НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАСЛЮК ГАННА ОЛЕКСІЇВНА

УДК 517.927

ОДНОВИМІРНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРОМ У ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПРОСТОРАХ ДРОБОВОЇ ГЛАДКОСТІ

01.01.02 — диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Національному технічному університеті України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського".

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
МИХАЙЛЕЦЬ Володимир Андрійович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу нелінійного аналізу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, доцент
ЖУРАВЛЬОВ Валерій Пилипович,
Житомирський національний агроекологічний університет,
м. Житомир,
завідувач кафедри вищої та прикладної математики;

доктор фізико-математичних наук, доцент
САМУСЕНКО Петро Федорович,
Національний педагогічний університет
імені М. П. Драгоманова, м. Київ,
професор кафедри теоретичних основ інформатики.

Захист дисертації відбудеться " 5 " лютого 2019 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д. 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий " 28 " грудня 2018 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради,
доктор фізико-математичних наук, професор **ПЕЛЮХ Г. П.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню властивостей найбільш широких класів крайових задач для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків, залежних від параметру, розв'язки яких пробігають простір Гельдера або простір Слободецького.

Актуальність теми. Питання про обґрунтування граничного переходу стосовно розв'язків задач Коші та крайових задач досліджувалися багатьма математиками. У роботах І. І. Гіхмана (1952), М. А. Красносельського і С. Г. Крейна (1955), Я. Курцвейля і З. Ворела (1957), А. М. Самойленка (1962 – 1965) встановлено фундаментальні результати про неперервну залежність за параметром розв'язків задач Коші для нелінійних систем. Для лінійних систем ці результати були уточнені та доповнені А. Ю. Лєвіним (1967 – 1973), З. Опялем (1967), В. Т. Рейдом (1967) і Нгуен Тхе Хоаном (1993).

Широкий клас лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку досліджувався І. Т. Кігурадзе (1975 – 2003) і М. Ашордіа (1996). Розв'язки цих задач є абсолютно неперервними функціями на відрізку $[a, b]$, а крайові умови задані у вигляді $By = q$, де $B : C([a, b], \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^m$ є довільний лінійний неперервний оператор (m — число рівнянь системи). Було встановлено умови неперервної залежності за параметром розв'язків у просторі $C([a, b], \mathbb{R}^m)$. Узагальнення цих результатів для комплекснозначних функцій та систем диференціальних рівнянь вищих порядків отримано у роботах В. А. Михайлеця, Н. В. Реви, Т. І. Кодлюк і Г. О. Чеханової.

В. А. Михайлецем і його учнями (2008 – 2015) були введені і досліджені максимально широкі класи крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, які розглядаються у просторах Соболєва (Рева Н. В., Кодлюк Т. І., Гнип Є. В.) або у просторах неперервно диференційовних функцій (Чеханова Г. О., Солдатов В. О.). Показниками гладкості функцій для вказаних функціональних просторів є цілі додатні числа. Було доведено фредгольмовість таких задач, знайдено достатні умови їх коректної розв'язності та неперервної залежності за параметром їх розв'язків у вказаних просторах.

Нещодавно з'ясувалося, що встановлені раніше конструктивні достатні умови є також і необхідними.

Конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку було доведено В. А. Михайлецем, О. О. Мурачем, В. О. Солдатовим (2016) у просторах Гельдера та Є. В. Гнип, В. А. Михайлецем (2016) у просторах

Слободецького. Для систем вищих порядків вказаний критерій доведено щодо просторів цілої гладкості — неперервно диференційованих функцій (Мурач О. О., Солдатов В. О.) і Соболєва (Гнип Є. В., Михайлець В. А., Мурач О. О.).

Ці результати були застосовані для дослідження багатоточкових крайових задач, матриць Гріна та використані у спектральній теорії диференціальних операторів із сингулярними коефіцієнтами. Але у деяких задачах теорії диференціальних рівнянь використовуються не лише простори цілої гладкості, а й простори, де показником гладкості може бути і дробове число. Найбільш відомими серед них є простори Гельдера та простори Слободецького.

У цьому зв'язку є актуальними дослідження розв'язків крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків у просторах Гельдера і Слободецького.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного технічного університету України „Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" в рамках держбюджетної науково-дослідної роботи № 2810Ф „Дослідження асимптотичних властивостей псевдорегулярних функцій та узагальнення процесів відновлення" (номер державної реєстрації 0115U000371).

Мета і завдання дослідження.

Метою дослідження дисертаційної роботи є встановлення конструктивних необхідних і достатніх умов неперервної залежності за параметром розв'язків крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків у просторах Гельдера і Слободецького.

Об'єктом дослідження є одновимірні крайові задачі, найбільш загальні щодо просторів Гельдера або Слободецького.

Предметом дослідження є характер залежності за параметром розв'язків таких крайових задач.

Завдання дослідження:

1. Ввести максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$, де $n \geq 0$ і $0 < \alpha \leq 1$.

2. Довести, що уведені задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі функціональних просторів $(C^{n+r,\alpha})^m$ і $(C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^{rm}$ і встановити критерій однозначної розв'язності цих задач.

3. Для крайових задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановити конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$ та довести, що похибка і нев'язка цих розв'язків мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Гельдера.

4. Ввести максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Слободецького $(W_p^{s+r})^m$, де $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$, $p \in (1, \infty)$.

