Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України

"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Маслюк Ганна Олексіївна

УДК 517.927

ДИСЕРТАЦІЯ

ОДНОВИМІРНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРОМ У ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПРОСТОРАХ ДРОБОВОЇ ГЛАДКОСТІ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ______________________________ Г. О. Маслюк

Науковий керівник:
Михайлець Володимир Андрійович
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ – 2018

АНОТАЦІЯ

Маслюк Г. О. Одновимірні крайові задачі з параметром у функціональних просторах дробової гладкості. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.02 «Диференціальні рівняння» (111 – Математика). — Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського". — Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2018.

Дисертація присвячена дослідженню властивостей найбільш широких класів крайових задач для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків, залежних від параметру, розв'язки яких пробігають простір Гельдера або простір Слободецького.

Питання про обґрунтування граничного переходу стосовно розв'язків задач Коші та крайових задач досліджувалися багатьма математиками. У роботах І. І. Гіхмана (1952), М. А. Красносельського і С. Г. Крейна (1955), Я. Курцвейля і З. Ворела (1957), А. М. Самойленка (1962 – 1965) встановлено фундаментальні результати про неперервну залежність за параметром розв'язків задач Коші для нелінійних систем. Для лінійних систем ці результати були уточнені та доповнені А. Ю. Левіним (1967 – 1973), З. Опялем (1967), В. Т. Рейдом (1967) і Нгуен Тхе Хоаном (1993).

Широкий клас лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку досліджувався І. Т. Кігурадзе (1975 – 2003) і М. Ашордіа (1996). Розв'язки цих задач є абсолютно неперервними функціями на відрізку $[a, b]$. Було встановлено умови неперервної залежності за параметром розв'язків у просторі $C([a, b], \mathbb{R}^m)$. Узагальнення цих результатів для комплекснозначних функцій та систем диференціальних рівнянь вищих порядків

отримано у роботах В. А. Михайлеця, Н. В. Реви, Т. І. Кодлюк і Г. О. Чеханової.

В. А. Михайлецем і його учнями (2008 – 2015 рр.) були введені і досліджені максимально широкі класи крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, які розглядаються у просторах Соболєва (Рева Н. В., Кодлюк Т. І., Гнип Є. В.) або у просторах неперервно диференційовних функцій (Чеханова Г. О., Солдатов В. О.). Показниками гладкості функцій для вказаних функціональних просторів є цілі додатні числа. Було доведено фредгольмовість таких задач, знайдено достатні умови їх коректної розв'язності та неперервної залежності за параметром їх розв'язків у вказаних просторах.

Нещодавно з'ясувалося, що встановлені раніше конструктивні достатні умови є також і необхідними.

Конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку було доведено В. А. Михайлецем, О. О. Мурачем, В. О. Солдатовим (2016) у просторах Гельдера та Є. В. Гнип, В. А. Михайлецем (2016) у просторах Слободецького. Для систем вищих порядків вказаний критерій доведено щодо просторів цілої гладкості — неперервно диференційованих функцій (Мурач О. О., Солдатов В. О.) і Соболєва (Гнип Є. В., Михайлець В. А., Мурач О. О.).

Ці результати були застосовані для дослідження багатоточкових крайових задач, матриць Гріна та використані у спектральній теорії диференціальних операторів із сингулярними коефіцієнтами. Але у деяких задачах теорії диференціальних рівнянь використовуються не лише простори цілої гладкості, а й простори, де показником гладкості може бути і дробове число. Найбільш відомими серед них є простори Гельдера та простори Слободецького.

У цьому зв'язку є актуальними дослідження розв'язків крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків у просторах Гельдера і Слободецького.

Мета дисертаційної роботи полягає у встановленні конструктивних необхідних і достатніх умов неперервної залежності за параметром розв'язків крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків у просторах Гельдера і Слободецького.

Дисертація складається з анотацій українською і англійською, вступу, чотирьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел і додатку.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, зазначено наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувача, вказано також де було апробовано та опубліковано результати дисертації.

У першому розділі обговорено об'єкт і предмет дослідження. Об'єктом дослідження є одновимірні крайові задачі, найбільш загальні щодо просторів Гельдера або Слободецького, а предметом — характер залежності за параметром розв'язків таких крайових задач.

У другому розділі введено і досліджено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$, де $n \geq 0$ і $0 < \alpha \leq 1$. Доведено, що введені задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі функціональних просторів $(C^{n+r,\alpha})^m$ і $(C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^{rm}$ і встановлено критерій однозначної розв'язності цих задач. Для крайових задач залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі Гельдера

$(C^{n+r,\alpha})^m$ та доведено, що похибка і нев'язка цих розв'язків мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Гельдера.

У третьому розділі введено і досліджено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Слободецького $(W_p^{s+r})^m$, де $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$, $p \in (1, \infty)$. Доведено, що уведені задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі функціональних просторів $(W_p^{s+r})^m$ і $(W_p^s)^m \times \mathbb{C}^{rm}$ і встановлено критерій однозначної розв'язності цих задач. Для крайових задач залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивні достатні умови неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі Слободецького $(W_p^{s+r})^m$.

У четвертому розділі введено і досліджено новий широкий клас залежних від параметра $\varepsilon \geq 0$ багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$, де $n \geq 0$ і $0 < \alpha \leq 1$. Встановлено достатні умови неперервності за параметром цих розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі $(C^{n+r,\alpha})^m$. Доведено, що розв'язок довільної крайової задачі у просторі $C^{(n+1)}$, можна апроксимувати в $C^{(n+1)}$ розв'язками багатоточкових крайових задач.

Додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати та методика їх отримання можуть бути використані у подальшого розвитку теорії одновимірних крайових задач.

Ключові слова: система диференціальних рівнянь, крайова задача, простір Гельдера, простір Слободецького, неперервність за параметром, багатоточкова крайова задача, апроксимація розв'язків.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. Маслюк Г. О. Багатоточкові крайові задачі з параметром для диференціальних рівнянь високого порядку на просторах Гельдера / Г. О. Маслюк // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — Т. 13, № 2. — С. 193 – 203.

2. Маслюк Г. О. Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач у просторах Гельдера / Г. О. Маслюк // Укр. мат. журн. — 2017. — 69, № 1. — С. 83 – 91. (Переклад англ. мовою: Maslyuk H. O. Continuity of the solutions of one-dimensional boundary-value problems in Holder spaces with respect to the parameter/H. O. Maslyuk // Ukrainian Math. J. — 2017. — V. 69, № 1. — P. 101 – 110.)

3. Маслюк Г. О. Апроксимативні властивості багатоточкових крайових задач, тотальних щодо просторів $C^{(n)}$ / Г. О. Маслюк, В. О. Солдатов // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — Т. 14, № 2. — С. 253 – 264.

4. Маслюк Г. О. Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач для диференціальних систем вищих порядків у просторах Слободецького / Маслюк Г. О., Михайлець В. А. // Укр. мат. журн. — 2018. — Т. 70, № 3. — С. 404 – 411. (Переклад англ. мовою: Maslyuk H. O. Continuity in the parameter for the solutions of one-dimensional boundary-value problems for differential systems of higher orders in Slobodetskii spaces / H. O. Maslyuk, V. A. Mykhailets // Ukrainian Math. J. — 2018. — V. 70, № 3. — P. 467 – 476.)

5. Masliuk H. One-dimensional parameter-dependent boundary-value problems in Holder spaces / H. Masliuk, V. Soldatov // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2018. — V. 24, № 2. — P. 143 – 151.

6. Маслюк Г. О. Про одновимірні крайові задачі для диференціальних систем високого порядку у просторах Гельдера / Г. О. Маслюк // Матеріали XIV міжнародної науково-практичної конференції для студентів, аспірантів та молодих науковців „Шевченківська весна – 2016" (6 – 8 квітня 2016, м. Київ, Україна). — Київ : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2016. — С. 49 – 52.

7. Masliuk G. A. On the one-dimensional boundary-value problems for differential systems of higher order in Slobodetsky spaces / G. A. Masliuk // 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky, 9 – 11 November, 2016, Kyiv, Ukraine: Book of Abstracts. — Vinnytsia: Vasyl' Stus Donetsk National University, 2016. — P. 99 –100.

