

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Райновський Ігор Андрійович

УДК 532.595

ДИСЕРТАЦІЯ

**Асимптотична модальна теорія
Наріманова–Моїсєєва усталених
демпфованих коливань в циліндричному
баці**

01.02.01 — теоретична механіка

113 — прикладна математика

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне
джерело _____ І.А. Райновський

Науковий керівник: **Тимоха Олександр Миколайович,**
доктор фізико-математичних наук, старший науко-
вий співробітник, член-кореспондент НАН України

Київ — 2018

АНОТАЦІЯ

Райновський І.А. Асимптотична модальна теорія Наріманова-Моїсєєва усталених демпфованих коливань рідини в циліндричному баці. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.02.01 – "Теоретична механіка" (113 – "Прикладна математика"). — Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена розвитку методів аналітичної механіки та асимптотичних методів нелінійної механіки для аналізу усталених резонансних хвильових рухів рідини у вертикальному резервуарі кругового перерізу за наявності демпфування. Шляхом введення (нескінченного числа) узагальнених координат та швидкостей, застосування варіаційних принципів механіки та рівнянь Ейлера-Лагранжа другого роду у формі Майлза-Луковського, а також використання асимптотики Наріманова-Моїсєєва, вихідна крайова задача із вільною поверхнею зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно введених узагальнених координат. Система ефективно наближує резонансні рухи даної механічної системи, коли частота періодичних рухів баку є близькою до першої власної частоти коливань рідини. Врахувавши в'язке демпфування, побудовано та проаналізовано періодичні розв'язки системи, що дозволило описати всі класи усталених хвиль при орбітальних тривимірних резонансних рухах баку.

Тематика наукових досліджень дисертаційної роботи пов'язується із планом наукових досліджень відділу математичних проблем механіки та теорії керування Інституту математики НАН України.

Дисертація складається із вступу, п'яти розділів, висновку і списку використаних наукових джерел із 233 найменувань. Загальний обсяг ди-

сертації становить 161 сторінку. В роботі міститься 18 рисунків.

Актуальність даного напрямку теоретичних досліджень підтверджується висновками із вступу та першого розділу дисертації, де наведено огляд літератури з питань аналітичних методів теоретичної механіки стосовно механічних систем із нескінченним числом ступенів вільності, до яких належить досліджувана задача. Акцент зроблено на нелінійному модальному методі, його виникненню, розвитку, узагальненню та відкритим питанням. Зокрема, показано, що відкритою теоретичною проблемою залишається аналіз усталених хвильових резонансних рухів рідини в циліндричних баках біореакторів, які рухаються за складною орбітальною траєкторією, коли не можна знехтувати в'язкою дисипацією. Цій проблемі присвячено дослідження дисертаційної роботи.

Розділ 2 наводить деталі нелінійного модального методу, який, використовуючи варіаційний принцип Бейтмена-Люка, дозволяє перейти від крайової задачі із вільною поверхнею теорії коливання рідини до нескінченновимірної системи нелінійних звичайних диференціальних (модальних) рівнянь Майлза-Луковського відносно узагальнених координат та швидкостей гідродинамічної системи. Основним результатом розділу є доведення твердження, що за умов малості зовнішніх резонансних збурень циліндричного резервуара за чотирма ступенями вільності (виключаючи кругові та вертикальні), система рівнянь Майлза-Луковського допускає спеціальну аналітичну форму, яка може бути базою для побудови наближених нелінійних модальних теорій, включаючи теорію Наріманова-Моїсєєва.

В основному теоретичному розділі 3 виведено асимптотичні формули (в термінах числа Галілея) для оцінки коефіцієнтів демпфування, які відображають в'язку дисипацію, пов'язану із ефектом ламінарного поверхневого шару на змочених стінках рідини та внутрішнім тертям. Показано, що демпфування є важливим для радіусів резервуара

$0.05m \lesssim R_0 \lesssim 0.3m$, що відповідає розмірам контейнерів біореакторів. Додаткові члени, що відображають лінійне демпфування в механічній системі, введено до нелінійної модальної системи рівнянь типу Наріманова-Моїсеєва. Побудовано аналітично асимптотичні періодичні розв'язки останньої системи, які асоціюються із усталеними резонансними хвильовими рухами при періодичних рухах баку із малою амплітудою. Досліджено стійкість цих розв'язків. Задача побудови аналітичних розв'язків зводиться до розв'язування системи секулярних (нелінійних алгебраїчних) рівнянь відносно чотирьох амплітудних параметрів першого порядку малості, a, \bar{a}, \bar{b}, b , чи їх аналогів в термінах інтегральних амплітуд A, B та зсувів фаз ψ, φ . Основним результатом розділу є Теорема 3.1, яка стверджує, що в рамках наближення Наріманова-Моїсеєва, всі можливі усталені резонансні хвилі на вільній поверхні рідини з точністю до членів другого порядку малості включно є еквівалентними деякому класу усталених хвиль в баці, що рухається за еліптичною горизонтальною орбітою; при цьому демпфування безпосередньо впливає лише на члени першого порядку малості, а стійкість залежить лише від значень амплітурних параметрів a, \bar{a}, \bar{b}, b .

В четвертому розділі доводиться теорема, яка дозволяє конструктивно аналітично (без чисельного розв'язування секулярної системи з розділу 2) знайти значення A, B та ψ, φ за наявності ненульового демпфування для випадку поздовжніх періодичних резонансних збурень баку. Проведено параметричні дослідження амплітудно-частотних характеристик, побудовано типові біфуркаційні криві. Показано, що демпфування слабо впливає на діапазони стійкості та на величини амплітуд A, B . Результати валідовано порівнянням із відомими експериментами. В той же час, продемонстровано, що демпфування якісно впливає на зсуви фаз ψ, φ . Порівняння з експериментами також вказує на те, що демпфування повинно рости із амплітудою кругових усталених хвиль (для узгоджен-

ня теоретичних зсувів фаз із експериментальними результатами). Дано фізичне пояснення цього феномену.

Основним результатом розділу 5 є усунення протиріччя між відомими експериментальними результатами стосовно резонансних коливань рідини в біореакторах (орбітальні збурення) та існуючими теоретичними дослідженнями. Показано, що для таких збурень існують лише кругові хвилі, а наявність ненульового демпфування робить неможливим кругові хвилі проти напрямку еліптичних збурень, починаючи від деякого співвідношення між осями еліпсу збурення; зокрема, протинаправлені кругові хвилі відсутні при кругових орбітах баку.

Додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Практичне значення одержаних результатів. Одержані в дисертації нові результати мають, в основному, теоретичне значення. Вони зацікавлять фахівців, що працюють в галузі теоретичної механіки багатомірних систем.

Ключові слова: усталені коливання, стійкість, узагальнені координати, модальна система Наріманова-Моїсеєва, демпфування, амплітудно-частотні характеристики, зсуви фаз.

Список публікацій здобувача за темою дисертації:

1. Raynovskyy I.A. Damped steady-state resonant sloshing in a circular base container / I.A. Raynovskyy, A.N. Timokha // Fluid Dynamics Research. — 2018. — **50**, No. 4. Paper ID 045502. — P. 1–27.
2. Raynovskyy I.A. Steady-state resonant sloshing in an upright cylindrical container performing a circular orbital motion / I. Raynovskyy, A. Timokha // Mathematical Problems in Engineering. — 2018. — **2018**, Paper ID 5487178. — P. 1–9.

3. Raynovskyy I.A. Resonant liquid sloshing in an upright circular tank performing a periodic motion / I.A. Raynovskyy, A.N. Timokha // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2016. — No 2 (**122**). — P. 71–82.
4. Raynovskyy I.A. Damped resonant steady-state sloshing in an upright circular tank / I.A. Raynovskyy, A.N. Timokha // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2017. — **14**, № 2. — P. 180–204.
5. Timokha A.N. The damped sloshing in an upright circular tank due to an orbital forcing / A.N. Timokha, I.A. Raynovskyy // Доповіді Національної академії наук України. — 2017. — № 10. — P. 48–53.
6. Tymokha A. Resonant steady-state sloshing in upright tanks performing a three-dimensional periodic motion / Тимоха О.М., Райновський І.А. // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Серія "Фізико-математичні науки". — 2017. — № 3. — С. 225–229.
7. Timokha A.N. Resonant Steady-State Sloshing in Upright Tanks: Effect of Three-Dimensional Excitations and Viscosity / A.N. Timokha, I.A. Raynovskyy // ASME 2018, 37th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering. — **Vol. 9**, Paper No. OMAE2018-77534. Madrid, Spain, June 17 – 22, 2018; doi: 10.1115/OMAЕ2018-77534.
8. Raynovskyy I.A. // The Damping Effect on Steady-State Resonant Sloshing in an Upright Circular Tank / I.A. Raynovskyy // Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження Ю.О. Митропольського, 7–10 червня 2017, Київ, Україна, — С. 52.
9. Raynovskyy I.A. // Steady-State Resonant Damped Sloshing in Upright Circular Tank / I.A. Raynovskyy // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2017", 23 – 25 травня 2017 р., Львів, — <http://iapmm.lviv.ua/chyt2017/abstracts/Raynovskyy.pdf> .

10. Raynovskyy I.A. // Resonant steady-state sloshing in upright tanks performing a three-dimensional periodic motion / I.A. Raynovskyy // IV Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки" (28 – 30 серпня, 2017, м. Київ, Україна), — С. 92.

ABSTRACT

Raynovskyy I.A. An asymptotic modal Narimanov-Moiseev theory of the damped steady-state sloshing in an upright cylindrical tank. — Qualifying scientific work on the right of manuscript.

Thesis submitted for the Degree of Candidate of Physics and Mathematics (Doctor of Philosophy) in speciality 01.02.01 — Theoretical Mechanics (113 – Applied Mathematics). — Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

The Thesis develops methods of analytical mechanics and asymptotic methods of nonlinear mechanics for studying the damped steady-state sloshing in an upright cylindrical tank. By introducing (an infinite number) of the generalised coordinates and velocities, by applying variational principles of analytical mechanics and the Euler-Lagrange equations of the second kind in the Miles-Lukovsky's form, as well as by using the Narimanov-Moiseev asymptotics, the original free-surface problem reduces to a system of ordinary differential equations with respect to the introduced generalised coordinates. The system effectively approximates resonance motions of the present mechanical system when the frequency of periodic motions of the tank is close to the lowest natural sloshing frequency. Accounting for the viscous damping, periodic solutions of the system are constructed and analysed. This makes it possible to describe all classes of steady-state sloshing in the tank during its orbital three-dimensional resonance motions.

The subject of scientific researches of the dissertation work is associated with the research projects of the Department of Mathematical Problems of Mechanics and Control Theory of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine.

The Thesis consists of introduction, five sections, conclusion and bibliography, which contains 233 references. The total Thesis volume consists of

161 pages; it contains 18 figures.

The relevance of this direction of theoretical studies is confirmed by conclusions made in the introduction and the first section of the Thesis, which provides a literature survey regarding analytical methods of the theoretical mechanics applied to mechanical systems with an infinite number of degrees of freedom, to which the studied system belongs. An emphasis is placed on the nonlinear multimodal method, its genesis, development, generalization and open problems. In particular, it has been shown that the analytical modeling of the steady-state sloshing in cylindrical tanks of bioreactors moving along a complex orbital trajectory, when damping can not be neglected, belongs to the open theoretical problems. The Thesis is devoted to studying this problem.

Section 2 gives details of the nonlinear multimodal method, which, by using the Bateman-Luke variational formalism, makes it possible to go from the free-surface problem of the liquid sloshing dynamics to an infinite-dimensional system of nonlinear ordinary differential (modal) Miles-Lukovsky equations with respect to the generalised coordinates and velocities of the hydrodynamic system. The main result of the section consists of proving the proposition, which states that, when assuming a small-magnitude external resonance excitation of the cylindrical tank with four degrees of freedom (excluding yaw and heave), the Miles-Lukovsky equations allow for a specific analytic form; the equations could be a base for constructing approximate nonlinear modal theories, including the Narimanov-Moiseev theory.

In the main theoretical section 3, asymptotic formulas (in terms of the Galileo number) are derived to define the damping coefficients, which imply dissipation associated with the laminar viscous layer on the wetted tank surface and the bulk viscosity. It is shown that the damping is important for the radii in the range $0.05m \lesssim R_0 \lesssim 0.3m$. The dimensions are consistent with dimensions of bioreactors. Additional qualities, which introduce the linear

damping in the mechanical system, are included into the nonlinear modal equations of the Narimanov-Moiseev type. Analytical asymptotic periodic solutions of the latter equations are derived. The solutions are associated with the steady-state resonant sloshing due to periodic motions of the tank performed with a small amplitude. The stability of these solutions is investigated. The problem on deriving the analytical solutions reduces to a system of secular (nonlinear algebraic) equations with respect to four first-order amplitude parameters, a, \bar{a}, \bar{b} and b , or, alternatively, their analogy in terms of integral amplitudes A, B and phase-lags ψ, φ . The main result of the section in Theorem 3.1, which states that, within the framework of the Narimanov-Moiseev approximation, the admissible resonant waves on the free surface, up to the second order of the smallness, are equivalent to a class of stable waves in tanks moving along an elliptical horizontal orbit; the damping directly affects only the first order of the smallness, and the stability depends only on the amplitude parameters a, \bar{a}, \bar{b} and b .

Section 4 contains the theorem, which makes it possible to find, constructively and analytically (without the numerical solving of the secular system from section 2), the amplitudes A, B and the phase-lags ψ, φ in the presence of a non-zero damping and for the longitudinal periodic resonance tank forcing. Parametric studies of the wave amplitude response curves are carried out and typical bifurcation graphs are drawn. It is shown that the damping causes an almost negligible effect on the ranges of stability and the amplitudes A and B . The results are validated by comparison with known experiments of measurements. At the same time it has been demonstrated that the damping substantially affects the phase-lags ψ and φ . Comparison with the measurements indicates that the damping should increase with increasing amplitude of the rotary wave (to fit the experimental data). A physical treatment of the phenomenon is given.

The main result of Section 5 consists of resolving a contradiction between

well-known experimental results on resonant sloshing in bioreactors (orbital tank forcing) and existing theoretical studies. It is shown that, for such the forcing, there are only swirling-type waves, and a small nonzero damping makes the counterdirected ones (to the elliptic tank forcing swirling) impossible, starting from a certain ratio between the axes of the ellipse. In particular, the counter-directed swirling is always absent for the circular orbital tank excitation.

Appendix contains the applicant publication list related to the Thesis and informs where the obtained results were reported and discussed.

The practical significance of the results. The results, which are obtained in the Thesis, have mainly theoretical character. They could be of interest for researchers working in the field of the theoretical mechanics of multidimensional systems.

Keywords: steady-state sloshing, stability, multimodal Narimanov-Moiseev system, damping, amplitude response curves, phase-lags.

Applicant's publications list concerning the topic of the thesis:

1. Raynovskyy I.A. Damped steady-state resonant sloshing in a circular base container / A.N. Timokha, I.A. Raynovskyy // Fluid Dynamics Research. — 2018. — **50**, No. 4. Paper ID 045502. — P. 1–27.
2. Raynovskyy I.A. Steady-state resonant sloshing in an upright cylindrical container performing a circular orbital motion / I. Raynovskyy, A. Timokha // Mathematical Problems in Engineering. — 2018. — **2018**, Paper ID 5487178. — P. 1–9.
3. Raynovskyy I.A. Resonant liquid sloshing in an upright circular tank performing a periodic motion / I.A. Raynovskyy, A.N. Timokha // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2016. — No 2 (**122**). — P. 71–82.

4. Raynovskyy I.A. Damped resonant steady-state sloshing in an upright circular tank / I.A. Raynovskyy, A.N. Timokha // Transactions of the Institute of Mathematics of the NASU. — 2017. — **14**, № 2. — P. 180–204.
5. Timokha A.N. The damped sloshing in an upright circular tank due to an orbital forcing / A.N. Timokha, I.A. Raynovskyy // Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. —2017. —№ 10. — P. 48–53.
6. Tymokha A. Resonant steady-state sloshing in upright tanks performing a three-dimensional periodic motion / Тимоха О.М., Райновський I.A. // Visn. Taras Shevchenko Univ. of Kyiv, Series: Physics and Mathematics. —2017. —№ 3. — С. 225–229.
7. Timokha A.N. Resonant Steady-State Sloshing in Upright Tanks: Effect of Three-Dimensional Excitations and Viscosity / A.N. Timokha, I.A. Raynovskyy // ASME 2018, 37th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering. — **Vol. 9**, Paper No. OMAE2018-77534. Madrid, Spain, June 17 – 22, 2018; doi: 10.1115/OMAE2018-77534.
8. Raynovskyy I.A. // The Damping Effect on Steady-State Resonant Sloshing in an Upright Circular Tank / I.A. Raynovskyy // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academian of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu.O. Mitropolshiy, June 7–10, Kyiv, Ukraine, 2017, P. 52.
9. Raynovskyy I.A. // Steady-State Resonant Damped Sloshing in Upright Circular Tank / I.A. Raynovskyy // The Conference of Young scientists "Pidstryhach Readings – 2017", May 23 – 25, 2017, Lviv, Ukraine, — <http://iapmm.lviv.ua/chyt2017/abstracts/Raynovskyy.pdf>.
10. Raynovskyy I.A. // Resonant steady-state sloshing in upright tanks performing a three-dimensional periodic motion / I.A. Raynovskyy//

IV International Conference of Science "Modern Problems of Mechanics" (August 28 – 30, 2017, Kyiv, Ukraine), P. 92.

ЗМІСТ

ВСТУП	17
Розділ 1. Огляд літератури за темою дисертації	23
1.1. Методи аналітичної механіки в задачах про рух рідини в резервуарах	23
1.2. Виникнення лінійного та нелінійного модальних методів	25
1.3. Нелінійне модальне моделювання як база аналітичних досліджень	32
1.4. Нелінійний модальний метод для осесиметричних баків	37
1.5. Основні виклики, відкриті питання модального моделювання в контексті досліджень даної дисертаційної роботи	40
Розділ 2. Диференціальна, варіаційна та модальна постановки задачі	42
2.1. Крайова задача з вільною поверхнею	44
2.1.1. Рівняння руху рідини.	44
2.1.2. Крайові умови.	46
2.1.3. Збереження маси (об'єму).	48
2.1.4. Початкові умови та умови періодичності.	49
2.2. Варіаційне формулювання Люка-Бейтмена	50
2.3. Загальні нелінійні модальні рівняння Майлза-Луковського	52
2.3.1. Модальне представлення вільної поверхні та потенціалу швидкості.	52
2.3.2. Модальна система (рівняння Ейлера-Лагранжа), яка впливає із формулювання Люка-Бейтмена.	54
2.4. Спеціальна форма модальної системи Майлза-Луковського (2.40), (2.41) для вертикального циліндричного кругового баку, що виконує осциляційні рухи з малою амплітудою	58

2.5. Висновки до розділу	65
------------------------------------	----

Розділ 3. Нелінійна асимптотична модальна теорія типу Наріманова-

Моїсеєва резонансних коливань рідини з урахуванням демпфування	66
--	----

3.1. Найбільш загальний випадок адаптивної асимптотичної модальної системи	67
--	----

3.2. Коефіцієнти лінійного демпфування для власних форм коливання рідини	78
--	----

3.3. Модальні рівняння типу Наріманова-Моїсеєва із демпфуванням	85
---	----

3.4. Асимптотичні періодичні розв'язки та відповідні усталені хвилі, їх стійкість	89
---	----

3.4.1. Про тривимірні періодичні рухи баку.	89
---	----

3.4.2. Компоненти періодичного розв'язку порядків $O(\epsilon^{1/3})$ та $O(\epsilon^{2/3})$	92
--	----

3.4.3. Типи усталених хвиль та їх стійкість.	93
--	----

3.4.4. Альтернативна форма секулярної системи рівнянь (3.46).	94
---	----

3.4.5. Про вклад форм третього порядку малості.	95
---	----

3.4.6. Стійкість.	98
---------------------------	----

3.5. Висновки до розділу	99
------------------------------------	----

Розділ 4. Усталені резонансні коливання рідини при поздовжньому

періодичному збуренні контейнера	102
----------------------------------	-----

4.1. Класифікація усталених резонансних хвиль, типи розв'язків системи (3.51) та відповідні амплітудно-частотні характеристики	103
--	-----

4.2. Порівняння з експериментами для амплітудних характеристик усталених рухів рідини	108
---	-----

4.3. Вплив дисипації на зсув фаз	111
--	-----

4.4. Висновки до розділу	115
------------------------------------	-----

Розділ 5. Усталені хвильові режими для орбітальних збурень баку	117
5.1. Чисельно-аналітичні розв'язки секулярної системи (3.51) та властивості усталених хвиль	118
5.2. Амплітудно-частотні характеристики для еліптичних збурень	121
5.3. Зсув фаз для випадку еліптичних орбітальних збурень	127
5.4. Кругові орбітальні збурення баку	128
5.5. Висновки розділу	132
ВИСНОВКИ	134
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	136

ВСТУП

Актуальність теми. Задача про резонансні коливання рідини у вертикальних циліндричних баках кругового перерізу (із практичної точки зору) набула популярності в середині ХХ століття у зв'язку із інженерією ракетокосмічної техніки (баки з паливом), контейнерів із великою масою рідини (нафта, водонапірні баки), а також танкерів із скрапленим газом. Останні десять років ця задача стає актуальною у контексті розвитку біотехнологій (біореактори), а також фармацевтичної промисловості, що пов'язується із необхідністю врахування ряду специфічних реалогічних властивостей руху рідини, зокрема, їх в'язкого демпфування. Крім того, контейнери біо- та фармтехнологій рухаються за складною та суттєво тривимірною траєкторією, циклічно, на великому проміжку часу, що ставить проблему визначення всіх можливих усталених періодичних хвиль та аналізу їх стійкості.

Традиційним для аналізу резонансних коливань в'язкої рідини в баках є шлях, що базується на чисельних методах розв'язування відповідних крайових задач для рівняння Нав'є-Стокса. Цей підхід є малоприменим для визначення всіх можливих усталених рухів рідини (неоднозначність розв'язку) та аналітичного дослідження їх стійкості. Природними для дослідження усталених хвильових рухів є методи аналітичної механіки, які використовують наближені математичні моделі у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь відносно гідродинамічних узагальнених координат цієї механічної системи. Такі методи було започатковано у 60-70х роках минулого століття в роботах М.М. Моїсеєва, Т.С. Наріманова, І.О. Луковського, Р.Д. Докучаєва, Б.І. Рабіновича, Г.М. Мікішева, В.В. Румянцева, Т.Н. Абрамсона, Н. Кана, Г. Хаттона та Дж. Майлза. Використовуючи поняття власних форм коливань рідини (вперше виникло в роботі В. Остроградського), ці вчені розглядали вихідну гідродинамічну проблему як задачу аналітичної механіки для систем із нескінчен-

ною кількістю ступенів вільності. Вони ввели узагальнені координати, які відповідають за збурення власних форм, а також, використовуючи варіаційні принципи механіки, побудували декілька типів наближених математичних моделей (модальних рівнянь), що зв'язують ці узагальнені координати. Такий (модальний) метод було розвинено у роботах І.О. Луковського, Г. Наріманова, Дж. Хаттона, О. Фалтінсена, О. Тимохи, О.С. Лимарченка, Т. Ікеди, А. Колає, М. Ла Рокка, Дж. Лове, Л. Перко, В. Столбенцова, Х. Такахари, Ю.М. Кононова та багатьох інших. Ці автори запропонували використовувати методи нелінійної механіки для побудови та аналізу періодичних розв'язків нелінійних (модальних) рівнянь, що дозволило б описати стійкі усталені резонансні рухи рідини. Практично всі ці аналітичні результати відносно нелінійних модальних рівнянь та усталених хвильових рухів обмежено випадком ідеальної рідини без демпфування. Предметом даної роботи є поширення їх на випадок демпфованих хвиль у біореакторах, в тому числі і для тривимірних періодичних рухів баку.

Зв'язок із науковими програмами, планами, темами.

Дисертація виконана згідно з планом наукових досліджень відділу математичних проблем механіки та теорії керування Інституту математики НАН України на 2016–2019 роки в рамках держбюджетної теми №ІІІ-13-16 "Математичні проблеми динаміки, стабілізації та оптимізації складних механічних систем" (номер держ. реєстрації 011U003101), в межах науково-дослідної теми №ІІІ-23-12" (номер держ. реєстрації 0122U001015) за програмою "Розробка математичних моделей та чисельно-аналітичних методів розв'язування сучасних задач фізико-технічних і медико-біологічних наук та інформаційних технологій", а також цільової програми наукових досліджень відділення математики НАН України № ІІІ-20-17 "Розробка аналітичних та чисельно-аналітичних методів дослідження задач природознавства" (номер держ.

реєстрації 0117U04077).

Мета та завдання дослідження.

Метою дисертаційної роботи є аналітичні дослідження, використовуючи методи аналітичної та нелінійної механіки, усталених демпфованих хвильових резонансних рухів рідини у вертикальних кругових баках (біореакторах) та їхньої стійкості за умови складних просторових періодичних збурень баку.

Об'єктом дослідження є варіаційна постановка задачі поверхневих хвиль у формі Бейтмена-Люка, а також нелінійні наближені модальні рівняння типу Наріманова-Моїсєєва, які зв'язують узагальнені координати гідродинамічної системи (аналог рівнянь Ейлера-Лагранжа) та ефективно описують динаміку вільної поверхні при резонансних збуреннях першої власної частоти коливання рідини.

Предметом дослідження є аналітичні періодичні розв'язки модальних рівнянь типу Наріманова-Моїсєєва із лінійними членами, які відповідають за демпфування, та аналіз стійкості цих розв'язків з метою описати всі можливі усталені резонансні демпфовані хвилі в баках, які рухаються за складною періодичною траєкторією.

Методи дослідження. Варіаційні методи аналітичної та нелінійної механіки, асимптотичні методи побудови періодичних розв'язків нескінченновимірних систем звичайних нелінійних диференціальних рівнянь, перший метод Ляпунова, чисельно-аналітичні методи розв'язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь.

Визначена мета зумовлює вирішення таких задач:

- редукцію нелінійної крайової задачі теорії про коливання рідини до нелінійних модальних рівнянь Луковського-Майлза спеціального типу (для вертикального кругового баку),
- оцінку коефіцієнтів демпфування (логарифмічних декрементів) стоячих хвиль, обумовлених ламінарним в'язким шаром на змоченій

поверхні баку та внутрішнім тертям (узагальнення формул Хендерсон-Майлза),

- побудову нелінійних модальних рівнянь типу Наріманова-Моїсєєва, яка описує резонансні демпфовані хвилі,
- побудову аналітичних періодичних розв'язків рівнянь типу Наріманова-Моїсєєва, аналіз їх стійкості та, як результат, опис всіх можливих усталених резонансних хвиль (стоячих та кругових),
- визначення діапазонів існування та стійкості кругових хвиль за та проти напрямку орбітальних рухів баку в залежності від відношення осей "еліпсу орбіти",
- порівняння результатів аналітичних досліджень із експериментами, виконаними різними авторами; аналіз впливу демпфування на амплітудні характеристики хвиль та зсуви фаз.

Практичне значення одержаних результатів.

Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Їх можна використати в інженерних дослідженнях, пов'язаних із аеруванням вина (під час колоподібних рухів бокалу), у фармацевтичній галузі (біореактори для культури клітин), тощо. Теоретичні результати та розроблені спеціальні методи аналітичної механіки можуть бути корисними для спеціальних курсів ВНЗ України, для вчених з Інститутів механіки та гідромеханіки НАН України, інших наукових установ.

Наукова новизна одержаних результатів.

У дисертаційній роботі отримано наступні нові наукові результати:

- Побудовано повні (в математичному сенсі) нелінійні модальні рівняння типу Наріманова-Моїсєєва для випадку резонансних коливань рідини у вертикальному циліндричному баці, що пов'язують нескінченну кількість узагальнених гідродинамічних координат та ефективно описують усталені демпфовані рухи рідини за умови довільних періодичних тривимірних рухів баку з частотою, близькою до першої власної частоти

коливання рідини.

- Виведено асимптотичні формули для оцінки коефіцієнтів демпфування, пов'язаного із в'язким шаром на змочених стінках баку та внутрішнім тертям в рідині. Встановлено, що впливом дисипації не можна нехтувати для $0.05m \lesssim R_0 \lesssim 0.3m$ (R_0 – радіус баку), що є типовим розміром для біореакторів та інших застосувань, що розглядаються.

- Для тривимірних періодичних рухів баку побудовано асимптотичні аналітичні періодичні розв'язки системи типу Наріманова-Моїсеєва, проаналізовано їх стійкості.

- Доведено, що з точністю до членів другого порядку малості (включно), побудовані періодичні розв'язки (а, значить, й відповідні усталені хвилі) є математично еквівалентними розв'язкам, які виникають при підходящих (відповідних) орбітальних горизонтальних еліптичних рухах баку.

- Показано, що, окрім випадку поздовжніх збурень баку, всі усталені хвилі є круговими, які виникають за чи проти напрямку еліптичного збурення баку. Доведено, що, починаючи з деякої величини співвідношень осей еліпсу збурень, наявність дисипації унеможливорює існування кругових хвиль протилежно направлених рухам баку.

- Побудовано типові амплітудно-частотні характеристики. Описано вплив дисипації на зсув фаз.

- Результати валідовано порівнянням з експериментальними вимірами різних авторів. Проаналізовано діапазони застосування побудованої аналітичної теорії. Зокрема, вказано на необхідність збільшувати коефіцієнти демпфування із ростом амплітуди кругової хвилі.

Особистий внесок здобувача у сумісних роботах.

За темою дисертації опубліковано 7 статей сумісно із науковим керівником, якому належить постановка задачі та аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації.

Результати дисертації доповідались та обговорювались на семінарах відділу математичних проблем механіки та теорії керування Інституту математики НАН України протягом 2016-18 років, семінари "Математичні проблеми механіки та обчислювальна математика" Інституту математики НАН України під керівництвом академіків НАН України І.О. Луковського та В.Л. Макарова (в повному обсязі – 20.09.2018р.), а також на таких міжнародних конференціях: Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю.О. Митропольського (червень 2017 р., Київ); IV Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки" (серпень 2017 р., Київський Національний Університет ім. Т. Шевченка, Київ); Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2017"(травень 2017 р., Львів); OMAE – 37th International Conference on Ocean, Offshore & Arctic Engineering (червень 2018р., Мадрид, Іспанія).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковано в статтях [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] у наукових періодичних фахових виданнях; [2, 3] – закордонні наукові журнали, що індексуються Scopus та Web of Science, [1] – український журнал, який проіндексовано Web of Science, [7] – матеріали конференції у вигляді статті, які індексуються Scopus та Web of Science (видано за кордоном); [8, 9, 10] – тези доповідей на наукових конференціях.

Дисертація складається зі вступу, основної частини, що містить п'ять розділів, висновків та списку використаних джерел із 233 найменувань, вона містить 18 рисунків. Загальний обсяг дисертації – 161 сторінка друкованого тексту.

Розділ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1.1. Методи аналітичної механіки в задачах про рух рідини в резервуарах

Нами розглядається гібридна механічна система, що складається з абсолютно жорсткого баку, який рухається із шістьма ступенями вільності за заданим у часі законом (періодичним в цій дисертаційній роботі), в порожнині якого знаходиться рідина з вільною поверхнею. Коливання рідини (хлюпання) в контейнері (порожнині) описуються еволюційною крайовою задачею з вільною (невідомою) межею.

Типовими для аналізу хлюпання рідини є використання відповідних чисельних методів до розв'язування цих початково-крайових задач з відповідними умовами Коші, які описують початкове положення вільної границі та початковий розподіл швидкостей. Принципово іншою (з фізичної точки зору) є задача про усталені резонансні хвилі на поверхні рідини, що реалізуються при періодичних збуреннях баку на довгих проміжках часу (після закінчення перехідних процесів). Відомо, що така задача не має однозначного розв'язку (декілька усталених хвиль можуть існувати при однакових вхідних параметрах). Аби описати всі можливі усталені хвилі за допомогою традиційних чисельних методів, необхідно перебрати нескінченну кількість початкових умов та провести для кожної такої умови довгі обчислення, поки не зникнуть перехідні хвилі та обчислення не приведуть до періодичних чисельних розв'язків. Ще складнішою проблемою є чисельне дослідження стійкості періодичних хвиль. Таким чином, вихідна задача про класифікацію (опис всіх можливих усталених резонансних хвиль та дослідження їх стійкості) потребує аналітичних підходів.

Таким підходом є так званий модальний метод, який зводить вихід-

дну еволюційну крайову задачу до задачі аналітичної механіки, системи звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальнених гідродинамічних координат системи (рівнянь типу Ейлера-Лагранжа). Коли введено такі системи диференціальних рівнянь, стає можливим не лише спростити їх до такого вигляду, аби можна було б проводити їх аналітичні дослідження, зокрема, аналітично будувати їх періодичні розв'язки, але й застосовувати теорію стійкості, щоб дослідити стійкість таких розв'язків.

Ключовими елементами даної дисертаційної роботи є варіаційний модальний метод, що базується на функціоналі дії Бейтмена-Люка, загальна модальна система Майлза-Луковського, її наближена форма у вигляді Наріманова-Моїсеєва (для випадку вертикального циліндричного баку), коефіцієнти дисипації (декременти затухання власних форм коливань рідини), а також аналітичні дослідження системи Наріманова-Моїсеєва через побудову її періодичних розв'язків для довільного тривимірного руху баку та аналіз їх стійкості. Специфічними моментами, що вирізняють цю дисертаційну роботу від інших, є аналітичні дослідження усталених резонансних коливань рідини методами нелінійної механіки, довільні тривимірні збурення баку та аналіз впливу демпфування.

З точки зору теоретичної механіки, крайова задача про рух рідини є механічною системою із нескінченною кількістю ступенів вільності. Кожну із таких ступенів вільності можна зв'язати із збуреннями власних форм коливання рідини. Ці форми вперше математично строго (для вертикального баку кругового перерізу) були введені та проаналізовані Михайлом Остроградським [11] ще на початку XIX століття. Але загальна теорія відповідних спектральних крайових задач із параметром на частині границі, яка описує власні форми та частоти, була побудована лише в 60х роках минулого століття [12].

Модальний метод передбачає введення *гідродинамічних узагальне-*

них координат, які відповідають за збурення власних форм, та виведення (модальної) системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат, яка є аналогом рівнянь Ейлера-Лагранжа для даного типу механічних систем. Вивід модальних рівнянь використовує методи аналітичної механіки, які, як правило, базуються на варіаційних формулюваннях типу Гамільтона-Остроградського. Виведену систему можна використовувати для прямих обчислень нелінійних поверхневих хвиль, відповідних сил та моментів (перша задача механіки), чи для моделювання сумісних рухів тіло-рідина, використовуючи аналітично зв'язані модальні рівняння та рівняння руху носія (баку) [13, 14, 15].

Модальні системи на теперішній час є, фактично, єдиним ефективним інструментом для вивчення резонансних усталених хлюпань рідини, дослідженню їх стійкості, внутрішніх резонансів, хаосу, тощо. Виведенню та аналізу такої модальної системи, адаптованої для вивчення демпфованих хлюпань в баках біореакторів, присвячено дану дисертаційну роботу.

1.2. Виникнення лінійного та нелінійного модальних методів

Слово "мультимодальний" (модальний) бере свій початок із роботи [16], яка вийшла в 2000 році. Але, з історичної точки зору, модальний метод було запропоновано сорок років до того, у 50-60х роках минулого століття, коли дослідники вперше зіштовхнулись із проблемою браку знань про коливання рідини у літальних апаратах, космічних кораблях та морських контейнерах. Наукову спадщину перших кроків у напрямку розвитку цих методів систематизовано у [14, 17, 18, 19, 20, 21, 22] (USA) та [12, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31] (СССР). В ті часи дослідники концентрувались на *теоретичному аналізі лінійних (малих) коливань* рідини та *експериментальному вивченню нелінійних (резонансних) фе-*

номенів. Експерименти з США було найкраще викладено у звіті НАСА [17]. Експерименти науковців Радянського Союзу проводились у Москві, Києві [15, 25], Дніпропетровську [32] та Томську [33, 34], але вони залишилися, в своїй більшості, не опублікованими.

Лінійний мультимодальний метод (див. оригінальні [35, 36, 37], [12, 26, 38, 39] та сучасні роботи [13, 40], де описуються деталі цього методу) було запропоновано у 50-х роках. Цей метод, у разі його застосування до лінійної задачі хлюпання, виводить нескінченну множину лінійних осциляторів (звичайних диференціальних рівнянь), названих, разом, лінійною модальною системою, у якій неоднорідні члени є функціями шести узагальнених координат (ступеней вільності) для твердого тіла, а невідомими є гідродинамічні узагальнені координати, що відповідають за відхилення вільної границі. Метод інтерпретує коливання рідини (хлюпання) як механічну систему із нескінченною кількістю ступенів вільності. Потрібно знати *власні форми коливання рідини*, φ_n , частоти, σ_n , а також лінійні *потенціали Стокса-Жуковського*, $\Omega_0 = (\Omega_{01}, \Omega_{02}, \Omega_{03})$.

Розглянувши разом лінійну модальну систему та динамічні рівняння твердого контейнера і використовуючи лінеаризовані *формули Луковського*, які виражають гідродинамічні сили та моменти у термінах гідродинамічних узагальнених координат, дозволяє аналізувати сумісні рухи механічної системи "тіло-рідина". У лінійній модальній системі та формулах Луковського гідродинамічні коефіцієнти є інтегралами від Ω_0 , φ_n та їхніх похідних. Це означає, що знаючи Ω_0 та φ_n і використовуючи аналітичні та/або чисельні методи для звичайних диференціальних (модальних) рівнянь, можливо знайти *напіваналітичний розв'язок* лінійної задачі коливання рідини (див. Главу 5 [13] та [41, 42, 43, 44]) і, таким чином, описати *лінійну динаміку тіла та рідини у абсолютно твердому баці*.

Три потенціали Стокса-Жуковського, Ω_{0i} , $i = 1, 2, 3$, виводять неоднорідні компоненти, що зв'язані із трьома кутовими ступенями віль-

ності твердого баку. Вони є розв'язками крайових задач Неймана в гідростатичній області рідини Q_0 (задач для лінійного потенціалу Стокса-Жуковського), які вперше були виведені Миколою Жуковським (1885) [45] в процесі вивчення просторового руху твердого тіла із порожнинами, повністю заповненими ідеальною нестисливою рідиною. Точні аналітичні вирази для Ω_{0i} є рідкісними випадками (Глава 5, [13]).

Власні форми коливання рідини є власними функціями спектральної крайової задачі в області Q_0 . Спектральний параметр κ з'являється у граничній умові на вільній поверхні Σ_0 та власній частоті $\sigma = \sqrt{\kappa g}$ (g – прискорення гравітації Землі).

Сліди $\varphi_n|_{\Sigma_0}$ визначають геометрію стоячих хвиль. Їх було вперше описано Михайлом Остроградським для вертикального кругового баку. Його робота [11] була подана до Парижської Академії Наук у 1826 та, згодом, узагальнена Пуассоном [46] для інших форм резервуара. Точна математична теорія спектральних задач про власні коливання рідини була побудована в 60-х роках (див. Главу VI в [12] та [40, 47]) Зокрема, вона стверджує, що (і) спектр складається виключно із додатних власних значень, κ , з єдиною граничною точкою на нескінченності (в порівнянні із зовнішньою задачею хвиль на поверхні океану, де спектр є неперервним) та (ii) $\varphi_n|_{\Sigma_0}$ являють собою, разом із ненульовою константою, базис Фур'є на Σ_0 . Факт (і) є важливим для розуміння, чому рівняння Кордевега-де-Вріза і Буссінеска (нескінченний об'єм рідини) та модальні системи (рідина в посудині) впливають із одної й тої самої крайової задачі із вільною поверхнею, але мають різну математичну природу. Факт (ii) є основним для введення гідродинамічних узагальнених координат.

У 60-70х роках, С. Крейн [48, 49] (також див. [50, 51]) узагальнив ці результати до *в'язкої нестислової рідини*, а Копачевський – врахував *поверхневий натяг* (частина II у [52] та [48, 53]). Цікавою є задача про власні коливання рідини у пружних резервуарах, різні аспекти якої

досліджено в [23, 26, 27, 31, 54, 55, 56].

У 50-80х роках, основні дослідження в галузі коливань рідини у рухомих баках були зосереджені на побудові *аналітичних наближених розв'язках задачі про власні коливання рідини та визначенні лінійного потенціалу Стокса-Жуковського*. Через необхідність виконання умови збереження маси, розв'язки [38, 57], як стандарт, використовували метод Трефтца, найчастіше за допомогою гармонічних многочленів [38], чия повнота була доведена для зіркоподібних посудин у [58, 59]. Розв'язки Трефтца стають особливо ефективними та забезпечують рівномірне наближення, коли враховується сингулярність [12, 60, 61, 62, 63] розв'язку біля кутової точки [41, 64]. Сьогодні гармонічні многочлени широко використовуються в обчислювальних методах, наприклад, у методі Harmonic Polynomial Cell (HPC) [65, 66]. Із зростанням можливостей комп'ютерів у 90х роках минулого століття знаходження φ_n та Ω_0 стало набагато простішим. Винятками, можливо, є негладкі баки, що містять перегородки, сітки тощо, що веде до сингулярної поведінки $\nabla\varphi_n$ [41, 64, 67, 68, 69, 70].

Теоретичні дослідження нелінійних коливань рідини в рухомих баках було започатковано Пенні та Прайсом [71], Моїсеєвим [72], Нарімановим [73] та Перко [74, 75] ще у 50х роках. З використанням теорії збурень [71] Моїсеєв [72] побудував *асимптотичний усталений (періодичний) розв'язок задачі про нелінійні коливання рідини в абсолютно жорсткому баку, що виконує горизонтальні і/або кутові низькоамплітудні гармонічні рухи з частотою σ , що є близькою до найнижчої власної частоти коливання рідини σ_1* . Він розглянув випадок скінченної (немалої) глибини рідини в баці, заповненого ідеальною нестисливою рідиною з безвихоровими рухами та довів, що якщо безрозмірна амплітуда коливання посудини має порядок $\epsilon \ll 1$, то перша власна форма коливань рідини має амплітуду порядку $O(\epsilon^{1/3})$. Необхідною умовою є асимптотика (Моїсеєва) $|\sigma^2 - \sigma_1^2|/\sigma_1^2 = O(\epsilon^{2/3})$, яка математизує факт $\sigma \rightarrow \sigma_1$.

Теорія Моїсеєва неявно припускає, що немає так званого *внутрішнього резонансу* [13, 76, 77, 78, 79] в цій механічній системі.

Асимптотичний розв'язок Моїсеєва було аналітично побудовано (у явному вигляді) для двовимірного прямокутного баку в [80, 81]. Інші форми посудин було розглянуто в [14, 82, 83, 84]. Отримання асимптотичного розв'язку Моїсеєва в аналітичному вигляді вимагає громістких викладок, що пов'язується із необхідністю розв'язувати аналітично послідовність крайових задач.

У 80-х роках, аналізуючи *майже періодичні* коливання рідини, Майлз [85, 86] узагальнив результати Моїсеєва та вивів так звані *рівняння Майлза*. Ці рівняння сформульовано відносно повільних варіацій домінуючих амплітуд, які введено в теорії Моїсеєва. Майлз розглянув горизонтальні гармонічні збурення вертикального кругового циліндричного баку, використавши асимптотику Моїсеєва для σ та σ_1 , процедуру розділення швидкого і повільного часів та *варіаційний принцип Бейтмена-Люка* [87, 88, 89]. Рівняння Майлза згодом були виведені для вертикального прямокутного баку. У прикладній математиці з тематики майже періодичних резонансних коливань рідини, в тому числі знаходження періодичних орбіт та класифікації хаосу, використання цих рівнянь є загально визнаним мейнстрімом [85, 90, 91]. Як горизонтальні, так і вертикальні (хвилі Фарадея) гармонічні збурення були темою досліджень в [86, 90, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99]; роботи [100, 101] використовували рівняння Майлза для вивчення системи бак-рідина з обмеженою за амплітудою силою, яка діє на бак.

Використовуючи теорію збурень, Наріманов [73] *вперше* вивів *слабко нелінійні модальні рівняння*, які описують резонансні коливання рідини. Наріманов не знав про результати Моїсеєва, але він постулював асимптотичну залежність між гідродинамічними узагальненими координатами та *гідродинамічними узагальненими швидкостями* саме так, як вони

впливають із періодичного розв'язку Моїсеєва. Перші модальні системи з [73] (такі ж, як у [102, 103, 104, 105]) було виведено із алгебраїчними помилками, які згодом були виправлені Луковським [15, 106, 107, 108]. Техніка Наріманова також приводить до великих та громіздких викладок, що різко збільшуються при збільшенні кількості введених гідродинамічних узагальнених координат. Як наслідок, всі існуючі модальні системи Наріманова є малорозмірними. Вони зв'язують від двох до п'яти (із нескінченної кількості) гідродинамічних узагальнених координат. Модальні системи Наріманова було виведено для кругових прямокутних, конусоподібних та сферичних баків, так само як і для вертикального кругового циліндричного баку із перегородкою у вигляді твердого кільця [15, 107, 108, 109]. Сьогодні цей *метод майже не використовується* і, можна сказати, що його витіснили варіаційні версії модального методу [110, 111, 112], оснований, зазвичай, на варіаційному принципі Бейтмена-Люка [13, 15, 87, 88, 89]. Останній природним чином виводить динамічну та кінетичну частини крайової задачі про коливання рідини [13, 15, 113, 114, 115].