5. Довести, що уведені задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі функціональних просторів $(W_p^{s+r})^m$ і $(W_p^s)^m \times \mathbb{C}^{rm}$ і встановити критерій однозначної розв'язності цих задач.

6. Для крайових задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановити конструктивні достатні умови неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі Слободецького $(W_p^{s+r})^m$.

7. Ввести новий широкий клас залежних від параметра $\varepsilon \geq 0$ багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$, де $n \geq 0$ і $0 < \alpha \leq 1$. Встановити достатні умови неперервності за параметром цих розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі $(C^{n+r,\alpha})^m$.

8. Довести, що розв'язок довільної крайової задачі у просторі $C^{(n+1)}$, можна апроксимувати в $C^{(n+1)}$ розв'язками багатоточкових крайових задач.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використано методи теорії звичайних диференціальних рівнянь та функціонального аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати дисертації, запропоновані до захисту, є новими і полягають у такому:

1. Введено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$, де $n \geq 0$ і $0 < \alpha \leq 1$.

2. Доведено, що уведені задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі функціональних просторів $(C^{n+r,\alpha})^m$ і $(C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^{rm}$ і встановлено критерій однозначної розв'язності цих задач.

3. Для крайових задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$ та доведено, що похибка і нев'язка цих розв'язків мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Гельдера.

4. Введено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Слободецького $(W_p^{s+r})^m$, де $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$, $p \in (1, \infty)$.

5. Доведено, що уведені задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі функціональних просторів $(W_p^{s+r})^m$ і $(W_p^s)^m \times \mathbb{C}^{rm}$ і встановлено критерій однозначної розв'язності цих задач.

6. Для крайових задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивні достатні умови неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі Слободецького $(W_p^{s+r})^m$.

7. Введено новий широкий клас залежних від параметра $\varepsilon \geq 0$ багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$, де $n \geq 0$ і $0 < \alpha \leq 1$. Встановлено достатні умови неперервності за параметром цих розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі $(C^{n+r,\alpha})^m$.

8. Доведено, що розв'язок довільної крайової задачі у просторі $C^{(n+1)}$, можна апроксимувати в $C^{(n+1)}$ розв'язками багатоточкових крайових задач.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати та методика їх отримання можуть бути використані у подальшому розвитку теорії одновимірних крайових задач.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану дисертації та постановка задач належать науковому керівнику — доктору фізико-математичних наук, професору В. А. Михайлецю. Основні наукові результати, які винесено на захист, отримано здобувачкою самостійно. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включено лише ті результати, що належать дисертантці.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

— семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник семінару — академік НАН України А. М. Самойленко);

— семінарі кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного технічного університету України „КПІ імені Ігоря Сікорського“ (керівник семінару — доктор фізико-математичних наук, професор Н. О. Вірченко);

— семінарі кафедри математики та економіки Національного університету „Чернігівський колегіум“ імені Т. Г. Шевченка (керівник семінару — доктор фізико-математичних наук О. О. Мурач);

— Чотирнадцятій міжнародній науково-практичній конференції для студентів, аспірантів та молодих науковців „Шевченківська весна – 2016“ (Україна, Київ, 6 – 8 квітня 2016 року);

— П'ятій міжнародній конференції молодих науковців з диференціальних рівнянь і застосувань, присвяченій Я. Б. Лопатинському (Україна, Київ, 9 – 11 листопада 2016 року);

— Міжнародній конференції молодих математиків присвяченій 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917 – 2008) (Україна, Київ, 7 – 10 червня 2017 року);

— Сьомій всеукраїнській науковій конференції студентів, аспірантів та молодих вчених з математики (Україна, Київ, 19 – 20 квітня 2018 року).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковано в 9 наукових працях. Серед них 5 статей [1, 2, 3, 4, 5] — у фахових наукових виданнях, з яких 3 статті [2, 4, 5] — в журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних Scopus і Web of Science. Роботи [6, 7, 8, 9] опубліковано у матеріалах наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотацій українською і англійською, вступу, чотирьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел, що налічує 90 найменувань, і додатку, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації. Повний обсяг роботи складає 120 сторінок друкованого тексту.

Основний зміст дисертації

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, зазначено наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувача, вказано також де було апробовано та опубліковано результати дисертації.

У *першому* розділі обговорено об'єкт і предмет дослідження.

У *другому* розділі дисертації введено і досліджено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$ на відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$, розв'язки яких пробігають простір Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$, де $n \geq 0$ і $0 < \alpha \leq 1$.

Розглядається крайова задача для системи m лінійних диференціальних рівнянь r-го порядку

$$Ly(t) \equiv y^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) y^{(r-j)}(t) = f(t), \quad a \leq t \leq b, \tag{1}$$

$$By = c. \tag{2}$$

Тут вектор-функція $y \in (C^{n+r,\alpha})^m$ є шуканою, а всі матриці-функції $A_{r-j} \in (C^{n,\alpha})^{m\times m}$, де $j \in \{1, \dots, r\}$, вектор-функція $f \in (C^{n,\alpha})^m$, лінійний неперервний оператор

$$B = (B_1, \dots, B_r) : (C^{n+r,\alpha})^m \to \mathbb{C}^{rm} \tag{3}$$

і вектор $c \in \mathbb{C}^{rm}$ є довільно вибраними, причому вектор-функції і числові вектори подано у вигляді стовпців. Оператор B зручно представляти як набір операторів $B_1, \dots, B_r$ кожен з яких діє у простір $\mathbb{C}^m$, а отже і крайову умову (2) можна трактувати як r неоднорідних крайових умов.

