НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Райновський Ігор Андрійович

УДК 532.595

АСИМПТОТИЧНА МОДАЛЬНА ТЕОРІЯ НАРІМАНОВА-МОІСЄЄВА УСТАЛЕНИХ ДЕМПФОВАНИХ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В ЦИЛІНДРИЧНОМУ БАЦІ

01.02.01 – теоретична механіка

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2018

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, член-кореспондент НАН України
Тимоха Олександр Миколайович,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу математичних проблем механіки та теорії керування.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Кононов Юрій Микитович,
Донецький Національний університет ім. Василя Стуса (м. Вінниця), провідний науковий співробітник науково-дослідної частини, професор кафедри прикладної механіки і комп’ютерних технологій.

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Семенов Юрій Асафійович,
Інститут гідромеханіки НАН України,
старший науковий співробітник відділу течій з вільними межами.

Захист відбудеться « 5 » лютого 2019 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий « 28 » грудня 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Пелюх Г.П.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Задача про резонансні коливання рідини у вертикальних циліндричних баках кругового перерізу набула актуальності з середини XX століття у зв'язку з розвитком ракетокосмічної техніки (баки з паливом), конструюванням контейнерів, які зберігають великі маси рідини (нафта, водонапірні баки), а також дизайном танкерів із скрапленим газом. За минулі десять років ця задача стала також актуальною для розвитку нових біотехнологій (біореактори), а також у фармацевтичній промисловості. Цей клас застосувань вимагає врахування ряду специфічних реалогічних властивостей руху рідини, зокрема, в'язкого демпфування, а також того факту, що контейнери біо- та фармтехнологій рухаються циклічно на довгому проміжку часу за складною і суттєво тривимірною траєкторією, тобто, з теоретичної точки зору, ставиться задача визначення стійких усталених періодичних демпфованих резонансних хвиль у контейнері.

Традиційним підходом до аналізу динаміки в'язкої рідини в баках є застосування чисельних методів розв'язування відповідних початково-крайових задач, що дає змогу описати перехідні (неусталені) хвилі при заданих початкових сценаріях. Але, оскільки задача про усталені (періодичні) резонансні поверхневі хвилі в баках, як відомо, не має єдиного розв’язку, цей підхід стає малоефективним для визначення періодичних розв’язків крайової задачі і дослідження їхньої стійкості. Водночас природними для аналізу усталених хвильових рухів рідини в контейнерах є методи аналітичної механіки, які використовують наближені математичні моделі у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь відносно гідродинамічних узагальнених координат цієї механічної системи. Такі методи було започатковано у 60-80х роках минулого століття в роботах М.М.Моісеєва, Г.С.Наріманова, І.О.Луковського, Р.Д.Докучаєва, Б.І.Рабіновича, Г.М.Мікішева, В.В.Румянцева, Т.Н.Абрамсона, Н.Кана, Г.Хаттона та Дж.Майлза. Використовуючи поняття власних форм коливання рідини (вперше виникло в роботі М.В.Остроградського), ці науковці розглядали вихідну гідродинамічну проблему як задачу теоретичної механіки для системи із нескінченною кількістю ступенів вільності. Вони ввели до розгляду (гідродинамічні) узагальнені координати, які відповідають за збурення відповідних власних форм коливання рідини, а також, використовуючи варіаційні принципи механіки, побудували декілька типів наближених математичних моделей (модальних рівнянь), що зв'язують ці узагальнені координати.

Модальний метод було надалі розвинено в роботах О.М.Фалтінсена, О.М.Тимохи, О.С.Лимарченка, Т.Ікеди, А.Колає, М. ла Рокка, Дж.Лове, Л.Перко, В.Столбенцова, Х.Такахарі, Ю.М.Кононова та багатьох інших. Ці автори також започаткували використання методів нелінійної механіки для побудови і дослідження стійкості періодичних розв'язків нелінійних (модальних) рівнянь, що дозволило описати (якісно й кількісно) стійкі та нестійкі усталені резонансні хвильові рухи рідини. Водночас практично всі аналітичні результати щодо нелінійних модальних рівнянь і усталених хвильових рухів рідини в баках обмежено випадком ідеальної рідини без демпфування. Предметом даної дисертаційної роботи є поширення деяких із цих результатів на випадок демпфованих хвиль у біореакторах, які виконують тривимірні періодичні рухи.

Зв'язок із науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана згідно з планом наукових досліджень відділу математичних проблем механіки та теорії керування Інституту математики НАН України на 2016-2020 роки в рамках держбюджетної теми № III-13-16 "Математичні проблеми динаміки, стабілізації та оптимізації складних механічних систем" (номер держ. реєстрації 011U003101), в рамках науково-дослідної теми № III-23-12" (номер держ. реєстрації 0122U001015) за програмою "Розробка математичних моделей та чисельно-аналітичних методів розв'язування сучасних задач фізико-технічних і медико-біологічних наук та інформаційних технологій", а також цільової програми наукових досліджень відділення математики НАН України № III-20-17 "Розробка аналітичних та чисельно-аналітичних методів дослідження задач природознавства" (номер держ. реєстрації 0117U04077).

Мета та завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є аналітичні дослідження, використовуючи методи аналітичної та нелінійної механіки, усталених демпфованих хвильових резонансних рухів рідини у вертикальних кругових баках (біореакторах) та їхньої стійкості за умови складних просторових періодичних збурень баку.

Об'єктом дослідження є варіаційна постановка задачі поверхневих хвиль у формі Бейтмена-Люка, а також нелінійні наближені модальні рівняння типу Наріманова-Моісєєва, які зв'язують узагальнені координати гідромеханічної системи (аналог рівнянь Ейлера-Лагранжа) й ефективно описують динаміку вільної поверхні при резонансних збуреннях першої власної частоти коливання рідини.

Предметом дослідження є аналітичні періодичні розв'язки модальних рівнянь типу Наріманова-Моісєєва з лінійними членами, які відповідають за демпфування, та аналіз їхньої стійкості з метою описати всі можливі усталені резонансні демпфовані хвилі в баках, які рухаються за складною періодичною траєкторією.

Визначена мета зумовлює вирішення таких *завдань*:

- редукція нелінійної крайової задачі з вільною поверхнею динаміки рідини в циліндричному контейнері до нелінійних модальних рівнянь Луковського-Майлза спеціального типу,
- оцінка коефіцієнтів демпфування (логарифмічних декрементів) стоячих хвиль, обумовлених ламінарним в'язким шаром на змоченій поверхні баку та внутрішнім тертям (узагальнення формул Хендерсон-Майлза),
- побудова нелінійних модальних рівнянь типу Наріманова-Моісєєва, які описують резонансні демпфовані хвилі,
- побудова аналітичних періодичних розв'язків модальних рівнянь типу Наріманова-Моісєєва, аналіз стійкості цих розв'язків і, як результат, опис усіх можливих усталених резонансних хвиль (стоячих та кругових),
- визначення діапазонів існування та стійкості кругових хвиль за- та проти напрямку орбітальних еліптичних рухів баку залежно від відношення осей "еліпсу орбіти",
- порівняння результатів аналітичних досліджень із відомими експериментами; аналіз впливу демпфування на амплітудно-частотні характеристики усталених хвиль та зсуву фаз.

