НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ПОЖАРСЬКА КАТЕРИНА ВІТАЛІЇВНА

УДК 517.5

ДИСЕРТАЦІЯ

НАЙКРАЩІ НАБЛИЖЕННЯ ТА ЕНТРОПІЙНІ ЧИСЛА КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

01.01.01 — Математичний аналіз
111 — Математика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико – математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело _______ К. В. Пожарська

Науковий керівник
РОМАНЮК Анатолій Сергійович
доктор фізико – математичних наук,
професор

Київ — 2018

АНОТАЦІЯ

Пожарська К. В. *Найкращі наближення та ентропійні числа класів періодичних функцій багатьох змінних. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.*

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико – математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — "Математичний аналіз"(111 — Математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційну роботу присвячено встановленню порядкових оцінок найкращих наближень та ентропійних чисел класів періодичних функцій багатьох змінних. А саме, вивчаються найкращі ортогональні та M-членні тригонометричні наближення періодичних функцій багатьох змінних $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$ та класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$, а також класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ функцій малої гладкості у просторі L_q. Встановлено порядкові оцінки найкращих білінійних наближень класів періодичних функцій багатьох змінних, породжених зсувами аргументу функцій з класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, у просторі L_{q_1,q_2}. Крім цього, досліджуються ентропійні числа класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі L_q.

У вступі висвітлено актуальність теми дисертаційного дослідження, основні завдання, наукову новизну одержаних результатів, а також їх апробацію. Крім цього, наведено означення класів періодичних функцій багатьох змінних $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ і $B^{\Omega}_{p,\theta}$ та апроксимативних характеристик, які вивчаються у наступних розділах роботи.

У першому розділі дисертації дається історична довідка щодо величин, які досліджуються, та наводиться відповідна бібліографія. Підрозділ 1.1 присвячено найкращим ортогональним та M-членним тригонометричним наближенням класів періодичних функцій багатьох змінних. У підрозділі 1.2 сформульовано задачі про найкращі білінійні наближення та ентропійні числа функціональних класів.

У другому розділі дисертаційної роботи встановлено оцінки найкращих наближень індивідуальних періодичних функцій багатьох змінних та функціональних класів. А саме, величин їх найкращого ортогонального та M-членного тригонометричних наближень. Підрозділ 2.1 носить допоміжний характер. У ньому вводяться необхідні позначення, формулюються задачі дослідження та наводиться ряд тверджень, які використовуються при встановленні результатів другого розділу дисертації. У підрозділі 2.2 встановлено оцінки найкращих ортогональних та M-членних тригонометричних наближень функцій $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$ у просторі L_q, $1 < q < \infty$, при певних умовах на кратну послідовність $\boldsymbol{\psi}$. У підрозділі 2.3 отримано оцінки зазначених вище апроксимативних характеристик для класів функцій $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$ у просторі L_q, $1 < q < \infty$. Підрозділ 2.4 містить оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ функцій малої гладкості у просторі L_q у випадку $1 < p \leq 2 < q < \infty$.

Третій розділ дисертації присвячено встановленню порядкових оцінок найкращих білінійних наближень та ентропійних чисел, відповідно, класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ та $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних. Підрозділ 3.1 носить допоміжний характер. У ньому формулюються задача про найкращі білінійні наближення та наводиться твердження, яке використовуються для встановлення результатів наступного підрозділу. У підрозділі 3.2 знайдено порядкові оцінки наближень класів періодичних функцій $2d$ змінних, які породжені функціями d змінних з класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ всеможливими зсувами їх аргументу, лінійними комбінаціями добутків функцій d змінних у просторі L_{q_1,q_2} при деяких співвідношеннях між параметрами p, q_1, q_2 та певних умовах на кратну послідовність $\boldsymbol{\psi}$. Підрозділ 3.3 носить допоміжний характер. У ньому вводяться необхідні позначення, наводяться еквівалентні представлення норм просторів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, формулюється задача про ентропійні числа відповідного функціонального класу та наводиться низка тверджень, які використані для встановлення результатів наступних підрозділів. У підрозділі 3.4 одержані оцінки ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі L_q, $1 \le q < \infty$. Підрозділ 3.5 присвячений знаходженню оцінок ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у рівномірній метриці.

Ключові слова: $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\beta})$-похідна, аналоги ядра Бернуллі, класи Нікольського – Бєсова, найкращі тригонометричні наближення, найкращі білінійні наближення, ентропійні числа, східчастий гіперболічний хрест.

Pozharska K. V. *Best approximations and entropy numbers of the classes of periodic multivariate functions. — The Manuscript.*

A thesis is presented for the Degree of Candidate of Physics and Mathematics in speciality 01.01.01 — "Mathematical Analysis"(111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to the establishment of order estimates for the best approximations and entropy numbers of the classes of periodic multivariate functions. Namely, the best orthogonal and M-term trigonometric approximations are being studied for the periodic multivariate functions $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$, classes $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$, and for the classes $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ of functions of small smoothness in the space L_q. Also, order estimates for the best bilinear approximations are received of the classes of periodic multivariate functions formed by the shifts of an argument of functions from the classes $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ in the space L_{q_1,q_2}. Beside this, the entropy numbers are investigated of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of one and many variables in the space L_q.

The introduction highlights the relevance of the thesis topic, main tasks, scientific novelty of the obtained results, as well as their approbation. In addition, here are the definitions of the classes $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ and $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic multivariate functions and the approximative characteristics that are considered in the following sections of the work.

In the first chapter of the thesis a historical background and corresponding bibliography are given for the quantities investigated. Section 1.1 is devoted to the best orthogonal and M-term trigonometric approximations of the classes of periodic multivariate functions. In Section 1.2, the problems of

the best bilinear approximation and entropy numbers of functional classes are formulated.

The second section of the thesis deals with the best approximations of individual periodic multivariate functions and functional classes. Namely, the values of the best orthogonal and M-term trigonometric approximations are investigated. Section 2.1 is auxiliary. Here necessary notations are introduced, research objectives are formulated and a number of statements is given used to establish results of the second section. In Section 2.2, estimates are received for the best orthogonal and M-term trigonometric approximations of the functions $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$ in the space L_q, $1 < q < \infty$, under certain conditions imposed on the multiple sequence $\boldsymbol{\psi}$. In Section 2.3, the estimates are obtained for the indicated above approximative characteristics of the classes of functions $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$ in the space L_q, $1 < q < \infty$. Section 2.4 contains estimates of the best M-term trigonometric approximations of the classes of functions $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ of functions of small smoothness in the space L_q when $1 < p \leq 2 < q < \infty$.

The third section of the thesis is devoted to the obtainment of order estimates of the best bilinear approximations and entropy numbers, respectively, of the classes $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ and $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of one and many variables. Section 3.1 is auxiliary. Here the problem of the best bilinear approximation is formulated and the statement is given used to establish results of the following section. In Section 3.2, we find order estimates for the approximations of the classes of periodic functions of $2d$ variables formed by d-variable functions from the classes $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ by all possible shifts of their argument. This approximation is carried out by linear combinations of products of d-variable functions in the space L_{q_1,q_2} for certain relations between the parameters p, q_1, q_2 and certain conditions on the multiple sequence $\boldsymbol{\psi}$. Section 3.3 is auxiliary. Here necessary notations are introduced, equivalent representations of the norms of the spaces $B^{\Omega}_{p,\theta}$ are given, problem of the entropy numbers is formulated for the corresponding functional class and a number of statements is given used to establish results of the following sections. In Section 3.4, estimates are obtained for the entropy numbers of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of one and many variables in the space L_q, $1 \le q < \infty$. In Section 3.5 we receive estimates for the entropy numbers of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ in the uniform metric.

Key words: $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\beta})$-derivative, analogue of the Bernoulli kernel, Nikol'skii – Besov classes, best trigonometric approximations, best bilinear approximations, entropy numbers, step hyperbolic cross.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Швай К. В.* Оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень узагальнених багатовимірних аналогів ядер Бернуллі та класів $L^{\psi}_{\boldsymbol{\beta},1}$ у просторі L_q // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — **13**, №1. — С. 300–320.

2. *Shvai K. V.* The best M-term trigonometric approximations of classes of $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\beta})$-differentiable periodic multivariate functions in the space L_q // Journal of computational and applied mathematics. Taras Shevchenko National University of Kyiv. — 2016. – **122**, №2. — С. 83–91.

3. *Швай К. В.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів періодичних функцій багатьох змінних з обмеженою узагальненою похідною у просторі L_q // Український математичний вісник. — 2016. — **13**, №3. — С. 361–375.

   (Переклад: *Shvai K. V.* The best M-term trigonometric approximations of the classes of periodic multivariate functions with bounded generalized derivative in the space L_q // Journal of mathematical sciences. — 2017. — **222**, №6. — P. 750–761.)

4. *Пожарська К .В.* Оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\boldsymbol{\beta},p}$ періодичних функцій багатьох змінних малої гладкості у просторі L_q // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — **14**, №3. — С. 293–318.

5. *Швай К. В.* Оцінки найкращих білінійних наближень класів $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\beta})$-диференційовних періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2018. — **70**, №4. — С. 564–573.

6. *Пожарська К. В.* Оцінки ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2018. — **70**, №9. — С. 1249–1263.

7. *Швай К. В.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів функцій багатьох змінних $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$ у просторі L_q // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2016"(Львів, 25–27 травня 2016р.): Тези доповідей. — http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Shvai.pdf.

8. *Швай К. В.* Оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\beta})$-диференційовних періодичних функцій багатьох змінних // XI Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз"(Одеса, 1–14 серпня 2016р.): Тези доповідей. — К.: Ін-т математики НАН України. — 2016. — С. 114.

9. *Швай К. В.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення узагальнених багатовимірних аналогів ядер Бернуллі // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 22–25 лютого 2017р.): Тези доповідей. — Івано – Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" . — 2017. — С. 134–135.

10. *Швай К. В.* Найкращі білінійні наближення класів $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\beta})$-диференційовних періодичних функцій багатьох змінних // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2017"(Львів, 23–25 травня 2017р.): Тези доповідей. — http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2017/abstracts/Shvai.pdf.

11. *Shvai K. V.* The best M-term trigonometric approximations of multivariate classes of functions with bounded generalized derivative // International conference "Theory of approximation of functions and its applications"in honor of 75th anniversary of Corresponding Member of NAS of Ukraine, Professor Alexander Stepanets (1942–2007) (Slovyansk,

May, 28 – June 3, 2017): Abstracts. — Slovyansk: Donbas State Pedagogical University. — 2017. — P. 36.

12. *Швай К. В.* Найкращі білінійні наближення класів $L^{\psi}_{\boldsymbol{\beta},1}$ періодичних функцій багатьох змінних // Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917–2008) (Київ, 7–10 червня 2017р.): Тези доповідей. — К.: Ін-т математики НАН України. — 2017. — С. 49.

13. *Pozharska K. V.* Entropy numbers for the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic multivariate functions // 4th AMMODIT Conference (Malekhiv, Lviv region, March 19–23, 2018): Abstracts. — P. 20.

14. *Пожарська К. В.* Оцінки ентропійних чисел класів періодичних функцій багатьох змінних // Сучасні проблеми механіки та математики: Зб. наук. праць у 3-х т. / за заг. ред. А. М. Самойленка та Р. М. Кушніра [Електронний ресурс]. — Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. — 2018. — **3**. — С. 69. — Режим доступу до ресурсу: www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018.

15. *Пожарська К. В.* Оцінки ентропійних чисел деяких класів періодичних функцій багатьох змінних // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях"присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (Чернівці, 17–19 вересня 2018р.): Тези доповідей. — Чернівці: Чернівецький нац. ун-т. — 2018. — С. 193.

Зміст

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ — множини, відповідно, цілих та цілих невід'ємних чисел;

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ — множини, відповідно, дійсних та дійсних невід'ємних чисел;

$\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел;

$\mathbb{N}^d$, $\mathbb{Z}^d$, $\mathbb{Z}^d_+$, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^d_+$, $d \geq 1$, — простори d-вимірних векторів, кожна координата яких належить, відповідно, до множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$;

$\mathring{\mathbb{Z}}^d$ — множина $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})^d$;

$x \in A \, (x \notin A)$ — елемент x належить (не належить) множині A;

$[a]$ — ціла частина дійсного числа a;

$\operatorname{sgn} a$ — величина, що дорівнює 1 при $a > 0$, дорівнює -1 при $a < 0$, і нулю при $a = 0$;

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$ — скалярний добуток векторів $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$;

π_d, $d \geq 1$, — d-вимірний куб $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [0, 2\pi]$;

$\|f\|_q$ — норма функції f у просторі L_q, $1 \leq q \leq \infty$;

$L_q := L_q(\pi_d)$, $1 \leq q \leq \infty$, — простір функцій $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, які є 2π-періодичними за кожною змінною, зі скінченною нормою

$$\|f\|_q := \|f\|_{L_q} = \begin{cases} \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(\boldsymbol{x})|^q \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \leq q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\boldsymbol{x} \in \pi_d} |f(\boldsymbol{x})|, & q = \infty; \end{cases}$$

$L_{q_1,q_2} := L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$, $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$, — простір функцій $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$, зі скінченною мішаною нормою $\|f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\|_{q_1,q_2} = \Big\| \|f(\cdot, \boldsymbol{y})\|_{q_1} \Big\|_{q_2}$;

$\widehat{f}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{t})} \mathrm{d}\boldsymbol{t}$ — коефіцієнти Фур'є функції f;

$f * g$ — згортка функцій f та g;

$a(n) \asymp b(n)$, $a(n) \ll b(n)$, $a(n) \gg b(n)$, $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty} \geq 0$ — відповідно, порядкова рівність та порядкові нерівності;

$\rho(\boldsymbol{s})$ — множина вигляду $\rho(\boldsymbol{s}) = \left\{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d\colon\ 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ \boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d\right\}$;

$\rho^+(\boldsymbol{s})$ — множина вигляду $\rho^+(\boldsymbol{s}) = \left\{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d_+\colon\ 2^{s_j-1} \le k_j < 2^{s_j},\ \boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d\right\}$;

$\delta_{\boldsymbol{s}}(f)$ — "блоки"ряду Фур'є функції $f \in L_1$ вигляду

$$\delta_{\boldsymbol{s}}(f) := \delta_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho(\boldsymbol{s})} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})};$$

$Q_n = \bigcup\limits_{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{1}) < n} \rho(\boldsymbol{s})$; $\overline{Q}_n = \bigcup\limits_{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{1}) \le n} \rho(\boldsymbol{s})$ — східчасті гіперболічні хрести;

$\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_d)$ — набір послідовностей;

$f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$ — $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\beta})$-похідна функції $f \in L_1$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_d) \in \mathbb{R}^d$;

$W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta}, p}$ — класи Вейля – Надя періодичних функцій багатьох змінних, $r_j > 0$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, d}$;

$L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}, p}$ — класи $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\beta})$-диференційовних періодичних функцій багатьох змінних;

$B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $B^{\Omega}_{p,\theta}$ — аналоги класів Нікольського – Бєсова періодичних функцій багатьох змінних та їх узагальнення;

$S_{Q_n}(f)$ — частинна східчасто гіперболічна сума Фур'є функції $f \in L_1$;

$e^{\perp}_M(f)_q$ — найкраще ортогональне тригонометричне наближення функції f у просторі L_q, $1 \le q \le \infty$;

$e_M(f)_q$ — найкраще M-членне тригонометричне наближення функції f у просторі L_q, $1 \le q \le \infty$;

$\tau_M(f)_{q_1, q_2}$ — найкраще білінійне наближення функції f у просторі L_{q_1, q_2}, $1 \le q_1, q_2 \le \infty$;

$e^{\perp}_M(F)_q$, $e_M(F)_q$, $\tau_M(F)_{q_1, q_2}$ — точні верхні межі, відповідно, величин $e^{\perp}_M(f)_q$, $e_M(f)_q$, $\tau_M(f)_{q_1, q_2}$ по всіх функціях $f \in F$;

$\varepsilon_M(A, X)$ — ентропійні числа компактної множини A простору X;

D — множина додатних незростаючих послідовностей ϕ, для яких існує стала $C > 0$, така що для всіх $l \in \mathbb{N}$ виконується умова $\frac{\phi(l)}{\phi(2l)} \le C$;

(S^{α}), (S_l) — умови Барі – Стєчкіна, $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{N}$.

ВСТУП

Роботу присвячено дослідженню апроксимативних характеристик класів періодичних функцій багатьох змінних. Зокрема, досліджуються найкращі тригонометричні та білінійні наближення класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, а також ентропійні числа класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Актуальність теми. Вже більше сорока років в теорії наближення активно досліджуються апроксимативні характеристики, пов'язані з нелінійною апроксимацією. Невичерпний інтерес до такого роду наближень викликаний, в першу чергу тим, що в багатьох ситуаціях виявлено переваги нелінійних методів наближення у порівнянні з лінійними.

В останні десятиріччя все більшого розповсюдження набуває метод M-членного тригонометричного наближення, тобто наближення класів періодичних функцій багатьох змінних за допомогою поліномів вигляду

$$P\left(\theta_M, \boldsymbol{x}\right) = \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(\boldsymbol{k}^j, \boldsymbol{x})},$$

де $\theta_M = \left\{\boldsymbol{k}^j\right\}_{j=1}^{M}$ — набір векторів $\boldsymbol{k}^j = (k_1^j, \ldots, k_d^j) \in \mathbb{Z}^d$, $c_j \in \mathbb{C}$ і $(\boldsymbol{k}^j, \boldsymbol{x}) = k_1^j x_1 + \cdots + k_d^j x_d$.

Відповідна апроксимативна характеристика в більш загальній ситуації була введена в 1955 році С. Б. Стєчкіним [63] при формулюванні критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів у просторі L_2. Згодом дослідження найкращих M-членних тригонометричних наближень індивідуальних функцій і, в більшій мірі, функціональних класів, проводились у великій кількості робіт. З детальною бібліографією можна ознайомитися у монографіях В. М. Темлякова [65], Р. М. Тригуба, Е. С. Белінського [89], А. С. Романюка [48], а також в оглядовій статті D. Dung., V. Temlyakov, T. Ullrich [95].

Одержані в цьому напрямі результати, з одного боку, мають самостійний інтерес, а з іншого — вони знаходять практичні застосування, зокрема, в питаннях кодування, передачі і відтворення зображень.

Оскільки при встановленні оцінок найкращих M-членних тригонометричних наближень тих або інших класів функцій не завжди вдається явно пред'явити поліном $P^*(\theta_M, \boldsymbol{x})$, який реалізує відповідний порядок наближення, то в роботах [10, 45, 48] було розглянуто близьку апроксимативну характеристику — найкраще ортогональне тригонометричне наближення. Особливістю найкращих ортогональних тригонометричних наближень у порівнянні з найкращими M-членними тригонометричними наближеннями є те, що коефіцієнти c_j в поліномах $P(\theta_M, \boldsymbol{x})$ є відповідними коефіцієнтами Фур'є функції f.

Крім згаданих апроксимативних характеристик, важливе місце в нелінійній апроксимації посідає метод наближення функцій багатьох змінних з певного класу лінійними комбінаціями добутків функцій меншої кількості змінних. Такі наближення називають білінійними, і їх витоки йдуть з роботи Е. Шмідта [102]. У подальшому дослідження найкращих білінійних наближень функціональних класів отримали розвиток у роботах [19, 31, 48, 52, 65, 106] та інших.

Слід звернути увагу, що одержані в цьому напрямі результати знайшли застосування в питаннях оцінок сингулярних чисел інтегральних операторів, а також колмогоровських поперечників відповідних функціональних класів.

Підсумовуючи сказане, зазначимо, що згадані апроксимативні характеристики на теперішній час достатньо повно вивчені стосовно класів періодичних функцій багатьох змінних Вейля–Надя $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$, Нікольського $H^{\boldsymbol{r}}_p$ і Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$. В той же час, в значно меншій мірі ці величини досліджені на класах $L^{\psi}_{\boldsymbol{\beta},p}$, які в одновимірному випадку введені у 1983 році О. І. Степанцем [61, Ч. I, с. 132], і які є узагальненням класів $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$.

Однією з важливих характеристик компактів є їх ентропія, або близька до неї характеристика — ентропійні числа. Володіючи інформацією про ентропію або поведінку ентропійних чисел компактної множини, можна робити висновок, наскільки великою (масивною) є ця множина, і якими апроксимативними властивостями вона володіє.

Питання, пов'язані з оцінками ентропійних чисел класів періодичних функцій багатьох змінних $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$, $H^{\boldsymbol{r}}_{p}$ і $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ вивчалися у роботах [7, 14, 49, 50, 55, 67, 68, 88, 94], і при цьому одержано низку глибоких і завершених результатів. Більш детальну інформацію можна отримати в оглядовій статті [95].

З іншого боку, практично зовсім не дослідженими в цьому напрямі залишалися класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які при $\theta = \infty$ (позначення H^{Ω}_{p}) були розглянуті М. М. Пустовойтовим [35], а при $1 \leq \theta < \infty$ S. Yongsheng, W. Heping [109]. Слід зазначити, що класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ при певному виборі функції Ω збігаються з класами Нікольського – Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$.

Таким чином, з огляду на сказане, дослідження згаданих апроксимативних характеристик класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ та ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ є актуальним.

Мета і завдання дослідження. *Метою* даної роботи є встановлення оцінок найкращих ортогональних та M-членних тригонометричних наближень періодичних функцій багатьох змінних $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$, класів періодичних функцій багатьох змінних $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$, а також класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ періодичних функцій багатьох змінних малої гладкості у просторі L_q. Знаходження порядкових оцінок найкращих білінійних наближень класів періодичних функцій багатьох змінних, породжених зсувами аргументу функцій з класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, у просторі L_{q_1,q_2}, а також ентропійних чисел класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі L_q.

Об'єктом дослідження є класи $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ та $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних.

Перед тим, як означити ці класи, наведемо необхідні позначення.

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, — d-вимірний евклідів простір з елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ і $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + \cdots + x_dy_d$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$.

Через $L_q := L_q(\pi_d)$, $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d}[0,2\pi]$, $1 \le q \le \infty$, позначимо простір функцій $f(\boldsymbol{x})$, які є 2π–періодичними за кожною змінною, зі скінченною нормою

$$\|f\|_q := \|f\|_{L_q} = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(\boldsymbol{x})|^q \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \le q < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{L_\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\pi_d} |f(\boldsymbol{x})|.$$

Надалі будемо вважати, що для $f \in L_1$ виконується умова

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}x_j = 0, \qquad j = \overline{1,d}.$$

Для $f \in L_1$ розглянемо її ряд Фур'є

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})},$$

де $\widehat{f}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{t})} \mathrm{d}\boldsymbol{t}$ — коефіцієнти Фур'є функції f. Далі, нехай $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_d)$, $\psi_j \ne 0$, $j = \overline{1,d}$, — довільні послідовності, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, $\mathring{\mathbb{Z}}^d = (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^d$. Припустимо, що ряд

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathring{\mathbb{Z}}^d} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{i\frac{\pi\beta_j}{2}\operatorname{sgn} k_j}}{\psi_j(|k_j|)} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції. Таку функцію називають (див. [61, Ч. I, с. 132], [17], [40]) $(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\beta})$-похідною функції f і позначають $f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$.

Через $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, $1 \le p \le \infty$, позначимо клас функцій f, для яких існують $(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\beta})$-похідні і виконується умова $\left\|f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right\|_p \le 1$.

Зазначимо, що класи $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ є узагальненням добре відомих класів Вейля – Надя $W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ (див., наприклад, [60, с. 25]) та співпадають з ними при $\psi_j(|\tau|) = |\tau|^{-r_j}$, $\tau \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$.

Окрім класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ в роботі досліджуються також функції $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$, ряди Фур'є яких мають вигляд

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathring{\mathbb{Z}}^d}\prod_{j=1}^{d}\psi_j\left(|k_j|\right)e^{i\frac{\pi\beta_j}{2}\operatorname{sgn}k_j}e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}.$$

У випадку $\psi_j\left(|\tau|\right)=|\tau|^{-r_j}$, $\tau\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $r_j>0$, $j=\overline{1,d}$, функції $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$ є аналогами ядра Бернуллі (див., наприклад, [65, с. 31]).

З одного боку, функції $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$ є цікавими з точки зору їх апроксимаційних властивостей, а з іншого — вони відіграють важливу роль при дослідженні деяких апроксимативних характеристик класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$.

Перейдемо до означення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які при $\theta=\infty$ (позначення H^{Ω}_p) були введені М. М. Пустовойтовим [35], а згодом поширені на випадок $1\leq\theta<\infty$ у роботі S. Yongsheng, W. Heping [109].

Класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ визначаються за допомогою мажорантної функції $\Omega(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d_+$, для мішаного модуля неперервності $\Omega_l(f,\boldsymbol{t})_p$ порядку l , $l\in\mathbb{N}$, функції $f\in L_p$, $1\leq p\leq\infty$, та числового параметра θ, $1\leq\theta\leq\infty$.

Отже, нехай для $f\in L_p$, $1\leq p\leq\infty$,

$$\Omega_l(f)_p:=\Omega_l(f,\boldsymbol{t})_p=\sup_{\substack{|h_j|\leqslant t_j\\ j=\overline{1,d}}}\|\Delta^l_{\boldsymbol{h}}f\|_p$$

— мішаний модуль неперервності порядку l, $l\in\mathbb{N}$, функції f, де

$$\Delta^l_{\boldsymbol{h}}f(\boldsymbol{x})=\Delta^l_{h_d}\cdots\Delta^l_{h_1}f(\boldsymbol{x})=\Delta^l_{h_d}\big(\Delta^l_{h_{d-1}}\cdots(\Delta^l_{h_1}f(\boldsymbol{x}))\big),\ \boldsymbol{h}=(h_1,\ldots,h_d),$$

— мішана l-та різниця з кроком h_j за змінною x_j, $j=\overline{1,d}$, а

$$\Delta^l_{h_j}f(\boldsymbol{x})=\sum_{n=0}^{l}(-1)^{l-n}C^n_l f(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j+nh_j,x_{j+1},\ldots,x_d).$$

Далі розглянемо множину $\Psi_{l,d}$ функцій $\Omega(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d_+$, типу мішаного модуля неперервності порядку l, які задовольняють умови

1) $\Omega(\boldsymbol{t}) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1, d}$; $\quad \Omega(\boldsymbol{t}) = 0$, $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(\boldsymbol{t})$ неперервна на $\mathbb{R}_+^d$;

3) $\Omega(\boldsymbol{t})$ не спадає по кожній змінній $t_j \geq 0$, $j = \overline{1, d}$, при будь-яких фіксованих значеннях інших змінних t_i, $i \neq j$;

4) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \leqslant C_1 \left(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j \right)^l \Omega(\boldsymbol{t})$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, $C_1 > 0$.

Варто зазначити, що для $f \in L_p$ її модуль неперервності $\Omega_l(f)_p \in \Psi_{l,d}$.

На функції $\Omega(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}_+^d$, накладемо додаткові умови (S^α) і (S_l), які називають умовами Барі – Стєчкіна [6]. Для одновимірного випадку ($t \in \mathbb{R}_+$) це означає наступне:

а) $\varphi \in (S^\alpha)$, $\varphi \geqslant 0$, $\alpha > 0$, якщо функція $\frac{\varphi(\tau)}{\tau^\alpha}$ майже зростає, тобто якщо існує така стала $C_2 > 0$, яка не залежить від τ_1 та τ_2, $0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 1$, що
$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leqslant C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha};$$

б) $\varphi \in (S_l)$, $\varphi > 0$, $l \in \mathbb{N}$, якщо існує γ, $0 < \gamma < l$, таке що $\frac{\varphi(\tau)}{\tau^\gamma}$ майже спадає, тобто існує не залежна від τ_1 та τ_2, $0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 1$, стала $C_3 > 0$, така що
$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \geqslant C_3 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}.$$

При $d > 1$ будемо говорити, що $\Omega(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}_+^d$, задовольняє умови (S^α) та (S_l), якщо $\Omega(\boldsymbol{t})$ як функція однієї змінної t_j, $j = \overline{1, d}$, задовольняє ці умови при будь-яких фіксованих значеннях інших змінних t_i, $i \neq j$.

Функція $f \in L_p$ належить простору $B_{p,\theta}^\Omega$, $1 \leq p, \theta \leq \infty$, $\Omega \in (S_l) \cap$

$(S^{\alpha})\cap\Psi_{l,d}$, якщо для неї скінченна напівнорма

$$|f|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}=\begin{cases}\left(\int\limits_{\pi_d}\left(\frac{\Omega_l(f,\boldsymbol{t})_p}{\Omega(\boldsymbol{t})}\right)^{\theta}\prod\limits_{j=1}^{d}\frac{\mathrm{d}t_j}{t_j}\right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1\le\theta<\infty,\\ \sup\limits_{\substack{t_j\ge0\\ j=\overline{1,d}}}\frac{\Omega_l(f,\boldsymbol{t})_p}{\Omega(\boldsymbol{t})}, & \theta=\infty.\end{cases}$$

Норму в просторі $B^{\Omega}_{p,\theta}$ визначимо наступним чином

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}=\|f\|_p+|f|_{B^{\Omega}_{p,\theta}},\qquad 1\le p,\theta\le\infty,$$

та будемо розглядати далі одиничні кулі в цьому просторі, використовуючи для них те ж саме позначення, що і для всього простору, тобто

$$B^{\Omega}_{p,\theta}=\left\{f\in B^{\Omega}_{p,\theta}:\quad \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}\le1\right\}.$$

Варто зазначити, що означення класів та просторів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ не залежать від порядку мішаного модуля неперервності l в тому сенсі, що різним значенням l відповідають еквівалентні норми цих просторів.

Зауважимо також, що при $\theta=\infty$ покладають $B^{\Omega}_{p,\infty}\equiv H^{\Omega}_p$, де H^{Ω}_p — аналоги класів Нікольського $H^{\boldsymbol{r}}_p$ (див., наприклад, [65]).

Крім цього, при $\Omega(\boldsymbol{t})=\prod\limits_{j=1}^{d}t_j^{r_j}$, $r_j>0$, $j=\overline{1,d}$, класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ збігаються з аналогами класів Нікольського – Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ (див., наприклад, [1, 2, 29]).

Предметом дослідження є: найкращі ортогональні та M-членні тригонометричні наближення періодичних функцій багатьох змінних $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$ та класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$; найкращі білінійні наближення класів періодичних функцій багатьох змінних, породжених зсувами аргументу функцій з класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$; ентропійні числа класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Отже, найкращим M-членним тригонометричним наближенням функції $f \in L_q$, $1 \le q \le \infty$, називають величину

$$e_M(f)_q = \inf_{\boldsymbol{k}^j, c_j} \left\| f - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i\left(\boldsymbol{k}^j, \boldsymbol{x}\right)} \right\|_q,$$

де $\left\{\boldsymbol{k}^j\right\}_{j=1}^M$ — система векторів $\boldsymbol{k}^j = \left(k_1^j, \ldots, k_d^j\right)$ із цілочисельними координатами, $c_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, M}$.

Якщо $F \subset L_q$, то покладають

$$e_M(F)_q = \sup_{f \in F} e_M(f)_q$$

— найкраще M-членне тригонометричне наближенням функціонального класу F.

У тому випадку, коли в означеннях величин $e_M(f)_q$ та $e_M(F)_q$ покласти $c_j = \widehat{f}\left(\boldsymbol{k}^j\right)$, де $\widehat{f}\left(\boldsymbol{k}^j\right)$ — коефіцієнти Фур'є функції f, що відповідають системі векторів $\left\{\boldsymbol{k}^j\right\}_{j=1}^M$, отримаємо величини $e_M^{\perp}(f)_q$ та $e_M^{\perp}(F)_q$, які називають, відповідно, найкращим ортогональним тригонометричним наближенням функції f та класу F. Тобто

$$\begin{aligned} e_M^{\perp}(f)_q &= \inf_{\boldsymbol{k}^j} \left\| f - \sum_{j=1}^{M} \widehat{f}\left(\boldsymbol{k}^j\right) e^{i\left(\boldsymbol{k}^j, \boldsymbol{x}\right)} \right\|_q, \\ e_M^{\perp}(F)_q &= \sup_{f \in F} e_M^{\perp}(f)_q. \end{aligned}$$

Легко бачити, що справедливі співвідношення:

$$\begin{aligned} e_M(f)_q &\le e_M^{\perp}(f)_q, \quad f \in L_q,\ 1 \le q \le \infty; \\ e_M(F)_q &\le e_M^{\perp}(F)_q, \quad F \subset L_q,\ 1 \le q \le \infty. \end{aligned}$$

З найкращим M-членним тригонометричним наближенням функцій і функціональних класів тісно пов'язана наступна апроксимативна характеристика.