Якщо вектор-функція f пробігає весь простір $(C^{n,\alpha})^m$, то розв'язок y системи (1) пробігає весь простір $(C^{n+r,\alpha})^m$. Отже, крайова умова (2) з неперервним оператором (3) є найбільш загальною для системи диференціальних рівнянь (1). Ця умова охоплює як усі відомі типи класичних крайових умов (умови задачі Коші, різні багатоточкові умови, інтегральні умови, умови змішаних крайових задач), так і різні некласичні крайові умови. Останні можуть містити похідні шуканих функцій порядку k, де $r \leq k \leq n + r$. Пов'яжемо з задачею лінійний оператор

$$(L, B) : (C^{n+r,\alpha})^m \to (C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^{rm}. \tag{4}$$

Теорема 2.1. *Лінійний оператор* (4) *обмежений і фредгольмів з індексом нуль.*

Сформулюємо критерій оборотності цього оператора. Для кожного номера $k \in \{0, \dots, r-1\}$ розглянемо матричну задачу Коші $Y_k^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) Y_k^{(r-j)}(t) = 0$, $a \leq t \leq b$, $Y_k^{(j)}(t_0) = \delta_{k,j} I_m$, $\quad j = 0, \dots, r-1$. Тут $Y_k(t) = (y_k^{\alpha,\beta}(t))_{\alpha,\beta=1}^{m}$ — шукана $m \times m$ — матриця-функція, точку $t_0 \in [a,b]$ вибрано довільно, $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера, а I_m — одинична матриця порядку m. Ця задача є сукупністю m задач Коші, які є окремим випадком задачі (1), (2). Єдиний розв'язок $Y_k(t)$ матричної задачі Коші належить до $(C^{n+r,\alpha})^{m\times m}$. Через $[BY]$ позначимо квадратну матрицю порядку rm, яка утворюється в результаті дії оператора B на стовпці матриць Y_k, $k \in \{0, \dots, r-1\}$.

Теорема 2.2. *Оператор* (4) *оборотний тоді і тільки тоді, коли матриця* $[BY]$ *невироджена.*

Зафіксуємо число $\varepsilon_0 > 0$. Розглянемо лінійну крайову задачу вигляду (1), (2) залежну від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) \equiv y^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,\varepsilon) y^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \tag{5}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = c(\varepsilon). \tag{6}$$

Для крайової задачі (5), (6) розглянемо такі

Граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(2.I) $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \to A_{r-j}(\cdot,0)$ в $(C^{n,\alpha})^{m\times m}$ для кожного номера $j \in \{1, \dots, r\}$;

(2.II) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ в $\mathbb{C}^{rm}$ для довільної вектор-функції $y \in (C^{n+r,\alpha})^m$.

Крім того, розглядається

Умова (2.0). Гранична однорідна крайова задача

$$L(0)y(t,0) = 0, \quad a \leq t \leq b,$$
$$B(0)y(\cdot,0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

Введемо

Базове означення розд. 2. Говоримо, що розв'язок крайової задачі (5), (6) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$ у просторі $(C^{n+r,\alpha})^m$, якщо виконуються такі дві умови:

(∗) Існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ і будь-яких правих частин $f(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^m$ та $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$, ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n+r,\alpha})^m$.

(∗∗) Із збіжності правих частин

$$f(\cdot, \varepsilon) \to f(\cdot, 0) \text{ в } (C^{n,\alpha})^m, \quad c(\varepsilon) \to c(0) \text{ в } \mathbb{C}^{rm} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+$$

випливає збіжність розв'язків

$$y(\cdot, \varepsilon) \to y(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad (C^{n+r,\alpha})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ .$$

Теорема 2.3. *Для того, щоб розв'язок крайової задачі* (5), (6) *неперервно залежав від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *у просторі* $(C^{n+r,\alpha})^m$ *необхідно і достатньо, щоб ця задача задовольняла умову* (2.0) *і граничні умови* (2.I) *та* (2.II).

Це — основний результат другого розділу. Для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку сформульовану теорему доведено В. А. Михайлецем, О. О. Мурачем та В. О. Солдатовим (2016).

Для крайової задачі (5), (6) розглянемо нев'язку її розв'язку

$$d_{n,\alpha}(\varepsilon) := \|L(\varepsilon)y(\cdot, 0) - f(\cdot, \varepsilon))\|_{n,\alpha} + |B(\varepsilon)y(\cdot, 0) - c(\varepsilon)|,$$

де $\|\cdot\|_{n,\alpha}$ — норма у просторі $(C^{n,\alpha})^m$, а $|\cdot|$ — норма у просторі $\mathbb{C}^{rm}$. При цьому $y(\cdot, 0)$ розглядаємо як наближений розв'язок цієї задачі.

Теорема 2.4. *Нехай крайова задача* (5), (6) *задовольняє умову* (2.0) *і граничні умови* (2.I) *та* (2.II). *Тоді існують додатні числа* $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, $\varkappa_1$ *і* $\varkappa_2$ *такі, що для довільного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ *виконується двобічна оцінка*

$$\varkappa_1 \, d_{n,\alpha}(\varepsilon) \leq \|y(\cdot, 0) - y(\cdot, \varepsilon)\|_{n+r,\alpha} \leq \varkappa_2 \, d_{n,\alpha}(\varepsilon).$$

Тут числа ε_2, $\varkappa_1$ *і* $\varkappa_2$ *не залежать від вектор-функцій* $y(\cdot, 0)$ *і* $y(\cdot, \varepsilon)$.