Методи дослідження. Варіаційні методи аналітичної та нелінійної механіки, асимптотичні методи побудови періодичних розв'язків нескінченновимірних систем звичайних нелінійних диференціальних рівнянь, перший метод Ляпунова, чисельно-аналітичні методи розв'язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути корисними в інженерних дослідженнях, пов'язаних із аеруванням вина, у фармацевтичній галузі, біотехнологіях (реактори для культури клітин), тощо. Теоретичні результати й розроблені методи аналітичної механіки можна використати у спеціальних курсах ВНЗ України. Вони є корисними для науковців з Інститутів механіки та гідромеханіки НАН України, інших наукових установ.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі отримані наступні нові наукові результати:

- побудовані повні (в математичному сенсі) нелінійні модальні рівняння типу Наріманова-Моісєєва для випадку резонансних коли-

вань рідини у вертикальному циліндричному баці, що пов'язують нескінченну кількість узагальнених гідродинамічних координат і ефективно описують усталені демпфовані рухи рідини за умови довільних періодичних тривимірних рухів баку з частотою, близькою до першої власної частоти коливання рідини;
- виведені асимптотичні формули для оцінки коефіцієнтів демпфування, пов'язаного із в'язким шаром на змочених стінках баку і внутрішнім тертям у рідині; встановлено, що впливом дисипації не можна нехтувати для $0.05m \lesssim R_0 \lesssim 0.3m$ (R_0 – радіус баку), що є типовим для біореакторів та інших застосувань;
- для тривимірних періодичних рухів баку побудовані асимптотичні аналітичні періодичні розв'язки системи типу Наріманова-Моісєєва, проаналізована їхня стійкість;
- доведено, що (з точністю до членів другого порядку малості включно) побудовані періодичні розв'язки є еквівалентними до розв'язків, які виникають при відповідних орбітальних горизонтальних еліптичних рухах баку;
- показано, що, окрім випадку поздовжніх збурень баку, всі усталені хвилі є круговими, які виникають за- чи проти напрямку еліптичного збурення баку; доведено, що, починаючи з деякої величини співвідношень осей еліпсу збурень, наявність дисипації унеможливлює існування кругових хвиль, протилежно направлених до орбітальних поступальних збурень баку;
- побудовані типові амплітудно-частотні характеристики; описаний вплив дисипації на зсув фаз;
- результати валідовані порівнянням із експериментальними вимірами різних авторів; проаналізовані діапазони застосування побудованої аналітичної теорії, зокрема, вказано на необхідність збільшувати коефіцієнти демпфування з ростом амплітуди кругової хвилі.

Особистий внесок здобувача у сумісних роботах. За темою дисертації опубліковано 7 статей та 1 теза конференції сумісно з науковим керівником, якому належить постановка задачі та аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися й обговорювались на семінарі відділу математичних проблем механіки та теорії керування Інституту математики НАН України впродовж 2016-2018 років, на семінарі "Математичні проблеми механіки та обчислювальна математика" Інституту математики НАН України під керівництвом академіків НАН України

І.О.Луковського і В.Л.Макарова (в повному обсязі – 20.09.2018р.), а також на таких міжнародних конференціях: Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю.О.Митропольського (червень 2017 р., Київ); IV Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки" (серпень 2017 р., Київський Національний Університет ім. Т.Шевченка, Київ); Конференція молодих учених "Підстригачівські читання - 2017" (травень 2017 р., Львів); OMAE - 37th International Conference on Ocean, Offshore & Arctic Engineering (червень 2018р., Мадрид, Іспанія).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковані у статтях [1-7] в наукових періодичних фахових виданнях; [1, 2] – закордонні наукові журнали, що індексуються Scopus та Web of Science, [3] – український журнал, який проіндексований Web of Science, [7] – матеріали конференції у вигляді статті (видано за кордоном), проіндексовані Scopus та Web of Science; [8-10] – тези доповідей на міжнародних наукових конференціях.

Структура та об'єм роботи. Дисертація складається зі вступу, основної частини, що містить п'ять розділів, висновків і списку використаних джерел із 233 найменувань; вона містить 18 рисунків. Загальний обсяг дисертації – 161 сторінка друкованого тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У ***вступі*** обґрунтована актуальність теми дисертації, визначені мета, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, розкриті наукова новизна отриманих результатів, їхнє теоретичне і практичне значення, наведені дані про апробацію отриманих результатів і коротко викладений зміст основної частини. У ***першому*** розділі дисертації наведений огляд літератури за її темою.

Другий розділ приводить постановку відповідної крайової задачі з вільною межею, дає деталі модального методу, який, використовуючи варіаційний принцип Бейтмена-Люка, дозволяє перейти від вихідної задачі до нескінченновимірної системи нелінійних звичайних диференціальних (модальних) рівнянь типу Майлза-

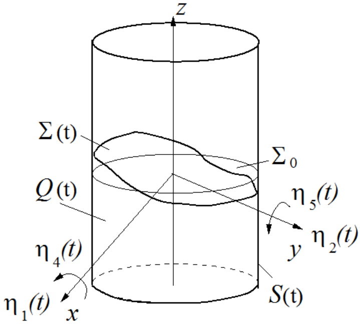

Рис. 1

Луковського (система зв'язує узагальнені координати та швидкості гідромеханічної системи).