Варіаційний модальний метод, який базується на принципі Бейтмена-Люка, було вперше запропоновано у 1976 році *Майлзом та Луковським* [107, 116]. Вони незалежно вивели *нелінійну модальну систему* відносно узагальнених координат та узагальнених швидкостей для коливання рідини у вертикальному баку, що описує заданий коливний поступальний рух. Пізніше Луковський вивів нелінійну модальну систему, що сьогодні носить ім'я *Майлза-Луковського*. Ця система припускає довільні рухи баку [16, 117]. Луковський також запропонував *техніку некомформних відображень* для баків із невертикальними стінками [106, 118, 119, 120, 121] та вивів так звані *формули Луковського* для гідродинамічної сили та моменту [15, 107] (Глава 7, [13] дає альтернативне виведення цих формул). Також він показав як використати формалізм Бейтмена-Люка для виве-

дення рівнянь динаміки системи "твердий бак-рідина" [107, 122].

Беручи до уваги спеціальні асимптотичні співвідношення між гідродинамічними узагальненими координатами та гідродинамічними узагальненими швидкостями, систему Майлза-Луковського можна звести до слабко нелінійної форми, яка сьогодні носить назву *адаптивних нелінійних (асимптотичних) модальних систем* [13, 15, 123, 124, 125]. Система Майлза-Луковського та адаптивна нелінійна модальна система вимагають знайти (а ргіогі) *власні форми коливання рідини, φ_n , та нелінійні потенціали Стокса-Жуковського, Ω* . В явному аналітичному вигляді. Аналітичні власні форми повинні бути також неперервно заданими вище гідростатичної вільної поверхні Σ_0 . Це та інші обмеження нелінійних модальних методів детальніше описано в Главі 7 книги [13] та в [118, 123, 125].

Подавши потенціал швидкості у вигляді рядів Фур'є за власними формами коливання рідини, *Перко* [74, 75] запропонував *чисельний модальний метод*, який він використав для моделювання короткотривалих, перехідних хвильових процесів на поверхні рідини. У 70-80х роках метод Перко використовували (із модифікаціями) Чахлов [126, 127] та Лимарченко з учнями [128, 129, 130, 131, 132, 133, 134]. Оскільки Лимарченко користувався варіаційним принципом Гамільтона-Остроградського та теорією збурень, він запропонував, фактично, *чисельний слабко нелінійний варіаційний модальний метод типу Перко*, який, взагалі кажучи, не придатний для аналітичних досліджень установлених хвиль, а лише для обчислення перехідних хвиль на короткому проміжку часу.

1.3. Нелінійне модальне моделювання як база аналітичних досліджень

У 2000-х роках дослідження *нелінійних коливань рідини* розділилося на майже незалежні *чисельний* та *аналітичний* напрямки. Останні досягнення *чисельного моделювання* викладено в огляді [135] (див. також [136, 137, 138, 139, 140, 141, 142]). Найкращі розрахункові алгоритми базуються на моделі в'язкої нестисливої рідини. Вони ефективно описують коливання рідини у газі для заданих початкових умов, можуть моделювати розвали та дефрагментації вільної поверхні, перекидання хвилі, удари хвилі по стінкам та перевертання (flip-through). Останні феномени не можуть бути точно описані в рамках фізичних (математичних) моделей, які використовуються для *аналітичних досліджень коливання рідини*. Ці моделі є слабо-нелінійними, припускають ідеальну нестисливу рідину із потенційними течіями та гладкі вільні поверхні без розривів суцільності.

У ХХ столітті подібне розділення відбулось у теорії морських хвиль, які сьогодні досліджуються, майже незалежно, через чисельні розв'язки відповідних крайових задач, чи за допомогою наближених аналітичних моделей типу Кортвега-де Вріза, Бусінеска та ін., які є диференціальними рівняннями у частинних похідних [143]. Наближені аналітичні моделі зазвичай не використовуються у практичних обчисленнях. Їх застосовують для якісного аналізу та класифікації типів поверхневих хвиль, їхній стійкості, хаосу у гідродинамічній системі, дослідження залежності від початкових сценаріїв та вхідних параметрів, тобто, у випадках, коли застосування традиційних чисельних методів не є ефективними з практичної точки зору.

Оскільки метод Перко належить до прямих чисельних методів, хоч і використовує спрощені математичні моделі модального типу, він є малопікавим для обчислень гідродинамічних навантажень та опису вище-

згаданих хвильових феноменів на вільній поверхні, а також, за визначенням, для аналітичних досліджень. Це пояснює, чому цей метод рідко використовується у сучасних дослідженнях. Як у випадку, коли обчислення базуються на нелінійних системах Майлза-Луковського [144, 145], чи слабо нелінійних системах [132, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152]. Іншим недоліком обчислень за методом Перко є те, що відповідні системи звичайних диференціальних рівнянь є жорсткими, тобто обчислення необхідно вимагають внесення штучного демпфування для зниження паразитальних вищих гармонік [146, 147]. Інакше, метод не є стійким на відносно довгому часовому проміжку. Проведення обчислень за допомогою методу Перко має сенс, наприклад, для посудин, обладнаних екранами-перегородками, тобто, коли демпфування хлюпання є досить великим [150, 151, 152] з фізичної точки зору.

Використання нелінійного модально методу як ефективного апарату в аналітичних дослідженнях було, до певної міри, пов'язаним із зростаючою практичною зацікавленістю до гладких (без внутрішніх структур) баків, в тому числі баків із Скрапленням Природим Газом (LNG).

В статті [16] перевиведена система Майлза-Луковського. Ця стаття ініціювала серію публікацій відносно нелінійних модальних систем, в основному, для прямокутних та кругових баків, коли точні аналітичні φ_n та Ω_0 існують, та глибина рідини є скінченною. Для опису усталених та перехідних резонансних хвиль використовувались слабо нелінійні модальні системи.

Двовимірне нелінійне резонансне коливання рідини у гладкому прямокутному баку із скінченною глибиною рідини вивчалось з використанням різноманітних нелінійних модальних систем в [16, 77, 123, 153, 154, 155, 156, 157]. Прикладене до баку збурення було маленьким, порядку $O(\epsilon) \ll 1$, а збурююча частота σ була близькою до найнижчої власної частоти коливань рідини σ_1 . Система [16] базується на асимптотиці

Наріманова-Моїсеєва. Перехідні та усталені режими було визначено для гармонічних коливань [16] та для баку, що плаває на поверхні моря (танкер) [158, 159, 160]. Усталені резонансні коливання рідини характеризуються м'якою нелінійністю, якщо *співвідношення глибини до довжини* $> 0.3368\dots$, та жорсткою нелінійністю для $< 0.3368\dots$, так що *теоретична безрозмірна критична глибина* $= 0.3368\dots$ [13, 161]. Математичний аналіз нелінійної мультимодальної системи було запропоновано у [123, 153, 154].

Нелінійна модальна система Наріманова-Моїсеєва [16] стає фізично незастосовною із *збільшенням амплітуди коливань* та при *критичних та малих глибинах рідини* через *вторинний (внутрішній) резонанс* в системі, тобто коли $n\sigma \approx \sigma_n$ для деякого цілого n , що призводить до збільшення амплітуди коливань вищих форм через нелінійний механізм передачі енергії від основних (σ_1) до вторинних (σ_n) збурених гідродинамічних узагальнених координат. Аби впоратися із вторинними резонансами для рідини із скінченною глибиною вимагаються так звані *адаптивні модальні системи* [77, 154], що пропонують введення декількох домінантних (збурених вторинно) гідродинамічних узагальнених координат $\sim O(\epsilon^{1/3})$, для яких внесок домінантних вищих гармонік є теоретично передбачуваним ($n\sigma \approx \sigma_n$). Концепція адаптивного мультимодального методу була перевірена порівнянням з експериментальними вимірами [77, 78, 147]. Коли виникають вторинні резонанси, відповідні амплітудно-частотні криві характеризуються подвійними вершинами в зоні основного резонансу. Більше про адаптивні модальні системи та їх структуру можна знайти у Главі 8 книги [13].

На основі адаптивної модальної системи Герман та Тимоха [154] показали, що *критична глибина* є функцією від амплітуди збурень (граничним випадком при $\epsilon \rightarrow 0 \in 0.3368\dots$) та пояснили експериментальне значення 0.28 в класичній експериментальній роботі [162]. Адаптивні

модальні системи [155, 156, 157] використовують *асимптотичне впорядкування* узагальнених гідродинамічних координат, яке базується на понятті вторинного резонансу.

Виведення нелінійної модальної системи [78] для рідини із малою глибиною у прямокутному баку потребує асимптотичне впорядкування четвертого порядку типу Бусінеска (поєднує асимптотику Моїсеєва та Кордевега-де-Вріза [81, 163, 164], де всі гідродинамічні узагальнені координати та безвимірна глибина рідини є однакового порядку $O(\epsilon^{1/4})$). Шляхом урізання цієї нескінченновимірної системи та включенням *лінійного демпфування* (через ламінарний в'язкий шар на змоченій поверхні баку, Глава 6 [13] та [165, 166, 167, 168, 169]) було забезпечено гарне співпадіння теоретичних результатів із експериментальними вимірами [78, 170, 171], як для усталеного, так і для перехідного типів коливання рідини. Для прикладу, в експериментах Честера [78, 170, 171] теоретичні амплітудно-частотні криві [78, 172] мали таку саму "пальцеподібну" форму із багатьма піками в зоні основного резонансу ($\sigma \approx \sigma_1$), як то було і в експериментах. Збільшуючи амплітуду збурення і/або зменшуючи глибину рідини робить фізично незастосовною нелінійну модальну систему для малих глибин [78] через розриви та перекидання хвиль і фрагментацію вільної поверхні, що дають надзвичайно великий вклад у демпфування. Детальна експериментальна класифікація хлюпання для мілководдя (описано чотири різні типи хвиль) в загальному та із акцентом на локальні поверхневі феномени дана у Главі 8 книги [13]. Демпфування внаслідок вищезгаданих феноменів вільної поверхні є схожим до *удару по стелі*, ефект якого було включено із використанням теорії Вагнера в нелінійні модальні системи [16, 77] в статті [173].

Демпфування через в'язкий турбулентний шар при перетіканні рідини через *пористі екрани* було враховано в нелінійних модальних системах [146, 150, 174, 175] (для коливання рідини у прямокутному двовимір-

ному баку із скінченною глибиною). Для меншого відношення щільності екранів, $0 < S_n < 0.5$, та відносно малої сили коливань, використовуючи умову падіння тиску на екрані [176], було отримано інтегральні доданки для існуючих модальних систем [150, 174]. Ці модифіковані нелінійні модальні системи показали результат, що співпадав кількісно та якісно із експериментальними. Для більшого відношення щільності $0.5 < S_n < 1$, міняються власні форми та частоти коливань рідини [67] й, тим самим, лінійні [175] та нелінійні [146] модальні системи міняють свою аналітичну структуру. Вторинні резонанси стають тоді більш виразними, та піки амплітудно-частотних кривих в основній резонансній зоні відрізняються від тих, що були для гладкого (без перегородок) прямокутного баку. Нелінійні модальні системи баків із пористими екранами були виведені, вивчені та валідовані у роботах [150, 151, 152, 177, 178].

Узагальнення двовимірних результатів [16] для випадку *тривимірного прямокутного* баку дається в [179]. Основна увага приділяється *майже квадратному перерізу*, що призводить до ситуації, коли дві нижчі форми коливання мають рівні власні частоти (хвилі Стокса). Відповідна нелінійна модальна система Наріманова-Моїсеєва з робіт [179, 180] має дев'ять ступенів вільності із двома домінуючими $O(\epsilon^{1/3})$ гідродинамічними узагальненими координатами. Ця система ефективно забезпечує аналітичну *класифікацію* усталених режимів (плоска, діагональна, майже діагональна та кругова хвилі) для поздовжніх та діагональних гармонічних збурень/коливань баку [179, 181]. Усталений періодичний розв'язок модальної системи приводить до специфічних амплітудно-частотних кривих, особливо, коли співвідношення між горизонтальними розмірами баку збурюється в околі одиниці [180, 182, 183]. Показане гарне якісне узгодження з експериментами, включаючи оцінку діапазону частот, де існують хаотичні хвилі. З іншого боку, теоретичні перехідні та усталені хвилі не були кількісно підкріплені експериментами через ефект вторин-

ного резонансу, який стає особливо виразним для кругової хвилі, навіть при достатньо малій амплітуді збурень (коливаний баку). Врахування ефекту вторинного резонансу призвело до виникнення багатовимірних адаптивних модальних систем [147, 184].

1.4. Нелінійний модальний метод для осесиметричних баків

У 80-х роках минулого століття Луковський [107, 122, 185] вивів п'ятивимірну (пов'язує п'ять гідродинамічних узагальнених координат) нелінійну модальну систему типу Наріманова-Моїсеєва, що наближено описує резонансні коливання рідини у *вертикальному круговому циліндричному баку при горизонтальних гармонічних збуреннях першої власної частоти*. Він побудував аналітичні періодичні розв'язки цієї системи (плоска та кругова хвилі), дослідив їх стійкість за допомогою першого методу Ляпунова, визначив зону існування хаосу (іррегулярних хвиль) та перевірів результати про усталені хвилі шляхом порівняння з експериментальними даними [186]. У статті [187] ця система перевиведена, і знову проведено класифікацію усталених хвильових режимів (як у [15, 122]). Нелінійна модальна система Луковського та її періодичні розв'язки також досліджуються в роботі [188], де також розглянуто поведінку вузлових кривих на поверхні рідини. Теоретично показано, що ці криві не є прямими лініями, як то стверджувалося в інших (найпростіших) теоріях. Експерименти підтверджують поведінку вузлових ліній згідно теорії Луковського. Фалтінсен та Тимоха [13] (Глава 9). Вони показали, що теоретичний аналіз періодичних режимів у [15, 107] є у хорошій відповідності з новими експериментами в роботі [189].

В той же час, асимптотика Наріманова-Моїсеєва для *осесиметричних баків* вимагає включати у відповідні модальні системи нескінченну кількість гідродинамічних узагальнених координат другого та третього порядку [118, 190]. Для вертикального кругового циліндричного ба-

ку нескінченновимірна система була вперше виведена та проаналізована в [124]. Нескінченна кількість гідродинамічних узагальнених координат другого та третього порядків майже не вплинула на якісні результати Луковського щодо періодичних усталених розв'язків (хвиль) окрім декількох глибин рідини та частот, коли у нескінченновимірній системі виникали вторинні (внутрішні) резонанси (див. [76, 109]), які ігноруються п'ятимодовою системою Луковського.

Луковський також аналітично вивів та проаналізував періодичні розв'язки п'ятимірної нелінійної модальної системи [107, 191, 192] для резонансних хвиль у *вертикальному кільцевому циліндричному баці*. Остання система була перевиведена та модифікована шляхом включення додаткових гідродинамічних узагальнених координат третього порядку в [193], де також було проведено нові експериментальні дослідження резонансних хвиль при поздовжніх резонансних збуреннях баку. Порівнюючи експериментальні та теоретичні амплітудно-частотні характеристики в [193], було показано гарне узгодження з експериментами для плоскої стоячої хвилі, але навіть при включенні спекулятивних додаткових членів (заради співпадіння з експериментальними вихідними даними), візуально була помітна невідповідність між теорією та експериментами для кругової хвилі. Спроба вивести нелінійну модальну систему Наріманова-Моїсєєва для нецентрального положення колони проводиться у [194]. Коливання рідини у вертикальному баку кільцеподібної форми та при наявності поперечних перегородок досліджено в роботах [195, 196].

Для баків із *невертикальними стінками* не існує точних аналітичних власних форм коливання рідини та є неможливим нормальна презентація вільної поверхні. Остання проблема може бути розв'язана за допомогою *техніки неконформних відображень*, запропонованої Луковським [106, 108, 197, 198] у 1975 році. Цю аналітичну техніку було скомбіновано із асимптотичною схемою Наріманова в [106, 108]. Вона використову-

валася у методі Перко [132, 133, 149] та була вбудована у варіаційний метод Майлза-Луковського [15, 107, 118]. Проте, багатовимірні нелінійні модальні системи Наріманова-Моїсеєва були виведені тільки для *конусо-подібних/конічних* та *сферичних* баків. Головною складністю для поширення методу неформальних відображень на інші форми геометрії посудин залишається відсутність ефективного та високоточного аналітичного наближення власних форм коливання рідини, які точно задовільняють рівняння Лапласа та умову непротікання на стінках, а також допускають *аналітичне продовження через вільну поверхню* (див. список обмежень на модальний метод у [15, 125] та Глава 9 у [13]).

Відповідно до результатів робіт [82, 199, 200], незбурена горизонтальна поверхня рідини у *круговому конічному* баці малого кута розгину може бути замінена на сферичну "шапку", аби побудувати наближений аналітичний розв'язок задачі про власні коливання рідини в термінах сферичних функцій. З використанням таких наближень власних форм була побудована нелінійна модальна система типу Наріманова-Моїсеєва в [201, 202]. Цей результат крок за кроком покращувався у роботах [107, 119, 203, 204, 205, 206, 207] (див. також посилання). У працях [203, 205, 206] було побудовано наближені власні форми коливання рідини без вищезгаданої заміни плоскої незбуреної поверхні на сферичну "шапку". Базуючись на цих власних формах, було та досліджено п'ятивимірні нелінійні модальні системи Наріманова-Моїсеєва для *зрізаних* та *не зрізаних кругових V-конічних баків* [119, 205]. По відношенню до системи Луковського [107, 122, 185], така система містить додаткові нелінійні члени, що відображають так звану *геометричну нелінійність* (невертикальність стінок). В [208] акцент робиться на дослідженні поведінки вузлових ліній на вільній поверхні, що являє собою узагальнення результатів із [188]. Теоретичний аналіз вторинних резонансів [119, 205] та порівняння теоретичних результатів із експериментами

[119, 204, 209, 210] показали, що вторинні резонанси дійсно мають значення для конічних резервуарів. Вдалося описати геометрію та глибини, коли це відбувається.

Аналітичні наближені власні форми коливання рідини для *сферичного* баку було побудовано у [68, 69, 211, 212]. Базуючись на розв'язках із [68, 212], була явно виведена нескінченновимірна нелінійна модальна система типу Наріманова-Моїсеєва (узагальнення [124]) в [118, 213]. Результати дослідження періодичних резонансних хвиль (з використанням цієї системи) були підтверджені експериментами [20] для співвідношень глибини до радіусу ≤ 0.5 . Вторинні резонанси та експериментально спостережувана фрагментація вільної поверхні (разом із перекиданням) робить цю нелінійну модальну систему практично непридатною для інших глибин заповнення, а також при збільшенні амплітуди коливання. Нескінченновимірна нелінійна модальна система Наріманова-Моїсеєва була побудована, але не проаналізована для кругового баку в [214]. Посудини із круговим поперечним перерізом характеризуються вторинним резонансом для майже всіх заповнень баку [32, 41]. Це робить [214] слабо застосовним для аналізу нелінійних резонансних коливань рідини.

1.5. Основні виклики, відкриті питання модального моделювання в контексті досліджень даної дисертаційної роботи

Сьогодні існує серія викликів в аналітичних методах дослідження нелінійних хвиль, загалом, та нелінійному мультимодальному моделюванню, зокрема. Більшість таких викликів та відкритих проблем дискутуються в огляді Луковського та Тимохи [215]. В цьому контексті доцільно також відмітити огляди в книзі Фалтінсена та Тимохи [13]. Зокрема, Глава 6 цієї книги дає огляд аналітичних методів та підходів, які дозволяють оцінити дисипацію енергії коливання рідини. Ця глава також демонструє як можна включити демпфування до нелінійних модальних теорій. Оста-

ння процедура була реалізована для прямокутних баків, в тому числі і для випадку, коли резервуар містить пористі екрани [146, 150, 175]. Відкритою проблемою залишається питання: як оцінити демпфування через фрагментацію вільної поверхні та ефекти перекидання. Поверхневий натяг, в цілому, та феномен динамічного контактного кута [216, 217], зокрема, також породжують додаткове демпфування. Ще поки не повністю зрозуміло, як можна включити ці демпфування у модальний метод.

Ця дисертаційна робота присвячена особливостям модального моделювання резонансних коливань рідини у біореакторах. Така досить важлива з практичної точки зору проблема стала актуальною лише декілька років тому. Було проведено низку експериментальних та теоретичних досліджень фізичного плану, серед яких треба відмітити дослідження з дисертації Рекларі [218], а також статті [218, 219, 220, 221, 222].

Специфікою поставленої в дисертації задачі є 1) необхідність врахування в'язкого демпфування резонансних нелінійних коливань рідини, 2) складний періодичний рух біореактора на вібростенді, що відбувається на довгому проміжку часу, 3) необхідність мати аналітичні розв'язки задачі, які описують усталені хвильові рухи та вміти дослідити їх стійкості. Ці проблеми є новими з теоретичної точки зору. Перший крок до їх розв'язання було зроблено в роботі [223]. Але автори не врахували демпфування. Як правильно ввести демпфування у відповідні модальні системи, оцінити значення коефіцієнтів демпфування, побудувати та вивчити аналітично усталені хвильові рухи (періодичні розв'язки систем, дослідити стійкість) і проаналізувати типи поверхневих хвиль в залежності від траєкторії руху баку (в тому числі кругового орбітального) – є метою даної роботи. Результати досліджень в статтях автора [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] дають відповідь на деякі з цих питань.

Розділ 2

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА, ВАРІАЦІЙНА ТА МОДАЛЬНА ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧІ

Розглянемо коливання рідини у рухомій циліндричній порожнині, яка має шість ступенів вільності та рухається у просторі згідно позначень на Рис. 2.1. Всюди в дисертаційній роботі припускаємо, що стінки баку та дно є абсолютно твердими, система координат $Oxyz$ є жорстко зв'язаною із твердим баком, при тому вісь Oz співпадає з віссю симетрії, а площина Oxy з незбуреною (гідростатичною) вільною поверхнею рідини. Вважаємо також, що рух баку є відомим. Ставиться задача: описати рухи рідини та відповідні гідродинамічні навантаження на стінки баку, тобто розв'язати першу задачу динаміки для носія (баку).

Всюди у цій роботі заданий рух носія відповідає осциляціям з малою амплітудою (відносно радіусу баку R_0). Система бак-рідина знаходиться у гравітаційному полі, яке має потенціал

$$U_g = -\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}' = -\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}'_0, \quad (2.1)$$

де \mathbf{g} – прискорення гравітації (див. позначення на Рис.2.1), $\mathbf{r} = (x, y, z)$, а \mathbf{r}'_0 – радіус-вектор початку координат O відносно нерухомої системи $O'x'y'z'$.

Рідина є нестисливою, ідеальною, та рухи рідини є безвихоровими. Надалі також припускаємо, що рідина не містить газових порожнин. Поверхневий натяг не враховується, що пояснюється відносно великими розмірами баку (число Бонда перевищує 100).

В'язкий ламінарний поверхневий шар на змочених стінках посудини має товщину, яка є меншою, ніж амплітуда коливань рідини. За межами такого шару дійсно можна вважати рідину ідеальною, але, взагалі кажучи, не можна нехтувати демпфуванням, яке породжує цей в'язкий шар. Це означає, що класичні рівняння коливання ідеальної нестисливої

рідини в абсолютно твердому баці, що здійснює задані рухи у просторі, повинні бути модифікованими шляхом включення в них ефекту демпфування, яке породжується ламінарним в'язким шаром, а також, можливо, іншими локальними феноменами, в тому числі і на вільній поверхні рідини (або біля неї). У випадку нерухомого баку, це демпфування можна трактувати також як логарифмічний декремент затухання вільних коливань (стоячих хвиль) рідини, які є наслідком початкових збурень вільної поверхні.

Для фізично та математично коректної трактовки демпфування рухів ідеальної рідини бажано перейти, використовуючи варіаційні принципи аналітичної механіки, від класичної крайової задачі з вільною поверхнею до системи звичайних диференціальних (модальних) рівнянь відносно гідродинамічних узагальнених координат, кожна з яких відповідає збуренню однієї з нескінченної кількості стоячих хвиль. Такі рівняння будуть математично подібними до тих, що виникають для динаміки зв'язаних осциляторів, отже, ввівши відповідні лінійний демпфуючий член для кожного рівняння, дозволить як промоделювати затухання стоячих хвиль, так і вивчити вплив демпфування на вимушені рухи цієї системи. Для оцінки коефіцієнта демпфування введеного члена, можна використати оцінку типу Хендерсон-Майлза, точність якої підтверджено експериментально.

Такий перехід від крайової задачі із вільною поверхнею до рівнянь типу Ейлера-Лагранжа, що зв'язують узагальнені координати системи, перетворюють задачу гідромеханіки у задачу теоретичної механіки, до якої можна застосувати традиційні для цієї галузі методи досліджень. Як це зробити буде показано в даному та наступних розділах цієї дисертаційної роботи.

2.1. Крайова задача з вільною поверхнею

Всюди надалі в тексті $Q(t)$ – рухомий об'єм рідини, $\Sigma(t)$ – вільна поверхня, $S(t)$ – змочена поверхня баку, Q_0 – незбурений (гідростатичний) об'єм рідини, Σ_0 – незбурена вільна поверхня, S_0 – незбурена змочена поверхня баку.

2.1.1. Рівняння руху рідини. Запишемо рівняння безвихорих рухів ідеальної нестисливої рідини у неінерційній системі координат $Oxyz$, яка жорстко зв'язана із посудиною (носієм). Поле абсолютних швидкостей в $Q(t)$ тут і надалі описується потенціалом швидкостей, $\mathbf{v} = \nabla\Phi$. Цей потенціал швидкостей задовільняє рівняння Лапласа, що є наслідком рівняння неперервності для даного випадку. Тиск в об'ємі рідини можна знайти, використовуючи інтеграл Лагранжа–Коші [223].

Оскільки рівняння Лапласа є інваріантним відносно вибору системи координат (інерційна чи неінерційна), можна записати

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \text{ в } Q(t). \quad (2.2)$$

Інтеграл Лагранжа–Коші

$$p + \rho \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \Big|_{\text{інерційна}} + \frac{1}{2}(\mathbf{v})^2 + U_g \right) = C(t) \quad (2.3)$$

є результатом інтегрування рівняння Ейлера. Його канонічна форма дається в інерційній системі координат $O'x'y'z'$. Аби записати інтеграл Лагранжа–Коші в неінерційній системі координат $Oxyz$, ми повинні дослідити член $\partial\Phi/\partial t$, що в інерційній системі означає похідну від часу Φ для фіксованих точок з координатами (x', y', z') . У системі координат $Oxyz$ ми також оперуємо з похідною по часу від Φ для фіксованої точки (x, y, z) , що означає

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} \Big|_{\text{в неінерційній } Oxyz} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi(x, y, z, t + \Delta t) - \Phi(x, y, z, t)}{\Delta t}.$$

Припустимо, що точка (x, y, z) співпадає з точкою (x', y', z') в момент часу t . Різниця між точками (x, y, z) та (x', y', z') в момент часу $t + t\Delta t$, з точністю до нелінійних членів, рівна $\mathbf{v}_b \Delta t$, де, згідно формули Ейлера для твердого тіла,

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2.4)$$

є швидкістю точки твердого тіла (баку), заданого радіусом-вектором $\mathbf{r} = (x, y, z)$, \mathbf{v}_o – швидкість початку координат O , а $\boldsymbol{\omega}$ – миттєва кутова швидкість тіла навколо O . Розклад в ряд Тейлора функції $\Phi(x, y, z, t +$

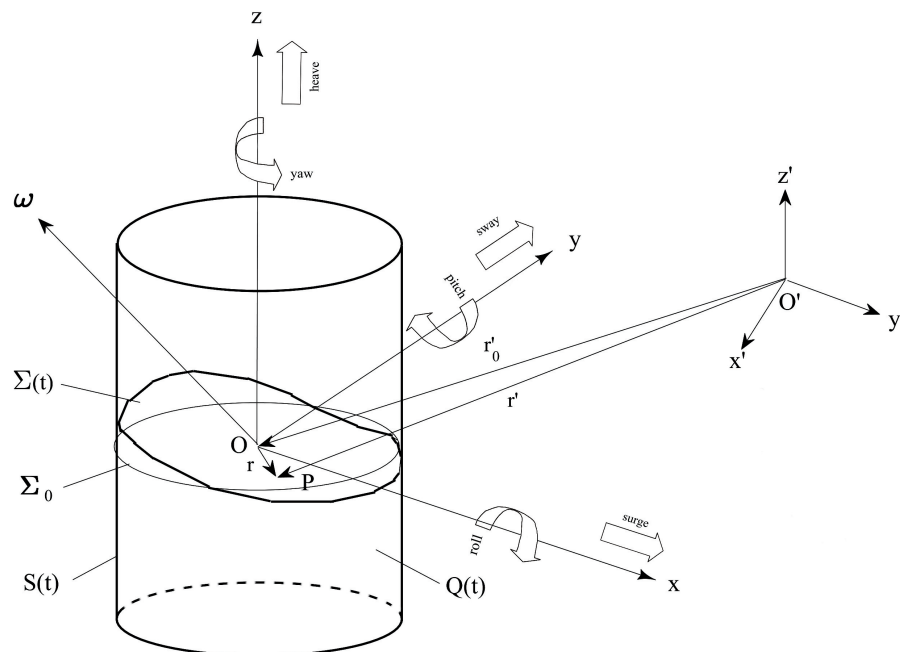


Рис. 2.1: Рухомий абсолютно твердий циліндричний резервуар, частково заповнений рідиною. Система $Oxyz$ жорстко пов'язана із баком. $O'x'y'z'$ є інерційною системою координат, яка, як правило, пов'язується із землею. Відносні рухи системи $Oxyz$ є визначеними в будь-який момент t швидкістю $\mathbf{v}_o = d\mathbf{r}'_0/dt = \dot{\mathbf{r}}'_0$ початку координат та миттєвою кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Δt) біля точки (x', y', z') дає

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\text{в неінерційній } Oxyz} &= \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi(x', y', z', t + \Delta t) + \mathbf{v}_b \cdot \nabla \Phi \Delta t - \Phi(x, y, z, t)}{\Delta t} = \\
&= \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\text{в інерційній } O'x'y'z'} + \mathbf{v}_b \cdot \nabla \Phi. \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Таким чином інтеграл Лагранжа–Коші (2.3) в неінерційній системі $Oxyz$ можна записати у вигляді

$$p + \rho \left(\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\text{неінерційна}} - (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + U_g \right) = C(t), \quad (2.6)$$

де $C(t)$ - довільна функція часу, ρ - густина рідини, U_g визначено (2.1), p - тиск в рідині.

Потенціал сили тяжіння U_g було визначено в (2.1) як $U_g = -\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}'$, або, згадуючи, що $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_0 + \mathbf{r}$, а $\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}'_0$ є лише функцією від часу (потенціал визначається з точністю до функції від часу), а не координат, можна вважати, що в неінерційній системі координат $Oxyz$

$$U_g = -\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = (x, y, z). \quad (2.7)$$

Виберемо систему координат $Oxyz$ таким чином, аби $z = 0$ відповідало незбуреній поверхні рідини (статичне положення, коли посудина знаходиться у вертикальному положенні).

Припускаємо, що атмосферний тиск в газі над рідиною є константою та рівний p_0 . Виберемо таке $C(t)$, аби тиск дорівнював p_0 на незбуреній поверхні. Інтеграл Лагранжа–Коші (2.6) приймає тоді вигляд

$$p - p_0 = -\rho \left(\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\text{неінерційна}} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 - \nabla \Phi \cdot (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + U_g \right). \quad (2.8)$$

2.1.2. Крайові умови. Крайова умова на змоченій поверхні баку $S(t)$ вимагає, аби не було перетікання рідини крізь змочену поверхню

баку, тобто нормальна швидкість рідини дорівнює нормальній швидкості абсолютно твердого баку на змоченій поверхні

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] \cdot \mathbf{n} \text{ на } S(t), \quad (2.9)$$

де \mathbf{n} є вектором нормалі до поверхні $S(t)$ та \mathbf{v} - абсолютна швидкість рідини відносно. Ми можемо переписати рівняння (2.9) як

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r} \times \mathbf{n}] \text{ на } S(t). \quad (2.10)$$

Оскільки тиск на вільній поверхні є рівний тиску газу p_0 над рідиною, можна, використовуючи (2.8), записати так звану динамічну крайову умову

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 - (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \Phi + U_g = 0 \text{ на } \Sigma(t). \quad (2.11)$$

Таким чином, ми записали дві умови: на змочених стінках баку (2.10) та на невідомій вільній поверхні (2.11). Додатково необхідно додати кінетичну крайову умову на вільній поверхні, яка забезпечує той факт, що частинка рідини завжди перебуває на вільній поверхні, тобто немає розриву суцільності на $\Sigma(t)$. Якщо використовується система координат $Oxyz$, то найбільш загальне, неявне визначення вільної поверхні асоціюється з рівнянням

$$Z(x, y, z, t) = 0. \quad (2.12)$$

Те, що частинки рідини залишаються на вільній поверхні означає, що матеріальна похідна від Z в інерційній системі координат $O'x'y'z'$ рівна нулю, тобто

$$0 = \frac{D'Z}{Dt} = \left. \frac{\partial Z}{\partial t} \right|_{O'x'y'z'} + \mathbf{v} \cdot \nabla Z = \left. \frac{\partial Z}{\partial t} \right|_{Oxyz} - \mathbf{v}_b \cdot \nabla Z + \nabla \Phi \cdot \nabla Z \text{ на } \Sigma(t), \quad (2.13)$$

де ми використали формулу для похідної за часом в неінерційній системі (як у рівнянні (2.5)). Вектор зовнішньої нормалі до вільної поверхні $\Sigma(t)$

може бути записаний як

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla Z}{|\nabla Z|} \text{ на } \Sigma(t), \quad (2.14)$$

що перетворює рівняння (2.13) до шуканої форми кінетичної крайової умови

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r} \times \mathbf{n}] - \frac{\partial Z / \partial t}{|\nabla Z|} \text{ на } \Sigma(t), \quad (2.15)$$

де похідна по часу обчислюється у системі координат $Oxyz$.

У практично важливих випадках, коли стінка посудини паралельна осі z в околі вільної поверхні, можна скористатися нормальною формою представлення вільної поверхні

$$Z(x, y, z, t) = z - \zeta(x, y, t) = 0. \quad (2.16)$$

Кінетична крайова умова (2.15) приймає тоді вигляд

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} + \frac{\partial \zeta / \partial t}{\sqrt{1 + (\nabla \zeta)^2}} \text{ на } \Sigma(t), \quad (2.17)$$

Рівності (2.11) та (2.17) є динамічною та кінетичною крайовими умовами, які задаються на рухомій вільній поверхні $\Sigma(t)$.

2.1.3. Збереження маси (об'єму). Маса нестисливої рідини повинна залишатись константою, тобто,

$$M_l = \int_{Q(t)} \rho dQ = \rho Vol = const, \quad (2.18)$$

де M_l та Vol є масою та об'ємом рідини відповідно. Рівняння (2.18) не задовільняється автоматично. Воно обмежує допустимий клас функцій Z (чи ζ), які задають рух вільної поверхні, тобто з точки зору аналітичної механіки (2.18) є геометричною (голономною) в'яззю.

2.1.4. Початкові умови та умови періодичності. Рівняння (2.2), (2.10), (2.11), (2.13), (2.18) складають крайову задачу з вільною поверхнею, яка описує рух рідини у рухомому резервуарі. Ця задача потребує або початкові умови, або, у випадку періодичних векторних функцій $\mathbf{v}_0(t)$ та $\boldsymbol{\omega}(t)$, умови періодичності. Фізично, початкові умови визначають початковий сценарій коливання рідини. Розв'язок задачі з початковими умовами описує так звані перехідні рухи системи, на які впливають рух баку ($\mathbf{v}_0(t), \boldsymbol{\omega}(t)$), а також початкові збурення вільної поверхні та поля швидкості. Початковими умовами (Коші) є

$$Z(x, y, z, t_0) = Z_0(x, y, z); \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{\Sigma(t_0)} = V_0(x, y, z)|_{\Sigma(t_0)}, \quad (2.19)$$

де відома функція Z_0 визначає початкову позицію вільної поверхні $\Sigma(t_0)$: $Z_0(x, y, z) = 0$, та $V_0(x, y, z)$ задає початкові абсолютні нормальні швидкості на вже визначеній поверхні $\Sigma(t_0)$. За допомогою кінетичної умови (2.15), початкові умови (2.19) можна переписати у вигляді

$$Z(x, y, z, t_0) = Z_0(x, y, z); \quad \left. \frac{\partial Z}{\partial t} \right|_{t=t_0} = Z_1(x, y, z)|_{\Sigma(t_0)}, \quad (2.20)$$

де Z_0 та Z_1 дані функції від просторових змінних.

Крайова задача (2.2), (2.10), (2.11), (2.13), (2.18) із умовою періодичності визначає періодичні (усталені) хвильові рухи рідини. Стійкі усталені хвилі реалізуються після завершення перехідних процесів, пов'язаних із початковими умовами типу (2.20). Математично, умова періодичності записується у вигляді

$$Z(x, y, z, t + T) = Z(x, y, z, t), \quad (2.21)$$

де $\mathbf{v}_0(t+T) = \mathbf{v}_0(t)$ та $\boldsymbol{\omega}(t+T) = \boldsymbol{\omega}(t)$, а T – відомий період. Умова (2.21) гарантує виконання періодичності поля швидкостей, яке визначається із задачі Неймана (2.2), (2.9), (2.17).

2.2. Варіаційне формулювання Люка-Бейтмена

Твердження 1.1 (принцип Гамільтона–Остроградського у формі Люка-Бейтмена). *Гладкі розв'язки крайової задачі з вільною поверхнею (2.2), (2.10), (2.11), (2.13), (2.18) співпадають із екстремумом функціоналу дії за Люке–Бейтменом*

$$W(Z, \Phi) = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

$$L = \int_{Q(t)} (p-p_0) dQ = -\rho \int_{Q(t)} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 - \nabla \Phi \cdot (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + U_g \right] dQ, \quad (2.22)$$

для ізохронних незалежних гладких варіацій

$$\begin{aligned} \delta \Phi(x, y, z, t_1) = 0, \quad \delta \Phi(x, y, z, t_2) = 0; \\ \delta Z(x, y, z, t_1) = 0, \quad \delta Z(x, y, z, t_2) = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Це варіаційне формулювання було доведено в [224]. Опишемо деякі деталі цього доведення.

Припустимо, що можна задати дві невідомі функції у вигляді $\Phi = \Phi(x, y, z, t, \alpha_1)$ та $Z = Z(x, y, z, t, \alpha_2)$, де два малі параметри α_1 та α_2 є незалежними та їхні нулі відповідають екстремальним точкам функціоналу W . Підстановка Φ і Z в (2.22) дає функцію від двох дійсних змінних α_1 та α_2 ($W = W(\alpha_1, \alpha_2)$). Обрахунок варіацій в точці $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ буде таким

$$\begin{aligned} dW(0, 0) = \left. \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} \right|_{0,0} d\alpha_1 + \left. \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} \right|_{0,0} d\alpha_2 = \delta W = \\ \frac{\partial W}{\partial Z} \underbrace{\frac{\partial Z}{\partial \alpha_2} d\alpha_2}_{\delta Z} + \frac{\partial W}{\partial \Phi} \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} d\alpha_1}_{\delta \Phi} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\rho \int_{t_1}^{t_2} \left(- \int_{\Sigma(t)} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 - \nabla \Phi \cdot (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + U_g \right] \frac{\partial Z}{|\nabla Z|} dS \right. \\
& \left. + \int_{Q(t)} \left[\nabla \Phi \cdot \nabla(\delta \Phi) + \frac{\partial(\delta \Phi)}{\partial t} - \nabla(\delta \Phi) \cdot (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right] dQ \right) dt = 0.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Тут ми врахували, що потенціал гравітації U_g та $(\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ не залежать від α_1 та α_2 ; більше того, їх варіації нульові.

Оскільки δZ та $\delta \Phi$ незалежні, можна вибрати $\delta \Phi = 0$. Розглядаючи довільні варіації δZ , рівність (2.24) виводить динамічну крайову умову (2.11) на $\Sigma(t)$. Коли $\delta Z = 0$, $\delta \Phi \neq 0$, інтеграл з (2.24) може бути модифікованим, використовуючи формулу Гріна, теорему Гауса та транспортну теорему Рейнольдза

$$\begin{aligned}
\int_{Q(t)} \nabla \Phi \cdot \nabla(\delta \Phi) dQ &= \int_{S(t)+\Sigma(t)} \delta \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS - \int_{Q(t)} \nabla^2 \Phi \delta \Phi dQ, \\
\int_{Q(t)} \mathbf{v}_0 \cdot \nabla(\delta \Phi) dQ &= \int_{Q(t)} \nabla(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}) \cdot \nabla(\delta \Phi) dQ = \int_{S(t)+\Sigma(t)} \delta \Phi (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) dS, \\
\int_{Q(t)} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla(\delta \Phi) dQ &= \int_{S(t)+\Sigma(t)} \delta \Phi ((\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}) dS, \\
\int_{Q(t)} \frac{\partial(\delta \Phi)}{\partial t} dQ &= \frac{d}{dt} \int_{Q(t)} \delta \Phi dQ + \int_{\Sigma(t)} (\delta \Phi) \frac{\partial Z / \partial t}{|\nabla Z|} dS. \tag{2.25}
\end{aligned}$$

Вони перетворюють останній інтеграл до варіаційної рівності

$$\begin{aligned}
\delta W|_{\delta Z=0} &= \rho \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{S(t)} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} - (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \right] \delta \Phi dS - \int_{Q(t)} \nabla^2 \Phi \delta \Phi dQ \right. \\
& \left. + \int_{\Sigma(t)} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} - (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} + \frac{\partial Z}{\partial t} / |\nabla Z| \right] \delta \Phi dS \right) dt - \rho \int_{Q(t)} \delta \Phi dQ \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} = 0,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

де остання величина, $\rho \int_{Q(t)} \delta \Phi dQ \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} = 0$, дає нульовий вклад, оскільки $\delta \Phi = 0$ для $t = t_1, t_2$ відповідно до умов (2.23). З варіаційної рівності (2.26) випливають кінетичні співвідношення крайової задачі.

2.3. Загальні нелінійні модальні рівняння Майлза-Луковського

Дана дисертаційна робота використовує принцип Люка-Бейтмена і модальний підхід для виводу системи нелінійних модальних рівнянь. Під модальною системою ми розуміємо систему звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат гідродинамічної системи. Аналітичні методи, що роблять це принципово можливим, запропоновано в [107], [224] та [16].

2.3.1. Модальне представлення вільної поверхні та потенціалу швидкості. Модальний метод використовує представлення розв'язків у вигляді рядів Фур'є із залежними від часу невідомими коефіцієнтами, які формально можуть бути розглянуті як узагальнені координати даної гідромеханічної системи. Оскільки функції, що описують вільну поверхню та потенціал швидкості (Z та Φ) є незалежними, необхідно мати два представлення Фур'є, для вільної поверхні та потенціалу швидкостей Φ відповідно.

Представимо вільну поверхню $\Sigma(t)$ через рівняння $z = \zeta(x, y, t)$ ($Z(x, y, z, t) = z - \zeta(x, y, t) = 0$) в неінерційній системі координат $Oxyz$,

$$\zeta(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) f_i(x, y). \quad (2.27)$$

Функціональний базис $f_i(x, y)$ не обов'язково презентує власні форми коливання рідини (стоячі хвилі) коливання рідини, але представлення (2.27) повинно використовувати повний набір базисних функцій $\{f_i\}$. Залежні від часу функції $\{\beta_i\}$ інтерпретуються як *узагальнені координати гідродинамічної системи (модальні функції)*. Необхідною умовою є збереження маси рідини, тобто $\int_{\Sigma_0} f_i(x, y) dx dy = 0$, $\forall i$, де Σ_0 - незбурена вільна поверхня. Ця умова еквівалентна умові (2.18).

Представлення у вигляді ряду Фур'є також потрібне для $\Phi(x, y, z, t)$.

Воно може бути розглянуто як узагальнення модального представлення для лінійного випадку, а саме

$$\Phi(x, y, z, t) = \mathbf{v}_0(t) \cdot \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}(t) \cdot \boldsymbol{\Omega}(x, y, z, t) + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} R_n(t) \varphi_n(x, y, z)}_{\varphi(x, y, z, t)}, \quad (2.28)$$

де функціональний базис $\{\varphi_n\}$ не обов'язково є пов'язаний із власними модами (формами) коливання рідини, а $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1(x, y, z, t), \Omega_2(x, y, z, t), \Omega_3(x, y, z, t))^T$ - потенціал Стокса-Жуковського, який є функцією просторових координат та узагальнених координат і задовільняє наступну задачу Неймана

$$\begin{aligned} \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} = 0 \text{ в } Q(t), \quad \frac{\delta \Omega_1}{\delta n} = yn_z - zn_y; \quad \frac{\delta \Omega_2}{\delta n} = zn_x - xn_z; \\ \frac{\delta \Omega_3}{\delta n} = xn_y - yn_x \text{ на } S(t) \cup \Sigma(t), \end{aligned} \quad (2.29)$$

де ми позначили компоненти зовнішньої нормалі як $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$.