Отже, похибка і нев'язка розв'язку $y(\cdot, \varepsilon)$ крайової задачі (5), (6) мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$.

У *третьому* розділі дисертації введено і досліджено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$ на відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$, розв'язки яких пробігають простір Слободецького $(W_p^{s+r})^m$, де дробове число $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$, $p \in (1, \infty)$, $s := [s] + \{s\}$, $[s]$ — ціла частина, а $\{s\}$ — дробова частина числа s; тут $\{s\} \in (0, 1)$.

Розглядається крайова задача для системи m лінійних диференціальних рівнянь r-го порядку

$$Ly(t) \equiv y^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) y^{(r-j)}(t) = f(t), \quad a \le t \le b, \tag{7}$$

$$By = c. \tag{8}$$

Тут вектор-функція $y \in (W_p^{s+r})^m$ є шуканою, а всі матриці-функції $A_{r-j} \in (W_p^s)^{m\times m}$, вектор-функція $f \in (W_p^s)^m$, лінійний неперервний оператор

$$B = (B_1, \dots, B_r) : (W_p^{s+r})^m \to \mathbb{C}^{rm} \tag{9}$$

і вектор $c \in \mathbb{C}^{rm}$ є довільно вибраними. Як і раніше, числові вектори і вектор-функції подано у вигляді стовпців. Оператор B зручно представляти як набір операторів $B_1, \dots, B_r$ кожен з яких діє у простір $\mathbb{C}^m$, а отже і крайову умову (2) можна трактувати як r неоднорідних крайових умов.

Якщо вектор-функція f пробігає весь простір $(W_p^s)^m$, то розв'язок y системи (7) пробігає весь простір $(W_p^{s+r})^m$. Отже, крайова умова (8) з неперервним оператором (9) є найбільш загальною для системи диференціальних рівнянь (7). Вона охоплює як усі класичні види крайових умов, так і некласичні умови, що містять похідні (класичні) аж до порядку k, де $r \le k < s + r - 1/p$.

Пов'яжемо з цією задачею лінійний оператор

$$(L, B) : (W_p^{s+r})^m \to (W_p^s)^m \times \mathbb{C}^{rm}. \tag{10}$$

Теорема 3.1. *Лінійний оператор* (10) *обмежений і фредгольмів з індексом нуль.*

Сформулюємо критерій оборотності цього оператора. Як і у другому розділі, для кожного номера $k \in \{0, \dots, r-1\}$ розглянемо матричну задачу Коші $Y_k^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) Y_k^{(r-j)}(t) = 0$, $a \le t \le b$, $Y_k^{(j)}(t_0) = \delta_{k,j} I_m, \quad j = 0, \dots, r-1$. Тут $Y_k(t) = (y_k^{\alpha,\beta}(t))_{\alpha,\beta=1}^m$ — шукана $m \times m$ — матриця-функція, точку $t_0 \in [a, b]$ вибрано довільно, $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера, а I_m — одинична матриця порядку m. Ця задача є сукупністю m задач Коші, які є окремим випадком задачі (7), (8). Єдиний розв'язок $Y_k(t)$ матричної задачі Коші належить до $(W_p^{s+r})^{m\times m}$. Через $[BY]$ позначимо квадратну матрицю порядку rm, яка утворюється в результаті дії оператора B на стовпці матриць Y_k, $k \in \{0, \dots, r-1\}$.

Теорема 3.2. *Оператор* (10) *оборотний тоді і тільки тоді, коли матриця* $[BY]$ *є невироджена.*

Зафіксуємо додатне число $\varepsilon_0 > 0$. Розглянемо сім'ю крайових задач вигляду (7), (8), залежних від числового параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) \equiv y^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,\varepsilon)y^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \le t \le b, \tag{11}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = c(\varepsilon). \tag{12}$$

Умови, достатні для однозначної розв'язності цієї задачі і неперервної залежності її розв'язку за параметром дає така теорема.

Теорема 3.3. *Припустимо, що крайова задача* (7), (8) *задовольняє умову* (2.0) *і такі граничні умови:*

(i) $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \to A_{r-j}(\cdot,0)$ *в* $(W_p^s)^{m\times m}$ *при* $\varepsilon \to 0+$ *для кожного номера* $j \in \{1,\dots,r\}$;

(ii) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ *при* $\varepsilon \to 0+$ *для кожного* $y \in (W_p^{s+r})^m$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon \ge 0$ *ця задача має єдиний розв'язок* $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{s+r})^m$.

Якщо, крім того,

(iii) $f(\cdot,\varepsilon) \to f(\cdot,0)$ *в* $(W_p^s)^m$ *при* $\varepsilon \to 0+$,

(iv) $c(\varepsilon) \to c(0)$ *в* $\mathbb{C}^{rm}$ *при* $\varepsilon \to 0+$,

то цей розв'язок задовольняє граничну умову

$$y(\cdot,\varepsilon) \to y(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (W_p^{s+r})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ .$$

Це — основний результат третього розділу. Для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку сформульовану теорему доведено Є. В. Гнип (2016).

У *четвертому* розділі дисертації подано застосування основних результатів другого розділу до одновимірних багатоточкових крайових задач, залежних від параметра. Введено і досліджено новий широкий клас багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \ge 2$, розв'язки яких пробігають простір Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$, де $n \ge 0$ і $0 < \alpha \le 1$. Для цих задач, залежних від параметра $\varepsilon \ge 0$, встановлено достатні умови неперервності за параметром цих розв'язків при $\varepsilon = 0$ у нормованому просторі $(C^{n+r,\alpha})^m$.