Для вертикального абсолютно твердого циліндричного баку, який рухається з малою (відносно радіусу R_0) амплітудою із чотирьома незалежними ступенями вільності $\eta_i(t) = O(\varepsilon) \ll 1,\ i = 1,2,4,5$, як показано на Рис. 1 (рідина $Q(t)$ обмежена вільною $\Sigma(t)$ та змоченою поверхнями баку $S(t)$, рух рідини описується в координатній системі, жорстко зв'язаній із циліндричним резервуаром), модальний метод використовує власні форми коливання рідини для визначення розв'язку вихідної задачі (для невідомої вільної поверхні та потенціалу швидкостей) у вигляді

$$z = \zeta(r,\theta,t) = \sum_{Mi} \alpha_{Mi} J_M(k_{Mi} r)\Big(p_{Mi}(t)\cos(M\theta) + r_{mi}(t)\sin(m\theta)\Big), \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\Phi(r,\theta,z,t) = r\Big(\dot\eta_1\cos\theta + \dot\eta_2\sin\theta\Big) + F(r,z)\Big[-\dot\eta_4\sin\theta + \dot\eta_5\cos\theta\Big] \\ + \sum_{Mi}\alpha_{Mi}J_M(k_{Mi}z)\Big[P_{Mi}(t)\cos(M\theta) + R_{mi}(t)\sin(m\theta)\Big]\ Z_{Mi}(z),\end{aligned} \tag{2}$$

де

$$Z_{Mi}(z) = \frac{\cosh(k_{Mi}(z+h))}{\cosh(k_{Mi}h)};\quad \kappa_{Mi} = k_{Mi}\tanh(k_{Mi}h);\quad J'_M(k_{Mi}) = 0,$$

h – безмірна глибина рідини, α_{Mi} – нормалізаційні коефіцієнти, $P_{Mi}(t),\ R_{mi}(t)$ – *узагальнені швидкості*, $p_{Mi}(t),\ r_{mi}(t)$ – *узагальнені координати*, $\mathrm{F}(r,z)$ – відома функція, яка пов'язується з лінійним потенціалом Стокса-Жуковського.

Згідно з доведеним *Твердженням* 2.1, використовуючи варіаційний принцип Люка-Бейтмена і представлення (1), (2), можна як вивести нелінійні модальні рівняння у формі Майлза-Луковського, в яких невідомими є узагальнені координати й узагальнені швидкості, так і отримати нелінійні модальні рівняння спеціального вигляду, які описують резонансні коливання рідини при малих періодичних збуреннях баку кругового перерізу з чотирма ступенями вільності (Рис. 1). У цій спеціальній модальній системі введені в (1), (2) узагальнені координати і швидкості є великими величинами на асимптотичній шкалі $O(\varepsilon)$, а компоненти порядку $o(\varepsilon)$ нехтуються. Система є базою для побудови наближених нелінійних модальних теорій, включно з асимптотичною теорією Наріманова-Моісєєва.

У ***третьому*** розділі виведені асимптотичні формули (в термінах малого параметра $\mathrm{Ga}^{-1/4} = \sqrt{\nu / (g^{1/2} R_0^{3/2})} \ll 1$, де Ga – число Галілея, ν – кінетична в'язкість, g – прискорення гравітації) для коефіцієнтів демпфування (декрементів затухання) власних форм коливання рідини ξ_{Mi}^{low}. Ці коефіцієнти демпфування відображають ефект ламінарного в'язкого шару на змочених стінках рідини і внутрішнє в'язке тертя. Показано, що демпфуванням рідини не можна нехтувати для $0.05m \lesssim R_0 \lesssim 0.3m$, що відповідає типовим розмірам біореакторів.

Вважаючи, що частота збурення баку σ є близькою до найнижчої частоти власних коливань рідини $\sigma_1 = \sigma_{11}$, $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 / \sigma \approx 1$, й те, що відсутні вторинні (внутрішні) резонанси (доведено для $h \gtrsim 1.2$), у розділі виводяться рівняння нелінійної модальної теорії типу Нарімана-Моісєєва. Теорія пов'язує домінантний асимптотичний внесок до руху рідини з резонансно-збуреними узагальненими координатами p_{11} та r_{11}, нехтує членами порядку $o(\varepsilon)$ і базується на наступній асимптотиці (Наріманов та Моісєєв)

$$
\begin{aligned}
&p_{11} \sim r_{11} = O(\varepsilon^{1/3}); \quad p_{0j} \sim p_{2j} \sim r_{2j} = O(\varepsilon^{2/3}), \\
&\quad r_{1(j+1)} \sim p_{1(j+1)} \sim r_{3j} \sim p_{3j} = O(\varepsilon),\ j \geq 1; \quad r_{mj} \sim p_{mi} = o(\varepsilon),\ m \geq 4.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Ці рівняння мають такий вигляд:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{p}_{11} + \boxed{2\xi_{11}\bar{\sigma}_{11}\dot{p}_{11}} + \bar{\sigma}_{11}^2 p_{11} + d_1 p_{11}\left(\ddot{p}_{11}p_{11} + \ddot{r}_{11}r_{11} + \dot{p}_{11}^2 + \dot{r}_{11}^2\right) \\
&\quad + d_2\left[r_{11}\left(\ddot{p}_{11}r_{11} - \ddot{r}_{11}p_{11}\right) + 2\dot{r}_{11}\left(\dot{p}_{11}r_{11} - \dot{r}_{11}p_{11}\right)\right] + \sum_{j=1}^{\infty}\Big[d_3^{(j)}(\ddot{p}_{11}p_{2j} \\
&\quad + \ddot{r}_{11}r_{2j} + \dot{p}_{11}\dot{p}_{2j} + \dot{r}_{11}\dot{r}_{2j}) + d_4^{(j)}(\ddot{p}_{2j}p_{11} + \ddot{r}_{2j}r_{11}) + d_5^{(j)}(\ddot{p}_{11}p_{0j} \\
&\qquad\quad + \dot{p}_{11}\dot{p}_{0j}) + d_6^{(j)}\ddot{p}_{0j}p_{11}\Big] = -(\ddot{\eta}_1 - \bar{g}\eta_5 - S_1\ddot{\eta}_5)\kappa_{11}P_1,
\end{aligned} \tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\ddot{r}_{11} + \boxed{2\xi_{11}\bar{\sigma}_{11}\dot{r}_{11}} + \bar{\sigma}_{11}^2 r_{11} + d_1 r_{11}\left(\ddot{p}_{11}p_{11} + \ddot{r}_{11}r_{11} + \dot{p}_{11}^2 + \dot{r}_{11}^2\right) \\
&\quad + d_2\left[p_{11}\left(\ddot{r}_{11}p_{11} - \ddot{p}_{11}r_{11}\right) + 2\dot{p}_{11}\left(\dot{r}_{11}p_{11} - \dot{p}_{11}r_{11}\right)\right] + \sum_{j=1}^{\infty}\Big[d_3^{(j)}(\ddot{p}_{11}r_{2j} \\
&\quad - \ddot{r}_{11}p_{2j} + \dot{p}_{11}\dot{r}_{2j} - \dot{p}_{2j}\dot{r}_{11}\Big) + d_4^{(j)}(\ddot{r}_{2j}p_{11} - \ddot{p}_{2j}r_{11}) + d_5^{(j)}(\ddot{r}_{11}p_{0j} \\
&\qquad\quad + \dot{r}_{11}\dot{p}_{0j}) + d_6^{(j)}\ddot{p}_{0j}r_{11}\Big] = -(\ddot{\eta}_2 + \bar{g}\eta_4 + S_1\ddot{\eta}_4)\kappa_{11}P_1;
\end{aligned} \tag{5}
$$