Функціональний базис $\{\varphi_n(x, y, z)\}$ у представленні (2.28) повинен бути повним для будь-яких допустимих геометрій $Q(t)$. Коли справа доходить до практичних застосувань, $\{\varphi_n(x, y, z)\}$ зазвичай співпадає з власними формами коливання рідини. Тоді Φ (із рівняння (2.28)) автоматично задовільнятиме рівняння Лапласа та граничні крайові умови на поверхні баку. Але дві крайові умови на вільній поверхні не задовільняються.

Оскільки обидві, кінетична та динамічна граничні умови є природними у варіаційному формулюванні Люка-Бейтмена, варіаційний формалізм Люка-Бейтмена може бути розглянутий як інструмент для отримання звичайних диференціальних рівнянь, що пов'язують залежні від часу узагальнені координати $\beta_i(t)$ та узагальнені швидкості $R_n(t)$. Такі диференціальні рівняння, принаймні їх динамічну складову, можна трактувати як рівняння Ейлера-Лагранжа другого роду відносно β_i та R_n

для гідромеханічної системи із нескінченною кількістю ступенів вільності, які відповідають узагальненим координатам в (2.27).

2.3.2. Модальна система (рівняння Ейлера-Лагранжа), яка впливає із формулювання Люка-Бейтмена. Після підстановки (2.28) в (2.22), функція Лагранжа в принципі Люка-Бейтмена приймає наступний вигляд

$$L = -\rho \int_{Q(t)} \left[\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \frac{1}{2} \nabla(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \nabla(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega})) - \frac{1}{2} \mathbf{v}_0^2 - \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}_0) - \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \nabla\varphi) + \nabla(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot \varphi \right] dQ + L_r, \quad (2.30)$$

де

$$L_r = -\rho \int_{Q(t)} \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + U_g \right] dQ. \quad (2.31)$$

Інтегральні вирази в (2.30) потребують деяких спрощень. Вони слідує із векторної алгебри, теореми Гауса та крайової умови Неймана (2.29). Два підінтегральні доданки у рівнянні (2.30) скасовують одне одного, тобто

$$\begin{aligned} & \int_{Q(t)} [-(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla\varphi + \nabla(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla\varphi] dQ \\ &= \int_{S(t)+\Sigma(t)} \left(\frac{\partial(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega})}{\partial n} - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \right) \varphi dS = 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Інші величини, що появляються в інтегралі рівняння (2.30), можуть компактно бути записані через тензор інерції $J^1 = J^1(x, y, z, t)$, компонентами якого є наступні інтеграли відносно потенціалів Стокса-

Жуковського (2.29)

$$\begin{aligned}
 J_{11}^1 &= \rho \int_{Q(t)} \left(y \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} - z \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} \right) dQ = \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} \Omega_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial n} dS, \\
 J_{22}^1 &= \rho \int_{Q(t)} \left(z \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} - x \frac{\partial \Omega_2}{\partial z} \right) dQ = \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} \Omega_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial n} dS, \\
 J_{33}^1 &= \rho \int_{Q(t)} \left(x \frac{\partial \Omega_3}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega_3}{\partial x} \right) dQ = \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} \Omega_3 \frac{\partial \Omega_3}{\partial n} dS,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{12}^1 &= J_{21}^1 = \rho \int_{Q(t)} \left(z \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} - x \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} \right) dQ = \rho \int_{Q(t)} \left(y \frac{\partial \Omega_2}{\partial z} - z \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} \right) dQ \\
 &= \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} \Omega_1 \frac{\partial \Omega_2}{\partial n} dS = \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} \Omega_2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial n} dS, \\
 J_{13}^1 &= J_{31}^1 = \rho \int_{Q(t)} \left(x \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} \right) dQ = \rho \int_{Q(t)} \left(y \frac{\partial \Omega_3}{\partial z} - z \frac{\partial \Omega_3}{\partial y} \right) dQ \\
 &= \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} \Omega_1 \frac{\partial \Omega_3}{\partial n} dS = \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} \Omega_3 \frac{\partial \Omega_1}{\partial n} dS, \\
 J_{23}^1 &= J_{32}^1 = \rho \int_{Q(t)} \left(x \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} \right) dQ = \rho \int_{Q(t)} \left(z \frac{\partial \Omega_3}{\partial x} - x \frac{\partial \Omega_3}{\partial z} \right) dQ \\
 &= \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} \Omega_2 \frac{\partial \Omega_3}{\partial n} dS = \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} \Omega_3 \frac{\partial \Omega_2}{\partial n} dS. \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

Означення для J_{ij}^1 у рівнянні (2.33) отримано із використанням першої тотожності Гріна та теореми Гауса. Тензор інерції асоціюється із наступною квадратичною формою

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} \omega_1^2 J_{11}^1 - \frac{1}{2} \omega_2^2 J_{22}^1 - \frac{1}{2} \omega_3^2 J_{33}^1 - \omega_1 \omega_2^2 J_{12}^1 - \omega_1 \omega_3^2 J_{13}^1 - \omega_2 \omega_3^2 J_{23}^1 \\
 & \quad + \frac{1}{2} \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial n} \cdot \boldsymbol{\omega} \right) dS = \\
 & = \frac{1}{2} \rho \int_{Q(t)} \left(\frac{1}{2} \nabla (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{r} \times \nabla (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega})) \right) dQ. \quad (2.34)
 \end{aligned}$$

Останній об'ємний інтеграл є частиною рівняння (2.30). Після спро-

щень, (2.30) виглядатиме наступним чином

$$\begin{aligned}
L = & -[\dot{v}_{O1}l_1 + \dot{v}_{O2}l_2 + \dot{v}_{O3}l_3 + \dot{\omega}_1l_{1\omega} + \dot{\omega}_2l_{2\omega} + \dot{\omega}_3l_{3\omega} + \omega_1l_{1\omega t} + \omega_2l_{2\omega t} + \omega_3l_{3\omega t} \\
& - \frac{1}{2}(\omega_1^2J_{11}^1 + \omega_2^2J_{22}^1 + \omega_3^2J_{33}^1) - \omega_1\omega_2J_{12}^1 - \omega_1\omega_3J_{13}^1 - \omega_2\omega_3J_{23}^1 \\
& - \frac{1}{2}M_1(v_{O1}^2 + v_{O2}^2 + v_{O3}^2) + (\omega_2v_{O3} - \omega_3v_{O2})l_1 \\
& + (\omega_3v_{O1} - \omega_1v_{O3})l_2 + (\omega_1v_{O2} - \omega_2v_{O1})l_3] + L_r, \quad (2.35)
\end{aligned}$$

де M_i - маса рідини та

$$\begin{aligned}
l_{k\omega} = \rho \int_{Q_t} \Omega_k dQ; \quad l_{k\omega t} = \rho \int_{Q_t} \frac{\partial \Omega_k}{\partial t} dQ; \\
l_1 = \rho \int_{Q(t)} x dQ; \quad l_2 = \rho \int_{Q(t)} y dQ; \quad l_3 = \rho \int_{Q(t)} z dQ. \quad (2.36)
\end{aligned}$$

Вектори $\mathbf{l}(t) = (l_1, l_2, l_3)$, $\mathbf{l}_\omega(t) = (l_{1\omega}, l_{2\omega}, l_{3\omega})$ та $\mathbf{l}_{\omega t}(t) = (l_{1\omega t}, l_{2\omega t}, l_{3\omega t})$ є функціями $\{\beta_i\}$ та $\{\dot{\beta}_i\}$. Більше того, компонента (2.31) повинна враховуватись у модальному представленні (2.28), звідки отримуємо наступне

$$\begin{aligned}
L_r = & -\rho \int_{Q(t)} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \dot{R}_n \varphi_n + \frac{1}{2} \sum_{n,k=1}^{\infty} R_n R_k (\nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi_k) + U_s \right] dQ \\
= & - \left[\sum_{n=1}^{\infty} D_n \dot{R}_n + \frac{1}{2} \sum_{n,k=1}^{\infty} D_{nk} R_n R_k - g_1 l_1 - g_2 l_2 - g_3 l_3 - m_1 g \cdot r'_0 \right], \quad (2.37)
\end{aligned}$$

де

$$A_n = \rho \int_{Q(t)} \varphi_n dQ, \quad A_{nk} = A_{kn} = \rho \int_{Q(t)} (\nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi_k) dQ. \quad (2.38)$$

Варіаційний принцип Люка-Бейтмена, рівняння (2.22) та (2.23), розглядають L як функцію від двох незалежних змінних $\zeta(x, y, t)$ та $\Phi(x, y, z, t)$. Після підстановки представлень (2.27) та (2.28), функція Лагранжа L виражається через рівняння (2.35) та (2.37) і стає функцією від

незалежних узагальнених координат $\{\beta_i\}$ та швидкостей $\{R_n\}$. Зауважи-мо, що інтеграли в рівняннях (2.33), (2.36) та (2.38) є функціями від $\{\beta_i\}$. Незалежні варіації функціоналу дії $W = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ (через $\delta\zeta$ та $\delta\Phi$) повинні бути пов'язані із незалежними варіаціями $\delta\beta_i$ та δR_n , відповідно. Це дає наступну варіаційну рівність:

$$\begin{aligned} \delta W = \int_{t_1}^{t_2} & \left[\sum_n A_n \delta \dot{R}_n + \sum_n A_{nk} R_k \delta R_n \right. \\ & + \left(\sum_n \dot{R}_n \frac{\partial A_n}{\partial \beta_i} + \omega_1 \frac{\partial l_{1\omega t}}{\partial \beta_i} + \omega_2 \frac{\partial l_{2\omega t}}{\partial \beta_i} + \omega_3 \frac{\partial l_{3\omega t}}{\partial \beta_i} \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n,k} R_n R_k \frac{\partial A_{nk}}{\partial \beta_i} + \dot{\omega}_1 \frac{\partial l_{1\omega}}{\partial \beta_i} + \dot{\omega}_2 \frac{\partial l_{2\omega}}{\partial \beta_i} + \dot{\omega}_3 \frac{\partial l_{3\omega}}{\partial \beta_i} \\ & + (\dot{v}_{O1} - g_1 + \omega_2 v_{O3} - \omega_3 v_{O2}) \frac{\partial l_1}{\partial \beta_i} + (\dot{v}_{O2} - g_2 + \omega_3 v_{O1} - \omega_1 v_{O3}) \frac{\partial l_2}{\partial \beta_i} \\ & + (\dot{v}_{O3} - g_3 + \omega_1 v_{O2} - \omega_2 v_{O1}) \frac{\partial l_3}{\partial \beta_i} - \frac{1}{2} \omega_1^2 \frac{\partial J_{11}^1}{\partial \beta_i} - \frac{1}{2} \omega_2^2 \frac{\partial J_{22}^1}{\partial \beta_i} - \frac{1}{2} \omega_3^2 \frac{\partial J_{33}^1}{\partial \beta_i} \\ & \left. \left. - \omega_1 \omega_2 \frac{\partial J_{12}^1}{\partial \beta_i} - \omega_1 \omega_3 \frac{\partial J_{13}^1}{\partial \beta_i} - \omega_2 \omega_3 \frac{\partial J_{23}^1}{\partial \beta_i} \right) \delta \beta_i \right. \\ & \left. + \left(\omega_1 \frac{\partial l_{1\omega t}}{\partial \dot{\beta}_i} + \omega_2 \frac{\partial l_{2\omega t}}{\partial \dot{\beta}_i} + \omega_3 \frac{\partial l_{3\omega t}}{\partial \dot{\beta}_i} \right) \delta \dot{\beta}_i \right] dt = 0, \quad i \geq 1. \quad (2.39) \end{aligned}$$

Доданки, які пропорційні до $\delta \dot{R}_n$ та $\delta \dot{\beta}_i$ в останньому виразі (2.39), можуть бути проінтегровані за частинами і, використовуючи факт

$$\delta R_n(t_1) = \delta R_n(t_2) = \delta \beta_i(t_1) = \delta \beta_i(t_2) = 0,$$

зведені до виразів через δR_n та $\delta \beta_i$ замість $\delta \dot{R}_n$ та $\delta \dot{\beta}_i$. Ми отримаємо наступну нескінченну систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь (рівняння *Майлза-Луковського*) відносно $\{R_n(t)\}$ та $\{\beta_i(t)\}$

$$\sum_i \frac{\partial A_n}{\partial \beta_i} \dot{\beta}_i - \sum_k R_k A_{nk} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_n \dot{R}_n \frac{\partial A_n}{\partial \beta_i} + \frac{1}{2} \sum_n \sum_k \frac{\partial A_{nk}}{\partial \beta_i} R_n R_k + \dot{\omega}_1 \frac{\partial l_{1\omega}}{\partial \beta_i} + \dot{\omega}_2 \frac{\partial l_{2\omega}}{\partial \beta_i} + \dot{\omega}_3 \frac{\partial l_{3\omega}}{\partial \beta_i} \\
& + \omega_1 \frac{\partial l_{1\omega t}}{\partial \beta_i} + \omega_2 \frac{\partial l_{2\omega t}}{\partial \beta_i} + \omega_3 \frac{\partial l_{3\omega t}}{\partial \beta_i} - \frac{d}{dt} \left(\omega_1 \frac{\partial l_{1\omega t}}{\partial \dot{\beta}_i} + \omega_2 \frac{\partial l_{2\omega t}}{\partial \dot{\beta}_i} + \omega_3 \frac{\partial l_{3\omega t}}{\partial \dot{\beta}_i} \right) + \\
& + (\dot{v}_{O1} - g_1 + \omega_2 v_{O3} - \omega_3 v_{O2}) \frac{\partial l_1}{\partial \beta_i} + (\dot{v}_{O2} - g_2 + \omega_3 v_{O1} - \omega_1 v_{O3}) \frac{\partial l_2}{\partial \beta_i} \\
& + (\dot{v}_{O3} - g_3 + \omega_1 v_{O2} - \omega_2 v_{O1}) \frac{\partial l_3}{\partial \beta_i} - \frac{1}{2} \omega_1^2 \frac{\partial J_{11}^1}{\partial \beta_i} - \frac{1}{2} \omega_2^2 \frac{\partial J_{22}^1}{\partial \beta_i} - \frac{1}{2} \omega_3^2 \frac{\partial J_{33}^1}{\partial \beta_i} \\
& - \omega_1 \omega_2 \frac{\partial J_{12}^1}{\partial \beta_i} - \omega_1 \omega_3 \frac{\partial J_{13}^1}{\partial \beta_i} - \omega_2 \omega_3 \frac{\partial J_{23}^1}{\partial \beta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.41)
\end{aligned}$$

Якщо посудина має вертикальну циліндричну форму в околі незбуреної вільної поверхні Σ_0 , значення $\partial l_k / \partial \delta_i$ можуть бути записані у вигляді

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l_3}{\partial \beta_i} = \rho \int_{\Sigma_0} f_i^2 dS \beta_i = \lambda_{3i} \beta_i; \quad \frac{\partial l_2}{\partial \beta_i} = \rho \int_{\Sigma_0} y f_i^2 dS = \lambda_{2i}, \\
\frac{\partial l_1}{\partial \beta_i} = \rho \int_{\Sigma_0} x f_i^2 dS = \lambda_{1i}. \quad (2.42)
\end{aligned}$$

Систему (2.40)-(2.41) було виведено незалежно Майлзом та Луковським в 1976 році. Її останній вигляд (для довільного руху баку) було отримано Луковським. Надалі нам буде потрібна ця система, переписана у спеціальному вигляді, придатному для кругового вертикального циліндричного баку.

2.4. Спеціальна форма модальної системи Майлза-Луковського (2.40), (2.41) для вертикального циліндричного кругового баку, що виконує осциляційні рухи з малою амплітудою

В подальшому ми зосередимося на (спеціальному) явному вигляді модальної системи для вертикального контейнера із круговим перерізом радіусу R_0 , що коливається із малими амплітудами у просторі, що описується узагальненими координатами $\eta_1(t)$ і $\eta_2(t)$ (відповідають за

горизонтальні поступальні рухи посудини) та кутовими збуреннями, які описуються $\eta_4(t)$ і $\eta_5(t)$. Обертальні рухи навколо вісі Oz (yaw) не можуть породити збурення у рамках моделі ідеальної рідини. Вертикальні збурення не розглядаються в даній роботі. Малість кутових збурень означає, що квадратами $\eta_4(t)$ та $\eta_5(t)$ можна знехтувати, отже, миттєва кутова швидкість $\boldsymbol{\omega} = (\dot{\eta}_4, \dot{\eta}_5, 0)$.

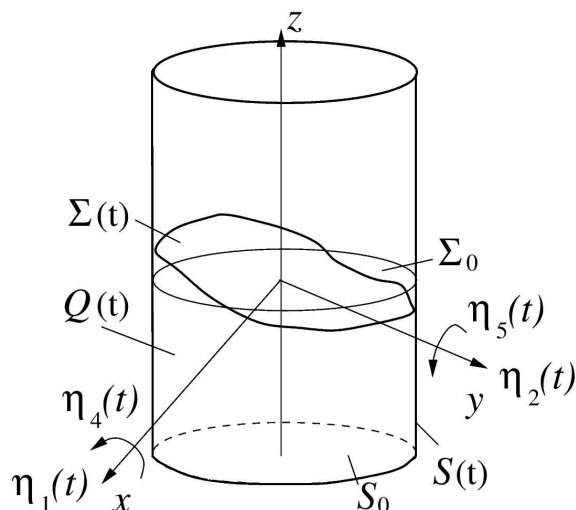


Рис. 2.2: Область рідини $Q(t)$ є обмеженою вільною поверхнею (рідини в посудині) $\Sigma(t)$ та змоченою поверхнею посудини $S(t)$. Коливання рідини розглядаються у зв'язаній з баком неінерційній системі координат $Oxyz$, в якій координатна площина Oxy співпадає із незбуреною вільною поверхнею Σ_0 ; Oz - вісь симетрії. Осциляційні збурення баку описуються узагальненими координатами $\eta_1(t)$ (surge), $\eta_4(t)$ (roll), $\eta_2(t)$ (sway), $\eta_5(t)$ (pitch). Збурення вважаються малими відносно радіусу баку R_0 .

Як показано у попередньому параграфі, варіаційний принцип Люка-Бейтмена є базою для реалізації модального методу, який базується на розкладі в ряди Фур'є розв'язку (ζ та Φ). Залежні від часу коефіцієнти в цих представленнях Фур'є вважаються незалежними змінними за часом (узагальненими координатами та швидкостями).

Представлення Фур'є зазвичай базуються на власних формах коли-

вання рідини, що є власними функціями спектральної крайової задачі

$$\nabla^2 \varphi = 0 \text{ в } Q_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } S_{0e}, S_{0i}, S_{0b}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \kappa \varphi \text{ та } \Sigma_0, \quad \int_{\Sigma_0} \varphi \, dS = 0 \quad (2.43)$$

сформульованої у гідростатичній області Q_0 , що обмежена незбуреною вільною поверхнею Σ_0 та змоченою поверхнею бака S_0 .

В даному параграфі та всюди в інших розділах ми вважаємо, що задача переписана до безрозмірної форми після введення характерного лінійного розміру R_0 (радіуса) та характерного часу $T = 1/\sigma$, де T – характерний період часу (σ – кутова частота). У якості кутової частоти σ ми використовуємо частоту коливання баку.

Введемо малий параметр $\epsilon \ll 1$, що характеризуватиме безрозмірне збурення посудини, тобто

$$\eta_i(t) = O(\epsilon), \quad i = 1, 2, 4, 5. \quad (2.44)$$

Геометричні позначення на Рис. 2.2 включають залежну від часу область рідини $Q(t)$ з вільною поверхнею $\Sigma(t)$ та змоченою поверхнею $S(t)$. Вільна поверхня $\Sigma(t)$ задається у вигляді $z = \zeta(r, \theta, t)$, а рух рідини задається потенціалом швидкостей $\Phi(r, \theta, z, t)$. Невідомі ζ та Φ визначено в циліндричній координатній системі, пов'язаній з баком. Функції ζ та Φ можуть бути знайдені або із відповідної крайової задачі, або еквівалентного їй варіаційного формулювання.

Нормалізована спектральна крайова задача (2.43) має аналітичний розв'язок (див. [13, 225])

$$\varphi_{M_i}(r, z, \theta) = \mathcal{R}_{M_i}(r) \mathcal{Z}_{M_i}(z) \frac{\cos}{\sin}(M\theta), \quad M = 0, \dots; \quad i = 1, \dots, \quad (2.45)$$

де

$$\mathcal{R}_{M_i}(r) = \alpha_{M_i} J_M(k_{M_i} r), \quad \mathcal{Z}_{M_i}(z) = \frac{\cosh(k_{M_i}(z+h))}{\cosh(k_{M_i} h)}. \quad (2.46)$$

Тут, $J_M(\cdot)$ – функція Бесселя першого роду. Радіальні хвильові числа k_{M_i} визначаються з рівнянь $J'_M(k_{M_i}) = 0$. Нормалізуючі множники α_{M_i}

впливають з умови ортогональності

$$\int_0^1 r \mathcal{R}_{Mi}(r) \mathcal{R}_{Mj}(r) dr = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, \quad (2.47)$$

де δ_{ij} - символ Кронекера. Спектральний параметр κ_{Mi} та власні частоти коливань σ_{Mi} визначаються за формулами

$$\kappa_{Mi} = k_{Mi} \tanh(k_{Mi}h), \quad \sigma_{Mi}^2 = \kappa_{Mi} g/R_0, \quad (2.48)$$

де g - прискорення сили тяжіння (розмірне).

В подальшому розглядаємо виключно низькоамплітудні кутові збурення баку (2.44), тому нам потрібні будуть лише лінеаризовані потенціали Стокса-Жуковського $\Omega_{0i}(r, z, \theta)$, $i = 1, 2, 3$, які є гармонічними функціями, що задовільняють умови Неймана

$$\frac{\partial \Omega_{01}}{\partial n} = -(zn_r - rn_z) \sin \theta, \quad \frac{\partial \Omega_{02}}{\partial n} = (zn_r - rn_z) \cos \theta, \quad \frac{\partial \Omega_{03}}{\partial n} = 0 \quad (2.49)$$

на Σ_0 та S_0 (позначення на Рис. 2.2), де n_r та n_z є зовнішніми компонентами нормалі у r - та z - напрямках таким чином, що $n_z = 0$ на вертикальних стінках, але $n_r = 0$ на Σ_0 .

Це означає, що $\Omega_{01} = -F(r, z) \sin \theta$, $\Omega_{02} = F(r, z) \cos \theta$, $\Omega_{03} = 0$, де

$$F(r, z) = rz + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2 P_n}{k_{1n}} \mathcal{R}_{1n}(r) \frac{\sinh(k_{1n}(z + \frac{1}{2}h))}{\cosh(\frac{1}{2}k_{1n}h)}, \quad P_n = \int_{r_1}^1 r^2 \mathcal{R}_{1n}(r) dr. \quad (2.50)$$

Цей розв'язок можна знайти, наприклад, у главі 5 книги [13].

Нелінійну модальну систему Майлза-Луковського перепишемо відносно узагальнених координат ($p_{Mi}(t)$ та $r_{mi}(t)$) і швидкостей ($P_{Mi}(t)$ та $R_{mi}(t)$), які вводимо наступним чином

$$\zeta(r, \theta, t) = \sum_{M,i}^{I_{\theta}, I_r} \mathcal{R}_{Mi}(r) \cos(M\theta) p_{Mi}(t) + \sum_{m,i}^{I_{\theta}, I_r} \mathcal{R}_{mi}(r) \sin(m\theta) r_{mi}(t), \quad (2.51a)$$

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, z, t) = & \dot{\eta}_1(t) r \cos \theta + \dot{\eta}_2(t) r \sin \theta + F(r, z)[- \dot{\eta}_4(t) \sin \theta + \dot{\eta}_5(t) \cos \theta] \\ & + \sum_{M,i}^{I_\theta, I_r} \mathcal{R}_{Mi}(r) \mathcal{Z}_{Mi}(z) \cos(M\theta) P_{Mi}(t) + \sum_{m,i}^{I_\theta, I_r} \mathcal{R}_{mi}(r) \mathcal{Z}_{mi}(z) \sin(m\theta) R_{mi}(t), \end{aligned} \quad (2.51b)$$

$I_\theta, I_r \rightarrow \infty$. Тут та надалі, всі великі індекси сумування означають сумування від нуля до I_θ , але малі індекси означають зміну від одного до I_θ , або I_r .

Модальне представлення (2.51) є спеціальним виглядом (2.27), (2.28). Використовуючи (2.51), веде, в свою чергу, до спеціальної структури в модальних рівняннях Майлза-Луковського (2.40), (2.41), якщо ми додатково припускаємо (2.44) та розглядаємо виключно резонансне збурення коливань рідини, коли гідродинамічні *узагальнені координати* є асимптотично більшими, ніж збурення. Математично, останнє означає, що

$$O(\epsilon) \lesssim p_{Mi}(t), r_{mi}(t) \text{ та } O(\epsilon) \lesssim P_{Mi}(t), R_{mi}(t). \quad (2.52)$$

Далі ми також нехтуємо членами порядку $o(\epsilon)$, а отже, ряд членів в (2.41), які зв'язані із нелінійним потенціалом Стокса-Жуковського, тепер лінійно залежать від $\eta_i(t)$, $i = 4, 5$, як це відбувається в лінійній теорії коливання рідини. В той же час, завдяки (2.52), ми зберігаємо повну нелінійність відносно узагальнених координат та швидкостей, пов'язаних із рідиною.

Результатом є *нелінійна модальна система* Майлза-Луковського (2.40), (2.41), переписана у вигляді

$$\sum_{M,n}^{I_\theta, I_r} \frac{\partial A_{Ab}^p}{\partial p_{Mn}} \dot{p}_{Mn} + \sum_{m,n}^{I_\theta, I_r} \frac{\partial A_{Ab}^p}{\partial r_{mn}} \dot{r}_{mn} = \sum_{M,n}^{I_\theta, I_r} A_{(Ab)(Mn)}^{pp} P_{Mn} + \sum_{m,n}^{I_\theta, I_r} A_{(Ab),(Mn)}^{pr} R_{mn}, \quad (2.53a)$$

$$\sum_{M,n}^{I_\theta, I_r} \frac{\partial A_{ab}^r}{\partial p_{Mn}} \dot{p}_{Mn} + \sum_{m,n}^{I_\theta, I_r} \frac{\partial A_{ab}^r}{\partial r_{mn}} \dot{r}_{mn} = \sum_{M,n}^{I_\theta, I_r} A_{(Mn),(ab)}^{pr} P_{Mn} + \sum_{m,n}^{I_\theta, I_r} A_{(ab)(mn)}^{rr} R_{mn}, \quad (2.53b)$$

$A = 0, \dots, I_\theta; a = 1, \dots, I_\theta; b = 1, \dots, I_r; I_\theta, I_r \rightarrow \infty$ (кінетична підсистема), та

$$\begin{aligned} & \sum_{M,n}^{I_\theta, I_r} \frac{\partial A_{Mn}^p}{\partial p_{Ab}} \dot{P}_{Mn} + \sum_{m,n}^{I_\theta, I_r} \frac{\partial A_{mn}^r}{\partial p_{Ab}} \dot{R}_{mn} + \frac{1}{2} \sum_{ML,nk}^{I_\theta, I_r} \frac{\partial A_{(Mn)(Lk)}^{pp}}{\partial p_{Ab}} P_{Mn} P_{Lk} \\ & + \sum_{Ml,nk}^{I_\theta, I_r} \frac{\partial A_{(Mn),(lk)}^{pr}}{\partial p_{Ab}} P_{Mn} R_{lk} + \frac{1}{2} \sum_{ml,nk}^{I_\theta, I_r} \frac{\partial A_{(mn)(lk)}^{rr}}{\partial p_{Ab}} R_{mn} R_{lk} + g\Lambda_{AA} p_{Ab} \\ & + (\ddot{\eta}_1 - g\eta_5 - S_b \ddot{\eta}_5) \Lambda_{1A} P_b = 0, \quad (2.54a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{M,n}^{I_\theta, I_r} \frac{\partial A_{Mn}^p}{\partial r_{ab}} \dot{P}_{Mn} + \sum_{m,n}^{I_\theta, I_r} \frac{\partial A_{mn}^r}{\partial r_{ab}} \dot{R}_{mn} + \frac{1}{2} \sum_{ML,nk}^{I_\theta, I_r} \frac{\partial A_{(Mn)(Kl)}^{pp}}{\partial r_{ab}} P_{Mn} P_{Lk} \\ & + \sum_{Nl,nk}^{I_\theta, I_r} \frac{\partial A_{(Mn),(lk)}^{pr}}{\partial r_{ab}} P_{Mn} R_{lk} + \frac{1}{2} \sum_{ml,nk}^{I_\theta, I_r} \frac{\partial A_{(mn)(lk)}^{rr}}{\partial r_{ab}} R_{mn} R_{lk} + g\Lambda_{aa} r_{ab} \\ & + (\ddot{\eta}_2 + g\eta_4 + S_b \ddot{\eta}_4) \Lambda_{1a} P_b = 0, \quad (2.54b) \end{aligned}$$

$A = 0, \dots, I_\theta; a = 1, \dots, I_\theta; b = 1, \dots, I_r, I_\theta, I_r \rightarrow \infty$ (динамічна субсистема), де кома між парами індексів, таких як (Ab) , (Mn) , означає, що пари не комутують; коефіцієнти P_b визначені у (2.50),

$$S_b = 2k_{1b}^{-1} \tanh(k_{1b} \frac{h}{2}), \quad \Lambda_{IJ} = \begin{cases} 2\pi, & I = J = 0, \\ \pi\delta_{IJ}, & \text{інакше,} \end{cases} \quad (2.55)$$

де δ_{IJ} - символ Кронекера. Модальна система (2.53), (2.54) містить на-

ступні нелінійні вирази від узагальнених гідродинамічних координат

$$\begin{aligned}
A_{(Ab)(Mn)}^{pp} &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} r \left[\cos A\theta \cos M\theta \mathcal{G}_{(Ab)(Mn)}^{(1)} + \sin A\theta \sin M\theta \mathcal{G}_{(Ab)(Mn)}^{(2)} \right] d\theta dr, \\
A_{(ab)(mn)}^{rr} &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} r \left[\sin a\theta \sin m\theta \mathcal{G}_{(ab)(mn)}^{(1)} + \cos a\theta \cos m\theta \mathcal{G}_{(ab)(mn)}^{(2)} \right] d\theta dr, \\
A_{(Ab),(mn)}^{pr} &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} r \left[\cos A\theta \sin m\theta \mathcal{G}_{(Ab)(mn)}^{(1)} - \sin A\theta \cos m\theta \mathcal{G}_{(Ab)(mn)}^{(2)} \right] d\theta dr, \\
A_{Ab}^p &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} r \cos(A\theta) \mathcal{G}_{Ab}^{(0)} d\theta dr, \quad A_{ab}^r = \int_{r_1}^1 \int_{-\pi}^{\pi} r \sin(a\theta) \mathcal{G}_{Ab}^{(0)} d\theta dr,
\end{aligned} \tag{2.56}$$

де

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{Ab}^{(0)} &= \mathcal{R}_{Ab}(r) \int_{-h}^{\zeta} \frac{\cosh(k_{Ab}(z+h))}{\cosh(k_{Ab}h)} dz = \mathcal{R}_{Ab}(r) I_{(Ab)}^{(0)}, \\
\mathcal{G}_{(Ab)(Mn)}^{(1)} &= \mathcal{R}'_{Ab}(r) \mathcal{R}'_{Mn}(r) I_{(Ab)(Mn)}^{(1)} + \mathcal{R}_{Ab}(r) \mathcal{R}_{Mn}(r) k_{Ab} k_{Mn} I_{(Ab)(Mn)}^{(2)}, \\
\mathcal{G}_{(Ab)(Mn)}^{(2)} &= AM r^{-2} \mathcal{R}_{Ab}(r) \mathcal{R}_{Mn}(r) I_{(Ab)(Mn)}^{(1)};
\end{aligned} \tag{2.57}$$

$$\begin{aligned}
I_{(Ab)(Mn)}^{(1)} &= \int_{-h}^{\zeta} \frac{\cosh(k_{Ab}(z+h)) \cosh(k_{Mn}(z+h))}{\cosh(k_{Ab}h) \cosh(k_{Mn}h)} dz, \\
I_{(Ab)(Mn)}^{(2)} &= \int_{-h}^{\zeta} \frac{\sinh(k_{Ab}(z+h)) \sinh(k_{Mn}(z+h))}{\cosh(k_{Ab}h) \cosh(k_{Mn}h)} dz.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Система звичайних диференціальних рівнянь (2.53)-(2.54) має, взагалі кажучи, нескінченну розмірність, бо $I_\theta, I_r \rightarrow \infty$. Якщо взяти скінченні I_θ та I_r , то можна чисельно розв'язувати задачу Коші для (2.53), (2.54), яка описує перехідні рухи гідродинамічної системи із відповідними початковими умовами. Як ми писали в огляді літератури, таке використання модальної системи (2.53), (2.54) пов'язується із методом Перко.

Нашою подальшою метою є аналітичні дослідження періодичних (усталених) рухів системи за допомогою рівнянь (2.53)-(2.54). Такі дослідження стають можливими за умови додаткових спрощень в (2.53)-(2.54) шляхом використання спеціальних асимптотичних співвідношень між узагальненими координатами замість (2.52). Крім того, ми повинні врахувати демпфування.

Таким чином, доведено основний результат цього розділу.

Твердження 1.2. *За умов малості зовнішніх збурень вертикального циліндричного резервуара (2.44) (Рис. 2.2), вводячи узагальнені координати та швидкості шляхом модальних представлень (2.51) та припускаючи резонанси у гідромеханічній системі, що вимагає (2.52), нехтування членами порядку $o(\epsilon)$ в модальній системі Майлза-Луковського (2.40), (2.41) приводить до наближених модальних рівнянь (2.53), (2.54), які описують резонансні рухи рідини у вертикальних баках кругового перерізу в термінах введених узагальнених гідродинамічних координат та швидкостей.*

2.5. Висновки до розділу

Згідно Твердження 1.2 цього розділу, використовуючи варіаційні принципи механіки (в нашому випадку варіаційний принцип Люка-Бейтмена), для крайової задачі гідродинаміки рідини з вільною поверхнею, а також постулюючи модальне представлення для вільної границі та потенціалу швидкостей, можна не тільки отримати загальні нелінійні модальні рівняння у формі Майлза-Луковського, в яких невідомими є гідродинамічні узагальнені координати та узагальнені швидкості, що виникають у вищевказаних модальних представленнях (як залежні від часу коефіцієнти), але й вивести нелінійні модальні рівняння Майлза-Луковського спеціального вигляду (2.53), (2.54). Ці рівняння описують хлюпання при малих резонансних збуреннях вертикального циліндричного баку кругового перерізу із чотирма ступенями вільності $\eta_i(t)$, $i = 1, 2, 4, 5$ (див. Рис. 2.2), причому збурення $\eta_i(t)$ задовільняють умову (2.44) (безрозмірні величини, характерний розмір дорівнює радіусу R_0 , характерний час $1/\sigma$, де σ – частота збурень), гідродинамічні узагальнені координати та швидкості задовільняють (2.52), а компоненти порядку $o(\epsilon)$ нехтуються.

Розділ 3

**НЕЛІНІЙНА АСИМПТОТИЧНА МОДАЛЬНА ТЕОРІЯ
ТИПУ НАРІМАНОВА-МОІСЄЄВА РЕЗОНАНСНИХ
КОЛИВАНЬ РІДИНИ З УРАХУВАННЯМ
ДЕМПФУВАННЯ**

Нелінійна модальна система (2.53), (2.54) враховує малість амплітуди рухів контейнера, пов'язаних із узагальненими координатами $\eta_i(t)$, $i = 1, 2, 4, 5$, але не враховує асимптотичний порядок для узагальнених координат $p_{Mi}(t)$ та $r_{mi}(t)$ на введених асимптотичній шкалі $O(\epsilon)$. Умова (2.52) носить абстрактний характер та є неконструктивною. Це робить систему звичайних диференціальних рівнянь (2.53), (2.54) складною та не придатною для аналітичних досліджень усталених резонансних хвиль, метою яких і є дана дисертаційна робота. Аби спростити (2.53), (2.54), необхідно ввести додаткові асимптотичні припущення щодо P_{Mi} , r_{mi} та R_{Mi} , P_{mi} .

Є декілька типів припущень потрібного типу. Типовою для немалих глибин рідини,

$$h = O(1), \quad (3.1)$$

є так звана адаптивна асимптотика, коли резонансно збурені власні форми з індексами $(M_1 i_1)$ мають порядок $O(\epsilon^{1/3})$, деяка кількість власних форм $(M_2 i_2)$ є порядку $O(\epsilon^{2/3})$, а також існує набір форм $(M_3 i_3)$ третього порядку $O(\epsilon)$, в той час всіма іншими власними формами можна знехтувати, бо вони характеризуються порядком $o(\epsilon)$.

Очевидно, що є найбільш загальний (граничний) випадок адаптивних модальних систем, коли всі узагальнені координати $p_{Mi} \sim r_{mi} = O(\epsilon^{1/3})$. Цей випадок є чисто гіпотетичним, він не приводить до нелінійних модальних рівнянь, які можна досліджувати аналітично.

Відносно простим випадком є система, що є наслідком асимптотичних

співвідношень Наріманова-Моїсєєва, які ми розглянемо далі.

Нарешті, найпростішим випадком є лінійна модальна система, коли відсутні резонанси в гідродинамічній системі, тому всі p_{Mi} та r_{mi} мають порядок $O(\epsilon)$. Останній лінійний випадок буде нам потрібним для фізично коректного введення демпфування в цій механічній системі через оцінку логарифмічних декрементів затухання власних форм рідини (стоячих хвиль).

3.1. Найбільш загальний випадок адаптивної асимптотичної модальної системи

У найбільш загальному випадку під адаптивною модальною системою третього порядку розуміється ситуація, коли амплітуда збурень, які прикладено до посудини, має порядок $O(\epsilon)$, (2.44), а узагальнені гідродинамічні координати та швидкості мають порядок $O(\epsilon^{1/3})$.

$$r_{mi} \sim R_{Mi} \sim P_{Mi} \sim p_{Mi} = O(\epsilon^{1/3}). \quad (3.2)$$

Якщо знехтувати членами порядку $o(\epsilon)$, то, використовуючи припущення (3.2) та (2.44), можна спростити (2.53), (2.54) та отримати систему звичайних диференціальних рівнянь відносно *лише* узагальнених координат $r_{mi}(t)$ та $p_{Mi}(t)$. Процедура виводу таких рівнянь є досить складною з аналітичної точки зору. Опишемо лише деякі її кроки.

Перший етап виведення адаптивної системи передбачає розклад $I_{(Ab)}^{(0)}$, $I_{(Ab)(Mn)}^{(1)}$, та $I_{(Ab)(Mn)}^{(2)}$ у вигляді рядів Тейлора відносно ζ , де $\zeta = O(\epsilon^{1/3})$. Аналіз (2.40), (2.41) показує, що $I_{(Ab)}^{(0)}$ повинно бути розкладено до третього порядку малості, але $I_{(Ab)(Mn)}^{(1)}$ та $I_{(Ab)(Mn)}^{(2)}$ потребують розкладу тільки другого порядку, тобто

$$I_{(Ab)}^{(0)} = k_{Ab}^{-1} \tanh(k_{Ab}h) + \zeta + \frac{1}{2}\kappa_{Ab}\zeta^2 + \frac{1}{6}k_{Ab}^2\zeta^3 + \dots, \quad (3.3a)$$

$$I_{(Ab)(Mn)}^{(1)} = O(1) + \zeta + \frac{1}{2}(\kappa_{Ab} + \kappa_{Mn})\zeta^2 + \dots, \quad (3.3b)$$

$$I_{(Ab)(Mn)}^{(2)} = O(1) + \kappa_{Ab}\kappa_{Mn}\zeta + \frac{1}{2}(k_{Ab}^2\kappa_{Mn} + k_{Mn}^2\kappa_{Ab})\zeta^2 + \dots \quad (3.3c)$$

Підстановка (3.3b) та (3.3c) у (2.13) дає

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{(Ab)(Mn)}^{(1)} &= O(1) + (\mathcal{R}'_{Ab}\mathcal{R}'_{Mn} + \mathcal{R}_{Ab}\mathcal{R}_{Mn}\kappa_{Ab}\kappa_{Mn})\zeta \\ &+ \frac{1}{2}[(\kappa_{Ab} + \kappa_{Mn})\mathcal{R}'_{Ab}\mathcal{R}'_{Mn} + \mathcal{R}_{Ab}\mathcal{R}_{Mn}(k_{Ab}^2\kappa_{Mn} + k_{Mn}^2\kappa_{Ab})]\zeta^2, \end{aligned} \quad (3.4a)$$

$$\mathcal{G}_{(Ab)(Mn)}^{(2)} = O(1) + r^{-2}AM\mathcal{R}_{Ab}\mathcal{R}_{Mn}\zeta + \frac{1}{2}r^{-2}AM(\kappa_{Ab} + \kappa_{Mn})\mathcal{R}_{Ab}\mathcal{R}_{Mn}\zeta^2. \quad (3.4b)$$

На другому етапі A_{Ab}^p та A_{ab}^r повинні бути розкладені до $O(\epsilon)$ в термінах відповідних узагальнених координат,

$$\begin{aligned} A_{Ab}^p &= \Lambda_{AA,pAb} + \frac{1}{2} \sum_{MN,ij}^{I_\theta, I_r} \chi_{(Mi)(Nj),(Ab)}^{pp} p_{Mi} p_{Nj} + \frac{1}{2} \sum_{mn,ij}^{I_\theta, I_r} \chi_{(mi)(nj),(Ab)}^{rr} r_{mi} r_{nj} \\ &+ \frac{1}{3} \sum_{MNK,ijl}^{I_\theta, I_r} \chi_{(Mi)(Nj)(Kl),(Ab)}^{ppp} p_{Mi} p_{Nj} p_{Kl} + \sum_{Mnk,ijl}^{I_\theta, I_r} \chi_{(Mi),(nj)(kl),(Ab)}^{pr} p_{Mi} r_{nj} r_{kl}, \end{aligned} \quad (3.5a)$$

$$\begin{aligned} A_{ab}^r &= \Lambda_{,aa} r_{ab} + \sum_{Mn,ij}^{I_\theta, I_r} \chi_{(Mi),(nj),(ab)}^{pr} p_{Mi} r_{nj} + \frac{1}{3} \sum_{mnk,ijl}^{I_\theta, I_r} \chi_{(mi)(nj)(kl),(ab)}^{rrr} r_{mi} r_{nj} r_{kl} \\ &+ \sum_{MNk,ijl}^{I_\theta, I_r} \chi_{(Mi)(Nj),(kl),(ab)}^{ppr} p_{Mi} p_{Nj} r_{kl}, \quad I_\theta, I_r \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.5b)$$

де

$$\begin{aligned} \chi_{(Mi)(Nj),(Ab)}^{pp} &= \kappa_{Ab}\Lambda_{AMN}, \lambda_{(Ab)(Mi)(Nj)}, \quad \chi_{(Mi)(nj),(Ab)}^{rr} = \kappa_{Ab}\Lambda_{A,mn}, \lambda_{(Ab)(mi)(nj)}, \\ \chi_{(Mi)(Nj)(Kl),(Ab)}^{ppp} &= \frac{1}{2}k_{Ab}^2\Lambda_{AMNK}, \lambda_{(Ab)(Mi)(Nj)(Kl)}, \\ \chi_{(Mi),(nj)(kl),(Ab)}^{pr} &= \frac{1}{2}k_{Ab}^2\Lambda_{AM,nk}, \lambda_{(Ab)(Mi)(nj)(kl)}, \\ \chi_{(Mi),(nj),(ab)}^{pr} &= \kappa_{ab}\Lambda_{M,an}, \lambda_{(Mi)(nj)(ab)}, \quad \chi_{(mi)(nj)(kl),(ab)}^{rrr} = \frac{1}{2}k_{ab}^2\Lambda_{,amnk}, \lambda_{(mi)(nj)(kl)(ab)}, \\ \chi_{(Mi)(Nj),(kl),(ab)}^{ppr} &= \frac{1}{2}k_{ab}^2\Lambda_{MN,ak}, \lambda_{(Mi)(Nj)(kl)(ab)} \end{aligned}$$

та

$$\Lambda_{M\dots N, i\dots j} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(A\theta) \dots \cos(M\theta) \cdot \sin(i\theta) \dots \sin(j\theta) d\theta. \quad (3.6)$$

Тензори Λ можна обчислити за рекурсивними формулами

$$\begin{aligned}\Lambda_{M,i} &= 0, \quad \Lambda_{,ij} = \pi\delta_{ij}, \quad \Lambda_{MN} = \pi\delta_{MN}, \quad M^2 + N^2 \neq 0, \quad \Lambda_{00} = 2\pi, \\ \Lambda_{M\dots NK,i\dots j} &= \frac{1}{2}(\Lambda_{M\dots|N-K|,i\dots j} + \Lambda_{M\dots|N+K|,i\dots j}), \\ \Lambda_{M\dots N,i\dots ljk} &= \frac{1}{2}(\Lambda_{M\dots|j-k|,i\dots l} - \Lambda_{M\dots|j+k|,i\dots l}).\end{aligned}$$

Тензори λ визначено за формулою

$$\lambda_{(Ab)\dots(Mn)} = \int_0^1 r \mathcal{R}_{Ab}(r) \dots \mathcal{R}_{Mn}(r) dr. \quad (3.7)$$