Отже, нехай $L_{q_1,q_2} := L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$, $1 \le q_1, q_2 \le \infty$, — множина функцій

$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$, зі скінченною мішаною нормою

$$\|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|_{q_1,q_2} := \|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|_{L_{q_1,q_2}} = \Big\| \|f(\cdot,\boldsymbol{y})\|_{q_1} \Big\|_{q_2},$$

яка обчислюється послідовно, спочатку за змінною $\boldsymbol{x}$ у просторі L_{q_1}, а потім — від результату за змінною $\boldsymbol{y}$ у просторі L_{q_2}.

Тоді величина

$$\tau_M(f)_{q_1,q_2} = \inf_{u_i(\boldsymbol{x}),v_i(\boldsymbol{y})} \left\| f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \sum_{i=1}^{M} u_i(\boldsymbol{x})v_i(\boldsymbol{y}) \right\|_{q_1,q_2},$$

де $u_i\in L_{q_1}$, $v_i\in L_{q_2}$, називається найкращим білінійним наближенням порядку M функції $f\in L_{q_1,q_2}$.

Якщо $F\subset L_{q_1,q_2}$ — деякий функціональний клас, то покладають

$$\tau_M(F)_{q_1,q_2} = \sup_{f\in F}\tau_M(f)_{q_1,q_2}.$$

Далі, нехай X — банахів простір і

$$B_X(\boldsymbol{y},r) = \{\boldsymbol{x}\in X:\quad \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_X \le r\}$$

— куля радіуса r з центром в точці $\boldsymbol{y}$.

Для компактної множини $A\subset X$ і $\varepsilon>0$ через $\varepsilon_k(A,X)$ позначимо її ентропійні числа

$$\varepsilon_k(A,X) = \inf\left\{\varepsilon:\quad \exists \boldsymbol{y}^1,\dots,\boldsymbol{y}^{2^k}\in X:\quad A\subseteq\bigcup_{j=1}^{2^k} B_X(\boldsymbol{y}^j,\varepsilon)\right\}.$$

Одержані результати будемо формулювати в термінах порядкових співвідношень. Для двох невід'ємних послідовностей $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ співвідношення (порядкова нерівність) $a(n)\ll b(n)$ означає, що існує стала $C_4>0$ така, що $a(n)\le C_4 b(n)$. Співвідношення $a(n)\asymp b(n)$ рівносильне тому, що $a(n)\ll b(n)$ і $b(n)\ll a(n)$. Зазначимо, що сталі C_i з відповідними індексами i, які далі будуть зустрічатися у порядкових співвідношеннях, можуть залежати від деяких параметрів. Ці параметри інколи будемо вказувати, в решті випадків вони будуть зрозумілими із контексту.

Задля уникнення нагромадження індексів, будемо розрізняти сталі за їх індексами лише в межах одного підрозділу. Це не повинно викликати жодних непорозумінь, адже в дисертаційній роботі ми встановлюємо лише порядкові оцінки.

Основними завданнями дослідження є:

1. Встановити і порівняти порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень та найкращих M-членних тригонометричних наближень періодичних функцій багатьох змінних $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$, які при певному виборі кратної послідовності $\boldsymbol{\psi}$ співпадають з аналогами ядер Бернуллі, у просторі L_q, $1 < q < \infty$.

2. Одержати і порівняти порядкові оцінки найкращих ортогональних та M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q, $1 < q < \infty$.

3. Знайти порядкові оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ періодичних функцій багатьох змінних малої гладкості у просторі L_q, $1 < p \leq 2 < q < \infty$. Порівняти одержані результати з відповідними оцінками найкращих ортогональних тригонометричних наближень та наближень за допомогою тригонометричних поліномів з "номерами"гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів.

4. Встановити порядкові оцінки найкращих білінійних наближень класів періодичних функцій $2d$ змінних, які породжені функціями d змінних з класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ всеможливими зсувами їх аргументу, у просторі L_{q_1,q_2}.

5. Отримати порядкові оцінки ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних у метриці простору L_q,

$1 \leq q < \infty$, та у рівномірній метриці.

Методи дослідження. При розв'язанні поставлених завдань, у дисертаційній роботі використані загальні методи теорії функцій та математичного аналізу у поєднанні зі спеціальними методами, які були розроблені у роботах В. М. Темлякова, Е. С. Белінського, А. С. Романюка та інших.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи є новими і полягають у наступному.

1. Встановлено порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень та найкращих M-членних тригонометричних наближень періодичних функцій багатьох змінних $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$, які при певному виборі кратної послідовності $\boldsymbol{\psi}$ співпадають з аналогами ядер Бернуллі, у просторі L_q, $1 < q < \infty$. Виявлено, що у випадку $2 < q < \infty$ швидкість спадання відповідних величин при $M \to \infty$ відрізняється за порядком.

2. Одержано порядкові оцінки найкращих ортогональних та M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q, $1 < q < \infty$. При $2 < q < \infty$ виявлено відмінності у поведінці відповідних апроксимативних характеристик класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$.

3. Знайдено порядкові оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ періодичних функцій багатьох змінних малої гладкості у просторі L_q, $1 < p \leq 2 < q < \infty$. Встановлено, що оцінки зверху цих величин кращі за порядком, ніж оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень та наближень за допомогою тригонометричних поліномів з "номерами"гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів.

4. Одержано порядкові оцінки найкращих білінійних наближень класів періодичних функцій $2d$ змінних, які породжені функціями d змін-

них з класів $L^{\psi}_{\boldsymbol{\beta},p}$ всеможливими зсувами їх аргументу, у просторі L_{q_1,q_2}.

5. Отримано порядкові оцінки ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних у метриці простору L_q, $1 \leq q < \infty$, та у рівномірній метриці.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження, а також постановка задач належить науковому керівнику — доктору фіз. – мат. наук, професору А. С. Романюку. Всі результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися і обговорювалися на:

- Конференції молодих учених "Підстригачівські читання — 2016", Львів, 25–27 травня 2016 року;
- XI Літній школі "Алгебра, Топологія, Аналіз", Одеса, 1–14 серпня 2016 року;
- Третій конференції "Approximation Methods for Molecular Modelling and Diagnosis Tools", Київ, 26–30 січня 2017 року;
- Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", Ворохта, 22 – 25 лютого 2017 року;
- Конференції молодих учених "Підстригачівські читання — 2017", Львів, 23–25 травня 2017 року;
- Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування", присвяченій 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця, Слов'янськ, 28 травня – 3 червня 2017 року;

- Міжнародній конференції молодих математиків, присвяченій 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського, Київ, 7–10 червня 2017 року;
- Четвертій конференції "Approximation Methods for Molecular Modelling and Diagnosis Tools", Малехів (Львівська обл.), 19–23 березня 2018 року;
- Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки та математики", присвяченій 90-річчю з дня народження академіка НАН України Я. С. Підстригача та 40-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики (ІППММ) НАН України, Львів, 22–25 травня 2018 року;
- Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях", присвяченій 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, Чернівці, 17–19 вересня 2018 року;
- семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник семінару: доктор фіз. – мат. наук, професор А. С. Романюк);
- семінарі "Сучасний аналіз"у Київському національному університеті імені Т. Г. Шевченка (керівники семінару: доктори фіз. – мат. наук, професори І. О. Шевчук, О. О. Курченко, В. М. Радченко).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у 15 наукових публікаціях [36–39, 72–79, 100, 103, 104]. Шість з них [36, 37, 72–74, 103] є статтями у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань з фізико – математичних наук, одну з яких [73] надруковано у виданні, яке внесено до міжнародної наукометричної бази Scopus. Решта 9 опубліковано у збірниках тез міжнародних наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі змісту, переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків, а також списку використаних джерел, що містить 109 найменувань. Повний обсяг дисертації становить 137 сторінок, з них 13 сторінок займає список використаних джерел.

Дамо коротку характеристику змісту дисертації.

У *вступі* висвітлюється актуальність теми дисертаційного дослідження, основні завдання, наукова новизна одержаних результатів, а також їх апробація. Крім цього, тут наведено означення класів періодичних функцій багатьох змінних $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ і $B^{\Omega}_{p,\theta}$ та апроксимативних характеристик, які вивчаються у наступних розділах роботи.

У *першому розділі* дисертації дається історична довідка щодо величин, які досліджуються, та наводиться відповідна бібліографія. Підрозділ 1.1 присвячено найкращим ортогональним та M-членним тригонометричним наближенням класів періодичних функцій багатьох змінних. У підрозділі 1.2 сформульовано задачі про найкращі білінійні наближення та ентропійні числа функціональних класів.

У *другому розділі* дисертаційної роботи встановлено оцінки найкращих наближень індивідуальних періодичних функцій багатьох змінних та функціональних класів. А саме, величин їх найкращого ортогонального та M-членного тригонометричних наближень. Підрозділ 2.1 носить допоміжний характер. У ньому вводяться необхідні позначення, формулюються задачі дослідження та наводиться ряд тверджень, які використані для встановлення результатів другого розділу дисертації. У підрозділі 2.2 встановлено оцінки найкращих ортогональних та M-членних тригонометричних наближень функцій $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$ у просторі L_q, $1 < q < \infty$. У підрозділі 2.3 отримано оцінки зазначених вище апроксимативних характеристик для класів функцій $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$ у просторі L_q, $1 < q < \infty$. Підрозділ 2.4 містить оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ функцій малої гладкості у випадку $1 < p \leq 2 < q < \infty$.

Третій розділ дисертації присвячено встановленню порядкових оцінок найкращих білінійних наближень та ентропійних чисел, відповідно, класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ та $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних. Підрозділ 3.1 носить допоміжний характер. У ньому формулюються задача про найкращі білінійні наближення та наводиться твердження, яке використовуються для встановлення результатів наступного підрозділу. У підрозділі 3.2 знайдено порядкові оцінки наближень класів періодичних функцій $2d$ змінних, які породжені функціями d змінних з класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ всеможливими зсувами їх аргументу, лінійними комбінаціями добутків функцій d змінних у просторі L_{q_1,q_2} при деяких співвідношеннях між параметрами p, q_1, q_2 та умовах на кратну послідовність $\boldsymbol{\psi}$. Підрозділ 3.3 носить допоміжний характер. У ньому вводяться необхідні позначення, наводяться еквівалентні представлення норм просторів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, формулюється задача про ентропійні числа відповідного функціонального класу та наводиться ряд тверджень, які використані для встановлення результатів наступних підрозділів. У підрозділі 3.4 одержано оцінки ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі L_q, $1 \le q < \infty$. Підрозділ 3.5 присвячено знаходженню оцінок ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у рівномірній метриці.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України згідно з науково – дослідною темою "Апроксимативні та структурні характеристики функціональних множин", номер державної реєстрації 0111 U 002079.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертація носить теоретичний характер. Результати роботи та методика їх отримання можуть бути використані при подальшому вивченні питань, пов'язаних із наближенням класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних.

Подяки. Щиру подяку автор висловлює своєму науковому керівнику доктору фіз. – мат. наук, професору Анатолію Сергійовичу Романюку за постановку задач, цінні зауваження та поради у процесі роботи над дисертацією, а також усім співробітникам відділу теорії функцій Інституту математики НАН України за дружні та плідні дискусії.

Розділ 1

Огляд літератури

1.1. Найкращі M-членні та ортогональні тригонометричні наближення класів періодичних функцій багатьох змінних

Спочатку означимо відповідні апроксимативні характеристики та дамо коротку історичну довідку стосовно їх дослідження.

Отже, найкращим M-членним тригонометричним наближенням функції $f \in L_q$, $1 \leq q \leq \infty$, називають величину

$$e_M(f)_q = \inf_{\boldsymbol{k}^j, c_j} \left\| f - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(\boldsymbol{k}^j, \boldsymbol{x})} \right\|_q, \tag{1.1}$$

де $\left\{\boldsymbol{k}^j\right\}_{j=1}^{M}$ — система векторів $\boldsymbol{k}^j = \left(k_1^j, ..., k_d^j\right)$ із цілочисельними координатами, а $c_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, M}$.

Аналогічним чином вводяться найкращі M-членні тригонометричні наближення і для функціональних класів, а саме, якщо $F \subset L_q$, то покладають

$$e_M(F)_q = \sup_{f \in F} e_M(f)_q. \tag{1.2}$$

Величина $e_M(f)_2$ для функцій однієї змінної в більш загальній ситуації була введена С. Б. Стєчкіним [63] при формулюванні критерію абсолютної збіжності рядів Фур'є. А саме, він розглядав величину найкращого M-членного тригонометричного наближення (1.1) для сумовної в квадраті на відрізку $[0, 1]$ функції f, де замість тригонометричної системи

$\left\{e^{ikx}\right\}$ розглядалась довільна повна ортонормована в просторі $L_2([0,1])$ система $\Phi = \{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Таким способом введена величина отримала назву найкращого квадратичного наближення елемента f M-членними поліномами за системою Φ.

Перші оцінки величини $e_M(f)_\infty$ для деяких індивідуальних функцій отримані Р. С. Ісмагіловим [19]. Систематичне ж вивчення величин (1.2) на класах періодичних функцій багатьох змінних $W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ та $H^{\boldsymbol{r}}_p$ було започатковано В. М. Темляковим [65, 106]. Згодом дослідження найкращих M-членних тригонометричних наближень індивідуальних функцій та класів функцій як однієї, так і багатьох змінних, проводилося у великій кількості робіт, зокрема: В. Є. Майорова [30], К. І. Осколкова [34], Ю. І. Маковоза [98], Е. С. Белінського [8], Б. С. Кашина, В. М. Темлякова [22], О. І. Степанця [61], А. С. Романюка [46, 48], А. С. Романюка, В. С. Романюка [51], R. A. DeVore, V. N. Temlyakov [92], D. Dung [93], Е. С. Белінського, Р. М. Тригуба [89], С. А. Стасюка [105], Н. М. Консевич [26], В. В. Шкапи [85], А. С. Сердюка, Т. А. Степанюк [53], А. Л. Шидліча [80,81], А. Л. Шидліча, С. О. Чайченка [82], А. С. Федоренка [69] та інших. Деякі аналоги найкращих M-членних тригонометричних наближень, які пов'язані з наближеннями інтегралів від невід'ємних функцій, досліджувалися у роботі О. І. Степанця, А. Л. Шидліча [62].

Більш детальну історію дослідження величин (1.1), (1.2) та відповідну бібліографію можна знайти у роботах [46, 48, 65, 89, 91, 95].

Слід зазначити, що в деяких випадках оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень функціональних класів співпадають за порядком із оцінками наближень за допомогою тригонометричних поліномів із "номерами"гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів. Але поряд з цим зустрічаються ситуації, коли нелінійні методи наближення мають переваги у порівнянні з лінійними методами [11, 22, 34, 43, 65].

Оскільки при встановленні оцінок найкращих M-членних тригонометричних наближень не завжди вдається явно пред'явити поліном, який реалізує відповідний порядок наближення, то дослідниками було розглянуто близьку апроксимативну характеристику — найкраще ортогональне тригонометричне наближення. Особливістю найкращих ортогональних тригонометричних наближень є те, що коефіцієнти c_j в наближаючих поліномах є відповідними коефіцієнтами Фур'є функції f. Отримані таким чином величини $e^{\perp}_M(f)_q$ та $e^{\perp}_M(F)_q$ називають, відповідно, найкращим ортогональним тригонометричним наближенням функції f та класу F.

Величину $e^{\perp}_M(f)_q$ вперше розглянув Е. С. Белінський [10], і згодом її дослідження набуло розвитку у роботах В. М. Темлякова [65], Е. С. Белінського [11, 87], А. С. Романюка [45, 48], А. С. Романюка, В. С. Романюка [51], О. І. Степанця [61], А. С. Федоренка [69], Н. М. Консевич [27], С. А. Стасюка [59], С. Я. Янченка [86], А. Л. Шидліча [80, 81], Д. Б. Базарханова [5], В. В. Шкапи [83], А. С. Сердюка, Т. А. Степанюк [54] та інших.

При дослідженні питання про оцінки найкращих тригонометричних наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q суттєво виокремлювати різні випадки співвідношень між параметрами p та q. Особливої уваги заслуговують випадки $p = 1, \infty$ та $q = 1, \infty$, які є найбільш цікавими та складними з точки зору методів отримання оцінок величини $e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q$. Саме для граничних випадків залишається низка відкритих питань щодо оцінок найкращих M-членних та ортогональних тригонометричних наближень, білінійних наближень та інших апроксимативних характеристик різних функціональних класів. Зокрема, для класів $W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ досі залишається нерозв'язаною задача про порядкові оцінки величини $e_M\big(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},1}\big)_1$, а у випадку $p = q = \infty$ постає питання про точні за порядком оцінки величини $e_M\big(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},\infty}\big)_\infty$ (тут відомі деякі результати А. С. Романюка [44] та Е. С. Белінського [87]).

Термін "мала гладкість" бере початок з роботи [20], в якій Б. С. Кашин, досліджуючи колмогоровські поперечники класів $W^{r}_{\boldsymbol{\beta},1}$ періодичних функцій однієї змінної у просторі L_q, виявив, що при $2 < q < \infty$ і $1 - \frac{1}{q} < r < 1$ поведінка цих поперечників суттєво відрізняється від випадку $r > 1$.

Згодом подібне явище було виявлено і при дослідженні інших апроксимативних характеристик класів $W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, $H^{\boldsymbol{r}}_p$, $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ і $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ періодичних функцій як однієї, так і багатьох змінних [10, 11, 43, 46]. Більш детальну інформацію з цього приводу можна отримати в оглядовій статті [95].

Оскільки гладкісні властивості функцій з класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ визначаються поведінкою послідовностей ψ_j, $j = \overline{1,d}$, то природно виникає інтерес дослідити величини $e_M\Big(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\Big)_q$ при $1 < p \le 2 < q < \infty$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^d$ і відповідних обмеженнях на послідовності ψ_j, $j = \overline{1,d}$.

1.2. Найкращі білінійні наближення та ентропійні числа функціональних класів

Нехай $L_{q_1,q_2} := L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$, $1 \le q_1, q_2 \le \infty$, — множина функцій $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$, зі скінченною мішаною нормою

$$\|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|_{q_1,q_2} := \|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|_{L_{q_1,q_2}} = \Big\| \|f(\cdot,\boldsymbol{y})\|_{q_1} \Big\|_{q_2},$$

яка обчислюється послідовно, спочатку за змінною $\boldsymbol{x}$ у просторі L_{q_1}, а потім — від результату за змінною $\boldsymbol{y}$ у просторі L_{q_2}.

Тоді величина

$$\tau_M(f)_{q_1,q_2} = \inf_{u_i(\boldsymbol{x}),v_i(\boldsymbol{y})} \left\| f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \sum_{i=1}^{M} u_i(\boldsymbol{x})v_i(\boldsymbol{y}) \right\|_{q_1,q_2},$$

де $u_i \in L_{q_1}$, $v_i \in L_{q_2}$, називається найкращим білінійним наближенням порядку M функції $f \in L_{q_1,q_2}$.

Якщо $F \subset L_{q_1,q_2}$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$\tau_M(F)_{q_1,q_2} = \sup_{f\in F} \tau_M(f)_{q_1,q_2}. \tag{1.3}$$

Класичний результат стосовно найкращих білінійних наближень періодичних функцій двох змінних отримав Е. Шмідт [102] в процесі дослідження інтегральних рівнянь.

Згодом вивчення апроксимативної характеристики (1.3) для різних функціональних класів, зокрема класів $W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, $H^{\boldsymbol{r}}_p$, $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних та їх аналогів, набуло розвитку у роботах Р. С. Ісмагілова [19], Н. В. Мірошина, В. В. Хромова [31], В. М. Темлякова [65, 66, 106], А. С. Романюка [44, 47, 48], А. С. Романюка, В. С. Романюка [52] К. В. Соліч [56], В. В. Шкапи [85] та інших.

Серед результатів, які були встановлені для неперіодичного випадку, слід виділити роботи М.-Б. А. Бабаєва [3,4]. В цих роботах можна знайти історію дослідження величин (1.3) у відповідному напрямку.

Крім самостійного інтересу, величини білінійного наближення тісно пов'язані з іншими важливими характеристиками. Так, Е. Шмідт [102] встановив зв'язок між наближеннями функцій $f(x,y)$ двох змінних білінійними формами у просторі $L_2\left([0,1]^2\right)$ та властивостями інтегральних операторів $J_f(g)$ з ядром $f(x,y)$: $J_f(g) = \int\limits_0^1 f(x,y)g(y)\,\mathrm{d}y$. Крім цього, Е. Шмідт отримав рівність, яка показує зв'язок між величинами $\tau_M(f)_{2,2}$ і сингулярними числами оператора J_f. Цей зв'язок був пізніше застосований М. Ш. Бірманом, М. З. Соломяком [13] для отримання оцінок сингулярних чисел інтегральних операторів, а також Н. В. Мірошиним, В. В. Хромовим [31] для встановлення оцінок величин $\tau_M(f)_{2,2}$.

У підрозділі 3.2 встановлені порядкові оцінки величин $\tau_M(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p})_{q_1,q_2}$ при умові, що ці величини розглядаються для функцій $2d$ змінних вигляду $f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$, утворених із функцій d змінних $f(\boldsymbol{x})\in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ зсувом їх аргументу $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$ на всеможливі $\boldsymbol{y}\in\pi_d$, при деяких співвідношеннях між параметрами p, q_1 та q_2. Іншими словами, досліджуються величини

$$\tau_M(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p})_{q_1,q_2} = \sup_{f\in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}} \tau_M(f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))_{q_1,q_2} =$$

$$= \sup_{f\in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}} \inf_{u_i(\boldsymbol{x}),v_i(\boldsymbol{y})} \left\| f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \sum_{i=1}^{M} u_i(\boldsymbol{x})v_i(\boldsymbol{y}) \right\|_{q_1,q_2},$$

де $u_i \in L_{q_1}$, $v_i \in L_{q_2}$.

Варто зазначити, що для класів F функцій f, інваріантних відносно зсуву аргументу, оцінки їх найкращих білінійних наближень, крім самостійного інтересу, знаходять застосування для оцінок знизу колмогоровських поперечників $d_M(F, L_{q_1})$. Нагадаємо, що колмогоровським поперечником [97] центрально-симетричної множини A в нормованому просторі X називається величина

$$d_M(A, X) = \inf_{L_M} \sup_{x \in X} \inf_{y \in L_M} \|x - y\|_X ,$$

де L_M — підпростори простору X розмірності, що не перевищує M.

Відомо (див., наприклад, [65, с. 85]), що для множини F_f функцій $f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$, утвореної із функції $f(\boldsymbol{x}) \in F$, $F \subset L_1(\pi_d)$, зсувом аргументу $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ на довільний вектор $\boldsymbol{y} \in \pi_d$, справедливе співвідношення

$$\tau_M(f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}))_{q_1,\infty} = d_M(F_f, L_{q_1}).$$

Такий підхід до одержання оцінок знизу колмогоровських поперечників класів Соболєва W^r_p періодичних функцій однієї змінної використовувався у роботі Р. С. Ісмагілова [19], а згодом для класів Вейля – Надя $W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ і Нікольського – Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних — у роботах В. М. Темлякова [65] та А. С. Романюка [42].

Зауважимо також, що C. A. Micchelli, A. Pinkus [99], які досліджували білінійні наближення деяких функцій двох змінних, заданих на квадраті $[0, 1] \times [0, 1]$, застосовували отримані результати для знаходження точних значень поперечників класів диференційовних функцій. З більш детальною бібліографією можна ознайомитися у роботі [90].

Нехай X — банахів простір і $B_X(\boldsymbol{y}, r) = \{\boldsymbol{x} \in X\colon\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_X \le r\}$ — куля радіуса r з центром в точці $\boldsymbol{y}$.

Для компактної множини $A \subset X$ і $\varepsilon > 0$ через $N_\varepsilon(A, X)$ позначимо

$$N_\varepsilon(A, X) = \min\left\{n\colon \quad \exists \boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^n \in X\colon \quad A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_X(\boldsymbol{y}^j, \varepsilon)\right\}.$$

Тоді ε-ентропією множини A відносно банахового простору X називають величину (див., наприклад, [15, 23])

$$H_\varepsilon(A, X) = \log N_\varepsilon(A, X). \tag{1.4}$$

(Тут і надалі під записом log будемо розуміти $\log_2$).

З ε-ентропією множини A тісно пов'язане поняття її ентропійних чисел (див., наприклад, [96])

$$\varepsilon_k(A, X) = \inf\left\{\varepsilon\colon \quad \exists \boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^{2^k} \in X\colon \quad A \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^k} B_X(\boldsymbol{y}^j, \varepsilon)\right\}. \tag{1.5}$$

Зазначимо, що отримавши оцінки ентропійних чисел деякої множини A, можна записати відповідні оцінки її ε-ентропії. Дійсно, з наведених вище означень величин $\varepsilon_k(A, X)$ та $H_\varepsilon(A, X)$ слідує, що при $k < H_\varepsilon(A, X) \leq k + 1$ виконуються співвідношення $\varepsilon_{k+1}(A, X) \leq \varepsilon \leq \varepsilon_k(A, X)$.

Величини (1.4) та (1.5) для класів функцій багатьох змінних $W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ та їх аналогів досліджувалися в роботах багатьох авторів: С. А. Смоляка [55], М. Ш. Бірмана, М. З. Соломяка [14], М. С. Бахвалова [7], Х. Трібеля [68], В. М. Темлякова [67,107,108], Е. С. Белінського [87,88], Б. С. Кашина, В. М. Темлякова [22], D. Dung [94], А. С. Романюка [49, 101], В. С. Романюка [50] та інших. З більш детальною бібліографією можна ознайомитися у недавньому огляді D. Dung., V. Temlyakov, T. Ullrich [95].

Розділ 2

Найкращі тригонометричні наближення класів періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q

У цьому розділі вивчаються дві взаємопов'язані апроксимативні характеристики, такі як найкращі ортогональні тригонометричні наближення та найкращі M-членні тригонометричні наближення. Отримано порядкові оцінки вказаних величин для періодичних функцій багатьох змінних $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$ та класів періодичних функцій багатьох змінних $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ у просторі L_q при деяких обмеженнях на параметри p, q та кратну послідовність $\boldsymbol{\psi}$. При цьому виявлено випадки, коли найкращі M-членні тригонометричні наближення мають переваги в порівнянні з найкращими ортогональними тригонометричними наближеннями.

2.1. Постановка задач та допоміжні твердження

Нехай $\theta_M = \left\{\boldsymbol{k}^j\right\}_{j=1}^{M}$, $\boldsymbol{k}^j = \left(k_1^j, \ldots, k_d^j\right) \in \mathbb{Z}^d$, $j = \overline{1, M}$ — довільний набір із M d-вимірних векторів. Для $f \in L_q$, $1 \le q \le \infty$, в якості апарату наближення будемо використовувати поліноми вигляду

$$S_{\theta_M}(f) := S_{\theta_M}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{M} \widehat{f}\left(\boldsymbol{k}^j\right) e^{i\left(\boldsymbol{k}^j, \boldsymbol{x}\right)},$$

де

$$\widehat{f}\left(\boldsymbol{k}^j\right) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{t}) e^{-i\left(\boldsymbol{k}^j, \boldsymbol{t}\right)}\, \mathrm{d}\boldsymbol{t}$$

— коефіцієнти Фур'є функції f, які відповідають набору векторів із θ_M.

Розглянемо величину

$$e_M^{\perp}(f)_q = \inf_{\theta_M} \|f - S_{\theta_M}(f)\|_q = \inf_{\boldsymbol{k}^j} \left\| f - \sum_{j=1}^{M} \widehat{f}\left(\boldsymbol{k}^j\right) e^{i\left(\boldsymbol{k}^j, \boldsymbol{x}\right)} \right\|_q,$$

яку називають найкращим ортогональним тригонометричним наближенням функції f у просторі L_q.

У тому випадку, коли замість коефіцієнтів Фур'є у наближаючому агрегаті вибираються довільні коефіцієнти, отримаємо величину, яку називають найкращим M-членним тригонометричним наближенням функції $f \in L_q$, $1 \le q \le \infty$, а саме:

$$e_M(f)_q = \inf_{\theta_M, c_j} \left\| f - P(\theta_M) \right\|_q = \inf_{\boldsymbol{k}^j, c_j} \left\| f - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(\boldsymbol{k}^j, \boldsymbol{x})} \right\|_q,$$

де $c_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, M}$.

Для $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p} \subset L_q$ покладемо

$$e_M^{\perp}\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q = \sup_{f \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}} e_M^{\perp}(f)_q,$$

$$e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q = \sup_{f \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}} e_M(f)_q.$$

Як зазначалося вище, справедливі співвідношення

$$e_M(f)_q \le e_M^{\perp}(f)_q, \tag{2.1}$$

$$e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q \le e_M^{\perp}\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q. \tag{2.2}$$

Детальна історія дослідження вказаних апроксимативних характеристик та відповідні бібліографічні посилання містяться у підрозділі 1.1 дисертаційної роботи.

У підрозділі 2.2 знайдено порядкові оцінки величин $e_M^{\perp}\left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right)_q$ та $e_M\left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right)_q$, $1 < q < \infty$, для функції $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$ такої, що для деякого фіксованого набору послідовностей ψ_j та чисел β_j, $j=\overline{1,d}$, задається рядом Фур'є:

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathring{\mathbb{Z}}^d}\prod_{j=1}^{d}\psi_j\left(|k_j|\right)e^{i\frac{\pi\beta_j}{2}\mathrm{sgn}k_j}e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}.$$

Зазначимо, що функція $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$ при $\psi_j\left(|\tau|\right)=|\tau|^{-r_j}$, $\tau\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $r_j>0$, $j=\overline{1,d}$, є аналогом ядра Бернуллі $F^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta}}$ (див., наприклад, [65, с. 31]).

Встановлені оцінки для функцій $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$ використані у наступному підрозділі під час знаходження оцінок відповідних апроксимативних характеристик функціональних класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$.

У підрозділі 2.4 встановлено порядкові оцінки величини $e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q$, $1<p\leq 2<q<\infty$, у випадку малої гладкості, тобто з певними обмеженнями на послідовності ψ_j, $j=\overline{1,d}$.

Отримані у розділі 2 результати доповнюють низку відомих результатів, про що детальніше буде сказано у відповідних зауваженнях.

Сформулюємо допоміжні твердження, які знадобляться для доведення результатів цього розділу.

Отже, кожному вектору $\boldsymbol{s}=(s_1,\ldots,s_d)\in\mathbb{N}^d$ поставимо у відповідність множину

$$\rho(\boldsymbol{s})=\left\{\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_d)\in\mathbb{Z}^d:\quad 2^{s_j-1}\leq|k_j|<2^{s_j},\quad j=\overline{1,d}\right\},$$

і для $f\in L_1$ покладемо

$$\delta_{\boldsymbol{s}}(f):=\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x})=\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})}\widehat{f}(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})},$$

де $\widehat{f}(\boldsymbol{k})$ – коефіцієнти Фур'є функції f.

Будемо використовувати далі тригонометричні поліноми з "номерами"гармонік зі східчастого гіперболічного хреста $Q_n=\bigcup\limits_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})<n}\rho(\boldsymbol{s})$, де вектори $\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}\in\mathbb{N}^d$, $(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=s_1+\cdots+s_d$. Нагадаємо, що $|Q_n|\asymp 2^n n^{d-1}$.