$$\ddot{p}_{2k} + \boxed{2\xi_{2k}\overline{\sigma}_{2k}\dot{p}_{2k}} + \overline{\sigma}_{2k}^2 p_{2k} + d_{7,k}\left(\dot{p}_{11}^2 - \dot{r}_{11}^2\right) + d_{9k}\left(\ddot{p}_{11}p_{11} - \ddot{r}_{11}r_{11}\right) = 0, \tag{6}$$

$$\ddot{r}_{2k} + \boxed{2\xi_{2k}\overline{\sigma}_{2k}\dot{r}_{2k}} + \overline{\sigma}_{2k}^2 r_{2k} + 2d_{7,k}\dot{p}_{11}\dot{r}_{11} + d_{9,k}\left(\ddot{p}_{11}r_{11} + \ddot{r}_{11}p_{11}\right) = 0, \tag{7}$$

$$\ddot{p}_{0k} + \boxed{2\xi_{2k}\overline{\sigma}_{2k}\dot{p}_{2k}} + \overline{\sigma}_{0k}^2 p_{0k} + d_{8,k}\left(\dot{p}_{11}^2 + \dot{r}_{11}^2\right) + d_{10,k}\left(\ddot{p}_{11}p_{11} + \ddot{r}_{11}r_{11}\right) = 0, k \geq 1; \tag{8}$$

$$\ddot{p}_{3k} + \boxed{2\xi_{3k}\overline{\sigma}_{3k}\dot{p}_{3k}} + \overline{\sigma}_{3k}^2 p_{3k} + d_{11,k}\left[\ddot{p}_{11}\left(p_{11}^2 - r_{11}^2\right) - 2p_{11}r_{11}\ddot{r}_{11}\right]$$
$$+d_{12,k}\left[p_{11}\left(\dot{p}_{11}^2 - \dot{r}_{11}^2\right) - 2r_{11}\dot{p}_{11}\dot{r}_{11}\right] + \sum_{j=1}^{\infty}\left[d_{13,k}^{(j)}\left(\ddot{p}_{11}p_{2j} - \ddot{r}_{11}r_{2j}\right)\right.$$
$$\left. +d_{14,k}^{(j)}\left(\ddot{p}_{2j}p_{11} - \ddot{r}_{2j}r_{11}\right) + d_{15,k}^{(j)}\left(\dot{p}_{2j}p_{11} - \dot{r}_{2j}r_{11}\right)\right] = 0, \tag{9}$$

$$\ddot{r}_{3k} + \boxed{2\xi_{3k}\overline{\sigma}_{3k}\dot{r}_{3k}} + \overline{\sigma}_{3k}^2 r_{3k} + d_{11,k}\left[\ddot{r}_{11}\left(p_{11}^2 - r_{11}^2\right) + 2p_{11}r_{11}\ddot{p}_{11}\right]$$
$$+d_{12,k}\left[r_{11}\left(\dot{p}_{11}^2 - \dot{r}_{11}^2\right) + 2p_{11}\dot{p}_{11}\dot{r}_{11}\right] + \sum_{j=1}^{\infty}\left[d_{13,k}^{(j)}\left(\ddot{p}_{11}r_{2j} + \ddot{r}_{11}p_{2j}\right)\right.$$
$$\left. +d_{14,k}^{(j)}\left(\ddot{p}_{2j}r_{11} + \ddot{r}_{2j}p_{11}\right) + d_{15,k}^{(j)}\left(\dot{p}_{2j}\dot{r}_{11} + \dot{r}_{2j}\dot{p}_{11}\right)\right] = 0, \quad k \geq 1; \tag{10}$$

$$\ddot{p}_{1n} + \boxed{2\xi_{1n}\overline{\sigma}_{1n}\dot{p}_{1n}} + \overline{\sigma}_{1n}^2 p_{1n} + d_{16,n}\left(\ddot{p}_{11}p_{11}^2 + r_{11}p_{11}\ddot{r}_{11}\right) + d_{17,n}\left(\ddot{p}_{11}r_{11}^2 - r_{11}p_{11}\ddot{r}_{11}\right)$$
$$+d_{18,n}p_{11}\left(\dot{p}_{11}^2 + \dot{r}_{11}^2\right) + d_{19,n}\left(r_{11}\dot{p}_{11}\dot{r}_{11} - p_{11}\dot{r}_{11}^2\right) + \sum_{j=1}^{\infty}\left[d_{20,n}^{(j)}\left(\ddot{p}_{11}p_{2j} + \ddot{r}_{11}r_{2j}\right)\right.$$
$$+d_{21,n}^{(j)}\left(p_{11}\ddot{p}_{2j} + \ddot{r}_{11}r_{2j}\right) + d_{22,n}^{(j)}\left(\dot{p}_{11}\dot{p}_{2j} + \dot{r}_{11}r_{2j}\right) + d_{23,n}^{(j)}\ddot{p}_{11}p_{0j}$$
$$\left. +d_{24,n}^{(j)}p_{11}\ddot{p}_{0j} + d_{25,n}^{(j)}\dot{p}_{11}\dot{p}_{0j}\right] = -(\ddot{\eta}_1 - \overline{g}\eta_5 - S_n\ddot{\eta}_5)\kappa_{1n}P_n, \qquad n \geq 2, \tag{11}$$

$$\ddot{r}_{1n} + \boxed{2\xi_{1n}\overline{\sigma}_{1n}\dot{r}_{1n}} + \sigma_{1n}^2 r_{1n} + d_{16,n}\left(\ddot{r}_{11}r_{11}^2 + r_{11}p_{11}\ddot{p}_{11}\right) + d_{17,n}\left(\ddot{r}_{11}p_{11}^2 - r_{11}p_{11}\ddot{p}_{11}\right)$$
$$+d_{18,n}r_{11}\left(\dot{p}_{11}^2 + \dot{r}_{11}^2\right) + d_{19,n}\left(p_{11}\dot{p}_{11}\dot{r}_{11} - r_{11}\dot{p}_{11}^2\right) + \sum_{j=1}^{\infty}\left[d_{20,n}^{(j)}\left(\ddot{p}_{11}p_{2j} - \ddot{r}_{11}p_{2j}\right)\right.$$
$$+d_{21,n}^{(j)}\left(p_{11}\ddot{r}_{2j} - r_{11}\ddot{p}_{2j}\right) + d_{22,n}^{(j)}\left(\dot{p}_{11}\dot{r}_{2j} - \dot{r}_{11}\dot{p}_{2j}\right) + d_{23,n}^{(j)}\ddot{r}_{11}p_{0j}$$
$$\left. +d_{24,n}^{(j)}r_{11}\ddot{p}_{0j} + d_{25,n}^{(j)}\dot{r}_{11}\dot{p}_{0j}\right] = -(\ddot{\eta}_2 + \overline{g}\eta_4 + S_n\ddot{\eta}_4)\kappa_{1n}P_n, \quad n \geq 2, \tag{12}$$

де гідродинамічні коефіцієнти біля нелінійних членів є функціями безрозмірної глибини h. Коефіцієнти ξ_{Mi} виражають *сумарний ефект* різного типу *дисипативних* факторів. Їхня нижня межа асоціюється з ξ_{Mi}^{low}, тобто $\xi_{Mi} \geq \xi_{Mi}^{low}$.