Частинні похідні (3.5) за узагальненими координатами набувають вигляд

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_{Ab}^p}{\partial p_{Df}} &= \Lambda_{AD} \delta_{bf} + \sum_{M,i}^{I_\theta, I_r} \chi_{(Mi)(Df),(Ab)}^{pp} p_{Mi} + \sum_{NK,jl}^{I_\theta, I_r} \chi_{(Df)(Nj)(Kl),(Ab)}^{ppp} p_{Nj} p_{Kl} \\ &\quad + \sum_{nk,jl}^{I_\theta, I_r} \chi_{(Df),(nj)(kl),(Ab)}^{pr} r_{nj} r_{kl}, \quad (3.8a)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial A_{Ab}^p}{\partial r_{df}} = \sum_{m,i}^{I_\theta, I_r} \chi_{(mi)(df),(Ab)}^{rr} r_{mi} + 2 \sum_{Mn,ij}^{I_\theta, I_r} \chi_{(Mi),(nj)(df),(Ab)}^{pr} p_{Mi} r_{nj}, \quad (3.8b)$$

$$\frac{\partial A_{ab}^r}{\partial p_{Df}} = \sum_{n,j}^{I_\theta, I_r} \chi_{(Df),(nj),(ab)}^{pr} r_{nj} + 2 \sum_{Mn,ij}^{I_\theta, I_r} \chi_{(Mi)(Df),(nj),(ab)}^{pr} p_{Mi} r_{nj}, \quad (3.8c)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_{ab}^r}{\partial r_{df}} &= \Lambda_{,ad} \delta_{bf} + \sum_{M,i}^{I_\theta, I_r} \chi_{(Mi),(df),(ab)}^{pr} p_{Mi} + \sum_{mn,ij}^{I_\theta, I_r} \chi_{(mi)(nj)(df),(ab)}^{rrr} r_{mi} r_{nj} \\ &\quad + \sum_{MN,ij}^{I_\theta, I_r} \chi_{(Mi)(Nj),(df),(ab)}^{ppr} p_{Mi} p_{Nj}, \quad I_\theta, I_r \rightarrow \infty. \quad (3.8d)\end{aligned}$$

Третій етап веде до аналітичних виразів для $A_{(Ab)(Mn)}^{pp}$, $A_{(ab)(mn)}^{rr}$ та $A_{(Ab),(mn)}^{pr}$, де зберігаються лише величини другого порядку, $O(\epsilon^{2/3})$. Величина $O(1)$ -порядку може бути взята з лінійної модальної теорії. Ре-

зультатом буде

$$A_{(Ab)(Mn)}^{pp} = \Lambda_{AM} \delta_{bn} \kappa_{Ab} + \sum_{K,l}^{I_\theta, I_r} \Pi_{(Kl),(Ab)(Mn)}^{p,p} p_{Kl} \\ + \sum_{KC,ld}^{I_\theta, I_r} \Pi_{(Kl)(Cd),(Ab)(Mn)}^{p,pp} p_{Kl} p_{Cd} + \sum_{kc,ld}^{I_\theta, I_r} \Pi_{(kl)(cd),(Ab)(Mn)}^{p,rr} r_{kl} r_{cd}, \quad (3.9a)$$

$$A_{(ab)(mn)}^{rr} = \Lambda_{,am} \delta_{bn} \kappa_{ab} + \sum_{K,l}^{I_\theta, I_r} \Pi_{(Kl),(ab)(mn)}^{r,p} p_{Kl} \\ + \sum_{KC,ld}^{I_\theta, I_r} \Pi_{(Kl)(Cd),(ab)(mn)}^{r,pp} p_{Kl} p_{Cd} + \sum_{kc,ld}^{I_\theta, I_r} \Pi_{(kl)(cd),(ab)(mn)}^{r,rr} r_{kl} r_{cd}, \quad (3.9b)$$

$$A_{(Ab),(mn)}^{pr} = \sum_{k,l}^{I_\theta, I_r} \Pi_{(kl),(Ab),(mn)}^r r_{kl} + \sum_{Kc,ld}^{I_\theta, I_r} \Pi_{(Kl),(cd),(Ab),(mn)}^{pr} p_{Kl} r_{cd}, \quad (3.9c)$$

де

$$\begin{aligned} \Pi_{(Kl),(Ab)(Mn)}^{p,p} &= \Lambda_{AMK} G_{(Ab)(Mn),(Kl)}^{(11)} + \Lambda_{K,AM} G_{(Ab)(Mn),(Kl)}^{(12)}, \\ \Pi_{(Kl),(ab)(mn)}^{r,p} &= \Lambda_{K,am} G_{(ab)(mn),(Kl)}^{(11)} + \Lambda_{amK} G_{(ab)(mn),(Kl)}^{(12)}, \\ \Pi_{(kl),(Ab),(mn)}^r &= \Lambda_{A,mk} G_{(Ab)(mn),(kl)}^{(11)} - \Lambda_{m,Ak} G_{(Ab)(mn),(kl)}^{(12)}, \\ \Pi_{(Kl)(Cd),(Ab)(Mn)}^{p,pp} &= \Lambda_{AMKC} G_{(Ab)(Mn),(Kl)(Cd)}^{(21)} + \Lambda_{KC,AM} G_{(Ab)(Mn),(Kl)(Cd)}^{(22)}, \\ \Pi_{(kl)(cd),(Ab)(Mn)}^{p,rr} &= \Lambda_{AM,kc} G_{(Ab)(Mn),(kl)(cd)}^{(21)} + \Lambda_{,AMkc} G_{(Ab)(Mn),(kl)(cd)}^{(22)}, \\ \Pi_{(Kl)(Cd),(ab)(mn)}^{r,pp} &= \Lambda_{KC,am} G_{(ab)(mn),(Kl)(Cd)}^{(21)} + \Lambda_{KC,am} G_{(ab)(mn),(Kl)(Cd)}^{(22)}, \\ \Pi_{(kl)(cd),(ab)(mn)}^{r,rr} &= \Lambda_{,amkc} G_{(ab)(mn),(kl)(cd)}^{(21)} + \Lambda_{am,kc} G_{(ab)(mn),(kl)(cd)}^{(22)}, \\ \Pi_{(Kl),(cd),(Ab),(mn)}^{pr} &= 2[\Lambda_{AK,mc} G_{(Ab)(mn),(Kl)(cd)}^{(21)} - \Lambda_{Km,Ac} G_{(Ab)(mn),(Kl)(cd)}^{(22)}]; \\ G_{(Ab)(Mn),(Kl)}^{(11)} &= \lambda'_{(Ab)(Mn),(Kl)} + \kappa_{Ab} \kappa_{Mn} \lambda_{(Ab)(Mn)(Kl)}, \\ G_{(Ab)(Mn),(Kl)}^{(12)} &= AM \bar{\lambda}_{(Ab)(Mn)(Kl)}, \\ G_{(Ab)(Mn),(Kl)(Cd)}^{(21)} &= \frac{1}{2}[(\kappa_{Ab} + \kappa_{Mn}) \lambda'_{(Ab)(Mn),(Kl)(Cd)} + (k_{Ab}^2 \kappa_{Mn} \\ &\quad + k_{Mn}^2 \kappa_{Ab}) \lambda_{(Ab)(Mn)(Kl)(Cd)}], \\ G_{(Ab)(Mn),(Kl)(Cd)}^{(22)} &= \frac{1}{2} AM (\kappa_{Ab} + \kappa_{Mn}) \bar{\lambda}_{(Ab)(Mn)(Kl)(Cd)} \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}\lambda'_{(Ab)(Mn),(Cd)\dots(Ef)} &= \int_0^1 r \mathcal{R}'_{Ab}(r) \mathcal{R}'_{Mn}(r) \cdot \mathcal{R}_{Cd}(r) \dots \mathcal{R}_{Ef}(r) dr, \\ \bar{\lambda}_{(Ab)\dots(Mn)} &= \int_0^1 r^{-1} \mathcal{R}_{Ab}(r) \dots \mathcal{R}_{Mn}(r) dr.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Частинними похідними (3.9) за узагальненими координатами є

$$\frac{\partial A_{(Ab)(Cd)}^{pp}}{\partial p_{Ef}} = \Pi_{(Ef),(Ab)(Cd)}^{p,p} + 2 \sum_{M,i}^{I_\theta, I_r} \Pi_{(Mi)(Ef),(Ab)(Cd)}^{p,pp} p_{Mi}, \quad (3.11a)$$

$$\frac{\partial A_{(Ab)(Cd)}^{pp}}{\partial r_{ef}} = 2 \sum_{m,i}^{I_\theta, I_r} \Pi_{(mi)(ef),(Ab)(Cd)}^{p,rr} r_{mi}, \quad (3.11b)$$

$$\frac{\partial A_{(ab)(cd)}^{rr}}{\partial p_{Ef}} = \Pi_{(Ef),(ab)(cd)}^{r,p} + 2 \sum_{M,i}^{I_\theta, I_r} \Pi_{(Mi)(Ef),(ab)(cd)}^{r,pp} p_{Mi}, \quad (3.11c)$$

$$\frac{\partial A_{(ab)(cd)}^{rr}}{\partial r_{ef}} = 2 \sum_{m,i}^{I_\theta, I_r} \Pi_{(mi)(ef),(ab)(cd)}^{r,rr} r_{mi}, \quad (3.11d)$$

$$\frac{\partial A_{(Ab),(cd)}^{pr}}{\partial p_{Ef}} = \sum_{n,j}^{I_\theta, I_r} \Pi_{(Ef),(nj),(Ab)(cd)}^{pr} r_{nj}, \quad (3.11e)$$

$$\frac{\partial A_{(Ab),(cd)}^{pr}}{\partial r_{ef}} = \Pi_{(ef),(Ab),(cd)}^r + \sum_{M,i}^{I_\theta, I_r} \Pi_{(Mi),(ef),(Ab)(cd)}^{pr} p_{Mi}. \quad (3.11f)$$

На четвертому етапі кінетичні рівняння (2.53) повинні бути розв'язані відносно узагальнених швидкостей P_{Ab} та R_{ab} . Постулюючи

$$\begin{aligned}P_{Ab} &= \frac{1}{\kappa_{Ab}} \dot{p}_{Ab} + \sum_{MN,ij}^{I_\theta, I_r} V_{(Mi),(Nj),(Ab)}^{pp} \dot{p}_{Mi} p_{Nj} + \sum_{mn,ij}^{I_\theta, I_r} V_{(mi),(nj),(Ab)}^{rr} \dot{r}_{mi} r_{nj} \\ &+ \sum_{Mnk,ijl}^{I_\theta, I_r} V_{(Mi),(nj),(kl),(Ab)}^{pr} \dot{p}_{Mi} r_{nj} r_{kl} + \sum_{MNK,ijl}^{I_\theta, I_r} V_{(Mi),(Nj),(Kl),(Ab)}^{ppp} \dot{p}_{Mi} p_{Nj} p_{Kl} \\ &+ \sum_{Mnk,ijl}^{I_\theta, I_r} V_{(nj),(Mi),(kl),(Ab)}^{rpr} \dot{r}_{nj} p_{Mi} r_{kl},\end{aligned}\quad (3.12a)$$

$$\begin{aligned}
R_{ab} = & \frac{1}{\kappa_{ab}} \dot{r}_{ab} + \sum_{Mn,ij}^{I_\theta, I_r} V_{(Mi),(nj),(ab)}^{pr} \dot{p}_{Mi} r_{nj} + \sum_{Mn,ij}^{I_\theta, I_r} V_{(nj),(Mi),(ab)}^{rp} \dot{r}_{nj} p_{Mi} \\
& + \sum_{mnk,ijl}^{I_\theta, I_r} V_{(mi),(nj),(kl),(ab)}^{rrr} \dot{r}_{mi} r_{nj} r_{kl} \\
& + \sum_{MNk,ijl}^{I_\theta, I_r} V_{(kl),(Mi),(Nj),(ab)}^{rpp} \dot{r}_{kl} p_{Mi} p_{Nj} + \sum_{MNk,ijl}^{I_\theta, I_r} V_{(Mi),(Nj),(kl),(ab)}^{ppr} \dot{p}_{Mi} p_{Nj} r_{kl},
\end{aligned} \tag{3.12b}$$

підставляючи (3.12) в кінетичну систему (2.53) та групуючи подібні величини, виводимо формули для коефіцієнтів в (3.12),

$$\begin{aligned}
V_{(Mi),(Nj),(Ab)}^{pp} &= \frac{1}{\Lambda_{AA} \kappa_{Ab}} \left[\chi_{(Nj)(Mi),(Ab)}^{pp} - \frac{\Pi_{(Nj),(Ab)(Mi)}^{p,p}}{\kappa_{Mi}} \right], \\
V_{(mi),(nj),(Ab)}^{rr} &= \frac{1}{\Lambda_{AA} \kappa_{Ab}} \left[\chi_{(nj)(mi),(Ab)}^{rr} - \frac{\Pi_{(nj),(Ab),(mi)}^r}{\kappa_{mi}} \right], \\
V_{(nj),(Mi),(ab)}^{rp} &= \frac{1}{\Lambda_{aa} \kappa_{ab}} \left[\chi_{(Mi),(nj),(ab)}^{pr} - \frac{\Pi_{(Mi),(ab)(nj)}^{r,p}}{\kappa_{nj}} \right], \\
V_{(Mi),(nj),(ab)}^{pr} &= \frac{1}{\Lambda_{aa} \kappa_{ab}} \left[\chi_{(Mi),(nj),(ab)}^{pr} - \frac{\Pi_{(nj),(Mi),(ab)}^r}{\kappa_{Mi}} \right], \\
V_{(Mi),(Nj),(Kl),(Ab)}^{ppp} &= \frac{1}{\Lambda_{AA} \kappa_{Ab}} \left[\chi_{(Mi)(Nj)(Kl),(Ab)}^{ppp} - \frac{\Pi_{(Nj)(Kl),(Ab)(Mi)}^{p,pp}}{\kappa_{Mi}} \right. \\
& \quad \left. - \sum_{C,d}^{I_\theta, I_r} V_{(Mi),(Nj),(Cd)}^{pp} \Pi_{(Kl),(Ab)(Cd)}^{p,p} \right], \\
V_{(Mi),(nj),(kl),(Ab)}^{prr} &= \frac{1}{\Lambda_{AA} \kappa_{Ab}} \times \left[\chi_{(Mi),(nj)(kl),(Ab)}^{prr} - \frac{\Pi_{(nj)(kl),(Ab)(Mi)}^{p,rr}}{\kappa_{Mi}} \right. \\
& \quad \left. - \sum_{c,d}^{I_\theta, I_r} V_{(Mi),(nj),(cd)}^{pr} \Pi_{(kl),(Ab),(cd)}^r \right],
\end{aligned}$$

$$V_{(mi),(nj),(kl),(ab)}^{rrr} = \frac{1}{\Lambda_{aa}\kappa_{ab}} \left[\chi_{(nj)(kl)(mi),(ab)}^{rrr} - \frac{\Pi_{(nj)(kl),(ab)(mi)}^{r,rr}}{\kappa_{mi}} - \sum_{C,d}^{I_\theta, I_r} V_{(mi),(nj),(Cd)}^{rrr} \Pi_{(kl),(Cd),(ab)}^r \right],$$

$$V_{(kl),(Mi),(Nj),(ab)}^{rpp} = \frac{1}{\Lambda_{aa}\kappa_{ab}} \times \left[\chi_{(Mi)(Nj),(kl),(ab)}^{ppr} - \frac{\Pi_{(Mi)(Nj),(ab)(kl)}^{r,pp}}{\kappa_{kl}} - \sum_{c,d}^{I_\theta, I_r} V_{(kl),(Mi),(cd)}^{rpp} \Pi_{(Nj),(ab),(cd)}^{r,p} \right],$$

$$V_{(Mi),(Nj),(kl),(ab)}^{ppr} = \frac{1}{\Lambda_{aa}\kappa_{ab}} \left[2\chi_{(Mi)(Nj),(kl),(ab)}^{ppr} - \frac{\Pi_{(Nj),(kl),(Mi)(ab)}^{pr}}{\kappa_{Mi}} - \sum_{C,d}^{I_\theta, I_r} V_{(Mi),(Nj),(Cd)}^{pp} \Pi_{(kl),(Cd),(ab)}^r - \sum_{c,d}^{I_\theta, I_r} V_{(Mi),(kl),(cd)}^{pr} \Pi_{(Nj),(ab)(cd)}^{r,p} \right],$$

$$V_{(nj),(Mi),(kl),(Ab)}^{rpr} = \frac{1}{\Lambda_{AA}\kappa_{Ab}} \left[2\chi_{(Mi),(kl)(nj),(Ab)}^{pr} - \frac{\Pi_{(Mi),(kl),(Ab)(nj)}^{pr}}{\kappa_{nj}} - \sum_{C,d}^{I_\theta, I_r} V_{(nj),(kl),(Cd)}^{rr} \Pi_{(Mi),(Ab)(Cd)}^{p,p} - \sum_{c,d}^{I_\theta, I_r} V_{(nj),(Mi),(cd)}^{rpp} \Pi_{(kl),(Ab),(cd)}^r \right].$$

На *n'*ятому етапі вирази (3.8), (3.11) та (3.12) підставляються у динамічні модальні рівняння (2.54). Виключаючи величини порядку $o(\epsilon)$, отримуємо шукані *адаптивні нелінійні модальні рівняння*

$$\sum_{M,i}^{I_\theta, I_r} \ddot{p}_{Mi} \left[\delta_{ME} \delta_{if} + \sum_{N,j}^{I_\theta, I_r} d_{(Mi),(Nj)}^{pp,(Ef)} p_{Nj} + \sum_{NK,jl}^{I_\theta, I_r} d_{(Mi),(Nj),(Kl)}^{ppp,(Ef)} p_{Nj} p_{Kl} + \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{nk,jl}^{I_\theta, I_r} d_{(Mi),(nj),(kl)}^{prrr,(Ef)} r_{nj} r_{kl} \left] + \sum_{mn,ij}^{I_\theta, I_r} \ddot{r}_{mi} r_{nj} \left[d_{(mi),(nj)}^{rr,(Ef)} + \sum_{K,l}^{I_\theta, I_r} d_{(mi),(nj),(Kl)}^{rrp,(Ef)} p_{Kl} \right] \\
& + \sum_{MN,ij}^{I_\theta, I_r} \dot{p}_{Mi} \dot{p}_{Nj} \left[t_{(Mi),(Nj)}^{pp,(Ef)} + \sum_{K,l}^{I_\theta, I_r} t_{(Mi),(Nj),(Kl)}^{ppp,(Ef)} p_{Kl} \right] + \sum_{Mnk,ijl}^{I_\theta, I_r} t_{(Mi),(nj),(kl)}^{prrr,(Ef)} \dot{p}_{Mi} \dot{r}_{nj} r_{kl} \\
& \quad + \sum_{mn,ij}^{I_\theta, I_r} \dot{r}_{mi} \dot{r}_{nj} \left[t_{(mi),(nj)}^{rr,(Ef)} + \sum_{K,l}^{I_\theta, I_r} t_{(mi),(nj),(Kl)}^{rrp,(Ef)} p_{Kl} \right] + \bar{\sigma}_{Ef}^2 p_{Ef} \\
& = -(\ddot{\eta}_1 - g\eta_5 - S_b \ddot{\eta}_5) \delta_{1E} \kappa_{1f} P_f; \quad E = 0, \dots, I_\theta; \quad f = 1, \dots, I_r, \quad (3.13a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m,i}^{I_\theta, I_r} \ddot{r}_{mi} \left[\delta_{me} \delta_{ij} + \sum_{N,j}^{I_\theta, I_r} d_{(mi),(Nj)}^{rp,(ef)} p_{Nj} + \sum_{NK,jl}^{I_\theta, I_r} d_{(mi),(Nj),(Kl)}^{rpp,(ef)} p_{Nj} p_{Kl} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{nk,jl}^{I_\theta, I_r} d_{(mi),(nj),(kl)}^{rrrr,(ef)} r_{nj} r_{kl} \right] + \sum_{Mn,ij}^{I_\theta, I_r} \ddot{p}_{Mi} r_{nj} \left[d_{(Mi),(nj)}^{pr,(ef)} + \sum_{K,l}^{I_\theta, I_r} d_{(Mi),(nj),(Kl)}^{prp,(ef)} p_{Kl} \right] \\
& \quad + \sum_{Mn,ij}^{I_\theta, I_r} \dot{p}_{Mi} \dot{r}_{nj} \left[t_{(Mi),(nj)}^{pr,(ef)} + \sum_{K,l}^{I_\theta, I_r} t_{(Mi),(nj),(Kl)}^{prp,(ef)} p_{Kl} \right] \\
& \quad + \sum_{MNk,ijl}^{I_\theta, I_r} t_{(Mi),(Nj),(kl)}^{ppr,(ef)} \dot{p}_{Mi} \dot{p}_{Nj} r_{kl} + \sum_{mnk,ijl}^{I_\theta, I_r} t_{(mi),(nj),(kl)}^{rrrr,(ef)} \dot{r}_{mi} \dot{r}_{nj} r_{kl} + \bar{\sigma}_{ef}^2 r_{ef} \\
& = -(\ddot{\eta}_2 + g\eta_4 + S_b \ddot{\eta}_4) \delta_{1e} \kappa_{1f} P_f; \quad e = 1, \dots, I_\theta; \quad f = 1, \dots, I_r, \quad (3.13b)
\end{aligned}$$

де безрозмірні власні частоти

$$\bar{\sigma}_{Ef} = \frac{\sigma_{Et}}{\sigma} \quad (3.14)$$

визначено (2.48), P_f та S_b задано в (2.50) та (2.55), відповідно, та гідродинамічні коефіцієнти в нелінійних величинах можуть бути явно обчислені

як функції від безрозмірної глибини h

$$\begin{aligned}
d_{(Mi),(Nj)}^{pp,(Ef)} &= \frac{\kappa_{Ef}}{\Lambda_{EE}} \left[\Lambda_{EE} V_{(Mi),(Nj),(Ef)}^{pp} + \frac{\chi_{(Nj)(Ef),(Mi)}^{pp}}{\kappa_{Mi}} \right], \\
d_{(Mi),(Nj),(Kl)}^{ppp,(Ef)} &= \frac{\kappa_{Ef}}{\Lambda_{EE}} \left[\Lambda_{EE} V_{(Mi),(Nj),(Kl),(Ef)}^{ppp} + \frac{\chi_{(Ef)(Nj)(Kl),(Mi)}^{ppp}}{\kappa_{Mi}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{A,b}^{I_\theta, I_r} V_{(Mi),(Nj),(Ab)}^{pp} \chi_{(Kl)(Ef),(Ab)}^{pp} \right], \\
d_{(Mi),(nj),(kl)}^{prp,(Ef)} &= \frac{\kappa_{Ef}}{\Lambda_{EE}} \left[\Lambda_{EE} V_{(Mi),(nj),(kl),(Ef)}^{prp} + \frac{\chi_{(Ef),(nj)(kl),(Mi)}^{prp}}{\kappa_{Mi}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{a,b}^{I_\theta, I_r} V_{(Mi),(nj),(ab)}^{pr} \chi_{(Ef),(kl),(ab)}^{pr} \right], \\
d_{(mi),(nj)}^{rr,(Ef)} &= \frac{\kappa_{Ef}}{\Lambda_{EE}} \left[\Lambda_{EE} V_{(mi),(nj),(Ef)}^{rr} + \frac{\chi_{(Ef),(nj),(mi)}^{pr}}{\kappa_{mi}} \right], \\
d_{(mi),(nj),(Kl)}^{rrp,(Ef)} &= \frac{\kappa_{Ef}}{\Lambda_{EE}} \left[\Lambda_{EE} V_{(mi),(Kl),(nj),(Ef)}^{rrp} + \frac{2\chi_{(Kl)(Ef),(nj),(mi)}^{prp}}{\kappa_{mi}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{a,b}^{I_\theta, I_r} V_{(mi),(Kl),(ab)}^{rp} \chi_{(Ef),(nj),(ab)}^{pr} + \sum_{A,b}^{I_\theta, I_r} V_{(mi),(nj),(Ab)}^{rr} \chi_{(Kl)(Ef),(Ab)}^{pp} \right], \\
t_{(Mi),(Nj)}^{pp,(Ef)} &= \frac{\kappa_{Ef}}{\Lambda_{EE}} \left[\Lambda_{EE} V_{(Mi),(Nj),(Ef)}^{pp} + \frac{\Pi_{(Ef),(Mi)(Nj)}^{p,p}}{2\kappa_{Mi}\kappa_{Nj}} \right], \\
t_{(Mi),(Nj),(Kl)}^{ppp,(Ef)} &= \frac{\kappa_{Ef}}{\Lambda_{EE}} \left[\Lambda_{EE} \bar{V}_{(Mi),(Nj),(Kl),(Ef)}^{ppp} + \frac{\Pi_{(Kl)(Ef),(Mi)(Nj)}^{p,pp}}{\kappa_{Mi}\kappa_{Nj}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{A,b}^{I_\theta, I_r} V_{(Mi),(Nj),(Ab)}^{pp} \chi_{(Kl)(Ef),(Ab)}^{pp} + \sum_{A,b}^{I_\theta, I_r} \frac{\Pi_{(Ef),(Mi)(Ab)}^{p,p}}{\kappa_{Mi}} V_{(Nj),(Kl),(Ab)}^{pp} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{(mi),(nj)}^{rr,(Ef)} &= \frac{\kappa_{Ef}}{\Lambda_{EE}} \left[\Lambda_{EE} V_{(mi),(nj),(Ef)}^{rr} + \frac{\Pi_{(Ef),(mi)(nj)}^{r,p}}{2\kappa_{mi}\kappa_{nj}} \right], \\
t_{(mi),(nj),(Kl)}^{rrp,(Ef)} &= \frac{\kappa_{Ef}}{\Lambda_{EE}} \left[\Lambda_{EE} V_{(mi),(Kl),(nj),(Ef)}^{rrp} + \frac{\Pi_{(Kl)(Ef),(mi)(nj)}^{r,pp}}{\kappa_{mi}\kappa_{nj}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{A,b}^{I_\theta, I_r} V_{(mi),(nj),(Ab)}^{rr} \chi_{(Kl)(Ef),(Ab)}^{pp} + \sum_{a,b}^{I_\theta, I_r} \frac{\Pi_{(Ef),(mi)(ab)}^{r,p}}{\kappa_{mi}} V_{(nj),(Kl),(ab)}^{rp} \right], \\
t_{(Mi),(nj),(kl)}^{pr,(Ef)} &= \frac{\kappa_{Ef}}{\Lambda_{EE}} \left[\Lambda_{EE} \bar{V}_{(Mi),(nj),(kl),(Ef)}^{pr} + \frac{\Pi_{(Ef),(kl),(Mi)(nj)}^{pr}}{\kappa_{Mi}\kappa_{nj}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{a,b}^{I_\theta, I_r} \left(\bar{V}_{(Mi),(nj),(ab)}^{pr} \chi_{(Ef),(kl),(ab)}^{pr} + \frac{1}{\kappa_{nj}} V_{(Mi),(kl),(ab)}^{pr} \Pi_{(Ef),(ab)(nj)}^{r,p} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{A,b}^{I_\theta, I_r} \frac{\Pi_{(Ef),(Mi)(Ab)}^{p,p}}{\kappa_{Mi}} V_{(nj),(kl),(Ab)}^{rr} \right], \\
d_{(Mi),(nj)}^{pr,(ef)} &= \frac{\kappa_{ef}}{\Lambda_{ee}} \left[\Lambda_{ee} V_{(Mi),(nj),(ef)}^{pr} + \frac{\chi_{(nj),(ef),(Mi)}^{rr}}{\kappa_{Mi}} \right], \\
d_{(Mi),(nj),(Kl)}^{prp,(ef)} &= \frac{\kappa_{ef}}{\Lambda_{ee}} \left[\Lambda_{ee} V_{(Mi),(Kl),(nj),(ef)}^{ppr} + \frac{2\chi_{(Kl),(nj)(ef),(Mi)}^{pr}}{\kappa_{Mi}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{A,b}^{I_\theta, I_r} V_{(Mi),(Kl),(Ab)}^{pp} \chi_{(nj)(ef),(Ab)}^{rr} + \sum_{a,b}^{I_\theta, I_r} V_{(Mi),(nj),(ab)}^{pr} \chi_{(Kl),(ef),(ab)}^{pr} \right], \\
d_{(mi),(Nj)}^{rp,(ef)} &= \frac{\kappa_{ef}}{\Lambda_{ee}} \left[\Lambda_{ee} V_{(mi),(Nj),(ef)}^{rp} + \frac{\chi_{(Nj),(ef),(mi)}^{pr}}{\kappa_{mi}} \right], \\
d_{(mi),(Nj),(Kl)}^{rpp,(ef)} &= \frac{\kappa_{ef}}{\Lambda_{ee}} \left[\Lambda_{ee} V_{(mi),(Nj),(Kl),(ef)}^{rpp} + \frac{\chi_{(Nj)(Kl),(ef),(mi)}^{ppr}}{\kappa_{mi}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{a,b}^{I_\theta, I_r} V_{(mi),(Nj),(ab)}^{rp} \chi_{(Kl),(ef),(ab)}^{pr} \right], \\
d_{(mi),(nj),(kl)}^{rrr,(ef)} &= \frac{\kappa_{ef}}{\Lambda_{ee}} \left[\Lambda_{ee} V_{(mi),(nj),(kl),(ef)}^{rrr} + \frac{\chi_{(nj)(kl)(ef),(mi)}^{rrr}}{\kappa_{mi}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{A,b}^{I_\theta, I_r} V_{(mi),(nj),(Ab)}^{rr} \chi_{(kl)(ef),(Ab)}^{rr} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{(Mi),(nj)}^{pr,(ef)} &= \frac{\kappa_{ef}}{\Lambda_{ee}} \left[\Lambda_{ee} \bar{V}_{(Mi),(nj),(ef)}^{pr} + \frac{\Pi_{(ef),(Mi),(nj)}^r}{\kappa_{Mi}\kappa_{nj}} \right], \\
t_{(Mi),(nj),(Kl)}^{prp,(ef)} &= \frac{\kappa_{ef}}{\Lambda_{ee}} \left[\Lambda_{ee} \bar{V}_{(nj),(Mi),(Kl),(ef)}^{rpp} + \frac{\Pi_{(Kl),(ef),(Mi),(nj)}^{pr}}{\kappa_{Mi}\kappa_{nj}} \right. \\
&\quad + \sum_{a,b}^{I_\theta, I_r} \bar{V}_{(Mi),(nj),(ab)}^{pr} \chi_{(Kl),(ef),(ab)}^{pr} + \sum_{a,b}^{I_\theta, I_r} \frac{V_{(nj),(Kl),(ab)}^{rp}}{\kappa_{Mi}} \Pi_{(ef),(Mi),(ab)}^r \\
&\quad \left. + \sum_{A,b}^{I_\theta, I_r} \frac{V_{(Mi),(Kl),(Ab)}^{pp}}{\kappa_{nj}} \Pi_{(ef),(Ab),(nj)}^r \right], \\
t_{(Mi),(Nj),(kl)}^{ppr,(ef)} &= \frac{\kappa_{ef}}{\Lambda_{ee}} \left[\Lambda_{ee} V_{(Mi),(Nj),(kl),(ef)}^{ppr} + \frac{\Pi_{(kl)(ef),(Mi)(Nj)}^{p,rr}}{\kappa_{Mi}\kappa_{Nj}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{A,b}^{I_\theta, I_r} V_{(Mi),(Nj),(Ab)}^{pp} \chi_{(kl)(ef),(Ab)}^{rr} + \sum_{a,b}^{I_\theta, I_r} \frac{V_{(Nj),(kl),(ab)}^{pr}}{\kappa_{Mi}} \Pi_{(ef),(Mi),(ab)}^r \right], \\
t_{(mi),(nj),(kl)}^{rrr,(ef)} &= \frac{\kappa_{ef}}{\Lambda_{ee}} \left[\Lambda_{ee} \bar{V}_{(mi),(nj),(kl),(ef)}^{rrr} + \frac{\Pi_{(kl)(ef),(mi)(nj)}^{r,rr}}{\kappa_{mi}\kappa_{nj}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{A,b}^{I_\theta, I_r} V_{(mi),(nj),(Ab)}^{rr} \chi_{(kl)(ef),(Ab)}^{rr} + \sum_{A,b}^{I_\theta, I_r} \frac{V_{(mi),(kl),(Ab)}^{rr}}{\kappa_{nj}} \Pi_{(ef),(Ab),(nj)}^r \right];
\end{aligned}$$

$$\bar{V}_{(Mi),(Nj),(Kl),(Ab)}^{ppp} = V_{(Mi),(Nj),(Kl),(Ab)}^{ppp} + V_{(Mi),(Kl),(Nj),(Ab)}^{ppp},$$

$$\bar{V}_{(Mi),(nj),(kl),(Ab)}^{prp} = V_{(Mi),(nj),(kl),(Ab)}^{prp} + V_{(Mi),(kl),(nj),(Ab)}^{prp} + V_{(nj),(Mi),(kl),(Ab)}^{prp},$$

$$\bar{V}_{(Mi),(nj),(ab)}^{pr} = V_{(Mi),(nj),(ab)}^{pr} + V_{(nj),(Mi),(ab)}^{pr},$$

$$\bar{V}_{(mi),(nj),(kl),(ab)}^{rrr} = V_{(mi),(nj),(kl),(ab)}^{rrr} + V_{(mi),(kl),(nj),(ab)}^{rrr},$$

$$\bar{V}_{(kl),(Mi),(Nj),(ab)}^{rpp} = V_{(kl),(Mi),(Nj),(ab)}^{rpp} + V_{(kl),(Nj),(Mi),(ab)}^{rpp} + V_{(Mi),(Nj),(kl),(ab)}^{rpp}.$$

Систему звичайних диференціальних рівнянь (3.13) можна трактувати як таку, що описує механічну систему, складену із нескінченної кількості осциляторів без демпфування. Якщо знехтувати нелінійними членами відносно узагальнених координат p_{Mi} та r_{mi} , то система розпадається на нескінченний набір лінійних осциляторів. Отже, ці осцилятори

(в нашому випадку пов'язані із p_{Mi} та r_{mi}) взаємодіють виключно нелінійним чином. Саме нелінійність забезпечує "перетікання" кінетичної енергії між ступенями вільності гідродинамічної системи, тут, узагальненими координатам з p_{Mi} та r_{mi} .

Наша подальша мета – фізично коректно ввести дисипативні члени в систему (3.13).

3.2. Коефіцієнти лінійного демпфування для власних форм коливання рідини

В рамках моделі ідеальної рідини можливо пояснити ефект демпфування лише тоді, коли в'язкість рідини породжує вихорові течії у відносно малих локальних зонах, зокрема, у малому ламінарному в'язкому шарі на змоченій поверхні баку, чи в околі лінії контакту рідина-бак-газ. Демпфування також може бути наслідком більш складних феноменів на поверхні рідини. Важливо, що всі ці фізичні феномени носять локальний характер у просторі, тобто потенціальна складова соленоїдального поля швидкості домінує, а вихорова складова (породжена в'язкістю), де існує, сконцентрована у невеликих підобластях $Q(t)$.

Розглянемо вплив дисипативних феноменів на (малі) лінійні стоячі хвилі в циліндричній порожнині. Такі хвилі виникають у нерухомому баці за рахунок початкового збурення вільної поверхні. Описати затухаючі стоячі хвилі, які формуються власними формами (2.45), можна, використовуючи лінійне наближення модальної системи (3.13) та вводячи в лінеаризовану систему (3.13) коефіцієнти лінійного демпфування. Рівняння руху (система (3.13)) набувають тоді вигляд, подібний до системи незалежних лінійних осциляторів без правої частини (збурення)

$$\begin{aligned} \ddot{p}_{Mi} + \boxed{2\xi_{Mi}\bar{\sigma}_{Mi}\dot{p}_{Mi}} + \bar{\sigma}_{Mi}^2 p_{Mi} &= 0, \\ \ddot{r}_{mi} + \boxed{2\xi_{mi}\bar{\sigma}_{mi}\dot{r}_{mi}} + \bar{\sigma}_{mi}^2 r_{mi} &= 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Введені лінійні члени (в рамках) виражають дисипацію енергії стоячих хвиль. Коефіцієнти ξ_{Mi} пов'язані з логарифмічним декрементом затухання власних форм коливання рідини. Вони повинні бути малими безвимірними величинами та нести у собі сумарний ефект від різноманітних дисипативних феноменів, які пов'язуються, зокрема, з в'язким ламінарним шаром на змоченій поверхні баку [168]. Додатковими факторами є в'язкі ефекти на лінії контакту рідина-бак-газ [166], забруднення вільної поверхні [226], а також, для достатньо сильних збурень – розриви вільної поверхні [189]. Коли ξ_{Mi} є відносно малими, можна прийняти, що частоти стоячих хвиль залишаються приблизно рівними тим, які дає теорія ідеальної рідини (2.48).

Згідно роботи Хендерсона та Майлза [168], яка досліджувала експериментальні та теоретичні значення ξ_{Mi} , коефіцієнти демпфування ξ_{Mi} в (3.15) значною мірою визначаються в'язким шаром на змочених стінках баку та в'язким тертям в об'ємі. Теоретичні значення ξ_{Mi} асимптотично можуть бути виведені через *число Галілея* [227], $Ga \gg 1$ (є співвідношенням між силами тяжіння та в'язкістю), або, більш точно, в термінах малого параметра

$$\delta = Ga^{-1/4} = \sqrt{\nu/(g^{1/2}R_0^{3/2})} \ll 1, \quad (3.16)$$

(ν - кінетична в'язкість), який дає асимптотичну оцінку товщини в'язкого шару на змочених стінках баку.

Асимптотичний вклад найнижчих порядків, $\xi_{Mi}^{surf} = O(\delta)$, пов'язаний із ламінарним в'язким шаром на змочених стінках баку. Величину ξ_{Mi}^{surf} можна оцінити, використовуючи метод Кулегана [166]. Асимптотичний внесок другого порядку, $\xi_{Mi}^{bulk} = O(\delta^2)$, є пов'язаним із в'язкістю рідини в об'ємі (внутрішнє тертя). Відповідно до робіт [167] та [168], сума

$$\xi_{Mi} = \xi_{Mi}^{surf} + \xi_{Mi}^{bulk} \quad (3.17)$$

дає хороше узгодження з експериментами відносно декрементів затуха-

ння стоячих лінійних хвиль.

Для оцінки коефіцієнтів демпфування ξ_{Mi} у формулі (3.17), ми вивчаємо втрату енергії стоячої хвилі (власної форми коливання) за період коливань. Процедура виводу формули для (3.17) детально описана у книзі [223] (глава 6), але для прямокутних резервуарів. Проведемо цю процедуру для випадку вертикального кругового циліндричного баку.

Нехай існує стояча хвиля, яка задана власною формою φ_{Mi} (2.45), і ця хвиля має частоту σ (період T). Тоді відповідний коефіцієнт демпфування ξ_{Mi} можна обчислити за формулою

$$\frac{\langle \dot{E} \rangle}{2 \langle E_k \rangle} = -\frac{2\alpha}{T}, \quad \xi_{Mi} = \frac{\alpha}{2\pi}, \quad (3.18)$$

де $2 \langle E_k \rangle$ – повна усереднена енергія стоячої хвилі за період T (в [223] доведено, що вона дорівнює подвоєній усередненій кінетичній енергії), а $\langle \dot{E} \rangle$ – середня за період втрата енергії у механічній системі (в нашому випадку – енергії стоячої хвилі).

Повна середня за часом енергія обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} 2 \langle E_k \rangle &= \rho \left(\frac{1}{2} R_0^5 \sigma_{Mi}^2 \underbrace{\int_{Q_0} \nabla \varphi_{Mi}^2 dQ}_{\text{nondimensional}} \right) = \rho \left(\frac{1}{2} R_0^5 \sigma_{Mi}^2 \kappa_{Mi} \int_{\Sigma_0} \varphi_{Mi}^2 dS \right) \\ &= \rho \left(\frac{1}{2} R_0^5 \sigma_{Mi}^2 \kappa_{Mi} \Lambda_{MM} \int_0^1 r R_{Mi}^2 dr \right), \end{aligned}$$

де ми врахували, що φ_{Mi} – безрозмірна форма власна форма, а

$$\Lambda_{MM} = \begin{cases} 2\pi, & M = 0; \\ \pi, & M \neq 0. \end{cases}$$

Втрата енергії у чисельнику (3.18) є сумою втрат енергії внаслідок в'язкого шару на змоченій поверхні баку $\langle \dot{E}_l \rangle$ та внутрішнього в'язкого тертя $\langle \dot{E}_b \rangle$,

$$\langle \dot{E} \rangle = \langle \dot{E}_l \rangle + \langle \dot{E}_b \rangle .$$

Існують формули, які дають вирази для $\langle \dot{E}_l \rangle$ та $\langle \dot{E}_b \rangle$ у випадку ламінарного в'язкого шару на поверхні довільної гладкої поверхні та замкненого об'єму рідини, тобто для S_0 та Q_0 в нашому випадку. Ці формули можна знайти в підручнику Ландау та Ліфшиця [228]. Перша формула для $\langle \dot{E}_l \rangle$ дається в рівнянні (24,14) з [228], а друга формула (для $\langle \dot{E}_b \rangle$) приводиться в книзі Ландау та Ліфшиця зразу перед формулою (25,2). Обидві формули приводяться в явному вигляді та аналізуються Фалтінсенем та Тимохою [223] (глава 6). Але застосовуються ці формули лише для баків прямокутної геометрії.

Застосовуючи формулу (24,14) з Ландау та Ліфшиця [228] (див. також [223, (6.51)]), приходимо до наступного виразу для втрати енергії за період завдяки в'язкому шару на змоченій поверхні баку,

$$\begin{aligned} \langle \dot{E}_l \rangle &= \frac{1}{2} \mu \sqrt{\frac{\sigma}{2\nu}} \underbrace{\int_{S_0} |v_{0\tau}|^2 dS}_{dimensional} = -\frac{1}{2} \mu \sqrt{\frac{\sigma}{2\nu}} R_0^4 \sigma_{Mi}^2 \underbrace{\int_{S_0} |v_{0\tau}|^2 dS}_{nondimensional} \\ &= \mu \sqrt{\frac{\nu \sigma_{Mi}}{2R_0^2}} R_0^5 \sigma_{Mi}^2 \int_{S_0} |\partial_\tau \varphi_{Mi}|^2 dS, \quad (3.19) \end{aligned}$$

де μ – коефіцієнт в'язкості, ν – кінетична в'язкість, $v_{0\tau} = \partial_\tau \varphi_{Mi}$ – тангенціальна похідна на S_0 (розмірна та безрозмірна).

Змочена поверхня баку, $S_0 = S_{0b} + S_{0w}$, складається із дна, S_{0b} , та стінок S_{0w} . Розбиваючи останній інтеграл в (3.19) на дві складові дає

$$\int_{S_{0b}} |\partial_\tau \varphi_{Mi}|^2 dS = \frac{\Lambda_{MM}}{\cosh^2(k_{Mi}h)} \left[\int_0^1 r \mathcal{R}_{Mi}^2 dr + M^2 \int_0^1 \frac{\mathcal{R}_{Mi}^2}{r} dr \right], \quad (3.20)$$

та

$$\begin{aligned} \int_{S_{0w}} |\partial_\tau \varphi_{Mi}|^2 dS &= \\ &= R_{Mi}^2(1) \frac{\Lambda_{MM}}{2} \left[\frac{M^2}{r^2} \left(\frac{\tanh(k_{Mi}h)}{k_{Mi}} + \frac{h}{\cosh^2(k_{Mi}h)} \right) \right. \\ &\quad \left. + k_{Mi}^2 \left(\frac{\tanh(k_{Mi}h)}{R_{Mi}} - \frac{h}{\cosh^2(k_{Mi}h)} \right) \right]. \quad (3.21) \end{aligned}$$

Враховуючи (3.19)-(3.21) у формулі (3.18), виводимо

$$\xi_{Mi}^{surf} = \delta \frac{\mu_{Mi}^{(1)} + \frac{1}{2} J_{Mi}^2(k_{Mi}) (\mu_{Mi}^{(2)} + \mu_{Mi}^{(3)})}{2\sqrt{2} \kappa_{Mi}^{5/4} \mu_{Mi}^{(0)}}, \quad (3.22)$$

де

$$\begin{aligned} \mu_{Mi}^{(0)} &= \int_0^1 r J_{Mi}^2(k_{Mi}r) dr, \quad \mu_{Mi}^{(1)} = \int_0^1 r k_{Mi}^2 J_{Mi}'^2(k_{Mi}r) dr + M^2 \int_0^1 \frac{J_{Mi}^2(k_{Mi}r)}{r} dr, \\ \mu_{Mi}^{(2)} &= M^2 \left(\frac{\tanh(k_{Mi}h)}{k_{Mi}} + \frac{h}{\cosh^2(k_{Mi}h)} \right), \\ \mu_{Mi}^{(3)} &= k_{Mi}^2 \left(\frac{\tanh(k_{Mi}h)}{k_{Mi}} - \frac{h}{\cosh^2(k_{Mi}h)} \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Дисипацію енергії за рахунок внутрішнього тертя можна знайти, використовуючи формулу Ландау-Ліфшиця [228], яка переписана в статті [168] до еквівалентного вигляду

$$\langle \dot{E}_b \rangle = \frac{\rho}{2} \frac{\nu}{R_0^2} R_0^5 \sigma_{Mi}^2 \int_{S_0 + \Sigma_0} \partial_n (\nabla \varphi_{Mi})^2 dS, \quad (3.24)$$

де ∂_n – нормальна похідна. Інтеграл в (3.24) можна знайти в аналітичному вигляді

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_0 + S_0} \partial_n (\nabla \varphi_{Mi})^2 dS &= \\ &= \left[\left(\frac{2}{r^2} R_{Mi}^2(1) \right) M^2 \Lambda_{MM} \left[\frac{\tanh(k_{Mi}h)}{2k_{Mi}} + \frac{h}{2 \cosh^2(k_{Mi}h)} \right] \right] \\ &\quad - 4 \Lambda_{MM} \int_0^1 r R_{Mi}^2(r) dr \cdot \kappa_{Mi} \cdot k_{Mi}^2, \end{aligned}$$

отже

$$\begin{aligned} \langle \dot{E}_b \rangle = & \frac{1}{2} \rho R_0^5 \sigma_{Mi}^2 \cdot \frac{\nu}{R_0^2} \Lambda_{MM} \times \\ & \times \left[M^2 \left(\frac{\tanh(k_{Mi}h)}{k_{Mi}} + \frac{h}{\cosh^2(k_{Mi}h)} \right) \left(\mathcal{R}_{Mi}^2(1) \right. \right. \\ & \left. \left. - 4\kappa_{Mi} \int_0^1 r \mathcal{R}_{Mi}^2(r) dr \right) \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, друга компонента в (3.17) набуває вигляду

$$\xi_{Mi}^{bulk} = \delta^2 \left[\frac{2k_{Mi}^2}{\kappa_{Mi}^{1/2}} - \frac{J_{Mi}^2(k_{Mi}) \mu_{Mi}^{(2)}}{2\kappa_{Mi}^{3/2} \mu_{Mi}^{(0)}} \right]. \quad (3.25)$$

Число Бонда $Bo = \rho g R_0^2 / T_s$ (ρ - густина рідини, а T_s - поверхневий натяг) виражає співвідношення між силами гравітації та поверхневого натягу. Поверхневим натягом можна знехтувати, коли $100 \lesssim Bo$ [13, Глава 4]. Для звичайної водопровідної води та для звичайних умов на Землі з $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ та $T_s = 0.073 \text{ N/m}$, ця нерівність веде до обмеження знизу для радіуса циліндричного баку $0.05 \text{ m} \lesssim R_0$. Оскільки модальні рівняння нехтують поверхневим натягом, аналіз неявно передбачає в подальшому це обмеження знизу на радіус R_0 . Воно є типовим для біореакторів та настільких вібростендів.