Теорема A. (Літтлвуда – Пелі, див., наприклад, [33, с. 52–56]). *Нехай задано* $1 < q < \infty$. *Тоді існують такі додатні сталі* $C_1(q)$ *та* $C_2(q)$, *що для кожної функції* $f \in L_q$ *має місце оцінка*

$$C_1(q)\|f\|_q \leq \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} |\delta_{\boldsymbol{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \leq C_2(q)\|f\|_q.$$

Теорема B. (Марцинкевича, [18, Т. II, с. 346]). *Нехай задано послідовність* $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, *що задовольняє умови*

1. $|\lambda_n| \leq M, \quad M = const > 0, \ n = 0, \pm 1, \ldots;$
2. $\sum\limits_{\mu=\pm 2^{\nu-1}}^{\pm 2^{\nu}-1} |\lambda_{\mu+1} - \lambda_\mu| \leq M, \ \nu = 1, 2, \ldots .$

Тоді якщо

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \in L_q, \qquad 1 < q < \infty,$$

то

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k c_k e^{ikx} \in L_q$$

і існує константа $C_3(q)$, *яка залежить тільки від* q, *така що*

$$\|F\|_q \leq C_3(q) M \|f\|_q.$$

Лема A. [65, с. 11] *При* $\gamma > 0$ *має місце співвідношення*

$$\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\geq n} 2^{-\gamma(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})} \asymp 2^{-\gamma n} n^{d-1}.$$

Лема B. [65, с. 25] *При* $1 \leq p < q < \infty$ *для* $f \in L_p$ *справедлива оцінка*

$$\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^q \, 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \gg \|f\|_q^q.$$

Нагадаємо, що у дисертаційній роботі будемо накладати на послідовності ψ_j, $j = \overline{1,d}$, які визначають функції $D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}$ та класи $L_{\boldsymbol{\beta},p}^{\boldsymbol{\psi}}$, деякі додаткові умови. А саме, вважатимемо, що ψ_j, $j=\overline{1,d}$, належать до множини D таких послідовностей ϕ, що:

1. ϕ — додатні та незростаючі;

2. $\exists M>0$ таке, що $\forall l\in\mathbb{N}$ виконується умова $\frac{\phi(l)}{\phi(2l)}\le M$.

До вказаної множини належать, зокрема, послідовності

$$\phi(|\tau|)=\frac{1}{|\tau|^r},\qquad r>0,\ \tau\in\mathbb{Z}\backslash\{0\};$$
$$\phi(|\tau|)=\ln^{\alpha}(|\tau|+1),\qquad \tau\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},\ \alpha<0;$$
$$\phi(|\tau|)=\frac{\ln^{\alpha}(|\tau|+1)}{|\tau|^r},\qquad r>0,\ \tau\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Далі сформулюємо твердження, яке є наслідком теореми 1 із [40].

Лема C. *Нехай* $1<p<\infty$, $f\in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, $\psi_j\in D$, $j=\overline{1,d}$. *Тоді для будь-якого* $\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d$ *справедлива оцінка*

$$\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p\asymp\prod_{j=1}^{d}\psi_j\left(2^{s_j}\right)\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(f^{\psi}_{\beta}\right)\right\|_p.$$

Лема D. [65, с. 28] *Для будь–якої функції* $f\in L_q$, $1<q<p\le\infty$,

$$\|f\|_q^q\gg\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d}\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^q\,2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q}.$$

Лема E. [11] *Нехай* $2<q<\infty$. *Тоді для будь-якого тригонометричного полінома* $P\left(\theta_N;\boldsymbol{x}\right)$, *що містить не більше* N *гармонік, і для довільного* $M<N$ *знайдеться тригонометричний поліном* $\widetilde{P}\left(\theta_M;\boldsymbol{x}\right)$, *у якого не більше* M *коефіцієнтів відмінних від нуля, такий що*

$$\left\|P\left(\theta_N\right)-\widetilde{P}\left(\theta_M\right)\right\|_q\ll\left(\frac{N}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\left\|P\left(\theta_N\right)\right\|_2,$$

причому $\theta_M\subset\theta_N$.

Для проведення міркувань буде потрібне також співвідношення, яке випливає з більш загального результату С. М. Нікольського (див., наприклад, [28, с. 25]):

Теорема C. *Для будь-якої функції* $f \in L_q$, $1 \le q < \infty$,

$$e_M(f)_q = \inf_{\theta_M} \sup_{\substack{P \in L^{\perp}(\theta_M) \\ \|P\|_{q'} \le 1}} \left| (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{x}) \overline{P(\boldsymbol{x})} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right|,$$

де $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, θ_M *– набір із* M *різних векторів* $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d$, $L^{\perp}(\theta_M)$ *— множина функцій, ортогональна підпростору тригонометричних поліномів з "номерами"гармонік із множини* θ_M, *а* $\overline{P(\boldsymbol{x})}$ *– функція, комплексно-спряжена до* $P(\boldsymbol{x})$.

Для встановлення у підрозділі 2.4 оцінок зверху найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ функцій малої гладкості знадобляться оцінки найкращих наближень відповідних класів тригонометричними поліномами з множини

$$T(Q_n) = \left\{ t\colon \quad t(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in Q_n} c_k e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} \right\},$$

де $Q_n = \bigcup\limits_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < n} \rho(\boldsymbol{s})$, які означаються наступним чином:

$$E_{Q_n}(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p})_q = \sup_{f \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}} \inf_{t \in T(Q_n)} \|f - t\|_q.$$

Результати будемо формулювати в термінах функцій натурального аргументу $\Phi(n)$ та $\Psi(n)$, які задаються наступними рівностями:

$$\Phi(n) = \min_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1}) = n} \prod_{j=1}^{d} (2^{s_j}), \qquad \Psi(n) = \max_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1}) = n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}),$$

де вектори $\boldsymbol{s}, \mathbf{1} \in \mathbb{N}^d$.

Ці функції, залежно від вигляду послідовностей ψ_j, $j=\overline{1,d}$, можуть бути функціями одного чи різних порядків. Так, наприклад, якщо покласти $\psi_j(|\tau|)=\frac{1}{|\tau|^r}$, $j=\overline{1,d}$, $r>0$, то отримаємо

$$\Phi(n)=\Psi(n)=2^{-nr}.$$

Якщо ж $\psi_j(|\tau|)=\frac{\ln(|\tau|)}{|\tau|^r}$, $j=1,2$, $r>0$, то

$$\Psi(n)=2^{-nr}\frac{n^2}{4},\qquad \Phi(n)=2^{-nr}(n-1),$$

а у випадку $\psi_j(|\tau|)=\frac{1}{|\tau|^r\ln(|\tau|)}$, $j=1,2$, $r>0$,

$$\Psi(n)=2^{-nr}\frac{1}{n-1},\qquad \Phi(n)=\frac{4\cdot 2^{-nr}}{n^2}.$$

Крім цього слід зазначити, що при $d=1$ функкції $\Phi(n)$ і $\Psi(n)$ збігаються і набувають вигляду $\psi_1\left(2^n\right)$.

Теорема D. [41] *Нехай $1<p<q<\infty$, $\psi_j\in D$, і, крім цього, послідовності $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$, $j=\overline{1,d}$, не зростають. Тоді справедлива оцінка*

$$E_{Q_n}\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q\asymp\Psi(n)2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}.$$

Зауважимо, що порядок величин $E_{Q_n}\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q$ у цьому випадку реалізують східчасто гіперболічні суми Фур'є вигляду

$$S_{Q_n}(f):=S_{Q_n}(f,\boldsymbol{x})=\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<n}\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}),\qquad f\in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}.$$

Теорема E. [40] *Нехай $1<p<\infty$ і $\psi_j\in D$, $j=\overline{1,d}$. Тоді для довільного полінома t з "номерами"гармонік із множини Q_n, має місце співвідношення*

$$\left\|t^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right\|_p\ll\frac{1}{\Phi(n)}\|t\|_p.$$

Зауважимо, що аналогічна оцінка справедлива також для тригонометричних поліномів з "номерами"гармонік із множини $\Delta Q_n = \bigcup\limits_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n} \rho(\boldsymbol{s})$.

2.2. Оцінки найкращих ортогональних та M-членних тригонометричних наближень функцій $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$

Встановимо оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень функцій $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$ у просторі L_q, $1 < q < \infty$. Справедлива теорема.

Теорема 2.1. *Нехай $1 < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовності $\psi_j\left(|\tau|\right)|\tau|^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $j = \overline{1,d}$, не зростають. Тоді для будь-яких натуральних M і n, що задовольняють умову $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, мають місце співвідношення*

$$\Phi(n) M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \ll e^{\perp}_{M}\left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right)_q \ll$$
$$\ll \Psi(n) M^{1-\frac{1}{q}} \left(\log M\right)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}. \qquad (2.3)$$

Доведення. Встановимо у (2.3) спочатку оцінку зверху. Згідно з прийнятими позначеннями, для $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, $1 < q < \infty$ можемо записати

$$e^{\perp}_{M}\left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right)_q \ll \left\| D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}} - \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<n} \delta_{\boldsymbol{s}}\left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right) \right\|_q =$$
$$= \left\| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\ge n} \delta_{\boldsymbol{s}}\left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right) \right\|_q = I_1. \qquad (2.4)$$

Далі розглянемо окремо випадки $1 < q \le 2$ та $2 < q < \infty$.

Нехай спочатку $1 < q \le 2$. Використовуючи послідовно теорему А та нерівність

$$|a+b|^{\alpha} \le |a|^{\alpha} + |b|^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \le 1,$$

при $\alpha = \frac{q}{2}$, із (2.4) одержимо

$$I_1 \ll \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} \left| \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\geq n} \left| \delta_{\boldsymbol{s}} \left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{x} \right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right|^q \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} \left| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\geq n} \left| \delta_{\boldsymbol{s}} \left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{x} \right) \right|^2 \right|^{\frac{q}{2}} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\geq n} \left| \delta_{\boldsymbol{s}} \left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{x} \right) \right|^q \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left((2\pi)^{-d} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\geq n} \int\limits_{\pi_d} \left| \delta_{\boldsymbol{s}} \left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{x} \right) \right|^q \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\geq n} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}} \left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}} \right) \right\|_q^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.5}$$

Тепер оцінимо величину

$$\left\| \delta_{\boldsymbol{s}} \left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}} \right) \right\|_q = \left\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})} \prod_{j=1}^{d} \psi_j \left(|k_j| \right) e^{i\frac{\pi\beta_j}{2}\mathrm{sgn} k_j} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} \right\|_q. \tag{2.6}$$

Для цього розглянемо кратну послідовність $\{\lambda_{\boldsymbol{k}}\}$, яка задається наступним чином:

$$\{\lambda_{\boldsymbol{k}}\} = \left\{ \prod_{j=1}^{d} \frac{\psi_j \left(|k_j| \right)}{\psi_j \left(2^{s_j} \right)} e^{i\frac{\pi\beta_j}{2}\mathrm{sgn} k_j} \right\}, \quad 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, \quad j = \overline{1,d}.$$

Зазначимо, що $\{\lambda_{\boldsymbol{k}}\}$ являє собою добуток однократних послідовностей

$$\left\{ \lambda^{(j)}_{\mu} \right\} = \left\{ \frac{\psi_j \left(|\mu| \right)}{\psi_j \left(2^{\nu} \right)} e^{i\frac{\pi\gamma}{2}\mathrm{sgn}\mu} \right\}, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad 2^{\nu-1} \leq |\mu| < 2^{\nu}, \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

які, як легко переконатися, задовольняють умови теореми B.

Дійсно, враховуючи, що $\psi_j \in D$, $j = \overline{1,d}$, матимемо

$$\left|\lambda_\mu^{(j)}\right| = \left|\frac{\psi_j(|\mu|)}{\psi_j(2^\nu)} e^{i\frac{\pi\gamma}{2}\mathrm{sgn}\mu}\right| = \left|\frac{\psi_j(|\mu|)}{\psi_j(2^\nu)}\right| \leq \frac{\psi_j\left(2^{\nu-1}\right)}{\psi_j(2^\nu)} \leq M_j.$$

Далі, для будь-якого μ

$$\left|\triangle\, \lambda_\mu^{(j)}\right| = \left|\lambda_{\mu+1}^{(j)} - \lambda_\mu^{(j)}\right| \leq \left|\lambda_{\mu+1}^{(j)}\right| + \left|\lambda_\mu^{(j)}\right| \leq 2M_j.$$

Тому при $\nu = 1$

$$\sum_{\mu\in\delta(\nu)} \left|\triangle\, \lambda_\mu^{(j)}\right| \leq \left|\lambda_{\mu+1}^{(j)}\right| + \left|\lambda_\mu^{(j)}\right| \leq 2M_j, \tag{2.7}$$

оскільки множина $\delta(\nu)$ містить у собі лише один елемент μ.

Якщо ж $\nu > 1$, то через $\widehat{\delta}(\nu)$ позначимо множину всіх $\mu \in \delta(\nu)$ крім найбільшого з них. Тоді, беручи до уваги співвідношення (2.7), можемо записати

$$\sum_{\mu\in\delta(\nu)} \left|\triangle\, \lambda_\mu^{(j)}\right| \leq \sum_{\mu\in\widehat{\delta}(\nu)} \left|\triangle\, \lambda_\mu^{(j)}\right| + 2M_j.$$

Варто також зазначити, що числа μ та $\mu+1$ із $\widehat{\delta}(\nu)$ мають однаковий знак. Тоді для довільного $\nu > 1$

$$\sum_{\mu\in\delta(\nu)} \left|\triangle\, \lambda_\mu^{(j)}\right| \leq \sum_{\mu\in\widehat{\delta}(\nu)} \left|\frac{\psi_j(|\mu+1|)}{\psi_j(2^\nu)} e^{i\frac{\pi\gamma}{2}\mathrm{sgn}(\mu+1)} - \frac{\psi_j(|\mu|)}{\psi_j(2^\nu)} e^{i\frac{\pi\gamma}{2}\mathrm{sgn}\mu}\right| + 2M_j \leq$$

$$\leq \frac{1}{\psi_j(2^\nu)} \sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{\mu=2^\nu-1} \left(\psi_j(\mu) - \psi_j(\mu+1)\right) + 2M_j =$$

$$= \frac{1}{\psi_j(2^\nu)} \left(\psi_j\left(2^{\nu-1}\right) - \psi_j(2^\nu)\right) + 2M_j =$$

$$= \frac{\psi_j\left(2^{\nu-1}\right)}{\psi_j(2^\nu)} - 1 + 2M_j < 3M_j.$$

Таким чином, ми показали, що однократна послідовність $\left\{\lambda_\mu^{(j)}\right\}$ для будь-якого $j=\overline{1,d}$ задовольняє умови теореми Марцинкевича. Отже, для кратної послідовності $\{\lambda_{\boldsymbol{k}}\}$ також будуть виконуватись умови цієї теореми у багатовимірному випадку (див., наприклад, [33, с. 57]).

Далі застосуємо мультиплікатор $\Lambda_{\boldsymbol{s}}$, який задається послідовністю $\{\lambda_{\boldsymbol{k}}\}$, до полінома $\sum\limits_{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}$. Отримаємо

$$\Lambda_{\boldsymbol{s}} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} = \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})} \prod_{j=1}^{d} \frac{\psi_j(|k_j|)}{\psi_j(2^{s_j})} e^{i\frac{\pi\beta_j}{2}\mathrm{sgn}k_j} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} =$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \psi_j^{-1}(2^{s_j}) \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(|k_j|)\, e^{i\frac{\pi\beta_j}{2}\mathrm{sgn}k_j} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}.$$

Тоді, з одного боку, для $1<q<\infty$

$$\left\| \Lambda_{\boldsymbol{s}} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} \right\|_q = \prod_{j=1}^{d} \psi_j^{-1}(2^{s_j}) \left\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(|k_j|)\, e^{i\frac{\pi\beta_j}{2}\mathrm{sgn}k_j} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} \right\|_q,$$

а з іншого боку, згідно з теоремою B,

$$\left\| \Lambda_{\boldsymbol{s}} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} \right\|_q \le C_1(q) \left\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} \right\|_q.$$

Звідси, матимемо

$$\left\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(|k_j|)\, e^{i\frac{\pi\beta_j}{2}\mathrm{sgn}k_j} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} \right\|_q \ll \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) \left\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} \right\|_q =$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) \left\| \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} e^{ik_jx_j} \right\|_q. \tag{2.8}$$

Для продовження оцінки (2.8), скористаємося співвідношенням (див., наприклад, [64, с. 181])

$$\left\|\sum_{k=-m}^{m} e^{ikx}\right\|_q \asymp m^{\left(1-\frac{1}{q}\right)}, \quad 1<q<\infty.$$

Отже, згідно з (2.6) і (2.8), отримаємо

$$\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right)\right\|_q \ll \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\left(1-\frac{1}{q}\right)}, \quad 1<q<\infty. \tag{2.9}$$

Таким чином, об'єднуючи співвідношення (2.5) та (2.9), матимемо

$$I_1 \ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\geq n}\left(\prod_{j=1}^{d}\psi_j\left(2^{s_j}\right)\right)^q 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\left(1-\frac{1}{q}\right)q}\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{l=n}^{\infty}\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}\left(\max_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}\prod_{j=1}^{d}\psi_j\left(2^{s_j}\right)\right)^q 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\left(1-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)q}2^{-(\boldsymbol{s},\mathbf{1})q\varepsilon}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{l=n}^{\infty}\Psi^q(l)2^{l\left(1-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)q}\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}2^{-(\boldsymbol{s},\mathbf{1})q\varepsilon}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.10}$$

Оскільки послідовності $\psi_j\left(|\tau|\right)|\tau|^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $j=\overline{1,d}$, не зростають, то не зростає також послідовність $\Psi(l)2^{l\left(1-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)}$, $l\in\mathbb{N}$, $l\geq n$. Отже, застосовуючи лему А, для $1<q\leq 2$ із (2.10) одержимо

$$I_1 \ll \Psi(n)2^{n\left(1-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)}\left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\geq n}2^{-(\boldsymbol{s},\mathbf{1})q\varepsilon}\right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \Psi(n)2^{n\left(1-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)}2^{-n\varepsilon}n^{\frac{d-1}{q}} = \Psi(n)2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)}n^{\frac{d-1}{q}}. \tag{2.11}$$

Згідно з (2.4) та (2.11),

$$e_M^{\perp}\left(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right)_q \ll \Psi(n)2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)}n^{\frac{d-1}{q}}, \qquad 1<q\leq 2. \tag{2.12}$$

Розглянемо тепер випадок $2 < q < \infty$. Беручи до уваги лему B (при $p = 2$) та співвідношення (2.9), із (2.4) можемо записати

$$I_1 \ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1}) \geq n} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}} \left(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} \right) \right\|_2^q 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$
$$\ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1}) \geq n} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j \left(2^{s_j}\right) 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\left(1-\frac{1}{2}\right)} \right)^q 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} =$$
$$= \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1}) \geq n} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j \left(2^{s_j}\right) \right)^q 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\left(1-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.13}$$

Повторюючи міркування, які проводились для оцінки I_1 при $1 < q \leq 2$ починаючи з (2.10), матимемо

$$I_1 \ll \Psi(n) 2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)} n^{\frac{d-1}{q}}, \quad 2 < q < \infty. \tag{2.14}$$

Таким чином, співставивши (2.4) та (2.14), одержимо

$$e_M^{\perp}\left(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right)_q \ll \Psi(n) 2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)} n^{\frac{d-1}{q}}, \quad 2 < q < \infty. \tag{2.15}$$

Оскільки $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, то із (2.12) та (2.15) отримаємо

$$e_M^{\perp}\left(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right)_q \ll \Psi(n) M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}, \quad 1 < q < \infty.$$

Оцінку зверху доведено.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу.

Нехай $\Delta Q_n = \bigcup\limits_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n} \rho(\boldsymbol{s})$. За заданим M підберемо $n \in \mathbb{N}$ так, щоб виконувалися співвідношення

$$|\Delta Q_n| \geq 4M, \qquad 2^n n^{d-1} \asymp M.$$

Позначимо через

$$S_{\theta_M}^{*}(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}) := S_{\theta_M}^{*}(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}, \boldsymbol{x})$$

поліном, для якого

$$e_M^{\perp}(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}})_q = \|D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} - S_{\theta_M}^*(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}})\|_q, \quad 1 < q < \infty.$$

Далі, розглянемо величину

$$I_2 = \int\limits_{\pi_d} \Big(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{x}) - S_{\theta_M}^*(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}, \boldsymbol{x})\Big)\left(F_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta}) - S_{\theta_M}^*(F_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}}, \boldsymbol{x})\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} =$$
$$= \int\limits_{\pi_d} D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{x})\left(F_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta}) - S_{\theta_M}^*(F_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}}, \boldsymbol{x})\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

де

$$F_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^d} \prod_{j=1}^{d} k_j^{-2} \cos\left(k_j x_j - \frac{\beta_j \pi}{2}\right), \qquad \mathbf{2} = (2, \ldots, 2) \in \mathbb{N}^d.$$

Тоді, з одного боку, застосовуючи нерівність Гельдера, матимемо

$$I_2 \le \left\|D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} - S_{\theta_M}^*(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}})\right\|_q \left\|F_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}} - S_{\theta_M}^*(F_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}})\right\|_{q'} =$$
$$= e_M^{\perp}(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}})_q \left\|F_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}} - S_{\theta_M}^*(F_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}})\right\|_{q'}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Оскільки $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, то

$$\left\|F_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}} - S_{\theta_M}^*(F_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}})\right\|_{q'} \ll \left\|\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\ge n} \delta_{\boldsymbol{s}}\left(F_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}}\right)\right\|_{q'} = \left\|F_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}} - S_{Q_n}\left(F_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}}\right)\right\|_{q'},$$

де $S_{Q_n}(f) = \sum\limits_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x})$.

Враховуючи, що [65, с. 38]

$$\left\|F_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}} - S_{Q_n}\left(F_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}}\right)\right\|_{q'} \ll 2^{-n\left(2-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{q}\right)}, \quad 1 < q' < \infty,$$

запишемо

$$I_2 \ll 2^{-n\left(2-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{q}\right)} e_M^{\perp}(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}})_q. \tag{2.16}$$

З іншого боку, можна оцінити величину I_2 знизу. Нагадаємо, що для $\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d$ покладають

$$\rho^+(\boldsymbol{s}) = \left\{\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d \colon \quad 2^{s_j - 1} \le k_j < 2^{s_j}, \quad j = \overline{1, d}\right\}.$$

Отже, оскільки, згідно з умовою теореми 2.1, $\Phi(l) 2^{l\left(1-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)}$, $l \in \mathbb{N}$, $l \ge n$, не зростає, то при $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$ будемо мати

$$\begin{aligned} I_2 &\gg \sum_{\substack{\boldsymbol{k} \notin Q_n, \\ k_j \in \mathbb{N}}} \prod_{j=1}^d \psi_j(k_j) k_j^{-2} = \sum_{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{1}) \ge n} \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho^+(\boldsymbol{s})} \prod_{j=1}^d \psi_j(k_j) k_j^{-2} \gg \\ &\gg \sum_{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{1}) \ge n} \prod_{j=1}^d \psi_j\left(2^{s_j}\right) 2^{-2 s_j} 2^{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{1})} \ge \\ &\ge \sum_{l=n}^{\infty} \sum_{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{1}) = l} \left(\min_{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{1}) = l} \prod_{j=1}^d \psi_j\left(2^{s_j}\right)\right) 2^{-(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{1})} = \\ &= \sum_{l=n}^{\infty} \Phi(l) 2^{l\left(1-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)} \sum_{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{1}) = l} 2^{-(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{1})\left(2-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)} \ge \\ &\ge \Phi(n) 2^{n\left(1-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)} \sum_{l=n}^{\infty} 2^{-l\left(2-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)} l^{d-1} \gg \\ &\gg \Phi(n) 2^{n\left(1-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)} 2^{-n\left(2-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)} n^{d-1} = \Phi(n) n^{d-1} 2^{-n}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Співставляючи (2.16) та (2.17), знаходимо

$$\Phi(n) n^{d-1} 2^{-n} \ll I_2 \ll 2^{-n\left(2-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{q}\right)} e_M^{\perp}(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}})_q.$$

Звідси, для $1 < q < \infty$ отримаємо

$$\begin{aligned} e_M^{\perp}(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}})_q &\gg \Phi(n) n^{d-1} 2^{-n} 2^{n\left(2-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-1\right)} = \Phi(n) 2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)} n^{\frac{d-1}{q}} \gg \\ &\gg \Phi(n) M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Оцінку знизу у (2.3), а отже і теорему 2.1 доведено. $\square$

Тепер прокоментуємо одержаний результат, співставляючи його з раніше відомими результатами, що стосуються оцінок цієї величини як в одновимірному, так і у багатовимірному випадках.

Зауваження 2.1. В одновимірному випадку величина $e_M^{\perp}\Big(D_{\beta}^{\psi_1}\Big)_q$, $1 < q < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, при відповідних обмеженнях на послідовність ψ_1, досліджувалася В. В. Шкапою [83]. При цьому було встановлене наступне співвідношення:

$$e_M^{\perp}\Big(D_{\beta}^{\psi_1}\Big)_q \asymp \psi_1(M) M^{1-\frac{1}{q}}.$$

Зауваження 2.2. При $\psi_j\left(|\tau|\right) = |\tau|^{-r_j}$, $\tau \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $r_j > 1 - \frac{1}{q}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, для функцій $D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} \equiv F_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{r}}$ точні за порядком оцінки величини $e_M^{\perp}\big(F_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{r}}\big)_q$, $1 < q < \infty$, знайдено А. С. Романюком [47]:

$$e_M^{\perp}\big(F_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{r}}\big)_q \asymp M^{-\left(r_1 - 1 + \frac{1}{q}\right)} (\log M)^{(d-1)\left(r_1 - 1 + \frac{2}{q}\right)}.$$

У випадку, коли $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_1) \in \mathbb{R}_+^d$, $r_1 > 1 - \frac{1}{q}$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^d$, цю оцінку можна отримати із результату теореми 2.1.

Далі перейдемо до розгляду найкращих M-членних тригонометричних наближень періодичних функцій багатьох змінних $D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}$ у просторі L_q, $1 < q < \infty$. Тут окремо розглянемо два суттєво різних випадки: $1 < q \leq 2$ та $2 < q < \infty$.

Отже, нехай спочатку $1 < q \leq 2$. Справедлива теорема.

Теорема 2.2. *Нехай* $1 < q \leq 2$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовності* $\psi_j\left(|\tau|\right)|\tau|^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $j = \overline{1,d}$, *не зростають. Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n, *що задовольняють умову* $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, *мають місце співвідношення*

$$\Phi(n) M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \ll e_M\Big(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\Big)_q \ll$$
$$\ll \Psi(n) M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}. \tag{2.18}$$

Доведення. Оцінка зверху одразу випливає із співвідношення (2.1) та результату теореми 2.1. А саме, матимемо

$$e_M\left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right)_q \le e^{\perp}_M\left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right)_q \ll \Psi(n) M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}. \qquad (2.19)$$

Перейдемо до встановлення в (2.18) оцінки знизу. Зазначимо, що достатньо розглянути випадок $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$.

Отже, за заданим M виберемо n так, щоб виконувалось співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$. Далі, нехай

$$D^{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{x}) := D^{\boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{x}) = 2^d \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho^+(\boldsymbol{s})} \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(k_j\right) \cos k_j x_j.$$

Через S позначимо множину векторів $\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d$, таких що виконуються наступні умови

$$(\boldsymbol{s}, \mathbf{1}) = n, \qquad \left|\theta_M \cap \rho^+(\boldsymbol{s})\right| \le \frac{1}{2}\left|\rho^+(\boldsymbol{s})\right|.$$

Тоді, застосовуючи лему D у випадку $p = 2$, отримаємо

$$\begin{aligned} I_3 &= \left\| D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}} - P\left(\theta_M\right)\right\|_q \gg \\ &\gg \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(D^{\boldsymbol{\psi}} - P(\theta_M)\right)\right\|_2^q 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)q}\right)^{\frac{1}{q}} \gg \\ &\gg 2^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n} \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(D^{\boldsymbol{\psi}} - P(\theta_M)\right)\right\|_2^q\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \qquad (2.20)$$

Далі, використовуючи рівність Парсеваля, із (2.20) матимемо

$$I_3 \gg 2^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in S} \left(\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho^+(\boldsymbol{s})} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(k_j\right)\right)^2\right)^{\frac{q}{2}}\right)^{\frac{1}{q}} \gg$$

$$\gg 2^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in S}\left(\min_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n}\prod_{j=1}^{d}\psi_j\left(2^{s_j}\right)\right)^q 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\frac{q}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}\gg$$

$$\gg 2^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}\Phi(n)\left(2^{\frac{nq}{2}}|S|\right)^{\frac{1}{q}}\gg 2^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}\Phi(n)2^{\frac{n}{2}}n^{\frac{d-1}{q}}=$$

$$=\Phi(n)2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)}n^{\frac{d-1}{q}} \tag{2.21}$$

Тому, враховуючи що $M\asymp 2^n n^{d-1}$, із (2.21) одержимо

$$e_M\left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right)_q\gg\Phi(n)M^{1-\frac{1}{q}}(\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)},\quad 1<q\le 2. \tag{2.22}$$

Оцінку знизу в (2.18) доведено.

Об'єднуючи співвідношення (2.19) та (2.22), матимемо шукану оцінку.

Теорему 2.2 доведено. $\square$

Зауваження 2.3. Результат теореми 2.2 є новим і в одновимірному випадку. Сформулюємо відповідне твердження.

Теорема 2.2$'$. *Нехай $d=1$, $1<q\le 2$, $\psi_1\in D$, $\beta\in\mathbb{R}$, і, крім того, існує $\varepsilon>0$ таке, що послідовність $\psi_1\left(|\tau|\right)|\tau|^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$ не зростає. Тоді має місце співвідношення*

$$e_M\left(D^{\psi_1}_{\beta}\right)_q\asymp\psi_1(M)M^{1-\frac{1}{q}}.$$

Зауваження 2.4. При $\psi_j(|\tau|)=|\tau|^{-r_j}$, $\tau\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $r_j>1-\frac{1}{q}$, $\beta_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,d}$, Е. С. Белінським [8] (див. також [9]) встановлено наступну оцінку величини $e_M\left(F^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta}}\right)_q$, $1<q\le 2$:

$$e_M\left(F^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta}}\right)_q\asymp M^{-r_1+1-\frac{1}{q}}(\log M)^{(d-1)\left(r_1-1+\frac{2}{q}\right)}.$$

У випадку $\boldsymbol{r}=(r_1,\ldots,r_1)\in\mathbb{R}^d_+$, $r_1>1-\frac{1}{q}$, $\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^d$, ця оцінка випливає із результату теореми 2.2.

Перейдемо до розгляду випадку $2<q<\infty$. Справедливе наступне твердження.

Теорема 2.3. *Нехай* $2 < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, d}$, *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовності* $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{1+\varepsilon}$, $j = \overline{1, d}$, *не зростають. Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n, *що задовольняють умову* $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, *мають місце співвідношення*

$$\Phi(n) M^{\frac{1}{2}} \ll e_M \Big(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} \Big)_q \ll \Psi(n) M^{\frac{1}{2}}. \tag{2.23}$$

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху.