8. Маслюк Г. О. Про неперервність за параметром розв'язків крайових задач для диференціальних систем вищих порядків у просторах Гельдера / Г. О. Маслюк // Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917 – 2008), 7 – 10 червня 2017 р., Київ, Україна. Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2017. — С. 93.

9. Маслюк Г. О. Про неперервність за параметром розв'язків крайових задач у просторах Слободецького / Г. О. Маслюк // VII Всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, 19 – 20 квітня 2018 р., Київ, Україна. Тези доповідей. — Київ:

Національний технічний університет України "КПІ імені Ігоря Сікорського", 2018. — С. 24.

ABSTRACT

Masliuk H. A. One-dimensional boundary-value problems with parameter in function spaces of fractional smoothness. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis presented for the degree of the Candidate of Sciences in Physics and Mathematics (comparable to the academic Doctor of Philosophy) in speciality 01.01.02 "Differential equations" (111 – Mathematics). — National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute". — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to the study of the properties of the broadest classes of boundary-value problems for systems of higher-order ordinary linear differential equations depending on a parameter with solutions in the Hölder space or the Slobodetskii space.

Many mathematicians were investigating the questions of justification of the boundary transition in relation solutions to the Cauchy problems and boundary-value problems. In the works of I. I. Gikhman (1952), M. A. Krasnosel'skii and S. G. Krein (1955), J. Kurzweil and Z. Vorel (1957), A. M. Samoilenko (1962–1965) established the fundamental results on the continuous dependence on the parameter of solutions of Cauchy problems for nonlinear systems. For linear systems, these results were specified and supplemented by A. Yu. Levin (1967–1973), Z. Opial (1967), W. T. Reid (1967) and Nguyen Tho Hoan (1993).

The broad class of linear boundary-value problems for systems of first-order differential equations was introduced I. T. Kiguradze (1975–1987) and M. Ashordia (1996). Solutions to these problems are absolutely continuous functions on the compact interval $[a, b]$. In space $C([a, b], \mathbb{R}^m)$ they also established the conditions of continuity in a parameter of its solutions. The generalization of these results for complex-valued functions and systems of higher-order differential equations

was obtained in the works of V. A. Mikhailets, N. V. Reva, T. I. Kodliuk and H. A. Chekhanova.

V. A. Mikhailets and his disciples (2008 – 2015) introduced and studied the most common classes of boundary-value problems for systems of ordinary differential equations that are generic with respect to the Sobolev spaces (N. V. Reva, T. I. Kodliuk, Ye. V. Gnyp) or to the spaces of continuously differentiable functions (H. A. Chekhanova, V. O. Soldatov). Note that indicators of the regularity of functions for the specified function spaces are all positive integers. They proved that such problems are Fredholm, and obtained conditions that are sufficient for their well-posedness and continuity in the parameter of their solutions in these spaces.

Recently, it was proved that earlier established constructive sufficient conditions established are also necessary.

The constructive criterion of continuity in a parameter of solutions to boundary-value problems for systems of first-order differential equations was proved by V. A. Mikhailets, A. A. Murach, V. O. Soldatov (2016) in Hölder spaces and Ye. V. Gnyp, V. A. Mikhailets (2016) in Slobodetskii spaces. For higher-order systems, this criterion is proved with respect to spaces of complete smoothness continuously differentiated functions (A. A. Murach, V. O. Soldatov) and Sobolev (Ye. V. Gnyp, V. A. Mikhailets, A. A. Murach).

These results have been used for the investigation of multipoint boundary-value problems, Green's matrices, and used in the spectral theory of differential operators with singular coefficients. But in some problems of the theory of differential equations, not only the spaces of complete smoothness are used, but also spaces where the smoothness index can be a fractional number. The most well-known among them are Hölder's and Slobodetskii spaces.

In this connection, the research solutions of boundary-value problems for systems of higher-order ordinary differential equations in the Hölder's and Slobodetskii spaces.

The purpose of the thesis is to establish constructive necessary and sufficiently conditions for continuity in the parameter of solutions to boundary-value problems for systems of higher-order ordinary differential equations in Hölder's and Slobodetskii spaces.

The thesis consists of the annotation in Ukrainian and in English, introduction, four sections of its main part, conclusions, the list of references, and appendix.

The introduction grounds the relevance of the research topic, formulates the purpose, objective, scope, task, and methods of the research, indicates the scientific novelty of the results obtained, their practical significance, the relation of the research to scientific programs, and the personal contribution of the applicant, and also points out where the results of the dissertation have been discussed and published.

In the first section we discuss the objective and the scope of research. The objective of the research is one-dimensional boundary-value problems, the most general with respect to Hölder's or Slobodetskii spaces. The scope of the research covers the character of the continuity in the parameter of the solutions to these boundary-value problems.

In the second section we introduce and investigate the most broad class of linear boundary-value problems for systems of $m \geq 1$ r-order ($r \geq 2$) ordinary differential equations with solutions in the Hölder space $(C^{n+r,\alpha})^m$, with $n \geq 0$ and $0 < \alpha \leq 1$. It is proved that such problems are Fredholm with index zero on a pair of function spaces $(C^{n+r,\alpha})^m$ and $(C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^{rm}$. For such problems we obtained a criterion of their well-posedness. For the boundary-value problems, dependent on a small parameter $\varepsilon \geq 0$, a constructive criterion under which their solutions are continuous with respect to the parameter ε at $\varepsilon = 0$ in the Hölder space $(C^{n+r,\alpha})^m$ is established. Moreover we proved that the error and the discrepancy of these solutions are of the same order as $\varepsilon \to 0+$ in the corresponding Hölder spaces.

In the third section, we introduce and investigate the most broad class of linear boundary-value problems for systems $m \geq 1$ r-order $(r \geq 2)$ ordinary differential equations, with solutions in the Slobodetskii space $(W_p^{s+r})^m$, with $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$, $p \in (1, \infty)$. It is proved that the considered problems are Fredholm with index zero on a pair of function spaces $(W_p^{s+r})^m$ and $(W_p^s)^m \times \mathbb{C}^{rm}$. Moreover we established the criterion of well-posedness for these problems. For solutions to boundary-value problems, that depends on a small parameter $\varepsilon \geq 0$, we established constructive sufficient conditions of continuity in the parameter at $\varepsilon = 0$ in the Slobodetskii space $(W_p^{s+r})^m$.

In the fourth section we introduce and investigate a new broad class of multi-point linear boundary-value problems for systems of ordinary $r \geq 2$ order differential equations with solutions in the Hölder space $(C^{n+r,\alpha})^m$, with $n \geq 0$ and $0 < \alpha \leq 1$. For such problems we establish sufficient conditions for their solutions to be continuous in the parameter at $\varepsilon = 0$ in the space $(C^{n+r,\alpha})^m$. It is proved that the solution of an arbitrary boundary-value problem in the space $C^{(n+1)}$, can be approximated in $C^{(n+1)}$ with solutions of multipoint boundary-value problems.

Appendix contains applicant's publications list on the topic of the thesis and informs where the results of the thesis have been reported and discussed.

The practical significance of the results. Thesis is a theoretical investigation. Its results and the method for the obtaining of these results can be used in the further development of the theory of one-dimensional boundary-value problems.

Keywords: differential system, boundary-value problem, Hölder space, Slobodetskii space, continuity in a parameter, multipoint boundary-value problem, approximation of solution.

Applicant's publications list concerning the topic of the thesis

1. Masliuk H. O. Multipoint boundary-value problems with parameter for higher-order differential equations on Hölder spaces / H. O. Masliuk // Differential equations and related problems of analysis. Transactions of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2016. — V. 13, № 2. — P. 193 – 203.

2. Maslyuk H. O. Continuity of the solutions of one-dimensional boundary-value problems in Holder spaces with respect to the parameter / H. O. Maslyuk // Ukrainian Math. J. — 2017. — V. 69, № 1. — P. 101 – 110.

3. Masliuk H. O. Approximation properties of multipoint boundary-value problems that are total with respect to spaces $C^{(n)}$ / H. O. Masliuk, V. O. Soldatov // Differential equations and related problems of analysis. Transactions of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2017. — V. 14, № 2. — P. 253 – 264.

4. Maslyuk H. O. Continuity in the parameter for the solutions of one-dimensional boundary-value problems for differential systems of higher orders in Slobodetskii spaces / H. O. Maslyuk, V. A. Mykhailets // Ukrainian Math. J. — 2018. — V. 70, № 3. — P. 467 – 476.