Нехай довільно вибрано відрізок $[a,b] \subset \mathbb{R}$, цілі числа $m \geq 1$, $n \geq 0$ і $r \geq 2$ та дійсне число $\alpha \in (0,1]$. Розглянемо на відрізку $[a,b]$ систему (5) лінійних диференціальних рівнянь порядку r, залежних від числового параметра $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$, де фіксовано число $\varepsilon_0 > 0$.

Довільно виберемо натуральні числа p і $q_1,\dots,q_p$. Для кожного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ розглянемо таку багатоточкову крайову умову:

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) \equiv \sum_{j=0}^{p}\sum_{k=1}^{q_j}\sum_{l=0}^{n+r}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon),\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{13}$$

Тут усі матриці $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm\times m}$, точки $t_{j,k}(\varepsilon) \in [a,b]$ і вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ довільно задані. Ця умова має сенс для кожної вектор-функції $y(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n+r,\alpha})^m$.

Використання у багатоточковій крайовій умові (13) сум за індексами j і k зумовлено подальшими припущеннями щодо поведінки точок $t_{j,k}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ у залежності від значень параметра j. Припускаємо, що для кожного номера $j \in \{1,\dots,p\}$ усі точки $t_{j,k}(\varepsilon)$, де $k \in \{1,\dots,q_j\}$, мають спільну границю при $\varepsilon \to 0+$. Це припущення не робиться для точок $t_{0,k}(\varepsilon)$, де $k \in \{1,\dots,q_0\}$.

Розглянемо у граничному випадку $\varepsilon = 0$ таку крайову умову:

$$B(0)y(\cdot,0) \equiv \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=0}^{n+r}\beta_{j}^{(l)}y^{(l)}(t_j,0) = c(0). \tag{14}$$

Тут усі матриці $\beta_{j}^{(l)} \in \mathbb{C}^{rm\times m}$, точки $t_j \in [a,b]$ та вектор $c(0) \in \mathbb{C}^{rm}$ є довільно заданими.

Звісно, для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ лінійне відображення $y \mapsto B(\varepsilon)y$, де $y \in (C^{n+r,\alpha})^m$, є обмеженим оператором

$$B(\varepsilon)\colon (C^{n+r,\alpha})^m \to \mathbb{C}^{rm}. \tag{15}$$

Зроблені нами припущення стосовно системи (5) та обмеженість оператора (15) означають, що крайова задача (5), (13) при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ та гранична крайова задача

$$L(0)y(t,0) = f(t,0), \quad a \leq t \leq b, \tag{5 − 0}$$

$$B(0)y(\cdot,0) = c(0) \tag{14}$$

належать до вивчених раніше у просторі $(C^{n+r,\alpha})^m$. Отже, для них застосовні результати другого розділу, зокрема теорема 2.3 про необхідні і достатні умови неперервної залежності за параметром розв'язку $y(\cdot,\varepsilon)$ у просторі $(C^{n+r,\alpha})^m$ при $\varepsilon = 0$. Виявляється, що використану у цій теоремі граничну умову (2.II) можна замінити (у частині достатності) на деякі умови, пов'язані зі структурою багатоточкових крайових умов (13) і (14). Попередньо зауважимо, що у випадку, коли гранична багатоточкова крайова задача $(5-0)$ і (14) задовольняє умову (2.0), то за теоремою 2.2 ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot,0) \in (C^{n+r,\alpha})^m$.

Теорема 4.1. *Нехай розглянуті багатоточкові крайові задачі задовольняють умову* (2.0) *і такі граничні умови при* $\varepsilon \to 0+$:

(a) $A_k(\cdot,\varepsilon) \to A_k(\cdot,0)$ *в* $(C^{n,\alpha})^{m\times m}$ *для кожного* $k \in \{0,\dots,r-1\}$*;*

(b1) $t_{j,k}(\varepsilon) \to t_j$ *для усіх* $j \in \{1,\dots,p\}$ *і* $k \in \{1,\dots,q_j\}$;

(b2) $\sum\limits_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \to \beta_j^{(l)}(0)$ *для усіх* $l \in \{0,\dots,n+r\}$ *і* $j \in \{1,\dots,p\}$*;*

(b3) $\|\beta_{j,k}^{(n+r)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j|^\alpha \to 0$ *для усіх* $j \in \{1,\dots,p\}$ *і* $k \in \{1,\dots,q_j\}$*;*

(b4) $\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \to 0$ *для усіх* $j \in \{1,\dots,p\}$, $k \in \{1,\dots,q_j\}$ *і* $l \in \{0,\dots,n+r-1\}$*;*

(b5) $\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) \to 0$ *для усіх* $k \in \{1,\dots,q_0\}$, $l \in \{0,\dots,n+r\}$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ *крайова задача* (5), (13) *має єдиний розв'язок* $y(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n+r,\alpha})^m$.

Якщо, крім того,

(c) $f(\cdot,\varepsilon) \to f(\cdot,0)$ *в* $(C^{n,\alpha})^m$*;*

(d) $c(\varepsilon) \to c(0)$ *в* $\mathbb{C}^{rm}$,

то цей розв'язок задовольняє граничну властивість

$$y(\cdot,\varepsilon) \to y(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (C^{n+r,\alpha})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

У четвертому розділі також доведено, що розв'язок довільної крайової задачі у просторі $C^{(n+1)}$, можна апроксимувати в $C^{(n+1)}$ розв'язками багатоточкових крайових задач.