За заданим M виберемо $n \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб виконувалась умова $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$. Поліном, яким будемо наближати функції $D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}$, шукатимемо у вигляді

$$P(\theta_M; \boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s}, \mathbf{1}) < n} \delta_{\boldsymbol{s}} \Big(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}; \boldsymbol{x} \Big) + \sum_{n \le (\boldsymbol{s}, \mathbf{1}) < \alpha n} P(\theta_{N_{\boldsymbol{s}}}; \boldsymbol{x}), \tag{2.24}$$

де $\alpha > 1$ — деяке число, вибір якого буде прокоментовано пізніше, а $P(\theta_{N_{\boldsymbol{s}}}; \boldsymbol{x})$ — поліноми, побудовані згідно з лемою Е так, щоб виконувалася умова

$$\Big\| \delta_{\boldsymbol{s}}(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}) - P(\theta_{N_{\boldsymbol{s}}}) \Big\|_q \ll \left(\frac{2^{(\boldsymbol{s}, \mathbf{1})}}{N_{\boldsymbol{s}}} \right)^{\frac{1}{2}} \Big\| \delta_{\boldsymbol{s}}(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}) \Big\|_2. \tag{2.25}$$

Оцінимо величину

$$I_4 = \Big\| D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} - P(\theta_M) \Big\|_q. \tag{2.26}$$

Оскільки

$$D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d} \delta_{\boldsymbol{s}} \Big(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}; \boldsymbol{x} \Big),$$

то, згідно з (2.24), скориставшись нерівністю Мінковського, матимемо

$$I_4 = \left\| \sum_{n \le (\boldsymbol{s}, \mathbf{1}) < \alpha n} \Big(\delta_{\boldsymbol{s}}(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}) - P(\theta_{N_{\boldsymbol{s}}}) \Big) + \left(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} - \sum_{(\boldsymbol{s}, \mathbf{1}) < \alpha n} \delta_{\boldsymbol{s}}(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}) \right) \right\|_q \le$$

$$\leq \left\| \sum_{n\leq(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<\alpha n} \Big(\delta_{\boldsymbol{s}}(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}) - P\left(\theta_{N_{\boldsymbol{s}}}\right)\Big)\right\|_q + \left\| D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} - \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<\alpha n} \delta_{\boldsymbol{s}}(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}})\right\|_q =$$
$$= I_5 + I_6. \tag{2.27}$$

Далі одержимо оцінки доданків I_5 та I_6. В першу чергу зазначимо, що оцінка I_6 була встановлена у теоремі 2.1. А саме, згідно з (2.3), можемо записати

$$I_6 = \left\| D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} - \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<\alpha n} \delta_{\boldsymbol{s}}(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}})\right\|_q \ll \Psi([\alpha n]) 2^{\alpha n\left(1-\frac{1}{q}\right)} (\alpha n)^{\frac{d-1}{q}}. \tag{2.28}$$

Перейдемо до встановлення оцінки I_5. Використовуючи послідовно теорему A, нерівність Мінковського та беручи до уваги співвідношення (2.25), одержимо

$$I_5 = \left\| \sum_{n\leq(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<\alpha n} \Big(\delta_{\boldsymbol{s}}(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}) - P\left(\theta_{N_{\boldsymbol{s}}}\right)\Big)\right\|_q \ll$$
$$\ll \left\| \left(\sum_{n\leq(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<\alpha n} \left|\delta_{\boldsymbol{s}}(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}) - P\left(\theta_{N_{\boldsymbol{s}}}\right)\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q =$$
$$= \left(\left\| \sum_{n\leq(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<\alpha n} \left|\delta_{\boldsymbol{s}}(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}) - P\left(\theta_{N_{\boldsymbol{s}}}\right)\right|^2 \right\|_{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$\leq \left(\sum_{n\leq(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<\alpha n} \left\| \left|\delta_{\boldsymbol{s}}(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}) - P\left(\theta_{N_{\boldsymbol{s}}}\right)\right|^2 \right\|_{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$
$$\ll \left(\sum_{n\leq(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<\alpha n} \frac{2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}}{N_{\boldsymbol{s}}} \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}})\right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.29}$$

Для продовження оцінки I_5, використаємо встановлену під час доведення теореми 2.1 оцінку величини $\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}})\right\|_2$. Отже, згідно з (2.9), будемо мати

$$\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}})\right\|_2 \ll 2^{\frac{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}{2}} \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right). \tag{2.30}$$

Повертаючись до (2.29) та враховуючи (2.30), отримаємо

$$I_5 \ll \left(\sum_{n\le(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<\alpha n} \frac{2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}}{N_{\boldsymbol{s}}} 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{n\le(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<\alpha n} \frac{2^{2(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}}{N_{\boldsymbol{s}}} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.31}$$

Далі для кожного $\boldsymbol{s}\colon\ (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) \in [n;\alpha n)$ покладемо

$$N_{\boldsymbol{s}} = \left[\prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})} \Psi^{-1}(n)\right] + 1. \tag{2.32}$$

Покажемо, що кількість гармонік, які містяться в сукупності поліномів $P\left(\theta_{N_{\boldsymbol{s}}};\boldsymbol{x}\right)$ при $\boldsymbol{s}\colon\ n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < \alpha n$, за порядком не перевищує M. Попередньо зазначимо, що відповідно до умови теореми 2.3, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовності $\psi_j\left(2^{s_j}\right) 2^{s_j(1+\varepsilon)}$, $j = \overline{1,d}$, не зростають. Звідси робимо висновок, що послідовність $\Psi(l)2^{l(1+\varepsilon)}$, $l \in \mathbb{N}$, $l \ge n$, також не зростає.

Враховуючи цю обставину, та використовуючи лему A, отримаємо

$$\sum_{n\le(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<\alpha n} N_{\boldsymbol{s}} \le \Psi^{-1}(n) \sum_{n\le(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<\alpha n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})} + \sum_{n\le(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<\alpha n} 1 \ll$$

$$\ll \Psi^{-1}(n) \sum_{l=n}^{\infty} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} \left(\max_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right)\right) 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})} + n^d =$$

$$= \Psi^{-1}(n) \sum_{l=n}^{\infty} \Psi(l) 2^{l(1+\varepsilon)} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} 2^{-(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\varepsilon} + n^d \le$$

$$\leq 2^{n(1+\varepsilon)} \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\geq n} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\varepsilon} + n^d \ll$$

$$\ll 2^{n(1+\varepsilon)} 2^{-n\varepsilon} n^{d-1} + n^d \ll 2^n n^{d-1} \asymp M. \tag{2.33}$$

Крім цього відмітимо, що кількість гармонік, які містяться у першому доданку правої частини (2.24), також не перевищує за порядком M, оскільки, як зазначалося вище, $|Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$. Отже, загальна кількість гармонік у поліномі $P(\theta_M; \boldsymbol{x})$, яким наближаємо функцію $D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}$, за порядком не перевищує M.

Таким чином, підставляючи у (2.31) замість $N_{\boldsymbol{s}}$ його значення (2.32) та проводячи міркування, аналогічні до тих, які застосовувалися при встановленні співвідношення (2.33), одержимо

$$I_5 \ll \left(\sum_{n \leq (\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) < \alpha n} 2^{2(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \right)^{-1} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})} \Psi(n) \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= (\Psi(n))^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \leq (\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) < \alpha n} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})} \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll (\Psi(n))^{\frac{1}{2}} \left(\Psi(n) 2^n n^{d-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \Psi(n) 2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}}. \tag{2.34}$$

Звідси, об'єднуючи (2.27), (2.34) та (2.28), матимемо

$$I_4 \ll \Psi(n) 2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}} + \Psi([\alpha n]) 2^{\alpha n \left(1-\frac{1}{q}\right)} (\alpha n)^{\frac{d-1}{q}}. \tag{2.35}$$

За умовою теореми 2.3, існує $\varepsilon > 0$, таке що послідовності $\psi_j\left(|\tau|\right) |\tau|^{1+\varepsilon}$, $j = \overline{1,d}$, не зростають. Отже, для $\alpha > 1$ виконується нерівність $\Psi([\alpha n]) 2^{\alpha n} \leq \Psi(n) 2^n$. Далі, покладаючи $\alpha = \frac{q}{2}$, де $2 < q < \infty$, із (2.35) одержимо

$$I_4 \ll \Psi(n) 2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}} + \Psi(n) 2^n 2^{-\frac{q}{2}\frac{n}{q}} \left(\frac{q}{2} n\right)^{\frac{d-1}{q}} \ll$$

$$\ll \Psi(n) 2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}}. \tag{2.36}$$

Отже, враховуючи, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, згідно з (2.26) та (2.36), матимемо

$$e_M(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}})_q \ll \Psi(n) 2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}} \ll \Psi(n) M^{\frac{1}{2}}.$$

Оцінку зверху в (2.23) доведено.

Оцінка знизу одразу випливає з результату теореми 2.2. Дійсно, для $2 < q < \infty$ справедлива нерівність

$$e_M(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}})_q \geq e_M(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}})_2. \tag{2.37}$$

Крім цього, за умовою теореми 2.3, послідовності $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{1+\varepsilon}$, $j = \overline{1,d}$, не зростають, а отже, не зростають також послідовності $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, $j = \overline{1,d}$. Тому, покладаючи у (2.18) $q = 2$ та враховуючи (2.37), одержимо

$$e_M(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}})_q \gg \Phi(n) M^{\frac{1}{2}}, \qquad 2 < q < \infty.$$

Оцінка знизу і, відповідно, теорема 2.3 доведені. $\square$

Зауваження 2.5. Встановлені у теоремі 2.3 оцінки є новими і в одновимірному випадку. Сформулюємо відповідне твердження.

Теорема 2.3′. *Нехай $d = 1$, $2 < q < \infty$, $\psi_1 \in D$, $\beta \in \mathbb{R}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi_1(|\tau|)|\tau|^{1+\varepsilon}$ не зростає. Тоді справедлива оцінка*

$$e_M\left(D^{\psi_1}_{\beta}\right)_q \asymp \psi_1(M) M^{\frac{1}{2}}.$$

Зауваження 2.6. У випадку $\psi_j(|\tau|) = |\tau|^{-r_1}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, $\tau \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $r_1 > 1$, оцінка (2.23) набуває вигляду

$$e_M\big(F^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta}}\big)_q \asymp M^{-r_1+\frac{1}{2}} (\log M)^{r_1(d-1)},$$

і вона була анонсована Е. С. Белінським [9].

Зауваження 2.7. Порівнявши результати, отримані у теоремах 2.1 – 2.3, бачимо, що при $1 < q \leq 2$ оцінки зверху величин $e_M\left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right)_q$ та $e^{\perp}_M\left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right)_q$

однакові за порядком. У випадку $2 < q < \infty$ оцінки відповідних апроксимативних характеристик відрізняються.

2.3. Оцінки найкращих ортогональних та M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$

У цьому підрозділі встановлено оцінки найкращих ортогональних та M-членних тригонометричних наближень класів періодичних функцій багатьох змінних $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$ у просторі L_q при $1 < q < \infty$.

Нехай $V_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, — ядра Валле–Пуссена вигляду

$$V_m(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kx + 2\sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(1 - \frac{k-m}{m}\right) \cos kx.$$

Кожному вектору $\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d$ поставимо у відповідність поліном

$$A_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)).$$

Відомо (див., наприклад, [65, с. 66]), що

$$\|A_{\boldsymbol{s}}\|_q \asymp 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\left(1-\frac{1}{q}\right)}, \quad 1 \le q \le \infty. \tag{2.38}$$

Далі, для $f \in L_1$ покладемо

$$A_{\boldsymbol{s}}(f) := A_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) = (f * A_{\boldsymbol{s}})(\boldsymbol{x}),$$

де "$*$" — операція згортки.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 2.4. *Нехай* $1 < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовності* $\psi_j(|\tau|)\,|\tau|^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $j = \overline{1,d}$, *не зростають. Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n, *що задовольняють* *умову* $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, *мають місце співвідношення*

$$\Phi(n) M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \ll e_M^{\perp}\left(L_{\boldsymbol{\beta},1}^{\boldsymbol{\psi}}\right)_q \ll$$
$$\ll \Psi(n) M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}. \tag{2.39}$$

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху.

З цією метою для $f \in L_{\boldsymbol{\beta},1}^{\boldsymbol{\psi}}$ оцінимо величину

$$I_7 = \left\| f - \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_q. \tag{2.40}$$

Будемо розглядати окремо два випадки: $1 < q \leq 2$ та $2 < q < \infty$.

Нехай спочатку $1 < q \leq 2$. Тоді, проводячи міркування, аналогічні до тих, які були використані при встановленні співвідношення (2.5), і застосовуючи лему C, одержимо

$$I_7 = \left\| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\geq n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_q \ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\geq n} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_q^q \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$
$$\ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\geq n} \left(\prod_{j=1}^d \psi_j\left(2^{s_j}\right) \right)^q \left\| \delta_{\boldsymbol{s}}\left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right) \right\|_q^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.41}$$

Тепер, враховуючи, що

$$\left\| \delta_{\boldsymbol{s}}\left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right) \right\|_q \asymp \left\| A_{\boldsymbol{s}}\left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right) \right\|_q, \quad 1 < q < \infty,$$

і далі використовуючи послідовно властивість згортки (див., наприклад, [28, с. 71]) та співвідношення (2.38), із (2.41) отримаємо

$$I_7 \ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\geq n} \left(\prod_{j=1}^d \psi_j\left(2^{s_j}\right) \right)^q \left\| A_{\boldsymbol{s}}\left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right) \right\|_q^q \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\geq n} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j \left(2^{s_j}\right) \right)^q \left\| f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}} \right\|_1^q \|A_{\boldsymbol{s}}\|_q^q \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\geq n} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j \left(2^{s_j}\right) \right)^q 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\left(1-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.42}$$

Повторюючи міркування, які були використані при встановленні співвідношень (2.10), (2.11), та враховуючи, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, матимемо

$$I_7 \ll \Psi(n) M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}, \qquad 1 < q \leq 2. \tag{2.43}$$

Перейдемо до розгляду випадку $2 < q < \infty$. Тоді, скориставшись послідовно лемами B та C, для (2.40) запишемо

$$I_7 \ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\geq n} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j \left(2^{s_j}\right) \right)^q \left\| A_{\boldsymbol{s}} \left(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}} \right) \right\|_2^q 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Далі, здійснивши перетворення, аналогічні до тих, які були зроблені для отримання співвідношення (2.42) і потім, відповідно, (2.10), (2.11), одержимо

$$I_7 \ll \Psi(n) M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}, \quad 2 < q < \infty. \tag{2.44}$$

Звідси, об'єднуючи (2.43), (2.44) із (2.40), матимемо

$$\left\| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\geq n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_q \ll \Psi(n) M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}, \quad 1 < q < \infty. \tag{2.45}$$

Отже,

$$e^{\perp}_M \left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1} \right)_q \ll \Psi(n) M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}.$$

Оцінку зверху у (2.39) встановлено.

Перейдемо до доведення оцінки знизу.

Нехай $f \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$, а θ_M — довільний набір із M векторів $\boldsymbol{k}^j \in \mathbb{Z}^d$,

$j = \overline{1, M}$. Нагадаємо, що кожну $f \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$ можна зобразити у вигляді згортки [61, Ч. 1, §7]

$$f(\boldsymbol{x}) = \left(\varphi * D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right)(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} \varphi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t}) D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{t})\, \mathrm{d}\boldsymbol{t}, \tag{2.46}$$

де $\|\varphi\|_1 \leq 1$ і функція φ майже всюди співпадає з $f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$.

Таким чином, враховуючи (2.46), можемо записати

$$\begin{aligned} I_8 &= \sup_{f \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}} \|f - S_{\theta_M}(f)\|_q = \\ &= \sup_{\|\varphi\|_1 \leq 1} \left\| \varphi * D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}} - \varphi * \sum_{j=1}^{M} e^{i\left(\boldsymbol{k}^j, \boldsymbol{x}\right)} * D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}} \right\|_q . \end{aligned} \tag{2.47}$$

Далі, покладемо

$$t_M(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{M} e^{i\left(\boldsymbol{k}^j, \boldsymbol{x}\right)} * D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x}).$$

Тоді з (2.47) будемо мати

$$I_8 = \sup_{\|\varphi\|_1 \leq 1} \left\| \varphi * \left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}} - t_M\right) \right\|_q = \left\| D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}} - t_M \right\|_q \geq e^{\perp}_M \left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right)_q .$$

Скориставшись результатом теореми 2.1, приходимо до шуканої оцінки знизу величини $e^{\perp}_M \left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}\right)_q$, $1 < q < \infty$:

$$e^{\perp}_M \left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}\right)_q \gg \Phi(n) M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)}.$$

Теорему 2.4 доведено. □

Зауваження 2.8. В одновимірному випадку з теореми 2.4 випливає наступне твердження, яке при додаткових умовах на послідовність ψ_1 встановлено В. В. Шкапою [83]:

Теорема 2.4′. *Нехай $d = 1$, $1 < q < \infty$, $\psi_1 \in D$, $\beta \in \mathbb{R}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi_1(|\tau|)\,|\tau|^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$ не зростає. Тоді* *справедливе співвідношення*

$$e_M^{\perp}\Big(L_{\beta,1}^{\psi_1}\Big)_q \asymp \psi_1(M)M^{1-\frac{1}{q}}.$$

Зауваження 2.9. У випадку $\psi_j(|\tau|) = |\tau|^{-r_j}$, $\tau \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $r_j > 1 - \frac{1}{q}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, для класів $L_{\boldsymbol{\beta},1}^{\boldsymbol{\psi}} \equiv W_{\boldsymbol{\beta},1}^{\boldsymbol{r}}$ порядок величини $e_M^{\perp}\big(W_{\boldsymbol{\beta},1}^{\boldsymbol{r}}\big)_q$, $1 < q < \infty$, отримано А. С. Романюком [47]:

$$e_M^{\perp}\big(W_{\boldsymbol{\beta},1}^{\boldsymbol{r}}\big)_q \asymp M^{-\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)}(\log M)^{(d-1)\left(r_1-1+\frac{2}{q}\right)}.$$

Для $\boldsymbol{r} = (r_1,\dots,r_1) \in \mathbb{R}_+^d$, $r_1 > 1-\frac{1}{q}$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^d$, цю оцінку можна отримати із результату теореми 2.4.

Далі перейдемо до розгляду найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $L_{\boldsymbol{\beta},1}^{\boldsymbol{\psi}}$ у просторі L_q, $1 < q < \infty$. Як і при дослідженні величини $e_M\Big(D_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\Big)_q$, тут важливо окремо розглянути випадки $1 < q \leq 2$ та $2 < q < \infty$.

Нехай спочатку $1 < q \leq 2$. Справедлива теорема.

Теорема 2.5. *Нехай $1 < q \leq 2$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовності $\psi_j(|\tau|)\,|\tau|^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $j = \overline{1,d}$, не зростають. Тоді для будь-яких натуральних M і n, що задовольняють умову $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, мають місце співвідношення*

$$\Phi(n)M^{1-\frac{1}{q}}(\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \ll e_M\Big(L_{\boldsymbol{\beta},1}^{\boldsymbol{\psi}}\Big)_q \ll$$
$$\ll \Psi(n)M^{1-\frac{1}{q}}(\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}. \tag{2.48}$$

Доведення. Оцінка зверху випливає із співвідношення (2.2) та результату теореми 2.4.

Отже, згідно з (2.39), матимемо

$$e_M\Big(L_{\boldsymbol{\beta},1}^{\boldsymbol{\psi}}\Big)_q \leq e_M^{\perp}\Big(L_{\boldsymbol{\beta},1}^{\boldsymbol{\psi}}\Big)_q \ll \Psi(n)M^{1-\frac{1}{q}}(\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}. \tag{2.49}$$

Встановимо тепер у (2.48) оцінку знизу. Скориставшись теоремою C та інтегральним представленням (2.46) функцій $f \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$, можемо записати

$$e_M\Big(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}\Big)_q = \sup_{f\in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}} \inf_{\theta_M} \sup_{\substack{P\in L^{\perp}(\theta_M)\\ \|P\|_{q'}\le 1}} \left|(2\pi)^{-d}\int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{x})\overline{P(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_1\le 1} \inf_{\theta_M} \sup_{\substack{P\in L^{\perp}(\theta_M)\\ \|P\|_{q'}\le 1}} \left|(2\pi)^{-d}\int\limits_{\pi_d}\left(\int\limits_{\pi_d}\varphi(\boldsymbol{t})D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t})\,\mathrm{d}\boldsymbol{t}\right)\overline{P(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right|, \quad (2.50)$$

де $\overline{P(\boldsymbol{x})}$ — поліноми, комплексно спряжені до $P(\boldsymbol{x})$.

Переконаємося в тому, що для інтеграла у правій частині (2.50) виконуються умови теореми Фубіні (див., наприклад, [32, с. 336]). Для цього розглянемо інтеграл

$$\int\limits_{\pi_d}\varphi(\boldsymbol{t})\left(\int\limits_{\pi_d} D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t})\overline{P(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{t}. \quad (2.51)$$

Оскільки $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}} \in L_q$, $1<q<\infty$, а $P\in L_{q'}$, то, застосовуючи нерівність Гельдера, одержимо

$$\int\limits_{\pi_d} D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t})\overline{P(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \le \left\|D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right\|_q \|P\|_{q'},$$

і, отже, для будь-якої функції $\varphi\in L_1$ інтеграл (2.51) збіжний.

Змінюючи в (2.50) порядок інтегрування, отримаємо

$$e_M\Big(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}\Big)_q = \sup_{\|\varphi\|_1\le 1} \inf_{\theta_M} \sup_{\substack{P\in L^{\perp}(\theta_M)\\ \|P^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\|_{q'}\le 1}} \int\limits_{\pi_d}\varphi(\boldsymbol{t})\times$$

$$\times\left((2\pi)^{-d}\int\limits_{\pi_d} D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t})\overline{P(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{t}. \quad (2.52)$$

Тепер, використавши послідовно нерівність Гельдера (при $p=1, p'=\infty$), та теорему С, із (2.52) матимемо

$$e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}\right)_q = \inf_{\theta_M} \sup_{\substack{P\in L^{\perp}(\theta_M)\\ \|P\|_{q'}\le 1}} \left\| (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t})\overline{P(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \right\|_{\infty} \ge$$

$$\ge \inf_{\theta_M} \sup_{\substack{P\in L^{\perp}(\theta_M)\\ \|P\|_{q'}\le 1}} \left| (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t})\overline{P(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \right| \ge e_M\left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right)_q. \qquad (2.53)$$

Далі, прийнявши до уваги результат теореми 2.2, для (2.53) запишемо

$$e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}\right)_q \gg \Phi(n)M^{1-\frac{1}{q}}(\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}.$$

Оцінку знизу, а отже, і теорему 2.5, доведено. □

Зауваження 2.10. Встановлені у теоремі 2.5 оцінки є новими і в одновимірному випадку. А саме, має місце наступне твердження.

Теорема 2.5′. *Нехай $d = 1$, $1 < q \le 2$, $\psi_1 \in D$, $\beta \in \mathbb{R}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi_1(|\tau|)\,|\tau|^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$ не зростає. Тоді справедливе співвідношення*

$$e_M\left(L^{\psi_1}_{\beta,1}\right)_q \asymp \psi_1(M)M^{1-\frac{1}{q}}.$$

Зауваження 2.11. При $\psi_j(|\tau|) = |\tau|^{-r_j}$, $\tau \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $r_j > 1 - \frac{1}{q}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, оцінку величини $e_M\left(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},1}\right)_q$, $1 < q \le 2$, встановлено А. С. Романюком [44]:

$$e_M\left(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},1}\right)_q \asymp M^{-r_1+1-\frac{1}{q}}(\log M)^{(d-1)\left(r_1-1+\frac{2}{q}\right)}.$$

У випадку $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$, $r_1 > 1 - \frac{1}{q}$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^d$, цю оцінку можна отримати з результату теореми 2.5.

Розглянемо тепер випадок $2 < q < \infty$.

Теорема 2.6. *Нехай $2 < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовності $\psi_j(|\tau|)\,|\tau|^{1+\varepsilon}$, $j = \overline{1,d}$, не зроста-*

ють. Тоді для будь-яких натуральних M і n, що задовольняють умову $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, справедливі співвідношення

$$\Phi(n) M^{\frac{1}{2}} \ll e_M \left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1} \right)_q \ll \Psi(n) M^{\frac{1}{2}}. \tag{2.54}$$

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху.

Будемо користуватися такими ж основними ідеями, як і при встановленні відповідної оцінки у теоремі 2.3 та вважати, що $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, $\alpha > 1$, а поліноми $P(\theta_M; \boldsymbol{x})$, якими наближаємо функції з класу $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$, мають вигляд, аналогічний до (2.24), та побудовані згідно з лемою E.

Отже, повторюючи міркування, які застосовувалися при отриманні співвідношення (2.27), для $f \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$ можемо записати

$$\|f - P(\theta_M)\|_q \le \left\| \sum_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < \alpha n} \left(\delta_{\boldsymbol{s}}(f) - P(\theta_{N_{\boldsymbol{s}}})\right) \right\|_q + \\ + \left\| f - \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < \alpha n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_q = I_9 + I_{10}. \tag{2.55}$$

Оцінимо доданки I_9 та I_{10}. Зазначимо, що оцінка I_{10} була встановлена у теоремі 2.4. А саме, згідно з (2.45), матимемо

$$I_{10} = \left\| f - \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < \alpha n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_q \ll \Psi([\alpha n]) 2^{\alpha n \left(1 - \frac{1}{q}\right)} (\alpha n)^{\frac{d-1}{q}}. \tag{2.56}$$

Далі перейдемо до оцінки доданку I_9. Міркуючи аналогічно до того, як це було зроблено в ході доведення теореми 2.3 при встановленні співвідношення (2.29), застосовуючи лему C, та вибираючи N_s згідно з (2.32), отримаємо

$$I_9 = \left\| \sum_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < \alpha n} \left(\delta_{\boldsymbol{s}}\left(f\right) - P\left(\theta_{N_{\boldsymbol{s}}}\right)\right) \right\|_q \ll \left(\sum_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < \alpha n} \frac{2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}}{N_{\boldsymbol{s}}} \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(f\right)\right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < \alpha n} \frac{2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}}{N_{\boldsymbol{s}}} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \right)^2 \left\| \delta_{\boldsymbol{s}} \left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} \right) \right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < \alpha n} 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \right)^{-1} 2^{-(\boldsymbol{s},\mathbf{1})} \Psi(n) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \right)^2 \left\| \delta_{\boldsymbol{s}} \left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} \right) \right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\Phi(n)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < \alpha n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \left\| \delta_{\boldsymbol{s}} \left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} \right) \right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.57}$$

Тепер, прийнявши до уваги, що для $f \in L_{\boldsymbol{\beta},1}^{\boldsymbol{\psi}}$

$$\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(f\right)\right\|_2 \asymp \left\|A_{\boldsymbol{s}}\left(f\right)\right\|_2,$$

та скориставшись лемою B, із (2.57) будемо мати

$$I_9 \ll \left(\Phi(n)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < \alpha n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \left\| A_{\boldsymbol{s}} \left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} \right) \right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\Phi(n)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < \alpha n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \left\| A_{\boldsymbol{s}} \left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} \right) \right\|_1^2 2^{2(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\left(1-\frac{1}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\Phi(n)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < \alpha n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \left\| A_{\boldsymbol{s}} \left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} \right) \right\|_1^2 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.58}$$

Далі, оскільки

$$\left\|A_{\boldsymbol{s}}\left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right)\right\|_1 \le \|A_{\boldsymbol{s}}\|_1 \left\|f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right\|_1 \le C_1 \left\|f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right\|_1 \le C_2,$$

де $C_1 > 0, C_2 > 0$ — деякі сталі, то із (2.58), за допомогою міркувань, аналогічних до тих, які були використані при встановленні співвідношення (2.33), приходимо до наступної оцінки

$$I_9 \ll (\Psi(n))^{\frac{1}{2}} \left(\Psi(n) 2^n n^{d-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \Psi(n) 2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}}. \tag{2.59}$$

Таким чином, підставляючи (2.59) та (2.56) в (2.55), отримаємо

$$\|f - P(\theta_M)\|_q \ll \Psi([\alpha n]) 2^{\alpha n\left(1-\frac{1}{q}\right)} (\alpha n)^{\frac{d-1}{q}} + \Psi(n) 2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}}.$$

Проводячи міркування, аналогічні до тих, які були використані при встановленні (2.36), приходимо до оцінки

$$\|f - P(\theta_M)\|_q \ll \Psi(n) M^{\frac{1}{2}}.$$

Перейдемо тепер до встановлення в (2.54) оцінки знизу.

Оскільки $2 < q < \infty$, то має місце співвідношення

$$e_M\Big(L_{\boldsymbol{\beta},1}^{\boldsymbol{\psi}}\Big)_q > e_M\Big(L_{\boldsymbol{\beta},1}^{\boldsymbol{\psi}}\Big)_2. \tag{2.60}$$

За умовою теореми 2.6, існує $\varepsilon > 0$, таке що послідовності $\psi_j(|\tau|)\,|\tau|^{1+\varepsilon}$, $j = \overline{1,d}$, не зростають, а отже, не зростають також послідовності $\psi_j(|\tau|)\,|\tau|^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $j = \overline{1,d}$. Тому можемо використати результат теореми 2.5 при $q = 2$. Отже, із (2.60) та (2.48) матимемо

$$e_M\Big(L_{\boldsymbol{\beta},1}^{\boldsymbol{\psi}}\Big)_q \gg \Phi(n) M^{\frac{1}{2}}.$$

Оцінку знизу доведено.

Теорему 2.6 доведено. $\square$

Зауваження 2.12. В одновимірному випадку з результату теореми 2.6 випливає точна за порядком оцінка величини $e_M\Big(L^{\psi_1}_{\beta,1}\Big)_q$, $2 < q < \infty$, яка при деяких додаткових умовах на послідовність ψ_1 встановлена В. В. Шкапою [84]. А саме, справедливе наступне твердження.

Теорема 2.6$'$. *Нехай $d = 1$, $2 < q < \infty$, $\psi_1 \in D$, $\beta \in \mathbb{R}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi_1(|\tau|)\,|\tau|^{1+\varepsilon}$ не зростає. Тоді має місце співвідношення*

$$e_M\Big(L^{\psi_1}_{\beta,1}\Big)_q \asymp \psi_1(M)M^{\frac{1}{2}}.$$

Зауваження 2.13. Якщо у теоремі 2.6 покласти $\psi_j(|\tau|) = |\tau|^{-r_1}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, $\tau \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $r_1 > 1$, то отримаємо оцінку величини $e_M\big(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},1}\big)_q$, $2 < q < \infty$, яку було анонсовано Е. С. Белінським [9]:

$$e_M\big(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},1}\big)_q \asymp M^{-r_1+\frac{1}{2}}\left(\log^{d-1} M\right)^{r_1}.$$

Зауваження 2.14. Порівнявши результати теорем 2.4 – 2.6 бачимо, що при $2 < q < \infty$ оцінки зверху величин $e_M\Big(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}\Big)_q$ та $e^{\perp}_M\Big(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}\Big)_q$ відрізняється за порядком.

2.4. Оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ функцій малої гладкості

У цьому підрозділі встановлено порядкові оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ періодичних функцій багатьох змінних малої гладкості у просторі L_q при $1 < p \le 2 < q < \infty$.

Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 2.7. *Нехай $1 < p \le 2 < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовності $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{\frac{1}{p}-\varepsilon}$, $j = \overline{1,d}$, не спадають, а $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$, $j = \overline{1,d}$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, не зростають.*

Тоді для будь-яких натуральних M і n, що задовольняють умову $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, та числа $n_1 = \frac{q}{2}n - \left(\frac{q}{2} - 1\right)(d-1)\log n$, справедливі оцінки

$$\Phi([n_1]) M^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} (\log M)^{(d-1)\left(1-\frac{q}{p}\right)} \ll e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q \ll$$
$$\ll \Psi([n_1]) M^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} (\log M)^{(d-1)\left(1-\frac{q}{p}\right)}. \quad (2.61)$$

Доведення. Отримаємо спочатку оцінку зверху.

Нехай f — довільна функція із класу $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, M — задане достатньо велике число. Підберемо число $n \in \mathbb{N}$ так, щоб виконувалося співвідношення $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$ і покладемо

$$n_1 = \frac{q}{2}n - \left(\frac{q}{2} - 1\right)(d-1)\log n,$$
$$n_2 = \frac{q}{2}n + \frac{q}{2}(d-1)\log n.$$

Далі, розіб'ємо ряд Фур'є функції f на кілька частин, кожна з яких, згідно з теоремою Літтлвуда – Пелі, також належить класу $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$. Отже, нехай

$$f(\boldsymbol{x}) = \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<n} + \sum_{n\le(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_1]} + \sum_{[n_1]\le(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_2]} + \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\ge[n_2]}\right)\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}) =$$
$$= \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<n} + \sum_{n\le(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_1]} + \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sideset{}{'}\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} + \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sideset{}{''}\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} + \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\ge[n_2]}\right)\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}),$$

де доданок $\sum\limits_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sideset{}{'}\sum\limits_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}$ містить m_l "блоків"$\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x})$ по тих $\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d$, яким відповідають найбільші значення норм $\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}})\right\|_2$, а доданок $\sum\limits_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sideset{}{''}\sum\limits_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}$ — всі ті "блоки", які залишилися. Вибір чисел m_l прокоментуємо пізніше.

Будемо наближати функцію f поліномом $P(\theta_M;\boldsymbol{x})$, що складається з її частинної східчасто гіперболічної суми Фур'є та деяких поліномів, побудованих згідно з лемою Е. Тобто

$$P(\theta_M;\boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}) + \\ + \sum_{n\le(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_1]} P_1(\theta_{L_{\boldsymbol{s}}};\boldsymbol{x}) + \sum_{[n_1]\le(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_2]} P_2(\theta_{M_{\boldsymbol{s}}};\boldsymbol{x}).$$

Тоді, згідно з властивостями норми, матимемо

$$\|f-P(\theta_M)\|_q \le \left\| \sum_{n\le(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_1]} (\delta_{\boldsymbol{s}}(f) - P_1(\theta_{L_{\boldsymbol{s}}})) \right\|_q + \\ + \left\| \sum_{[n_1]\le(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_2]} (\delta_{\boldsymbol{s}}(f) - P_2(\theta_{M_{\boldsymbol{s}}})) \right\|_q + \left\| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\ge[n_2]} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_q \le \\ \le \left\| \sum_{n\le(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_1]} (\delta_{\boldsymbol{s}}(f) - P_1(\theta_{L_{\boldsymbol{s}}})) \right\|_q + \\ + \left\| \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} {\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}}' \delta_{\boldsymbol{s}}(f) - \sum_{[n_1]\le(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_2]} P_2(\theta_{M_{\boldsymbol{s}}}) \right\|_q + \\ + \left\| \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} {\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}}'' \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_q + \left\| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\ge[n_2]} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_q = \\ = I_{11} + I_{12} + I_{13} + I_{14}. \tag{2.62}$$

Оцінимо окремо кожен із доданків I_{11}, I_{12}, I_{13}, I_{14}.