У цьому розділі також побудовані періодичні розв'язки системи (4)-(12), проаналізована їхня стійкість і, завдяки цьому, описані всі можливі усталені коливання рідини при резонансному збуренні першої власної частоти (в рамках теорії Наріманова-Моісєєва з демпфуванням). *Доведено*, що періодичні розв'язки з точністю до вищих порядків малості співпадають з такими, які виникають при еліптичних горизонтальних (поступальних) рухах баку. Для побудованого розв'язку модальної системи (4)-(12) виконується

$$p_{11}(t) = a\cos(t) + \overline{a}\sin(t) + O(\varepsilon), \quad r_{11}(t) = \overline{b}\cos(t) + b\sin(t) + O(\varepsilon), \tag{13}$$

де $a, \overline{a}, b, \overline{b}$ – безрозмірні амплітудні параметри найнижчого асимптотичного порядку $O(\varepsilon^{1/3})$. Процедура побудови періодичних розв'язків модальної системи приводить до наступної *секулярної* системи нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a\left[\Lambda + m_1\left(a^2 + \overline{a}^2 + \overline{b}^2\right) + m_3 b^2\right] + \overline{a}(m_2\overline{b}b + \xi) = \varepsilon_x, \\ \overline{a}\left[\Lambda + m_1\left(a^2 + \overline{a}^2 + b^2\right) + m_3\overline{b}^2\right] + a(m_2\overline{b}b - \xi) = 0, \\ b\left[\Lambda + m_1\left(b^2 + \overline{b}^2 + \overline{a}^2\right) + m_3 a^2\right] + \overline{b}(m_2\overline{a}a - \xi) = \varepsilon_y, \\ \overline{b}\left[\Lambda + m_1\left(b^2 + \overline{b}^2 + a^2\right) + m_3\overline{a}^2\right] + b(m_2\overline{a}a + \xi) = 0, \end{cases} \tag{14}$$

де $\Lambda = \overline{\sigma}_{11}^2 - 1$, $m_2 = m_1 - m_3$, $\xi = 2\xi_{11}$, m_1, m_3 є функціями від h, а $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ – безрозмірні амплітудні параметри еліптичного збурення баку вздовж осей Ox та Oy відповідно. Виведений *критерій стійкості* побудова-ного періодичного розв'язку має вигляд нерівностей для складних алгебраїчних виразів відносно $a, \overline{a}, b, \overline{b}$ та $\Lambda = \overline{\sigma}_{11}^2 - 1$. Згідно із (13), усталені коливання поверхні рідини можна задати як

$$z = J_1(k_{11}r)\left[(a\cos\theta + \overline{b}\sin\theta)\cos t + (\overline{a}\cos\theta + b\sin\theta)\sin t\right] + o(\varepsilon^{2/3}), \tag{15}$$

що завжди визначає *кругову* хвилю, за винятком $ab = \overline{a}\overline{b}$, коли (15) описує *стоячу* хвилю.

Для недемпфованих коливань ($\xi = 0$) доведено, що $\overline{a} = \overline{b} = 0$ для $0 \leq \varepsilon_y / \varepsilon_x = \delta < 1$. Це *не так* для $\xi > 0$. З фізичної точки зору через те, що зсуви фаз не є константами. Якщо ввести інтегральні амплітуди та зсуви фаз

$$a = A\cos\psi,\ \overline{a} = A\sin\psi,\ \overline{b} = B\cos\varphi,\ b = B\sin\varphi, \tag{16}$$

то секулярна система (14) набуває еквівалентного вигляду

$$\begin{cases} A\left[\Lambda + m_1 A^2 + (m_3 - F)B^2\right] = \varepsilon_x \cos\psi, \\ B\left[\Lambda + m_1 B^2 + (m_3 - F)A^2\right] = \varepsilon_y \sin\varphi, \\ A\left[DB^2 + \xi\right] = \varepsilon_x \sin\psi,\quad B\left[DA^2 - \xi\right] = \varepsilon_y \cos\varphi, \end{cases} \tag{17}$$

де

$$F = -m_2\cos^2\alpha = -m_2 / (1 + C^2),\ \alpha = \varphi - \psi,$$

$$D = -m_2 \sin\alpha\cos\alpha = -m_2 C / (1 + C^2),\ C = \tan\alpha. \tag{18}$$

Подальший аналіз усталених хвиль у розділах 4 та 5 використовує секулярну систему (17).

Основним результатом третього розділу є теорема.

Теорема 3.1. *У рамках асимптотичної модальної теорії Наріманова-Моісєєва із демпфуванням (система (4)-(12)), усталені резонансні хвилі на вільній поверхні, з точністю до членів* $O(\varepsilon^{1/3})$ *і* $O(\varepsilon^{2/3})$ *включно (*$O(\varepsilon)$ *– безрозмірна амплітуда періодичного збурення баку за* $\eta_i(t),\ i = 1,2,4,5$*), є еквівалентні до резонансних хвиль, які виникають при відповідних рухах баку за горизонтальною еліптичною орбітою. При цьому на цей асимптотичний розв'язок впливає лише коефіцієнт демпфування* ξ_{11}*, чотири домінантні амплітуди* $a,\overline{a},b,\overline{b} = O(\varepsilon^{1/3})$ *описує секулярна система (14) (чи (17)), а стійкість залежить лише від значень амплітудних параметрів* a*,* $\overline{a}$*,* $\overline{b}$*,* b *та* $\Lambda = \overline{\sigma}_{11}^2 - 1$*. Можливими є лише кругові та стоячі хвилі, причому стоячі хвилі відповідають умові* $ab = \overline{a}\overline{b}$ *(чи C=0).*

У ***четвертому*** розділі доводиться теорема, яка дозволяє *конструктивно аналітично* (без чисельного розв'язування системи (17)) визначити A, B та ψ, φ як функції від $\Lambda = \overline{\sigma}_{11}^2 - 1$ для випадку поздовжніх періодичних резонансних збурень баку:

Теорема 4.1. *Для поздовжніх гармонічних (періодичних) збурень баку вздовж осі* Ox *(*$\varepsilon_x > 0$*,* $\varepsilon_y = 0$*) та за наявності ненульового малого демпфування (*$\xi > 0$*), існують лише два типи усталених резонансних хвиль, плоска (стояча) та кругова хвилі, причому*

(A) Стояча хвиля відповідає розв'язкам системи (17) вигляду $B = 0,\ A > 0$ *та* $C \neq 0$ *(зсув фаз* φ *не визначений), де* A *та* ψ *аналітично визначаються з рівнянь*

$$A^2 = [(\Lambda + m_1 A^2)^2 + \xi^2] = \varepsilon_x;\ 0 < A \leq \frac{\varepsilon_x}{\xi};\ \psi = \arccos \frac{A(\Lambda + m_1 A^2)}{\varepsilon_x}.$$

(B) Усталена кругова хвиля відповідає розв'язкам (17), які задовільняють $AB > 0,\ C \neq 0$*, де* $C,\ A$ *й* B *можна знайти, розв'язавши кубічне рівняння*

$$q_3 C^3 + q_2 C^2 + q_1 C + q_0 = 0$$

з коефіцієнтами

$$q_3 = \xi^3 (m_1 + m_3)^2 > 0,\ q_2 = 2\xi^2 \Lambda (m_3^2 - m_1^2),$$
$$q_1 = \xi[4\xi^2 m_1^2 + \Lambda^2 (m_1 - m_3)^2],\ q_0 = \varepsilon_x^2 m_1^2 (m_1 - m_3),$$

і підставляючи ці корені послідовно до

$$A^2 = \frac{\xi(1 + C^2)}{(m_3 - m_1)C} > 0, \qquad B^2 = -\frac{1}{m_1}[\Lambda + \frac{m_1 + m_3 C^2}{1 + C^2} A^2] > 0.$$

Теоретичні амплітудно-частотні й фазові криві проілюстровані на Рис. 2 (суцільні лінії позначають стійкі розв'язки, а штрихові – нестійкі). Якщо недемпфовані рухи рідини характеризуються дискретними значеннями ψ, для $\xi > 0$ зсув фази ψ є неперервною функцією від частоти. Теоретичні результати порівняно з експериментами французьких дослідників (Рис. 3). Показано, що значення коефіцієнту демпфування суттєво впливає не на амплітуди хвиль, а лише на точку H_2.

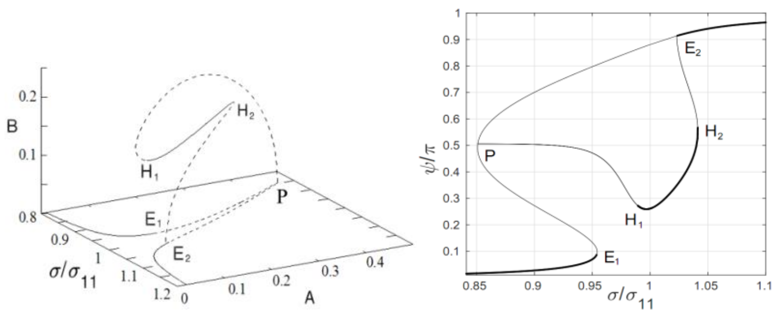

Рис. 2. Амплітудно-частотні й фазові криві для поздовжніх збурень баку.

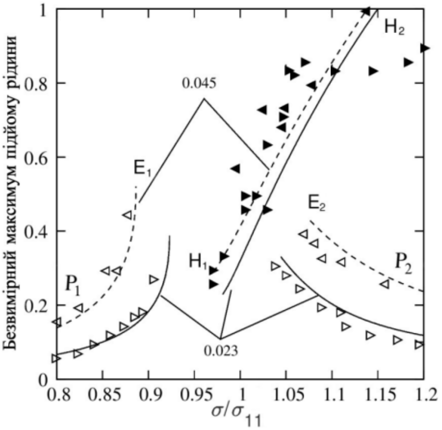

Рис. 3. Теоретичні та експериментальні (символи) максимальні підйоми усталених хвиль при поздовжніх збуреннях баку з амплітудами $\eta_{a1} = 0.023$ та 0.045.

Окрему увагу приділено дослідженню вливу дисипації на зсув фаз. Рис. 4 дає теоретичні й експериментальні зсуви фаз відповідно до експериментального випадку з роботи французьких дослідників. Порівняння фазової кривої й експериментальних вимірів показує, що коефіцієнт демпфування необхідно збільшувати з амплітудою кругової хвилі (від H_1 до H_2), щоб досягти відповідності теорії до експериментів. Цей факт пояснюють поверхневі явища, зокрема, дефрагментація вільної поверхні, вкладом яких у

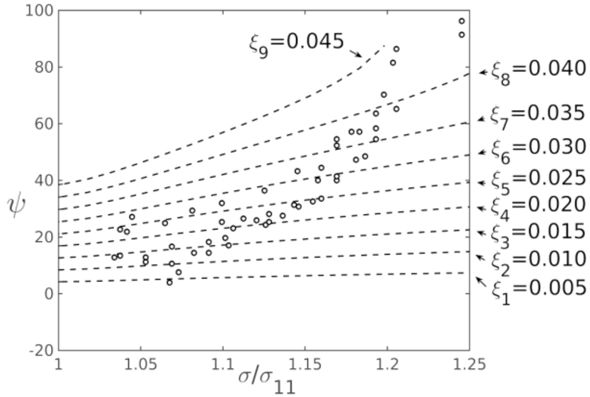

Рис. 4. Експериментальні значення зсуву фази ψ (позначені кругами у градусах) для стійкої кругової хвилі (H_1H_2 на Рис. 2 та 3) порівняно з їхніми теоретичними оцінками для різних значень ξ; $h = 1.5$ і горизонтальна поздовжня гармонічна амплітуда збурення $\eta_{1a} = 0.045$.

дисипацію не можна нехтувати.

Основним результатом ***п'ятого*** розділу є розв'язання протиріччя між відомими експериментальними даними стосовно резонансних коливань рідини в біореакторах (*при кругових орбітальних збуреннях існують лише кругові хвилі за напрямком руху баку*) й теоретичними результатами в рамках теорії недемпфованих коливань рідини (*завжди існують стійкі кругові хвилі як за-, так і проти напрямку збурення баку*). *Доведено*, що для орбітальних (еліптичних) збурень баку існують лише кругові хвилі (**Твердження** 5.1). Чисельно-аналітичні дослідження також доводять зникнення протилежно направлених до руху баку кругових хвиль, коли орбітальні збурення баку наближаються до кругових.