Число Галілея $Ga = g R_0^3 / \nu^2$ розглядається як співвідношення між силами тяжіння/гравітації та в'язкості. Припустимо, що коефіцієнти демпфування обчислюються за (3.17), (3.22), (3.25) для води з-під крану та подивимося як ці коефіцієнти залежать від радіуса посудини R_0 . Чисельний результат приведено на Рис. 3.1. Графіки показують, що коефіцієнти демпфування дійсно є малими величинами, які прямують до нуля із збільшенням радіуса R_0 . В очевидь, даним видом демпфування (поверхневим шаром та в'язкістю рідини) можна знехтувати для баків ракетносіїв, резервуарів з водою та аналогічними конструкціями, що мають справу з великими об'ємами. Проте для менших R_0 (лабораторних контейнерів), коефіцієнт демпфування, швидше за все, повинен бути

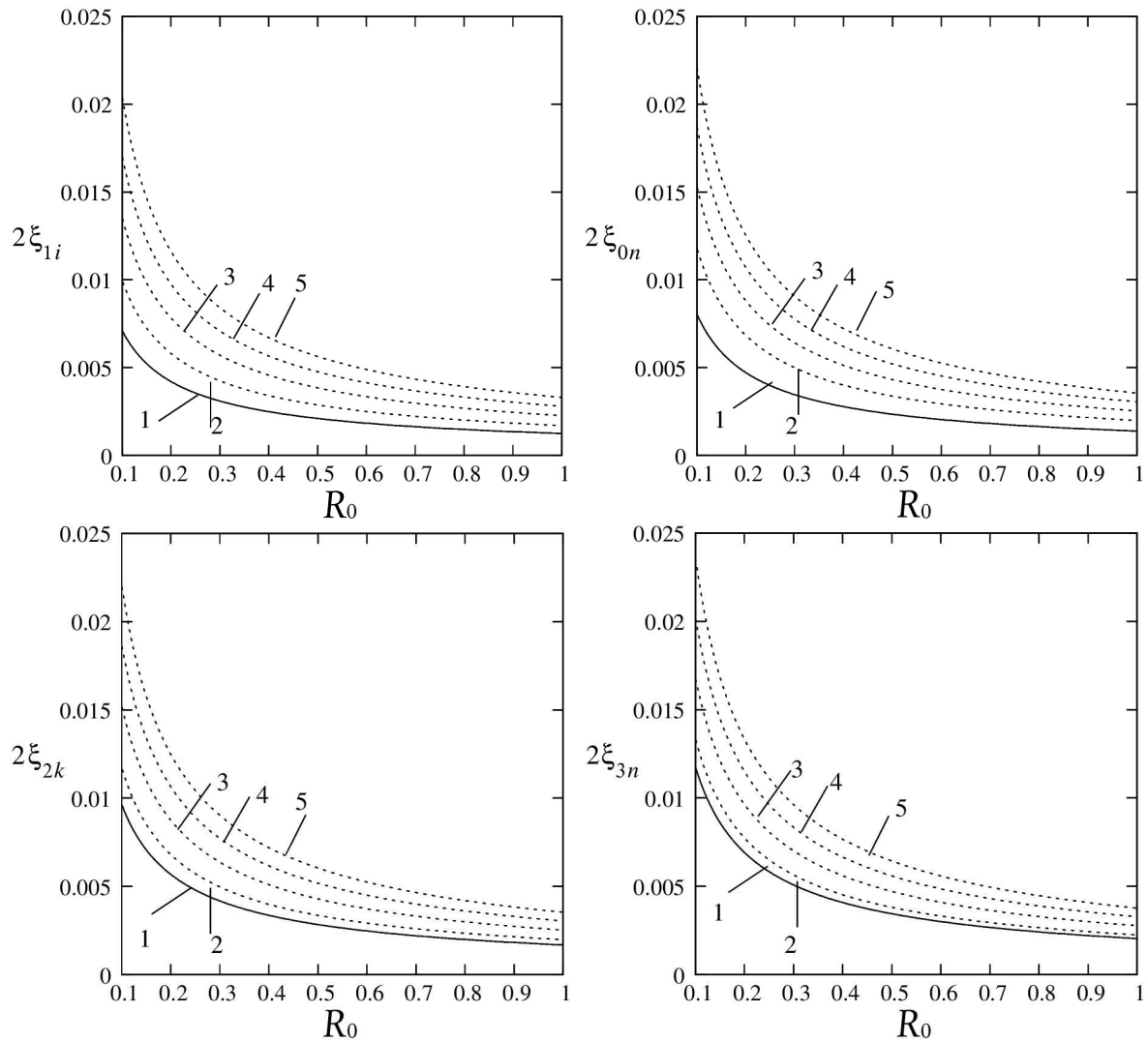


Рис. 3.1: Чисельні теоретичні значення коефіцієнтів демпфування $2\xi_{Mi}$ згідно формул (3.17)–(3.23) для $M = 0, 1, 2, 3$. Обчислення виконано для води $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ та $g = 9.81 \text{ м}/\text{с}^2$. Другі індекси в ξ_{Mi} використовуються для позначення кривих. Значення радіуса R_0 дано в метрах.

врахованим. Більше того, додаткові дисипативні фактори (забруднення, дефрагментація вільної поверхні, тощо) можуть суттєво збільшити ці коефіцієнти демпфування.

Сумуючи оцінку знизу для поверхневого натягу, а також графіки на Рис. 3.1, можна передбачати, що демпфування завдяки в'язкому ламінарному шару та внутрішньому тертю має враховуватись для

резервуарів, радіуси яких лежать в діапазоні

$$0.05m \lesssim R_0 \lesssim 0.3m, \quad (3.26)$$

що, як ми вже писали, є характерним для *біореакторів*.

3.3. Модальні рівняння типу Наріманова-Моїсєєва із демпфуванням

Фалтінсен та ін. [223] використали нелінійний модальний метод для виведення системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь (замість (3.13)), що описує резонансні коливання рідини в циліндричному баку, коли частота збурення баку є близькою до найнижчої власної частоти, η_1 , η_2 , η_4 , та η_5 є малими відносно радіусу посудини, та немає вторинних (внутрішніх) резонансів (ця умова, згідно [223], виконується для відносно великих глибин $h \gtrsim 1.2$).

Використовуючи (2.53), (2.54) та припускаючи асимптотику Наріманова-Моїсєєва [223]

$$p_{11} \sim r_{11} = O(\epsilon^{1/3}), \quad p_{0j} \sim p_{2j} \sim r_{2j} = O(\epsilon^{2/3}),$$

$$r_{1(j+1)} \sim p_{1(j+1)} \sim p_{3j} \sim r_{3j} = O(\epsilon), \quad j = 1, 2, \dots, I_r; \quad I_r \rightarrow \infty \quad (3.27a)$$

$$\bar{\sigma}_{11}^2 - 1 = O(\epsilon^{2/3}), \quad \bar{\sigma}_{Mi} = \sigma_{Mi}/\sigma, \quad (3.27b)$$

дає змогу вивести з (3.13) наступні нелінійні модальні рівняння типу Наріманова-Моїсєєва відносно узагальнених гідродинамічних координат

$$\ddot{p}_{11} + \boxed{2\xi_{11}\bar{\sigma}_{11}\dot{p}_{11}} + \bar{\sigma}_{11}^2 p_{11} + \mathcal{P}_{11}(p_{11}, r_{11}; p_{0j}, p_{2j}, r_{2j}) = -(\ddot{\eta}_1 - \bar{g}\eta_5 - S_1\ddot{\eta}_5)\kappa_{11}P_1, \quad (3.28a)$$

$$\ddot{r}_{11} + \boxed{2\xi_{11}\bar{\sigma}_{11}\dot{r}_{11}} + \bar{\sigma}_{11}^2 r_{11} + \mathcal{R}_{11}(p_{11}, r_{11}; p_{0j}, p_{2j}, r_{2j}) = -(\ddot{\eta}_2 + \bar{g}\eta_4 + S_1\ddot{\eta}_4)\kappa_{11}P_1; \quad (3.28b)$$

$$\ddot{p}_{2k} + \boxed{2\xi_{2k}\bar{\sigma}_{2k}\dot{p}_{2k}} + \bar{\sigma}_{2k}^2 p_{2k} + \mathcal{P}_{2k}(p_{11}, r_{11}) = 0, \quad (3.29a)$$

$$\ddot{r}_{2k} + \boxed{2\xi_{2k}\bar{\sigma}_{2k}\dot{r}_{2k}} + \bar{\sigma}_{2k}^2 r_{2k} + \mathcal{R}_{2k}(p_{11}, r_{11}) = 0, \quad (3.29b)$$

$$\ddot{p}_{0k} + \boxed{2\xi_{0k}\bar{\sigma}_{0k}\dot{p}_{0k}} + \bar{\sigma}_{0k}^2 p_{0k} + \mathcal{P}_{0k}(p_{11}, r_{11}) = 0; \quad (3.29c)$$

$$\ddot{p}_{3k} + \boxed{2\xi_{3k}\bar{\sigma}_{3k}\dot{p}_{3k}} + \bar{\sigma}_{3k}^2 p_{3k} + \mathcal{P}_{3k}(p_{11}, r_{11}; p_{0j}, p_{2j}, r_{2j}) = 0, \quad (3.30a)$$

$$\ddot{r}_{3k} + \boxed{2\xi_{3k}\bar{\sigma}_{3k}\dot{r}_{3k}} + \bar{\sigma}_{3k}^2 r_{3k} + \mathcal{R}_{3k}(p_{11}, r_{11}; p_{0j}, p_{2j}, r_{2j}) = 0, \quad k = 1, \dots, I_r; \quad (3.30b)$$

$$\begin{aligned} \ddot{p}_{1n} + \boxed{2\xi_{1n}\bar{\sigma}_{1n}\dot{p}_{1n}} + \bar{\sigma}_{1n}^2 p_{1n} + \mathcal{P}_{1n}(p_{11}, r_{11}; p_{0j}, p_{2j}, r_{2j}) = \\ = -(\ddot{\eta}_1 - \bar{g}\eta_5 - S_n\ddot{\eta}_5)\kappa_{1n} P_n, \end{aligned} \quad (3.31a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{r}_{1n} + \boxed{2\xi_{1n}\bar{\sigma}_{1n}\dot{r}_{1n}} + \bar{\sigma}_{1n}^2 r_{1n} + \mathcal{R}_{1n}(p_{11}, r_{11}; p_{0j}, p_{2j}, r_{2j}) = \\ = -(\ddot{\eta}_2 + \bar{g}\eta_4 + S_n\ddot{\eta}_4)\kappa_{1n} P_n, \end{aligned} \quad (3.31b)$$

$n = 2, \dots, I_r$, де нелінійні компоненти \mathcal{P}_{Mi} , \mathcal{R}_{mi} мають вигляд

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{11}(p_{11}, r_{11}; p_{0j}, p_{2j}, r_{2j}) = d_1 p_{11} (\ddot{p}_{11} p_{11} + \ddot{r}_{11} r_{11} + \dot{p}_{11}^2 + \dot{r}_{11}^2) \\ + d_2 [r_{11}(\ddot{p}_{11} r_{11} - \ddot{r}_{11} p_{11}) + 2\dot{r}_{11}(\dot{p}_{11} r_{11} - \dot{r}_{11} p_{11})] \\ + \sum_{j=1}^{I_r} \left[d_3^{(j)} (\ddot{p}_{11} p_{2j} + \ddot{r}_{11} r_{2j} + \dot{p}_{11} \dot{p}_{2j} + \dot{r}_{11} \dot{r}_{2j}) + d_4^{(j)} (\ddot{p}_{2j} p_{11} + \ddot{r}_{2j} r_{11}) \right. \\ \left. + d_5^{(j)} (\ddot{p}_{11} p_{0j} + \dot{p}_{11} \dot{p}_{0j}) + d_6^{(j)} \ddot{p}_{0j} p_{11} \right], \end{aligned} \quad (3.32a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{11}(p_{11}, r_{11}; p_{0j}, p_{2j}, r_{2j}) = d_1 r_{11} (\ddot{p}_{11} p_{11} + \ddot{r}_{11} r_{11} + \dot{p}_{11}^2 + \dot{r}_{11}^2) \\ + d_2 [p_{11}(\ddot{r}_{11} p_{11} - \ddot{p}_{11} r_{11}) + 2\dot{p}_{11}(\dot{r}_{11} p_{11} - \dot{p}_{11} r_{11})] \\ + \sum_{j=1}^{I_r} \left[d_3^{(j)} (\ddot{p}_{11} r_{2j} - \ddot{r}_{11} p_{2j} + \dot{p}_{11} \dot{r}_{2j} - \dot{p}_{2j} \dot{r}_{11}) + d_4^{(j)} (\ddot{r}_{2j} p_{11} - \ddot{p}_{2j} r_{11}) \right. \\ \left. + d_5^{(j)} (\ddot{r}_{11} p_{0j} + \dot{r}_{11} \dot{p}_{0j}) + d_6^{(j)} \ddot{p}_{0j} r_{11} \right], \end{aligned} \quad (3.32b)$$

$$\mathcal{P}_{2k}(p_{11}, r_{11}) = d_{7,k}(\dot{p}_{11}^2 - \dot{r}_{11}^2) + d_{9,k}(\ddot{p}_{11}p_{11} - \ddot{r}_{11}r_{11}), \quad (3.33a)$$

$$\mathcal{R}_{2k}(p_{11}, r_{11}) = 2d_{7,k}\dot{p}_{11}\dot{r}_{11} + d_{9,k}(\ddot{p}_{11}r_{11} + \ddot{r}_{11}p_{11}) = 0, \quad (3.33b)$$

$$\mathcal{P}_{0k}(p_{11}, r_{11}) = d_{8,k}(\dot{p}_{11}^2 + \dot{r}_{11}^2) + d_{10,k}(\ddot{p}_{11}p_{11} + \ddot{r}_{11}r_{11}); \quad (3.33c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{3k}(p_{11}, r_{11}; p_{0j}, p_{2j}, r_{2j}) &= d_{11,k} [\ddot{p}_{11}(p_{11}^2 - r_{11}^2) - 2p_{11}r_{11}\ddot{r}_{11}] \\ &+ d_{12,k} [p_{11}(\dot{p}_{11}^2 - \dot{r}_{11}^2) - 2r_{11}\dot{p}_{11}\dot{r}_{11}] + \sum_{j=1}^{I_r} \left[d_{13,k}^{(j)} (\ddot{p}_{11}p_{2j} - \ddot{r}_{11}r_{2j}) \right. \\ &\left. + d_{14,k}^{(j)} (\ddot{p}_{2j}p_{11} - \ddot{r}_{2j}r_{11}) + d_{15,k}^{(j)} (\dot{p}_{2j}\dot{p}_{11} - \dot{r}_{2j}\dot{r}_{11}) \right], \quad (3.34a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{3k}(p_{11}, r_{11}; p_{0j}, p_{2j}, r_{2j}) &= d_{11,k} [\ddot{r}_{11}(p_{11}^2 - r_{11}^2) + 2p_{11}r_{11}\ddot{p}_{11}] \\ &+ d_{12,k} [r_{11}(\dot{p}_{11}^2 - \dot{r}_{11}^2) + 2p_{11}\dot{p}_{11}\dot{r}_{11}] + \sum_{j=1}^{I_r} \left[d_{13,k}^{(j)} (\ddot{p}_{11}r_{2j} + \ddot{r}_{11}p_{2j}) \right. \\ &\left. + d_{14,k}^{(j)} (\ddot{p}_{2j}r_{11} + \ddot{r}_{2j}p_{11}) + d_{15,k}^{(j)} (\dot{p}_{2j}\dot{r}_{11} + \dot{r}_{2j}\dot{p}_{11}) \right]; \quad (3.34b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{1n}(p_{11}, r_{11}; p_{0j}, p_{2j}, r_{2j}) &= d_{16,n}(\ddot{p}_{11}p_{11}^2 + r_{11}p_{11}\ddot{r}_{11}) \\ &+ d_{17,n}(\ddot{p}_{11}r_{11}^2 - r_{11}p_{11}\ddot{r}_{11}) + d_{18,n}p_{11}(\dot{p}_{11}^2 + \dot{r}_{11}^2) + d_{19,n}(r_{11}\dot{p}_{11}\dot{r}_{11} - p_{11}\dot{r}_{11}^2) \\ &+ \sum_{j=1}^{I_r} \left[d_{20,n}^{(j)} (\ddot{p}_{11}p_{2j} + \ddot{r}_{11}r_{2j}) + d_{21,n}^{(j)} (p_{11}\ddot{p}_{2j} + r_{11}\ddot{r}_{2j}) \right. \\ &\left. + d_{22,n}^{(j)} (\dot{p}_{11}\dot{p}_{2j} + \dot{r}_{11}\dot{r}_{2j}) + d_{23,n}^{(j)}\ddot{p}_{11}p_{0j} + d_{24,n}^{(j)}p_{11}\ddot{p}_{0j} + d_{25,n}^{(j)}\dot{p}_{11}\dot{p}_{0j} \right], \quad (3.35a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{1n}(p_{11}, r_{11}; p_{0j}, p_{2j}, r_{2j}) &= d_{16,n}(\ddot{r}_{11}r_{11}^2 + r_{11}p_{11}\ddot{p}_{11}) \\ &+ d_{17,n}(\ddot{r}_{11}p_{11}^2 - r_{11}p_{11}\ddot{p}_{11}) + d_{18,n}r_{11}(\dot{p}_{11}^2 + \dot{r}_{11}^2) + d_{19,n}(p_{11}\dot{p}_{11}\dot{r}_{11} - r_{11}\dot{p}_{11}^2) \\ &+ \sum_{j=1}^{I_r} \left[d_{20,n}^{(j)} (\ddot{p}_{11}r_{2j} - \ddot{r}_{11}p_{2j}) + d_{21,n}^{(j)} (p_{11}\ddot{r}_{2j} - r_{11}\ddot{p}_{2j}) + d_{22,n}^{(j)} (\dot{p}_{11}\dot{r}_{2j} - \dot{r}_{11}\dot{p}_{2j}) \right. \\ &\left. + d_{23,n}^{(j)}\ddot{r}_{11}p_{0j} + d_{24,n}^{(j)}r_{11}\ddot{p}_{0j} + d_{25,n}^{(j)}\dot{r}_{11}\dot{p}_{0j} \right], \quad n = 2, \dots, I_r, \quad (3.35b) \end{aligned}$$

а безвимірні гідродинамічні коефіцієнти є функціями від безрозмірної глибини рідини h [223].

Зауважимо, що у модальні рівняння Наріманова-Моїсеєва входять лише узагальнені координати із першими індексами $M = 0, 1, 2, 3$. Узагальнені координати із $M \geq 4$ описуються однорідними лінійними модальними рівняннями виду (3.15). Вони не мають неоднорідних членів та, внаслідок цього, не дають внеску в усталені рухи згідно теорії Наріманова-Моїсеєва. На великих проміжках часу відповідні узагальнені координати із $M \geq 4$ прямують до нуля через демпфування. Система звичайних диференціальних рівнянь вимагає або початкових, або періодичних умов. Остання умова відповідає за усталені резонансні хвилі.

Узагальнені координати третього порядку малості в (3.30), (3.31), p_{3n} , r_{3n} , $r_{1(n+1)}$, $p_{1(n+1)}$, $n \geq 1$, відсутні в інших рівняннях. Це означає, що, розв'язавши підсистему (3.28), (3.29), можна підставити розв'язок в інші рівняння (3.30), (3.31) та знайти вищезгадані узагальнені координати до порядку $O(\epsilon)$. Тому аналіз повинен бути зосереджений на підсистемі (3.28), (3.29), де тільки рівняння (3.28) містять неоднорідні члени, які пов'язуються із рухом баку (права частина не нульова).

Новизною виведених модальних рівнянь є наявність лінійних демпфуючих членів, що не були розглянуті в [223]. Оскільки ці рівняння мають асимптотичний характер, окрім для резонансно збурених узагальнених координат p_{11} та r_{11} в (3.28), необхідно зберегти лише члени $O(\epsilon^{2/3})$ та $O(\epsilon)$ в (3.29)-(3.31), враховуючи малість ξ_{Mi} . Це виводить, що ξ_{Mi} задовільняють асимптотичне співвідношення

$$\xi_{2i} \sim \xi_{0i} \sim \xi_{zi} \sim \xi_{1n} = O(1), \quad i \geq 1, n \geq 2. \quad (3.36)$$

Для рівнянь (3.28), які описують резонансно збурені p_{11} та r_{11} , навіть малі ξ_{11} можуть вплинути на характер розв'язків, отже ми не можемо застосувати правило про нехтування величин $o(\epsilon)$ для дисипативних членів в (3.28) у випадку резонансу.

Умова (3.36) для узагальнених координат вищих порядків виглядає нефізично та несумісно із нашими припущеннями, що коефіцієнти демпфування є малими безрозмірними параметрами. Отже, для системи Наріманова-Моїсєєва можна всюди опустити лінійне демпфування, окрім для рівнянь (3.28).

3.4. Асимптотичні періодичні розв'язки та відповідні усталені хвилі, їх стійкість

3.4.1. Про тривимірні періодичні рухи баку. Припустимо довільні періодичні рухи баку з амплітудою порядку $O(\epsilon)$ за чотирма ступенями вільності, тобто

$$\eta_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\eta_{ia}^{(k)} \cos(kt) + \mu_{ia}^{(k)} \sin(kt) \right], \quad \eta_{ia}^{(k)} \sim \mu_{ia}^{(k)} = O(\epsilon), \quad (3.37)$$

де гармоніки Фур'є найнижчого порядку не є нульові, тобто

$$\sum_{i=1,2,4,5} |\eta_{ia}^{(1)}| + |\mu_{ia}^{(1)}| \neq 0. \quad (3.38)$$

В обговоренні рівнянь (3.28)-(3.31), ми наголосили, що можна опустити узагальнені координати третього порядку $r_{3k}, p_{3k}, r_{1n}, p_{1n}$, та зосередитись на підсистемі (3.28), (3.29), де тільки два рівняння (3.28) мають не нульові праві періодичні частини. Розв'язок цієї підсистеми наближує хвилі на поверхні з точністю до $O(\epsilon^{2/3})$. Після підстановки (3.37) у праві частини (3.28) отримуємо

$$\begin{aligned} P_1 \kappa_{11} \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k\eta_{1a}^{(k)} - (kS_1 - g)\eta_{5a}^{(k)}) \cos(kt) + (k\mu_{1a}^{(k)} - (kS_1 - g)\mu_{5a}^{(k)}) \sin(kt) \right], \\ P_1 \kappa_{11} \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k\eta_{2a}^{(k)} + (kS_1 - g)\eta_{4a}^{(k)}) \cos(kt) + (k\mu_{2a}^{(k)} + (kS_1 - g)\mu_{4a}^{(k)}) \sin(kt) \right], \end{aligned} \quad (3.39)$$

в яких, завдяки умові (3.27b), та нехтуючи величинами порядку $o(\epsilon)$, можна зробити заміну $g = g/(R_0\sigma^2) \rightarrow g = g/(R_0\sigma_{11}^2)$.

Асимптотика Наріманова-Моїсєєва (3.27) передбачає, що тільки перші гармоніки в $\eta_i(t)$, $i = 1, 2, 4, 5$, будучи порядку $O(\epsilon)$, резонансно збуджують узагальнені координати p_{11} та r_{11} до асимптотичного порядку $O(\epsilon^{1/3})$, в той час як інші гармоніки в правих частинах (3.28) (чи (3.39)) дають внесок $O(\epsilon)$ до узагальнених координат r_{11} та p_{11} . Сконцентруватись на амплітудах найнижчих гармонік, $\cos t$ та $\sin t$, у правих частинах (3.28a) та (3.28b):

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= P_1 \kappa_{11} (\eta_{1a}^{(1)} - [S_1 - g] \eta_{5a}^{(1)}), \quad \bar{\epsilon}_x = P_1 \kappa_{11} (\mu_{1a}^{(1)} - [S_1 - g] \mu_{5a}^{(1)}), \\ \bar{\epsilon}_y &= P_1 \kappa_{11} (\eta_{2a}^{(1)} + [S_1 - g] \eta_{4a}^{(1)}), \quad \epsilon_y = P_1 \kappa_{11} (\mu_{2a}^{(1)} + [S_1 - g] \mu_{4a}^{(1)}), \end{aligned} \quad (3.40)$$

де ϵ_x та $\bar{\epsilon}_x$ стосуються збурень вздовж осі Ox , а $\bar{\epsilon}_y$ та ϵ_y відповідають за гармоніки $\cos t$ та $\sin t$ вздовж осі Oy , можна знайти p_{11} та r_{11} з точністю до $O(\epsilon^{2/3})$.

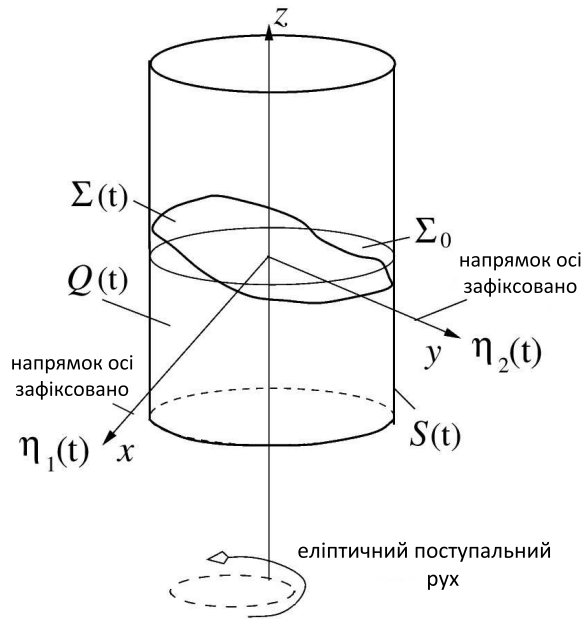


Рис. 3.2: Бак виконує орбітальні (еліптичні) поступальні рухи проти годинникової стрілки; Oz – вісь симетрії. Область рідини $Q(t)$ є обмеженою вільною поверхнею $\Sigma(t)$ та змоченою поверхнею посудини $S(t)$; Σ_0 – незбурена вільна поверхня.

Важливим є те, що якщо взяти лише члени (3.40) в правих части-

нах (3.28), то ми приходимо до таких же правих частин, що виникають у випадку, коли посудина рухається горизонтально та поступально за законом

$$\begin{aligned}\eta_1(t) &= -\frac{1}{P_1\kappa_{11}}(\epsilon_x \cos t + \bar{\epsilon}_x \sin t) \\ &= -(\eta_{1a}^{(1)} - [S_1 - g]\eta_{5a}^{(1)}) \cos t - (\mu_{1a}^{(1)} - [S_1 - g]\mu_{5a}^{(1)}) \sin t, \quad (3.41a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_2(t) &= -\frac{1}{P_1\kappa_{11}}(\bar{\epsilon}_y \cos t + \epsilon_y \sin t) \\ &= -(\eta_{2a}^{(1)} + [S_1 - g]\eta_{4a}^{(1)}) \cos t - (\mu_{2a}^{(1)} + [S_1 - g]\mu_{4a}^{(1)}) \sin t. \quad (3.41b)\end{aligned}$$

Цей штучно введений поступальний горизонтальний рух баку відбувається за *еліптичною* траекторією у площині Oxy , за чи проти годинниковою стрілкою (див. Рис. 3.2). Без обмеження загальності, можна сфокусуватись на випадку руху проти годинникової стрілки. Більше того, використовуючи фазовий зсув по часу $t := t + t_1$ та обертання Oxy навколо осі циліндра (більша піввісь еліптичної орбіти повинна співпасти із Ox) дає можливість вважати, що

$$\epsilon_x > 0, \quad \epsilon_y \geq 0, \quad \bar{\epsilon}_y = \bar{\epsilon}_x = 0 \quad (3.42)$$

в (3.40) та (3.41).

Ми припускаємо, що умова (3.42) *виконана* в нашому подальшому аналізі. *Фізично*, це означає, що, без обмеження загальності, ми зосереджуємось на еліптичних горизонтальних збуреннях баку проти годинникової стрілки за законом (3.41) із більшою піввіссю (пов'язаною з ϵ_x), що належить до осі Ox . Це означає також, що ми довели наступну лему.

Лема 2.1. *В рамках асимптотичного наближення Наріманова-Моїсєєва (резонансні рухи рідини у вертикальному циліндричному баці, що рухається періодично з частотою $\sigma \approx \sigma_{11}$ за чотирма ступенями вільності $\eta_i = O(\epsilon)$, $i = 1, 2, 4, 5$) резонансні хвилі на поверхні мають*

порядок $O(\epsilon^{1/3})$ та, з точністю до $O(\epsilon^{2/3})$ включно, ці хвилі еквівалентні таким, які породжуються штучно введеними еліптичними горизонтальними рухами бака за законом (3.41)

3.4.2. Компоненти періодичного розв'язку порядків $O(\epsilon^{1/3})$ та $O(\epsilon^{2/3})$. Для знаходження асимптотичного періодичного розв'язку рівнянь Наріманова-Моїсева, ми використовуємо метод Бубнова-Гальоркіна [223]. Для цього задамо члени першого порядку малості у вигляді

$$p_{11}(t) = a \cos t + \bar{a} \sin t + O(\epsilon), \quad r_{11}(t) = \bar{b} \cos t + b \sin t + O(\epsilon), \quad (3.43)$$

де безрозмірні амплітудні параметри a, \bar{a}, \bar{b} , та b мають асимптотичний порядок $O(\epsilon^{1/3})$. Підстановка (3.43) в (3.29) дає змогу знайти узагальнені координати другого порядку

$$p_{0k}(t) = s_{0k}(a^2 + \bar{a}^2 + b^2 + \bar{b}^2) + s_{1k} [(a^2 - \bar{a}^2 - b^2 + \bar{b}^2) \cos 2t + 2(a\bar{a} + b\bar{b}) \sin 2t] + o(\epsilon), \quad (3.44a)$$

$$p_{2k}(t) = c_{0k}(a^2 + \bar{a}^2 - b^2 - \bar{b}^2) + c_{1k} [(a^2 - \bar{a}^2 + b^2 - \bar{b}^2) \cos 2t + 2(a\bar{a} - b\bar{b}) \sin 2t] + o(\epsilon), \quad (3.44b)$$

$$r_{2k}(t) = 2c_{0k}(a\bar{b} + b\bar{a}) + 2c_{1k} [(a\bar{b} - b\bar{a}) \cos 2t + (ab + \bar{a}\bar{b}) \sin 2t] + o(\epsilon), \quad (3.44c)$$

де

$$s_{0k} = \frac{1}{2} \left(\frac{d_{10,k} - d_{8,k}}{\bar{\sigma}_{0k}^2} \right), \quad s_{1k} = \frac{d_{10,k} + d_{8,k}}{2(\bar{\sigma}_{0k}^2 - 4)}, \quad (3.45)$$

$$c_{0k} = \frac{1}{2} \left(\frac{d_{9,k} - d_{7,k}}{\bar{\sigma}_{2k}^2} \right), \quad c_{1k} = \frac{d_{9,k} + d_{7,k}}{2(\bar{\sigma}_{2k}^2 - 4)}.$$

Підстановка (3.43) та (3.44) у (3.28) та групування доданків перед першою гармонікою, при $\cos t$ та $\sin t$, в (3.28), виводить *необхідну* умову

розв'язності задачі у вигляді наступної (секулярної) системи нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} : a [(\bar{\sigma}_{11}^2 - 1) + m_1(a^2 + \bar{a}^2 + \bar{b}^2) + m_3 b^2] + \bar{a}[(m_1 - m_3)\bar{b}b + \xi] = \epsilon_x, \\ \textcircled{2} : \bar{a} [(\bar{\sigma}_{11}^2 - 1) + m_1(a^2 + \bar{a}^2 + b^2) + m_3 \bar{b}^2] + a[(m_1 - m_3)\bar{b}b - \xi] = 0, \\ \textcircled{3} : b [(\bar{\sigma}_{11}^2 - 1) + m_1(b^2 + \bar{b}^2 + \bar{a}^2) + m_3 a^2] + \bar{b}[(m_1 - m_3)\bar{a}a - \xi] = \epsilon_y, \\ \textcircled{4} : \bar{b} [(\bar{\sigma}_{11}^2 - 1) + m_1(b^2 + \bar{b}^2 + a^2) + m_3 \bar{a}^2] + b[(m_1 - m_3)\bar{a}a + \xi] = 0 \end{array} \right. \quad (3.46)$$

відносно до a, \bar{a}, \bar{b} та b ; тут, $\xi = 2\xi_{11}$, коефіцієнти m_1 та m_3 обчислюються формулами

$$m_1 = -\frac{1}{2}d_1 + \sum_{j=1}^{I_r} \left[c_{1j} \left(\frac{1}{2}d_3^{(j)} - 2d_4^{(j)} \right) + s_{1j} \left(\frac{1}{2}d_5^{(j)} - 2d_6^{(j)} \right) - s_{0j}d_5^{(j)} - c_{0j}d_3^{(j)} \right], \quad (3.47a)$$

$$m_3 = \frac{1}{2}d_1 - 2d_2 + \sum_{j=1}^{I_r} \left[c_{1j} \left(\frac{3}{2}d_3^{(j)} - 6d_4^{(j)} \right) + s_{1j} \left(-\frac{1}{2}d_5^{(j)} + 2d_6^{(j)} \right) - s_{0j}d_5^{(j)} + c_{0j}d_3^{(j)} \right] \quad (3.47b)$$

та є функціями від h та $\bar{\sigma}_{11}$. Використовуючи (3.27b), можна показати, що залежністю від $\bar{\sigma}_{11}$ можна знехтувати, підставивши $\sigma = \sigma_{11}$ у (3.47). Залежність від σ залишається тільки у $(\bar{\sigma}_{11}^2 - 1)$ -величинах рівнянь (3.46).

При виводі секулярної системи (3.46), ми врахували Лему 2.1 в тій частині, де вона стосується виключно горизонтальних орбітальних рухів баку за еліптичною траєкторією.

3.4.3. Типи усталених хвиль та їх стійкість. Потрібно зауважити, що відповідно до асимптотики найнижчого порядку (3.43), усталені хвилі вільної поверхні визначаються як суперпозиція двох власних форм коливання рідини

$$\zeta(r, \theta, t) = J_1(k_{11}r) \left[(a \cos \theta + \bar{b} \sin \theta) \cos t + (\bar{a} \cos \theta + b \sin \theta) \sin t \right] + o(\epsilon^{2/3}), \quad (3.48)$$

що описує так звану *кругову* хвилю (swirling) за виключенням випадку, коли $(a \cos \theta + \bar{b} \sin \theta)$ та $(\bar{a} \cos \theta + b \sin \theta)$ являють собою два подібні патерни. Останнє станеться тоді і тільки тоді, коли

$$ab = \bar{a}\bar{b}. \quad (3.49)$$

Умова (3.49) означає, що (3.48) описує *стоячу* усталену хвилю.

Що таке кругова хвиля (інакше – азимутальна прогресивна хвиля) детально обговорюється в багатьох роботах, зокрема в [223].

3.4.4. Альтернативна форма секулярної системи рівнянь (3.46). Для (3.46) з $\xi = 0$ (демпфування не враховується) та $m_1 \neq m_3$ в роботі [223] було доведено, що секулярна система має розв'язок тоді і тоді, коли $\bar{a} = \bar{b} = 0$ для

$$0 \leq \delta = \epsilon_y / \epsilon_x < 1.$$

Це для випадку поздовжніх збурень баку ($\delta = 0$) та еліптичних гармонічних рухів баку ($\delta \neq 0, \delta < 1$). Для кругових рухів баку, система (3.46) стає виродженою.

Якщо $\xi \neq 0$, амплітудні параметри \bar{a} та \bar{b} не нульові, отже, цей результат не може бути перенесено на випадок резонансних хвиль із демпфуванням. Використовуючи результати роботи [229], перепишемо (3.46) до більш фізично привабливої форми мовою інтегральних амплітуд A, B та зсувів фаз ψ, φ , визначених як

$$A = \sqrt{a^2 + \bar{a}^2} \quad \text{and} \quad B = \sqrt{\bar{b}^2 + b^2} > 0, \quad (3.50a)$$

$$a = A \cos \psi, \quad \bar{a} = A \sin \psi, \quad \bar{b} = B \cos \varphi, \quad b = B \sin \varphi. \quad (3.50b)$$

Підставляючи (3.50) у вирази $\bar{a} \textcircled{1} - a \textcircled{2}$, $\bar{b} \textcircled{3} - b \textcircled{4}$, $a \textcircled{1} + \bar{a} \textcircled{2}$ та

$b \textcircled{3} + \bar{b} \textcircled{4}$ (3.46) отримуємо наступні альтернативні секулярні рівняння

$$\begin{cases} \textcircled{1} : A[\Lambda + m_1 A^2 + (m_3 - \mathcal{F})B^2] = \epsilon_x \cos \psi, & \textcircled{3} : A[\mathcal{D}B^2 + \xi] = \epsilon_x \sin \psi, \\ \textcircled{2} : B[\Lambda + m_1 B^2 + (m_3 - \mathcal{F})A^2] = \epsilon_y \sin \varphi, & \textcircled{4} : B[\mathcal{D}A^2 - \xi] = \epsilon_y \cos \varphi, \end{cases} \quad (3.51a)$$

$$\mathcal{F} = (m_3 - m_1) \cos^2(\alpha) = (m_3 - m_1)/(1 + C^2), \quad (3.51b)$$

$$\mathcal{D} = (m_3 - m_1) \sin(\alpha) \cos(\alpha) = (m_3 - m_1) C/(1 + C^2),$$

де

$$\Lambda = \bar{\sigma}_{11}^2 - 1, \quad \alpha = \varphi - \psi, \quad C = \tan \alpha, \quad 0 \leq \epsilon_y \leq \epsilon_x \neq 0,$$

($\mathcal{F}(\alpha)$ та $\mathcal{D}(\alpha)$) - функції з періодом π відносно різниці зсуву фаз α). Секулярні системи (3.46) та (3.51) є *математично еквівалентними*. Іншими словами, знаючи A, B, ψ, φ з (3.51), можна визначити a, \bar{a}, b, \bar{b} і *навпаки*.

В термінах (3.50) та (3.51), коли $AB > 0$, умова стоячої хвилі (3.49) є еквівалентною до

$$\sin \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = 0. \quad (3.52)$$

3.4.5. Про вклад форм третього порядку малості. Якщо ми знаємо домінантні амплітудні параметри a, \bar{a}, b та \bar{b} із секулярних рівнянь (3.46), узагальнені координати другого порядку (3.44) стають повністю визначеними. Отже виникає проблема знайти члени порядку $O(\epsilon)$, що визначають періодичні хвилі у рамках теорії Наріманова-Моїсеєва. Довгі, але відносно очевидні викладки дають цей повний асимптотичний розв'язок системи Наріманова-Моїсеєва (3.28)-(3.41) у вигляді

$$\begin{aligned} p_{11}(t) = a \cos \sigma t + \bar{a} \sin \sigma t + \frac{l_3^{(1)}}{9 - \bar{\sigma}_{11}^2} & \left[(2 \bar{a} b \bar{b} + a (-a^2 - \bar{b}^2 + b^2 + 3 \bar{a}^2)) \cos 3\sigma t \right. \\ & \left. + (-2 a b \bar{b} + \bar{a} (\bar{a}^2 + b^2 - \bar{b}^2 - 3a^2)) \sin 3\sigma t \right] + o(\epsilon), \quad (3.53a) \end{aligned}$$

$$r_{11}(t) = \bar{b} \cos \sigma t + b \sin \sigma t + \frac{l_3^{(1)}}{9 - \bar{\sigma}_{11}^2} \left[(2 a \bar{a} b + \bar{b} (-\bar{b}^2 - a^2 + \bar{a}^2 + 3b^2)) \cos 3\sigma t \right. \\ \left. + (-2 a \bar{a} \bar{b} + b (b^2 + \bar{a}^2 - a^2 - 3\bar{b}^2)) \sin 3\sigma t \right] + o(\epsilon); \quad (3.53b)$$

$$p_{1n}(t) = \frac{1}{1 - \bar{\sigma}_{1n}^2} \left\{ \left[-\epsilon_{pc}^{(n)} + \left(l_1^{(n)} - l_2^{(n)} \right) \bar{a} b \bar{b} \right. \right. \\ \left. \left. + a \left(l_1^{(n)} [a^2 + \bar{b}^2 + \bar{a}^2] + l_2^{(n)} b^2 \right) \right] \cos \sigma t \right. \\ \left. + \left[-\epsilon_{ps}^{(n)} + \left(l_1^{(n)} - l_2^{(n)} \right) a b \bar{b} + \bar{a} \left(l_1^{(n)} [\bar{a}^2 + a^2 + b^2] + l_2^{(n)} \bar{b}^2 \right) \right] \sin \sigma t \right\} \\ + \frac{l_3^{(n)}}{9 - \bar{\sigma}_{1n}^2} \left\{ \left[2 \bar{a} b \bar{b} + a \left(-a^2 - \bar{b}^2 + b^2 + 3\bar{a}^2 \right) \right] \cos 3\sigma t \right. \\ \left. + \left[-2 a b \bar{b} + \bar{a} \left(\bar{a}^2 + b^2 - \bar{b}^2 - 3a^2 \right) \right] \sin 3\sigma t \right\} + o(\epsilon), \quad (3.54a)$$

$$r_{1n}(t) = \frac{1}{1 - \bar{\sigma}_{1n}^2} \left\{ \left[-\epsilon_{rc}^{(n)} + \left(l_1^{(n)} - l_2^{(n)} \right) a \bar{a} b \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{b} \left(l_1^{(n)} [\bar{b}^2 + a^2 + b^2] + l_2^{(n)} \bar{a}^2 \right) \right] \cos \sigma t \right. \\ \left. + \left[-\epsilon_{rs}^{(n)} + \left(l_1^{(n)} - l_2^{(n)} \right) a \bar{a} \bar{b} + b \left(l_1^{(n)} [b^2 + \bar{b}^2 + \bar{a}^2] + l_2^{(n)} a^2 \right) \right] \sin \sigma t \right\} \\ + \frac{l_3^{(n)}}{9 - \bar{\sigma}_{1n}^2} \left\{ \left[2 a \bar{a} b + \bar{b} \left(-a^2 - \bar{b}^2 + \bar{a}^2 + 3b^2 \right) \right] \cos 3\sigma t \right. \\ \left. + \left[-2 a \bar{a} \bar{b} + b \left(b^2 + \bar{a}^2 - a^2 - 3\bar{b}^2 \right) \right] \sin 3\sigma t \right\} + o(\epsilon), \quad n \geq 2; \quad (3.54b)$$

$$p_{3n}(t) = \frac{k_1^{(n)}}{1 - \bar{\sigma}_{3n}^2} \left[\left(-2 \bar{a} b \bar{b} + a (a^2 + \bar{a}^2 - b^2 - 3\bar{b}^2) \right) \cos \sigma t \right. \\ \left. + \left(-2 a b \bar{b} + \bar{a} (\bar{a}^2 + a^2 - \bar{b}^2 - 3b^2) \right) \sin \sigma t \right] \\ + \frac{k_2^{(n)}}{9 - \bar{\sigma}_{3n}^2} \left[\left(6 \bar{a} b \bar{b} + a (a^2 + 3(b^2 - \bar{a}^2 - \bar{b}^2)) \right) \cos 3\sigma t \right. \\ \left. - \left(6 a \bar{a} b + \bar{a} (\bar{a}^2 + 3(\bar{b}^2 - b^2 - a^2)) \right) \sin 3\sigma t \right] + o(\epsilon), \quad (3.55a)$$

$$\begin{aligned}
r_{3n}(t) = & \frac{k_1^{(n)}}{1 - \bar{\sigma}_{3n}^2} \left[\left(2a\bar{a}b + \bar{b}(-\bar{b}^2 - b^2 + \bar{a}^2 + 3a^2) \right) \cos \sigma t \right. \\
& \left. + \left(2a\bar{a}\bar{b} + b(-b^2 - \bar{b}^2 + a^2 + 3\bar{a}^2) \right) \sin \sigma t \right] \\
& + \frac{k_2^{(n)}}{9 - \bar{\sigma}_{3n}^2} \left[- \left(6a\bar{a}b + \bar{b}(\bar{b}^2 + 3(\bar{a}^2 - a^2 - b^2)) \right) \cos 3\sigma t \right. \\
& \left. + \left(6a\bar{a}\bar{b} + b(b^2 + 3(a^2 - \bar{b}^2 - \bar{a}^2)) \right) \sin 3\sigma t \right] + o(\epsilon), \quad n \geq 1, \quad (3.55b)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
l_1^{(n)} = & -\frac{3}{4}d_{16,n} + \frac{1}{4}d_{18,n} + \sum_{k=1}^{I_r} \left[c_{1k} \left(-\frac{1}{2}d_{20,n}^{(k)} - 2d_{21,n}^{(k)} + d_{22,n}^{(k)} \right) \right. \\
& \left. + s_{1k} \left(-\frac{1}{2}d_{23,n}^{(k)} - 2d_{24,n}^{(k)} + d_{25,n}^{(k)} \right) + c_{0k}d_{20,n}^{(k)} - s_{0k}d_{23,n}^{(k)} \right], \quad (3.56a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_2^{(n)} = & -\frac{1}{4}d_{16,n} + \frac{3}{4}d_{18,n} - d_{19,n} + \sum_{k=1}^{I_r} \left[c_{1k} \left(-\frac{3}{2}d_{20,n}^{(k)} - 6d_{21,n}^{(k)} + 3d_{22,n}^{(k)} \right) \right. \\
& \left. + s_{1k} \left(\frac{1}{2}d_{23,n}^{(k)} + 2d_{24,n}^{(k)} - d_{25,n}^{(k)} \right) + c_{0k}d_{20,n}^{(k)} - s_{0k}d_{23,n}^{(k)} \right], \quad n \geq 2; \quad (3.56b)
\end{aligned}$$

$$l_3^{(1)} = \frac{1}{2}d_1 + \sum_{k=1}^{I_r} \left[c_{1k} \left(\frac{3}{2}d_3^{(k)} + 2d_4^{(k)} \right) + s_{1k} \left(\frac{3}{2}d_5^{(k)} + 2d_6^{(k)} \right) \right], \quad (3.56c)$$

$$\begin{aligned}
l_3^{(n)} = & \frac{1}{4}d_{16,n} + \frac{1}{4}d_{18,n} + \sum_{k=1}^{I_r} \left[c_{1k} \left(\frac{1}{2}d_{20,n}^{(k)} + 2d_{21,n}^{(k)} + d_{22,n}^{(k)} \right) \right. \\
& \left. + s_{1k} \left(\frac{1}{2}d_{23,n}^{(k)} + 2d_{24,n}^{(k)} + d_{25,n}^{(k)} \right) \right], \quad n \geq 2; \quad (3.56d)
\end{aligned}$$

$$k_1^{(n)} = -\frac{3}{4}d_{11,n} + \frac{1}{4}d_{12,n} + \sum_{k=1}^{I_r} \left[c_{1k} \left(-\frac{1}{2}d_{13,n}^{(k)} - 2d_{14,n}^{(k)} + d_{15,n}^{(k)} \right) - c_{0k}d_{13,n}^{(k)} \right], \quad (3.56e)$$

$$k_2^{(n)} = -\frac{1}{4}d_{11,n} - \frac{1}{4}d_{12,n} - \sum_{k=1}^{I_r} c_{1k} \left(\frac{1}{2}d_{13,n}^{(k)} + 2d_{14,n}^{(k)} + d_{15,n}^{(k)} \right), \quad n \geq 1. \quad (3.56f)$$

У всіх виразах, c_{0k} , s_{0k} , c_{1k} та s_{1k} обчислено з використанням рівнянь (3.45) і $\bar{\sigma}_{11} = 1$. Зауважимо також, що ці наближення дано для еліптичних орбітальних збурень баку.