5. Masliuk H. One-dimensional parameter-dependent boundary-value problems in Hölder spaces / H. Masliuk, V. Soldatov // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2018. — V. 24, № 2. — P. 143 – 151.

6. Masliuk H. O. On the one-dimensional boundary-value problems for higher-order differential systems in Hölder spaces / H. O. Masliuk // Proceedings of XIV Scientific-Practical Conference of Students, Postgraduates and Young Scientists "Shevchenkivska Vesna 2016" (April, 6 – 8, 2016, Kyiv, Ukraine). — Kyiv : Publishing and Printing Center "Kyiv University", 2016. — P. 49 — 52.

7. Masliuk G. A. On the one-dimensional boundary-value problems for differential systems of higher-order in Slobodetsky spaces / G. A. Masliuk // 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky, 9 – 11 November, 2016, Kyiv, Ukraine: Book of Abstracts. — Vinnytsia: Vasyl' Stus Donetsk National University, 2016. — P. 99 –100.

8. Masliuk H. O. On the continuity of the parameter of solutions of boundary-value problems for differential systems of higher-order in Hölder spaces / H. O. Masliuk // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917 – 2008), June 7 – 10, 2017, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2017. — P. 93.

9. Masliuk H. O. On the continuity of the parameter of solutions of boundary-value problems in Slobodetsky spaces / H. O. Masliuk // VII All-Ukrainian scientific conference of students, postgraduates and young scientists in mathematics, April, 19 – 20, 2018, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Kyiv: National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute 2018. — P. 24.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Основні позначення, які використовуються в роботі:

1. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$ — відповідно множини усіх натуральних, цілих, дійсних і комплексних чисел.

2. $\overline{k,l} := \{j \in \mathbb{Z} : k \leq j \leq l\}$, де $k, l \in \mathbb{Z}$ і $k \leq l$.

3. $\mathbb{C}^m$ — m-вимірний лінійний простір усіх комплексних числових векторів-стовпців $y = \mathrm{col}(y_1, y_2, ..., y_m)$, наділений нормою
$$\|y\| := |y| = \sum_{j=1}^{m} |y_j|.$$

4. $\mathbb{C}^{m\times\mu}$ — лінійний простір усіх комплексних числових матриць порядку $m \times \mu$, наділений нормою
$$\|A\| := |A| = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\mu} |a_{j,k}|$$
матриці $A = (a_{j,k})_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,\mu}}$.

5. $\det A$ — визначник матриці A.

6. I_m — одинична матриця порядку $m \times m$, та O_m — квадратна нуль-матриця порядку $m \times m$.

7. $C^{(l)} := C^{(l)}([a,b], \mathbb{C})$ — комплексний простір усіх $l \geq 0$ разів неперервно диференційовних функцій $x : [a,b] \to \mathbb{C}$, наділений нормою
$$\|x\|_l := \sum_{j=0}^{l} \max\big\{|x^{(j)}(t)| : t \in [a,b]\big\}.$$
Тут і далі $[a,b]$ є (скінченний) відрізок на дійсній осі. Простір $C^{(l)}$ є банаховою алгеброю.

8. $C^{l,\alpha} := C^{l,\alpha}([a,b],\mathbb{C})$ — комплексний простір Гельдера на $[a,b]$ з показниками гладкості $l \geq 0$ і $\alpha \in (0,1]$. Він складається з усіх функцій $x \in C^{(l)}$ таких, що

$$\|x^{(l)}\|'_{\alpha} := \sup\left\{\frac{|x^{(l)}(t_2) - x^{(l)}(t_1)|}{|t_2 - t_1|^{\alpha}} :\ t_1, t_2 \in [a,b], t_1 \neq t_2\right\} < \infty.$$

Цей простір наділений нормою

$$\|x\|_{l,\alpha} := \|x\|_l + \|x^{(l)}\|'_{\alpha}$$

і є банаховою алгеброю. З метою уніфікації позначень покладаємо $C^{l,0} := C^{(l)}$.

9. $(C^{l,\alpha})^m := C^{l,\alpha}([a,b],\mathbb{C}^m)$ і $(C^{l,\alpha})^{m\times m} := C^{l,\alpha}([a,b],\mathbb{C}^{m\times m})$, де $l \geq 0$ і $\alpha \in [0,1]$, є комплексні банахові простори відповідно всіх вектор-функцій та квадратних матриць-функцій порядку m, елементи яких належать до $C^{l,\alpha}$. Норми у цих просторах дорівнюють сумі норм в $C^{l,\alpha}$ усіх компонентів вектор- або матриць-функцій. Усі ці норми позначаємо через $\|\cdot\|_{l,\alpha}$. З контексту завжди буде зрозуміло у якому просторі (скалярних, вектор-, або матриць-функцій) розглядається норма $\|\cdot\|_{l,\alpha}$. У випадку $\alpha = 0$ покладаємо також $(C^{(l)})^m := (C^{l,\alpha})^m$, $(C^{(l)})^{m\times m} := (C^{l,\alpha})^{m\times m}$ та $\|\cdot\|_l := \|\cdot\|_{l,\alpha}$.

10. $L_\infty := L_\infty([a,b];\mathbb{C})$ — простір всіх вимірних комплекснозначних функцій, визначених і суттєво обмежених на відрізку $[a,b]$, з нормою

$$\|y\|_{+\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{a\leqslant t\leqslant b} |y(t)|.$$

11. $(L_\infty)^m := L_\infty([a,b];\mathbb{C}^m)$ і $(L_\infty)^{m\times m} := L_\infty([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ — простори всіх вимірних комплекснозначних вектор-функцій $y(t) : [a,b] \to \mathbb{C}^m$ та матриць-функцій $A(t) : [a,b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$ з суттєво обмеженими на відрізку $[a,b]$ елементами.

12. $L_p := L_p([a,b];\mathbb{C})$, де $1 \le p < \infty$, — простір всіх вимірних комплекснозначних функцій, які при піднесенні до степеня p є інтегровними за Лебегом, з нормою

$$\|y\|_p := \left(\int\limits_a^b |y(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

13. $(L_p)^m := L_p([a,b];\mathbb{C}^m)$ і $(L_p)^{m\times m} := L_p([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ — простори всіх вимірних комплекснозначних вектор-функцій $y(t) : [a,b] \to \mathbb{C}^m$ та матриць-функцій $A(t) : [a,b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$, елементи яких належать простору L_p.

14. $W_p^n := W_p^n([a,b];\mathbb{C})$, де $n \in \mathbb{N}$ і $1 \le p < \infty$, — простір С. Л. Соболєва всіх комплекснозначних функцій, тобто

$$W_p^n([a,b];\mathbb{C}) := \{y \in C^{n-1} : y^{(n-1)} \in AC[a,b], y^{(n)} \in L_p[a,b]\},$$

де $AC[a,b]$ — множина усіх абсолютно неперервних комплекснозначних функцій на відрізку $[a,b]$. Норма у просторі W_p^n означена за формулою

$$\|y\|_{n,p} := \left(\sum_{\alpha\leqslant n} \int\limits_a^b |D^\alpha y(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

і еквівалентна нормі

$$\|y\|_{n,p} \asymp \sum_{k=0}^{n-1} \|y^{(k)}\|_\infty + \|y^{(n)}\|_p.$$

Покладемо також $W_p^0 := L_p$.

15. $(W_p^n)^m := W_p^n([a,b];\mathbb{C}^m)$ і $(W_p^n)^{m\times m} := W_p^n([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ — простори всіх комплекснозначних вектор-функцій $y(t) : [a,b] \to \mathbb{C}^m$ та матриць-функцій $A(t) : [a,b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$, елементи яких належать соболєвському простору W_p^n.

16. $W_p^s := W_p^s([a,b];\mathbb{C})$, де $1 < p < \infty$ і дробове число $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$, — простір Л. Н. Слободецького всіх комплекснозначних функцій, які належать простору Соболєва $W_p^{[s]}$ і задовольняють умову

$$\|f\|_{s;p} := \|f\|_{[s],p} + \left(\int\limits_a^b \int\limits_a^b \frac{|f^{[s]}(x) - f^{[s]}(y)|^p}{|x-y|^{1+\{s\}p}} dxdy \right)^{1/p} < +\infty,$$

де $[s]$ є ціла, а $\{s\}$ є дробова частини числа s. Тут, нагадаємо, $\|\cdot\|_{[s],p}$ — норма у просторі Соболєва $W_p^{[s]}$. Ліва частина цієї нерівності задає норму $\|f\|_{s;p}$ у просторі W_p^s.

17. $(W_p^s)^m := W_p^s([a,b];\mathbb{C}^m)$ і $(W_p^s)^{m\times m} := W_p^s([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ — простори всіх комплекснозначних вектор-функцій $f : [a,b] \to \mathbb{C}^m$ та матриць-функцій $A : [a,b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$, елементи яких належать простору Слободецького W_p^s.

18. $B_n \xrightarrow{s} B$ позначає сильну збіжність лінійних обмежених операторів.

19. $BV[a,b]$ — банахів простір усіх функцій $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ з обмеженою варіацією на $[a,b]$, наділений нормою

$$\|g\|_{BV[a,b]} := \bigvee_a^b g.$$

20. $\bigvee\limits_a^b g$ — повна варіація функції g на відрізку $[a,b]$.

21. $NBV[a,b]$ — підпростір $BV[a,b]$, утворений усіма функціями $g \in BV[a,b]$.

У роботі вектор-функції і числові вектори подано у вигляді стовпців.

ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена дослідженню властивостей найбільш широких класів крайових задач для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків, залежних від параметру, розв'язки яких пробігають простір Гельдера або простір Слободецького.

Актуальність теми. Питання про обґрунтування граничного переходу стосовно розв'язків задач Коші та крайових задач досліджувалися багатьма математиками. У роботах І. І. Гіхмана [3], М. А. Красносельського і С. Г. Крейна [21], Я. Курцвейля і З. Ворела [22], А. М. Самойленка [51, 52, 86] встановлено фундаментальні результати про неперервну залежність за параметром розв'язків задач Коші для нелінійних систем. Для лінійних систем ці результати були уточнені та доповнені А. Ю. Лєвіним [23, 24], З. Опялем [84], В. Т. Рейдом [85] і Нгуен Тхе Хоаном [44].

Широкий клас лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку досліджувався І. Т. Кігурадзе [14 – 16] і М. Ашордіа [69]. Розв'язки цих задач є абсолютно неперервними функціями на відрізку $[a, b]$, а крайові умови задані у вигляді $By = q$, де $B : C([a, b], \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^m$ є довільний лінійний неперервний оператор (m — число рівнянь системи). Було встановлено умови неперервної залежності за параметром розв'язків у просторі $C([a, b], \mathbb{R}^m)$. Узагальнення цих результатів для комплекснозначних функцій та систем диференціальних рівнянь вищих порядків отримано у роботах В. А. Михайлеця, Н. В. Реви, Т. І. Кодлюк і Г. О. Чеханової [19, 36, 38, 82].

В. А. Михайлецем і його учнями були введені і досліджені максимально широкі класи крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, які розглядаються у просторах Соболєва [5, 37, 79] або у просторах неперервно диференційовних функцій [39, 40, 56]. Показниками гладкості функцій для вказаних функціональних просторів є цілі додатні числа. Було доведено фредгольмовість таких задач, знайдено достатні умови їх коректної розв'язності та неперервної залежності за параметром їх розв'язків у вказаних просторах.

Нещодавно з'ясувалося, що встановлені раніше конструктивні достатні умови є також і необхідними.

Конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку було доведено В. А. Михайлецем, О. О. Мурачем, В. О. Солдатовим [83] у просторах Гельдера та Є. В. Гнип, В. А. Михайлецем [7] у просторах Слободецького. Для систем вищих порядків вказаний критерій доведено щодо просторів цілої гладкості — неперервно диференційованих функцій і Соболєва — у роботах [42] і [9] відповідно.

Ці результати були застосовані для дослідження багатоточкових крайових задач [4, 6, 17, 18, 57, 58, 65], матриць Гріна [19, 20, 66, 82] та використані у спектральній теорії диференціальних операторів із сингулярними коефіцієнтами [11, 73, 74, 75]. Але у деяких задачах теорії диференціальних рівнянь використовуються не лише простори цілої гладкості, а й простори, де показником гладкості може бути і дробове число. Найбільш відомими серед них є простори Гельдера та простори Слободецького.

У цьому зв'язку є актуальними дослідження розв'язків крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків у просторах Гельдера і Слободецького.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного технічного університету України „Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського“ в рамках держбюджетної науково-дослідної роботи № 2810Ф „Дослідження асимптотичних властивостей псевдорегулярних функцій та узагальнення процесів відновлення“ (номер державної реєстрації 0115U000371).

Мета і завдання дослідження.

Метою дослідження дисертаційної роботи є встановлення конструктивних необхідних і достатніх умов неперервної залежності за параметром розв'язків крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків у просторах Гельдера і Слободецького.

Об'єктом дослідження є одновимірні крайові задачі, найбільш загальні щодо просторів Гельдера або Слободецького.

Предметом дослідження є характер залежності за параметром розв'язків таких крайових задач.

Завдання дослідження:

1. Ввести максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$, де $n \geq 0$ і $0 < \alpha \leq 1$.

2. Довести, що уведені задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі функціональних просторів $(C^{n+r,\alpha})^m$ і $(C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^{rm}$ і встановити критерій однозначної розв'язності цих задач.

3. Для крайових задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановити конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$ та довести, що похибка і нев'язка цих розв'язків мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Гельдера.

4. Ввести максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Слободецького $(W_p^{s+r})^m$, де $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$, $p \in (1, \infty)$.

5. Довести, що уведені задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі функціональних просторів $(W_p^{s+r})^m$ і $(W_p^s)^m \times \mathbb{C}^{rm}$ і встановити критерій однозначної розв'язності цих задач.

6. Для крайових задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановити конструктивні достатні умови неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі Слободецького $(W_p^{s+r})^m$.

7. Ввести новий широкий клас залежних від параметра $\varepsilon \geq 0$ багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$, де $n \geq 0$ і $0 < \alpha \leq 1$. Встановити достатні умови неперервності за параметром цих розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі $(C^{n+r,\alpha})^m$.

8. Довести, що розв'язок довільної крайової задачі у просторі $C^{(n+1)}$, можна апроксимувати в $C^{(n+1)}$ розв'язками багатоточкових крайових задач.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використано методи теорії звичайних диференціальних рівнянь та функціонального аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати дисертації, запропоновані до захисту, є новими і полягають у такому:

1. Введено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$, де $n \geq 0$ і $0 < \alpha \leq 1$.

2. Доведено, що уведені задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі функціональних просторів $(C^{n+r,\alpha})^m$ і $(C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^{rm}$ і встановлено критерій однозначної розв'язності цих задач.

3. Для крайових задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$ та доведено, що похибка і нев'язка цих розв'язків мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Гельдера.

4. Введено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Слободецького $(W_p^{s+r})^m$, де $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$, $p \in (1, \infty)$.

5. Доведено, що уведені задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі функціональних просторів $(W_p^{s+r})^m$ і $(W_p^s)^m \times \mathbb{C}^{rm}$ і встановлено критерій однозначної розв'язності цих задач.

6. Для крайових задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивні достатні умови неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі Слободецького $(W_p^{s+r})^m$.

7. Введено новий широкий клас залежних від параметра $\varepsilon \geq 0$ багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$, де $n \geq 0$ і $0 < \alpha \leq 1$. Встановлено достатні умови неперервності за параметром цих розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі $(C^{n+r,\alpha})^m$.

8. Доведено, що розв'язок довільної крайової задачі у просторі $C^{(n+1)}$, можна апроксимувати в $C^{(n+1)}$ розв'язками багатоточкових крайових задач.

Результати дисертації, вказані у п. 2, є завершеними і непокращуваними.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати та методика їх отримання можуть бути використані у подальшому розвитку теорії одновимірних крайових задач.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану дисертації та постановка задач належать науковому керівнику — доктору фізико-математичних наук, професору В. А. Михайлецю. Основні наукові результати, які винесено на захист, отримано здобувачкою самостійно. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включено лише ті результати, що належать дисертантці.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

— семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник семінару — академік НАН України А. М. Самойленко);

— семінарі кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного технічного університету України „КПІ імені Ігоря Сікорського“ (керівник семінару — доктор фізико-математичних наук, професор Н. О. Вірченко);

— семінарі кафедри математики та економіки Національного університету „Чернігівський колегіум“ імені Т. Г. Шевченка (керівник семінару — доктор фізико-математичних наук О. О. Мурач);

— Чотирнадцятій міжнародній науково-практичній конференції для студентів, аспірантів та молодих науковців „Шевченківська весна – 2016“ (Україна, Київ, 6 – 8 квітня 2016 року);

— П'ятій міжнародній конференції молодих науковців з диференціальних рівнянь і застосувань, присвяченій Я. Б. Лопатинському (Україна, Київ, 9 – 11 листопада 2016 року);

— Міжнародній конференції молодих математиків присвяченій 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917 – 2008) (Україна, Київ, 7 – 10 червня 2017 року);

— Сьомій всеукраїнській науковій конференції студентів, аспірантів та молодих вчених з математики (Україна, Київ, 19 – 20 квітня 2018 року).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковано в 9 наукових працях. Серед них 5 статей [27, 28, 29, 30, 31] — у фахових наукових виданнях, з яких 3 статті [28, 30, 31] — в журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних Scopus і Web of Science. Роботи [32, 33, 34, 35] опубліковано у матеріалах міжнародних наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотацій українською і англійською, вступу, чотирьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел, що налічує 90 найменувань, і додатку, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації. Повний обсяг роботи складає 120 сторінок друкованого тексту.

РОЗДІЛ 1
ОБ'ЄКТ І ПРЕДМЕТ ДОСЛІДЖЕННЯ

Як зазначалося у вступі, об'єктом дисертаційного дослідження є одновимірні крайові задачі, найбільш загальні щодо просторів Гельдера або Слободецького, а предметом дослідження є характер залежності за параметром розв'язків таких крайових задач. Цим питанням присвячено перший розділ дисертації.

1.1. Задача Коші і крайові задачі

Питання щодо обґрунтування граничного переходу у системах диференціальних рівнянь виникають у різних задачах сучасної математики. Стосовно задач Коші для систем диференціальних рівнянь першого порядку ці питання досліджувалися у роботах Й. І. Гіхмана [3], М. А. Красносельского і С. Г. Крейна [21], де розглядалися нелінійні диференціальні рівняння, залежні за параметром, праві частини яких неперервні в інтегральному сенсі. Ці результати були застосовані до обґрунтування відомого принципу усереднення М. М. Боголюбова і М. М. Крилова (див., наприклад, [2]).

Задачі Коші, для систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, досліджували А. Ю. Лєвін [24, 25], Я. Курцвейль і З. Ворел [22], З. Опяль [84], У. Т. Рейд [85], Нгуен Тхе Хоан [44].

У 1962 році А. М. Самойленко [51, 52] доповнив існуючі результати Й. І. Гіхмана, М. А. Красносельского і С. Г. Крейна, Я. Курцвейля і З. Вореля [3, 21, 22, 80]. Підхід запропонований А. М. Самойленко дозволяє з'ясовувати питання про характер залежності розв'язків диференціальних рівнянь від параметра, відносно якого праві частини неперервні в інтегральному сенсі. Для цього достатньо перейти від диференціального рівняння до деякого, еквівалентного йому, інтегрального і досліджувати безпосередньо останнє.

Вказані результати поширено на задачу Коші для лінійних систем диференціальних рівнянь високих порядків і на комплекснозначні функції (див., наприклад, роботу В. А. Михайлеця і Н. В. Реви [36]).

Для крайових задач, у порівнянні із задачею Коші, зазначені питання істотно менш вивчені. Це пов'язано з великою різноманітністю крайових умов. Дослідження класу загальних лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку започатковано І. Т. Кігурадзе і М. Ашордіа в роботах [14 – 16] і [69] відповідно. Розв'язки y цих задач припускаються абсолютно неперервними функціями на відрізку $[a, b]$, а крайові умови задані у вигляді $By = q$, де $B : C([a, b], \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^m$ є довільний лінійний неперервний оператор (m — число рівнянь системи). У вказаних роботах встановлено умови, за яких розв'язки цих крайових задач є неперервними за параметром у нормованому просторі $C([a, b], \mathbb{R}^m)$. Суттєві узагальнення результатів І. Т. Кігурадзе отримали В. А. Михайлець і Н. В. Рева [38]. До того ж була розглянута більш загальна ситуація, коли розв'язки, коефіцієнти і праві частини диференціального рівняння є комплекснозначними функціями і тому у крайовій умові зображається лінійний неперервний оператор на парі комплексних банахових просторів.

Для систем лінійних диференціальних рівнянь довільного порядку $r \geq 1$ загальні крайові задачі досліджено В. А. Михайлецем і Г. О. Чехановою [82]. Встановлено конструктивні умови, за яких розв'язок неперервний за параметром у нормованому просторі $C^{(r-1)}([a, b], \mathbb{C}^m)$.

Широкі класи лінійних крайових задач, пов'язані з класичними шкалами функціональних просторів Соболєва і просторів $C^{(l)}$ неперервно диференційовних функцій, введені і досліджені відповідно у роботах [5, 37, 79] і [39, 40, 56]. Крайові умови для задач із вказаних класів задано у вигляді $By = q$, де B є довільний неперервний оператор, що діє з відповідного функціонального простору у скінченновимірний комплексний простір. Ці крайові задачі є найбільш загальними щодо вказаних просторів.

Слід вказати, що вперше найбільш загальна крайова задача щодо простору Соболєва W_1^1 була розглянута у роботі В. А. Михайлеця і Н. В. Реви [37]. Для такої задачі досліджено питання існування, єдиності і неперервності за параметром її розв'язку щодо простору Соболєва. Пізніше Т. І. Кодлюк і В. А. Михайлець [79] узагальнили результати роботи [37] на крайові задачі для систем диференціальних рівнянь першого порядку, найбільш загальні щодо простору Соболєва W_p^{n+1}, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ і $1 \leq p < \infty$. Є. В. Гнип, Т. І. Кодлюк і В. А. Михайлець [5] доповнили результати роботи [79] для випадку $r = 1$ твердженням про фредгольмовість введених там крайових задач і критерієм їх однозначної розв'язності, а потім поширили всі ці результати на системи диференціальних рівнянь довільного порядку $r \geq 2$. Введений і досліджуваний клас лінійних крайових задач є найбільш широким для систем, розв'язки яких пробігають простір Соболєва W_p^{n+r}. Для широкого класу залежних від параметра крайових задач Є. В. Гнип, В. А. Михайлець і О. О. Мурач [42] встановили конструктивний критерій неперервності за параметром їх розв'язків у відповідному просторі Соболєва. Зокрема, було подано, двобічну оцінку швидкості збіжності розв'язків незбуреної крайової задачі у вказаному просторі.

В. А. Михайлецем і Г. О. Чехановою [39, 40] було введено і досліджено найбільш загальні крайові задачі щодо простору $C^{(n+1)}([a, b], \mathbb{C}^m)$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$. Сформулюємо результат В. А. Михайлеця і Г. О. Чеханової про неперервну залежність від параметра розв'язків найбільш загальної крайової задачі. Цей результат буде використано у п. 4.2 дисертації.

Розглянемо крайову задачу, залежну від параметра ε, для системи диференціальниих рівнянь першого порядку

$$y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \tag{1.1}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = q(\varepsilon), \tag{1.2}$$

де для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ задано функції

$$A(\cdot,\varepsilon) \in C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^{m\times m}), \tag{1.3}$$

$$f(\cdot,\varepsilon) \in C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^{m}), \tag{1.4}$$

вектор $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ і лінійний неперервний оператор

$$B(\varepsilon) : C^{(n+1)}([a,b],\mathbb{C}^{m}) \to \mathbb{C}^m. \tag{1.5}$$

Розв'язок $y(\cdot,\varepsilon)$ цієї задачі розглядається у просторі $C^{(n+1)}([a,b],\mathbb{C}^{m})$.

Права частина $f(\cdot,\varepsilon)$ диференціального рівняння (1.1) пробігає простір $C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^{m})$ тоді і лише тоді, коли розв'язок $y(\cdot,\varepsilon)$ цього рівняння пробігає простір $C^{(n+1)}([a,b],\mathbb{C}^{m})$. Отже, крайова умова (1.2) з довільним неперервним оператором (1.5) є найбільш загальною для диференціального рівняння (1.1), коефіцієнти яких задовольняють умову (1.3). Ця крайова умова охоплює як усі види класичних крайових умов (початкові умови Коші, багатоточкові крайові умови, різні інтегральні умови, умови мішаних крайових задач), так і некласичні крайові умови, які містять похідні шуканої функції до порядку $n+1$ включно.

Твердження 1.1 (Михайлець і Чеханова [40]). *Припустимо, що однорідна крайова задача* (1.1), (1.2), *де* $\varepsilon = 0$, *має лише тривіальний розв'язок. Нехай при* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються такі чотири умови:*

1) $A(\cdot,\varepsilon) \to A(\cdot,0)$ *в* $C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^{m\times m})$*;*

2) $f(\cdot,\varepsilon)\to f(\cdot,0)$ *в* $C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^m)$*;*

3) $q(\varepsilon)\to q(0)$ *в* $\mathbb{C}^m$*;*

4) $B(\varepsilon)y\to B(0)y$ *в* $\mathbb{C}^m$ *для довільного* $y\in C^{(n+1)}([a,b],\mathbb{C}^m)$.

Тоді для кожного достатньо малого $\varepsilon\geq 0$ *існує єдиний розв'язок* $y(\cdot,\varepsilon)$ *крайової задачі* (1.1), (1.2) *і він має граничну властивість*

$$y(\cdot,\varepsilon)\to y(\cdot,0)\quad \text{в}\quad C^{(n+1)}([a,b],\mathbb{C}^m)\quad \text{при}\quad \varepsilon\to 0+\,. \tag{1.6}$$

Зауважимо, що результати В. А. Михайлеця і Г. О. Чеханової [39, 40] поширив В. О. Солдатов у роботі [56], для систем диференціальних рівнянь порядку $r\geq 1$. Не зважаючи на те, що такі системи зводяться до систем диференціальних рівнянь порядку $r=1$, для найбільш загальних крайових задач це застосування викликає складнощі з огляду на некласичність крайових умов. Автором роботи [56] був введений і досліджений найбільш широкий клас найбільш загальних крайових задач щодо функціонального комплексного простору $C^{(n+r)}$, де ціле $n\geq 0$. Припускається, що усі коефіцієнти і праві частини цих систем належать до простору $(C^{(n)})^m$. Розв'язки z кожної такої системи пробігають простір $(C^{(n+r)})^m$, а крайова умова задається у вигляді $Bz=q$, де $B:(C^{(n+r)})^m\to\mathbb{C}^{rm}$ є довільний лінійний неперервний оператор, а вектор $q\in\mathbb{C}^{rm}$. Для таких задач встановлено конструктивні достатні умови неперервної залежності їх розв'язків за параметром у просторі $(C^{(n+r)})^m$. У 2016 році О. О. Мурач і В. О. Солдатов [42] показали, що встановлені достатні умови є також і необхідними, тобто довели конструктивний критерій неперервної залежності за параметром розв'язку цієї задачі у просторі $n+r$ разів неперервно диференційованих функцій на відрізку. Крім того, у цій роботі було доведено, що похибка і нев'язка розв'язку мають однаковий порядок малості у відповідному просторі.

Отже, для класичних крайових умов ці результати є новими, оскільки отримано не лише достатні, а й необхідні умови неперервності за параметром розв'язків.

1.2. Крайові задачі, найбільш загальні щодо просторів дробової гладкості

У деяких задачах теорії диференціальних рівнянь використовуються не лише простори цілої гладкості, а й простори, де показником гладкості може бути і дробове число. Найбільш відомими серед просторів дробової гладкості є простори Гельдера або простори Слободецького.

В. А. Михайлецем, О. О. Мурачем і В. О. Солдатовим [83] введено і досліджено клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку щодо комплексних просторів Гельдера. Для залежних від параметра задач з цього класу сформулюємо основні результати отримані у роботі [83], які будуть використані у розділі 2 дисертації.

Розглянемо параметризовану числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ систему m лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) \equiv y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \le t \le b, \tag{1.7}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = q(\varepsilon). \tag{1.8}$$

Тут для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n+1,\alpha})^m$ є шуканою та довільним чином задано матрицю-функцію $A(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^{m\times m}$, вектор-функцію $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^m$, неперервний лінійний оператор

$$B(\varepsilon) : (C^{n+1,\alpha})^m \to \mathbb{C}^m \tag{1.9}$$

і вектор $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$. Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ крайова задача (1.7), (1.8) є найбільш загальною щодо простору Гельдера $(C^{n+1,\alpha})^m$.

Для цієї задачі вводяться такі граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(0) Гранична однорідна крайова задача $L(0)y(t,0) = 0, \quad a \le t \le b$, $B(0)y(\cdot,0) = 0$ має лише тривіальний розв'язок;

(I) $A(\cdot,\varepsilon) \to A(\cdot,0)$ в $(C^{n,\alpha})^{m\times m}$;

(II) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ в $\mathbb{C}^m$ для кожного $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$.

Говориться, що розв'язок крайової задачі (1.7), (1.8) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$ у просторі $(C^{n+1,\alpha})^m$, якщо виконуються такі дві умови:

($*$) Існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ і будь-яких правих частин $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^m$ та $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n+1,\alpha})^m$.

($**$) Із збіжності правих частин

$$f(\cdot,\varepsilon) \to f(\cdot,0) \;\text{ в }\; (C^{n,\alpha})^m, \quad q(\varepsilon) \to q(0) \;\text{ в }\; \mathbb{C}^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+$$

випливає збіжність розв'язків

$$y(\cdot,\varepsilon) \to y(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (C^{n+1,\alpha})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ .$$

Автори сформулювали і довели конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку у просторі Гельдера $(C^{n+1,\alpha})^m$.

Твердження 1.2 (Михайлець, Мурач, Солдатов [83]). *Для того, щоб розв'язок крайової задачі* (1.7), (1.8) *неперервно залежав від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *у просторі* $(C^{n+1,\alpha})^m$ *необхідно і достатньо, щоб ця задача задовольняла умову* (0) *і граничні умови* (I) *та* (II).

Умови ($*$) і ($**$) базового означення еквівалентні таким умовам відповідно ([59], зауваження 2.1):

($\maltese$) існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що неперервний оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) : (C^{n+1,\alpha})^m \to (C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^m$$

є оборотним для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$;

($\maltese\maltese$) обернений оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}$ збігається сильно до $(L(0), B(0))^{-1}$ при $\varepsilon \to 0+$.

Зокрема, граничні умови (I) і (II) разом еквівалентні такій умові:

(A) оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ збігається до $(L(0), B(0))$ при $\varepsilon \to 0+$ в сильній операторній топології.

З твердження 1.2 випливає, що при виконанні умови (0), правильна еквівалентність

$$(\mathrm{A}) \ \Leftrightarrow \ \big((\maltese) \wedge (\maltese\maltese)\big).$$

Крім того, у роботі [83] доведено, що похибка і нев'язка розв'язків мають однаковий порядок малості у просторі Гельдера $(C^{n+1,\alpha})^m$ для систем диференціальних рівнянь першого порядку.

Твердження 1.3 (Михайлець, Мурач, Солдатов [83])**.** *Нехай для крайової задачі* (1.7), (1.8) *виконуються умова* (0) *і граничні умови* (I) *та* (II). *Тоді існують додатні числа $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, $\varkappa_1$ і $\varkappa_2$ такі, що для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ виконується двобічна оцінка*

$$\varkappa_1 \, d_{n,\alpha}(\varepsilon) \le \|y(\cdot, 0) - y(\cdot, \varepsilon)\|_{n+1,\alpha} \le \varkappa_2 \, d_{n,\alpha}(\varepsilon).$$

Тут числа ε_2, $\varkappa_1$ і $\varkappa_2$ не залежать від вектор-функцій $y(\cdot, 0)$ і $y(\cdot, \varepsilon)$.

О. О. Мурачем і В. О. Солдатовим [43] введено і досліджено найбільш широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать до комплексного простору Гельдера-Зігмунда $C^s := C^s([a,b],\mathbb{C})$, де дійсне $s > 0$. Для таких задач встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків у цьому просторі.

Роботу [7], Є. В. Гнип і В. А. Михайлеця, присвячено дослідженню неперервної залежності від параметра ε розв'язків крайових задач для систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку на відрізку $[a,b]$ за нормою комплексного простору Слободецького $(W_p^{s+1})^m$, де неціле $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$ і дійсне $p \in (1,\infty)$. Твердження 1.2 і твердження 1.3 у просторі $(W_p^{s+1})^m$ сформульовано і доведено Є. В. Гнип і В. А. Михайлецем [7].

Викликає інтерес поширення цих результатів на системи диференціальних рівнянь довільних порядків.

1.3. Багатоточкові крайові задачі

Класичним об'єктом досліджень теорії звичайних диференціальних рівнянь є багатоточкові крайові задачі. Їх особливістю є те, що проміжні точки, які входять в крайові умови, породжують ряд проблем: порушення гладкості функції Гріна, відсутність спряженої задачі та інше. Функція Гріна відображає специфіку крайової задачі і є досить складним об'єктом. Використання функції Гріна дозволяє вирішити питання, які виникають в даних задачах.

Питання існування, єдиності і побудови наближених методів знаходження розв'язків багатоточкових крайових задач досліджували І. Т. Кігурадзе [16], В. Д. Пономарьов [48], Н. В. Рева [49], А. М. Самойленко [51, 53], Дж. Сансоне [55], К. А. Хасеинов [61, 63], L. K. Jackson [78]. Значна кількість робіт відомих математиків присвячена питанням про властивості функції Гріна цих задач, зокрема І. Т. Кігурадзе [16], А. Ю. Левін [23, 26], Ю. В. Покорний [45, 46, 47], К. А. Хасеинов [62] Є. С. Чічкін [68], P. R. Beesack [70], L. J. Grimm і P. W. Eloe [77] та інші.

Теореми про існування, єдиність і неперервність за параметром розв'язків загальних і найбільш загальних крайових задач та методика їх доведень були застосовані до дослідження багатоточкових крайових задач у роботах Є. В. Гнип і Т. І. Кодлюк [4], Т. І. Кодлюк [17], Г. О. Чеханової [65, 67], до вивчення питань про існування і неперервну залежність від параметра матриць Гріна крайових задач у роботах В. А. Михайлеця, Т. І. Кодлюк і Н. В. Реви [19, 37, 38, 79], В. А. Михайлеця і Г. О. Чеханової [66, 82], у спектральній теорії диференціальних операторів із сингулярними коефіцієнтами у роботах А. С. Горюнова, В. А. Михайлеця і К. Панкрашкіна [11, 73, 74, 75].

Для систем диференціальних рівнянь першого порядку у просторах Слободецького некласичну багатоточкову крайову задачу досліджено Є. В. Гнип [6].

В. О. Солдатов ввів і дослідив нові класи залежних від параметра багатоточкових крайових задач для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь як першого порядку у просторах Гельдера [58], так і вищих порядків у просторах неперервно диференційованих функцій [57]. Як приклад цих застосувань, сформулюємо результат В. О. Солдатова [59] (п. 4.1) про неперервну залежність від параметра розв'язків багатоточкових крайових задач у просторах Гельдера. Цей результат близький до питань розглянутих у четвертому розділі дисертації.

Нехай задано $m \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$ і $\varepsilon_0 > 0$. На відрізку $[a, b]$ розглядається така система лінійних диференціальних рівнянь першого порядку для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) \equiv y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \tag{1.10}$$

тут вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n+1,\alpha})^m$ є шуканою та довільним чином задано матрицю-функцію $A(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^{m\times m}$ і вектор-функцію $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^m$.

Для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ пов'яжемо з системою (1.10) багатоточкову крайову умову

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) \equiv \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=1}^{\omega_j} \sum_{l=0}^{n+1} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon),\varepsilon) = q(\varepsilon). \tag{1.11}$$

Тут усі числа $\omega_j \in \mathbb{N}$, матриці $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, точки $t_{j,k}(\varepsilon) \in [a, b]$ та вектор $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ є заданими.

Для крайової задачі (1.10), (1.11) не припускається, що коефіцієнти $A(t,\varepsilon)$, $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)$ чи точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мають яку-небудь регулярність за параметром ε.

Використання у крайовій умові (1.11) повторної суми за індексами j і k зумовлено подальшими припущеннями щодо поведінки точок $t_{j,k}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ у залежності від значень параметра j. Вимагатиметься, щоб для кожного фіксованого $j \in \overline{1,p}$ усі точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мали спільну границю при $\varepsilon \to 0+$, а для точок $t_{0,k}(\varepsilon)$ така вимога не висуватиметься.

З огляду на це, у граничному випадку $\varepsilon = 0$ розглядається така крайова задача

$$L(0)y(t,0) = f(t,0), \quad a \leq t \leq b, \tag{1.12}$$

$$B(0)y(\cdot,0) \equiv \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+1} \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j,0) = q(0). \tag{1.13}$$

Тут усі матриці $\beta_j^{(l)} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, точки $t_j \in [a,b]$ та вектор $q(0) \in \mathbb{C}^m$ є заданими.

Звісно, для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ лінійне відображення $y \mapsto B(\varepsilon)y$, де $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$, є обмеженим оператором

$$B(\varepsilon)\colon (C^{n+1,\alpha})^m \to \mathbb{C}^m. \tag{1.14}$$

Зроблені припущення щодо системи (1.10) та обмеженість оператора (1.14) означають, що крайова задача (1.10), (1.11) є найбільш загальною щодо простору Гельдера $C^{n+1,\alpha}$ для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$, як і задача (1.10), (1.13).

Для багатоточкової крайової задачі (1.10), (1.11) розглядаються такі

Граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(b1) $t_{j,k}(\varepsilon) \to t_j$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ та $k \in \overline{1,\omega_j}$;

(b2) $\sum\limits_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \to \beta_j^{(l)}$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ та $l \in \overline{0,n+1}$;

(b3) $\|\beta_{j,k}^{(n+1)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j|^{\alpha} \to 0$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ та $k \in \overline{1,\omega_j}$;

(b4) $\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j(0)| \to 0$ для усіх $j \in \overline{1,p}$, $k \in \overline{1,\omega_j}$ та $l \in \overline{0,n}$;

(b5) $\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \to 0$ для усіх $k \in \overline{1,\omega_0}$ та $l \in \overline{0,n+1}$.

Твердження 1.4 (Солдатов [58])**.** *Нехай крайова задача* (1.10), (1.11) *задовольняє умову* (0) *і граничні умови* (I), (b1) – (b5). *Тоді її розв'язок неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$.

Актуальним для подальшого розгляду залишається питання поширення цих результатів на клас багатоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь довільного порядку.

Висновки до розділу 1

У першому розділі обговорено об'єкт дослідження — одновимірні крайові задачі, найбільш загальні щодо просторів Гельдера або Слободецького, а також предмет дослідження — характер залежності за параметром розв'язків таких крайових задач.

З наведених відомостей можна зробити такі висновки:

1. Недослідженим є питання неперервної залежності за параметром розв'язків найбільш загальних крайових задач для систем лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$ у просторах дробової гладкості, таких як простори Гельдера та простори Слободецького.

2. Актуально розглянути застосування теорем про неперервність за параметром розв'язків найбільш загальних крайових задач до некласичних багатоточкових крайових задач.

РОЗДІЛ 2
КРАЙОВІ ЗАДАЧІ, НАЙБІЛЬШ ЗАГАЛЬНІ ЩОДО ПРОСТОРІВ ГЕЛЬДЕРА

У цьому розділі вводимо і досліджуємо максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають відповідний комплексний простір Гельдера.

Випадок $r = 1$ досліджено раніше В. А. Михайлецем, О. О. Мурачем та В. О. Солдатовим [83].