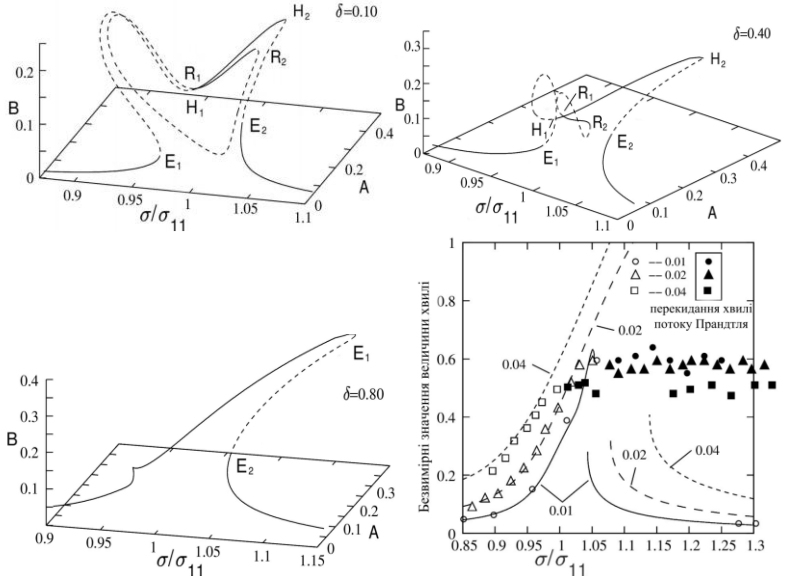

Рис. 5. Амплітудно-частотні криві для трьох співвідношень осей еліпсу збурення значень δ. Порівняння теорії й експериментів для випадку кругових збурень баку (криві позначені значеннями амплітуд збурення; заповнені символи відповідають експериментальним спостереженням, під час яких були помітні розриви суцільності вільної поверхні).

На Рис. 5 показані типові амплітудно-частотні криві у просторі $(\sigma / \sigma_{11}, A, B)$ для трьох відношень осей еліпсу збурення δ ($h = 1.5$, $\xi = 0.0128$ і $\eta_{1a} = 0.0066$). Перехід від поздовжніх ($\delta = 0$) до еліптичних збурень баку розділяє гілку $E_1 P(H_1 H_2) E_2$ на дві: перша, $E_1 H_1 H_2 E_2$, відповідальна за співнаправлену (з еліптичними збуреннями баку) кругову хвилю, а друга, $R_1 R_2$ (має колоподібну форму), відповідальна за протилежно спрямовану кругову хвилю. Для відносно малих δ існує діапазон частот між E_1 та H_1, де очікуються нерегулярні (хаотичні) хвилі. Із збільшенням δ (перехід до кругового збурення баку) гілка $R_1 R_2$ і зона хаотичних рухів зникають, тобто протилежно спрямована до збурень баку кругова хвиля стає неможливою.

Для кругового орбітального збурення баку дано порівняння теоретичних значень амплітуди хвилі із відомими експериментальними замірами швейцарських дослідників (останній графік на Рис. 5). Рисунок демонструє узгодження в діапазоні частот, де експериментальні спостереження не фіксували розриву суцільності вільної поверхні.

ВИСНОВКИ

Розглядаючи динаміку рідини в циліндричному резервуарі кругового перерізу як об'єкт аналітичної механіки, використовуючи варіаційний формалізм Бейтмена-Люка та модальну систему Луковського-Майлза, яка є аналогом рівнянь Ейлера-Лагранжа для такої механічної системи й пов'язує нескінченний набір гідродинамічних узагальнених координат та швидкостей, отримані аналітичні періодичні розв'язки, досліджена їх стійкість і прокласифіковані відповідні усталені резонансні коливання рідини в рамках наближення Наріманова-Моісєєва для випадку, коли на усталені рухи впливає демпфування.

Отримані такі основні результати:

1. Побудовані повні (в математичному сенсі) нелінійні рівняння типу Наріманова-Моісєєва, що зв'язують нескінченну кількість узагальнених гідродинамічних координат та описують резонансні

коливання рідини з дисипацією за умови періодичних тривимірних рухів баку з частотою, близькою до першої власної частоти.

2. Виведені асимптотичні формули для оцінки коефіцієнтів демпфування в механічній системі, пов'язаних із в'язким ламінарним шаром на змочених стінках баку та внутрішнім в'язким тертям. Встановлено, що вплив дисипації є важливим для $0.05m \lesssim R_0 \lesssim 0.3m$ (R_0 – радіус баку), що відповідає типовим розмірам біореактора.
3. Для довільних періодичних рухів баку побудовані точні аналітичні періодичні розв'язки модальної системи типу Наріманова-Моісєєва, проаналізована їхня стійкість.
4. Доведено, що з точністю до другого порядку малості такі періодичні розв'язки (а, отже, й відповідні усталені хвилі) є математично еквівалентними до розв'язків, які виникають при горизонтальних еліптичних рухах баку з відповідними амплітудами.
5. Показано, що, окрім випадку поздовжніх горизонтальних збурень баку, всі усталені хвилі є круговими, які виникають за-, чи проти еліптичних траєкторій руху баку. Доведено, що, починаючи з деякої величини співвідношень осей еліпсу збурень, наявність дисипації унеможливлює існування кругових хвиль, протилежно направлених рухам баку.
6. Побудовані типові амплітудно-частотні характеристики. Описано вплив дисипації на зсув фаз.
7. Результати валідовані порівнянням із експериментами різних авторів. Проаналізовані діапазони застосування побудованої аналітичної теорії. Зокрема, вказано на необхідність збільшувати коефіцієнти демпфування із збільшенням амплітуди кругової хвилі.

**Основні положення дисертації відображено
у таких публікаціях автора:**

1. Raynovskyy I.A. Damped steady-state resonant sloshing in a circular base container / I.A. Raynovskyy, A.N. Timokha // Fluid Dynamics Research. — 2018. — **50**, No. 4. Paper ID 045502. — P. 1–27.
2. Raynovskyy I.A. Steady-state resonant sloshing in an upright cylindrical container performing a circular orbital motion / I. Raynovskyy, A. Timokha // Mathematical Problems in Engineering. — 2018. — **2018**, Paper ID 5487178. — P. 1–9.