Нехай довільно вибрано відрізок $[a,b]\subset\mathbb{R}$ і довільні цілі числа $n\geq 0$ і $m\geq 1$. Розглянемо таку крайову задачу для системи m лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$y'(t)+A(t)y(t)=f(t),\quad a\leq t\leq b, \tag{16}$$

$$By=c. \tag{17}$$

Тут вектор-функція $y\in(C^{(n+1)})^m$ шукана та довільно задано матрицю-функцію $A\in(C^{(n)})^{m\times m}$, вектор-функцію $f\in(C^{(n)})^m$, вектор $c\in\mathbb{C}^m$ і лінійний неперервний оператор

$$B:(C^{(n+1)})^m\to\mathbb{C}^m. \tag{18}$$

Крайова умова (17) з неперервним оператором (18) є найбільш загальною для рівняння (16), розв'язок якого пробігає простір $C^{(n+1)}$.

Окремим і важливим випадком крайової умови (17) є багатоточкова крайова умова вигляду

$$By\equiv\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=0}^{n+1}\alpha_j^{(l)}y^{(l)}(a_j)=c. \tag{19}$$

Тут довільно вибрано матриці $\alpha_j^{(l)}\in\mathbb{C}^{m\times m}$ та точки $a_1,\ldots,a_p\in[a,b]$.

Для того, щоб неоднорідна крайова задача (16), (17) мала єдиний розв'язок $y\in(C^{(n+1)})^m$ для довільних правих частин $f\in(C^{(n)})^m$ і $c\in\mathbb{C}^m$, вважаємо, що надалі виконується таке припущення.

Умова (4.0). *Однорідна крайова задача*

$$y'(t)+A(t)y(t)=0,\quad a\leq t\leq b, \tag{20}$$

$$By=0 \tag{21}$$

має лише тривіальний розв'язок.

Нехай X — довільна множина, щільна в банаховому просторі $(C^{(n)})^{m\times m}$. Розглянемо на відрізку $[a,b]$ послідовність багатоточкових крайових задач вигляду (16), (19):

$$y_k'(t)+A_k(t)y_k(t)=f(t),\quad a\leq t\leq b \tag{22}$$

$$B_ky_k\equiv\sum_{j=1}^{p_k}\sum_{l=0}^{n+1}\alpha_{k,j}^{(l)}y_k^{(l)}(a_{k,j})=c, \tag{23}$$

де $k \in \mathbb{N}$. Тут для кожного $k \in \mathbb{N}$ вектор-функція $y_k \in (C^{(n+1)})^m$ є шуканою вектор-функцією і довільно задано матрицю-функцію $A_k \in X$, усі матриці $\alpha_{k,j}^{(l)} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ та точки $a_{k,1}, \ldots, a_{k,p_k} \in [a,b]$. Праві частини задачі — вектор-функція $f \in (C^{(n)})^m$ і вектор $c \in \mathbb{C}^m$ — такі самі як і в задачі (16), (17).

Теорема 4.2 *Для будь-якої крайової задачі* (16), (17) *знайдеться послідовність багатоточкових крайових задач* (22), (23) (*де* $A_k \in X$) *таких, що для достатньо великого номера* k *кожна з них є однозначно розв'язною, а її розв'язок задовольняє умову*

$$y_k(t) \to y(t) \quad \textit{в} \quad (C^{(n+1)})^m \quad \textit{при} \quad k \to \infty.$$

Ця послідовність не залежить від f *і* c *та будується явним чином.*

Відповідна версія цієї теореми правильна і для систем диференціальних рівнянь вищих порядків.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі отримано такі основні результати:

1. Введено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$, де $n \geq 0$ і $0 < \alpha \leq 1$.

2. Доведено, що уведені задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі функціональних просторів $(C^{n+r,\alpha})^m$ і $(C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^{rm}$ і встановлено критерій однозначної розв'язності цих задач.

3. Для крайових задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$ та доведено, що похибка і нев'язка цих розв'язків мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Гельдера.

4. Введено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Слободецького $(W_p^{s+r})^m$, де $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$, $p \in (1, \infty)$.

5. Доведено, що уведені задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі функціональних просторів $(W_p^{s+r})^m$ і $(W_p^s)^m \times \mathbb{C}^{rm}$ і встановлено критерій однозначної розв'язності цих задач.

6. Для крайових задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивні достатні умови неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі Слободецького $(W_p^{s+r})^m$.

7. Введено новий широкий клас залежних від параметра $\varepsilon \geq 0$ багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$, де $n \geq 0$ і $0 < \alpha \leq 1$. Встановлено достатні умови неперервності за параметром цих розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі $(C^{n+r,\alpha})^m$.

8. Доведено, що розв'язок довільної крайової задачі у просторі $C^{(n+1)}$, можна апроксимувати в $C^{(n+1)}$ розв'язками багатоточкових крайових задач.

Основні положення дисертації відображено у таких публікаціях автора:

1. Маслюк Г. О. Багатоточкові крайові задачі з параметром для диференціальних рівнянь високого порядку на просторах Гельдера / Г. О. Маслюк // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — Т. 13, № 2. — С. 193 – 203.