3.4.6. Стійкість. Для дослідження стійкості побудованого асимптотичного усталеного розв'язку використовується лінійний метод Ляпунова та метод розділення повільного та швидкого часу. Ця процедура пропонує введення повільного часу $\tau = \frac{1}{2}\epsilon^{2/3}t$ та постулює збурені розв'язки як

$$\begin{aligned} a_1 &= (a + \alpha(\tau)) \cos t + (\bar{a} + \bar{\alpha}(\tau)) \sin t + o(\epsilon^{1/3}), \\ b_1 &= (\bar{b} + \bar{\beta}(\tau)) \cos t + (b + \beta(\tau)) \sin t + o(\epsilon^{1/3}), \end{aligned} \quad (3.57)$$

де a, \bar{a}, b та \bar{b} беруться з (3.46). Підстановка (3.57) у модальні рівняння, групування доданків найнижчого асимптотичного порядку та збереження лінійних членів відносно $\alpha, \bar{\alpha}, \beta$ і $\bar{\beta}$ веде до наступної лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\mathbf{s}' + \xi \mathbf{s} + \mathcal{S} \mathbf{s} = 0, \quad (3.58)$$

де $\mathbf{s} = (\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta})^T$, риска означає диференціювання по τ , а матриця \mathcal{S} має наступні елементи

$$\begin{aligned} s_{11} &= -2m_1 a \bar{a} - (m_1 - m_3) b \bar{b}; & s_{13} &= -2m_1 \bar{a} b - (m_1 - m_3) a \bar{b}, \\ s_{12} &= -(\bar{\sigma}_{11}^2 - 1) - m_1(a^2 + 3\bar{a}^2 + b^2) - m_3 \bar{b}^2; & s_{14} &= -2m_3 \bar{a} \bar{b} - (m_1 - m_3) a b, \\ s_{21} &= (\bar{\sigma}_{11}^2 - 1) + m_1(3a^2 + \bar{a}^2 + \bar{b}^2) + m_3 b^2; & s_{22} &= 2m_1 a \bar{a} + (m_1 - m_3) b \bar{b}, \\ s_{23} &= 2m_3 a b + (m_1 - m_3) \bar{a} \bar{b}; & s_{24} &= 2m_1 \bar{a} \bar{b} + (m_1 - m_3) a b, \\ s_{31} &= 2m_1 a \bar{b} + (m_1 - m_3) b \bar{a}; & s_{32} &= 2m_3 \bar{a} \bar{b} + (m_1 - m_3) a b, \\ s_{33} &= 2m_1 b \bar{b} + (m_1 - m_3) a \bar{a}; & s_{34} &= (\bar{\sigma}_{11}^2 - 1) + m_1(b^2 + 3\bar{b}^2 + a^2) + m_3 \bar{a}^2, \\ s_{41} &= -2m_3 a b - (m_1 - m_3) \bar{a} \bar{b}; & s_{42} &= -2m_1 \bar{a} b - (m_1 - m_3) a \bar{b}, \\ s_{43} &= -(\bar{\sigma}_{11}^2 - 1) - m_1(3b^2 + \bar{b}^2 + \bar{a}^2) - m_3 a^2; & s_{44} &= -2m_1 b \bar{b} - (m_1 - m_3) a \bar{a}. \end{aligned}$$

Фундаментальний розв'язок $\mathbf{s} = \exp(\lambda \tau) \mathbf{a}$ системи диференціальних рівнянь (3.58) приводить до спектральної матричної задачі $[(\lambda + \xi)I + \mathcal{S}] \mathbf{a} = 0$, де λ є невідомими власними значеннями, \mathbf{a} – відповідні власні

вектори та I – одинична матриця. Викладки дають наступне характеристичне (біквдратне) рівняння

$$(\lambda + \xi)^4 + s_1(\lambda + \xi)^2 + s_0 = 0, \quad (3.59)$$

де s_0 є детермінантом \mathcal{S} . Власні значення λ можуть бути визначені як $-\xi \pm \sqrt{x_{1,2}}$, де $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-s_1 \pm \sqrt{s_1^2 - 4s_0})$ є двома розв'язками рівняння $x^2 + s_1x + s_0 = 0$.

Розв'язок, пов'язаний із a, \bar{a}, b та \bar{b} , є асимптотично стійким ($\alpha, \bar{\alpha}, \beta$ та $\bar{\beta}$ експотенціально спадають за τ) тоді і тільки тоді, коли дійсна компонента λ є строго від'ємною.

Для $\xi > 0$, умова стійкості може бути записана як альтернатива

$$\begin{aligned} \text{або } s_1^2 - 4s_0 \geq 0 \ \& \ -s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4s_0} \leq 0 \quad (\Leftrightarrow s_0 \geq 0 \ \& \ s_1 \geq 0), \\ \text{чи } s_1^2 - 4s_0 \geq 0 \ \& \ -s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4s_0} > 0 \ \& \ \sqrt{\frac{1}{2} \left(-s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4s_0} \right)} < \xi, \\ \text{чи } s_1^2 - 4s_0 < 0 \ \& \ \sqrt{2\sqrt{s_0} - s_1} < \xi. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Таким чином, ми довели наступну лему.

Лема 2.2. Усталена періодична хвиля (3.48), домінантні амплітудні параметри якої визначаються із секулярної системи (3.46), є асимптотично стійкою, коли виконується альтернатива (3.60), де s_0 та s_1 виникають у (3.59) та пов'язуються із матрицею \mathcal{S} . Розв'язки описують кругову чи стоячу хвилю. Остання виникає за умови (3.49).

3.5. Висновки до розділу

Використовуючи декілька типів асимптотик для гідродинамічних узагальнених координат та швидкостей, які було введено в розділі 2 при виведенні модальних рівнянь (2.53), (2.54), можна отримати спрощені системи нелінійних модальних рівнянь (систем звичайних диференціальних рівнянь), які допускають аналітичні дослідження, а також

дозволяють фізично коректно ввести додаткові лінійні члени в рівняння, що описують демпфування у цій механічній системі.

Якщо ввести лінійні демпфуючі члени в лінеаризовані адаптивні модальні рівняння, можна теоретично описати логарифмічний декремент затухання стоячих хвиль. Виведено формули для безрозмірних коефіцієнтів демпфування в останніх членах. Ці коефіцієнти відображають ефект в'язкого демпфування, пов'язаного із ламінарним в'язким шаром на змочених стінках баку, а також внутрішнім тертям. Формули мають асимптотичний характер в термінах числа Галілея $Ga \gg 1$.

Якщо рідина є водопровідною водою, оцінки показують, що для радіусів резервуара $0.05m \lesssim R_0 \lesssim 0.3m$ поверхневим натягом можна знехтувати, але врахування в'язкого демпфування може бути важливим. Цей діапазон відповідає контейнерам біореакторів.

В розділі отримано та проаналізовано усталені рухи рідини при резонансному збуренні першої власної частоти в рамках модальної теорії Наріманова-Моїсеєва із демпфуванням. Ця теорія передбачає резонансно збурені найнижчі власні форми (узагальнені координати p_{11} та r_{11}), які дають домінуючий вклад порядку $O(\epsilon^{1/3})$, де $O(\epsilon)$ – амплітуда зовнішнього збурення. Показано, що для модальних рівнянь типу Наріманова-Моїсеєва лише лінійне демпфування двох найнижчих власних форм коливання рідини є важливим.

Використовуючи леми 2.1 та 2.2, а також результати розділу 3.4, ми, фактично, довели наступну основну теорему розділу 3.

Теорема 3.1. *В рамках асимптотичної модальної теорії Наріманова-Моїсеєва із демпфуванням (3.28)-(3.31) усталені резонансні хвилі на вільній поверхні з точністю до членів другого порядку малості ($O(\epsilon^{1/3})$ та $O(\epsilon^{2/3})$ включно, де $O(\epsilon)$ – амплітуда періодичного збурення баку за $\eta_i(t)$, $i = 1, 2, 4, 5$) є еквівалентні резонансним хвилям, які виникають при відповідних рухах баку за еліптичною орбітою (Рис.*

3.2). При цьому лише демпфуючий коефіцієнт ξ_{11} в рівняннях для p_{11} та r_{11} впливає на чотири домінантні амплітуди $a, \bar{a}, b, \bar{b} = O(\epsilon^{1/3})$, які описуються секулярною системою (3.46) [альтернативно, (3.51)]. Стійкість ustalених хвиль визначається з альтернативи (3.60). Можливими є лише кругові та стоячі хвилі (критерій (3.49)).

Розділ 4

УСТАЛЕНІ РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ РІДИНИ ПРИ ПОЗДОВЖНЬОМУ ПЕРІОДИЧНОМУ ЗБУРЕННІ КОНТЕЙНЕРА

Як про це вже сказано в огляді літератури за темою дисертації, задача про вимушені резонансні коливання рідини при гармонічних поздовжніх горизонтальних збуреннях вертикального циліндричного баку належить до класичних (тестових) проблем, які досліджували ще з кінця 50-х років минулого століття експериментально, аналітично та чисельно, в тому числі за допомогою нелінійних модальних методів. Найбільш відомими та важливими з математичної та фізичної точок зору є теоретичні дослідження І.О. Луковського, який наприкінці 80-х років вивів п'ятимодову нелінійну модальну систему типу Наріманова-Моїсєєва та використав її для побудови наближено-аналітичних періодичних розв'язків вищесказаної проблеми, тим самим описавши можливі усталені резонансні хвилі. Використовуючи повну нелінійну модальну систему типу Наріманова-Моїсєєва, аналіз Луковського було недавно узагальнено в статті Фалтінсена, Луковського та Тимохи [223].

Трактуючи останній результат в термінах секулярної системи (3.46) відносно безрозмірних амплітудних параметрів a, \bar{a}, \bar{b}, b (та $\xi = 0$), підтверджено результат Луковського про те, що якщо $\epsilon_y = \xi = 0$, то завжди $\bar{a} = \bar{b}$ й існує як стояча (плоска) хвиля з $b = 0$ в (3.49), яка є нестійкою в околі резонансу, так і кругова хвиля ($a \cdot b \neq 0$ в (3.49)), яка є завжди стійкою, коли $\sigma \approx \sigma_1$. Крім того, було підтвержено, що існує діапазон частот, де жодний із усталених хвильових рухів (стояча чи кругова хвиля) не є стійким, отже, виникають іррегулярні (хаотичні) резонансні хвилі. Діапазони частот для плоскої, кругової та хаотичної хвиль, що впливають з теорії [223], є у хорошій відповідності з відповідними експериментальними даними.

Метою цього розділу є узагальнення останніх результатів на випадок $\xi > 0$ (демпфованих коливань рідини). Як вже згадувалося раніше, система (3.46) не є зручною для аналізу демпфованих хвиль. Для ефективних аналітичних досліджень ми будемо в подальшому, в цьому та наступному розділі, оперувати із еквівалентною секулярною системою (3.51), розв'язавши яку, ми визначимо як інтегральну амплітуду A , що відповідає за компоненту поверхневих хвиль у площині збурення, так і амплітуду B , що описує хвилі у перпендикулярному напрямку. В систему (3.51) також вводять два зсуви фаз, ψ та φ .

Основною ціллю буде отримання аналітичного розв'язку секулярної системи (3.51) та вивчення стійкості відповідних усталених хвиль для випадку $\xi > 0$. Це дозволить описати амплітудно-частотні характеристики у термінах інтегральних амплітуд A та B , вивчити зсув фаз ψ відносно гармонічного поздовжнього збурення (для $\xi = 0$ цей зсув фаз дорівнює $\pm\pi$ чи 0), а також вивчити ряд інших гідродинамічних характеристик, які можна порівняти із експериментами. Таке порівняння є важливою складовою для валідації побудованої нелінійної модальної теорії Наріманова-Моїсеєва із демпфуванням.

4.1. Класифікація усталених резонансних хвиль, типи розв'язків системи (3.51) та відповідні амплітудно-частотні характеристики

Для початку розглянемо випадок недемпфованих резонансних хвиль, який було досліджено, використовуючи (3.46), в роботі [223]. Переформулюючи цей результат в термінах секулярної системи (3.51) з $\epsilon_y = 0$ та $\xi = 0$, можна сформулювати наступне твердження.

Твердження 4.1 [доведене в [223], але для (3.46)]. *Існує лише два типи розв'язків системи (3.51) для поздовжніх гармонічних збурень вздовж Ox (при $\xi = \epsilon_y = 0$). Вони відповідають плоскій стоячій хвилі*

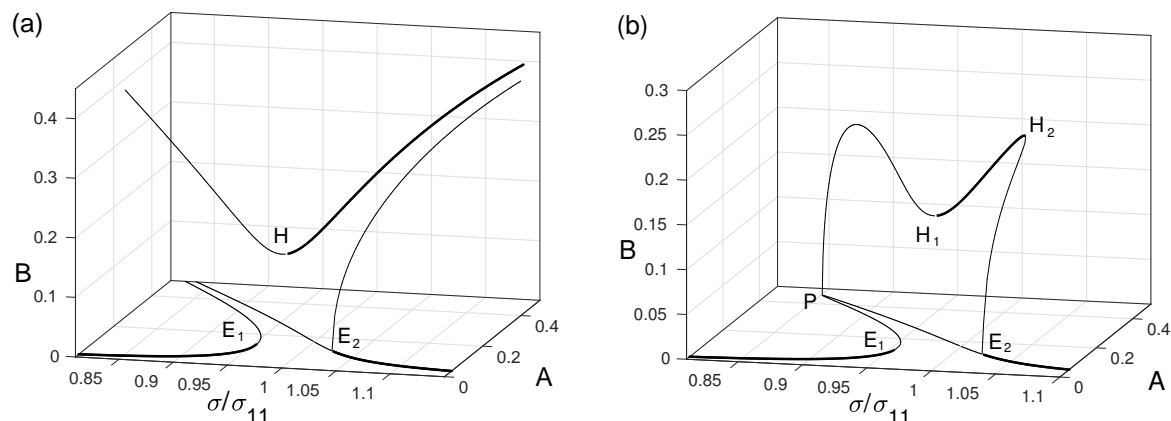


Рис. 4.1: Амплітудно-частотні характеристики, зображені у просторі $(\sigma/\sigma_{11}, A, B)$ для випадку поздовжнього горизонтального гармонічного збурення баку вздовж осі Ox . Безрозмірна глибина $h = 1.5$, безвимірна амплітуда горизонтального збурення баку $\eta_{1a} = 0.01$ ($\eta_{2a} = 0$). Гілки побудовано використовуючи результати Твердження 4.1 та Теорему 4.1. Жирними лініями позначено стійкі періодичні розв'язки (усталені хвилі). Випадок без демпфування ($\xi = 0$) представлено зліва (а), а випадок із демпфуванням (тут $\xi = 0.02$) - справа (b). Між точками біфуркації E_1 та $H_1(H)$ не існує стійких усталених коливань рідини та очікуються іррегулярні (хаотичні) хвилі. Криві, які лежать в площині $(\sigma/\sigma_{11}, A)$, відповідають за плоскі (стоячі) хвилі. Демпфування породжує точку біфуркації P , де з плоскої хвилі з'являється кругова, та точку біфуркації H_2 , яка обмежує діапазон стійкості кругової хвилі при зростанні безрозмірної частоти збурення σ/σ_{11} .

($A > 0, B = 0, \sin \psi = 0, C = 0$, зсув фаз φ не визначений) та круговій хвилі ($AB > 0, \sin \psi = \cos \varphi = 0, C = \pm\infty$). Кругова хвиля може виникати або проти-, або за рухом годинникової стрілки; цим напрямком відповідають $C = +\infty$ та $-\infty$ ($\alpha = \pi/2$ та $\alpha = -\pi/2$), відповідно.

Нехай в систему включено строго позитивний коефіцієнт демпфування $\xi > 0$, а $\epsilon_y = 0$. Тоді можна сформулювати наступну теорему (основний результат цього розділу).

Теорема 4.1. Для поздовжніх гармонічних (періодичних) збурень баку вздовж осі Ox , ($\epsilon_x > 0, \epsilon_y = 0$) та, за наявності ненульового малого демпфування ($\xi > 0$), існують лише два типи усталених резонансних хвиль, плоска стояча та кругова, причому

(А) Плоска стояча хвиля відповідає розв'язкам (3.51) типу $B = 0$, $A > 0$ та $C \neq 0$ (зсув фаз φ не визначено), де A та ψ аналітично визначаються з рівнянь

$$A^2 [(\Lambda + m_1 A^2)^2 + \xi^2] = \epsilon_x^2; \quad 0 < A \leq \frac{\epsilon_x}{\xi}; \quad \psi = \arccos \frac{A(\Lambda + m_1 A^2)}{\epsilon_x}. \quad (4.1)$$

(В) Усталена кругова хвиля відповідає розв'язкам (3.51) вигляду $AB > 0$, $C \neq 0$, де ненульові C , A та B можна послідовно знайти, розв'язуючи кубічне рівняння

$$q_3 C^3 + q_2 C^2 + q_1 C + q_0 = 0 \quad (4.2)$$

з коефіцієнтами

$$q_3 = \xi^3 (m_1 + m_3)^2 > 0, \quad q_2 = 2\xi^2 \Lambda (m_3^2 - m_1^2), \\ q_1 = \xi [4\xi^2 m_1^2 + \Lambda^2 (m_1 - m_3)^2], \quad q_0 = \epsilon_x^2 m_1^2 (m_1 - m_3),$$

та підставляючи ці корені послідовно в

$$A^2 = \frac{\xi (1 + C^2)}{(m_3 - m_1)C} > 0, \quad (4.3)$$

та

$$B^2 = -\frac{1}{m_1} \left[\Lambda + \frac{m_1 + m_3 C^2}{1 + C^2} A^2 \right] > 0. \quad (4.4)$$

Доведення. Нехай $\epsilon_y = 0$ та $\xi > 0$ в (3.51). Розглянемо очевидний розв'язок секулярної системи з $B = 0$, який відповідає плоскій стоячій хвилі. Тоді рівняння [2] та [4] стають тотожностями автоматично для будь-якого φ , отже, цей зсув фаз є невизначеним. Два інших рівняння системи (3.51), [1] та [3], набувають вигляду

$$A[\Lambda + m_1 A^2] = \epsilon_x \cos \psi, \quad A\xi = \epsilon_x \sin \psi. \quad (4.5)$$

Очевидно, що $\boxed{1}^2 + \boxed{3}^2$ виводить кубічне рівняння в (4.1) відносно A^2 , яке дозволяє знайти A^2 як функцію від Λ (збурюючої частоти). Друга рівність з (4.1) впливає із першого рівняння (4.5). Нарешті, з другого рівняння (4.5) при $A > 0$, $\xi > 0$ та $\epsilon_x > 0$ впливає $\sin \psi > 0$, що обґрунтовує використання \arccos в (4.1). Верхнє обмеження в середньому рівнянні (4.1) пов'язується з випадком $\sin \psi = 1$. Таким чином частина твердження (A) доведена.

Розглянемо тепер випадок $\epsilon_y = 0$, $\xi > 0$ та $AB > 0$. Тоді рівняння $\boxed{4}$ системи (3.51) приводить до тотожності

$$\mathcal{D}A^2 = \xi,$$

де, враховуючи явний вираз для \mathcal{D} в (3.51 b), ми приходимо до рівняння (4.3), а, підставляючи цей вираз у рівняння $\boxed{2}$ системи (3.51) при $B > 0$ та $\epsilon_y = 0$, виводимо рівняння (4.4).

Наступний крок пов'язується з рівняннями $\boxed{1}$ та $\boxed{3}$ системи (3.51), які ми переписуємо у вигляді

$$A \left[\Lambda + m_1 A^2 + \frac{m_1 + m_3 C^2}{1 + C^2} B^2 \right] = \epsilon_x \cos \psi, \quad (4.6)$$

$$A \left[\frac{(m_3 - m_1)C}{1 + C^2} B^2 + \xi \right] = \epsilon_x \sin \psi. \quad (4.7)$$

Якщо взяти вираз $(4.6)^2 + (4.7)^2$, в який підставити послідовно (4.4) та (4.3), то отримаємо рівняння відносно $C = \tan \alpha$. Довгі та аналітично складні викладки показують, що це є кубічне рівняння (4.2). Тим самим доведено твердження (B) та теорему в цілому. \square

Властивості аналітичних розв'язків (4.2) – (4.4), які дають змогу описати плоскі та кругові хвилі при поздовжньому збуренні, суттєво залежать від значень коефіцієнтів m_1 та m_3 , які є функціями безрозмірної глибини заповнення h . Нагадаємо, що побудована теорія Наріманова-Моїсєєва є застосовною для $h \geq 1.2$. Для таких значень безрозмірної

глибини завжди виконуються співвідношення

$$m_1 < 1, \quad m_3 > 0 \text{ та } m_3 + m_1 > 0. \quad (4.8)$$

За таких співвідношень між коефіцієнтами секулярної системи рівнянь (3.51) амплітудно-частотні характеристики, тобто криві в просторі $(\sigma/\sigma_{11}, A, B)$ мають геометричні властивості, які проілюстровано для недемпфованого (а) та демпфованого (б) випадків на Рис. 4.1. Ці обчислення було проведено для $h = 1.5$, амплітуду гармонічного коливання баку взято $\eta_{1a} = 0.01$ та коефіцієнт демпфування дорівнює $\xi = 2\xi_{11} = 0.02$. Вибір цього значення ξ відповідає розмірам баку в діапазоні $0.05 \text{ м} \leq R_0 \leq 0.3 \text{ м}$, що є характерним для біореакторів.

Амплітудно-частотні характеристики на Рис. 4.1 побудовано з використанням формул (4.1) для плоских хвиль ($B = 0$), та формул (4.2) – (4.4) для кругових хвиль ($B > 0$) відповідно. Вітки амплітудно-частотних характеристик, що належать до площини $(\sigma/\sigma_{11}, A)$, відповідають за плоскі хвилі. Просторові криві відповідають за кругові хвилі. Жирними лініями позначені стійкі розв'язки (стійкі усталені хвилі).

Як бачимо, стійкі плоскі стоячі усталені хвилі очікуються по ліву сторону від E_1 та по праву від E_2 . Плоскі усталені хвилі не є стійкими в околі основного резонансу $\sigma/\sigma_{11} = 1$, між E_1 та E_2 . В цьому діапазоні частот існують стійкі кругові (справа від H (H_1)) та іррегулярні (хаотичні) хвилі (тобто немає стійких усталених хвиль взагалі) між E_1 та H (H_1). Пряме чисельне моделювання та експериментальні спостереження хвиль в цих зонах нестійкості обговорюються, наприклад, Майлзом [91, 230] та Ібрахімом [231]. Експериментальні дані по профілю кругових та хаотичних хвиль проілюстровано на Рис. 4.6. Коли $\xi = 0$, кругова хвиля завжди існує для частот більших з ординату точки $H(H_1)$. Внаслідок демпфування, діапазон частоти стійкості кругової хвилі має верхню межу H_2 .

Відповідні амплітудно-частотні характеристики для недемпфовано-

го випадку на Рис. 4.1 (а) обговорювалися Фалтінсеном та ін. [223]. На Рис. 4.1 (b) показано, що ненульове демпфування ξ породжує точку біфуркації P , а криві перестають прямувати до нескінченності. В той же час, діапазони стійкості плоскої та кругової хвиль майже не помінялись для коефіцієнтів демпфування $\xi \lesssim 0.02$: позиції точок E_1, E_2 та H_1 (заміняє H), що визначають ці діапазони, залишаються практично без змін. Це пояснює гарну узгодженість теорії [223] з експериментами, що стосується діапазонів стійкості, встановлених з використанням модальної теорії без демпфування.

Новизною у випадку демпфованих усталених хвиль (b) є дві точки біфуркації H_2 та P , де з'являється кругова хвиля. Вітки амплітудно-частотних характеристик, які відповідають круговій хвилі, являють собою арку, яка прикріплена в точках P та E_1 ; її "стійка" частина H_1H_2 близька до відповідної частини гілки, з Рис. 4.1 (а). Це пояснює, чому експериментальні максимальні підйоми вільної поверхні для усталених хвиль в [189] достатньо добре описано в роботі [223], де передбачається нульове демпфуванням ($\xi = 0$).

4.2. Порівняння з експериментами для амплітудних характеристик усталених рухів рідини

Як ми вже відмічали у попередньому розділі, врахування дисипації практично не впливає на положення точок біфуркації E_1, E_2 та $H_1(H)$. Отже, діапазони стійкості плоскої та кругової усталених резонансних хвиль можна ефективно передбачати, базуючись на модальній теорії без врахування дисипації. Використовуючи формули з розділу 3.4.5 для періодичних хвиль, які враховують періодичні члени до $O(\epsilon)$ в періодичних розв'язках рівнянь Наріманова-Моїсєєва, можна оцінити вплив дисипації на усталені хвилі, а також порівняти теоретичні результати відносно амплітуди усталених хвиль з експериментами.

В роботі [189] проведено серію експериментальних досліджень відносно усталених хвиль на поверхні кругового вертикального циліндричного баку, який збурюється поздовжньо за гармонічним законом. Використовувалися декілька амплітуд збурення, які збільшувалися від менших величин до відносно великих. Вимірювалися максимальні підйоми вільної поверхні на відстані $0.25R_0$ від стінки з метою уникнути впливу на вимірювання поверхневого натягу та локальних поверхневих феноменів, які показано на Рис. 4.6. Радіус баку дорівнював 15см, що забезпечувало достатньо високі числа Бонда, $B_0 \simeq 500$. Рідина - водопровідна вода.

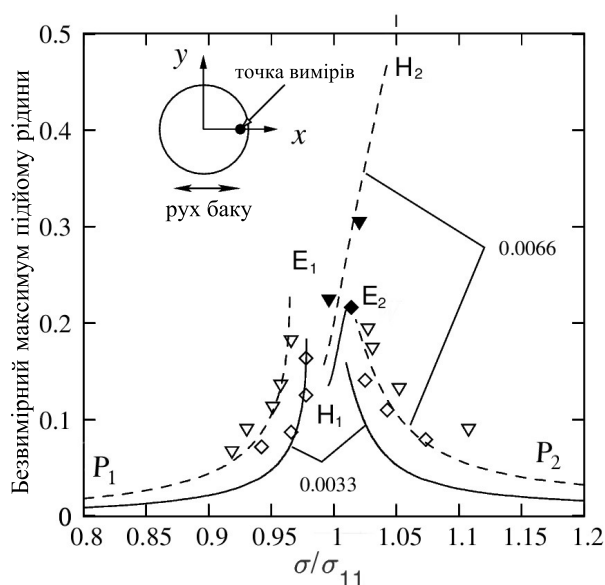


Рис. 4.2: Теоретичні (суцільні і штрихові лінії) та експериментальні (позначені символами) безрозмірні максимальні підйоми усталеної хвилі із точкою вимірів підйому в $(0.75R_0, 0)$, як позначено на рисунку. Поступальні коливання баку з безрозмірними амплітудами $\eta_{1a} = 0.0033$ та 0.0066 . Обчислення зроблено, використовуючи коефіцієнт демпфування $\xi = 0.0128$. Порожні символи відповідають плоским стоячим хвилям, а заповнені – круговій хвилі.

Теоретичне значення коефіцієнта демпфування $\xi = 2\xi_{11}^{low}$ для цих експериментів згідно формул (3.17)-(3.23), які враховують ефект в'язкого ламінарного шару на змочених стінках баку та внутрішнє тертя,

рівне 0.005. Тим не менш, для обчислень на Рис. 4.2 та Рис. 4.3 нами було взято величину $\xi = 0.0128$. Нижче, в розділі 4.3. буде пояснення, чому ми брали саме таке значення ξ . Чисельні експерименти було також проведено для $0.005 \leq \xi \leq 0.0128$. Такі чисельні експерименти показали, що значення коефіцієнта демпфування в такому діапазоні не сильно впливають на максимум підйому хвилі на Рис. 4.2 та Рис. 4.3, а тільки впливають на позицію точки H_2 .

Розглянемо порівняння теоретичних та експериментальних значень максимального підйому вільної поверхні в деталях. Отже, на Рис. 4.2 порівнюються випадки відносно малих амплітуд збурення, $\eta_{1a} = 0.0033$ та 0.0066 . Теоретичні стійкі усталені рухи та відповідні підйоми вільної поверхні позначено суцільною та штриховою лініями. Заповнені символи відповідають круговій хвилі, а незаповнені – плоскій. Для експериментальних вимірів. Перш за все відмітимо, що теорія для демпфованого та недемпфованого випадків дають практично ті самі амплітудно-частотні "стійкі" вітки (візуально співпадають, тому не внесені у графіки), а от відмінністю є те, що частоти існування демпфованих кругових хвиль є обмеженими зверху точкою H_2 . Наявність точки H_2 , що унеможлиблює кругову хвилю при збільшенні σ/σ_{11} за ординату точки H_2 підтримано експериментами в [189].

Із збільшенням амплітуди збурення, $\eta_{1a} = 0.023$ та 0.045 на Рис. 4.3 ми бачимо, що точки H_2 прямують за межі вертикальної границі амплітуди, вибраної в експериментах. Так само, експериментальні вимірювання кругової хвилі (підйомів) також не зникають в околі резонансу. Отже, із збільшенням амплітуди збурення, вплив демпфування зменшується не тільки на плоскі хвилі, але й на кругову хвилю.

Загалом, порівняльний аналіз показує, що наша теорія демпфованих усталених хвиль, як для амплітуд хвиль, так і для діапазонів існування стійких режимів (форм коливання рідини) (включаючи верхню границю

існування кругової хвилі), дає не погану відповідність з експериментами.

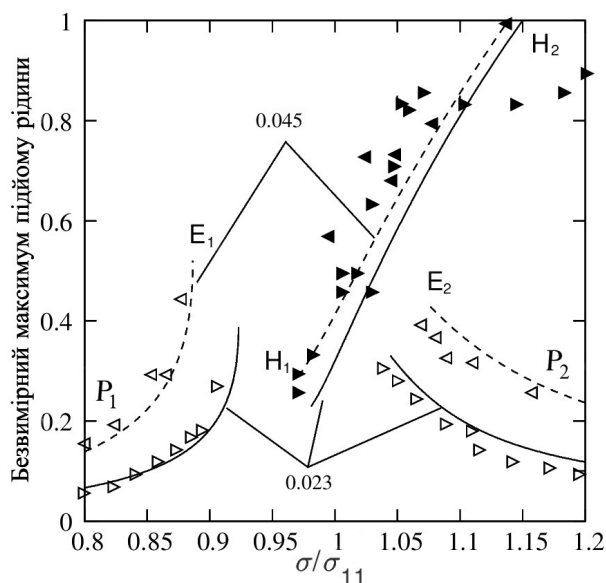


Рис. 4.3: Аналогічно до Рис. 4.2, але для безрозмірних амплітуд коливання баку $\eta_{1a} = 0.023$ та 0.045 .

4.3. Вплив дисипації на зсув фаз

Демпфування грає важливу роль для зсуву фаз. Як вже було вказано вище, недемпфоване хлюпання характеризується кусково-постійними значеннями ψ та φ як функцій σ/σ_{11} , тобто, $\sin \psi = 0$ (φ не визначене) для плоскої та $\sin \psi = \cos \varphi = 0$ для кругової хвиль (вздовж відповідних кривих на Рис. 4.1 а).

Коли $\xi > 0$, зсуви фаз стають складними функціями частоти збурення σ/σ_{11} та неперервно змінюються вздовж відповідних амплітудно-частотних характеристик. Плоскі хвилі відповідають розв'язку (4.1), а кругові пов'язуються з $C = \tan \alpha = \tan(\varphi - \psi) \geq 0$ (нерівність випливає із рівності (4.4), де $m_3 > m_1$) та обчислюється з кубічного рівняння (4.2) відносно C . Важливо, що для кругових хвиль ψ визначає два відмінні зсуви фаз $\varphi_1 = \psi + \alpha$ та $\varphi_2 = \psi + \alpha \pm \pi$, які означають дві фізично ідентичні кругові хвилі, що виникають проти- та за рухом годинникової

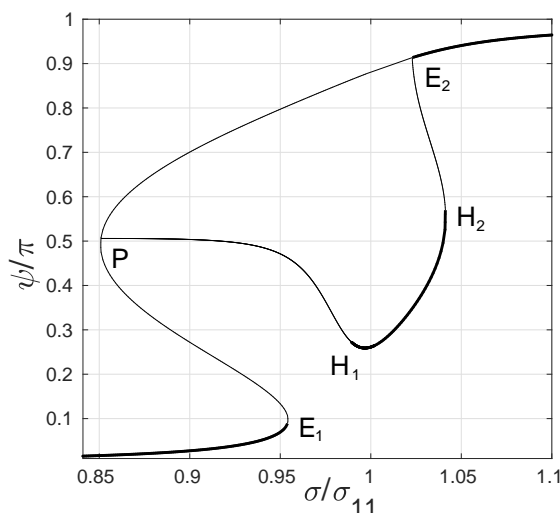


Рис. 4.4: Криві, що описують зсув фази ψ/π відносно σ/σ_{11} . Коли $\xi = 0$, ψ/π приймає два дискретні значення 0 та 1. Як видно з кривих, це не так для $\xi > 0$.

стрілки відповідно.

Рис. 4.4 показує теоретичні фазові криві у площині $(\sigma_{11}, \psi/\pi)$. Точки біфуркації відповідають позначенням на амплітудно-частотних кривих з Рис. 4.1 (b). Графіки підтверджують, що зсув фаз ψ не є кусковою, а досить складною функцією частоти збурення.

Зсув фаз ψ , що не є константою, був виявлений в експериментах з роботи [189]. Автори цієї статті досить логічно припустили, що така поведінка ψ відбувається внаслідок демпфування в механічній системі. Ця теза не була теоретично доведена. На Рис. 4.5 порівнюються експериментальні дані з [189] (кола) із теоретичними прогнозами для кругової хвилі в діапазоні частот, який відповідає частині гілки між H_1 та H_2 на Рис. 4.1 (b). Теоретичні криві обчислені для декількох різних значень коефіцієнта демпфування ξ в межах від $\xi = \xi_1 = 0.005$ до $\xi = \xi_9 = 0.045$. Абсолютно жорсткий бак з круговим поперечним перерізом має глибину заповнення $h = 1.5$. Горизонтальна поздовжня безрозмірна амплітуда збурення баку дорівнює $\eta_{1a} = 0.045$.

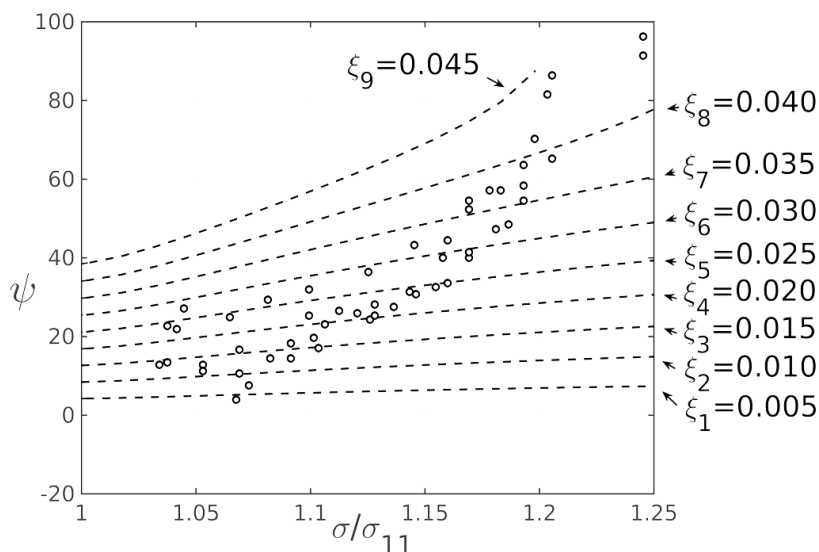


Рис. 4.5: Експериментальні значення ψ з роботи [189] (позначені кругами в градусах) для стійкої кругової хвилі (відповідають проміжку на кривій $H_1 H_2$ з Рис. 4.1 b) та їхні теоретичні оцінки, які зроблено для різних дискретних значень коефіцієнта демпфування $\xi = \xi_i$, починаючи з нижньої межі $\xi_1 = 0.005$, і до $\xi_9 = 0.045$; $h = 1.5$ та $\eta_{1a} = 0.045$, $\eta_{2a} = 0$. Поздовжнє горизонтальне гармонічне збурення. Порівняння показує, що фактичний коефіцієнт демпфування в експериментах зростає з амплітудою хвилі (вздовж $H_1 H_2$), що може бути пояснено додатковими дисипативними факторами [189].

В'язкий ламінарний шар на змоченій поверхні баку та в'язке тертя всередині рідини для випадку експериментів [189] дає, згідно формул (3.17), (3.22), (3.25) з Розділу 3.2, значення $\xi_1 = 0.005$. Ця величина коефіцієнта демпфування визначає нижню межу сумарного значення, тобто реальне $\xi \geq \xi_1$, якщо оцінити вплив багатьох інших дисипативних факторів. На Рис. 4.5 підтверджено той факт, що ξ є більшим за ξ_1 . Теоретична крива (штрих-пунктирна лінія) для ξ_1 виглядає як оцінка знизу експериментальних значень зсуву фаз для ψ . Щоб отримати відповідність з експериментальними значеннями відносно зсуву фаз ψ , потрібно припустити, що коефіцієнт демпфування ξ зростає із збільшенням амплітуди

хвиль вздовж фазової кривої від H_1 до H_2 . Середнє значення вздовж цієї кривої є $\xi = 0.0126$. Саме тому ми використовували це чисельне значення для аналізу з експериментами в розділі 4.2.



Рис. 4.6: Дефрагментація вільної поверхні та хвилі обвалу (експериментальна ілюстрація розриву хвилі). Фото взято з роботи [189]. Ліва серія фотографій відповідає круговій хвилі. Права дає уявлення про профілі хвиль при хаотичних хвильових рухах (між E_1 та H_1 на Рис. 4.1 b)

Чим можна пояснити зростання дисипації із зростанням амплітуди? На думку авторів експериментальної роботи [189], як і на нашу думку, це пов'язується із поверхневими феноменами, що є типовими для кругової хвилі. Такі феномени полягають у розривах суцільності, хвилях обвалу, дефрагментаціях, каплях рідини, які зриваються з вільної поверхні, тощо. З фізичної точки зору ці феномени спричиняють значну дисипацію енергії та дійсно можуть впливати на значення інтегрального коефіцієнту демпфування. Ці поверхневі феномени продемонстровано на Рис. 4.6; їх взято з роботи [189].

4.4. Висновки до розділу

Для випадку горизонтальних поздовжніх періодичних коливань баку з частотою, близькою до першої власної частоти коливання рідини, нами враховано вплив дисипації на усталені хвилі через розв'язки модальних рівнянь Наріманова-Моїсеєва з розділу 3. Показано, що, використовуючи альтернативну форму секулярної системи (3.51), яка пов'язує дві інтегральні домінуючі амплітуди A та B (в площині збурення, а також перпендикулярно до неї) поверхневих усталених хвиль, а також відповідні зсуви фаз ψ та φ , можна не тільки довести існування плоскої (стоячої) та кругової хвиль, але й побудувати аналітичні точні розв'язки модальних рівнянь, що описують такі усталені хвильові режими. Основний результат сформульовано у вигляді Теорема 4.1.

Проведено чисельні дослідження амплітудно-частотних характеристик, побудовано типові біфуркаційні графіки у просторі $(\sigma/\sigma_{11}, A, B)$. Показано, що демпфування несуттєво впливає на діапазони стійкості плоских та кругових хвиль та на максимальні підйоми вільної поверхні, окрім того, що саме демпфування визначає верхню частотну границю існування кругової хвилі (точка H_2). Результати валідовано експериментальними даними з [189]. Продемонстровано непогану якісну та кількісну відповідність між теорією та експериментами.

В той же час показано, що вплив дисипації є суттєвим, вона якісно міняє поведінку для зсувів фаз між вхідним гармонічним сигналом (збуренням) та періодичною хвилею. Для недемпфованого випадку зсув фаз є кусково-сталою функцією частоти збурення, але будь-яка ненульова дисипація робить зсув фаз складною функцією частоти. Відповідна фазова крива (ψ як функція σ/σ_{11}) показана на Рис. 4.4. Порівняння фазової кривої та експериментів з роботи [189] показує, що коефіцієнт демпфування необхідно збільшувати з амплітудою кругової хвилі, аби досягти кількісної відповідності теорії експериментальним вимірам. Це

пояснюється поверхневими явищами, зокрема, дефрагментацією вільної поверхні (Рис. 4.6), вкладом яких на загальну дисипацію в механічній системі неможливо нехтувати.