Встановимо спочатку оцінку для I_{11}. Міркуючи аналогічно до того, як це було зроблено при встановленні співвідношення (2.29), можемо записати

$$I_{11} = \left\| \sum_{n\le(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_1]} (\delta_{\boldsymbol{s}}(f) - P_1(\theta_{L_{\boldsymbol{s}}})) \right\|_q \ll \\ \ll \left(\sum_{n\le(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_1]} \frac{2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}}{L_{\boldsymbol{s}}} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.63}$$

Далі, використавши лему C, із (2.63) отримаємо

$$I_{11} \ll \left(\sum_{n \le (\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) < [n_1]} \frac{2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})}}{L_{\boldsymbol{s}}} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) \right)^2 \left\| \delta_{\boldsymbol{s}} \left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} \right) \right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.64)$$

Тепер кожному вектору $\boldsymbol{s}\colon\ n \le (\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) < [n_1]$ поставимо у відповідність число

$$L_{\boldsymbol{s}} = \left[\frac{2^n n^{d-1}}{2^{\frac{n_1}{p}} n_1^{\frac{d-1}{p'}} \Psi([n_1])} 2^{\frac{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})}{2}} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) \left\| \delta_{\boldsymbol{s}}(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}) \right\|_2 \right] + 1,$$

і переконаємося, що при такому виборі $L_{\boldsymbol{s}}$ кількість гармонік у поліномі $\sum\limits_{n \le (\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) < [n_1]} P_1\left(\theta_{L_{\boldsymbol{s}}}; \boldsymbol{x}\right)$ не перевищує за порядком $2^n n^{d-1}$. Дійсно,

$$\sum_{n \le (\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) < [n_1]} L_{\boldsymbol{s}} \ll n_1^d +$$

$$+ \frac{2^n n^{d-1}}{2^{\frac{n_1}{p}} n_1^{\frac{d-1}{p'}} \Psi([n_1])} \sum_{n \le (\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) < [n_1]} 2^{\frac{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})}{2}} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}} \left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} \right) \right\|_2 \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}). \qquad (2.65)$$

Оцінимо суму в правій частині співвідношення (2.65). Скориставшись нерівністю Гельдера, матимемо

$$I_{15} = \sum_{n \le (\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) < [n_1]} 2^{\frac{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})}{2}} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}}(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}) \right\|_2 \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) =$$

$$= \sum_{n \le (\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) < [n_1]} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}}(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}) \right\|_2 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)} 2^{\frac{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})}{p}} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) \le$$

$$\le \left(\sum_{n \le (\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) < [n_1]} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}}(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}) \right\|_2^p 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)p} \right)^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times \left(\sum_{n \le (\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) < [n_1]} 2^{\frac{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})p'}{p}} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}. \qquad (2.66)$$

Далі, застосовуючи до першого множника у правій частині (2.66) лему D та враховуючи, що послідовності $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{\frac{1}{p}-\varepsilon}$, $j=\overline{1,d}$, $\varepsilon>0$, є неспадними, одержимо

$$I_{15} \ll \left\|f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right\|_p \left(\sum_{n\leq(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_1]} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) 2^{s_j\left(\frac{1}{p}-\varepsilon\right)} 2^{s_j\varepsilon} \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq$$

$$\leq \Psi\left([n_1]\right) 2^{n_1\left(\frac{1}{p}-\varepsilon\right)} \left(\sum_{n\leq(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_1]} 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})p'\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \Psi([n_1]) 2^{n_1\left(\frac{1}{p}-\varepsilon\right)} \left(\sum_{l=n}^{[n_1]} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})p'\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p'}} \asymp$$

$$\asymp \Psi([n_1]) 2^{n_1\left(\frac{1}{p}-\varepsilon\right)} \left(\sum_{l=n}^{[n_1]} 2^{lp'\varepsilon} l^{d-1} \right)^{\frac{1}{p'}} \asymp$$

$$\asymp \Psi([n_1]) 2^{n_1\left(\frac{1}{p}-\varepsilon\right)} 2^{n_1\varepsilon} n_1^{\frac{d-1}{p'}} = \Psi([n_1]) 2^{\frac{n_1}{p}} n_1^{\frac{d-1}{p'}}. \tag{2.67}$$

Прийнявши до уваги (2.67) і повертаючись до (2.65), будемо мати

$$\sum_{n\leq(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_1]} L_{\boldsymbol{s}} \ll \frac{2^n n^{d-1}}{2^{\frac{n_1}{p}} n_1^{\frac{d-1}{p'}} \Psi([n_1])} \Psi([n_1]) 2^{\frac{n_1}{p}} n_1^{\frac{d-1}{p'}} + n_1^d \ll 2^n n^{d-1}.$$

Таким чином, кількість гармонік, що містяться в об'єднанні поліномів $P_1(\theta_{L_{\boldsymbol{s}}};\boldsymbol{x})$, не перевищує за порядком $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Підставляючи значення $L_{\boldsymbol{s}}$ у (2.64), та використовуючи оцінку (2.67), отримаємо

$$I_{11} \ll \left(\sum_{n\leq(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_1]} \frac{2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})} \left(\prod\limits_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \right)^2 \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right)\right\|_2^2 2^{\frac{n_1}{p}} n_1^{\frac{d-1}{p'}}}{2^n n^{d-1} 2^{\frac{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}{2}} \prod\limits_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right)\right\|_2 \Psi([n_1])^{-1}} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{2^{\frac{n_1}{p}} n_1^{\frac{d-1}{p'}} \Psi([n_1])}{2^n n^{d-1}} \sum_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < [n_1]} 2^{\frac{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}{2}} \prod_{j=1}^{d} \psi_j \left(2^{s_j}\right) \left\| \delta_{\boldsymbol{s}} \left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} \right) \right\|_2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\frac{2^{\frac{n_1}{p}} n_1^{\frac{d-1}{p'}} \Psi([n_1])}{2^n n^{d-1}} \Psi([n_1]) 2^{\frac{n_1}{p}} n_1^{\frac{d-1}{p'}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\Psi([n_1]) 2^{\frac{n_1}{p}} n_1^{\frac{d-1}{p'}}}{2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}}}. \qquad (2.68)$$

Далі, підставляючи значення $n_1 = \frac{q}{2}n - \left(\frac{q}{2} - 1\right)(d-1)\log n$ та здійснюючи елементарні перетворення, із (2.68) отримаємо

$$I_{11} \ll \frac{\Psi([n_1]) 2^{\frac{q}{2p}n} n^{\frac{d-1}{p'}}}{n^{\frac{\left(\frac{q}{2}-1\right)(d-1)}{p}} 2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}}} = \Psi([n_1]) 2^{\frac{q}{2}n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{2}-\frac{q}{2p}+\frac{1}{p}\right)} =$$

$$= \Psi([n_1]) 2^{\frac{q}{2}n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{\frac{q}{2}(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}. \qquad (2.69)$$

Враховуючи, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, із (2.69) можемо записати

$$I_{11} \ll \Psi([n_1]) \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{q(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \asymp$$

$$\asymp \Psi([n_1]) M^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} (\log M)^{(d-1)\left(1-\frac{q}{p}\right)} \qquad (2.70)$$

Перейдемо до оцінки доданку I_{12} із (2.62). Згідно з теоремою А та лемою Е, отримаємо

$$I_{12} = \left\| \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sideset{}{'}\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) - \sum_{[n_1] \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < [n_2]} P_2\left(\theta_{M_{\boldsymbol{s}}}\right) \right\|_q \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sideset{}{'}\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} \frac{2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}}{M_{\boldsymbol{s}}} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} 2^l \sideset{}{'}\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} M_{\boldsymbol{s}}^{-1} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.71)$$

Далі, кожному вектору $\boldsymbol{s}\colon\ [n_1] \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < [n_2]$, поставимо у відповідність число

$$M_{\boldsymbol{s}} = \left[\frac{\left(2^n n^{d-1}\right)^{1-\frac{q'}{2p'}}}{\Psi([n_1]) 2^{n_1 q' \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}} 2^{\frac{l}{2}} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_2 \right] + 1.$$

Переконаємося, що при такому виборі $M_{\boldsymbol{s}}$ виконується співвідношення

$$\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}{}' M_{\boldsymbol{s}} \ll 2^n n^{d-1}.$$

Дійсно,

$$\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}{}' M_{\boldsymbol{s}} \ll \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}{}' \frac{\left(2^n n^{d-1}\right)^{1-\frac{q'}{2p'}}}{\Psi([n_1]) 2^{n_1 q' \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}} 2^{\frac{l}{2}} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_2 + n_2^d =$$

$$= \frac{\left(2^n n^{d-1}\right)^{1-\frac{q'}{2p'}}}{\Psi([n_1]) 2^{n_1 q' \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}} \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} 2^{\frac{l}{2}} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}{}' \left\| \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_2 + n_2^d. \qquad (2.72)$$

Оцінимо окремо суму у правій частині співвідношення (2.72). Застосовуючи лему C, матимемо

$$I_{16} = \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} 2^{\frac{l}{2}} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}{}' \left\| \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_2 \ll \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} 2^{\frac{l}{2}} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}{}' \left\| \delta_{\boldsymbol{s}}(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}) \right\|_2 \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) =$$

$$= \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} 2^{\frac{l}{2}} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}{}' \left\| \delta_{\boldsymbol{s}}(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}) \right\|_2 \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}. \qquad (2.73)$$

Згідно з умовою теореми 2.7, послідовності $\psi_j\left(|\tau|\right)|\tau|^{q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$, $j=\overline{1,d}$, не зростають. Тоді не зростають також послідовності $\psi_j\left(|\tau|\right)|\tau|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$, $j=\overline{1,d}$. Дійсно, оскільки $q'=\frac{q}{q-1}$, а $1-\frac{1}{p}=\frac{1}{p'}$, то можемо записати

$$q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) = \frac{q'}{p} - \frac{q'}{q} = \frac{q'}{p}\left(\frac{1}{q'}+\frac{1}{q}\right) - \frac{q'}{q} = \frac{1}{p} + \frac{q'}{pq} - \frac{q'}{q} =$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{q'}{q}\left(\frac{1}{p}-1\right) = \frac{1}{p} - \frac{q'}{qp'} = \frac{1}{p} - \frac{q}{q(q-1)p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{(q-1)p'}. \qquad (2.74)$$

Звідси бачимо, що $q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) > \frac{1}{p}-\frac{1}{2}$, $2<q<\infty$, а отже, послідовності $\psi_j\left(|\tau|\right)|\tau|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$, $j=\overline{1,d}$, є незростаючими. Тому, для (2.73) одержимо

$$I_{16} \ll \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} 2^{\frac{l}{2}}\Psi(l)2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=l}{}' \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right)\right\|_2 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}.$$

Далі, застосовуючи нерівність Гельдера та враховуючи, що у внутрішній сумі міститься не більше, ніж m_l доданків, отримаємо

$$I_{16} \ll \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} 2^{\frac{l}{p}}\Psi(l) \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=l}{}' 1^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=l}{}' \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right)\right\|_2^p 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})p}\right)^{\frac{1}{p}} \ll$$

$$\ll \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \Psi(l)2^{\frac{l}{p}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=l}{}' \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right)\right\|_2^p 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})p}\right)^{\frac{1}{p}} m_l^{\frac{1}{p'}}. \qquad (2.75)$$

Тепер, кожному $l\in\mathbb{N}$: $[n_1]\le l<[n_2]$ поставимо у відповідність числа

$$S_l = \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=l} \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right)\right\|_2^p 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)p}\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (2.76)$$

$$m_l = \left[2^{\frac{q'}{2}n} n^{(d-1)\frac{q'}{2}} S_l^p 2^{\frac{-lq'}{q}}\right]. \qquad (2.77)$$

Підставляючи значення S_l та m_l у (2.75), одержимо

$$I_{16} \ll \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \Psi(l)2^{\frac{l}{p}} S_l 2^{\frac{q'}{2p'}n} n^{(d-1)\frac{q'}{2p'}} S_l^{\frac{p}{p'}} 2^{\frac{-lq'}{qp'}} = \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2p'}} \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \Psi(l)2^{\frac{l}{p}} S_l^p 2^{\frac{-lq'}{qp'}}.$$

Враховуючи, що згідно з умовою теореми 2.7, послідовності $\psi_j\left(|\tau|\right)|\tau|^{\frac{1}{p}-\frac{q'}{qp'}}$, $j=\overline{1,d}$, не зростають, матимемо

$$I_{16} \ll (2^n n^{d-1})^{\frac{q'}{2p'}} \Psi([n_1]) 2^{n_1\left(\frac{1}{p}-\frac{q'}{qp'}\right)} \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} S_l^p. \qquad (2.78)$$

Згідно з лемою D, можемо записати

$$\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} S_l^p = \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}} \left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} \right) \right\|_2^p 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)p} \ll$$

$$\ll \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}} \left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} \right) \right\|_2^p 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)p} \ll \left\| f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} \right\|_p^p \leq 1. \qquad (2.79)$$

Тому, продовжимо оцінку (2.78) величини I_{16} наступним чином

$$I_{16} = \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} 2^{\frac{l}{2}} \sideset{}{'}\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_2 \ll \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2p'}} \Psi([n_1]) 2^{n_1\left(\frac{1}{p}-\frac{q'}{qp'}\right)}. \qquad (2.80)$$

Підставляючи (2.80) у (2.72) та беручи до уваги (2.74), отримаємо

$$\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sideset{}{'}\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} M_{\boldsymbol{s}} \ll$$

$$\ll \frac{\left(2^n n^{d-1}\right)^{1-\frac{q'}{2p'}}}{\Psi([n_1]) 2^{n_1 q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}} (2^n n^{d-1})^{\frac{q'}{2p'}} \Psi([n_1]) 2^{n_1\left(\frac{1}{p}-\frac{q'}{qp'}\right)} + n_2^d \ll 2^n n^{d-1}.$$

Отже, кількість гармонік в об'єднанні поліномів $P_2(\theta_{M_{\boldsymbol{s}}}; \boldsymbol{x})$ не перевищує за порядком $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Оцінимо тепер доданок I_{12}. Підставляючи у (2.71) значення $M_{\boldsymbol{s}}$ та використовуючи оцінку (2.80), матимемо

$$I_{12} \ll \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} 2^l \sideset{}{'}\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} \frac{\Psi([n_1]) 2^{n_1 q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_2^2}{\left(2^n n^{d-1}\right)^{1-\frac{q'}{2p'}} 2^{\frac{l}{2}} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_2} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{\Psi([n_1]) 2^{n_1 q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}}{\left(2^n n^{d-1}\right)^{1-\frac{q'}{2p'}} 2^{\frac{l}{2}}} \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} 2^{\frac{l}{2}} \sideset{}{'}\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\frac{\Psi([n_1]) 2^{n_1 q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}}{\left(2^n n^{d-1}\right)^{1-\frac{q'}{2p'}} 2^{\frac{l}{2}}} (2^n n^{d-1})^{\frac{q'}{2p'}} \Psi([n_1]) 2^{n_1\left(\frac{1}{p}-\frac{q'}{qp'}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \Psi([n_1]) 2^{n_1 q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} (2^n n^{d-1})^{\frac{q'}{2p'}-\frac{1}{2}}. \qquad (2.81)$$

Далі, врахувавши, що $n_1 = \frac{q}{2}n - \left(\frac{q}{2} - 1\right)(d-1)\log n$, а $M \asymp 2^n n^{d-1}$ та виконавши елементарні перетворення, продовжимо оцінку (2.81)

$$
\begin{aligned}
I_{12} &\ll \Psi([n_1]) 2^{\frac{qq'}{2} n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{-\left(\frac{q}{2}-1\right)(d-1)q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2p'}-\frac{1}{2}} = \\
&= \Psi([n_1]) 2^{\frac{q}{2}n\left(\frac{q'}{p}-\frac{q'}{q}+\frac{q'}{qp'}-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{q'}{2p'}-\frac{1}{2}-q'\left(\frac{q}{2}-1\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)} = \\
&= \Psi([n_1]) 2^{\frac{q}{2}n\left(\frac{q'}{p}-\frac{q'}{qp}-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{q'}{2}\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{q'}\right)-q'\left(\frac{q}{2}-1\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)} = \\
&= \Psi([n_1]) 2^{\frac{q}{2}n\left(\frac{q'}{pq'}-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{q'}{2}\left(1-\frac{1}{p}-1+\frac{1}{q}\right)-q'\left(\frac{q}{2}-1\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)} = \\
&= \Psi([n_1]) 2^{\frac{q}{2}n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{-(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{q'}{2}+\frac{qq'}{2}-q'\right)} = \\
&= \Psi([n_1]) 2^{\frac{q}{2}n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{-\frac{q}{2}(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\left(q'-\frac{q'}{q}\right)} = \\
&= \Psi([n_1]) 2^{\frac{q}{2}n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{-\frac{q}{2}(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} = \\
&= \Psi([n_1]) \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{-(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \asymp \\
&\asymp \Psi([n_1]) M^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} (\log M)^{(d-1)\left(1-\frac{q}{p}\right)}.
\end{aligned} \tag{2.82}
$$

Перейдемо тепер до оцінки доданку I_{13} з правої частини (2.62):

$$
I_{13} = \left\| \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}'' \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_q . \tag{2.83}
$$

Для цього занумеруємо "блоки"$\delta_{\boldsymbol{s}}(f)$, які містяться в I_{13}, в порядку спадання норм $\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right)\right\|_2$ і позначимо їх $\alpha_i(f,l)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Тоді, згідно (2.76), запишемо

$$
S_l^p = \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}}\right)\right\|_2^p 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)p} \gg 2^{l\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)p} \left(\alpha_i(f,l)^p \cdot i\right).
$$

Звідси, отримаємо

$$
S_l \gg 2^{l\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \alpha_i(f,l) \cdot i^{\frac{1}{p}},
$$

тобто

$$
\alpha_i(f,l) \ll i^{-\frac{1}{p}} 2^{-l\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} S_l. \tag{2.84}
$$

Тепер, використавши послідовно леми B та C, із (2.83) одержимо

$$I_{13} \ll \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} {\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}}'' \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_2^q \, 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} {\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}}'' \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}})\right\|_2^q \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) \right)^q 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})q} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} {\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}}'' \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}})\right\|_2^p \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}})\right\|_2^{q-p} \Psi(l)^q 2^{l(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})q} \right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (2.85)$$

Враховуючи, що в I_{13} містяться норми $\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}})\right\|_2$ починаючи з номера m_l, і використовуючи співвідношення (2.84) та (2.76), із (2.85) отримаємо

$$I_{13} \ll \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sum_{i>m_i} \alpha_i(f,l)^p \alpha_i(f,l)^{q-p} \Psi(l)^q 2^{l\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} m_l^{-\frac{q-p}{p}} 2^{-l(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})q} 2^{l(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})p} S_l^{q-p} \Psi(l)^q 2^{l(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})q} \sum_{i>m_i} \alpha_i(f,l)^p \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} m_l^{-\frac{q-p}{p}} 2^{-lq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}\right)} \Psi(l)^q S_l^{q-p} 2^{l\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)p} \sum_{i>m_i} \alpha_i(f,l)^p \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} m_l^{-\frac{q-p}{p}} 2^{lq(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \Psi(l)^q S_l^{q-p} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right)\right\|_2^p 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})p} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} m_l^{-\frac{q-p}{p}} 2^{lq\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \Psi(l)^q S_l^{q-p} S_l^p \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} m_l^{-\frac{q-p}{p}} 2^{lq\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \Psi(l)^q S_l^q \right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (2.86)$$

Тепер, підставляючи в (2.86) значення величин m_l із (2.77) та здійснюючи елементарні перетворення, будемо мати

$$I_{13} \ll \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \left(2^{\frac{q'}{2}n} n^{(d-1)\frac{q'}{2}} S_l^p 2^{\frac{-lq'}{q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} 2^{lq\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \Psi(l)^q S_l^q \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} 2^{\frac{q'n(p-q)}{2p}} n^{\frac{(d-1)(p-q)q'}{2p}} S_l^p \Psi(l)^q 2^{-l\frac{q'(p-q)}{qp}} 2^{lq\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= 2^{\frac{q'n(p-q)}{2pq}} n^{\frac{(d-1)(p-q)q'}{2pq}} \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} S_l^p \Psi(l)^q 2^{-l\frac{q'}{q}} 2^{l\frac{q'}{p}} 2^{lq\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= 2^{\frac{q'n(p-q)}{2pq}} n^{\frac{(d-1)(p-q)q'}{2pq}} \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} S_l^p \Psi(l)^q 2^{lqq'\left(\frac{1}{pq}-\frac{1}{q^2}+\frac{1}{pq'}-\frac{1}{qq'}\right)} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= 2^{\frac{q'n(p-q)}{2pq}} n^{\frac{(d-1)(p-q)q'}{2pq}} \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} S_l^p \Psi(l)^q 2^{lqq'\left(\frac{1}{q}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+\frac{1}{q'}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= 2^{\frac{q'n(p-q)}{2pq}} n^{\frac{(d-1)(p-q)q'}{2pq}} \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} S_l^p \Psi(l)^q 2^{lqq'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.87}$$

За умовою теореми 2.7, послідовності $\psi_j(|\tau|)\,|\tau|^{q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$, $j=\overline{1,d}$, не зростають. Тому, враховуючи (2.79), із (2.87) отримаємо

$$I_{13} \ll 2^{\frac{q'n(p-q)}{2pq}} n^{\frac{(d-1)(p-q)q'}{2pq}} \Psi([n_1]) 2^{n_1 q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}. \tag{2.88}$$

Підставляючи в (2.88) значення $n_1 = \frac{q}{2}n - \left(\frac{q}{2}-1\right)(d-1)\log n$ та виконуючи необхідні перетворення, матимемо

$$I_{13} \ll 2^{\frac{q'}{2}n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} n^{\frac{(d-1)q'}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \Psi([n_1]) 2^{\frac{q}{2}nq'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{-\left(\frac{q}{2}-1\right)(d-1)q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} =$$

$$= \Psi([n_1]) 2^{\frac{q}{2}n\left(q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{q'}{q}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)} n^{(d-1)\left(\frac{q'}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)+q'\left(\frac{q}{2}-1\right)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\right)} =$$

$$= \Psi([n_1]) 2^{\frac{q}{2}n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{-(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{q'}{2}+\frac{qq'}{2}-q'\right)} =$$

$$= \Psi([n_1])2^{\frac{q}{2}n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}n^{-(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\frac{q}{2}\left(q'-\frac{q'}{q}\right)} =$$
$$= \Psi([n_1])2^{\frac{q}{2}n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}n^{-\frac{q}{2}(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}.$$

Враховуючи, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, запишемо оцінку для доданку I_{13}

$$I_{13} \ll \Psi([n_1])\left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{-(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \asymp$$
$$\asymp \Psi([n_1])M^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}(\log M)^{(d-1)\left(1-\frac{q}{p}\right)}. \quad (2.89)$$

Для завершення оцінки зверху у (2.61) залишилося оцінити доданок I_{14} із співвідношення (2.62). Скориставшись теоремою D (див. зауваження), можемо записати

$$I_{14} \leq \sup_{f\in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}} \left\| f - \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_2]} \delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_q \ll \Psi([n_2])2^{n_2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}. \quad (2.90)$$

Тоді, враховуючи, що послідовності $\psi_j\left(|\tau|\right)|\tau|^{q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$, $j=\overline{1,d}$, не зростають, а n_1 та n_2 вибрані так, що n_1 менше за n_2, отримаємо

$$I_{14} \ll \Psi([n_2])2^{n_2 q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}2^{-n_2 q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}2^{n_2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \leq$$
$$\leq \Psi([n_1])2^{(n_1-n_2)q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}2^{n_2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}. \quad (2.91)$$

Підставляючи значення чисел n_1 і n_2 та здійснюючи елементарні перетворення, із (2.91) будемо мати

$$I_{14} \ll \Psi([n_1])2^{-(q-1)(d-1)(\log n)q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}2^{\frac{q}{2}n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}n^{\frac{q}{2}(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} =$$
$$= \Psi([n_1])2^{\frac{q}{2}n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}n^{-q(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}n^{\frac{q}{2}(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} =$$
$$= \Psi([n_1])2^{\frac{q}{2}n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}n^{-\frac{q}{2}(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} =$$
$$= \Psi([n_1])\left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(1-\frac{q}{p}\right)} \asymp$$
$$\asymp \Psi([n_1])M^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}(\log M)^{(d-1)\left(1-\frac{q}{p}\right)}. \quad (2.92)$$

Об'єднуючи оцінки (2.62), (2.70), (2.82), (2.89) та (2.92), отримаємо

$$\|f - P(\theta_M)\|_q \ll \Psi([n_1]) M^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} (\log M)^{(d-1)\left(1-\frac{q}{p}\right)}.$$

Оцінку зверху доведено.

Для встановлення в (2.61) оцінки знизу, підберемо функції f_1 та $\tilde{P}$ відповідно до умов теореми C. Для цього розглянемо східчасто гіперболічне ядро Діріхле

$$D_l(\boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\le l} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})},$$

де число $l \in \mathbb{N}$ задовольняє умову

$$l \ge \frac{q}{2}\log M - (d-1)(q-1)\log\log M.$$

Відомо [16], що

$$\|D_l\|_p \asymp 2^{l\left(1-\frac{1}{p}\right)} l^{\frac{d-1}{p}}, \qquad 1 < p < \infty. \tag{2.93}$$

Тому, скориставшись теоремою E, знайдемо

$$\left\|(D_l)^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right\|_p \ll \frac{1}{\Phi(l)} 2^{l\left(1-\frac{1}{p}\right)} l^{\frac{d-1}{p}}.$$

Таким чином, функція

$$f_1(\boldsymbol{x}) = C_1 \Phi(l) 2^{l\left(\frac{1}{p}-1\right)} l^{-\frac{d-1}{p}} D_l(\boldsymbol{x})$$

з відповідною сталою $C_1 > 0$ належить класу $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$.

Далі, розглянемо поліном

$$\tilde{P}(\boldsymbol{x}) = C_2 \left(2^{\frac{l}{q}} l^{\frac{d-1}{q'}} + M^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \left(D_l(\boldsymbol{x}) - {\sum_{\boldsymbol{k}\in\theta_M}}' e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\right), \quad C_2 > 0,$$

де штрих означає, що підсумовування виконується за тими $\boldsymbol{k} \in \theta_M$, які містяться в D_l. Покажемо, що $\tilde{P}$ задовольняє умови теореми C.

Оскільки $q' \le 2$, то, беручи до уваги властивості норми, співвідношення (2.93) та рівність Парсеваля, одержимо

$$\left\|\tilde{P}\right\|_{q'} \ll \left(2^{\frac{l}{q}}l^{\frac{d-1}{q'}} + M^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\left(\|D_l\|_{q'} + \left\|\sum_{\boldsymbol{k}\in\theta_M}{}' e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\right\|_2\right) \ll$$

$$\ll \left(2^{\frac{l}{q}}l^{\frac{d-1}{q'}} + M^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\left(2^{\frac{l}{q}}l^{\frac{d-1}{q'}} + \left(\sum_{\boldsymbol{k}\in\theta_M}{}' 1\right)^{\frac{1}{2}}\right) \ll$$

$$\ll \left(2^{\frac{l}{q}}l^{\frac{d-1}{q'}} + M^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\left(2^{\frac{l}{q}}l^{\frac{d-1}{q'}} + M^{\frac{1}{2}}\right) = 1.$$

Отже, поліном $\tilde{P}$ з відповідною сталою $C_2 > 0$ задовольняє умови теореми C, і таким чином, згідно з цією теоремою, можемо записати

$$e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q \gg \Phi(l)2^{l\left(\frac{1}{p}-1\right)}l^{-\frac{d-1}{p}}\left(2^{\frac{l}{q}}l^{\frac{d-1}{q'}} + M^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \times$$

$$\times \left|\int\limits_{\pi_d}\left(D_l(\boldsymbol{x}) - \sum_{\boldsymbol{k}\in\theta_M}{}' e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\right) D_l(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| \gg$$

$$\gg \frac{\Phi(l)2^{l\left(\frac{1}{p}-1\right)}l^{-\frac{d-1}{p}}}{2^{\frac{l}{q}}l^{\frac{d-1}{q'}} + M^{\frac{1}{2}}}\left(\|D_l\|_2^2 - \left\|\sum_{\boldsymbol{k}\in\theta_M}{}' e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\right\|_2^2\right) \gg$$

$$\gg \frac{\Phi(l)2^{l\left(\frac{1}{p}-1\right)}l^{-\frac{d-1}{p}}}{2^{\frac{l}{q}}l^{\frac{d-1}{q'}} + M^{\frac{1}{2}}}\left(2^l l^{d-1} - M\right). \tag{2.94}$$

Отже, враховуючи вибір l, одержимо $2^l \geq M^{\frac{q}{2}}(\log M)^{-(q-1)(d-1)}$, $2^{\frac{l}{q}}l^{\frac{d-1}{q'}} \gg M^{\frac{1}{2}}$, і, таким чином, із (2.94) будемо мати

$$e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q \gg \frac{\Phi(l)2^{l\left(\frac{1}{p}-1\right)}l^{-\frac{d-1}{p}}}{2^{\frac{l}{q}}l^{\frac{d-1}{q'}}}2^l l^{d-1} = \Phi(l)2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}l^{-(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \gg$$

$$\gg \Phi\left([n_1]\right) M^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left(\log M\right)^{-(d-1)(q-1+1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} =$$

$$= \Phi\left([n_1]\right) M^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left(\log M\right)^{(d-1)\left(1-\frac{q}{p}\right)}. \tag{2.95}$$

Оцінку знизу, а отже і теорему 2.7, доведено. □

Зауваження 2.15. В одновимірному випадку точні за порядком оцінки, які відповідають одержаним у теоремі 2.7 результатам, встановлені А. С. Федоренком [70].

Зауваження 2.16. При $\psi_j(|\tau|) = |\tau|^{-r_j}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, $\tau \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $q'\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) < r_1 < \frac{1}{p}$, оцінку величини $e_M\left(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q$, $1 < p \le 2 < q < \infty$, встановлено Е. С. Белінським [11], а саме:

$$e_M\left(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q \asymp M^{-\frac{q}{2}\left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} (\log M)^{(d-1)(q-1)\left(r_1 - q'\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\right)}.$$

У випадку $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$, цю оцінку можна отримати із результату теореми 2.7.

Зауваження 2.17. Порівнюючи отримані в теоремі 2.7 результати з оцінками наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів (див. теорему D), бачимо, що при відповідних умовах на послідовності ψ_j, $j = \overline{1,d}$, та $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^d$, $M = M(n) = |Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$, виконується співвідношення

$$e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q \ll M^{\left(\frac{q'}{2}-1\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} (\log M)^{(1-q')(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} E_{Q_n}\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q.$$

Зауваження 2.18. Порівнюючи результат теореми 2.7 з оцінками найкращих ортогональних тригонометричних наближень $e^{\perp}_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q$, $1 < p \le 2 < q < \infty$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^d$ [27], бачимо, що при відповідних умовах на послідовності ψ_j, $j = \overline{1,d}$, ці величини при $M \to \infty$ ведуть себе по різному.

Зауваження 2.19. За інших умов на послідовності ψ_j, $j = \overline{1,d}$ (велика гладкість) оцінки величини $e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q$, $1 < p \le 2 < q < \infty$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^d$, встановлено Н. М. Консевич [25].

2.5. Висновки до розділу 2

У цьому розділі встановлено порядкові оцінки найкращих тригонометричних наближень періодичних функцій багатьох змінних $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$ і класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ у просторі L_q, $1 < q < \infty$.

У підрозділі 2.2 знайдено оцінки величин $e_M\left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right)_q$ та $e^{\perp}_M\left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right)_q$, $1 < q < \infty$. При цьому виявлено, що у випадку $2 < q < \infty$ найкращі M-членні тригонометричні наближення функцій $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$ мають переваги у порівнянні з їх найкращими ортогональними тригонометричними наближеннями.