2. Маслюк Г. О. Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач у просторах Гельдера / Г. О. Маслюк // Укр. мат. журн. — 2017. — 69, № 1. — С. 83 – 91. (Переклад англ. мовою: *Maslyuk H. O.* Continuity of the solutions of one-dimensional boundary-value problems in Holder spaces with respect to the parameter / H. O. Maslyuk // Ukrainian Math. J. — 2017. — V. 69, № 1. — P. 101 – 110.)

3. Маслюк Г. О. Апроксимативні властивості багатоточкових крайових задач, тотальних щодо просторів $C^{(n)}$ / Г. О. Маслюк, В. О. Солдатов // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — Т. 14, № 2. — С. 253 – 264.

4. Маслюк Г. О. Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач для диференціальних систем вищих порядків у просторах Слободецького / Маслюк Г. О., Михайлець В. А. // Укр. мат.

журн. — 2018. — Т. 70, № 3. — С. 404 – 411. (Переклад англ. мовою: Maslyuk H. O. Continuity in the parameter for the solutions of one-dimensional boundary-value problems for differential systems of higher orders in Slobodetskii spaces / H. O. Maslyuk, V. A. Mykhailets // Ukrainian Math. J. — 2018. — V. 70, № 3. — P. 467 – 476.)

5. Masliuk H. One-dimensional parameter-dependent boundary-value problems in Holder spaces / H. Masliuk, V. Soldatov // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2018. — V. 24, № 2. — P. 143 – 151.

6. Маслюк Г. О. Про одновимірні крайові задачі для диференціальних систем високого порядку у просторах Гельдера / Г. О. Маслюк // Матеріали XIV міжнародної науково-практичної конференції для студентів, аспірантів та молодих науковців „Шевченківська весна – 2016” (6 – 8 квітня 2016, м. Київ, Україна). — Київ : Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2016. — С. 49 – 52.

7. Masliuk G. A. On the one-dimensional boundary-value problems for differential systems of higher order in Slobodetsky spaces / G. A. Masliuk // 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky, 9 – 11 November, 2016, Kyiv, Ukraine: Book of Abstracts. — Vinnytsia: Vasyl’ Stus Donetsk National University, 2016. — P. 99 – 100.

8. Маслюк Г. О. Про неперервність за параметром розв’язків крайових задач для диференціальних систем вищих порядків у просторах Гельдера / Г. О. Маслюк // Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917–2008), 7 – 10 червня 2017 р., Київ, Україна. Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2017. — С. 93.

9. Маслюк Г. О. Про неперервність за параметром розв’язків крайових задач у просторах Слободецького / Г. О. Маслюк // VII Всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, 19 – 20 квітня 2018 р., Київ, Україна. Тези доповідей. — Київ: Національний технічний університет України “КПІ імені Ігоря Сікорського”, 2018. — С. 24.

Анотації

Маслюк Г. О. Одновимірні крайові задачі з параметром у функціональних просторах дробової гладкості. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.02 «Диференціальні рівняння» (111 – Математика). — Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського". — Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2018.

У дисертаційній роботі введено і досліджено два нових класи лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь. Перший з них є максимально широким класом для систем диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають комплексний простір Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$, де $n \geq 0$ і $0 < \alpha \leq 1$. Другий є максимально широким класом для систем диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають комплексний простір Слободецького $(W_p^{s+r})^m$, де $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$, $p \in (1, \infty)$. Показано, що ці задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парах відповідних функціональних просторів і встановлено критерій однозначної розв'язності цих задач.

Для введених найбільш загальних крайових задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі $(C^{n+r,\alpha})^m$ та конструктивні достатні умови неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі $(W_p^{s+r})^m$. Доведено, що похибка і нев'язка розв'язків мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Гельдера.

Введено і досліджено новий широкий клас залежних від параметра $\varepsilon \geq 0$ багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$, де $n \geq 0$ і $0 < \alpha \leq 1$. Встановлено достатні умови неперервності за параметром цих розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі $(C^{n+r,\alpha})^m$. Доведено, що розв'язок довільної крайової задачі у просторі $C^{(n+1)}$, можна апроксимувати в $C^{(n+1)}$ розв'язками багатоточкових крайових задач.

Ключові слова: система диференціальних рівнянь, крайова задача, простір Гельдера, простір Слободецького, неперервність за параметром, багатоточкова крайова задача, апроксимація розв'язків.

Маслюк А. А. Одномерные краевые задачи с параметром в функциональных пространствах дробной гладкости. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (доктора философии) по специальности 01.01.02 «Дифференциальные уравнения» (111 – Математика). — Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского". — Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

В диссертационной работе введены и исследованы два новых класса линейных краевых задач для систем $m \geq 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений, заданных на отрезке вещественной оси. Первый из них является максимально широким классом для систем дифференциальных уравнений порядка $r \geq 2$, решения которых пробегают комплексное пространство Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$, где $n \geq 0$ и $0 < \alpha \leq 1$. Второй является максимально широким классом для систем дифференциальных уравнений порядка $r \geq 2$, решения которых пробегают комплексное пространство Слободецкого $(W_p^{s+r})^m$, где $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$, $p \in (1, \infty)$. Краевые условия в этих задачах имеют вид $By = c$, где $B = (B_1, \dots, B_r)$ — произвольный линейный непрерывный оператор, действующий из пространства $(C^{n+r,\alpha})^m$ либо $(W_p^{s+r})^m$. Оператор B удобно представлять как набор операторов $B_1, \dots, B_r$ каждый из которых действует в пространство $\mathbb{C}^m$. Такие условия охватывают как все классические типы краевых условий, так и неклассические краевые условия.