Розділ 5

УСТАЛЕНІ ХВИЛЬОВІ РЕЖИМИ ДЛЯ ОРБІТАЛЬНИХ ЗБУРЕНЬ БАКУ

Нехай коливання біореакторів із рідиною відбуваються не позовжно, як ми розглядали у попередньому розділі, а вздовж кругової (чи еліптичної) орбіти як показано на Рис. 3.2. Вплив такого типу орбітальних збурень на коливання рідини вивчалися Фалтінсенем, Луковським та Тимохою [223] без врахування дисипації в цій гідродинамічній системі. Результати цього теоретичного дослідження були досить парадоксальними. Вони не знайшли експериментального підтвердження. Зокрема, в рамках їх теорії, як для еліптичних, так і для кругових збурень баку, існували кругові хвилі, рух яких відбувався не тільки за напрямком збурення, а й проти нього. Експерименти не підтверджують цей факт, як мінімум, для кругових резонансних збурень баку. Лише кругові хвилі, що направлені за круговими збуреннями, було знайдено у всіх відомих експериментах. Як буде показано у даному розділі, введення до розгляду малої, але ненульової дисипації робить висновки модальної теорії такими, що відповідають експериментам. Тобто наявність дисипації дійсно унеможливує кругові хвилі проти напрямку збурень, коли збурення баку прямують до кругових.

Метою розділу є чисельно-аналітичні дослідження секулярної системи (3.51), побудова її розв'язків, аналіз стійкості відповідних усталених хвиль та побудови відповідних амплітудно-частотних характеристик. Це дозволить зробити висновки про діапазони стійкості кругових хвиль за та проти- орбітальних збурень баку. Покажемо, що збільшуючи відношення між осями еліпсу збурення δ (перехід від еліптичних до кругових періодичних збурень баку), ми приходимо до ситуації, коли зникають іррегулярні хаотичні хвилі та стають неможливими кругові хвилі, що рухаються у протилежному до траєкторії руху баку напрямку, починаючи

з певного значення δ . Більше того, коли δ прямує до 1, два амплітудні параметри A та B системи (3.51) стають майже рівними між собою, $A \approx B$.

5.1. Чисельно-аналітичні розв'язки секулярної системи (3.51) та властивості усталених хвиль

Розглянемо усталені періодичні резонансні хвилі для випадку періодичних орбітальних рухів баку з малою амплітудою, коли такі рухи не співпадають із поздовжніми. Згідно результатів із розділу 3, просторові збурення баку із чотирма ступенями вільності, що задано чотирма періодичними узагальненими координатами $\eta_i(t)$, $i = 1, 2, 4, 5$, можна звести, з точністю до компонентів порядку $O(\epsilon^{1/3})$ та $O(\epsilon^{2/3})$ включно, до еліптичних горизонтальних (орбітальних) рухів. Крім того, можна завжди вважати, що еліптичні траєкторії руху баку мають більшу вісь вздовж осі Ox , а менша вісь направлена вздовж осі Oy . Нарешті, без втрати загальності, ми припускаємо, що еліптичні рухи баку відбуваються проти годинникової стрілки.

Повернемося тепер до розділу 3.4, де побудовано періодичний розв'язок системи типу Наріманова-Моїсеєва за умови вищевказаних орбітальних рухів резервуара, а також досліджено стійкість таких розв'язків. Зосередившись на еліптичних збуреннях, означає, що виконується умова (3.42) в секулярних рівняннях (3.46) (чи (3.51)), причому $\delta = \epsilon_y/\epsilon_x \neq 0$.

Для таких збурень важко знайти розв'язок секулярної системи (3.51) в явному аналітичному вигляді. Коли $\xi > 0$, зсуви фаз φ та ψ стають досить складними функціями відносно вхідних параметрів. Щоб вилучити φ і ψ та зменшити розмірність секулярної системи (3.51а) з (3.42), ми підставляємо $\varphi = \psi + \alpha$ у праві частини [2] і [4] та беремо $\epsilon_x \cos \psi$ і $\epsilon_x \sin \psi$

з $\square 1$ і $\square 3$. Результатом є наступна лінійна система однорідних рівнянь

$$\begin{cases} (\delta A)[\cos \alpha(\mathcal{D}(C)B^2 + \xi) + \sin \alpha(\Lambda + m_1A^2 + (m_3 - \mathcal{F}(C))B^2)] \\ \quad - B[\Lambda + m_1B^2 + (m_3 - \mathcal{F}(C))A^2] = 0, \\ (\delta A)[\cos \alpha(\Lambda + m_1A^2 + (m_3 - \mathcal{F}(C))B^2) - \sin \alpha(\mathcal{D}(C)B^2 + \xi)] \\ \quad - B[\mathcal{D}(C)A^2 - \xi] = 0, \end{cases}$$

відносно двох невідомих δA та B . Система повинна мати нетривіальний розв'язок. Це веде до необхідної умови (детермінант дорівнює нулю)

$$\xi(A^2 - B^2)\mathcal{D}(C) - \mathcal{F}(C)[\xi^2 + (\Lambda + m_1(A^2 + B^2))^2]/(m_3 - m_1) + A^2B^2\mathcal{D}^2(C) = 0, \quad (5.1)$$

що дає зв'язок між A^2 , B^2 та C . Інші два рівняння відносно A^2 , B^2 та C отримуємо з $\square 1^2 + \square 3^2$ та $\square 2^2 + \square 4^2$, які набувають форми

$$\begin{cases} A^2[(\Lambda + m_1A^2 + (m_3 - \mathcal{F})B^2)^2 + (\mathcal{D}B^2 + \xi)^2] = \epsilon_x^2, \\ B^2[(\Lambda + m_1B^2 + (m_3 - \mathcal{F})A^2)^2 + (\mathcal{D}A^2 - \xi)^2] = \delta^2\epsilon_x^2. \end{cases} \quad (5.2)$$

Система (5.1), (5.2) відносно двох невідомих A, B та C буде виконуватися для отримання відповідних амплітудно-частотних характеристик у просторі $(\sigma/\sigma_{11}, A, B)$.

Твердження 5.1. *Для еліптичних збурень баку ($\epsilon_x, \epsilon_y \neq 0$), всі резонансні усталені хвилі в рамках теорії Наріманова-Моїсеева є круговими хвилями, які можуть відбуватися за чи проти руху баку в залежності від значення $\epsilon_y = \delta\epsilon_x \neq 0$, $0 < \delta \leq 1$.*

Дійсно, існування стоячих хвиль відповідає $C = 0$. Але $C = 0$ веде до (5.1) $\Rightarrow \xi^2 + (\Lambda + m_1(A^2 + B^2))^2 = 0$ та (5.2) $\Rightarrow A^2[\xi^2 + (\Lambda + m_1(A^2 + B^2))^2] = \epsilon_x^2 \neq 0$ одночасно. Згідно умови (3.52), $C \neq 0$ означає, що у випадку еліптичних збурень баку не існує *стоячих хвиль*, а всі режими усталених резонансних хвиль є *круговими хвилями*. \square

Наші чисельні експерименти показують, що $C > 0$, коли $(m_3 - m_1) > 0$.

Ми не знаємо як отримати аналітичний розв'язок системи (5.1), (5.2). Надалі використовується чисельно-аналітична схема. Проілюструємо результат Твердження 5.1 чисельно та визначимо критичне відношення осей $\delta = \epsilon_y/\epsilon_x$, коли можуть виникнути/зникнути кругові хвилі проти напрямку еліптичного збурення.

Опишемо деталі чисельної схеми для розв'язання системи (5.1), (5.2). Задамо \mathcal{F} та \mathcal{D} як функції від $0 < \beta < 1$,

$$\mathcal{F}(\beta) = (m_3 - m_1)\beta, \quad \mathcal{D}(\beta) = (m_3 - m_1) \sqrt{\beta(1 - \beta)}, \quad C > 0. \quad (5.3)$$

Простий аналіз показує наступне

$$0 < A < \frac{\epsilon_x}{\xi}, \quad 0 < B^2 \leq \min \left[\frac{1}{\mathcal{D}(\beta)} \left(\frac{\epsilon_x}{A} - \xi \right), \frac{\delta^2 \epsilon_x^2}{(\mathcal{D}(\beta)A^2 - \xi)^2} \right], \quad (5.4)$$

що, в свою чергу, визначає фіксований інтервал для A , а інтервал для B^2 визначається вже через A та β . Перше рівняння (5.2) обчислює два дійсних значення $\Lambda_{1,2}$ для будь-яких $0 < \beta < 1$ та A, B^2 , що задовільняють (5.4), наступним чином

$$\Lambda_{1,2} = -m_1 A^2 - (m_3 - \mathcal{F}(\beta))B^2 \pm \sqrt{\frac{\epsilon_x^2}{A^2} - (\mathcal{D}(\beta)B^2 + \xi)^2}. \quad (5.5)$$

Щоб розв'язати (5.1), (5.2) для *будь-яких фіксованих* A , що належать до відповідного інтервалу (5.4)

- 1) ми вводимо сітку $0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_k < \dots < \beta_K < 1$;
- 2) для будь-яких фіксованих $\beta_k \in \{\beta_n\}$, ми розв'язуємо два рівняння (слідують з другого рівняння (5.2))

$$[\Lambda_j + m_1 B^2 + (m_3 - \mathcal{F}(\beta))A^2]^2 + [\mathcal{D}(\beta)A^2 - \xi]^2 = \frac{\delta^2 \epsilon_x^2}{B^2}, \quad j = 1, 2, \quad (5.6)$$

(пов'язані з $+$ та $-$ у виразі (5.5), відповідно) по відношенню до B^2 на інтервалі (5.4); результатом буде множина із додатніх коренів $B_{k,j,i}^2 = B_i^2(A, \beta_k, j)$, $j = 1, 2$, для кожного A та β_k ;

3) кожен корінь $B_i(A, \beta_k, j)$ потім підставляється у (5.1):

$$\xi(A^2 - B_{i,k,j}^2)\mathcal{D}(\beta_k) - \mathcal{F}(\beta_k)[\xi^2 + (\Lambda_j + m_1(A^2 + B_{i,k,j}^2))^2]/(m_3 - m_1) + A^2 B_{i,k,j}^2 \mathcal{D}^2(\beta_k) = 0 \quad (5.7)$$

для визначення сітки (β_k, β_{k+1}) , де ліва сторона рівності (5.7) міняє знак;

4) використовується ітеративна процедура для обчислення $\beta \in (\beta_k, \beta_{k+1})$ та відповідних $B_i(A, \beta, j)$.

Алгоритм обчислює чисельні розв'язки для будь-якого фіксованого A . Міняючи значення A в (5.4), отримуємо відповідні амплітудно-частотні криві у просторі $(\sigma/\sigma_{11}, A, B)$.

Звертаємо увагу, що, маючи амплітудно-частотні характеристики, які впливають із наведеного алгоритму розв'язування системи (5.1), (5.2), можна також знайти відповідні зсуви фаз ψ та φ , використовуючи (3.51).

5.2. Амплітудно-частотні характеристики для еліптичних збурень

Застосовуючи чисельний метод із попереднього розділу (при $\xi > 0$), а також аналітичні розв'язки з роботи [223] для випадку $\xi = 0$, ми побудуємо в даному розділі ілюстративні амплітудно-частотні характеристики у просторі $(\sigma/\sigma_{11}, A, B)$ для різних значень $0 < \delta < 1$ (еліптичні збурення). Випадок кругових збурень ($\delta = 1$) буде проаналізовано окремо в розділі 5.4. Основну увагу буде приділено діапазонам існування та стійкості кругових хвиль за- та проти збурення резервуара (згідно Твердження 5.1 лише такі хвилі існують для даного типу збурень баку).

На Рис. 5.1 проілюстровано амплітудно-частотні криві в просторі $(\sigma/\sigma_{11}, A, B)$ для еліптичних збурень баку без врахування демпфування (3.42), $(\epsilon_x > 0, \epsilon_y = 0, \xi = 0)$ для наступних величин $\delta =$

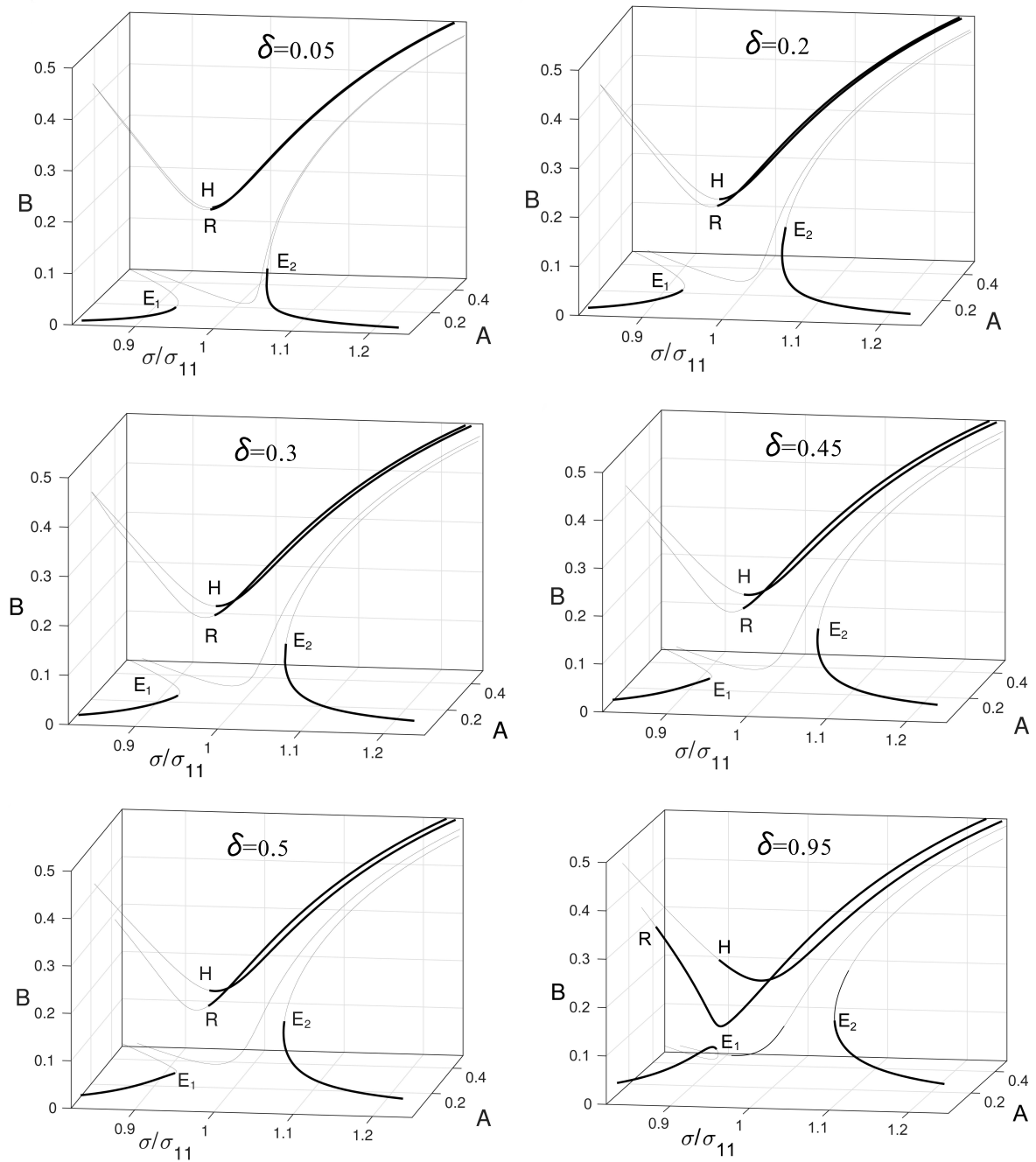


Рис. 5.1: Амплітудно-частотні характеристики для усталеного резонансного коливання рідини під час еліптичних періодичних горизонтальних рухів баку проти руху годинникової стрілки із $\eta_{1a} = 0.01$, $\eta_{2a} = \delta\eta_{1a}$ та значень $\delta = 0.05, 0.2, 0.3, 0.45, 0.5$ та 0.95 . На рисунку зображено відповідні амплітудно-частотні криві без демпфування ($\xi = 0$). Жирні лінії відповідають стійким хвилям. Завжди існують кругові хвилі за- та проти напрямку збурень. Точкам на гілці з точкою R відповідають кругові хвилі, що протинаправлені збуренню баку.

0.05, 0.2, 0.3, 0.45, 0.5 та 0.95. Всі точки на цих кривих відповідають круговим хвилям, але деякі гілки є близькими до площини $(\sigma/\sigma_{11}, A)$, що означає, що такі хвилі є круговими лише формально, але, реально, точки на цих гілках відповідають майже плоскій (стоячій) хвилі. Вона (майже стояча хвиля) завжди є нестійкою в околі основного резонансу $\sigma/\sigma_{11} = 1$, де завжди очікуються кругова хвиля (по праву сторону від $H(R)$) та іррегулярні поверхневі хвилі (між точками E_1 та $H(R)$).

На відміну від недемпфованих усталених хвиль, амплітудно-частотні характеристики яких для поздовжніх горизонтальних гармонічних збурень показано на Рис. 4.1 (а), для еліптичних збурень гілка амплітудно-частотних характеристик з точкою H ділиться на дві (це наглядно показано на Рис. 5.1, випадок $\delta = 0.05$ чи $\delta = 0.2$). Нова гілка позначена точкою R , точки на цій гілці відповідають круговим хвилям проти збурення баку.

Із збільшенням δ , гілки з точками H та R продовжують віддалятися одна від одної. Спостерігається наближення останньої й недавно новоутвореної (мова йдеться про ту, що містить точку R) до гілки з точкою E_1 , яка, в свою чергу, також "піднімається" й наближається до неї (див. випадок для $\delta = 0.95$, Рис. 5.1), і, зрештою, з'єднується при $\delta = 1$ (кругові збурення баку).

Головним висновком із ілюстративних амплітудно-частотних характеристик для недемпфованих резонансних усталених хвиль при еліптичних збуреннях баку є те, що в малому околі резонансу $\sigma/\sigma_{11} \approx 1$ завжди існують кругові хвилі як за- так і проти напрямку збурень баку. Такі хвилі є стійкими. Крім того, лише для збурень, близьких до кругових, зникає діапазон частот, в якому очікуються хаотичні хвилі (жоден з усталених резонансних хвильових рухів не є стійким).

Поглянемо тепер на амплітудно-частотні характеристики за наявності ненульового демпфування.

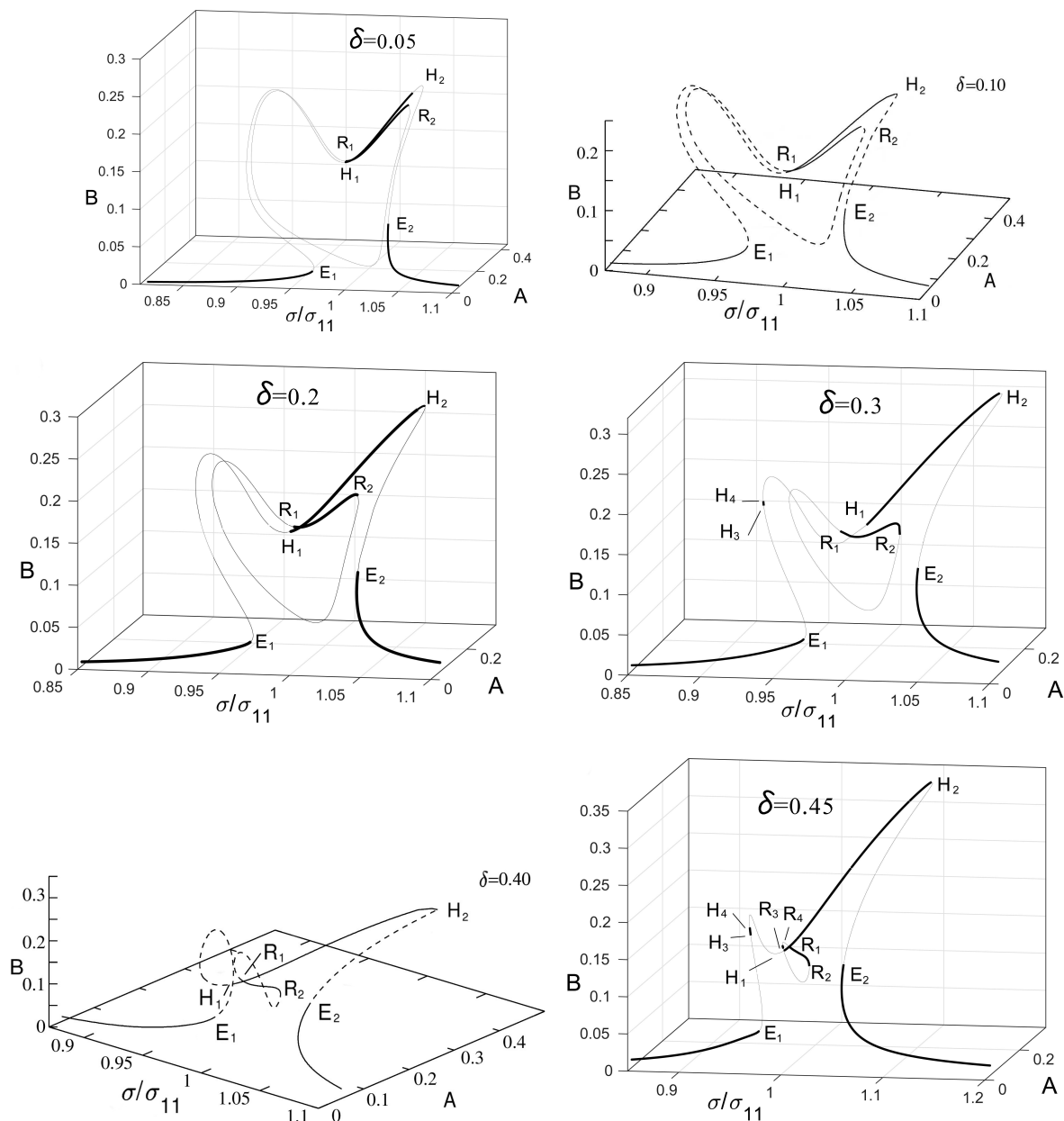


Рис. 5.2: Амплітудно-частотні характеристики у просторі $(\sigma/\sigma_{11}, A, B)$ для усталених резонансних коливань рідини, що аналогічні до Рис. 5.1, але для ненульового демпфування ($\xi = 0.02$). Суцільні лінії відображають стійкі хвилі, а штрихові – не стійкі. Гілка з точками E_1, H_1, H_2, E_2 відповідає круговій хвилі, співнапрявленій із рухом баку, а колоподібна гілка, яка містить R_1 та R_2 , – представляє кругову хвилю, яка рухається у протилежному напрямку.

Рис. 5.2 ілюструє амплітудно-частотні характеристики для випадку еліптичних збурень баку, коли усталені хвилі мають ненульове демпфування ($\xi = 0.02$). Як бачимо, при переході від поздовжніх до еліптичних збурень баку, аналогічно до випадку без демпфування на Рис. 5.1, також відбувається розчеплення арки $E_1H_1H_2E_2$, що зображена на Рис. 4.1 (b). Наглядний результат такого розчеплення ми добре бачимо бачимо на Рис. 5.2 при $\delta = 0.05$. Окрім арки $E_1H_1H_2E_2$, з'являється колоподібна гілка R_1R_2 . Остання не перетинається із $E_1H_1H_2E_2$ та відповідає за кругову хвилю, що "біжить" у протилежному напрямку до еліптичних збурень баку. Із збільшенням δ , біля $\delta = 0.3$ для даних вхідних величин, може з'являтися один чи декілька острівців стійкості (H_3H_4 на вітці $E_1H_1H_2E_2$). Колоподібна гілка R_1R_2 також зменшується у розмірах. При подальшому зростанні δ , в околі $\delta = 0.45$ може з'являтися додатковий острівець стійкості R_3R_4 , що знаходиться на гілці з точками R_1 та R_2 .

У проміжку між $\delta = 0.45$ та $\delta = 0.5$ колоподібна гілка $R_1R_2(R_1R_2R_3R_4)$ зменшується настільки, що вона просто зникає і, як результат, її немає при $\delta = 0.5$ (див. Рис. 5.3). А при зростанні до $\delta = 0.8$, острівець H_3H_4 зростає, з'єднуючись, зрештою, із H_1H_2 та точкою E_1 (див. Рис. 5.3). На Рис. 5.4 проілюстровано амплітудно-частотні криві для майже кругових та кругових збурень баку.

Вже для $\delta = 0.8$ видно, що перехід до кругового руху баку не тільки робить неможливим протинаправлені кругові хвилі, але й унеможливує діапазон частот, де відбуваються хаотичні хвильові рухи рідини. Для будь-яких σ/σ_{11} в околі основного резонансу завжди існує усталена кругова хвиля, траєкторія руху якої співпадає із напрямком збурень баку. Зникнення діапазону хаотичних хвиль відбувається приблизно для $\delta = 0.56$.

В підсумку, лінійне в'язке демпфування впливає на коливання рі-

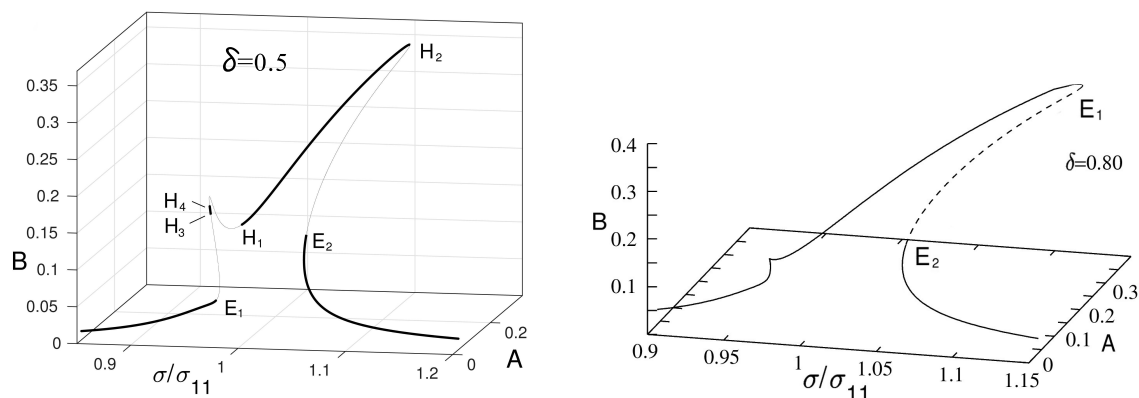


Рис. 5.3: Аналогічно до Рис. 5.2, але для $\delta = 0.5$ та 0.8 .

дини при орбітальних збуреннях баків (біореакторів). Якісно та кількісно воно впливає на усталені хвилі на поверхні рідини та відповідні амплітудно-частотних характеристики. Найцікавішим є те, що навіть будучи відносно малим, демпфування унеможливорює існування протилежно направленої кругової хвилі (до збурення баку) при $\delta \rightarrow 1$. Тобто, починаючи із деякого критичного δ_* , зникають протинаправлені кругові хвилі, які існували для недемпфованого випадку на Рис. 5.1. Цей факт співпадає із експериментами Рекларі в [218].

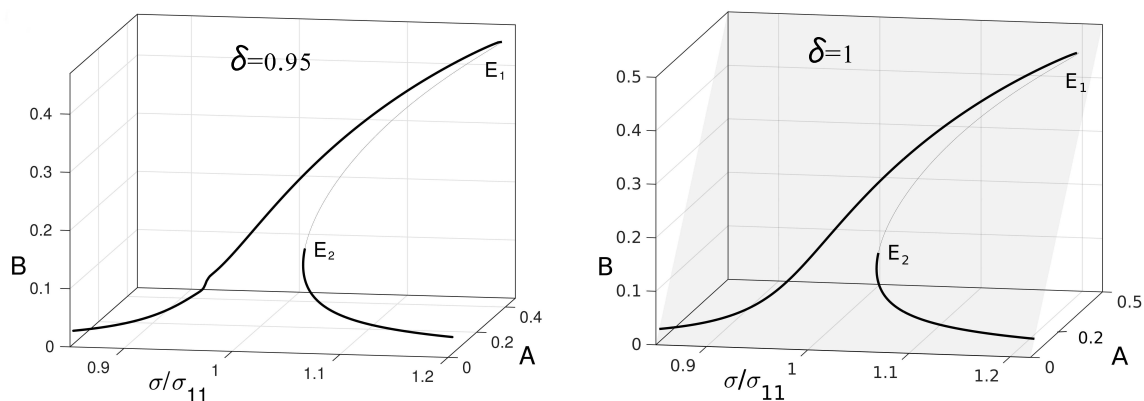


Рис. 5.4: Аналогічно до Рис. 5.2, але для $\delta = 0.95$ та 1 (кругові збурення баку).

5.3. Зсув фаз для випадку еліптичних орбітальних збурень

Як було показано для поздовжніх коливань баку в розділі 4, демпфування впливає на якісно та кількісно на поведінку зсуву фаз. В той час, як недемпфовані усталені резонансні коливання рідини характеризується кусково сталими значеннями ψ та φ , іншими словами, $\sin \psi = 0$ (φ не визначене) для плоскої (стоячої) хвилі та $\sin \psi = \cos \varphi = 0$ для кругової хвилі (вздовж відповідних кривих на Рис. 4.1 а), зсув фаз стає складною функцією частоти σ/σ_{11} для $\xi > 0$.

На Рис. 5.5 зображено як міняється зсув фази ψ/π із частотою збурення σ/σ_{11} для еліптичних орбітальних збурень баку. Порівнюючи фазові криві із випадком поздовжніх гармонічних збурень (див. Рис. 4.4), бачимо відокремлення замкненої гілки R_1R_2 (наглядно показано при $\delta = 0.05$, Рис. 5.5), коли, порівнюючи із випадком на Рис. 4.4, розчеплюється колоподібна крива R_1R_2 , яка відповідає за кругову хвилю проти напрямку збурення.

На фазових кривих, зображених на Рис. 5.5, ми використовуємо ті ж самі позначення, що й на Рис. 5.2-5.4 для амплітудно-частотних характеристик; це включає назву точок біфуркації. Крім того, ми бачимо виникнення додаткових "острівців" стійкості як на гілці $E_1H_1H_2E_2$, так і на колоподібній гілці R_1R_2 . Ми також звертаємо увагу, що ще для $\delta = 0.5$ існує діапазон частот між точками E_1 та H_1 , де очікуються хаотичні хвилі, але цей діапазон вже відсутній для фазових кривих з $\delta = 0.95$.

Наступним кроком є вивчення того, що станеться при $\delta = 1$ (кругових орбітальних рухах баку). Можна передбачити, що в такому випадку будуть існувати лише кругові хвилі за напрямком руху баку, причому амплітудно-частотні характеристики повинні демонструвати "жорстку" нелінійність (див. правий Рис. 5.4).

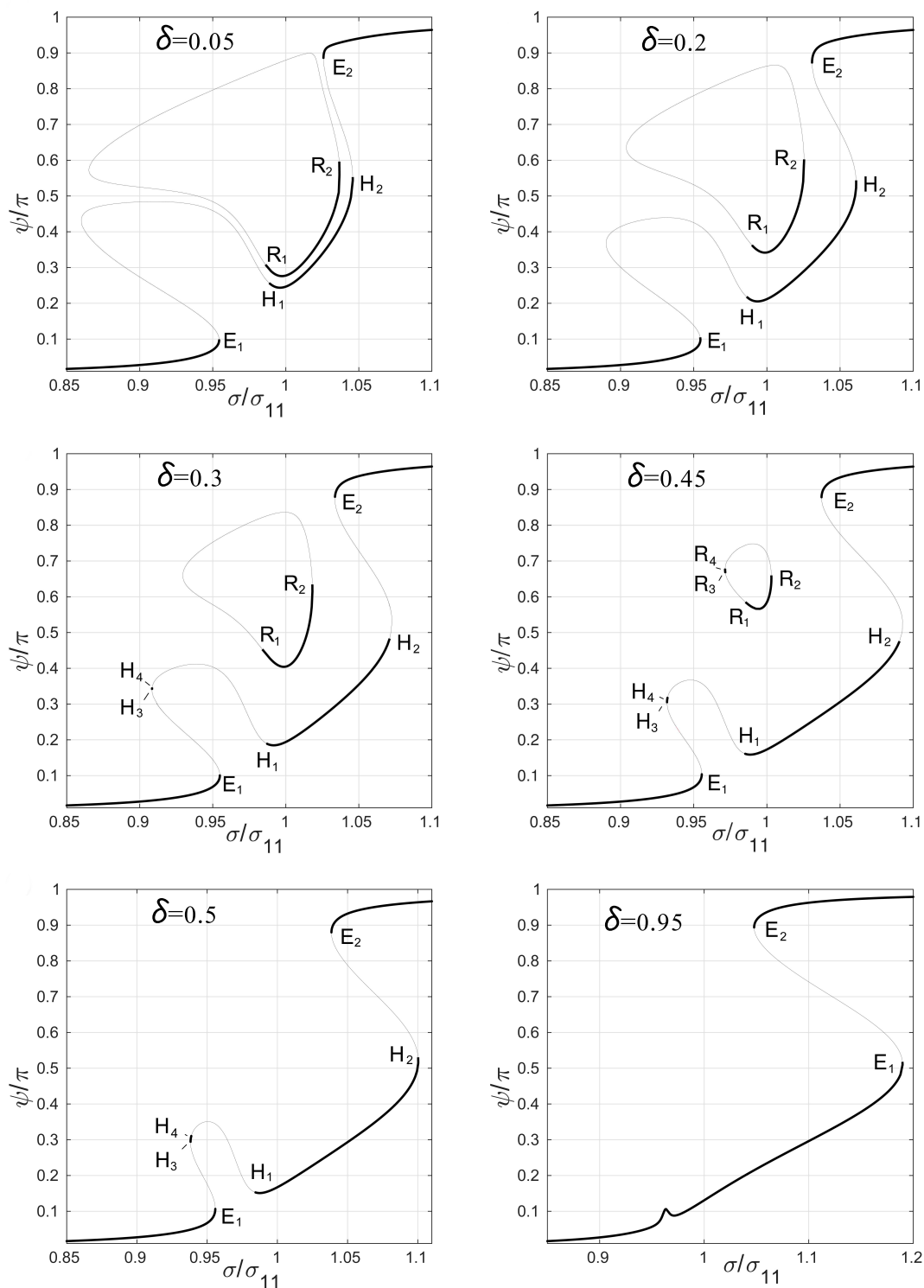


Рис. 5.5: Залежність зсуву фаз ψ/π для різних значень δ . Відповідає амплітудно-частотним характеристикам на Рис. 5.1.

5.4. Кругові орбітальні збурення баку

У випадку без демпфування [223], таке збурення баку породжує установлені кругові хвилі, які "біжать" в обох кутових напрямках. Більше того,

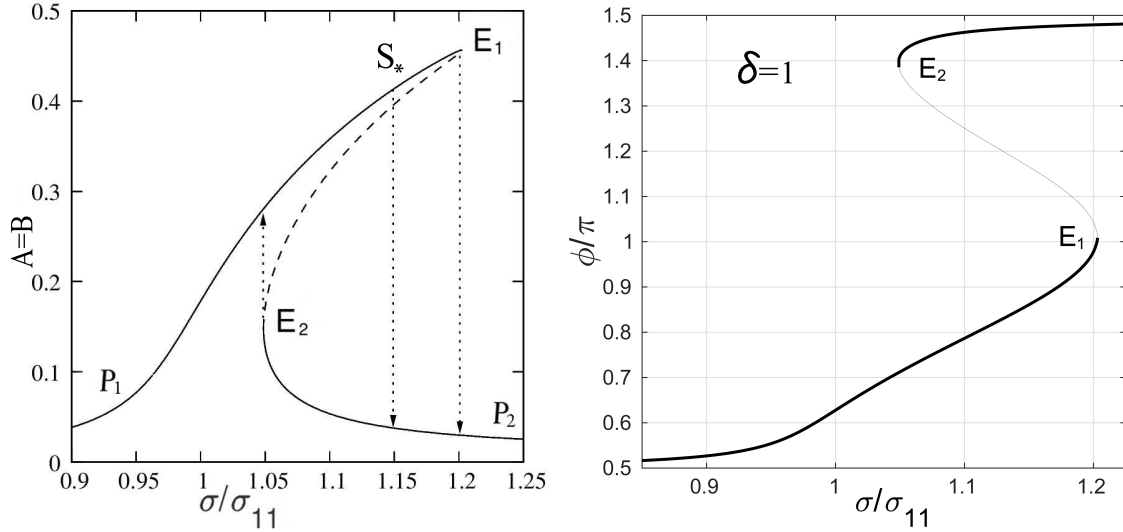


Рис. 5.6: Амплітудно-частотні характеристики для усталеного резонансного коливання рідини у просторі $(\sigma/\sigma_{11}, A = B)$ для кругових орбітальних збурень баку (зліва) та їх відповідні фазові криві для зсуву фази ψ/π – справа. Суцільні лінії відповідають стійкій хвилі, а штрихові – за не стійкі. Між точками E_1 та E_2 спостерігається гістерезис, де співіснують два усталені хвильові рухи. Координати E_1 повністю визначаються через ξ (формула (5.10)). Обчислення були зроблені при

$$\eta_{1a} = \eta_{2a} = 0.0066, \quad h = 1.5 \quad \text{та} \quad \xi = 0.0128.$$

секулярна система вироджувалась, демонструючи нескінченну кількість розв'язків для орбітальної частоти σ/σ_{11} . Для дослідження усталених хвиль із демпфуванням, використовуючи секулярну систему (5.1), (5.2) з $\delta = 1$ та $\xi > 0$, згадаємо, що $C \neq 0$, але границя $C \rightarrow +\infty$ можлива. Остання границя перетворює (5.1) до $A^2 = B^2$, та два рівняння (5.2) стають еквівалентними

$$A = B > 0; \quad A^2(\Lambda + (m_1 + m_3)A^2)^2 + \xi^2 = \epsilon_x^2, \quad (5.8)$$

$\mathcal{D} = \mathcal{F} = 0$, що дає змогу відновити ψ та $\varphi - \psi = \pi/2$ із

$$A(\Lambda + (m_1 + m_3)A^2) = \epsilon \cos \psi; \quad A\xi = \epsilon \sin \psi. \quad (5.9)$$

Згідно (4.8), параметри m_1 та m_3 задовільняють нерівності $m_1 <$

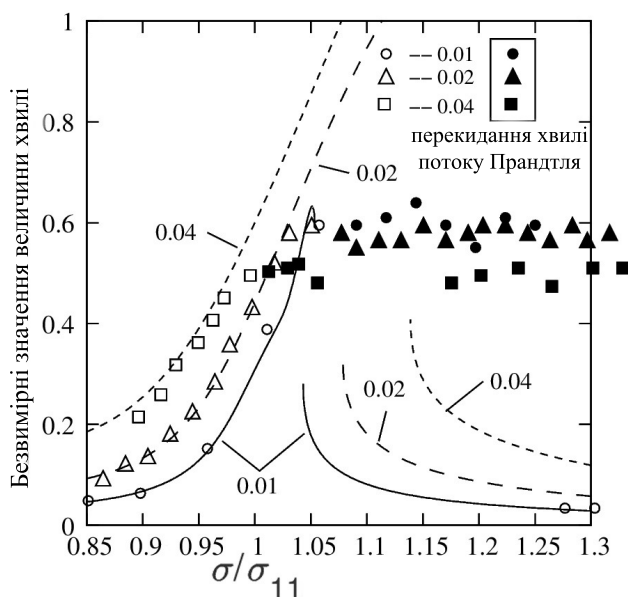


Рис. 5.7: Теоретичні (лінії) та експериментальні (символи) безрозмірні амплітудні параметри усталеної хвилі $(\zeta_{max} - \zeta_{min})/2$ для кругових рухів баку. Експерименти [218, 222] було проведено із поступовим збільшенням σ , тобто рухаючись вздовж P_1E на Рис. 5.6. Теоретичні криві позначено значеннями амплітуд коливання баку $\eta_{1a} = \eta_{2a} = 0.01, 0.02$ та 0.04 ; в обчислення взято значення коефіцієнта демпфування $\xi = 0.034$. Замальовані символи позначаються експериментальні спостереження, при яких спостерігається перекидання хвилі, а також феномен Прандтля [232, 233], який є можливим лише для вихорових рухів рідини.

$0, m_3 > 0$ при $h \gtrsim 1$, тому відповідні амплітудно-частотні криві, що випливають із (5.8) дійсно характеризують так звану жорстку нелінійність. Типова амплітудно-частотна крива проілюстрована на Рис. 5.6. Величина $\xi > 0$ впливає на положення точки E_1 . Співвідношення частоти $(\sigma/\sigma_{11})_*$ в точці S_* (розташоване між E_1 та E_2) визначається з нерівності

$$(\sigma/\sigma_{11})_* \leq \left(1 - (m_1 + m_3)(\epsilon/\xi)^2\right)^{-1/2} \quad (5.10)$$

Верхня границя (5.10) зростає із ϵ/ξ , тому, знаючи ξ , можливо обчислити E_1 , де повинен відбутись стрибок із верхньої на нижню гілку із збільшен-

ням частоти σ . Таким чином, можна оцінити актуальне значення ξ , якщо існують експерименти, де кожен новий тест відбувається вздовж P_1E . Дійсно, формули (3.17)-(3.23) оцінюють нижню межу $\xi \geq \xi_{11}^{\text{low}} = 0.031$ для експериментальних посудин у [218, 222], частково заповених водою. Використовуючи експериментально встановлені частоти, де відбувається стрибок від верхньої до нижньої гілки (стрибок пов'язаний із точкою E_1 на Рис. 5.6) та формулу (5.10), можна оцінити верхню межу для коефіцієнту демпфування, а саме $\xi \leq 0.034$ (для амплітуд коливання 0.01. та 0.02, $(\sigma/\sigma_{11})_* = 1.27$ та 1.45, відповідно). Це означає, що демпфування в [218, 222] було відносно малим і воно, в основному, пов'язане із в'язким ламінарним поверхневим шаром на змочених стінках посудини.

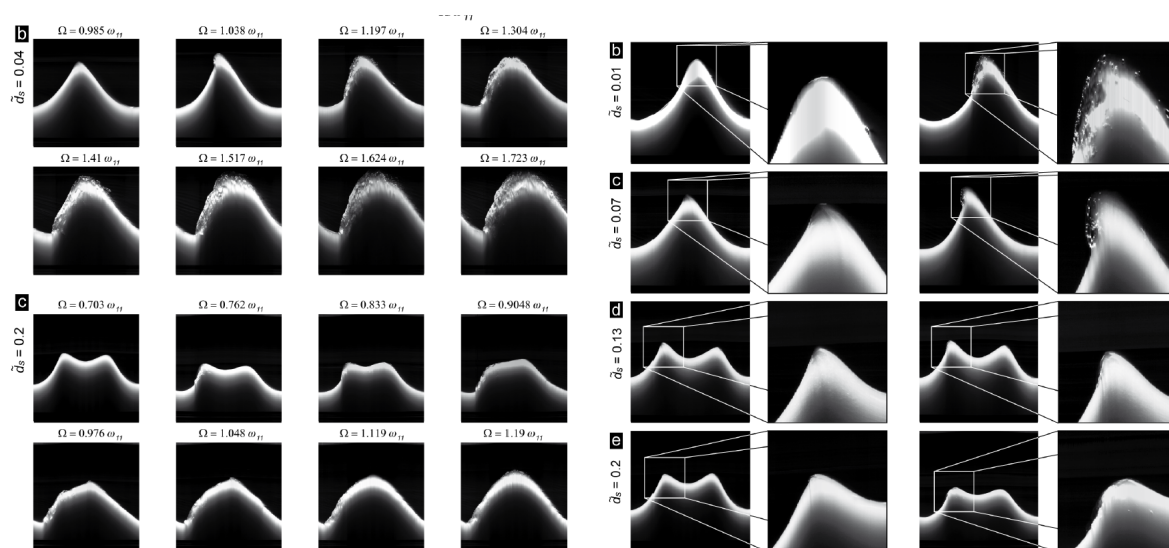


Рис. 5.8: Фотографії поверхневих феноменів з роботи [218].

Використання у наших обрахунках $\xi = 0.034$ дає змогу порівняти теоретичні оцінки з результатами експериментів [218, 222]. На Рис. 5.7 продемонстровано досить гарне співпадіння теорії та експерименту в діапазонах частоти, де не було зафіксовано перекидання хвиль під час експериментальних спостережень. Теоретично, феномен перекидання хвилі може бути змодельованим шляхом спекулятивного збільшення коефіцієнту демпфування (див. приклади для поздовжнього збурення баку у

[189]). Але оскільки за нашою оцінкою $\xi \leq 0.034$, то такий підхід із збільшенням ξ є теоретично неможливим для експериментальних випадків на Рис. 5.7. Ймовірно, невідповідність відбувається через феномен Прандтля, який було досліджено в [218, 222]. Іншим варіантом є те, що у зв'язку із поверхневими феноменами на Рис. 5.8, теорія Наріманова-Моїсеєва стає непридатною для аналізу.

5.5. Висновки розділу

Основним результатом цього розділу є усунення протиріччя між експериментальними результатами про усталені хвилі в біореакторах (орбітальні збурення баку) та теоретичними дослідженнями в роботі [223] (теорія усталених хвильових рухів в рамках наближення Наріманова-Моїсеєва без врахування демпфування). Теорія показувала, що для кругових збурень можливі кругові хвилі як за-, так і проти напрямку збурень, але експерименти не підтверджували існування кругових хвиль проти напрямку збурень баку.

Ми вводимо демпфування в асимптотичне наближення Наріманова-Моїсеєва, доводимо, що для просторових (зводиться до орбітальних) збурень існують лише кругові хвилі (Твердження 5.1), а також проводимо чисельно-аналітичні дослідження, які підтверджують зникнення протилежно направлених до руху баку кругових хвиль, коли збурення змінюються від еліптичних до кругових.