Отримані у підрозділі 2.2 оцінки для функцій $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$ використані у наступному підрозділі для знаходження оцінок відповідних апроксимативних характеристик класів функцій $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$. В результаті проведених досліджень виявлено, що у випадку $2 < q < \infty$ величини $e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}\right)_q$ і $e^{\perp}_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}\right)_q$ мають різні швидкості спадання при $M \to \infty$.

У підрозділі 2.4 встановлено порядкові оцінки величини $e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q$ у випадку малої гладкості при $1 < p \le 2 < q < \infty$ та виявлено переваги у цьому випадку найкращих M-членних тригонометричних наближень у порівнянні з найкращими ортогональними тригонометричними наближеннями, а також із наближеннями тригонометричними поліномами з "номерами"гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів.

Основні результати розділу 2 опубліковано у роботах [36, 72, 73, 103].

Розділ 3

Найкращі білінійні наближення та ентропійні числа класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних

У цьому розділі встановлено порядкові оцінки найкращих білінійних наближень класів періодичних функцій багатьох змінних, породжених із функцій $f \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ зсувами їх аргументу, а також ентропійних чисел класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

3.1. Постановка задачі про білінійні наближення та допоміжне твердження

Означення найкращих білінійних наближень функцій $\tau_M(f)_{q_1,q_2}$ та класів функцій $\tau_M(F)_{q_1,q_2}$, а також історичну довідку щодо вивчення цих величин можна знайти у підрозділі 1.2 дисертації.

У роботі досліджуються величини $\tau_M(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p})_{q_1,q_2}$ при умові, що ці апроксимативні характеристики розглядаються для функцій $2d$ змінних вигляду $f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$, утворених із функцій d змінних $f(\boldsymbol{x}) \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ зсувом їх аргументу $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ на всеможливі $\boldsymbol{y} \in \pi_d$, при деяких співвідношеннях між параметрами p, q_1 та q_2. Іншими словами, встановлюємо порядкові оцінки величин

$$\tau_M(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p})_{q_1,q_2} = \sup_{f \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}} \tau_M(f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))_{q_1,q_2} =$$

$$= \sup_{f \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}} \inf_{u_i(\boldsymbol{x}),v_i(\boldsymbol{y})} \left\| f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \sum_{i=1}^{M} u_i(\boldsymbol{x}) v_i(\boldsymbol{y}) \right\|_{q_1,q_2}, \qquad (3.1)$$

де $u_i \in L_{q_1}$, $v_i \in L_{q_2}$.

Для доведення результатів нам знадобиться допоміжне твердження.

Лема F. [65, с. 98] *Нехай задано число $M \in \mathbb{N}$, а $n \in \mathbb{N}$ таке, що для кількості елементів множини $\Delta Q_n = \bigcup\limits_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \rho(\boldsymbol{s})$ виконуються умови $|\Delta Q_n| > 4M$, $|\Delta Q_n| \asymp M$. Тоді для будь-якої функції g вигляду*

$$g(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\Delta Q_n} \widehat{g}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, \qquad |\widehat{g}(\boldsymbol{k})| = 1,$$

справедлива оцінка

$$\inf_{u_i(\boldsymbol{x}),v_i(\boldsymbol{y})} \left\| g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \sum_{i=1}^{M} u_i(\boldsymbol{x}) v_i(\boldsymbol{y}) \right\|_{2,1} \gg M^{\frac{1}{2}}.$$

3.2. Оцінки найкращих білінійних наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ періодичних функцій багатьох змінних

Справедлива наступна теорема.

Теорема 3.1. *Нехай $1 < p \le 2 < q_1 < \infty$, $1 \le q_2 \le \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$, $j = \overline{1,d}$, не зростають. Тоді для будь-яких натуральних M і n, що задовольняють умову $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, мають місце оцінки*

$$\Phi(n) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} (\log M)^{-2(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} \ll \tau_M \left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_{q_1,q_2} \ll$$
$$\ll \Psi(n) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} (\log M)^{-2(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}. \tag{3.2}$$

Доведення. Отримаємо спочатку оцінку зверху. Покажемо, що вона випливає з відповідної оцінки для найкращих M-членних тригонометричних наближень функцій з класу $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$.

Дійсно, згідно з результатом [25], для довільної функції $f \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ знайдеться такий набір θ_M із $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$ різних векторів $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d$ і такі $c_{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{C}$, що

$$\left\| f(\boldsymbol{x}) - \sum_{\boldsymbol{k} \in \theta_M} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} \right\|_{q_1} \ll \Psi(n) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} (\log M)^{-2(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}. \tag{3.3}$$

З іншого боку, для лівої частини (3.3) можемо записати

$$\begin{aligned} \left\| f(\boldsymbol{x}) - \sum_{\boldsymbol{k} \in \theta_M} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} \right\|_{q_1} &= \left\| f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \sum_{\boldsymbol{k} \in \theta_M} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \right\|_{q_1,\infty} = \\ &= \left\| f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \sum_{\boldsymbol{k} \in \theta_M} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}) e^{-i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{y})}} \right\|_{q_1,\infty}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Співставивши (3.3) та (3.4), одержимо

$$\left\| f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \sum_{\boldsymbol{k} \in \theta_M} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}) e^{-i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{y})}} \right\|_{q_1,\infty} \ll \Psi(n) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} (\log M)^{-2(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}. \tag{3.5}$$

Тепер, поклавши в (3.5) $u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}$, $v_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{y}) = e^{-i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{y})}$, згідно з (3.1), приходимо до шуканої оцінки зверху величини $\tau_M \left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p} \right)_{q_1,q_2}$.

Перейдемо до встановлення в (3.2) оцінки знизу.

За заданим M виберемо $n \in \mathbb{N}$ так, щоб для кількості елементів множини $\Delta Q_n = \bigcup\limits_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \rho(\boldsymbol{s})$ виконувалися співвідношення $|\Delta Q_n| > 4M$, $|\Delta Q_n| \asymp M$. Зауважимо, що $|\Delta Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$.

Розглянемо функцію

$$\bar{f}_1(\boldsymbol{x}) = C_1 \Phi(n) 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} n^{-\frac{d-1}{p}} \overline{D}_n(\boldsymbol{x}),$$

де $\overline{D}_n(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{\boldsymbol{k} \in \Delta Q_n} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}$. Покажемо, що $\bar{f}_1 \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ при певному виборі сталої $C_1 > 0$.

З цією метою розглянемо східчасто гіперболічне ядро Діріхле

$D_n(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\le n} \sum\limits_{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}$. Прийнявши до уваги, що

$$\overline{D}_n(\boldsymbol{x}) = D_n(\boldsymbol{x}) - D_{n-1}(\boldsymbol{x})$$

та скориставшись теоремою E (див. зауваження) і оцінкою (2.93), будемо мати

$$\begin{aligned}\left\|(\bar{f}_1)^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right\|_p &\ll \frac{1}{\Phi(n)}\Phi(n)2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)}n^{-\frac{d-1}{p}}\left\|\overline{D}_n\right\|_p \le \\ &\le 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)}n^{-\frac{d-1}{p}}\left(\|D_n\|_p + \|D_{n-1}\|_p\right) \ll \\ &\ll 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)}n^{-\frac{d-1}{p}}\left(2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)}n^{\frac{d-1}{p}} + 2^{(n-1)\left(1-\frac{1}{p}\right)}(n-1)^{\frac{d-1}{p}}\right) \ll 1.\end{aligned}$$

Звідси робимо висновок, що при відповідному виборі сталої $C_1 > 0$ функція $\bar{f}_1$ належить класу $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$.

Таким чином, врахувавши обмеження на параметри p, q_1 та q_2, можемо записати

$$\begin{aligned}\tau_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_{q_1,q_2} &\ge \tau_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_{2,1} \ge \tau_M\left(\bar{f}_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right)_{2,1} \asymp \\ &\asymp \Phi(n)2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)}n^{-\frac{d-1}{p}}\tau_M\left(\overline{D}_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right)_{2,1}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Далі, оскільки функція $\overline{D}_n(\boldsymbol{x})$ задовольняє умови леми F, то справедлива оцінка

$$\tau_M\left(\overline{D}_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right)_{2,1} \gg M^{\frac{1}{2}}. \tag{3.7}$$

Тому, співставивши (3.6) та (3.7), знаходимо

$$\begin{aligned}\tau_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_{q_1,q_2} &\gg \Phi(n)2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)}n^{-\frac{d-1}{p}}M^{\frac{1}{2}} \asymp \Phi(n)2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)}n^{-\frac{d-1}{p}}2^{\frac{n}{2}}n^{\frac{d-1}{2}} = \\ &= \Phi(n)2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \asymp \Phi(n)M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}(\log M)^{-2(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Оцінка знизу, і, відповідно, теорема 3.1 доведені. □

Зауваження 3.1. В одновимірному випадку відповідний теоремі 3.1 результат встановлений В. В. Шкапою [85], і при цьому, при відповідних умовах на послідовність ψ_1 і $\beta \in \mathbb{R}$, справедлива оцінка

$$\tau_M\left(L^{\psi_1}_{\beta,p}\right)_{q_1,q_2} \asymp \psi_1(M) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, \qquad 1 < p \leq 2 < q_1 < \infty,\ 1 \leq q_2 \leq \infty.$$

Зауваження 3.2. Якщо у теоремі 3.1 покласти $\psi_j\left(|\tau|\right) = |\tau|^{-r_1}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, $\tau \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, то в (3.2) отримаємо точну за порядком оцінку для класів $W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$, $r_1 > \frac{1}{p}$:

$$\tau_M\left(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_{q_1,q_2} \asymp M^{-r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\left(\log^{d-1} M\right)^{r_1-2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)},$$
$$1 < p \leq 2 < q_1 < \infty,\ 1 \leq q_2 \leq \infty.$$

У випадку $r_1 > \frac{2}{p} - \frac{1}{2}$ відповідний результат встановлений В. М. Темляковим [65, с. 96]. Якщо ж $\frac{1}{p} < r_1 \leq \frac{2}{p} - \frac{1}{2}$, то оцінка знизу величини $\tau_M\left(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_{q_1,q_2}$ встановлена В. М. Темляковим [65, с. 96], а оцінка зверху є наслідком оцінки величини $e_M\left(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_{q_1}$, яка була одержана Е. С. Белінським [11].

Теорема 3.2. *Нехай $2 \leq p < q_1 < \infty$, $1 \leq q_2 \leq \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $\psi_j\left(|\tau|\right)|\tau|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, $j = \overline{1,d}$, не зростають. Тоді для будь-яких натуральних M і n, що задовольняють умову $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, мають місце співвідношення*

$$\Phi(n) \ll \tau_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_{q_1,q_2} \ll \Psi(n). \tag{3.9}$$

Доведення. Для встановлення оцінки зверху скористаємось результатом [25] для найкращих M-членних тригонометричних наближень. При $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$ отримаємо

$$\tau_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_{q_1,q_2} \ll \Psi(n), \qquad 2 \leq p < q_1 < \infty,\ 1 \leq q_2 \leq \infty. \tag{3.10}$$

Перейдемо до встановлення в (3.9) оцінки знизу.

За заданим M виберемо $n \in \mathbb{N}$ так, щоб для кількості елементів множини $\Delta Q_n = \bigcup\limits_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \rho(\boldsymbol{s})$ виконувилися умови $|\Delta Q_n| > 4M$, $|\Delta Q_n| \asymp M$.

Розглянемо функцію

$$f_2(\boldsymbol{x}) = C_2 \Phi(n) 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j),$$

де

$$R_{s_j}(x_j) = \sum_{l=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} \varepsilon_l e^{ilx_j}, \qquad \varepsilon_l = \pm 1, \; j = \overline{1,d},$$

— поліноми Рудіна – Шапіро, $C_2 > 0$.

Зазначимо, що для вказаних поліномів справедлива порядкова оцінка (див., наприклад, [21, с. 155])

$$\left\| R_{s_j} \right\|_\infty \ll 2^{\frac{s_j}{2}}. \tag{3.11}$$

Переконаємося в тому, що $f_2 \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ з відповідною сталою $C_2 > 0$. Скориставшись послідовно теоремами E (див. зауваження), A та нерівністю Мінковського, одержимо

$$\left\| (f_2)^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}} \right\|_p \ll \frac{1}{\Phi(n)} \Phi(n) 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} \left\| \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j} \right\|_p \ll$$

$$\ll 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} \left\| \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \left| \prod_{j=1}^{d} R_{s_j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p =$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} \left(\left\| \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \left| \prod_{j=1}^{d} R_{s_j} \right|^2 \right\|_{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \left\| \left| \prod_{j=1}^{d} R_{s_j} \right|^2 \right\|_{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \left\| \prod_{j=1}^{d} R_{s_j} \right\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n} \prod_{j=1}^{d} \left\| R_{s_j} \right\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.12}$$

Тепер, врахувавши (3.11), із (3.12) будемо мати

$$\begin{aligned}\left\| (f_2)_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} \right\|_p \ll 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n} \prod_{j=1}^{d} 2^{s_j} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ = 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n} 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})} \right)^{\frac{1}{2}} \ll \\ \ll 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} \left(2^n n^{d-1} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.\end{aligned}$$

Звідси слідує, що $f_2 \in L_{\boldsymbol{\beta},p}^{\boldsymbol{\psi}}$ при певному виборі сталої $C_2 > 0$.

Далі, оскільки поліном

$$v(\boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j)$$

задовольняє умови леми F, то справедлива оцінка

$$\tau_M \left(v(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \right)_{2,1} \gg M^{\frac{1}{2}}.$$

Тому, скориставшись цією оцінкою, одержимо

$$\begin{aligned}\tau_M \left(L_{\boldsymbol{\beta},p}^{\boldsymbol{\psi}} \right)_{q_1,q_2} \geq \tau_M \left(L_{\boldsymbol{\beta},p}^{\boldsymbol{\psi}} \right)_{2,1} \geq \tau_M \left(f_2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \right)_{2,1} \asymp \\ \asymp C_2 \Phi(n) 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} \tau_M \left(v(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \right)_{2,1} \gg \\ \gg \Phi(n) 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} M^{\frac{1}{2}} \asymp \\ \asymp \Phi(n) 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} 2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}} = \Phi(n).\end{aligned} \tag{3.13}$$

Оцінку знизу встановлено.

Теорему 3.2 доведено. □

Зауваження 3.3. В одновимірному випадку з результату теореми 3.2

випливає точна за порядком оцінка величини $\tau_M\left(L^{\psi_1}_{\beta,p}\right)_{q_1,q_2}$, яку було встановлено В. В. Шкапою [85], і при цьому, при виконанні відповідних умов на послідовність ψ_1 і $\beta \in \mathbb{R}$, матимемо:

$$\tau_M\left(L^{\psi_1}_{\beta,p}\right)_{q_1,q_2} \asymp \psi_1(M), \qquad 2 \le p < q_1 < \infty,\ 1 \le q_2 \le \infty.$$

Зауваження 3.4. У випадку $\psi_j(|\tau|) = |\tau|^{-r_1}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, $\tau \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, з результату теореми 3.2 отримуємо наступну оцінку величини $\tau_M\left(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_{q_1,q_2}$, $\boldsymbol{r} = (r_1,\dots,r_1) \in \mathbb{R}^d_+$, $r_1 > \frac{1}{2}$:

$$\tau_M\left(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_{q_1,q_2} \asymp M^{-r_1}\left(\log^{d-1} M\right)^{r_1}, \qquad 2 \le p < q_1 < \infty,\ 1 \le q_2 \le \infty.$$

Цю оцінку було встановлено В. М. Темляковим [65, с. 96].

Теорема 3.3. *Нехай* $2 \le q_1 < p < \infty$, $1 \le q_2 \le \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$. *Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n, *що задовольняють умову* $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, *справедливі оцінки*

$$\Phi(n) \ll \tau_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_{q_1,q_2} \ll \Psi(n). \tag{3.14}$$

Доведення. Як і при доведенні оцінок зверху у теоремах 3.1 та 3.2, відповідну оцінку в (3.14) одержимо із результату [26]. Іншими словами, при $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$

$$\tau_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_{q_1,q_2} \ll \Psi(n).$$

Для доведення в (3.14) оцінки знизу достатньо розглянути функцію f_2 та повторити міркування, які були використані при встановленні співвідношення (3.13).

Теорему 3.3 доведено. $\square$

Зауваження 3.5. Результати теореми 3.3 є новими і в одновимірному випадку. Сформулюємо відповідне твердження.

Теорема 3.3′. *Нехай* $d = 1$, $2 \le q_1 < p < \infty$, $1 \le q_2 \le \infty$, $\psi_1 \in D$,

$\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді справедлива оцінка*

$$\tau_M \left(L^{\psi_1}_{\beta,p} \right)_{q_1,q_2} \asymp \psi_1(M).$$

Зауваження 3.6. Якщо в (3.14) покласти $\psi_j\left(|\tau|\right) = |\tau|^{-r_1}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, $\tau \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, то отримаємо точну за порядком оцінку найкращих білінійних наближень класів $W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$, $r_1 > 0$:

$$\tau_M \left(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p} \right)_{q_1,q_2} \asymp M^{-r_1} \left(\log^{d-1} M \right)^{r_1}, \qquad 2 \le q_1 < p < \infty, \ 1 \le q_2 \le \infty.$$

Цю оцінку було встановлено А. С. Романюком [47].

3.3. Постановка задачі про ентропійні числа та допоміжні твердження

У наступних підрозділах роботи отримаємо порядкові оцінки ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторах L_q, $1 \le q < \infty$, та L_∞.

Означення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в термінах мішаного модуля неперервності $\Omega_l(f)_p$ порядку l, $l \in \mathbb{N}$, функції $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, та деякі допоміжні позначення наведені у вступі до дисертації. Для встановлення результатів будемо користуватися еквівалентними представленнями норми $\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}$.

Нагадаємо, що під записом $\rho(\boldsymbol{s})$, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d$, будемо розуміти множину

$$\rho(\boldsymbol{s}) = \left\{ \boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d\colon \quad 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j}, \quad j = \overline{1,d} \right\},$$

і для $f \in L_p$ покладемо

$$\delta_{\boldsymbol{s}}(f) := \delta_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho(\boldsymbol{s})} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})},$$

де $\widehat{f}(\boldsymbol{k})$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Крім цього, будемо розглядати східчасто гіперболічні хрести $\overline{Q}_n = \bigcup\limits_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\le n} \rho(\boldsymbol{s})$. Зазначимо, що $|\overline{Q}_n| \asymp |Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$, де $Q_n = \bigcup\limits_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<n} \rho(\boldsymbol{s})$.

У [109] встановлено, що в прийнятих нами позначеннях при $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $\Omega \in (S_l) \cap (S^\alpha) \cap \Psi_{l,d}$, мають місце співвідношення:

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum\limits_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} (\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}))^{-\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} \frac{\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})}, & \theta = \infty, \end{cases} \tag{3.15}$$

де $\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) = \Omega(2^{-s_1}, \ldots, 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$.

Наведене зображення норми не охоплює випадки $p = 1$ та $p = \infty$, і тому нам знадобиться наступна модифікація норми, яка дозволяє встановити подібне до (3.15) зображення для граничних значень параметра p.

Нехай V_m — ядро Валле–Пуссена порядку $2m - 1$. Кожному вектору $\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d$ поставимо у відповідність поліном

$$A_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j) \right).$$

Нагадаємо, що $\|A_{\boldsymbol{s}}\|_1 \le C_1$, $C_1 > 0$.

Далі, для $f \in L_1$ покладемо

$$A_{\boldsymbol{s}}(f) := A_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) = (f * A_{\boldsymbol{s}})(\boldsymbol{x}),$$

де "$*$— операція згортки.

Тоді при $1 \le p, \theta \le \infty$, $\Omega \in (S_l) \cap (S^\alpha) \cap \Psi_{l,d}$, мають місце співвідношення [35, 57]:

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum\limits_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} (\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}))^{-\theta} \|A_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} \frac{\|A_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})}, & \theta = \infty. \end{cases} \tag{3.16}$$

У дисертаційній роботі розглянуто функції Ω типу мішаного модуля неперервності порядку l, наступного вигляду:

$$\Omega(\boldsymbol{t}) = \Omega(t_1 \cdots t_d) = \omega\Biggl(\prod_{j=1}^{d} t_j\Biggr),$$

де $\omega \in \Psi_{l,1}$ — функція однієї змінної типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S^{α}) і (S_l) Барі – Стечкіна.

Для класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ встановлено оцінки їх ентропійних чисел у просторі L_q, $1 \le q \le \infty$, тобто величин

$$\varepsilon_k(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) = \inf\Biggl\{\varepsilon\colon \quad \exists \boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^{2^k} \in \mathbb{R}^d\colon \quad B^{\Omega}_{p,\theta} \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^k} B_X(\boldsymbol{y}^j, \varepsilon)\Biggr\}.$$

Історія дослідження цих величин міститься у підрозділі 1.2 дисертаційної роботи.

Далі сформулюємо допоміжні твердження, які будуть використані для доведення результатів.

Отже, для $G \subset \mathbb{Z}^d$ через $T(G)$ і $T(G)_q$, $1 \le q \le \infty$, позначимо, відповідно, множини тригонометричних поліномів вигляду

$$T(G) = \Biggl\{t\colon \quad t(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in G} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\Biggr\};$$
$$T(G)_q = \{t \in T(G)\colon \quad \|t\|_q \le 1\}.$$

Теорема F. [67] *Нехай* $1 < p \le 2 \le q < \infty$. *Тоді справедлива оцінка*

$$\varepsilon_M\left(T(\overline{Q}_n)_p, L_q\right) \ll \begin{cases} |\overline{Q}_n| M^{-1} \left(\log\left(|\overline{Q}_n| M^{-1}\right)\right)^2, & 2M \le |\overline{Q}_n|, \\ 2^{-M|\overline{Q}_n|^{-1}}, & 2M \ge |\overline{Q}_n|. \end{cases}$$

Теорема G. [108] *Нехай $1 < p \le 2$. Тоді справедлива оцінка*

$$\varepsilon_M\left(T(\overline{Q}_n)_p, L_\infty\right) \ll \begin{cases} n^{\frac{1}{2}}\left(|\overline{Q}_n|M^{-1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\log\left(4|\overline{Q}_n|M^{-1}\right)\right)^{\frac{1}{p}}, & M \le 2\left|\overline{Q}_n\right|, \\ n^{\frac{1}{2}}2^{-M\left(2|\overline{Q}_n|\right)^{-1}}, & M \ge 2\left|\overline{Q}_n\right|. \end{cases}$$

Зауважимо, що аналогічні до сформульованих у теоремах F і G оцінки справедливі також для множини $\Delta Q_n = \bigcup\limits_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \rho(\boldsymbol{s})$.

Нехай $S_{\overline{Q}_n}(f) = \sum\limits_{\boldsymbol{k}\in\overline{Q}_n} \widehat{f}(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}$ — східчасто гіперболічна сума Фур'є функції f. Тоді, з теореми Літтлвуда – Пелі (див. теорему А підрозділу 2.1) випливає співвідношення

$$\left\|S_{\overline{Q}_n}(f)\right\|_q \ll \|f\|_q, \qquad 1 < q < \infty.$$

Отже, в теоремі F можна вважати, що елементи відповідної ε-сітки також належать множині $T(\overline{Q}_n)$.

Будемо також використовувати порядкові оцінки наближень функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ їх східчасто гіперболічними сумами Фур'є у метриці L_q. Ці результати для $\theta = \infty$ встановлені Н. Н. Пустовойтовим [35], а у випадку $1 \le \theta < \infty$ S. Yongsheng, W. Heping [109]:

Теорема H. *Нехай $1 < p < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ і $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\left(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\right)$, де ω задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ та умову (S_l). Тоді*

$$\sup_{f\in B^{\Omega}_{p,\theta}} \left\|f - S_{\overline{Q}_n}(f)\right\|_q \asymp \omega\left(2^{-n}\right) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

У випадку L_∞ відповідні результати встановлені С. А. Стасюком [58]:

Теорема I. *Нехай $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ і $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\left(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\right)$, де ω задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > \frac{1}{p}$ та умову (S_l). Тоді*

$$\sup_{f\in B^{\Omega}_{p,\theta}} \left\|f - S_{\overline{Q}_n}(f)\right\|_\infty \asymp \omega\left(2^{-n}\right) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Нам також знадобиться порядкова нерівність, яка є наслідком теореми Літтлвуда – Пелі (див., наприклад, [33, с. 52–56]):

Лема G. *Нехай* $f \in L_p$, $1 < p < \infty$. *Тоді*

$$\Big\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \Big\|_p \ll \Big(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^{p^*} \Big)^{\frac{1}{p^*}},$$

де $p^* = \min\{2, p\}$.

3.4. Оцінки ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі L_q, $1 \le q < \infty$

Встановимо спочатку оцінку зверху ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q, $1 \le q < \infty$, у випадку $1 < p \le 2$. Справедлива наступна теорема.

Теорема 3.4. *Нехай* $1 \le q < \infty$, $1 < p \le 2$, $1 \le \theta \le \infty$, *а* $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\Big(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\Big)$, *де функція* ω *задовольняє умову* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > 1$ *та умову* (S_l). *Тоді для будь-яких натуральних* M *і* m, *таких що* $M = M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$, *справедливе співвідношення*

$$\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\right) \ll \omega\left(2^{-m}\right) (\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, \tag{3.17}$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Доведення. Зауважимо, що (3.17) достатньо встановити при умові $q > 2$.

Запишемо спочатку оцінку величини $\Big\| \sum\limits_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \Big\|_p$ для $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$. Скориставшись лемою G, отримаємо

$$\Big\| \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \Big\|_p \ll \Big(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^p \Big)^{\frac{1}{p}} = J_1. \tag{3.18}$$

Далі розглянемо окремо випадки $1 \le \theta \le p$, $p < \theta < \infty$ та $\theta = \infty$.

Отже, нехай $1 \le \theta \le p$. Тоді, скориставшись нерівністю [71, с. 43]

$$\left(\sum_l |a_l|^{\mu_2}\right)^{\frac{1}{\mu_2}} \le \left(\sum_l |a_l|^{\mu_1}\right)^{\frac{1}{\mu_1}}, \quad 1 \le \mu_1 \le \mu_2 < \infty,$$

та врахувавши (3.15), із (3.18) можемо записати

$$J_1 \le \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_\theta^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} =$$
$$= \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n} \left(\omega\left(2^{-(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}\right)\right)^\theta \left(\omega\left(2^{-(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}\right)\right)^{-\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \le$$
$$\le \omega\left(2^{-n}\right) \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} \left(\omega\left(2^{-(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}\right)\right)^{-\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$
$$\asymp \omega\left(2^{-n}\right) \|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}} \le \omega\left(2^{-n}\right).$$

Звідси, згідно з (3.18), будемо мати

$$\left\|\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_p \ll \omega\left(2^{-n}\right), \qquad 1 \le \theta \le p. \tag{3.19}$$

Тепер розглянемо випадок $1 < p < \theta < \infty$. Тоді, скориставшись нерівністю Гельдера з показником $\frac{\theta}{p}$ та врахувавши (3.15), із (3.18) одержимо

$$J_1 = \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n} \left(\omega\left(2^{-(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}\right)\right)^{-p} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^p \left(\omega\left(2^{-(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le$$
$$\le \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n} \left(\omega\left(2^{-(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}\right)\right)^{-\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \times$$
$$\times \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n} \left(\omega\left(2^{-(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}\right)\right)^{\frac{p\theta}{\theta-p}}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \omega\left(2^{-n}\right)\left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n} 1\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}} \asymp \omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}. \qquad (3.20)$$

Тому, співставивши (3.20) і (3.18), запишемо

$$\left\| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_p \ll \omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}, \qquad 1 < p < \theta < \infty. \qquad (3.21)$$

Нехай тепер $\theta = \infty$. Тоді, згідно з (3.15), будемо мати

$$J_1 = \omega(2^{-n})\left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n} \left(\left(\omega\left(2^{-(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}\right)\right)^{-1} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \omega(2^{-n})\left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n} 1\right)^{\frac{1}{p}} \asymp \omega\left(2^{-n}\right) n^{\frac{d-1}{p}}. \qquad (3.22)$$

Отже, об'єднавши (3.19), (3.21), (3.22) та (3.18), отримаємо наступну оцінку

$$\left\| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_p \ll \omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, \quad 1 \le \theta \le \infty. \qquad (3.23)$$

Далі, виберемо згідно з M число $m \in \mathbb{N}$ так, щоб $|Q_m| < M \le |\overline{Q}_m|$. Тоді, оскільки $|\overline{Q}_m| \asymp |Q_m| \asymp 2^m m^{d-1}$, то $M = M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$.

Визначимо числа β та $\overline{M}_n$ наступним чином:

$$\beta = \frac{1}{2} \min\left\{(\alpha - 1)\,; 1\right\}; \qquad (3.24)$$

$$\overline{M}_n = \begin{cases} C_1(\beta) M 2^{-\frac{1}{2}(m-n)}, & n < m, \\ C_1(\beta) M 2^{-\beta(n-m)}, & n \ge m, \end{cases} \qquad (3.25)$$

де стала $C_1(\beta) > 0$ така, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n \le M$. Зазначимо, що підібрати таку

$C_1(\beta)$ можна, оскільки, згідно з (3.25),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n = \sum_{n=1}^{m-1} C_1(\beta) M 2^{-\frac{1}{2}(m-n)} + \sum_{n=m}^{\infty} C_1(\beta) M 2^{-\beta(n-m)} \ll M.$$

Нехай тепер $M_n = \left[\, \overline{M}_n \right]$, де $[a]$ — ціла частина числа a. Тоді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n \leq M$ і, крім цього, $M_n = 0$, якщо $C_1(\beta) M 2^{-\beta(n-m)} < 1$, тобто при

$$n > m_1 = m + \beta^{-1} \log(C_1(\beta) M). \tag{3.26}$$

Покладемо

$$S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right) = \left\{ g\colon \quad g(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \triangle Q_n} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, \quad f \in B^{\Omega}_{p,\theta} \right\},$$

$$\left\| S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right) \right\|_q = \sup_{g \in S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right)} \|g\|_q \,.$$

Тоді для ентропійних чисел $\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\right)$ можемо записати

$$\begin{aligned} \varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\right) &\leq \sum_{n} \varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right), L_q\right) = \\ &= \sum_{n \leq m_1} \varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right), L_q\right) + \sum_{n > m_1} \varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right), L_q\right) \leq \\ &\leq \sum_{n \leq m_1} \varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right), L_q\right) + \sum_{n > m_1} \left\| S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right) \right\|_q = \\ &= J_2 + J_3. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Оцінимо спочатку доданок J_3. Для цього встановимо оцінку зверху величини $\left\| S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right) \right\|_q$.

Скориставшись властивістю L_q-норми, для $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ отримаємо

$$\begin{aligned} \left\| S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right) \right\|_q &\leq \left\| S_{\overline{Q}_n}(f) - S_{Q_n}(f) + f - f \right\|_q \leq \\ &\leq \left\| f - S_{\overline{Q}_n}(f) \right\|_q + \| f - S_{Q_n}(f) \|_q \,. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Враховуючи результат теореми H, із (3.28) матимемо

$$\left\|S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right)\right\|_q \ll \omega\left(2^{-n}\right)2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{3.29}$$

Отже, беручи до уваги (3.29) та враховуючи ту обставину, що функція ω задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > 1$, знаходимо

$$\begin{aligned} J_3 &= \sum_{n>m_1}\left\|S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right)\right\|_q \ll \sum_{n>m_1}\omega\left(2^{-n}\right)2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+} = \\ &= \sum_{n>m_1>m}\frac{\omega\left(2^{-n}\right)}{2^{-\alpha n}}2^{-\alpha n}\omega\left(2^{-n}\right)2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll \\ &\ll \frac{\omega\left(2^{-m}\right)}{2^{-\alpha m}}\sum_{n>m_1}2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\alpha\right)}n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll \\ &\ll \omega\left(2^{-m}\right)2^{\alpha m}2^{m_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\alpha\right)}m_1^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Оскільки $M = M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$, то із (3.26) робимо висновок, що

$$m_1 \asymp m + \beta^{-1}\log(C_1(\beta)2^m m^{d-1}) \ll m,$$

і тому з (3.30) отримаємо

$$J_3 \ll \omega\left(2^{-m}\right)2^{\alpha m}2^{m_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\alpha\right)}m^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{3.31}$$

Далі розглянемо два випадки: $1 < \alpha < 2$ та $\alpha \geq 2$.

Нехай $1 < \alpha < 2$. Тоді, згідно з (3.24) та (3.26), одержимо

$$\beta = \frac{1}{2}(\alpha - 1), \qquad m_1 = m + \frac{2}{\alpha - 1}\log(C_1(\beta)M).$$

Підставляючи у праву частину співвідношення (3.31) значення m_1 та враховуючи, що $M = M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$, будемо мати

$$\begin{aligned} J_3 &\ll \omega\left(2^{-m}\right)2^{\alpha m}2^{m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\alpha\right)}M^{\frac{2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\alpha\right)}{\alpha-1}}m^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+} = \\ &= \omega\left(2^{-m}\right)2^{m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}M^{\frac{2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\alpha\right)}{\alpha-1}}m^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \asymp \end{aligned}$$

$$\asymp \omega\left(2^{-m}\right) 2^{m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\frac{2\left(\alpha-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}{\alpha-1}\right)} m^{(d-1)\left(\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_{+}-\frac{2\left(\alpha-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}{\alpha-1}\right)} \ll$$

$$\ll \omega\left(2^{-m}\right) m^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_{+}}. \qquad (3.32)$$

Дійсно, оскільки $1<p\le 2$, $1\le q<\infty$, то $0<\frac{1}{p}-\frac{1}{q}<1$. Звідси робимо висновок, що при $1<\alpha<2$ справедлива нерівність $\alpha-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)>\alpha-1$, а отже $\frac{2\left(\alpha-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}{\alpha-1}>2$. Беручи до уваги той факт, що $\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_{+}<1$, приходимо до шуканої оцінки у (3.32).

Нехай тепер $\alpha\ge 2$. Тоді

$$\beta=\frac{1}{2}, \qquad m_1=m+2\log(C_1(\beta)M).$$

В такому випадку, із співвідношення (3.31) отримаємо

$$J_3 \ll \omega\left(2^{-m}\right) 2^{\alpha m} 2^{m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\alpha\right)} M^{2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\alpha\right)} m^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_{+}} =$$

$$= \omega\left(2^{-m}\right) 2^{m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} M^{2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\alpha\right)} m^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_{+}} \asymp$$

$$\asymp \omega\left(2^{-m}\right) 2^{m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} 2^{2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\alpha\right)m} m^{(d-1)\left(2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\alpha\right)+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_{+}\right)} \ll$$

$$\ll \omega\left(2^{-m}\right) m^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_{+}}. \qquad (3.33)$$

Об'єднавши (3.33) та (3.32), запишемо оцінку для J_3:

$$J_3 \ll \omega\left(2^{-m}\right) m^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_{+}}. \qquad (3.34)$$

Оцінимо тепер доданок J_2. З цією метою представимо його у вигляді

$$J_2=\sum_{n\le m_1} \varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right), L_q\right) =$$

$$=\sum_{n\le m} \varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right), L_q\right) + \sum_{m<n\le m_1} \varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right), L_q\right). \qquad (3.35)$$

Беручи до уваги означення множини $T\left(\triangle Q_n\right)_p$ і частинних сум

$S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right)$ та співвідношення (3.23), запишемо

$$J_2 \ll \sum_{n\le m} \varepsilon_{M_n}\left(T\left(\triangle Q_n\right)_p, L_q\right)\omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+} +$$
$$+ \sum_{m<n\le m_1} \varepsilon_{M_n}\left(T\left(\triangle Q_n\right)_p, L_q\right)\omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+} =$$
$$= J_4 + J_5. \tag{3.36}$$

Далі, скористаємося для оцінки кожного з доданків J_4 та J_5 теоремою F.

Отже, оскільки для $n \le m$ $M_n = \left[C_1(\beta)M2^{-\frac{1}{2}(m-n)}\right]$, а $M = M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$, $|\Delta Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$, то

$$2M_n \asymp 2 \cdot 2^{\frac{n+m}{2}} m^{d-1} \ge |\Delta Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}.$$

Тому, для J_4 можемо записати

$$J_4 \ll \sum_{n\le m} 2^{-M_n|\triangle Q_n|^{-1}}\omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll$$
$$\ll \sum_{n\le m} 2^{-C_1(\beta)M2^{-\frac{1}{2}(m-n)}2^{-n}n^{-(d-1)}}\omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll$$
$$\ll \sum_{n\le m} \omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{3.37}$$

Звідси, враховуючи, що функція ω задовольняє умову (S_l), отримаємо

$$J_4 \ll \sum_{n\le m} \frac{\omega\left(2^{-n}\right)}{2^{-\gamma n}} 2^{-\gamma n} n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll \frac{\omega\left(2^{-m}\right)}{2^{-\gamma m}} \sum_{n\le m} 2^{-\gamma n} n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll$$
$$\ll \omega\left(2^{-m}\right) m^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, \tag{3.38}$$

де γ — деяке число з цієї умови.

Перейдемо тепер до оцінки доданку J_5. Скориставшись теоремою F у випадку

$$2M_n = 2\left[C_1(\beta)M2^{-\beta(n-m)}\right] \le |\triangle Q_n|,$$

одержимо

$$J_5 \ll \sum_{m<n\le m_1} |\triangle Q_n| M_n^{-1} \left(\log\left(|\triangle Q_n| M_n^{-1}\right)\right)^2 \omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \asymp$$

$$\asymp \sum_{m<n\le m_1} 2^n n^{d-1} M^{-1} 2^{\beta(n-m)} \left(\log \frac{2^n n^{d-1}}{C_1(\beta) M 2^{-\beta(n-m)}}\right)^2 \times$$

$$\times\, \omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \asymp$$

$$\asymp \sum_{m<n\le m_1} \frac{\omega\left(2^{-n}\right)}{2^{-\alpha n}} 2^{-\alpha n} 2^n 2^{\beta(n-m)} 2^{-m} m^{-(d-1)} n^{d-1} n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \times$$

$$\times \left(\log \frac{2^{n(1+\beta)} n^{d-1}}{2^{m(1+\beta)} m^{d-1}}\right)^2. \qquad (3.39)$$

Далі, враховуючи, що функція ω задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > 1$, а $\beta = \frac{1}{2}\min\{(\alpha-1)\,;1\}$, із (3.39) можемо записати

$$J_5 \ll \frac{\omega\left(2^{-m}\right)}{2^{-\alpha m}} \sum_{m<n\le m_1} 2^{n(1+\beta-\alpha)} 2^{-m(1+\beta)} m^{-(d-1)} n^{d-1} n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \times$$

$$\times \left(\log \frac{2^{n(1+\beta)} n^{d-1}}{2^{m(1+\beta)} m^{d-1}}\right)^2 \ll \frac{\omega\left(2^{-m}\right)}{2^{-\alpha m}} 2^{m(1+\beta-\alpha)} 2^{-m(1+\beta)} m^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+} =$$

$$= \omega\left(2^{-m}\right) m^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \qquad (3.40)$$

Зауважимо, що при встановленні (3.40) ми враховували, що $1+\beta-\alpha < 0$. Легко бачити, що ця умова виконується. Дійсно, нехай $1 < \alpha < 2$, $\beta = \frac{1}{2}(\alpha - 1)$. Тоді

$$1+\beta-\alpha = 1 + \frac{1}{2}(\alpha-1) - \alpha = \frac{1}{2}(1-\alpha) < 0.$$

У випадку $\alpha \ge 2$, $\beta = \frac{1}{2}$, отримаємо $1+\beta = \frac{3}{2} - \alpha < 0$.

Тому, об'єднуючи (3.38), (3.40) із (3.36), приходимо до оцінки

$$J_2 \ll \omega\left(2^{-m}\right) m^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \qquad (3.41)$$

Накінець, співставляючи (3.41), (3.34) і (3.27), та враховуючи, що $M =$

$M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$, отримуємо шукану оцінку зверху:

$$\varepsilon_M \left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\right) \ll \omega\left(2^{-m}\right) m^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \asymp \omega\left(2^{-m}\right)(\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

Теорему 3.4 доведено. □

Перейдемо тепер до розгляду випадку $2 \le p \le \infty$. Має місце наступна теорема.

Теорема 3.5. *Нехай* $1 \le q < \infty$, $2 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, *а* $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\left(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\right)$, *де функція* ω *задовольняє умову* (S^α) *з деяким* $\alpha > 1$ *та умову* (S_l). *Тоді для будь-яких натуральних* M *і* m, *таких що* $M = M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$, *справедливе співвідношення*

$$\varepsilon_M \left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\right) \ll \omega\left(2^{-m}\right)(\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{3.42}$$

Доведення. Оцінка (3.42) одразу випливає із результату теореми 3.4.

Дійсно, розглянемо наступні два випадки: $1 \le \theta \le 2$ та $2 < \theta \le \infty$.

Отже, нехай $2 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le 2$. Тоді $B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega}_{p,2} \subset B^{\Omega}_{2,2}$. Покладаючи $\theta = p = 2$ у (3.17), отримаємо

$$\varepsilon_M \left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\right) \ll \varepsilon_M \left(B^{\Omega}_{2,2}, L_q\right) \ll \omega\left(2^{-m}\right).$$

Нехай тепер $2 \le p, \theta \le \infty$. Тоді $B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega}_{2,\theta}$. Покладаючи $p = 2$ у (3.17), будемо мати

$$\varepsilon_M \left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\right) \ll \varepsilon_M \left(B^{\Omega}_{2,\theta}, L_q\right) \ll \omega\left(2^{-m}\right)(\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

Теорему 3.5 доведено. □

Об'єднуючи результати теорем 3.4 та 3.5, приходимо до оцінки:

Теорема 3.6. *Нехай* $1 \le q < \infty$, $1 < p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, *а* $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\left(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\right)$, *де функція* ω *задовольняє умову* (S^α) *з деяким* $\alpha > 1$ *та* *умову* (S_l). *Тоді для будь-яких натуральних* M *і* m, *таких що* $M = M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$, *справедливе співвідношення*

$$\varepsilon_M \left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\right) \ll \omega\left(2^{-m}\right) (\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{p^*}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, \tag{3.43}$$

де $p^* = \min\{2, p\}$.

За допомогою деякої модифікації міркувань, які були використані в ході доведення теорем 3.4 та 3.5, можна записати відповідні теоремі 3.6 результати в одновимірному випадку.

Теорема 3.6′. *Нехай* $d = 1$, $1 \le q < \infty$, $1 < p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, *а функція* ω *задовольняє умову* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > 1$ *та умову* (S_l). *Тоді справедлива оцінка*

$$\varepsilon_M \left(B^{\omega}_{p,\theta}, L_q\right) \ll \omega\left(M^{-1}\right). \tag{3.44}$$

Зауваження 3.7. Оцінку зверху ентропійних чисел $\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\right)$ для $1 \le q < \infty$, $2 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\left(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\right)$, при умові, що функція ω задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > 1$ та умову (S_l), було отримано іншим методом у роботі А. Ф. Конограя та А. П. Мусієнка [24].

Зауваження 3.8. Для класів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $2 \le p \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $r_1 > 1$, оцінки їх ентропійних чисел у просторі L_q, $1 \le q < \infty$, встановлено А. С. Романюком [49].

Для класів $H^{\boldsymbol{r}}_1$, $r_1 > 1$, оцінки зверху ентропійних чисел у більш загальній, ніж L_q, метриці простору $B_{\infty,2}$ отримано В. М. Темляковим [67]. Враховуючи, що при $p > 1$ $H^{\boldsymbol{r}}_p \subset H^{\boldsymbol{r}}_1$, а $\|f\|_q \ll \|f\|_{B_{\infty,2}}$, $2 \le q < \infty$, з результату [67] випливають відповідні оцінки величини $\varepsilon_M\left(H^{\boldsymbol{r}}_p, L_q\right)$, $1 < q < \infty$, $1 \le p < \infty$, $r_1 > 1$.

Оцінки величини $\varepsilon_M\left(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, L_q\right)$, $1 < p, q < \infty$, $0 \le \theta \le \infty$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_1) \in \mathbb{R}^d$, $r_1 > 0$, іншими методами одержано також D. Dung [94].

Далі встановимо оцінку знизу ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, у просторі L_1. Для цього введемо необхідні позначення. Отже, нехай для $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{N}^d$

$$\Omega^*_n = \left\{ \boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d\colon\ (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{1}) = n,\ n, s_j - \text{парні числа},\ j = \overline{1,d} \right\};$$

$$\Delta Q'_n = \bigcup_{s \in \Omega^*_n} \rho^+(\boldsymbol{s}); \qquad T(\rho^+(\boldsymbol{s})) = \left\{ t\colon \quad t(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho^+(\boldsymbol{s})} \widehat{t}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} \right\}.$$

При $s_j \ge 2$, $j = \overline{1,d}$, для кожного $t \in T(\rho^+(\boldsymbol{s}))$ існує поліном t^1 степеня 2^{s_j-2} за змінною x_j, $j = \overline{1,d}$, такий що

$$t(\boldsymbol{x}) = e^{i(\boldsymbol{k^s},\boldsymbol{x})} t^1(\boldsymbol{x}),$$

де $\boldsymbol{k^s} = (k^{s_1}_1, \dots, k^{s_d}_d)$, $k^{s_j}_j = 2^{s_j-1} + 2^{s_j-2}$, $j = \overline{1,d}$.

Нехай далі $\boldsymbol{l} = (l_1, \dots, l_d) \in \mathbb{Z}^d_+$. Розглянемо множини дійсних тригонометричних поліномів

$$RT(\boldsymbol{l}) = \left\{ t\colon \quad t(\boldsymbol{x}) = \sum_{\substack{|k_j| \le l_j \\ j = \overline{1,d}}} \widehat{t}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} \right\},$$

і, відповідно,

$$T'(\rho^+(\boldsymbol{s})) = \left\{ t\colon \quad t(\boldsymbol{x}) = e^{i(\boldsymbol{k^s},\boldsymbol{x})} t^1(\boldsymbol{x}), \quad t^1 \in RT(2^{\boldsymbol{s}-2}) \right\},$$
$$T'(\Delta Q'_n) = \left\{ t\colon \quad t(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{s} \in \Omega^*_n} e^{i(\boldsymbol{k^s},\boldsymbol{x})} t^1_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}), \quad t^1_{\boldsymbol{s}} \in RT(2^{\boldsymbol{s}-2}) \right\}.$$

Справедливе наступне твердження.

Теорема 3.7. *Нехай* $1 \le \theta \le \infty$, *а* $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j \right)$, *де функція* ω *задовольняє умову* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > 0$ *та умову* (S_l). *Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n, *таких що* $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, *справедлива оцінка*

$$\varepsilon_M \left(B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_1 \right) \gg \omega\left(2^{-n}\right) (\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)}. \tag{3.45}$$

Доведення. Встановимо спочатку оцінку знизу величини $\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_2\right)$. Для цього використаємо множину тригонометричних поліномів

$$T'\left(\Delta Q'_n\right)_\infty = \left\{t \in T'\left(\Delta Q'_n\right): \quad \|t^1_s\|_\infty \le 1\right\},$$

яка розглядалася В. М. Темляковим [67].

Для $f \in L_2$ визначимо функції

$$f^R_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{s}\in\Omega^*_n} e^{i(\boldsymbol{k^s},\boldsymbol{x})} \operatorname{Re}\left(\delta^+_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x})e^{-i(\boldsymbol{k^s},\boldsymbol{x})}\right),$$
$$f^I_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{s}\in\Omega^*_n} e^{i(\boldsymbol{k^s},\boldsymbol{x})} \operatorname{Im}\left(\delta^+_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x})e^{-i(\boldsymbol{k^s},\boldsymbol{x})}\right),$$

де

$$\delta^+_{\boldsymbol{s}}(f) := \delta^+_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho^+(\boldsymbol{s})} \widehat{f}(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}.$$

Тоді $f^R_n \in T'\left(\Delta Q'_n\right)$ і для полінома $t \in T'\left(\Delta Q'_n\right)$ можемо записати

$$\begin{aligned}\|f-t\|^2_2 &\ge \left\|f^R_n + if^I_n - t\right\|^2_2 = \\ &= \sum_{\boldsymbol{s}\in\Omega^*_n}\left\|t^1_{\boldsymbol{s}} - \operatorname{Re}\left(\delta^+_{\boldsymbol{s}}(f)e^{-i(\boldsymbol{k^s},\boldsymbol{x})}\right) - i\operatorname{Im}\left(\delta^+_{\boldsymbol{s}}(f)e^{-i(\boldsymbol{k^s},\boldsymbol{x})}\right)\right\|^2_2 \ge \\ &\ge \left\|t - f^R_n\right\|^2_2. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Отже, згідно з (3.46), не зменшуючи загальності можна вважати, що елементи ε-сітки множини $T'\left(\Delta Q'_n\right)_\infty$ в L_2 належать $T'\left(\Delta Q'_n\right)$.

В [67] було встановлено оцінку

$$\varepsilon_M\left(T'\left(\Delta Q'_n\right)_\infty, L_2\right) \gg |\Omega^*_n|^{\frac{1}{2}}. \tag{3.47}$$

З метою скористатися оцінкою (3.47) покажемо, що функції f з множини

$$C_3 T'\left(\Delta Q'_n\right)_\infty \omega\left(2^{-n}\right) n^{-\frac{d-1}{\theta}}$$

з деякою сталою $C_3 > 0$ належать класу $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$.

Оцінимо норму $\|g\|_{B^{\Omega}_{\infty,\theta}}$, $g \in T'\left(\Delta Q'_n\right)_{\infty}$. Спочатку розглянемо випадок $1 \le \theta < \infty$. Згідно з (3.16) та властивістю згортки, одержимо

$$\|g\|_{B^{\Omega}_{\infty,\theta}} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Omega_n^*}\left(\omega\left(2^{-(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}\right)\right)^{-\theta}\|A_{\boldsymbol{s}}(g)\|_{\infty}^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le \left(\omega\left(2^{-n}\right)\right)^{-1}\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Omega_n^*}\left\|A_{\boldsymbol{s}} * \sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_{\infty}\le 1}\delta_{\boldsymbol{s}'}(g)\right\|_{\infty}^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le \left(\omega\left(2^{-n}\right)\right)^{-1}\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Omega_n^*}\|A_{\boldsymbol{s}}\|_1^{\theta}\left\|\sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_{\infty}\le 1}\delta_{\boldsymbol{s}'}(g))\right\|_{\infty}^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\omega\left(2^{-n}\right)\right)^{-1}\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Omega_n^*}1\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp \left(\omega\left(2^{-n}\right)\right)^{-1} n^{\frac{d-1}{\theta}}. \qquad (3.48)$$

Нехай тепер $\theta = \infty$. Тоді для $\|g\|_{B^{\Omega}_{\infty,\infty}}$, повторюючи попередні міркування, можемо записати

$$\|g\|_{B^{\Omega}_{\infty,\infty}} \asymp \sup_{\boldsymbol{s}\in\Omega_n^*}\frac{\|A_{\boldsymbol{s}}(g)\|_{\infty}}{\omega\left(2^{-(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}\right)} = \left(\omega\left(2^{-n}\right)\right)^{-1}\sup_{\boldsymbol{s}\in\Omega_n^*}\|A_{\boldsymbol{s}}(g)\|_{\infty} \ll$$

$$\ll \left(\omega\left(2^{-n}\right)\right)^{-1}\sup_{\boldsymbol{s}\in\Omega_n^*}\left\|\sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_{\infty}\le 1}\delta_{\boldsymbol{s}'}(g)\right\|_{\infty} \le \left(\omega\left(2^{-n}\right)\right)^{-1}. \qquad (3.49)$$

Отже, згідно з (3.48) та (3.49), функція

$$f(\boldsymbol{x}) = C_3\omega\left(2^{-n}\right)n^{-\frac{d-1}{\theta}}g(\boldsymbol{x}), \qquad g \in T'\left(\Delta Q'_n\right)_{\infty},$$

належить класу $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$.

Таким чином, скориставшись оцінкою (3.47) і врахувавши, що $|\Omega_n^*|^{\frac{1}{2}} \asymp n^{\frac{d-1}{2}}$, отримаємо

$$\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_2\right) \gg \varepsilon_M\left(T'\left(\Delta Q'_n\right)_{\infty}\omega\left(2^{-n}\right)n^{-\frac{d-1}{\theta}}, L_2\right) \gg$$

$$\gg \omega\left(2^{-n}\right)n^{-\frac{d-1}{\theta}}n^{\frac{d-1}{2}} = \omega\left(2^{-n}\right)n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}. \qquad (3.50)$$

Перейдемо до встановлення оцінки величини $\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_1\right)$. Із (3.50) робимо висновок, що в $C_3 T'\left(\Delta Q'_n\right)_\infty \omega\left(2^{-n}\right) n^{-\frac{d-1}{\theta}}$ знайдеться 2^M функцій f_i, таких що

$$\|f_i - f_j\|_2 \gg \omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}, \quad i \neq j, \quad i,j = \overline{1, 2^M}. \tag{3.51}$$

Покажемо, що при цьому справедлива оцінка

$$\|f_i - f_j\|_1 \gg \omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}, \quad i \neq j, \quad i,j = \overline{1, 2^M}.$$

Дійсно, скориставшись нерівністю [18, Т. І, с. 330]

$$\|f\|_a \leq \|f\|_1^{\nu} \|f\|_b^{1-\nu}, \quad f \in L_b, \quad 1 < a < b,$$
$$\nu = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)^{-1},$$

при $a = 2$, $b = 4$, отримаємо

$$\|f_i - f_j\|_2 \leq \|f_i - f_j\|_1^{\frac{1}{3}} \|f_i - f_j\|_4^{\frac{2}{3}}.$$

Звідси,

$$\|f_i - f_j\|_1^{\frac{1}{3}} \geq \|f_i - f_j\|_2 \|f_i - f_j\|_4^{-\frac{2}{3}}, \quad i \neq j, \quad i,j = \overline{1, 2^M}. \tag{3.52}$$

Далі, розглянемо набір функцій

$$f_i(\boldsymbol{x}) = \omega\left(2^{-n}\right) n^{-\frac{d-1}{\theta}} \varphi_i(\boldsymbol{x}), \quad i = \overline{1, 2^M},$$

де $\varphi_i \in T'\left(\Delta Q'_n\right)_\infty$. Тоді для f_i та f_j, $i \neq j$, $i,j = \overline{1, 2^M}$, використовуючи лему G, отримаємо

$$\|f_i - f_j\|_4 \ll \Bigg(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Omega_n^*} \|\delta_{\boldsymbol{s}}((f_i - f_j))\|_4^2\Bigg)^{\frac{1}{2}} \ll$$
$$\ll \omega\left(2^{-n}\right) n^{-\frac{d-1}{\theta}} \Bigg(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Omega_n^*} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(\varphi_i - \varphi_j)\|_4^2\Bigg)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \omega\left(2^{-n}\right) n^{-\frac{d-1}{\theta}}\Bigg(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Omega_n^*}\left(\|\delta_{\boldsymbol{s}}(\varphi_i)\|_\infty+\|\delta_{\boldsymbol{s}}(\varphi_j)\|_\infty\right)^2\Bigg)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \omega\left(2^{-n}\right) n^{-\frac{d-1}{\theta}}\Bigg(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Omega_n^*} 1\Bigg)^{\frac{1}{2}} \asymp \omega\left(2^{-n}\right) n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{\frac{d-1}{2}} =$$

$$= \omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{3.53}$$

Співставляючи (3.51), (3.53) і (3.52), та враховуючи, що $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, одержимо

$$\|f_i - f_j\|_1 \gg \omega\left(2^{-n}\right)(\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Звідси випливає оцінка

$$\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_1\right) \gg \omega\left(2^{-n}\right)(\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Теорему 3.7 доведено. $\square$

Зауваження 3.9. Результати теореми 3.7 є новими і у випадку $d = 1$. Сформулюємо відповідне твердження.

Теорема 3.7′. *Нехай $d = 1$, $1 \leq \theta \leq \infty$, а функція ω задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > 0$ та умову (S_l). Тоді справедлива оцінка*

$$\varepsilon_M\left(B^{\omega}_{\infty,\theta}, L_1\right) \gg \omega\left(M^{-1}\right). \tag{3.54}$$

Зауваження 3.10. Оцінку знизу величини $\varepsilon_M\left(B^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}, L_1\right)$, $1 \leq \theta < \infty$, $r_1 > 0$, встановлено А. С. Романюком [49], а величини $\varepsilon_M\left(H^{\boldsymbol{r}}_{\infty}, L_1\right)$, $r_1 > 0$, — В. М. Темляковим [67].

Співставивши результати теорем 3.6 та 3.7, можна сформулювати наступне твердження.

Теорема 3.8. *Нехай $d \geq 2$, $1 \leq q < \infty$, $2 \leq p, \theta \leq \infty$, а $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\Bigg(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\Bigg)$, де функція ω задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > 1$ та умову (S_l). Тоді для будь-яких натуральних M і n, таких що $M =$*

$M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, *справедлива оцінка*

$$\varepsilon_M \left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\right) \asymp \omega\left(2^{-n}\right) (\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Зауважимо, що в одновимірному випадку точні за порядком оцінки величини $\varepsilon_M \left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\right)$ отримані для більш широкої множини зміни параметрів p, q та θ. А саме, співставивши (3.44) та (3.54) можна сформулювати твердження.

Теорема 3.9. *Нехай* $d = 1$, $1 \le q < \infty$, $1 < p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, *а функція* ω *задовольняє умову* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > 1$ *та умову* (S_l). *Тоді має місце оцінка*

$$\varepsilon_M \left(B^{\omega}_{p,\theta}, L_q\right) \asymp \omega\left(M^{-1}\right).$$

3.5. Оцінки ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних у рівномірній метриці

У цьому підрозділі встановлено оцінки ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 < p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_∞.

Встановимо спочатку оцінку зверху величини $\varepsilon_M \left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty\right)$ у випадку $1 < p \le 2$. Справедлива теорема.

Теорема 3.10. *Нехай* $1 < p \le 2$, $1 \le \theta \le \infty$, *а* $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\left(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\right)$, *де функція* ω *задовольняє умову* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > \frac{1}{p}$ *та умову* (S_l). *Тоді для будь-яких натуральних* M *і* m, *таких що* $M = M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$, *справедливе співвідношення*

$$\varepsilon_M \left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty\right) \ll \omega\left(2^{-m}\right) (\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \sqrt{\log M}. \qquad (3.55)$$

Доведення. Доведення теореми 3.10 будемо проводити за тією ж схемою, яка була використана при встановленні теореми 3.4.

Отже, числа β та $\overline{M}_n$ визначимо таким чином:

$$\beta = \frac{1}{2}\min\left\{\left(\alpha - \frac{1}{p}\right); 1\right\}; \tag{3.56}$$

$$\overline{M}_n = \begin{cases} C_1(\beta)M2^{-\frac{1}{2}(m-n)}, & n < m, \\ C_1(\beta)M2^{-\beta(n-m)}, & n \ge m, \end{cases}$$

де стала $C_1(\beta) > 0$ така, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n \le M$.

Тоді, міркуючи аналогічно до (3.26)–(3.31), для величини $\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty\right)$ можемо записати

$$\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty\right) \le \sum_{n \le m_1} \varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right), L_\infty\right) + \sum_{n > m_1} \left\|S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right)\right\|_\infty =$$
$$= J_9 + J_{10}. \tag{3.57}$$

Скориставшись властивістю L_∞-норми та теоремою I, отримаємо

$$\left\|S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right)\right\|_\infty \ll \omega\left(2^{-n}\right)2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{3.58}$$

Отже, беручи до уваги (3.58) та той факт, що функція ω задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > \frac{1}{p}$, виконавши відповідні перетворення, знаходимо

$$J_{10} = \sum_{n > m_1} \left\|S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right)\right\|_\infty \ll \sum_{n > m_1} \omega\left(2^{-n}\right)2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \ll$$
$$\ll \omega\left(2^{-m}\right)2^{\alpha m}2^{m_1\left(\frac{1}{p}-\alpha\right)}m_1^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{3.59}$$

Оскільки

$$m_1 = m + \beta^{-1}\log(C_1(\beta)M) \asymp m + \beta^{-1}\log(C_1(\beta)2^m m^{d-1}) \ll m,$$

то із (3.59) отримаємо

$$J_{10} \ll \omega\left(2^{-m}\right)2^{\alpha m}2^{m_1\left(\frac{1}{p}-\alpha\right)}m^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{3.60}$$

Далі розглянемо два випадки: $\frac{1}{p} < \alpha < 1 + \frac{1}{p}$ та $\alpha \geq 1 + \frac{1}{p}$.

Нехай $\frac{1}{p} < \alpha < 1 + \frac{1}{p}$. Тоді, згідно з (3.56), одержимо

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{p}\right) = \frac{p\alpha - 1}{2p},$$
$$m_1 = m + \frac{2p}{p\alpha - 1}\log(C_1(\beta)M).$$

Підставляючи у праву частину співвідношення (3.60) значення m_1 та враховуючи, що $M = M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$, будемо мати

$$\begin{aligned} J_{10} &\ll \omega\left(2^{-m}\right) 2^{\alpha m} 2^{m\left(\frac{1}{p}-\alpha\right)} M^{\frac{2p}{p\alpha-1}\left(\frac{1}{p}-\alpha\right)} m^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} = \\ &= \omega\left(2^{-m}\right) 2^{\frac{m}{p}} M^{-2} m^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp \\ &\asymp \omega\left(2^{-m}\right) 2^{m\left(\frac{1}{p}-2\right)} m^{-(d-1)\left(1+\frac{1}{\theta}\right)} \ll \\ &\ll \omega\left(2^{-m}\right) m^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Нехай тепер $\alpha \geq 1 + \frac{1}{p}$. Тоді $\beta = \frac{1}{2}$, $m_1 = m + \log(C_1(\beta)M)^2$. Звідси, із співвідношення (3.60) отримаємо

$$\begin{aligned} J_{10} &\ll \omega\left(2^{-m}\right) 2^{\alpha m} 2^{m\left(\frac{1}{p}-\alpha\right)} M^{2\left(\frac{1}{p}-\alpha\right)} m^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} = \\ &= \omega\left(2^{-m}\right) 2^{\frac{m}{p}} M^{2\left(\frac{1}{p}-\alpha\right)} m^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp \\ &\asymp \omega\left(2^{-m}\right) 2^{m\left(\frac{3}{p}-2\alpha\right)} m^{(d-1)\left(\frac{2}{p}-2\alpha\right)} m^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \ll \\ &\ll \omega\left(2^{-m}\right) m^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Об'єднавши (3.62), (3.61) та (3.60), запишемо оцінку для J_{10}:

$$J_{10} \ll \omega\left(2^{-m}\right) m^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{3.63}$$

Оцінимо тепер доданок J_9. З цією метою будемо міркувати аналогічно до того, як це було зроблено при встановленні співвідношень (3.35) –

(3.40). Отже, для J_9 можемо записати

$$J_9 \ll \sum_{n\le m} \varepsilon_{M_n}\left(T\left(\triangle Q_n\right)_p, L_\infty\right)\omega\left(2^{-n}\right)n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}+$$
$$+\sum_{m<n\le m_1} \varepsilon_{M_n}\left(T\left(\triangle Q_n\right)_p, L_\infty\right)\omega\left(2^{-n}\right)n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}=$$
$$=J_{11}+J_{12}. \tag{3.64}$$

Далі, скористаємося для оцінки кожного з доданків J_{11} та J_{12} теоремою G. Тоді, для J_{11} отримаємо

$$J_{11} \ll \sum_{n\le m} n^{\frac{1}{2}}2^{-M_n(2|\triangle Q_n|)^{-1}}\omega\left(2^{-n}\right)n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll$$
$$\ll \sum_{n\le m} n^{\frac{1}{2}}2^{-C_1(\beta)M2^{-\frac{1}{2}(m-n)}2^{-(n+1)}n^{-(d-1)}}\omega\left(2^{-n}\right)n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll$$
$$\ll \sum_{n\le m} n^{\frac{1}{2}}\omega\left(2^{-n}\right)n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

Звідси, враховуючи, що функція ω задовольняє умову (S_l), отримаємо

$$J_{11} \ll \sum_{n\le m} \frac{\omega\left(2^{-n}\right)}{2^{-\gamma n}}2^{-\gamma n}n^{\frac{1}{2}}n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll$$
$$\ll \frac{\omega\left(2^{-m}\right)}{2^{-\gamma m}}\sum_{n\le m} 2^{-\gamma n}n^{\frac{1}{2}}n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll$$
$$\ll \omega\left(2^{-m}\right)m^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}m^{\frac{1}{2}}, \tag{3.65}$$

де γ — деяке число з цієї умови.

Перейдемо тепер до оцінки J_{12}. Скориставшись теоремою G для

$$M_n = \left[C_1(\beta)M2^{-\beta(n-m)}\right] \le 2|\triangle Q_n|,$$

одержимо

$$J_{12} \ll \sum_{m<n\le m_1} n^{\frac{1}{2}}|\triangle Q_n|^{\frac{1}{p}}M_n^{-\frac{1}{p}}\left(\log\left(4|\triangle Q_n|M_n^{-1}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times\,\omega\left(2^{-n}\right)n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}\asymp$$

$$\asymp\sum_{m<n\le m_1}n^{\frac{1}{2}}2^{\frac{n}{p}}n^{\frac{d-1}{p}}M^{-\frac{1}{p}}2^{\frac{1}{p}\beta(n-m)}\left(\log\frac{4\cdot 2^n n^{d-1}}{C_1(\beta)M2^{-\beta(n-m)}}\right)^{\frac{1}{p}}\times$$

$$\times\,\omega\left(2^{-n}\right)n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}\asymp$$

$$\asymp\sum_{m<n\le m_1}\frac{\omega\left(2^{-n}\right)}{2^{-\alpha n}}2^{-\alpha n}2^{\frac{n}{p}}2^{\frac{1}{p}\beta(n-m)}2^{-\frac{m}{p}}m^{-\frac{d-1}{p}}n^{\frac{d-1}{p}}n^{\frac{1}{2}}n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}\times$$

$$\times\left(\log\frac{4\cdot 2^{n(1+\beta)}n^{d-1}}{2^{m(1+\beta)}m^{d-1}}\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (3.66)$$

Далі, враховуючи, що функція ω задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha>\frac{1}{p}$, із (3.66) можемо записати

$$J_{12}\ll\frac{\omega\left(2^{-m}\right)}{2^{-\alpha m}}\sum_{m<n\le m_1}2^{n\left(\frac{1}{p}-\alpha+\frac{1}{p}\beta\right)}2^{-\frac{1}{p}m(1+\beta)}m^{-\frac{d-1}{p}}n^{\frac{d-1}{p}}n^{\frac{1}{2}}n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}\times$$

$$\times\left(\log\frac{4\cdot 2^{n(1+\beta)}n^{d-1}}{2^{m(1+\beta)}m^{d-1}}\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (3.67)$$

Покажемо, що $\frac{1}{p}-\alpha+\frac{1}{p}\beta<0$. Нехай спочатку $\frac{1}{p}<\alpha<\frac{1}{p}+1$, тоді, відповідно, $\beta=\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)$. Матимемо

$$\frac{1}{p}-\alpha+\frac{1}{p}\beta=\frac{1}{p}-\alpha+\frac{1}{2p}\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)=\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{2p}-1\right)<0.$$

Якщо $\alpha>\frac{1}{p}+1$, а $\beta=\frac{1}{2}$, то $\frac{1}{p}-\alpha+\frac{1}{p}\beta=\frac{3}{2p}-\alpha<\frac{1}{p}-1<0$.

Отже, ми показали, що $\frac{1}{p}-\alpha+\frac{1}{p}\beta<0$. Тому, із (3.67) отримаємо

$$J_{12}\ll\frac{\omega\left(2^{-m}\right)}{2^{-\alpha m}}2^{m\left(\frac{1}{p}-\alpha+\frac{1}{p}\beta\right)}2^{-\frac{1}{p}m(1+\beta)}m^{\frac{1}{2}}m^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}=$$

$$=\omega\left(2^{-m}\right)m^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}m^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.68)$$

Об'єднуючи (3.65), (3.68) із (3.64), приходимо до оцінки

$$J_9\ll\omega\left(2^{-m}\right)m^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}m^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.69)$$

Накінець, співставляючи оцінки (3.69), (3.63) і (3.57), та враховуючи, що $M = M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$, отримуємо шукану оцінку зверху:

$$\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty\right) \ll \omega\left(2^{-m}\right) m^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+} m^{\frac{1}{2}} \asymp$$
$$\asymp \omega\left(2^{-m}\right) (\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \sqrt{\log M}.$$

Теорему 3.10 доведено. □

Міркуючи аналогічно до того, як це було зроблено при доведенні теореми 3.5, встановимо оцінку зверху ентропійних чисел $\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty\right)$ у випадку $2 \le p \le \infty$.

Теорема 3.11. *Нехай $2 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, а $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\left(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\right)$, де функція ω задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > \frac{1}{2}$ та умову (S_l). Тоді для будь-яких натуральних M і m, таких що $M = M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$, справедливе співвідношення*

$$\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty\right) \ll \omega\left(2^{-m}\right) (\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \sqrt{\log M}. \tag{3.70}$$

Об'єднавши тепер результати теорем 3.10 та 3.11, можемо сформулювати наступне твердження.

Теорема 3.12. *Нехай $1 < p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, а $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\left(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\right)$, де функція ω задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > \max\left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\right\}$ та умову (S_l). Тоді для будь-яких натуральних M і m, таких що $M = M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$, має місце оцінка*

$$\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty\right) \ll \omega\left(2^{-m}\right) (\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{p^*}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \sqrt{\log M}. \tag{3.71}$$

За допомогою певної модифікації міркувань, які були використані в процесі доведення теорем 3.10 та 3.11, можна записати відповідний теоремі 3.12 результат в одновимірному випадку.

Теорема 3.12′. *Нехай $d = 1$, $1 < p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, а функція ω задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > \max\left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\right\}$ та умову (S_l). Тоді* *справедлива оцінка*

$$\varepsilon_M\left(B^{\omega}_{p,\theta}, L_\infty\right) \ll \omega\left(M^{-1}\right)\sqrt{\log M}.$$

Зауваження 3.11. Оцінку зверху величини $\varepsilon_M\left(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, L_\infty\right)$ у випадку $2 \le p \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $r_1 > \frac{1}{2}$, отримано А. С. Романюком [49]. Згодом ці результати були поширені ним же на випадок $1 < p < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $r_1 > \max\left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\right\}$ [101].

Для величини $\varepsilon_M\left(H^{\boldsymbol{r}}_1, L_\infty\right)$, $r_1 > 1$, оцінка зверху встановлена Е. С. Белінським [12]. Оскільки $H^{\boldsymbol{r}}_p \subset H^{\boldsymbol{r}}_1$, $p > 1$, то вона справедлива для всіх $1 \le p \le \infty$. У [88] зазначена оцінка поширена на випадок $r_1 > \max\left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\right\}$, $1 < p < \infty$.

Об'єднавши результати теорем 3.7 та 3.12, сформулюємо наступне твердження.

Теорема 3.13. *Нехай $d \ge 2$, $2 \le p, \theta \le \infty$, а $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j\right)$, де функція ω задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > \frac{1}{2}$ та умову (S_l). Тоді для будь-яких натуральних M і m, таких що $M = M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$, справедливі співвідношення*

$$\omega\left(2^{-m}\right)(\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)} \ll \varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty\right) \ll \\ \ll \omega\left(2^{-m}\right)(\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}\sqrt{\log M}. \tag{3.72}$$

Зокрема у випадку $d = 1$ справедливе твердження.

Теорема 3.14. *Нехай $d = 1$, $1 < p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, а функція ω задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > \max\left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\right\}$ та умову (S_l). Тоді справедлива оцінка*

$$\omega\left(M^{-1}\right) \ll \varepsilon_M\left(B^{\omega}_{p,\theta}, L_\infty\right) \ll \omega\left(M^{-1}\right)\sqrt{\log M}. \tag{3.73}$$

Як бачимо, верхня та нижня оцінки у (3.72) та (3.73) відрізняються на $\sqrt{\log M}$. Найбільш ймовірно, що для отримання точних за порядком оцінок потрібно уточнювати оцінку знизу.

На підтвердження цієї гіпотези покажемо, що оцінка зверху, встановлена у теоремі 3.11, в загальному випадку є непокращуваною. З цією метою одержимо у двовимірному випадку точні за порядком оцінки ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $2 \leq p, \theta \leq \infty$, у просторі L_∞.

В процесі доведення, будемо розглядати такі числа

$$M_\varepsilon(A, X) = \max\left\{n\colon \ \exists \boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^n \in A\colon \ \|\boldsymbol{x}^i - \boldsymbol{x}^j\|_X > \varepsilon, \ i \neq j, \ i, j = \overline{1, d}\right\}.$$

Легко переконатися (див., наприклад, [23]), що виконується співвідношення

$$N_\varepsilon(A, X) \leq M_\varepsilon(A, X) \leq N_{\frac{\varepsilon}{2}}(A, X). \tag{3.74}$$

Отже, справедливе твердження.

Теорема 3.15. *Нехай $d = 2$, $2 \leq p, \theta \leq \infty$, а $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\Big(t_1 t_2\Big)$, де функція ω задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > \frac{1}{2}$ і умову (S_l). Тоді для будь-яких натуральних M і n, таких що $M = M(n) \asymp 2^n n$, має місце оцінка*

$$\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty\right) \asymp \omega\left(2^{-n}\right) (\log M)^{1 - \frac{1}{\theta}}. \tag{3.75}$$

Доведення. Оцінка зверху в (3.75) одразу випливає із результату теореми 3.11, якщо покласти у (3.70) $d = 2$.

Оцінку знизу достатньо довести для класу $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$, оскільки $B^{\Omega}_{\infty,\theta} \subset B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \leq p < \infty$.

Будемо використовувати для парних n множини

$$\Omega_n^* = \left\{\boldsymbol{s}\colon \quad \boldsymbol{s} = (2n_1, 2n_2), \quad n_1 + n_2 = \frac{n}{2}\right\}, \quad \Delta Q'_n = \bigcup_{\boldsymbol{s} \in \Omega_n^*} \rho(\boldsymbol{s}).$$

Далі розглянемо набір функцій $\{f_i^n\}_{i=1}^{A_n}$, $A_n \geq \frac{|\Delta Q'_n|}{2}$, які є тригонометричними поліномами з гармоніками із множини $\Delta Q'_n$ та володіють наступними властивостями:

$$\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f_i^n)\|_\infty \leq 1, \quad i = \overline{1, A_n}, \quad \boldsymbol{s} \in \Omega_n^*; \tag{3.76}$$

$$\|f_i^n - f_j^n\|_\infty \geq C_2 n, \quad i \neq j, \quad i,j = \overline{1, A_n}, \quad C_2 > 0. \tag{3.77}$$

Функції $\{f_i^n\}_{i=1}^{A_n}$ було розглянуто В. М. Темляковим [107] при встановленні оцінок знизу ентропійних чисел класів $H_\infty^{\boldsymbol{r}}$.

Оцінимо $\|f_i^n\|_{B^\Omega_{\infty,\theta}}$. Повторивши міркування, використані під час доведення теореми 3.7 при встановленні оцінок (3.48) та (3.49), та врахувавши (3.76), отримаємо:

у випадку $1 \leq \theta < \infty$

$$\|f_i^n\|_{B^\Omega_{\infty,\theta}} \ll \left(\omega\left(2^{-n}\right)\right)^{-1} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Omega_n^*} \|A_{\boldsymbol{s}}\|_1^\theta \left\| \sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \leq 1} \delta_{\boldsymbol{s}'}(f_i^n)) \right\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\omega\left(2^{-n}\right)\right)^{-1} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Omega_n^*} \sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \leq 1} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}'}(f_i^n)) \right\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \left(\omega\left(2^{-n}\right)\right)^{-1} n^{\frac{1}{\theta}},$$

і, відповідно, для $\theta = \infty$

$$\|f_i^n\|_{B^\Omega_{\infty,\infty}} \ll \left(\omega\left(2^{-n}\right)\right)^{-1} \sup_{\substack{\boldsymbol{s}\in\Omega_n^* \\ \|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \leq 1}} \|\delta_{\boldsymbol{s}'}(f_i^n)\|_\infty \leq \left(\omega\left(2^{-n}\right)\right)^{-1}.$$

Отже, функції з множини $\left\{C_3\, \omega\left(2^{-n}\right) n^{-\frac{1}{\theta}} f_i^n\right\}_{i=1}^{A_n}$, $C_3 > 0$, належать класу $B^\Omega_{\infty,\theta}$, $1 \leq \theta \leq \infty$.

Покладемо $M = M(n) = |\Delta Q_n'| \asymp 2^n n$. Тоді, згідно з (3.74) та (3.77), будемо мати

$$\varepsilon_M\left(B^\Omega_{p,\theta}, L_\infty\right) \gg \varepsilon_M\left(B^\Omega_{\infty,\theta}, L_\infty\right) \gg \omega\left(2^{-n}\right) n^{1-\frac{1}{\theta}} \asymp \omega\left(2^{-n}\right) (\log M)^{1-\frac{1}{\theta}}.$$

Теорему 3.15 доведено. $\square$

Зауваження 3.12. Порядок величини $\varepsilon_M\left(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, L_\infty\right)$ у випадку $2 \leq \theta \leq \infty$, $2 \leq p < \infty$, $\boldsymbol{r} = (r_1, r_1)$, $r_1 > \frac{1}{2}$, а також величини $\varepsilon_M\left(B^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}, L_\infty\right)$ у випадку $1 \leq \theta \leq \infty$, $\boldsymbol{r} = (r_1, r_1)$, $r_1 > 0$ встановлено А. С. Романюком [101].

3.6. Висновки до розділу 3

У цьому розділі досліджуються найкращі білінійні наближення та ентропійні числа класів періодичних функцій багатьох змінних.

А саме, встановлено порядкові оцінки найкращих білінійних наближень класів періодичних функцій $2d$ змінних вигляду $f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$, породжених із функцій d змінних $f(\boldsymbol{x}) \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ зсувами їх аргументу $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ на всеможливі $\boldsymbol{y} \in \pi_d$. Оцінки ентропійних чисел одержано для класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

У підрозділі 3.2 встановлено оцінки величини $\tau_M(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p})_{q_1,q_2}$ для різних співвідношень між параметрами p, q_1 та q_2. Слід зазначити, що в деяких випадках одержані результати є новими і для класів (ψ,β)-диференційовних функцій однієї змінної.

У підрозділі 3.3 отримано оцінки зверху ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, $1 < p \le \infty$, періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі L_q, $1 \le q < \infty$. Що стосується відповідної оцінки знизу величини $\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\right)$, то її одержано в найбільш загальній ситуації, а саме для класів $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, у просторі L_1.

У підрозділі 3.4 встановлено двосторонні оцінки ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, $1 < p \le \infty$ у рівномірній метриці. Окремо розглянуто випадок $d = 2$, і при цьому отримано точні за порядком оцінки величини $\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty\right)$, $2 \le p, \theta \le \infty$.

Основні результати розділу 3 опубліковано у роботі [37]

Висновки

Дисертаційну роботу присвячено встановленню порядкових оцінок найкращих наближень і ентропійних чисел класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних.

А саме, у другому розділі вивчаються найкращі ортогональні та M-членні тригонометричні наближення періодичних функцій багатьох змінних $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$ та класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$, а також класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ функцій малої гладкості у просторі L_q, $1 < q < \infty$. В результаті проведених досліджень виявлено випадки, коли найкращі M-членні тригонометричні наближення мають переваги у порівнянні з найкращими ортогональними тригонометричними наближеннями, а також із наближеннями тригонометричними поліномами з "номерами"гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів.

У третьому розділі встановлено оцінки найкращих білінійних наближень класів періодичних функцій багатьох змінних, породжених зсувами аргументу функцій з класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, у просторі L_{q_1,q_2}. Крім цього, отримано оцінки ентропійних чисел класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі L_q, $1 \leq q < \infty$, та у рівномірній метриці.

Бібліоґрафія

[1] *Аманов Т. И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}B$, $(0 \le x_j \le 2\pi;\ j = 1, \dots, n)$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1965. — **77**. — С. 5–34.

[2] *Аманов Т. И.* Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. — Алма-Ата: Наука, 1976. — 224 с.

[3] *Бабаев М.-Б. А.* Приближение соболевских классов функций суммами произведений функций меньшего числа переменных // Мат. заметки. — 1990. — **48**, №6. — С. 10–21.

[4] *Бабаев М.-Б. А.* О порядке приближения соболевского класса W^r_q билинейными формами в L_p // Мат. сб. — 1991. — **182**, №1. — С. 122–129.

[5] *Базарханов Д. Б.* Нелинейные приближения классов периодических функций многих переменных // Тр. МИАН. — 2014. — **284**. — С. 8–37.

[6] *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483–522.

[7] *Бахвалов Н. С.* Оценки снизу асимптотических характеристик классов функций с доминирующей смешанной производной // Мат. заметки. — 1972. — **12**, №6. — С. 655–664.

[8] *Белинский Э. С.* Приближение периодических функций "плавающей"системой экспонент и тригонометрические поперечники // Исследование по теории функций многих вещественных переменных. — Ярославль: Яросл. ун–т. — 1984. — С. 10–24.

[9] *Белинский Э. С.* Приближение периодических функций многих переменных "плавающей"системой экспонент и тригонометрические поперечники // Докл. АН СССР. — 1985. — **284**, № 6. — С. 1294–1297.

[10] *Белинский Э. С.* Приближение "плавающей"системой экспонент на классах гладких периодических функций // Мат. сб. — 1987. — **132**, №1. — С. 20–27.

[11] *Белинский Э. С.* Приближение "плавающей"системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследование по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль: Яросл. ун–т. — 1988. — С. 16–33.

[12] *Белинский Э. С.* Асимптотические характеристики классов функций с условиями на смешанную производную (смешанную разность) // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. — Ярославль: Яросл. ун-т. — 1990. — С. 22–37.

[13] *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* О приближении функций классов W_p^α кусочно-полиномиальными функциями // Докл. АН СССР. — 1966. — **171**. — С. 1015–1018.

[14] *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Кусочно-полиномиальные приближения классов W_p^α // Мат. сб. — 1967. — **73**, №3. — С. 331–355.

[15] *Витушкин А. Г.* Оценка сложности задачи табулирования. — М.: Физматгиз, 1959. — 228 с.

[16] *Галеев Э. М.* Порядковые оценки производных периодического многомерного α-ядра Дирихле в смешаной норме // Мат. сб. — 1982. — **117** (159), №1. — С. 32–43.

[17] *Задерей П. В.* Приближение (ψ, β)-дифференцируемых периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. — 1993. — **45**, №3. — С. 367–377.

[18] *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. — М.: Мир, 1965. — Т. I. — 615 с.; Т. II. — 537 с.

[19] *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. — 1974. — **29**, №3. — С. 161–178.

[20] *Кашин Б. С.* О поперечниках классов Соболева малой гладкости // Вести. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. — 1981. — №5. — С. 50–54.

[21] *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. — М.: Наука, 1984. — 496 с.

[22] *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 // Мат. заметки. — 1994. — **56**, №5. — С. 57–86.

[23] *Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.* ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. — 1959. — **14**, №2. — С. 3–86.

[24] *Конограй А. Ф., Мусієнко А. П.* Оцінки ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — **14**, №3. — С. 222–239.

[25] *Консевич Н. М.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 1998. — **3**. — С. 204–219

[26] *Консевич Н. М.* Оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, №7. — С. 898–907.

[27] *Консевич Н. М.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів функцій багатьох змінних $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, №1. — С. 23–29.

[28] *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. — М.: Наука, 1976. — 320 с.

[29] *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **187**. — С. 143–161.

[30] *Майоров В. Е.* О линейных поперечниках соболевских классов и цепочках экстремальных подпространств // Мат. сб. — 1980. — **113** (165), №3 (11). — С. 437–463.

[31] *Мирошин Н. В., Хромов В. В.* Об одной задаче наилучшей аппроксимации функций многих переменных // Мат. заметки. — 1982. — **32**, №5. — С. 721–727.

[32] *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974. — 480 с.

[33] *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977. — 456 с.

[34] *Осколков К. И.* Аппроксимационные свойства суммируемых функций на множествах полной меры // Мат. сб. — 1977. — **103**, №4. — С. 563–589.

[35] *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным модулем непрерывности // Anal. Math. — 1994. — **20**, №2. — P. 35–48.

[36] *Пожарська К .В.* Оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ періодичних функцій багатьох змінних малої

гладкості у просторі L_q // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — **14**, №3. — С. 293–318.

[37] *Пожарсъка К. В.* Оцінки ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2018. — **70**, №9. — С. 1249–1263.

[38] *Пожарсъка К. В.* Оцінки ентропійних чисел класів періодичних функцій багатьох змінних // Сучасні проблеми механіки та математики: Зб. наук. праць у 3-х т. / за заг. ред. А. М. Самойленка та Р. М. Кушніра [Електронний ресурс]. — Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. — 2018. — **3**. — С. 69. — Режим доступу до ресурсу: www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018.

[39] *Пожарсъка К. В.* Оцінки ентропійних чисел деяких класів періодичних функцій багатьох змінних // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях"присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (Чернівці, 17–19 вересня 2018р.): Тези доповідей. — Чернівці: Чернівецький нац. ун-т. — 2018. — С. 193.

[40] *Романюк А. С.* Неравенства для L_p-норм (ψ, β)-производных и поперечников по Колмогорову классов функций многих переменных $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Исследования по теории аппроксимации функций: Сб. науч. тр. Ин-та математики АН УССР. — 1987. — С. 92–105.

[41] *Романюк А. С.* Приближение периодических функций в метрике L_q // Приближение периодических функций в метрике пространства L_p. — Киев, 1987. — С. 42–58 (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.47).

[42] *Романюк А. С.* Приближение класоов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. — 1991. — **43**, №10. — С. 1398–1408.

[43] *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$ II // Укр. мат. журн. — 1993. — **45**, №10. — С. 1411–1423.

[44] *Романюк А. С.* О наилучшей тригонометрической и билинейной аппроксимации классов Бесова функций многих переменных // Укр. мат. журн. — 1995. — **47**, №8. — С. 1097–1111.

[45] *Романюк А. С.* Приближение классов периодических функций многих переменных // Мат. заметки. — 2002. — **71**, №1. — С. 109–121.

[46] *Романюк А. С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. — 2003. — **67**, №2. — С. 61–100.

[47] *Романюк А. С.* Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. — 2006. — **70**, №2. — С. 69–98.

[48] *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Праці Ін–ту математики НАН України. — 2012. — **93**. — 352 с.

[49] *Романюк А. С.* Оценки энтропийных чисел и колмогоровских поперечников классов Никольского – Бесова периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, №11. — С. 1540–1556.

[50] *Романюк В. С.* Колмогоровские поперечники и энтропийные числа в пространствах Орлича с нормой Люксембурга // Укр. мат. журн. — 2017. — **69**, №5. — С. 682–694.

[51] *Романюк А. С., Романюк В. С.* Асимптотические оценки наилучших тригонометрических и билинейных приближений классов функций нескольких переменных // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, №4. — С. 536–551.

[52] *Романюк А. С., Романюк В. С.* Наилучшие билинейные приближения функций из пространств Никольского – Бесова // Укр. мат. журн. — 2012. — **64**, №5. — С. 685–697.

[53] *Сердюк А. С., Степанюк Т. А.* Оцінки найкращих m-членних тригонометричних наближеннь класів аналітичних функцій // Доп. НАН України. — 2015. — №2. — С. 32–37.

[54] *Сердюк А. С., Степанюк Т. А.* Порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, №7. — С. 916–936.

[55] *Смоляк С. А.* ε-Энтропия классов $E_s^{\alpha,k}(B)$ и $W_s^{\alpha}(B)$ в метрике L_2 // Докл. АН СССР. — 1960. — **131**, №1. — С. 30–33.

[56] *Соліч К. В.* Оцінки білінійних наближеннь класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ періодичних функцій двох змінних // Укр. мат. журн. — 2012. — **64**, №8. — С. 1106–1120.

[57] *Стасюк С. А, Федуник О. В.* Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, №5. — С. 692–704.

[58] *Стасюк С. А.* Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, №11. — С. 1551–1559.

[59] *Стасюк С. А.* Найкращі M-членні ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, №5. — С. 647–656.

[60] *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.

[61] *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **40**. — Ч. I. — 427 с.; Ч. II. — 468 с.

[62] *Степанец А. И., Шидлич А. Л.* Экстремальные задачи для интегралов от неотрицательных функций // Изв. РАН. Сер. мат. — 2010. — **74**, №3. — С. 169–224.

[63] *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. — 1955. — **102**, №1. — С. 37–40.

[64] *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. — М.: Москов. гос. ун–т, 1976. — 304 с.

[65] *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**, №2. — С. 3–113.

[66] *Темляков В. Н.* Билинейная аппроксимация и приложения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **187**. — С. 191–215.

[67] *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **189**. — С. 138–168.

[68] *Трибель Х.* Интерполяционные свойства ε-энтропии и поперечников. Геометрические характеристики вложения пространств функций типа Соболева – Бесова // Мат. сб. — 1975. — **98**, №1. — С. 27–41.

[69] *Федоренко А. С.* Про найкращі m-членні тригонометричні та ортогональні тригонометричні наближення функцій класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, №12. — С. 1719–1721.

[70] *Федоренко А. С.* Наилучшие m-членные тригонометрические приближения классов (ψ, β)-дифференцируемых функций одной переменной // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, №6. — С. 850–856.

[71] *Харди Г. Г, Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948. — 456 с.

[72] *Швай К. В.* Оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень узагальнених багатовимірних аналогів ядер Бернуллі та класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$ у просторі L_q // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — **13**, №1. — С. 300–320.

[73] *Швай К. В.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів періодичних функцій багатьох змінних з обмеженою узагальненою похідною у просторі L_q // Український математичний вісник. — 2016. — **13**, №3. — С. 361–375.

(Переклад: *Shvai K. V.* The best M-term trigonometric approximations of the classes of periodic multivariate functions with bounded generalized derivative in the space L_q // Journal of mathematical sciences. — 2017. — **222**, №6. — P. 750–761.)

[74] *Швай К. В.* Оцінки найкращих білінійних наближень класів $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\beta})$-диференційовних періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2018. — **70**, №4. — С. 564–573.

[75] *Швай К. В.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів функцій багатьох змінних $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$ у просторі L_q // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2016"(Львів, 25–27 травня 2016р.): Тези доповідей. — http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Shvai.pdf.

[76] *Швай К. В.* Оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\beta})$-диференційовних періодичних функцій ба-

гатьох змінних // XI Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз"(Одеса, 1–14 серпня 2016р.): Тези доповідей. — К.: Ін-т математики НАН України. — 2016. — С. 114.

[77] *Швай К. В.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення узагальнених багатовимірних аналогів ядер Бернуллі // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 22–25 лютого 2017р.): Тези доповідей. — Івано – Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" . — 2017. — С. 134–135.

[78] *Швай К. В.* Найкращі білінійні наближення класів $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\beta})$-диференційовних періодичних функцій багатьох змінних // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2017"(Львів, 23–25 травня 2017р.): Тези доповідей. — http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2017/abstracts/Shvai.pdf.

[79] *Швай К. В.* Найкращі білінійні наближення класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},1}$ періодичних функцій багатьох змінних // Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917–2008) (Київ, 7–10 червня 2017р.): Тези доповідей. — К.: Ін-т математики НАН України. — 2017. — С. 49.

[80] *Шидліч А. Л.* Порядкові оцінки найкращих n-членних ортогональних тригонометричних наближень класів функцій $\mathcal{F}^{\psi}_{q,\infty}$ в просторах $L_p(\mathbb{T}^d)$ // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — **8**, №1. — С. 224–243.

[81] *Шидліч А. Л.* Порядкові оцінки для деяких апроксимативних характеристик // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, №1. — С. 304–327.

[82] *Шидліч А. Л., Чайченко С. О.* Деякі екстремальні задачі в просторах Орлича // Мат. студії. — 2014. — **42**, №1. — С. 21–32.

[83] *Шкапа В. В.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, №3. — С. 315–329.

[84] *Шкапа В. В.* Апроксимативні характнристики класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, №8. — С. 1139–1150.

[85] *Шкапа В. В.* Найкращі тригонометричні і білінійні наближення класів (ψ, β)-диференційовних періодичних функцій // Укр. мат. журн. — 2016. — **68**, №3. — С. 386–399.

[86] *Янченко С. Я.* Наближення класів $S^r_{p,\theta}B\left(\mathbb{R}^d\right)$ функцій багатьох змінних цілими функціями спеціального вигляду // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, №8. — С. 1124–1138.

[87] *Belinskii E. S.* Approximation of functions of several variables by trigonometric polynomials with given number of harmonics, and estimates of ε-entropy // Anal. Math. — 1989. — **15**, №2. — P. 67–74.

[88] *Belinskii E. S.* Estimates of entropy numbers and gaussian measures for classes of functions with bounded mixed derivative // J. Approx. Theory. — 1998. — **93**. — P. 114–127.

[89] *Belinsky E. S., Trigub R. M.* Fourier analisis and approximation of functions. — Kluwer Academic Publishers, 2004. — 585 p.

[90] *Cheney E. M.* The best approximation of multivariate functions by combinations of univariate ones // J. Approx. Theory. Ser. IV. — 1983. — P. 1–26.

[91] *DeVore R. A.* Nonlinear approximation // Acta Numerica. — **7**. — 1998. — P. 51–150.

[92] *DeVore R. A., Temlyakov V. N.* Nonlinear approximation in finite-dimensional spaces // J. Complexity. — 1997. — **13**. — P. 489–508.

[93] *Dung D.* Continuons algorithms in n-term approximation and non-linear n-widths // J. Approx. Theory. — 2000. — **102**. — P. 217–242.

[94] *Dung D.* Non-linear approximations using sets of finite cardinality or finite pseudo-dimension // J. Complexity. — 2001. — **17**, №2. — P. 467–492.

[95] *Dung D., Temlyakov V., Ullrich T.*, Hyperbolic cross approximation. Advanced Courses in Mathematics. — CRM Barcelona. Birkhauser/Springer, to appear.

[96] *Höllig K.* Diameters of classes of smooth functions // Quant. Approx. — New York: Acad. Press, 1980. — P. 163–176.

[97] *Kolmogorov A. N.* Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse // Ann. of math. — 1936. — **37**. — P. 107–110.

[98] *Makovoz Y.* On trigonometric n-widths and their generalization // J. Approx. Theory. — 1984. — **41**, №4. — P. 361–366.

[99] *Micchelli C. A., Pinkus A.* Some problem in the approximation of functions of two variables and n-widths of integral operators // J. Approx. Theory. — 1978. — **24**. — P. 51–77.

[100] *Pozharska K. V.* Entropy numbers for the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic multivariate functions // 4th AMMODIT Conference (Malekhiv, Lviv region, March 19–23, 2018): Abstracts. — P. 20.

[101] *Romanyuk A. S.* Entropy numbers and widths for the Nikol'skii – Besov classes of many variables in the space L_∞ // Anal. Math, to appear.

[102] *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen I // Math. Ann. — 1907. — **63**. — P. 433–476.

[103] *Shvai K. V.* The best M-term trigonometric approximations of classes of $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\beta})$-differentiable periodic multivariate functions in the space L_q // Journal of computational and applied mathematics. Taras Shevchenko National University of Kyiv. — 2016. – **122**, №2. — C. 83–91.

[104] *Shvai K. V.* The best M-term trigonometric approximations of multivariate classes of functions with bounded generalized derivative // International conference "Theory of approximation of functions and its applications"in honor of 75th anniversary of Corresponding Member of NAS of Ukraine, Professor Alexander Stepanets (1942–2007) (Slovyansk, May, 28 – June 3, 2017): Abstracts. — Slovyansk: Donbas State Pedagogical University. — 2017. — P. 36.

[105] *Stasyuk S. A.* Best m-term trigonometric approximation of periodic functions of several variables from Nikol'skii – Besov classes for small smoothness // J. Approx. Theory. — 2014. — **177**. — P. 1–16.

[106] *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic function. — Nova Sci. Publ., Inc., 1993. — 419 p.

[107] *Temlyakov V. N.* An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the entropy numbers // J. Complexity. — 1995. — **11**. — P. 293–307.

[108] *Temlyakov V. N.* On the entropy numbers of the mixed smoothness function classes // J. Approx. Theory. — 2017. — **217**. — P. 26–56.

[109] *Yongsheng S., Heping W.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Tr. Mat. Inst. Steklova. — 1997. — **219**. — C. 356–377.