3. Raynovskyy I.A. Resonant liquid sloshing in an upright circular tank performing a periodic motion / I.A. Raynovskyy, A.N. Timokha // Journal of Numerical and Applied Mathematics. – 2016. – No 2 **(122)**. — P. 71–82.
4. Raynovskyy I.A. Damped resonant steady-state sloshing in an upright circular tank / I.A. Raynovskyy, A.N. Timokha // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2017. — **14**, № 2. — P. 180–204.
5. Timokha A.N. The damped sloshing in an upright circular tank due to an orbital forcing / A.N. Timokha, I.A. Raynovskyy // Доповіді Національної академії наук України. —2017. —№ 10. — P. 48–53.
6. Tymokha A. Resonant steady-state sloshing in upright tanks performing a three-dimensional periodic motion / Тимоха О.М., Райновський І.А. // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Серія "Фізико-математичні науки". —2017. —№ 3. — С. 225–229.
7. Timokha A.N. Resonant Steady-State Sloshing in Upright Tanks: Effect of Three-Dimensional Excitations and Viscosity / A.N. Timokha, I.A. Raynovskyy // ASME 2018, 37th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering. — **Vol. 9**, Paper No. OMAE2018-77534. Madrid, Spain, June 17–22, 2018; doi: 10.115/OMAE2018-77534.
8. Raynovskyy I.A. // The damping effect on steady-state resonant sloshing in an upright circular tank / I.A. Raynovskyy // Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження Ю.О.Митропольського, 7–10 червня 2017, Київ, Україна, — С. 52.
9. Raynovskyy I.A. // Steady-state resonant damped sloshing in upright circular tank / I.A. Raynovskyy // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2017", 23–25 травня 2017 р., Львів, – http://iapmm.lviv.ua/chyt2017/abstracts/Raynovskyy.pdf.
10. Raynovskyy I.A. // Resonant steady-state sloshing in upright tanks performing a three-dimensional periodic motion / I.A. Raynovskyy// IV Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки" (28–30 серпня, 2017, м. Київ, Україна), — С. 92.

АНОТАЦІЇ

Райновський І.А. Асимптотична модальна теорія Наріманова-Моісєєва усталених демпфованих коливань в циліндричному баці. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 – теоретична механіка. – Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена розвитку методів аналітичної механіки та асимптотичних методів нелінійної механіки для аналізу усталених резонансних хвильових рухів рідини у вертикальному резервуарі кругового перерізу за наявності демпфування. Шляхом введення (нескінченого числа) узагальнених координат і швидкостей, застосування варіаційних принципів механіки й рівнянь Ейлера-Лагранжа другого роду у формі Майлза-Луковського, а також використання асимптотики Наріманова-Моісєєва, вихідна крайова задача із вільною поверхнею зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно введених узагальнених координат. Система ефективно наближує резонансні рухи даної механічної системи, коли частота періодичних рухів баку є близькою до першої власної частоти коливань рідини. Врахувавши в'язке демпфування, побудовані й проаналізовані періодичні розв'язки системи, що дозволило описати всі класи усталених хвиль при орбітальних тривимірних резонансних рухах баку.

Ключові слова: усталені коливання, стійкість, узагальнені координати, модальна система Наріманова-Моісєєва, демпфування, амплітудно-частотні характеристики, зсуви фаз.

Райновский И.А. Асимптотическая модальная теория Нариманова-Моисеева устоявшихся демпфированых колебаний в цилиндрическом баке. - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.01 – теоретическая механика. – Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

Диссертация посвящена развитию методов аналитической механики и асимптотических методов нелинейной механики для анализа установившихся резонансных волновых движений жидкости в вертикальном резервуаре кругового сечения при наличии демпфирования. Путем введения (бесконечного числа) обобщенных координат и скоростей, применения вариационных принципов механики и уравнений Эйлера-Лагранжа второго рода в форме Майлза-Луковского, а также использования асимптотики Нариманова-Моисеева, исходная краевая задача со свободной поверхностью сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно введенных обобщенных координат. Система эффективно приближает резонансные движения данной механической системы, когда частота периодических движений бака близка к первой собственной частоты колебаний жидкости. Учтя вязкое демпфирование, построены и проанализированы периодические решения системы, что позволило описать все классы волн при орбитальных трехмерных резонансных движениях бака.

Ключевые слова: устоявшиеся колебания, устойчивость, обобщенные координаты, модальная система Нариманова-Моисеева, демпфирование, амплитудно-частотные характеристики, сдвиг фаз.

Raynovskyy I.A. An asymptotic modal Narimanov-Moiseev theory of the damped steady-state sloshing in an upright cylindrical tank. – Manuscript.

Thesis submitted for the Degree of Candidate of Physics and Mathematics in speciality 01.02.01 – Theoretical mechanics. – Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

The Thesis develops methods of analytical mechanics and asymptotic methods of nonlinear mechanics for studying the damped steady-state sloshing in an upright cylindrical tank. By introducing (an infinite number) of the generalised coordinates and velocities, by applying variational principles of analytical mechanics and the Euler-Lagrange equations of the second kind in the Miles-Lukovsky's form, as well as by using the Narimanov-Moiseev asymptotics, the original free-surface problem reduces to a system of ordinary differential equations with respect to the introduced generalised coordinates. The system effectively approximates resonance motions of the present mechanical system when the frequency of periodic motions of the tank is close to the lowest natural sloshing frequency. Accounting for the viscous damping, periodic solutions of the system are constructed and analysed. This makes it possible to describe all classes of the steady-state sloshing in the tank during its orbital three-dimensional resonance motions.

The relevance of this direction of theoretical studies is confirmed by conclusions made in the introduction and the first section of the Thesis. An emphasis is placed on the nonlinear multimodal method, its genesis, development, generalisation and open problems.

Section 2 gives details of the nonlinear multimodal method, which, by using the Bateman-Luke variational formalism, makes it possible to go from the free-surface problem of the liquid sloshing dynamics to an infinite-dimensional system of nonlinear ordinary differential (modal) Miles-

Lukovsky equations with respect to the generalised coordinates and velocities of the hydrodynamic system.

In the main theoretical section 3, asymptotic formulas are derived to define the damping coefficients. Additional qualities, which introduce the linear damping in the mechanical system, are included into the nonlinear modal equations of the Narimanov-Moiseev type. Analytical asymptotic periodic solutions of the latter equations are derived. The stability of these solutions is investigated. The problem on deriving the analytical solutions reduces to a system of secular equations with respect to four first-order amplitude parameters, $a, \bar{a}, b$ and $\bar{b}$, or, alternatively, their analogy in terms of integral amplitudes A, B and the phase-lags ψ, φ.

Section 4 contains the theorem, which makes it possible to find, constructively and analytically, the amplitudes A, B and the phase-lags ψ, φ in the presence of a non-zero damping and for the longitudinal periodic resonance tank forcing. Parametric studies of the wave amplitude response curves are carried out and typical bifurcation graphs are drawn. The results are validated by comparison with known experiments of measurements.

The main result of section 5 consists of resolving a contradiction between well-known experimental results on resonant sloshing in bioreactors (orbital tank forcing) and existing theoretical studies.

Keywords: steady-state sloshing, stability, generalised coordinates, multimodal Narimanov-Moiseev system, damping, amplitude response curves, phase-lags.