом	