НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ПОЖАРСЬКА Катерина Віталіївна

УДК 517.5

НАЙКРАЩІ НАБЛИЖЕННЯ ТА ЕНТРОПІЙНІ ЧИСЛА КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

01.01.01 — математичний аналіз
(111 — математика)

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
РОМАНЮК Анатолій Сергійович,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу теорії функцій.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ЗАДЕРЕЙ Петро Васильович,
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського" , м. Київ,
професор кафедри математичного аналізу
та теорії ймовірностей
фізико-математичного факультету;

доктор фізико-математичних наук, доцент
ЧАЙЧЕНКО Станіслав Олегович,
ДВНЗ "Донбаський державний педагогічний
університет" , м. Слов'янськ,
проректор з науково-педагогічної роботи.

Захист відбудеться "29" січня 2019 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "27" грудня 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Романюк А. С.**

Загальна характеристика роботи

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню апроксимативних характеристик класів періодичних функцій багатьох змінних. Зокрема, досліджуються найкращі тригонометричні та білінійні наближення класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, а також ентропійні числа класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Актуальність теми. Вже понад сорок років у теорії наближення активно досліджуються апроксимативні характеристики, пов'язані з нелінійною апроксимацією. Невичерпний інтерес до таких наближень викликаний насамперед тим, що в багатьох ситуаціях виявлено переваги нелінійних методів наближення порівняно з лінійними.

В останні десятиріччя все більшого розповсюдження набуває метод M-членного тригонометричного наближення, тобто наближення класів періодичних функцій багатьох змінних за допомогою поліномів вигляду

$$P\left(\theta_M, \boldsymbol{x}\right) = \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(\boldsymbol{k}^j, \boldsymbol{x})},$$

де $\theta_M = \left\{\boldsymbol{k}^j\right\}_{j=1}^{M}$ — набір векторів $\boldsymbol{k}^j = (k_1^j, \ldots, k_d^j) \in \mathbb{Z}^d$, $c_j \in \mathbb{C}$ і $(\boldsymbol{k}^j, \boldsymbol{x}) = k_1^j x_1 + \cdots + k_d^j x_d$.

Відповідна апроксимативна характеристика у більш загальній ситуації була введена в 1955 році С. Б. Стєчкіним при формулюванні критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів у просторі L_2. Згодом дослідження найкращих M-членних тригонометричних наближень індивідуальних функцій і, в більшій мірі, функціональних класів проводились у роботах Р. С. Ісмагілова, В. Є. Майорова, К. І. Осколкова, Б. С. Кашина, В. М. Темлякова, Е. С. Белінського, О. І. Степанця, А. С. Романюка, В. С. Романюка, R. A. DeVore, D. Dung, С. О. Чайченка, С. А. Стасюка, Н. М. Консевич, А. С. Сердюка, Т. А. Степанюк, А. Л. Шидліча, А. С. Федоренка, О. С. Федоренка, В. В. Шкапи та інших. Одержані у цьому напрямі результати, з одного боку, мають самостійний інтерес, а з іншого — вони знаходять практичні застосування, зокрема, у питаннях кодування, передачі і відтворення зображень.

Оскільки при встановленні оцінок найкращих M-членних тригонометричних наближень тих або інших класів функцій не завжди вдається явно пред'явити поліном $P^*\left(\theta_M, \boldsymbol{x}\right)$, який реалізує відповідний порядок наближення, то у дисертаційній роботі було досліджено близьку апроксимативну характеристику — найкраще ортогональне тригонометричне наближення. Особливістю найкращих ортогональних тригонометричних наближень порівняно з найкращими M-членними тригонометричними наближеннями є те, що коефіцієнти c_j в поліномах $P(\theta_M, \boldsymbol{x})$ є відповідними коефіцієнтами Фур'є функції f.

Дослідження найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів функцій однієї та багатьох змінних отримали розвиток у роботах Е. С. Белінського, А. С. Романюка, В. С. Романюка, О. І. Степанця, Д. Б. Базарханова, С. А. Стасюка, А. С. Сердюка, Т. А. Степанюк, А. Л. Шидліча та інших.

Окрім згаданих апроксимативних характеристик важливе місце у нелінійній апроксимації посідає метод наближення функцій багатьох змінних із певного класу лінійними комбінаціями добутків функцій меншої кількості змінних. Такі наближення називають білінійними і їхні витоки йдуть із роботи Е. Шмідта 1907 року. У подальшому дослідження найкращих білінійних наближень функціональних класів проводилися у роботах Р. С. Ісмагілова, Н. В. Мірошина, В. В. Хромова, В. М. Темлякова, М.-Б. А. Бабаєва, А. С. Романюка, В. С. Романюка, К. В. Соліч, В. В. Шкапи та інших. Слід звернути увагу, що одержані в цьому напрямі результати знайшли застосування у питаннях оцінок сингулярних чисел інтегральних операторів, а також колмогоровських поперечників відповідних функціональних класів.

Підсумовуючи сказане, зазначимо, що згадані апроксимативні характеристики на теперішній час достатньо повно вивчені стосовно класів періодичних функцій багатьох змінних Вейля – Надя $W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, Нікольського $H^{\boldsymbol{r}}_p$ і Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$. В той же час, значно менше ці величини досліджені на класах $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, які в одновимірному випадку введені у 1983 році О. І. Степанцем, і які є узагальненням класів $W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}$.

Однією з важливих характеристик компактів є їхня ентропія або близька до неї характеристика — ентропійні числа. Володіючи інформацією про ентропію або поведінку ентропійних чисел компактної множини, можна дійти висновку, наскільки великою (масивною) є ця множина і якими апроксимативними властивостями вона володіє.

Питання, пов'язані з оцінками ентропійних чисел класів періодичних функцій багатьох змінних $W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, $H^{\boldsymbol{r}}_p$ і $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ вивчалися у роботах С. А. Смоляка, М. Ш. Бірмана, М. З. Соломяка, М. С. Бахвалова, H. Triebel, В. М. Темлякова, Е. С. Белінського, Б. С. Кашина, D. Dung, А. С. Романюка, В. С. Романюка та інших авторів, і при цьому одержано низку глибоких та завершених результатів.

З іншого боку, практично зовсім недослідженими у цьому напрямі залишалися класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які при $\theta = \infty$ (позначення H^{Ω}_p) були розглянуті М. М. Пустовойтовим, а при $1 \leq \theta < \infty$ — S. Yongsheng, W. Heping. Слід зазначити, що класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ при певному виборі функції Ω збігаються з класами Нікольського – Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$.

Таким чином, з огляду на сказане, дослідження згаданих апроксимативних характеристик класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ та ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ є актуальним.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України згідно з науково – дослідною темою "Апроксимативні та структурні характеристики функціональних множин", номер державної реєстрації 0111 U 002079.

Мета і завдання дослідження. *Метою* даної роботи є встановлення оцінок найкращих ортогональних та M-членних тригонометричних наближень періодичних функцій багатьох змінних $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$, класів періодичних функцій багатьох змінних $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$, а також класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ періодичних функцій багатьох змінних малої гладкості у просторі L_q. Знаходження порядкових оцінок найкращих білінійних наближень класів періодичних функцій багатьох змінних, породжених зсувами аргументу функцій з класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, у просторі L_{q_1,q_2}, а також ентропійних чисел класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі L_q.

Об'єктом дослідження є класи $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ та $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних.

Предметом дослідження є: найкращі ортогональні та M-членні тригонометричні наближення періодичних функцій багатьох змінних $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$ та класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$; найкращі білінійні наближення класів періодичних функцій багатьох змінних, породжених зсувами аргументу функцій з класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$; ентропійні числа класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Основними завданнями дослідження є:

1. Встановити і порівняти порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень та найкращих M-членних тригонометричних наближень періодичних функцій багатьох змінних $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$, які при певному виборі кратної послідовності $\boldsymbol{\psi}$ співпадають з аналогами ядер Бернуллі, у просторі L_q, $1 < q < \infty$.

2. Одержати і порівняти порядкові оцінки найкращих ортогональних та M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q, $1 < q < \infty$.

3. Знайти порядкові оцінки найкращих M-членних тригономет-

ричних наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ періодичних функцій багатьох змінних малої гладкості у просторі L_q, $1 < p \leq 2 < q < \infty$. Порівняти одержані результати з відповідними оцінками найкращих ортогональних тригонометричних наближень та наближень за допомогою тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів.

4. Встановити порядкові оцінки найкращих білінійних наближень класів періодичних функцій $2d$ змінних, які породжені функціями d змінних з класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ всеможливими зсувами їхнього аргументу, у просторі L_{q_1,q_2}.

5. Отримати порядкові оцінки ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних у метриці простору L_q, $1 \leq q < \infty$, та у рівномірній метриці.

Методи дослідження. При розв'язанні поставлених завдань у дисертаційній роботі використані загальні методи теорії функцій та математичного аналізу у поєднанні зі спеціальними методами, які були розроблені у роботах В. М. Темлякова, Е. С. Белінського, А. С. Романюка та інших.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи є новими і полягають у наступному.

1. Встановлено порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень та найкращих M-членних тригонометричних наближень періодичних функцій багатьох змінних $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$, які при певному виборі кратної послідовності $\boldsymbol{\psi}$ співпадають з аналогами ядер Бернуллі, у просторі L_q, $1 < q < \infty$. Виявлено, що у випадку $2 < q < \infty$ швидкість спадання відповідних величин при $M \to \infty$ відрізняється за порядком.

2. Одержано порядкові оцінки найкращих ортогональних та M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q, $1 < q < \infty$. При $2 < q < \infty$ виявлено відмінності у поведінці відповідних апроксимативних характеристик класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$.

3. Знайдено порядкові оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ періодичних функцій багатьох змінних малої гладкості у просторі L_q, $1 < p \leq 2 < q < \infty$. Встановлено, що оцінки зверху цих величин кращі за порядком, ніж оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень та наближень за допомогою тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів.

4. Одержано порядкові оцінки найкращих білінійних наближень

класів періодичних функцій $2d$ змінних, які породжені функціями d змінних з класів $L^{\psi}_{\boldsymbol{\beta},p}$ всеможливими зсувами їхнього аргументу, у просторі L_{q_1,q_2}.

5. Отримано порядкові оцінки ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних у метриці простору L_q, $1 \leq q < \infty$, та у рівномірній метриці.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертація має теоретичний характер. Результати роботи та методика їх отримання можуть бути використані при подальшому вивченні питань, пов'язаних із наближенням класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження, а також постановка задач належить науковому керівнику — доктору фіз.-мат. наук, професору А. С. Романюку. Всі результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися і обговорювалися на:

— Конференції молодих учених "Підстригачівські читання — 2016" , Львів, 25–27 травня 2016 року;

— XI Літній школі "Алгебра, Топологія, Аналіз" , Одеса, 1–14 серпня 2016 року;

— Третій конференції "Approximation Methods for Molecular Modelling and Diagnosis Tools" , Київ, 26–30 січня 2017 року;

— Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" , Ворохта, 22 – 25 лютого 2017 року;

— Конференції молодих учених "Підстригачівські читання — 2017" , Львів, 23–25 травня 2017 року;

— Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування" , присвяченій 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця, Слов'янськ, 28 травня – 3 червня 2017 року;

— Міжнародній конференції молодих математиків, присвяченій 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського, Київ, 7–10 червня 2017 року;

— Четвертій конференції "Approximation Methods for Molecular Modelling and Diagnosis Tools" , Малехів (Львівська обл.), 19–23 березня 2018 року;

— Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки та математики" , присвяченій 90-річчю з дня народження академіка НАН України Я. С. Підстригача та 40-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики (ІППММ) НАН України, Львів, 22–25 травня 2018 року;

— Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях", присвяченій 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, Чернівці, 17–19 вересня 2018 року;

— семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник семінару: доктор фіз. – мат. наук, професор А. С. Романюк);

— семінарі "Сучасний аналіз" у Київському національному університеті імені Т. Г. Шевченка (керівники семінару: доктори фіз. – мат. наук, професори І. О. Шевчук, О. О. Курченко, В. М. Радченко).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у 15 наукових публікаціях [1 – 15]. Шість із них [1 – 6] є статтями у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань із фізико-математичних наук, дві з яких [3, 5] надруковано у виданнях, які внесено до міжнародної наукометричної бази Scopus. Решту 9 опубліковано у збірниках тез міжнародних наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі змісту, переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків, а також списку використаних джерел, що містить 109 найменувань. Повний обсяг дисертації становить 137 сторінок, з них 13 сторінок займає список використаних джерел.

Основний зміст дисертації

У *вступі* висвітлюється актуальність теми дисертаційного дослідження, основні завдання, наукова новизна одержаних результатів, а також їх апробація. Крім цього, тут наведено означення класів періодичних функцій багатьох змінних $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ і $B^{\Omega}_{p,\theta}$ та апроксимативних характеристик, які вивчаються у наступних розділах роботи.

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, — d-вимірний евклідів простір із елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ і $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + \cdots + x_dy_d$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$.

Через $L_q := L_q(\pi_d)$, $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d}[0, 2\pi]$, $1 \leq q \leq \infty$, позначимо простір функцій $f(\boldsymbol{x})$, які є 2π–періодичними за кожною змінною, зі скінченною нормою

$$
\begin{aligned}
\|f\|_q &:= \|f\|_{L_q} = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(\boldsymbol{x})|^q \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \le q < \infty, \\
\|f\|_\infty &:= \|f\|_{L_\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\pi_d} |f(\boldsymbol{x})|.
\end{aligned}
$$

Надалі будемо вважати, що для $f \in L_1$ виконується умова

$$
\int\limits_0^{2\pi} f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}x_j = 0, \quad j = \overline{1,d}.
$$

Для $f \in L_1$ розглянемо її ряд Фур'є $\sum\limits_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}$, де $\widehat{f}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{t})} \mathrm{d}\boldsymbol{t}$ — коефіцієнти Фур'є функції f. Далі, нехай $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_d)$, $\psi_j \ne 0$, $j = \overline{1,d}$, — довільні послідовності, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, $\mathring{\mathbb{Z}}^d = (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^d$. Припустимо, що ряд

$$
\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathring{\mathbb{Z}}^d} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{i\frac{\pi\beta_j}{2}\operatorname{sgn} k_j}}{\psi_j(|k_j|)} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}
$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції. Цю функцію називають $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\beta})$-похідною функції f і позначають $f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$.

Через $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, $1 \le p \le \infty$, позначимо клас функцій f, для яких існують $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\beta})$-похідні і виконується умова $\left\|f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right\|_p \le 1$.

Класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ в одновимірному випадку були введені у 1983 році О. І. Степанцем. Зазначимо також, що вони є узагальненням добре відомих класів Вейля – Надя $W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, причому $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p} \equiv W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ у випадку $\psi_j(|\tau|) \equiv |\tau|^{-r_j}$, $\tau \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $r_j > 0$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$.

Окрім класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ у роботі досліджуються також функції $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$, ряди Фур'є яких мають вигляд

$$
\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathring{\mathbb{Z}}^d} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(|k_j|) \, e^{i\frac{\pi\beta_j}{2}\operatorname{sgn} k_j} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}.
$$

У випадку $\psi_j(|\tau|) = |\tau|^{-r_j}$, $\tau \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $r_j > 0$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, ці функції є аналогами ядра Бернуллі $F_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{r}}$.

З одного боку, функції $D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}$ є цікавими з точки зору їх апроксимаційних властивостей, а з іншого — вони відіграють важливу роль при дослідженні деяких апроксимативних характеристик класів $L_{\boldsymbol{\beta},1}^{\boldsymbol{\psi}}$.

Перейдемо до означення класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$, які при $\theta = \infty$ (позначення H_p^{Ω}) були введені М. М. Пустовойтовим у 1994 році, а згодом у 1997 році поширені на випадок $1 \le \theta < \infty$ у роботі S. Yongsheng, W. Heping.

Класи $B_{p,\theta}^{\Omega}$ визначаються за допомогою мажорантної функції $\Omega(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}_+^d$, для мішаного модуля неперервності $\Omega_l(f,\boldsymbol{t})_p$ порядку l, $l \in \mathbb{N}$, функції $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, та числового параметра θ, $1 \le \theta \le \infty$.

Отже, нехай для $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$,

$$\Omega_l(f)_p := \Omega_l(f,\boldsymbol{t})_p = \sup_{\substack{|h_j| \leqslant t_j \\ j=\overline{1,d}}} \|\Delta_h^l f\|_p$$

— мішаний модуль неперервності порядку l, $l \in \mathbb{N}$, функції f, де

$$\Delta_{\boldsymbol{h}}^l f(\boldsymbol{x}) = \Delta_{h_d}^l \cdots \Delta_{h_1}^l f(\boldsymbol{x}) = \Delta_{h_d}^l\big(\Delta_{h_{d-1}}^l \cdots (\Delta_{h_1}^l f(\boldsymbol{x}))\big),$$

$\boldsymbol{h} = (h_1,\ldots,h_d)$, — мішана l-та різниця з кроком h_j за змінною x_j, $j = \overline{1,d}$, а

$$\Delta_{h_j}^l f(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j+nh_j,x_{j+1},\ldots,x_d).$$

Далі розглянемо множину $\Psi_{l,d}$ функцій $\Omega(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}_+^d$, типу мішаного модуля неперервності порядку l, які задовольняють умови

1) $\Omega(\boldsymbol{t}) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1,d}$; $\quad \Omega(\boldsymbol{t}) = 0$, $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(\boldsymbol{t})$ неперервна на $\mathbb{R}_+^d$;

3) $\Omega(\boldsymbol{t})$ не спадає по кожній змінній $t_j \ge 0$, $j = \overline{1,d}$, при будь-яких фіксованих значеннях інших змінних t_i, $i \ne j$;

4) $\Omega(m_1t_1,\ldots,m_dt_d) \leqslant C\left(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j\right)^l \Omega(\boldsymbol{t})$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, $C > 0$.

На функції $\Omega(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}_+^d$, накладемо додаткові умови (S^α) і (S_l), які називають умовами Барі – Стєчкіна. Для одновимірного випадку це означає наступне:

а) $\varphi \in (S^\alpha)$, $\varphi \geqslant 0$, $\alpha > 0$, якщо функція $\varphi(\tau)\tau^{-\alpha}$ майже зростає, тобто якщо існує така стала $C_1 > 0$, яка не залежить від τ_1 та τ_2, $0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 1$, що $\varphi(\tau_1)\tau_1^{-\alpha} \leqslant C_1\varphi(\tau_2)\tau_2^{-\alpha}$;

б) $\varphi \in (S_l)$, $\varphi > 0$, $l \in \mathbb{N}$, якщо існує γ, $0 < \gamma < l$, таке що $\varphi(\tau)\tau^{-\gamma}$ майже спадає, тобто існує незалежна від τ_1 та τ_2, $0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 1$, стала $C_2 > 0$, така що $\varphi(\tau_1)\tau_1^{-\gamma} \geqslant C_2\varphi(\tau_2)\tau_2^{-\gamma}$.

Зауважимо, що умови, еквівалентні до умов (S^α) і (S_l), розглядалися раніше С. М. Лозинським.

При $d > 1$ будемо говорити, що $\Omega(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}_+^d$, задовольняє умови (S^α) і (S_l), якщо $\Omega(\boldsymbol{t})$ як функція однієї змінної t_j, $j = \overline{1,d}$, задовольняє ці умови при будь-яких фіксованих значеннях інших змінних t_i, $i \neq j$.

Функція $f \in L_p$ належить простору $B_{p,\theta}^\Omega$, $1 \leq p, \theta \leq \infty$, $\Omega \in (S_l) \cap (S^\alpha) \cap \Psi_{l,d}$, якщо для неї скінченна напівнорма

$$|f|_{B_{p,\theta}^\Omega} = \begin{cases} \left(\int\limits_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f,\boldsymbol{t})_p}{\Omega(\boldsymbol{t})} \right)^\theta \prod\limits_{j=1}^d \frac{\mathrm{d}t_j}{t_j} \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \leq \theta < \infty, \\ \sup\limits_{\substack{t_j \geq 0 \\ j=\overline{1,d}}} \frac{\Omega_l(f,\boldsymbol{t})_p}{\Omega(\boldsymbol{t})}, & \theta = \infty. \end{cases}$$

Норму в просторі $B_{p,\theta}^\Omega$ визначимо таким чином

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} = \|f\|_p + |f|_{B_{p,\theta}^\Omega}, \qquad 1 \leq p, \theta \leq \infty,$$

та будемо розглядати далі одиничні кулі в цьому просторі, використовуючи для них те саме позначення, що й для всього простору.

Зауважимо, що при $\theta = \infty$ покладають $B_{p,\infty}^\Omega \equiv H_p^\Omega$. Крім цього, у випадку $\Omega(\boldsymbol{t}) = \prod\limits_{j=1}^d t_j^{r_j}$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, класи $B_{p,\theta}^\Omega$ збігаються з класами Нікольського – Бєсова $B_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}}$.

Тепер означимо апроксимативні характеристики, які досліджуються у роботі.

Отже, найкращим M-членним тригонометричним наближенням функції $f \in L_q$, $1 \leq q \leq \infty$, називають величину

$$e_M(f)_q = \inf_{\boldsymbol{k}^j, c_j} \left\| f - \sum_{j=1}^M c_j e^{i(\boldsymbol{k}^j, \boldsymbol{x})} \right\|_q,$$

де $\left\{\boldsymbol{k}^j\right\}_{j=1}^M$ — система векторів $\boldsymbol{k}^j = \left(k_1^j, \ldots, k_d^j\right) \in \mathbb{Z}^d$, $c_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, M}$.

Якщо $F \subset L_q$, то покладають $e_M(F)_q = \sup\limits_{f \in F} e_M(f)_q$ — найкраще M-членне тригонометричне наближенням функціонального класу F.

У тому випадку, коли в означеннях величин $e_M(f)_q$ та $e_M(F)_q$ вибрати $c_j = \widehat{f}\left(\boldsymbol{k}^j\right)$, де $\widehat{f}\left(\boldsymbol{k}^j\right)$ — коефіцієнти Фур'є функції f, що відповідають системі векторів $\left\{\boldsymbol{k}^j\right\}_{j=1}^M$, отримаємо величини $e_M^{\perp}(f)_q$ і $e_M^{\perp}(F)_q$, які називають, відповідно, найкращим ортогональним тригонометричним наближенням функції f та функціонального класу F.

З найкращими M-членними тригонометричними наближеннями індивідуальних функцій і функціональних класів тісно пов'язані наступні апроксимативні характеристики.

Отже, нехай $L_{q_1,q_2} := L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$, $1 \le q_1, q_2 \le \infty$, — множина функцій $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$, зі скінченною мішаною нормою

$$\|f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\|_{q_1,q_2} := \|f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\|_{L_{q_1,q_2}} = \Big\| \|f(\cdot, \boldsymbol{y})\|_{q_1} \Big\|_{q_2},$$

яка обчислюється послідовно, спочатку за змінною $\boldsymbol{x}$ у просторі L_{q_1}, а потім — від результату за змінною $\boldsymbol{y}$ у просторі L_{q_2}.

Тоді величина

$$\tau_M(f)_{q_1,q_2} = \inf_{u_i(\boldsymbol{x}), v_i(\boldsymbol{y})} \left\| f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \sum_{i=1}^M u_i(\boldsymbol{x}) v_i(\boldsymbol{y}) \right\|_{q_1,q_2},$$

де $u_i \in L_{q_1}$, $v_i \in L_{q_2}$, називається найкращим білінійним наближенням порядку M функції $f \in L_{q_1,q_2}$.

Якщо $F \subset L_{q_1,q_2}$ — деякий функціональний клас, то покладають $\tau_M(F)_{q_1,q_2} = \sup\limits_{f \in F} \tau_M(f)_{q_1,q_2}$.

Нехай X — банахів простір і $B_X(\boldsymbol{y}, r) = \{\boldsymbol{x} \in X \colon \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_X \le r\}$ — куля радіуса r із центром у точці $\boldsymbol{y}$. Для компактної множини $A \subset X$ і $\varepsilon > 0$ через $\varepsilon_k(A, X)$ позначимо її ентропійні числа

$$\varepsilon_k(A, X) = \inf \left\{ \varepsilon \colon \quad \exists \boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^{2^k} \in X \colon \quad A \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^k} B_X(\boldsymbol{y}^j, \varepsilon) \right\}.$$

Одержані результати будемо формулювати у термінах порядкових співвідношень. Для двох невід'ємних послідовностей $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ співвідношення (порядкова нерівність) $a(n) \ll b(n)$ означає, що існує стала $C_3 > 0$, така що $a(n) \leq C_3 b(n)$. Співвідношення $a(n) \asymp b(n)$ рівносильне тому, що $a(n) \ll b(n)$ і $b(n) \ll a(n)$. Зазначимо, що сталі C_i з відповідними індексами i, які далі будуть зустрічатися у порядкових співвідношеннях, можуть залежати від деяких параметрів. Ці параметри інколи вказуватимемо, а у решті випадків вони будуть зрозумілими з контексту.

У *першому розділі* дисертації дається історична довідка щодо величин, які досліджуються, та наводиться відповідна бібліографія. Підрозділ 1.1 присвячено найкращим ортогональним та M-членним тригонометричним наближенням класів періодичних функцій багатьох змінних. У підрозділі 1.2 сформульовано задачі про найкращі білінійні наближення та ентропійні числа функціональних класів.

У *другому розділі* дисертаційної роботи встановлено оцінки найкращих наближень індивідуальних періодичних функцій багатьох змінних та функціональних класів. У підрозділі 2.2 встановлено оцінки найкращих ортогональних та M-членних тригонометричних наближень функцій $D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}$ у просторі L_q, $1 < q < \infty$, за певних умов на кратну послідовність $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_d)$ і $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^d$. А саме, будемо вважати, що ψ_j, $j = \overline{1,d}$, належать до множини D послідовностей ϕ, таких що:

1) ϕ — додатні та незростаючі;

2) $\exists M > 0$ таке, що $\forall l \in \mathbb{N}$ виконується умова $\frac{\phi(l)}{\phi(2l)} \leq M$.

До вказаної множини належать, зокрема, послідовності $\phi(|\tau|) = |\tau|^{-r}$; $\phi(|\tau|) = \ln^{\alpha}(|\tau|+1)$, $\alpha < 0$; $\phi(|\tau|) = \ln^{\alpha}(|\tau|+1)|\tau|^{-r}$, де $\tau \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

Результати будемо формулювати у термінах функцій натурального аргументу $\Phi(n)$ та $\Psi(n)$, які задаються наступними рівностями:

$$\Phi(n) = \min_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n} \prod_{j=1}^{d} (2^{s_j}), \qquad \Psi(n) = \max_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}),$$

де вектори $\boldsymbol{s}, \mathbf{1} \in \mathbb{N}^d$.

Легко бачити, що при $\psi_j(|\tau|) = |\tau|^{-r}$, $j = \overline{1,d}$, $r > 0$, матимемо $\Phi(n) = \Psi(n) = 2^{-nr}$ та, крім цього, при $d = 1$ функції $\Phi(n)$, $\Psi(n)$ збігаються і набувають вигляду $\psi_1(2^n)$.

У прийнятих позначеннях справедлива теорема.

Теорема 2.1. *Нехай* $1 < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовності* $\psi_j\left(|\tau|\right)|\tau|^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $j = \overline{1,d}$, *не зростають. Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n, *що задовольняють умову* $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, *мають місце співвідношення*

$$\Phi(n)M^{1-\frac{1}{q}}(\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \ll e_M^{\perp}\left(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right)_q \ll$$
$$\ll \Psi(n)M^{1-\frac{1}{q}}\left(\log M\right)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}.$$

Зауважимо, що у випадку $d = 1$ з теореми 2.1 випливає точна за порядком оцінка величини $e_M^{\perp}\left(D_{\beta}^{\psi_1}\right)_q$, яка при додаткових умовах на послідовність ψ_1 встановлена В. В. Шкапою.

Крім цього зазначимо, що при $\psi_j\left(|\tau|\right) = |\tau|^{-r_j}$, $r_j > 1 - \frac{1}{q}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, для функцій $D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} \equiv F_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{r}}$ порядок величини $e_M^{\perp}\left(F_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{r}}\right)_q$, де $1 < q < \infty$, отримано А. С. Романюком.

На відміну від найкращих ортогональних тригонометричних наближень, при дослідженні найкращих M-членних тригонометричних наближень функцій $D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}$ у просторі L_q, $1 < q < \infty$, виникла необхідність окремо розглянути випадки $1 < q \le 2$ та $2 < q < \infty$. При $1 < q \le 2$ оцінки величини $e_M\left(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right)_q$ отримані у теоремі 2.2, і вони збігаються з оцінками теореми 2.1 для величини $e_M^{\perp}\left(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right)_q$. У випадку $2 < q < \infty$ має місце наступне твердження.

Теорема 2.3. *Нехай* $2 < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовності* $\psi_j\left(|\tau|\right)|\tau|^{1+\varepsilon}$, $j = \overline{1,d}$, *не зростають. Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n, *що задовольняють умову* $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, *справедливі співвідношення*

$$\Phi(n)M^{\frac{1}{2}} \ll e_M\left(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right)_q \ll \Psi(n)M^{\frac{1}{2}}.$$

Встановлені у теоремах 2.2 та 2.3 результати є новими і в одновимірному випадку, і при цьому, при виконанні відповідних умов на послідовність ψ_1 і $\beta \in \mathbb{R}$, справедливі оцінки:

$$e_M\left(D_{\beta}^{\psi_1}\right)_q \asymp \psi_1(M)M^{1-\frac{1}{q}}, \qquad 1 < q \le 2;$$
$$e_M\left(D_{\beta}^{\psi_1}\right)_q \asymp \psi_1(M)M^{\frac{1}{2}}, \qquad 2 < q < \infty.$$

Що стосується оцінки величини $e_M\left(F^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta}}\right)_q$, то її порядки при $1<q\le 2$, $r_j>1-\frac{1}{q}$, $\beta_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,d}$, і $2<q<\infty$, $r_j>1$, $\beta_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,d}$, встановлено Е. С. Белінським.

У підрозділі 2.3 одержано порядкові оцінки найкращих ортогональних та M-членних тригонометричних наближень класів функцій $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$ у просторі L_q, $1<q<\infty$.

Теорема 2.4. *Нехай $1<q<\infty$, $\psi_j\in D$, $\beta_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,d}$, і, крім того, існує $\varepsilon>0$ таке, що послідовності $\psi_j\left(|\tau|\right)|\tau|^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $j=\overline{1,d}$, не зростають. Тоді для будь-яких натуральних M і n, що задовольняють умову $M=M(n)\asymp 2^n n^{d-1}$, мають місце співвідношення*

$$\Phi(n)M^{1-\frac{1}{q}}(\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}\ll e^{\perp}_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}\right)_q\ll$$
$$\ll\Psi(n)M^{1-\frac{1}{q}}\left(\log M\right)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}.$$

Варто зазначити, що в одновимірному випадку з теореми 2.4 випливає точна за порядком оцінка, яка при додаткових умовах на послідовність ψ_1 була встановлена В. В. Шкапою.

Зауважимо також, що у випадку $\psi_j\left(|\tau|\right)=|\tau|^{-r_j}, r_j>1-\frac{1}{q}$, $\beta_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,d}$, для класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}\equiv W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},1}$ порядок величини $e^{\perp}_M\left(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},1}\right)_q$, $1<q<\infty$, отримано А. С. Романюком.

Теорема 2.5. *Нехай $1<q\le 2$, $\psi_j\in D$, $\beta_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,d}$, і, крім того, існує $\varepsilon>0$ таке, що послідовності $\psi_j\left(|\tau|\right)|\tau|^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $j=\overline{1,d}$, не зростають. Тоді для будь-яких натуральних M і n, що задовольняють умову $M=M(n)\asymp 2^n n^{d-1}$, мають місце співвідношення*

$$\Phi(n)M^{1-\frac{1}{q}}(\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}\ll e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}\right)_q\ll$$
$$\ll\Psi(n)M^{1-\frac{1}{q}}(\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}.$$

Результат теореми 2.5 є новим і в одновимірному випадку. При цьому за виконання відповідних умов на послідовність ψ_1 та $\beta\in\mathbb{R}$ справедлива оцінка:

$$e_M\left(L^{\psi_1}_{\beta,1}\right)_q\asymp\psi_1(M)M^{1-\frac{1}{q}},\qquad 1<q\le 2.$$

Крім цього відзначимо, що порядок величини $e_M\left(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},1}\right)_q$, $1 < q \leq 2$, де $r_j > 1 - \frac{1}{q}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, встановлено А. С. Романюком.

Теорема 2.6. *Нехай $2 < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовності $\psi_j\left(|\tau|\right)|\tau|^{1+\varepsilon}$, $j = \overline{1,d}$, не зростають. Тоді для будь-яких натуральних M і n, що задовольняють умову $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, справедливі співвідношення*

$$\Phi(n)M^{\frac{1}{2}} \ll e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}\right)_q \ll \Psi(n)M^{\frac{1}{2}}.$$

В одновимірному випадку з теореми 2.6 випливає точна за порядком оцінка, яка при деяких додаткових умовах на послідовність ψ_1 встановлена В. В. Шкапою.

Що стосується оцінки величини $e_M\left(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},1}\right)_q$, $2 < q < \infty$, де $r_j > 1$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, то її було анонсовано Е. С. Белінським.

Порівнявши результати теорем 2.4 – 2.6, бачимо, що оцінки зверху величин $e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}\right)_q$ та $e^{\perp}_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}\right)_q$ у випадку $2 < q < \infty$ відрізняються за порядком.

Підрозділ 2.4 містить оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ періодичних функцій багатьох змінних малої гладкості у просторі L_q при $1 < p \leq 2 < q < \infty$.

Теорема 2.7. *Нехай $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовності $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{\frac{1}{p}-\varepsilon}$, $j = \overline{1,d}$, не спадають, а $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$, $j = \overline{1,d}$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'} = 1$, не зростають. Тоді для будь-яких натуральних M і n, що задовольняють умову $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, та числа $n_1 = \frac{q}{2}n - \left(\frac{q}{2}-1\right)(d-1)\log n$, справедливі оцінки*

$$\Phi([n_1])M^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left(\log M\right)^{(d-1)\left(1-\frac{q}{p}\right)} \ll e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q \ll$$
$$\ll \Psi([n_1])M^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left(\log M\right)^{(d-1)\left(1-\frac{q}{p}\right)},$$

де $[a]$ — ціла частина числа a.

В одновимірному випадку, при виконанні умов теореми 2.7, точна за порядком оцінка величини $e_M\left(L^{\psi_1}_{\beta,p}\right)_q$ одержана О. С. Федоренком.

Порядок величини $e_M\left(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q$, $1<p\leq 2<q<\infty$, де $\frac{1}{p}<r_j<q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$, $\beta_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,d}$, встановлено Е. С. Белінським.

Зауважимо, що оцінка зверху величини $e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q$, отримана у теоремі 2.7, краща за порядком, ніж відповідна оцінка найкращих ортогональних тригонометричних наближень, яка була встановлена Н. М. Консевич, а також — ніж оцінка наближень функцій зі класу $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ за допомогою тригонометричних поліномів із "номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів, отримана у роботі А. С. Романюка.

Третій розділ дисертації присвячено встановленню порядкових оцінок найкращих білінійних наближень та ентропійних чисел, відповідно, класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ та $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних.

Сформулюємо спочатку деякі з одержаних у підрозділі 3.2 тверджень стосовно найкращих білінійних наближень $\tau_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_{q_1,q_2}$.

Теорема 3.2 *Нехай* $2\leq p<q_1<\infty$, $1\leq q_2\leq\infty$, $\psi_j\in D$, $\beta_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,d}$, *і, крім того, існує* $\varepsilon>0$ *таке, що послідовності* $\psi_j\left(|\tau|\right)|\tau|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, $j=\overline{1,d}$, *не зростають. Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n, *що задовольняють умову* $M=M(n)\asymp 2^n n^{d-1}$, *мають місце співвідношення*

$$\Phi(n)\ll\tau_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_{q_1,q_2}\ll\Psi(n).$$

В одновимірному випадку з результату теореми 3.2 випливає точна за порядком оцінка величини $\tau_M\left(L^{\psi_1}_{\beta,p}\right)_{q_1,q_2}$, яка була одержана В. В. Шкапою.

Порядок величини $\tau_M\left(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_{q_1,q_2}$, де $r_j>\frac{1}{2}$, $\beta_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,d}$, при відповідних обмеженнях на параметри p, q_1, q_2 встановлено В. М. Темляковим.

Теорема 3.3 *Нехай* $2\leq q_1<p<\infty$, $1\leq q_2\leq\infty$, $\psi_j\in D$, $\beta_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,d}$. *Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n, *що задовольняють умову* $M=M(n)\asymp 2^n n^{d-1}$, *справедливі оцінки*

$$\Phi(n)\ll\tau_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_{q_1,q_2}\ll\Psi(n).$$

Зазначимо, що результат теореми 3.3 є новим і у випадку $d = 1$, при цьому справедливе співвідношення

$$\tau_M \left(L^{\psi_1}_{\beta,p} \right)_{q_1,q_2} \asymp \psi_1(M).$$

Порядок величини $\tau_M \left(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p} \right)_{q_1,q_2}$, $2 \le q_1 < p < \infty$, $1 \le q_2 \le \infty$, при $r_j > 0$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, встановлено А. С. Романюком.

У підрозділі 3.4 одержано оцінки ентропійних чисел класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі L_q, $1 \le q < \infty$, за умови, що $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\left(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j \right)$, $\omega \in (S_l) \cap (S^{\alpha}) \cap \Psi_{l,1}$.

Теорема 3.8. *Нехай $d \ge 2$, $1 \le q < \infty$, $2 \le p, \theta \le \infty$, а $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\left(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j \right)$, де функція ω задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > 1$ та умову (S_l). Тоді для будь-яких натуральних M і n, таких що $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, справедлива оцінка*

$$\varepsilon_M \left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q \right) \asymp \omega\left(2^{-n}\right) (\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)}.$$

У зв'язку з наведеним результатом, важливо зазначити, що у дисертаційній роботі оцінки зверху та знизу величини $\varepsilon_M \left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q \right)$ встановлено для більш широкого діапазону зміни параметрів p, q і θ. А саме, оцінку зверху цієї величини отримано для $1 \le q < \infty$, $1 < p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, і, відповідно, оцінку знизу ентропійних чисел одержано для класів $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, у просторі L_1.

В одновимірному випадку справедливе наступне твердження.

Теорема 3.9. *Нехай $d = 1$, $1 \le q < \infty$, $1 < p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, а функція ω задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > 1$ та умову (S_l). Тоді для будь-якого натурального M справедлива оцінка*

$$\varepsilon_M \left(B^{\omega}_{p,\theta}, L_q \right) \asymp \omega\left(M^{-1}\right).$$

Підрозділ 3.5 присвячено знаходженню оцінок ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у рівномірній метриці.

Наведемо один із одержаних результатів.

Теорема 3.15 *Нехай* $d = 2$, $2 \leq p, \theta \leq \infty$, *а* $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\Big(t_1 t_2\Big)$, *де функція* ω *задовольняє умову* (S^α) *з деяким* $\alpha > \frac{1}{2}$ *і умову* (S_l). *Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n, *таких що* $M = M(n) \asymp 2^n n$, *має місце оцінка*

$$\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty\right) \asymp \omega\left(2^{-n}\right)(\log M)^{1-\frac{1}{\theta}}.$$

Зауважимо, що оцінку зверху величини $\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty\right)$ отримано в більш загальній ситуації, а саме у випадку $d \geq 1$ при $1 < p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$.

Оцінки ентропійних чисел класів Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ та Нікольського $H^{\boldsymbol{r}}_p$ у просторі L_q, $1 \leq q \leq \infty$, при різних співвідношеннях між параметрами p, q, θ, встановлено у роботах Е. С. Белінського, В. М. Темлякова, А. С. Романюка та D. Dung. Коментарі містяться у відповідних частинах дисертаційної роботи.

Висновки

1. Встановлено порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень та найкращих M-членних тригонометричних наближень періодичних функцій багатьох змінних $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$ у просторі L_q, $1 < q < \infty$. Виявлено, що у випадку $2 < q < \infty$ швидкість спадання відповідних величин при $M \to \infty$ відрізняється за порядком.

2. Одержано порядкові оцінки найкращих ортогональних та M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q, $1 < q < \infty$. При $2 < q < \infty$ виявлено відмінності у поведінці відповідних апроксимативних характеристик класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$.

3. Знайдено порядкові оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ періодичних функцій багатьох змінних малої гладкості у просторі L_q, $1 < p \leq 2 < q < \infty$. Встановлено, що оцінки зверху цих величин кращі за порядком, ніж оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень та наближень за допомогою тригонометричних поліномів із "номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів.

4. Одержано порядкові оцінки найкращих білінійних наближень класів періодичних функцій $2d$ змінних, які породжені функціями d змінних з класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ всеможливими зсувами їхнього аргументу, у просторі L_{q_1,q_2}.

5. Отримано порядкові оцінки ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних у метриці простору L_q, $1 \leq q < \infty$, та у рівномірній метриці.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. *Швай К. В.* Оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень узагальнених багатовимірних аналогів ядер Бернуллі та класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$ у просторі L_q // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — **13**, №1. — С. 300–320.

2. *Shvai K. V.* The best M-term trigonometric approximations of classes of $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\beta})$-differentiable periodic multivariate functions in the space L_q // Journal of computational and applied mathematics. Taras Shevchenko National University of Kyiv. — 2016. – **122**, №2. — P. 83–91.

3. *Швай К. В.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів періодичних функцій багатьох змінних з обмеженою узагальненою похідною у просторі L_q // Український математичний вісник. — 2016. — **13**, №3. — С. 361–375.

(Переклад: *Shvai K. V.* The best M-term trigonometric approximations of the classes of periodic multivariate functions with bounded generalized derivative in the space L_q // Journal of mathematical sciences. — 2017. — **222**, №6. — P. 750–761.)

4. *Пожарська К. В.* Оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ періодичних функцій багатьох змінних малої гладкості у просторі L_q // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — **14**, №3. — С. 293–318.

5. *Швай К. В.* Оцінки найкращих білінійних наближень класів $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\beta})$-диференційовних періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2018. — **70**, №4. — С. 564–573.

(Переклад: *Shvai K. V.* Estimation of the best bilinear approximations for the classes of $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\beta})$-differentiable periodic multivariable functions // Ukr. Math. J. — 2018. — **70**, №4. — P. 649–660.)

6. *Пожарська К. В.* Оцінки ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2018. — **70**, №9. — С. 1249–1263.

7. *Швай К. В.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів функцій багатьох змінних $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$ у просторі L_q //

Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2016" (Львів, 25–27 травня 2016р.): Тези доповідей. — http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Shvai.pdf.

8. *Швай К. В.* Оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\beta})$-диференційовних періодичних функцій багатьох змінних // XI Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз"(Одеса, 1–14 серпня 2016р.): Тези доповідей. — К.: Ін-т математики НАН України. — 2016. — С. 114.

9. *Швай К. В.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення узагальнених багатовимірних аналогів ядер Бернуллі // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 22–25 лютого 2017р.): Тези доповідей. — Івано – Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника". — 2017. — С. 134–135.

10. *Швай К. В.* Найкращі білінійні наближення класів $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\beta})$-диференційовних періодичних функцій багатьох змінних // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2017"(Львів, 23–25 травня 2017р.): Тези доповідей. — http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2017/abstracts/Shvai.pdf.

11. *Shvai K. V.* The best M-term trigonometric approximations of multivariate classes of functions with bounded generalized derivative // International conference "Theory of approximation of functions and its applications" in honor of 75th anniversary of Corresponding Member of NAS of Ukraine, Professor Alexander Stepanets (1942–2007) (Slovyansk, May, 28 – June 3, 2017): Abstracts. — Slovyansk: Donbas State Pedagogical University. — 2017. — P. 36.

12. *Швай К. В.* Найкращі білінійні наближення класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$ періодичних функцій багатьох змінних // Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917–2008) (Київ, 7–10 червня 2017р.): Тези доповідей. — К.: Ін-т математики НАН України. — 2017. — С. 49.

13. *Pozharska K. V.* Entropy numbers for the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic multivariate functions // 4th AMMODIT Conference (Malekhiv, Lviv region, March 19–23, 2018): Abstracts. — P. 20.

14. *Пожарська К. В.* Оцінки ентропійних чисел класів періодичних функцій багатьох змінних // Сучасні проблеми механіки та математики: Зб. наук. праць у 3-х т. / за заг. ред. А. М. Самойленка та Р. М. Кушніра [Електронний ресурс]. — Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН

України. — 2018. — **3**. — С. 69. — Режим доступу до ресурсу: www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018.

15. *Пожарська К. В.* Оцінки ентропійних чисел деяких класів періодичних функцій багатьох змінних // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях" присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (Чернівці, 17–19 вересня 2018р.): Тези доповідей. — Чернівці: Чернівецький нац. ун-т. — 2018. — С. 193.

Анотації

Пожарська К. В. *Найкращі наближення та ентропійні числа класів періодичних функцій багатьох змінних. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.*

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико – математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — "Математичний аналіз"(111 — Математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційну роботу присвячено встановленню порядкових оцінок найкращих наближень та ентропійних чисел класів періодичних функцій багатьох змінних. А саме, вивчаються найкращі ортогональні та M-членні тригонометричні наближення періодичних функцій багатьох змінних $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$ та класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$, а також класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ функцій малої гладкості у просторі L_q. Встановлено порядкові оцінки найкращих білінійних наближень класів періодичних функцій багатьох змінних, породжених зсувами аргументу функцій з класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, у просторі L_{q_1,q_2}. Крім цього, досліджуються ентропійні числа класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі L_q.

Ключові слова: $(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\beta})$-похідна, аналоги ядра Бернуллі, класи Нікольського – Бєсова, найкращі тригонометричні наближення, найкращі білінійні наближення, ентропійні числа, східчастий гіперболічний хрест.

Пожарская Е. В. *Наилучшие приближения и энтропийные числа классов периодических функций многих переменных. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.*

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико – математических наук по специальности 01.01.01 — "Математический анализ" (111 — Математика). — Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

Диссертационная работа посвящена получению порядковых оценок наилучших приближений и энтропийных чисел классов периодических функций многих переменных. А именно, исследуются наилучшие ортогональные и M-членные тригонометрические приближения периодических функций многих переменных $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$ и классов $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$, а также классов $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ функций малой гладкости в пространстве L_q. Получены оценки наилучших билинейных приближений классов периодических функций многих переменных, порожденных сдвигами аргумента функций с классов $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, в пространстве L_{q_1,q_2}. Кроме того, исследуются энтропийные числа классов периодических функций одной и многих переменных $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в пространстве L_q.

Ключевые слова: $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\beta})$-производная, аналоги ядра Бернулли, классы Никольского – Бесова, наилучшие тригонометрические приближения, наилучшие билинейные приближения, энтропийные числа, ступенчатый гиперболический крест.

Pozharska K. V. *Best approximations and entropy numbers of the classes of periodic multivariate functions. — The Manuscript.*

A thesis is presented for the Degree of Candidate of Physics and Mathematics in speciality 01.01.01 — "Mathematical Analysis" (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to the establishment of order estimates for the best approximations and entropy numbers of the classes of periodic multivariate functions. Namely, the best orthogonal and M-term trigonometric approximations are being studied for the periodic multivariate functions $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$, classes $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$, and for the classes $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ of functions of small smoothness in the space L_q. Also, order estimates for the best bilinear approximations are received of the classes of periodic multivariate functions formed by shifts of an argument of functions from the classes $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, in the space L_{q_1,q_2}. Beside this, the entropy numbers are investigated of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of one and many variables in the space L_q.

Approximative characteristics that are connected with nonlinear approximation are being actively studied for more than forty years. The great interest in such approximations is mainly caused by advantages of nonlinear methods in comparison to linear one in many situations.

In the last decades a method of the best M-term trigonometric approximation is gaining a popularity. Corresponding approximative characteristic in a more general case was introduced by Stechkin

in 1955 while formulating the criterion of absolute convergence of orthogonal series. Note, that in a process of getting estimates of the best M-term trigonometric approximations of individual functions and functional classes one usually can not manage to obtain the explicit form of a polynomial on which the order of approximation is achieved. Therefore, in the thesis we considered also the best orthogonal trigonometric approximations. The main advantage of the best orthogonal trigonometric approximations over the best M-term trigonometric approximations is the fact, that coefficients in approximation polynomials are the Fourier coefficients of functions from a corresponding class.

Besides the mentioned characteristics, an important role in nonlinear approximation has also a method of approximation of multivariate functions from certain class by linear combinations of products of functions of fewer variables. The approximations of this kind are called bilinear and their investigation began from the paper of Schmidt of 1907.

Summarizing, let us note that mentioned approximative characteristics are sufficiently studied today on the classes of periodic multivariate classes of Weil – Nagy $W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, Nikol'skii $H^{\boldsymbol{r}}_p$ and Besov $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$. Simultaneously, these quantities are not widely investigated on the classes $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ that were introduced in 1983 by Stepanets (univariate case) and that generalize the classes $W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}$.

Among the most important characteristics of compact sets one can point out their entropy and entropy numbers. Having an information about the entropy or a behaviour of the entropy numbers of the compact set we can deduce how big is the set and what approximative qualities it has.

Questions about the estimates of entropy numbers for the classes of periodic multivariate functions $W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, $H^{\boldsymbol{r}}_p$ and $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ were well investigated. At the same time, the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$, introduced by Pustovoitov for the case $\theta = \infty$ (notation H^{Ω}_p) and further expanded for $1 \le \theta < \infty$ by Yongsheng, Heping, still remained almost completely unexplored. Note, that the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ coincide with the Nikol'skii – Besov classes $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ at a certain choice of function Ω.

Key words: $(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\beta})$-derivative, analogue of the Bernoulli kernel, Nikol'skii – Besov classes, best trigonometric approximations, best bilinear approximations, entropy numbers, step hyperbolic cross.

Підп. до друку 20.12.2018. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,5. Ум. друк. арк. 1,6. Тираж 100 пр. Зам. 56.

Інститут математики НАН України,
01004, Київ, вул. Терещенківська, 3.