Диссертация состоит из аннотаций на украинском и английском, введения, четырех глав основной части, заключения, списка использованной литературы и приложения.

Во введении дана общая характеристика тематики работы и обоснована ее актуальность, приведены основные результаты работы и показана их научная новизна, указаны данные об апробации диссертационной работы.

В первой главе обсуждены объект и предмет исследования диссертационной работы.

Во второй главе для систем линейных дифференциальных уравнений порядка $r \geq 2$ исследованы краевые задачи в пространстве Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$. Доказано, что эти задачи являются фредгольмовыми с индексом ноль на паре функциональных пространств $(C^{n+r,\alpha})^m$ и $(C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^m$. Получен критерий однозначной разрешимости этих задач. Для краевых задач, в пространстве $(C^{n+r,\alpha})^m$, зависящих от малого параметра $\varepsilon \geq 0$, установлен конструктивный критерий непрерывности по параметру решений при $\varepsilon = 0$ в этом пространстве. Показано, что погрешность и невязка решений имеют одинаковый порядок малости при $\varepsilon \to 0+$.

В третьей главе для систем линейных дифференциальных уравнений порядка $r \geq 2$ исследованы наиболее общие краевые задачи относительно пространства $(W_p^{s+r})^m$. Доказано, что эти задачи являются фредгольмовыми с индексом ноль на паре функциональных пространств $(W_p^{s+r})^m$ и $(W_p^s)^m \times \mathbb{C}^{rm}$. Установлен критерий однозначной разрешимости этих задач. Для краевых задач, в пространстве $(W_p^{s+r})^m$, зависящих от малого параметра $\varepsilon \geq 0$, найдены конструктивные достаточные условия непрерывности по параметру решений при $\varepsilon = 0$ в этом пространстве.

В четвертой главе результаты второй главы применены к многоточечным краевым задачам. Введен и исследован новый широкий класс многоточечных краевых задач, зависимых от малого параметра $\varepsilon \geq 0$. Эти задачи рассмотрены для систем линейных дифференциальных уравнений порядка $r \geq 2$, решения которых принадлежат пространству Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$, где $n \geq 0$ и $0 < \alpha \leq 1$. Для этих задач получены достаточные условия непрерывности по параметру решений при $\varepsilon = 0$ в пространстве $(C^{n+r,\alpha})^m$. Доказано, что решение произвольной краевой задачи в пространстве $C^{(n+1)}$, можно апроксимировать в $C^{(n+1)}$ решениями многоточечных краевых задач.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, краевая задача, пространство Гельдера, пространство Слободецкого, непрерывность по параметру, многоточечная краевая задача, апроксимация решений.

Masliuk H. A. One-dimensional boundary-value problems with parameter in function spaces of fractional smoothness. — Manuscript.

The thesis presented for the degree of the Candidate of Sciences in Physics and Mathematics (comparable to the academic Doctor of Philosophy) in speciality 01.01.02 “Differential equations” (111 – Mathematics). — National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute". — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

In the thesis we introduce and investigate two new classes of linear boundary-value problems for systems of ordinary linear differential equations. The first of them is the broadest class for systems of differential equations of order $r \geq 2$ whose solutions belong to the complex Hölder space $(C^{n+r,\alpha})^m$ with $n \geq 0$ and $0 < \alpha \leq 1$. The second is the broadest class for systems of differential equations of order $r \geq 2$ whose solutions belong to the complex Slobodetskii space $(W_p^{s+r})^m$ with $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$, $p \in (1, \infty)$. The boundary-value problems from these classes is the most general with respect to the indicated spaces. We prove that these problems are Fredholm with zero index between corresponding spaces and establish a criterion for the unique solvability of these problems.

For the generic boundary-value problems depending on a small parameter $\varepsilon \geq 0$, we establish a constructive criterion under which their solutions are continuous in the parameter at $\varepsilon = 0$ in the space $(C^{n+r,\alpha})^m$ and constructive sufficient conditions under which their solutions are continuous in the parameter at $\varepsilon = 0$ in the space $(W_p^{s+r})^m$. We prove that the error and discrepancy of the solutions are of the same order as $\varepsilon \to 0+$ in the corresponding Hölder spaces.

We introduce and investigate a new broad class multipoint linear boundary-value problems depending on the parameter $\varepsilon \geq 0$ for systems of ordinary differential equations of order $r \geq 2$, whose solutions extend over the Hölder space $(C^{n+r,\alpha})^m$, where $n \geq 0$ and $0 < \alpha \leq 1$. We establish sufficient conditions of these solutions are continuous in the parameter at $\varepsilon = 0$ in the space $(C^{n+r,\alpha})^m$. We prove that the solution of an arbitrary boundary-value problem in the space $C^{(n+1)}$, can be approximated in $C^{(n+1)}$ solutions of multipoint boundary-value problems.

Key words: differential system, boundary-value problem, Hölder space, Slobodetskii space, continuity in a parameter, multipoint boundary-value problem, approximating of solution.

Підписано до друку 27.12.2018 р. Зам. № 1282.
Формат 60×90 1/16. Папір офсетний. Друк – цифровий.
Наклад 100 прим. Ум. друк. арк. 0,9.
Друк ЦП "КОМПРИНТ". Свідоцтво ДК №4131 від 04.08.2011 р.
м. Київ, вул. Предславинська, 28
528-05-42, 067-209-54-30