Інший важливий висновок цього розділу випливає із порівняння теоретичних та експериментальних результатів відносно амплітуди усталених хвиль при кругових рухах баку. Рис. 5.7 вказує на невідповідність нашої теорії експериментам, коли вони характеризуються суттєвою дефрагментацією вільної поверхні через хвилі розвалу на Рис. 5.8. Збільшення демпфування допомагало покращити відповідність експериментам для поздовжніх коливань баку. Так само й для кругової хвилі, коли

експерименти показували на дефрагментацію вільної поверхні. Але такий підхід не працює для випадку кругових збурень резервуару. Для пояснення результатів на Рис. 5.7, потрібно провести ревізію побудованої наближеної теорії типу Наріманова-Моїсеєва, врахувавши, ймовірно, феномен Прандтля та збільшення впливу вищих власних форм коливання рідини. Для врахування феномену Прандтля необхідно перейти до моделі вихорових рухів рідини. Збільшення вкладу вищих власних форм означає відмову від асимптотики Наріманова-Моїсеєва та перехід до адаптивних модальних рівнянь (розділ 3). Подібні адаптивні модальні рівняння виведено та проаналізовано на даний момент лише для баків прямокутного перерізу.

ВИСНОВКИ

Розглядаючи динаміку рідини в циліндричному резервуарі кругового перерізу як об'єкт аналітичної механіки, використовуючи варіаційний формалізм Бейтмена-Люка та модальну систему Луковського-Майлза, яка є аналогом рівнянь Ейлера-Лагранжа для такої механічної системи та пов'язує нескінченний набір гідродинамічних узагальнених координат та швидкостей, отримано аналітичні періодичні розв'язки, досліджено їх стійкість та прокласифіковано відповідні усталені резонансні коливання рідини в рамках наближення Наріманова-Моїсеєва модальних рівнянь для випадку, коли на усталені рухи впливає демпфування. В результаті отримано наступні результати:

1. Побудовано повні, в математичному, сенсі нелінійні рівняння типу Наріманова-Моїсеєва, що пов'язують нескінченну кількість узагальнених гідродинамічних координат та описують резонансні коливання рідини із дисипацією за умови періодичних тривимірних рухів баку з частотою, близькою до першої власної частоти.

2. Виведено асимптотичні формули для оцінки коефіцієнтів демпфування в механічній системі, пов'язаних із в'язким поверхневим ламінарним шаром на змочених стінках баку та внутрішнім в'язким тертям. Встановлено, що вплив дисипації є важливим для $0.05m \lesssim R_0 \lesssim 0.3m$ (R_0 – радіус баку), що відповідає розмірам біореактора.

3. Для довільних періодичних рухів баку побудовано точні аналітичні періодичні розв'язки системи типу Наріманова-Моїсеєва, проаналізовано їх стійкості.

4. Доведено, що з точністю до другого порядку малості, такі періодичні розв'язки (а значить й відповідні усталені хвилі) є математично еквівалентними розв'язками, які виникають при орбітальних горизонтальних еліптичних рухах баку для відповідних амплітуд еліптичного збурення.

5. Показано, що, окрім для випадку поздовжніх горизонтальних збурень баку, всі усталені хвилі є круговими, які виникають за чи проти еліптичних траєкторій руху баку. Доведено, що, починаючи з деякої величини співвідношень осей еліпсу збурень, наявність дисипації унеможливиює існування кругових хвиль протилежно направлених рухам баку.

6. Побудовано типові амплітудно-частотні характеристики. Описано вплив дисипації на зсув фаз.

7. Результати валідовано порівнянням з експериментами різних авторів. Проаналізовано діапазони застосування побудованої аналітичної теорії. Зокрема, вказано на необхідність збільшувати коефіцієнти демпфування із збільшенням амплітуди кругової хвилі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Raynovskyy I, Timokha A. Resonant liquid sloshing in an upright circular tank performing a periodic motion. *Journal of Numerical and Applied Mathematics*. 2016;122:71–82.
2. Timokha A, Raynovskyy I. Damped steady-state resonant sloshing in a circular base container. *Fluid Dynamics Research*. 2018;50(No. 4. Paper ID 045502):1–27.
3. Raynovskyy I, Timokha A. Steady-state resonant sloshing in an upright cylindrical container performing a circular orbital motion. *Mathematical Problems in Engineering*. 2018;2018(Paper ID 5487178):1–9.
4. Raynovskyy I, Timokha A. Damped resonant steady-state sloshing in an upright circular tank. *Збірник Праць Інституту математики НАН України*. 2017;14(2):180–204.
5. Timokha A, Raynovskyy I. The damped sloshing in an upright circular tank due to an orbital forcing. *Доповіді НАН України*. 2017;(№ 2):48–53.
6. Timokha A, Raynovskyy I. Resonant steady-state sloshing in upright tanks performing a three-dimensional periodic motion. *Вісник КНУ імені Тараса Шевченка Серія "Фізико–Математичні науки"*. 2017;(№ 3):225–229.
7. Timokha AN, Raynovskyy IA. Resonant steady-state sloshing in upright tanks: effect of three-dimensional excitations and viscosity. In: *ОМАЕ – 37th International Conference on Ocean, Offshore & Arctic Engineering*. June 17–22, 2018.; 2018, doi: 10.115/ОМАЕ2018-77534. .
8. Raynovskyy IA. The Damping Effect on Steady-State Resonant Sloshing in an Upright Circular Tank. *Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження Ю.О. Митропольського, 7–10 червня 2017, Київ, Україна; 2017. р. 52.*

9. Raynovskyy IA. Steady-State Resonant Damped Sloshing in Upright Circular Tank. In: Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2017", 23–25 травня 2017 р., Львів, — <http://iapmm.lviv.ua/chyt2017/abstracts/Raynovskyy.pdf>; 2017. .
10. Raynovskyy IA, Tymokha AN. Resonant steady-state sloshing in upright tanks performing a three-dimensional periodic motion. In: IV Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки" (28–30 серпня, 2017, м. Київ, Україна); 2017. p. 92.
11. Ostrogradsky MA. Mémoire sur la propagation des ondes dans un bassin cylindrique. Mémoires a l'Academie Royale des Sciences, De l'Institut de France. 1832;III:23–44.
12. Фещенко СФ, Луковский ИА, Рабинович БИ, Докучаев ЛВ. Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. Киев: Наук. думка; 1969.
13. Faltinsen OM, Timokha AN. Sloshing. Cambridge University Press.; 2009.
14. Hutton RE. An investigation of nonlinear, nonplanar oscillations of fluid in cylindrical container: Tech. rep. NASA; D-1870. NASA; 1963.
15. Lukovsky IA. Nonlinear Dynamics: Mathematical Models for Rigid Bodies with a Liquid. De Gruyter.; 2015.
16. Faltinsen OM, Rognebakke OF, Lukovsky IA, Timokha AN. Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth. Journal of Fluid Mechanics. 2000;407:201–234.
17. Abramson HN. The dynamics behavior of liquid in moving containers with applications to space vehicle technology: Tech. Rep. NASA, SP-106. NASA, Washington, D.C.; 1966.
18. Cooper RM. Dynamic of liquid in moving containers. ARS Journal. 1960;30(8):725–729.

19. Fontenot LL. Dynamic stability of space vehicles. Vol. 7. The dynamics of liquid in fixed and moving containers: Tech. Rep. NASA, CR-941. Washington: NASA.; 1968.
20. Stofan A, Armsted A. Analytical and experimental investigation of forces and frequencies resulting from liquid sloshing in a spherical tank: Tech. Rep. D-1281: NASA. Lewis Research Center, Cleveland, Ohio; 1962.
21. Sumner IE. Experimental investigations of stability boundaries for planar and nonplanar sloshing in spherical tanks: Tech. rep.: NASA, TN D-3210. Lewis Research Center, Cleveland, Ohio; 1966.
22. Sumner IE, Stofan AJ. An experimental investigation of the viscous damping of liquid sloshing in spherical tanks: Tech. rep.: NASA, TN D-1991. Lewis Research Center, Cleveland, Ohio; 1963.
23. Абгарян КА. Рапорт И.М. Динамика ракет. Москва: Машиностроение; 1969.
24. Колесников КС. Жидкостная ракета как объект регулирования. М.: Машиностроение; 1969.
25. Kubenko VD, Koval'chuk PS. Nonlinear problems of the dynamics of elastic shells partially filled with a liquid. International Applied Mechanics. 2000;36(4):421–448.
26. Микишев ГН, Рабинович БИ. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненным жидкостью. М.: Машиностроение; 1968.
27. Микишев ГН, Рабинович БИ. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М.: Машиностроение; 1971.
28. Moiseev N. Variational problems in the theory of oscillations of a liquid and a body with a liquid. Moscow; 1962.
29. Моисеев НН, Петров АА. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М.: ВЦ АН СССР; 1966.

30. Moiseyev N, Rumyantsev V. Dynamic Stability of Bodies Containing Fluid. *Applied Physics and Engineering*. 1968;6:251–306.
31. Рабинович БИ. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. Москва: Машиностроение; 1975.
32. Богомаз И, Сирота СА. Колебания жидкости в баках (методы и результаты экспериментальных исследований). Днепропетровск: НАН Украины и НКА Украины, Институт технической механики; 2002.
33. Богоряд ИБ. Колебания вязкой жидкости в полости твердого тела: некоторые математические модели и количественные оценки. Томск: Томский Государственный Университет; 1999.
34. Богоряд И, Дружинин IA, Дружинина ГЗ, Либин ЭЕ. Введение в динамику сосудов с жидкостью. Томск: изд. ТГУ; 1977.
35. Narimanov G. Motions of a solid body whose cavity is partly filled by a liquid. *Applied Mathematics and Mechanics (PMM)*. 1956;20(1):21–38.
36. Okhotsimskii D. On the theory of a body motions when there is a cavity partly filled by a liquid. *Applied Mathematics and Mechanics (PMM)*. 1956;20(1):3–20.
37. Rabinovich B. Equations of perturbed motions of a solid body with a cylindrical cavity partly filled by a liquid. *Applied Mathematics and Mechanics (PMM)*. 1956;20(1):39–49.
38. Луковский IA, Барняк МЯ, Комаренко МЯ. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. Киев: Наук. думка; 1984.
39. Троценко ВА. Колебания жидкости в подвижных емкостях с перегородками. Киев: Ин-т математики НАН Украины; 2006.
40. Morand J, Ohayon R. Fluid structure interaction. *Applied numerical methods*. Chichester-New York-Brisbane-Toronto-Singapore: John Wiley & Sons; 1995.

41. Faltinsen OM, Timokha AN. A multimodal method for liquid sloshing in a two-dimensional circular tank. *Journal of Fluid Mechanics*. 2010;665:457–479.
42. Kolaei A, Rakheja S, Richard MJ. Effects of tank cross-section on dynamic fluid slosh loads and roll stability of a partly-filled tank truck. *European Journal of Mechanics B/Fluids*. 2014;46:46–58.
43. Kolaei A, Rakheja S, Richard MJ. A coupled multimodal and boundary-element method for analysis of anti-slosh effectiveness of partial baffles in a partly-filled container. *Computers & Fluids*. 2015;107:43–58.
44. Yan-Sheng Y, Xing-Rui M, Ben-Li W. Multidimensional modal analysis of liquid Nonlinear sloshing in right circular cylindrical tank. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2007;28(8):1997–2018.
45. Жуковский HE. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. *Журнал Российского Физико-Математического общества*. 1885;XVI:30–85.
46. Craik AD. The origin of water wave theory. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2004;36:1–28.
47. Eastham M. An eigenvalue problem with parameter in the boundary condition. *Quarterly Journal of Mathematics*. 1962;13:304–320.
48. Koprachevsky N, Klein S. Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Volume 2: Nonself-adjoint problems for viscous fluid. Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag.; 2003.
49. Klein SG. Oscillations of a viscous fluid in a container. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 1964;159:262–265.
50. Черноусько ФЛ. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. Москва: Наука; 1968.
51. Chernous'ko FL. On free oscillations of a viscous fluid in a vessel. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1966;30(5):990–1003.

52. Myshkis A, Babskii V, Kopachavskii A. Low-gravity fluid mechanics: Mathematical theory of capillary phenomena. Berlin and New York: Springer-Verlag; 1987.
53. Kopachevsky ND, Klein SG. Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Volume 1: self-adjoint problems for an ideal fluid. Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag.; 2003.
54. Луковский ИА, Троценко ВА, Усюкин АН. Взаимодействие тонкостенных упругих элементов с жидкостью в подвижных полостях. Киев: Наукова думка; 1989.
55. Кононов ЮН. О колебании физического маятника, содержащего двухслойную жидкость, разделенную упругой мембраной // Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. тр. —2001. — Вип. 31. — С. 105–110; 2001.
56. Кононов ЮН, Русаков ВФ, Джуха ЮА. Осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре. Вісник Запорізького національного університету Фізико-математичні науки. 2015;(2):106–115.
57. Budiansky B. Sloshing of liquid in circular canals and spherical tanks. Journal of Aerospace Sciences. 1960;27(3):161–172.
58. Vekua IN. On completeness of a system of harmonic polynomials in space. Doklady Akademii Nauk SSSR. 1953;90:495–498.
59. Vekua IN. New methods for solving elliptic equations. New York: Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc.; 1967.
60. Komarenko A. Asymptotic expansion of eigenfunctions of a problem with a parameter in the boundary conditions in a neighborhood of angular boundary points. Ukrainian Mathematical Journal. 1980;32(5):433–437.
61. Komarenko A. Asymptotics of solutions of spectral problems of hydrodynamics in the neighborhood of angular points. Ukrainian Mathematical Journal. 1998;50(6):912–921.

62. Wigley NM. Asymptotic expansions at a corner of solutions of mixed boundary value problems (Asymptotic expansions at corner of solutions of elliptic second order partial differential equations in two variables). *Journal of Mathematics and Mechanics*. 1964;13:549–576.
63. Wigley NM. Mixed boundary value problems in plane domains with corners. *Mathematische Zeitschrift*. 1970;115:33–52.
64. Faltinsen OM, Timokha AN. Analytically approximate natural sloshing modes and frequencies in two dimensional tanks. *European Journal of Mechanics B/Fluids*. 2014;47:176–187.
65. Shao YL, Faltinsen O. Fully-Nonlinear Wave-Current-Body Interaction Analysis by a Harmonic Polynomial Cell (HPC) Method. In: 32nd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering, Nantes, France, June 9-14, 2013; 2013. .
66. Shao YL, Faltinsen O. A harmonic polynomial cell (HPC) method for 3D Laplace equation with application in marine hydromechanics. *Journal of Computational Physics*. 2014;274:312–332.
67. Faltinsen OM, Timokha AN. Natural sloshing frequencies and modes in a rectangular tank with a slat-type screen. *Journal of Sound and Vibration*. 2011;330:1490–1503.
68. Faltinsen OM, Timokha AN. Analytically approximate natural sloshing modes for a spherical tank shape. *Journal of Fluid Mechanics*. 2012;703:391–401.
69. Faltinsen OM, Timokha AN. On sloshing modes in a circular tank. *Journal of Fluid Mechanics*. 2012;695:467–477.
70. Gavriluk I, Lukovsky I, Trotsenko Y, Timokha A. Sloshing in a vertical circular cylindrical tank with an annular baffle. Part 1. Linear fundamental solutions. *Journal of Engineering Mathematics*. 2006;54:71–88.

71. Penny W, Price A. Finite periodic stationary waves in a perfect liquid. *Philosophical Transactions of the Royal Society*. 1952;244:254–284.
72. Moiseev NN. On the theory of nonlinear vibrations of a liquid of finite volume. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1952;22(5):860–872.
73. Нариманов ГС. О колебаниях жидкости в подвижных полостях. *Изв АН СССР, ОТН*. 1957;№ 10:71–74.
74. Moore R, Perko L. Inviscid fluid flow in an accelerating cylindrical container. *J Fluid Mech*. 1964;22:305–320.
75. Perko L. Large-amplitude motions of liquid-vapour interface in an accelerating container. *J Fluid Mech*. 1969;35:77–96.
76. Bryant PJ. Nonlinear progressive waves in a circular basin. *J Fluid Mech*. 1989;205:453–467.
77. Faltinsen OM, Timokha AN. Adaptive multimodal approach to nonlinear sloshing in a rectangular tank. *Journal of Fluid Mechanics*. 2001;432:167–200.
78. Faltinsen OM, Timokha AN. Asymptotic modal approximation of nonlinear resonant sloshing in a rectangular tank with small fluid depth. *J Fluid Mech*. 2002;470:319–357.
79. Wu GX. Second-order resonance of sloshing in a tank. *Ocean Engineering*. 2007;34:2345–2349.
80. Faltinsen OM. A nonlinear theory of sloshing in rectangular tanks. *Journal of Ship Research*. 1974;18(4):224–241.
81. Ockendon J, Ockendon H. Resonant surface waves. *Journal of Fluid Mechanics*. 1973;59:397–413.
82. Bauer HF, Eidel W. Non-linear liquid motion in conical container. *Acta Mechanica*. 1988;464:11–31.

83. Maggio OD, Rehm A. Nonlinear free oscillations of a perfect fluid in a cylindrical container. AIAA Symposium on Structural Dynamics and Aeroelasticity. 1965;30:156–161.
84. Solaas F, Faltinsen O. Combined numerical and analytical solution for sloshing in two-dimensional tanks of general shape. Journal of Ship Research. 1997;41(2):118–129.
85. Miles J. Internally resonant surface waves in circular cylinder. J Fluid Mech. 1984;149:1–14.
86. Miles J. Internally resonant surface waves in circular cylinder. J Fluid Mech. 1984;149:15–31.
87. Bateman H. Partial differential equations of mathematical physics. Cambridge University Press.; 1932.
88. Hargneaves R. A pressure-integral as kinetic potential. Philosophical Magazine. 1908;16:436–444.
89. Luke JG. A variational principle for a fluid with a free surface. J Fluid Mech. 1967;27:395–397.
90. Holmes P. Chaotic motions in a weakly nonlinear model for surface waves. J Fluid Mech. 1986;162:365–388.
91. Miles JW. Resonantly forced surface waves in circular cylinder. Journal of Fluid Mechanics. 1984;149:15–31.
92. Funakoshi M, Inoue S. Surface waves due to resonant oscillation. J Fluid Mech. 1988;192:219–247.
93. Funakoshi M, Inoue S. Bifurcations in resonantly forced water waves. European Journal of Mechanics B/Fluids. 1991;10:31–36.
94. Henderson DM, Miles JW. Faraday waves in 2:1 resonance. J Fluid Mech. 1991;222:449–470.
95. Miles J. Parametrically excited, progressive cross-waves. J Fluid Mech. 1988;186:129–146.

96. Miles J. Parametrically excited, standing cross-waves. *J Fluid Mech.* 1988;186:119–127.
97. Miles J. On Faraday waves. *Journal of Fluid Mechanics.* 1993;248:671–683.
98. Miles J. Faraday waves: rolls versus squares. *Journal of Fluid Mechanics.* 1994;269:353–371.
99. Miles J. On Faraday waves. *Journal of Fluid Mechanics.* 1994;269:372–372.
100. Krasnopolskaya TS, Shvets AY. Dynamical chaos for a limited power supply for fluid oscillations in cylindrical tanks. *Journal of Sound and Vibration.* 2009;322:532–553.
101. Shvets A, Sirenko V. Peculiarities of transition to chaos in nonideal hydrodynamics systems. *Chaotic Modeling and Simulation.* 2012;2:303–310.
102. Stolbetsov V. Nonsmall liquid oscillations in a right circular cylinder. *Fluid Dynamics.* 1967;2(2):41–45.
103. Stolbetsov V. Oscillations of liquid in a vessel in the form of a rectangular parallelepiped. *Fluid Dynamics.* 1967;2(1):44–49.
104. Stolbetsov V. Equations of nonlinear oscillations of a container partially filled with a liquid. *Fluid Dynamics.* 1969;4(2):95–99.
105. Stolbetsov V, Fishkis V. Equations of nonlinear oscillations of a container partially filled with a liquid. *Fluid Dynamics.* 1968;3(5):79–81.
106. Луковский ИА. Нелинейные колебания жидкости в сосудах сложной геометрической формы. Киев: Наук. думка; 1975.
107. Луковский ИА. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. Киев: Наук. думка; 1990.
108. Нариманов ГС, Докучаев ЛВ, Луковский ИА. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. Москва: Машиностроение; 1977.

109. Gavrilyuk I, Lukovsky I, Trotsenko Y, Timokha A. Sloshing in a vertical circular cylindrical tank with an annular baffle. Part 2. Nonlinear resonant waves. *Journal of Engineering Mathematics*. 2007;57:57–78.
110. Lukovskii IA. Variational formulation of nonlinear dynamic boundary problems of a finite liquid volume performing specified spatial motion. *Soviet Applied Mechanics*. 1980;16(2):164–169.
111. Lukovskii IA. Approximate method of solution of nonlinear problems in the dynamics of a liquid in a vessel executing a prescribed motion. *Soviet Applied Mechanics*. 1981;17(2):172–178.
112. Lukovskii IA. Variational methods of solving dynamic problems for fluid-containing bodies. *International Applied Mechanics*. 2004;40(10):1092–1128.
113. Seliger E, Whitham GB. Variational principles in continuum mechanics. *Proceedings of the Royal Society*. 1968;305:1–25.
114. Whitham GB. Non-linear dispersion of water waves. *Journal of Fluid Mechanics*. 1967;27:399–412.
115. Whitham GB. *Linear and nonlinear waves*. New York: Interscience; 1974.
116. Miles J. Nonlinear surface waves in closed basins. *Journal of Fluid Mechanics*. 1976;75(3):419–448.
117. Луковский ИА. Вариационный метод в нелинейных задачах динамики ограниченного объема жидкости со свободной поверхностью. *Колебания конструкций с жидкостью*. Москва: ЦНТИ "Волна 1976. С. 260–264; 1976.
118. Faltinsen OM, Timokha AN. Multimodal analysis of weakly nonlinear sloshing in a spherical tank. *Journal of Fluid Mechanics*. 2013;719:129–164.
119. Gavrilyuk I, Lukovsky MHI. Weakly-nonlinear sloshing in a truncated circular conical tank. *Fluid Dynamics Research*. 2013;45:1–30.

120. Lukovsky I, Timokha A. Modal modeling of nonlinear sloshing in tanks with non-vertical walls. Non-conformal mapping technique. *International Journal of Fluid Mechanics Research*. 2002;29(2):216–242.
121. Lukovsky IA. A mathematical problem of wave liquid motions in reservoir with inclined walls. *Збірник праць Інституту математики НАН України*. 2005;2(1):227–253.
122. Луковский ИА. Применение вариационного принципа к выводу нелинейных уравнений возмущенного движения системы теложидкость. *Динамика космических аппаратов и исследование космического пространства*. Москва, 1986. С. 182–194; 1986.
123. Hermann M, Timokha A. Modal modelling of the nonlinear resonant sloshing in a rectangular tank I: A single-dominant model. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2005;15(9):1431–1458.
124. Lukovsky I, Ovchynnykov D, Timokha A. Asymptotic nonlinear multimodal method for liquid sloshing in an upright circular cylindrical tank. Part 1: Modal equations. *Nonlinear Oscillations*. 2012;14(4):512–525.
125. Lukovsky I, Timokha A. Combining Narimanov–Moiseev’ and Lukovsky–Miles’ schemes for nonlinear liquid sloshing. *Journal of Numerical and Applied Mathematics*. 2011;105(2):69–82.
126. Богоряд И, Дружинин И, Чахлов С. Исследование переходных процессов при больших возмущениях свободной поверхности жидкости в замкнутом отсеке. *Динамика космических аппаратов и исследование космического пространства*. — М., 1986. — С. 194–203; 1986.
127. Дружинин ИА, Чахлов СВ. Расчет нелинейных колебаний жидкости в сосуде (Задача Коши). *Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью*. Труды IV семинара. Томск: изд-во Томск, ун-та, 1981, с.85–91; 1981.
128. Limarchenko OS. Direct method for solution of nonlinear dynamic

- problem on the motion of a tank with fluid. *Dopovidi Akademii Nauk Ukrain's'koi RSR, Series A*. 1978;11(11):99–102.
129. Limarchenko OS. Variational-method investigation of problems of nonlinear dynamics of a reservoir with a liquid. *Soviet Applied Mechanics*. 1980;1(16):74–79.
 130. Limarchenko OS. Application of a variational method to the solution of nonlinear problems of the dynamics of combined motions of a tank with fluid. *Soviet Applied Mechanics*. 1983;11(19):1021–1025.
 131. Limarchenko OS. Direct method of solving problems on the combined spatial motions of a body-fluid system. *Soviet Applied Mechanics*. 1983;8(19):715–721.
 132. Limarchenko OS. Specific features of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscillations of a liquid with free surface in cavities of noncylindrical shape. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2007;59:45–69.
 133. Лимарченко ОС, Ясинский ВВ. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. Киев: КПИ; 1996.
 134. Ружицький І. Математична модель поведінки рідинних вантажів при транспортуванні. *Ринки та товари*. 2013;149:15–31.
 135. Rebouillat S, Liksonov D. Fluid-structure interaction in partially filled liquid containers: A comparative review of numerical approaches. *Computers & Fluids*. 2010;39:739–746.
 136. Buldakov E. Lagrangian modelling of fluid sloshing in moving tanks. *Journal of Fluids and Structures*. 2014;45:1–14.
 137. Elahi R, Passandideh-Fard M, Javanshir A. Simulation of liquid sloshing in 2D containers using the volume of fluid method. *Ocean Engineering*. 2015;96:226–244.

138. Guo L, Morita K. Numerical simulation of 3D sloshing in a liquid-solid mixture using particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2013;95(9):771–790.
139. Sun P, Ming F, Zhang A. Numerical simulation of interactions between free surface and rigid body using a robust SPH method. *Ocean Engineering*. 2015;98:23–49.
140. Wang L, Wang Z, Li Y. A SPH simulation on large-amplitude sloshing for fluids in a two-dimensional tank. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*. 2013;12(1):135–142.
141. Zhang C. Application of an improved semi-Lagrangian procedure to fully-nonlinear sloshing in right circular cylindrical tank. *Applied Ocean Research*. 2015;51:74–92.
142. Zhang C, Li Y, Meng Q. Fully nonlinear analysis of second-order sloshing resonance in a three-dimensional tank. *Computers & Fluids*. 2015;116:88–104.
143. Ovsyannikov L, Makarenko N, Nalimov V. *Nonlinear problems of the theory of surface and internal waves*. Novosibirsk: Nauka; 1985.
144. La Rocca M, Scortino M, Boniforty MA. A fully nonlinear model for sloshing in a rotating container. *Fluid Dynamics Research*. 2000;27:25–229.
145. Shankar P, Kidambi R. A modal method for finite amplitude, nonlinear sloshing. *Pramana*. 2002;59(4):631–651.
146. Faltinsen OM, Firoozkoohi R, Timokha AN. Effect of central slotted screen with a high solidity ratio on the secondary resonance phenomenon for liquid sloshing in a rectangular tank. *Physics of Fluids*. 2011;23:Art. No. 062106.
147. Faltinsen OM, Rognebakke OF, Timokha AN. Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base

- tank with a finite fluid depth. *Physics of Fluids*. 2006;18:Art. No. 012103.
148. Limarchenko OS. Nonlinear properties for dynamic behavior of liquid with a free surface in a rigid moving tank. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. 2000;1(2):105–118.
 149. Limarchenko OS. Nonlinear wave generation on a fluid in a moving parabolic tank. *International Applied mechanics*. 2011;46(8):864–868.
 150. Love JS, Tait MJ. Nonlinear simulation of a tuned liquid damper with damping screens using a modal expansion technique. *Journal of Fluids and Structures*. 2010;26(7–8):1058–1077.
 151. Love JS, Tait MJ. Non-linear multimodal model for tuned liquid dampers of arbitrary tank geometry. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2011;46(8):1065–1075.
 152. Love JS, Tait MJ. Nonlinear multimodal model for TLD of irregular tank geometry and small fluid depth. *Journal of Fluids and Structures*. 2013;43:83–99.
 153. Forbes LK. Sloshing of an ideal fluid in a horizontally forced rectangular tank. *Journal of Engineering Mathematics*. 2010;66(4):395–412.
 154. Hermann M, Timokha A. Modal modelling of the nonlinear resonant fluid sloshing in a rectangular tank II: Secondary resonance. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2008;18(11):1845–1867.
 155. Ikeda T. Nonlinear parametric vibrations of an elastic structure with a rectangular liquid tank. *Nonlinear Dynamics*. 2003;33(1):43–70.
 156. Ikeda T. Autoparametric resonances in elastic structures carrying two rectangular tanks partially filled with liquid. *Journal of Sound and Vibration*. 2007;302(4–5):657–682.
 157. Ikeda T, Nakagawa N. Nonlinear vibrations of a structure caused by water sloshing in a rectangular tank. *Journal of Sound and Vibration*. 1997;201(1):23–41.

158. Lee DY, Choi HS, Faltinsen OM. A study on the sloshing effect on the motion of 2d boxes in regular waves. *Journal of Hydrodynamics*. 2010;22(5):429–433.
159. Lee DY, Jo GN, Kim YH, Choi HS, Faltinsen OM. The effect of sloshing on the sway motions of 2D rectangular cylinders. *Journal of Marine Science and Technology*. 2011;16(3):323–330.
160. Rognebakke OF, Faltinsen OM. Coupling of sloshing and ship motions. *Journal of Ship Research*. 2001;47(3):208–221.
161. Waterhouse DD. Resonant sloshing near a critical depth. *J Fluid Mech*. 1994;21:313–318.
162. Fultz D. An experimental note on finite-amplitude standing gravity waves. *J Fluid Mech*. 1962;13(2):192–212.
163. Ockendon H, Ockendon JH, Johnson AD. Resonant sloshing in shallow water. *J of Fluid Mech*. 1986;167:465–479.
164. Ockendon JR, Ockendon H, Waterhouse DD. Multi-mode resonance in fluids. *J of Fluid Mech*. 1996;315:317–344.
165. Case KM, Parkinson WC. Damping of surface waves in an incompressible liquid. *J Fluid Mech*. 1957;2:172–184.
166. Keulegan G. Energy dissipation in standing waves in rectangular basins. *Journal of Fluid Mechanics*. 1959;6:33–50.
167. Martel A, Nicolas JA, Vega JM. Surface-wave damping in a brimful circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*. 1998;360:213–228.
168. Miles JW. A note on interior vs. boundary-layer damping of surface waves in a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*. 1998;364:319–323.
169. Utsumi M. Theoretical determination of modal damping ratio of sloshing using a variational method. *Journal of Pressure Vessel Technology*. 2011;133(Art. No. 011301-1):1–10.

170. Chester W. Resonant oscillation of water waves I. Theory. Proceeding of Royal Society, London. 1968;308:5–22.
171. Chester W, Bones JA. Resonant oscillation of water waves. II. Experiment. Proceeding of Royal Society, London. 1968;306:23–30.
172. Antuono M, Bouscasse B, Colagrossi A, Lugni C. Two-dimensional modal method for shallow-water sloshing in rectangular basins. *J Fluid Mech.* 2012;700:419–440.
173. Faltinsen OM, Rognebakke OF. Sloshing. In: NAV 2000: International Conference on Ship and Shipping Research: 13th Congress, 19-22 September 2000, Venice (Italy): Proceedings, 2000.; 2000. .
174. Faltinsen OM, Firoozkoobi R, Timokha AN. Analytical modeling of liquid sloshing in a two-dimensional rectangular tank with a slat screen. *Journal of Engineering Mathematics.* 2011;70(1-2):93–109.
175. Faltinsen OM, Firoozkoobi R, Timokha AN. Steady-state liquid sloshing in a rectangular tank with a slat-type screen in the middle: quasi-linear modal analysis and experiments. *Physics of Fluids.* 2011;23:Art. No. 042101.
176. Blevins RD. *Applied Fluid Dynamics.* Krieger Publishing Company, Malabar, FL; 1992.
177. Hamelin JA, Love JS, Tait MJ, Wilson JC. Tuned liquid dampers with a Keulegan-Carpenter. *Journal of Fluids and Structures.* 2013;43:271–286.
178. Love JS, Tait MJ. Parametric depth ratio study on tuned liquid dampers: Fluid modelling and experimental work. *Computers & Fluids.* 2013;79:13–26.
179. Faltinsen OM, Rognebakke OF, Timokha AN. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin. *J Fluid Mech.* 2005;487:1–42.

180. Faltinsen OM, Rognebakke OF, Timokha AN. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin. Part 3. Base ratio perturbation. *J Fluid Mech.* 2006;551:93–116.
181. Faltinsen OM, Rognebakke OF, Timokha AN. Classification of three-dimensional nonlinear sloshing in a square-base tank with finite depth. *Journal of Fluids and Structures.* 2005;20(1):81–103.
182. Bridges TJ. On secondary bifurcation of three-dimensional standing waves. *SIAM Journal of Applied Mathematics.* 1986;47:40–59.
183. Bridges TJ. Secondary bifurcation and change of type for type three dimensional standing waves in finite depth. *Journal of Fluid Mechanics.* 1987;179:137–153.
184. Faltinsen OM, Rognebakke OF, Timokha AN. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin. Part 2. Effect of higher modes. *J Fluid Mech.* 2005;523:199–218.
185. Луковский ИА, Пилькевич АМ. О движении жидкости в колеблющемся прямом круговом цилиндре // Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости многомерных систем. Киев: Ин-т математики АН УССР; 1985. — С. 3–11.
186. Abramson HN, Chu WH, Kana DD. Some studies of nonlinear lateral sloshing in rigid containers. *Journal of Applied Mechanics.* 1966;33(4):66–74.
187. Ikeda T, Ibrahim RA. Nonlinear random responses of a structure parametrically coupled with liquid sloshing in a cylindrical tank. *Journal of Sound and Vibration.* 2005;284:75–102.
188. Gavriilyuk I, Lukovsky I, Timokha AN. A multimodal approach to nonlinear sloshing in a circular cylindrical tank. *Hybrid Methods in Engineering.* 2000;2(4):463–483.
189. Royon-Lebeaud A, Hopfinger E, Cartellier A. Liquid sloshing and wave

- breaking in circular and square-base cylindrical containers. *Journal of Fluid Mechanics*. 2007;577:467–494.
190. Lukovsky I, Timokha A. Combining Narimanov–Moiseev’ and Lukovsky–Miles’ schemes for nonlinear liquid sloshing. *Journal of Numerical and Applied Mathematics*. 2011;105:69–82.
191. Пилькевич АМ. Анализ вынужденных колебаний жидкости в цилиндрических соосных резервуарах // Прикладные методы исследования физико-механических процессов. Киев: Институт Математики; 1979. — С. 49–63.
192. Пилькевич АМ. О построении приближенных решений нелинейных уравнений волновых движений жидкости в сосуде // Динамика и устойчивость механических систем. Киев: Институт Математики; 1980. — С. 16–21.
193. Takahara H, Kimura K. Frequency response of sloshing in an annular cylindrical tank subjected to pitching excitation. *Journal of Sound and Vibration*. 2012;331(13):3199–3212.
194. Takahara H, Hara K, Ishida T. Nonlinear liquid oscillation in a cylindrical tank with an eccentric core barrel. *Journal of Fluids and Structures*. 2012;35:120–132.
195. Lukovsky IO, Solodun OV. A nonlinear model of liquid motions in cylindrical compartment tanks. *Dopovidi NANU*. 2001;N. 5:51–55.
196. Lukovsky IO, Solodun OV. Study of the forced liquid sloshing in circular tanks by using a seven-mode model of the third order // Problems of the dynamics and stability of multidimensional systems. Transactions of Institute of Mathematics of NASU Kiev: Institute of Mathematics. 2003;47:161–179.
197. Луковський ІО. До побудови розв’язку нелінійної задачі про вільні коливання рідини в посудинах довільної геометричної форми. *Доп АН УРСР Сер А*. 1969;№ 3:207–210.

198. Луковский ИА. Вариационный метод решения задачи о нелинейных колебаниях жидкости в сосудах сложной геометрической формы. Динамика и устойчивость многомерных систем. Киев: Институт Математики; 1977.
199. Bauer HF. Flüssigkeitsschwingungen in Kegelbehälterformen. Acta Mechanica. 1982;43:185–200.
200. Dokuchaev LV. On the solution of a boundary value problem on the sloshing of a liquid in conical cavities. Applied Mathematics and Mechanics (PMM). 1964;28(1):601–602.
201. Луковский ИА, Билык АН. Вынужденные нелинейные колебания жидкости в подвижных осесимметричных конических сосудах. Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости многомерных систем. Киев: Ин-т математики АН УССР; 1985.
202. Луковский ИА, Билык АН. Исследование вынужденных велинейных колебаний жидкости в конических сосудах с малым углом раствора // Прикладные задачи динамики и устойчивости систем. Киев: Институт Математики. 1987;р. 5–14.
203. Gavrilyuk I, Hermann M, Lukovsky I, Solodun O, Timokha A. Natural sloshing frequencies in rigid truncated conical tanks. Engineering Computations. 2008;25(6):51–540.
204. Gavrilyuk I, Lukovsky MHI, Solodin O, Timokha A. Multimodal method for linear liquid sloshing in a rigid tapered conical tank. Engineering Computations. 2012;29(2):198–220.
205. Gavrilyuk IP, Lukovsky IA, Timokha AN. Linear and nonlinear sloshing in a circular conical tank. Fluid Dynamics Research. 2005;37:399–429.
206. Луковский ИА, Солодун АВ, Тимоха АН. Собственные колебания жидкости в усеченных конических баках. Акустичний вісник. 2006;Т. 9, № 3:42–61.

207. Lukovsky IA. On solving spectral problems on linear sloshing in conical tanks. *Доповіді НАН України*. 2002;N 5:53–58.
208. Gavrilyuk I, Lukovsky I, Timokha AN. Sloshing in circular conical tank. *Hybrid Methods in Engineering*. 2003;3(4):322–37.
209. Casciati F, Stefano AD, Matta E. Simulating a conical tuned liquid damper. *Simulation Modelling Practice and Theory*. 2003;11:353–370.
210. Martel A, Nicolas JA, Vega JM. Sistemi di attenuazione della risposta dinamica a massa oscillante solida e fluida: Ph.D. thesis. Politecnico di Torino, Torino; 2002.
211. Barkowiak K, Gampert B, Siekmann J. On liquid motion in a circular cylinder with horizontal axis. *Acta Mechanica*. 1985;54:207–220.
212. Barnyak M, Gavrilyuk I, Hermann M, Timokha A. Analytical velocity potentials in cells with a rigid spherical wall. *ZAMM*. 2011;91(1):38–45.
213. Faltinsen OM, Timokha AN. Nonlinear sloshing in a spherical tank. In: *OMAW 2013. Proceeding of the ASME 32nd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*. June 9-14, Nantes, France.; 2013. .
214. Chernova M, Timokha A. Sloshing in a two-dimensional circular tank. Weakly-nonlinear modal equations. *Transactions of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*. 2013;10(3):262–283.
215. Faltinsen OM, Timokha AN. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square-base basin. Part 4. Oblique forcing and linear viscous damping. *Journal of Fluid Mechanics*. 2017;822:139–169.
216. Billingham J. Nonlinear sloshing in zero gravity. *Journal of Fluid Mechanics*. 2002;464:365–391.
217. Billingham J. On a model for the motion of a contact line on a smooth solid surface. *European Journal of Applied Mathematics*. 2006;17:347–382.

218. Reclari M. Hydrodynamics of orbital shaken bioreactors. Ecole Polytechnique Federale de Lausanne.; 2013.
219. Bouvard J, Herreman W, Moisy F. Mean mass transport in an orbitally shaken cylindrical container. *Physical Review Fluids*. 2017;2(Paper No 084801).
220. Ducci A, Weheliye WH. Orbitally shaken bioreactors – viscosity effects on flow characteristics. *AIChE Journal*. 2014;60:3951–3968.
221. Weheliye W, Yianneskis M, Ducci A. On the fluid dynamics of shaken bioreactors – flow characterization and transition. *AIChE Journal*. 2013;59:334–344.
222. Reclari M, Dreyer M, Tissot S, Obreschkow D, Wurm FM, Farhat M. Surface wave dynamics in orbital shaken cylindrical containers. *Physics of Fluids*. 2014;26:1–11. Paper ID 052104.
223. Faltinsen OM, Lukovsky IA, Timokha AN. Resonant sloshing in an upright tank. *Journal of Fluid Mechanics*. 2016;804:608–645.
224. Lukovsky IA, Timokha AN. Variational method in nonlinear problems of the dynamics of a limited liquid volume. Kiev: Institute of Mathematics of NASU.; 1995.
225. Lukovsky IA. Nonlinear dynamics: mathematical models for rigid bodies with a liquid. vol. 105. De Gruyter.; 2015.
226. Henderson DM, Miles JW. Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact angle. *Journal of Fluid Mechanics*. 1994;275:285–299.
227. Barnyak MY, Leshchuk OP. Construction of solutions of the problem of free oscillations of viscous fluid in a half-filled spherical tank. *Nonlinear Oscillations*. 2008;11(4):461–483.
228. Landau LD, Lifshitz EM. *Hydrodynamics*. M.: Nauka; 1986.

229. Faltinsen OM, Timokha AN. Resonant three-dimensional Nonlinear sloshing in a square-base basin. Part 4. Oblique forcing and linear viscous damping. *Journal of Fluid Mechanics*. 2017;822:139–169.
230. Miles JW. Internally resonant surface waves in circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*. 1984;149:1–14.
231. Ikeda T, Ibrahim RA, Harata Y, Kuriyama T. Nonlinear liquid sloshing in a square tank subjected to obliquely horizontal excitation. *Journal of Fluid Mechanics*. 2012;700:304–328.
232. Prandtl L. Erzeugung von Zirkulation beim Schütteln von Gefäßen. *ZAMM*. 1949;29:8–9.
233. Hutton RE. Fluid-particle during rotary sloshing. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*. 1964;31:145–163.

ДОДАТОК

Цей додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Raynovskyy I.A. Damped steady-state resonant sloshing in a circular base container / I.A. Raynovskyy, A.N. Timokha // Fluid Dynamics Research. — 2018. — **50**, No. 4. Paper ID 045502. — P. 1–27.
2. Raynovskyy I.A. Steady-state resonant sloshing in an upright cylindrical container performing a circular orbital motion / I. Raynovskyy, A. Timokha // Mathematical Problems in Engineering. — 2018. — **2018**, Paper ID 5487178. — P. 1–9.
3. Raynovskyy I.A. Resonant liquid sloshing in an upright circular tank performing a periodic motion / I.A. Raynovskyy, A.N. Timokha // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2016. — No 2 (**122**). — P. 71–82.
4. Raynovskyy I.A. Damped resonant steady-state sloshing in an upright circular tank / I.A. Raynovskyy, A.N. Timokha // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2017. — **14**, № 2. — P. 180–204.
5. Timokha A.N. The damped sloshing in an upright circular tank due to an orbital forcing / A.N. Timokha, I.A. Raynovskyy // Доповіді Національної академії наук України. — 2017. — № 10. — P. 48–53.
6. Tymokha A. Resonant steady-state sloshing in upright tanks performing a three-dimensional periodic motion / Тимоха О.М., Райновський І.А. // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Серія "Фізико-математичні науки". — 2017. — № 3. — С. 225–229.
7. Timokha A.N. Resonant Steady-State Sloshing in Upright Tanks: Effect of Three-Dimensional Excitations and Viscosity / A.N. Ti-

mokha, I.A. Raynovskyy // ASME 2018, 37th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering. — **Vol. 9**, Paper No. OMAE2018-77534. Madrid, Spain, June 17 – 22, 2018; doi: 10.1115/OMAЕ2018-77534.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Raynovskyy I.A. // The Damping Effect on Steady-State Resonant Sloshing in an Upright Circular Tank / I.A. Raynovskyy // Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження Ю.О. Митропольського, 7–10 червня 2017, Київ, Україна, — С. 52.
2. Raynovskyy I.A. // Steady-State Resonant Damped Sloshing in Upright Circular Tank / I.A. Raynovskyy // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2017", 23 – 25 травня 2017 р., Львів, — <http://iarpmm.lviv.ua/chyt2017/abstracts/Raynovskyy.pdf> .
3. Raynovskyy I.A. // Resonant steady-state sloshing in upright tanks performing a three-dimensional periodic motion / I.A. Raynovskyy// IV Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки" (28 – 30 серпня, 2017, м. Київ, Україна), — С. 92.
4. Timokha A.N. Resonant Steady-State Sloshing in Upright Tanks: Effect of Three-Dimensional Excitations and Viscosity / A.N. Timokha, I.A. Raynovskyy // ASME 2018, 37th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering. — **Vol. 9**, Paper No. OMAE2018-77534. Madrid, Spain, June 17 – 22, 2018; doi: 10.1115/OMAЕ2018-77534.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на:

1. Семінарах відділу математичних проблем механіки та теорії керування Інституту математики НАН України (протягом 2016-2018 років).
2. Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю.О. Митропольського (червень 2017 р., Київ).
3. IV Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки" (серпень 2017 р., Київський Національний Університет ім. Т. Шевченка, Київ)
4. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2017" (травень 2017 р., Львів).
5. OMAE – 37th International Conference on Ocean, Offshore & Arctic Engineering (червень 2018р., Мадрид, Іспанія).
6. Семінарі "Математичні проблеми механіки та обчислювальна математика" Інституту математики НАН України під керівництвом академіків НАН України І.О. Луковського та В.Л. Макарова (в повному обсязі – 20.09.2018 р.).