2.1. Постановка задачі

Нехай задано довільним чином (скінченний) відрізок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, цілі числа $m \geq 1$, $n \geq 0$ і $r \geq 2$ та дійсне число α таке, що $0 < \alpha \leq 1$. Розглянемо крайову задачу для системи m лінійних диференціальних рівнянь r-го порядку

$$Ly(t) \equiv y^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) y^{(r-j)}(t) = f(t), \quad a \leq t \leq b, \tag{2.1}$$

$$By = c. \tag{2.2}$$

Тут вектор-функція $y \in (C^{n+r,\alpha})^m$ є шуканою, а всі матриці-функції $A_{r-j} \in (C^{n,\alpha})^{m \times m}$, де $j \in \{1, \dots, r\}$, вектор-функція $f \in (C^{n,\alpha})^m$, лінійний неперервний оператор

$$B = (B_1, \dots, B_r) : (C^{n+r,\alpha})^m \to \mathbb{C}^{rm} \tag{2.3}$$

і вектор $c \in \mathbb{C}^{rm}$ є довільно вибраними, причому вектор-функції і числові вектори подано у вигляді стовпців. Оператор B зручно представляти як набір операторів $B_1, \dots, B_r$ кожен з яких діє у простір $\mathbb{C}^m$, а отже і крайову умову (2.2) можна трактувати як систему r крайових умов.

Крайова умова (2.2) з неперервним оператором (2.3) є найбільш загальною для системи диференціальних рівнянь (2.1) з правою частиною класу $(C^{n,\alpha})^m$, що випливає з леми 2.1, поданої нижче. Ця умова охоплює як усі відомі типи класичних крайових умов (умови задачі Коші, різні багатоточкові умови, інтегральні умови, умови змішаних крайових задач), так і різні некласичні крайові умови. Останні можуть містити похідні шуканих функцій порядку k, де $r \leq k \leq n+r$. Тому крайова задача (2.1), (2.2) *є найбільш загальною щодо простору Гельдера* $(C^{n+r,\alpha})^m$. Стосовно інших функціональних просторів, найбільш загальна крайова задача розглядалася раніше в роботах Н. В. Реви [37], Т. І. Кодлюк і В. А. Михайлеця [79], Є. В. Гнип, Т. І. Кодлюк і В. А. Михайлеця [5], В. А. Михайлеця і Г. О. Чеханової [39, 40], В. О. Солдатова [56].

Лема 2.1. *Нехай матриця-функція* $A_{r-j} \in (C^{n,\alpha})^{m\times m}$ *для кожного* $j \in \{1, \dots, r\}$. *Якщо* r *разів диференційовна вектор-функція* $y : [a,b] \to \mathbb{C}^m$ *є розв'язком рівняння* (2.1) *для деякої правої частини* $f \in (C^{n,\alpha})^m$, *то* $y \in (C^{n+r,\alpha})^m$. *Більше того, якщо* f *пробігає весь простір* $(C^{n,\alpha})^m$, *то розв'язки рівняння* (2.1) *пробігають весь простір* $(C^{n+r,\alpha})^m$.

Доведення. Припустимо, що для деякого $f \in (C^{n,\alpha})^m$ r разів диференційовна вектор-функція y є розв'язком рівняння (2.1). Доведемо, що $y \in (C^{n+r,\alpha})^m$. Враховуючи, що всі A_{r-j} і f є принаймні неперервними на $[a,b]$, маємо включення

$$y^{(r)} = f - \sum_{j=1}^{r} A_{r-j} y^{(r-j)} \in (C^{0,\alpha})^m.$$

Звідси, $y \in (C^{r,\alpha})^m$. Зауважимо, що

$$\begin{gathered}\big(\, y \in (C^{l,\alpha})^m \;\Rightarrow\; y \in (C^{l+1,\alpha})^m \,\big) \\ \text{для кожного} \quad l \in \mathbb{Z} \cap [r, n+r-1].\end{gathered} \tag{2.4}$$

Справді, якщо $y \in (C^{l,\alpha})^m$ для деякого цілого числа $l \in [r, n+r-1]$, то

$$y^{(r)} = f - \sum_{j=1}^{r} A_{r-j} y^{(r-j)} \in (C^{l-r+1,\alpha})^m,$$

оскільки $l - r + 1 \le n$ й тому

$$f \in (C^{n,\alpha})^m \subset (C^{l-r+1,\alpha})^m$$

і всі

$$A_{r-j} \in (C^{n,\alpha})^{m\times m} \subset (C^{l-r+1,\alpha})^m.$$

Отже, $y \in (C^{l+1,\alpha})^m$. Із включення $y \in (C^{r,\alpha})^m$ і властивості (2.4) випливає потрібне включення $y \in (C^{n+r,\alpha})^m$.

Доведемо останнє твердження леми. Для довільного $f \in (C^{n,\alpha})^m$ існує r разів диференційовний розв'язок y рівняння (2.1). Як щойно було показано, $y \in (C^{n+r,\alpha})^m$. Отже, якщо f пробігає увесь простір $(C^{n,\alpha})^m$, то розв'язки рівняння (2.1) потрапляють у простір $(C^{n+r,\alpha})^m$. Ці розв'язки заповнюють увесь простір $(C^{n+r,\alpha})^m$, оскільки

$$y \in (C^{n+r,\alpha})^m \;\Rightarrow\; f = Ly \in (C^{n,\alpha})^m.$$

Лему 2.1 доведено.

2.2. Розв'язність задачі у просторі Гельдера

Крайову задачу (2.1), (2.2) коротко запишемо у вигляді операторного рівняння

$$(L, B)y = (f, c),$$

де (L, B) — лінійний оператор у парі банахових просторів

$$(L, B) : (C^{n+r,\alpha})^m \to (C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^{rm}. \tag{2.5}$$

Теорема 2.1. *Лінійний оператор* (2.5) *обмежений і фредгольмів з індексом нуль.*

Доречно нагадати, що лінійний неперервний оператор $T : E_1 \to E_2$, де E_1 і E_2 — банахові простори, називають фредгольмовим, якщо його ядро

$$\ker T := \{x \in E_1 : Tx = 0\}$$

і коядро $E_2/T(E_1)$ скінченновимірні. Якщо цей оператор фредгольмів, то його область значень $T(E_1)$ замкнена в E_2, а індекс

$$\operatorname{ind} T := \dim \ker T - \dim(E_2/T(E_1))$$

скінченний (див., наприклад, [64, лема 19.1.1]). Зауважимо, що часто в україномовній та російськомовній математичній літературі фредгольмів оператор з довільним індексом називають нетеровим, а термін "фредгольмів" застосовують до нетерових операторів з індексом нуль. Використана у дисертації термінологія є загальноприйнятою в англомовній літературі.

Доведення теореми 2.1. Обмеженість лінійного оператора

$$L : (C^{n+r,\alpha})^m \to (C^{n,\alpha})^m$$

безпосередньо випливає з означення норм у просторах Гельдера $C^{l,\alpha}$, де ціле $l \geq 0$, і того, що кожний із цих просторів утворює банахову алгебру. Оператор B обмежений за означенням. Доведемо фредгольмовість оператора (2.5).

Уведемо лінійний обмежений оператор $C : (C^{n+r,\alpha})^m \to \mathbb{C}^{rm}$ за формулою

$$Cy := \operatorname{col}(y(a), y'(a), \ldots, y^{(r-1)}(a)) \quad \text{для довільного} \quad y \in (C^{n+r,\alpha})^m.$$

Розглянемо неоднорідну задачу Коші

$$(L, C)y = (f, c) \in (C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^{rm}.$$

Вона є окремим випадком досліджуваної задачі (2.1), (2.2). Ця задача має єдиний розв'язок y для будь-якої правої частини $(f, c) \in (C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^{rm}$. За лемою 2.1, $y \in (C^{n+r,\alpha})^m$. Отже, лінійний обмежений оператор

$$(L, C) : (C^{n+r,\alpha})^m \to (C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^{rm} \tag{2.6}$$

є бієктивним відображенням. Тому, (2.6) — ізоморфізм за теоремою Банаха про обернений оператор.

Оператор (L, B) запишемо у вигляді

$$(L, B) = (L, C) + (0, B - C), \tag{2.7}$$

де перший доданок — ізоморфізм, а другий доданок — скінченновимірний оператор, обидва на парі просторів (2.5). Тому за теоремою Нікольського (див., наприклад, [90, § 21.5]), оператор (2.5) є фредгольмовим з індексом нуль.

Теорему 2.1 доведено.

Встановимо критерій оборотності оператора (2.5). Для кожного номера $k \in \{0, \ldots, r-1\}$ розглянемо матричну задачу Коші

$$Y_k^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) Y_k^{(r-j)}(t) = 0, \quad a \leq t \leq b, \tag{2.8}$$

$$Y_k^{(j)}(t_0) = \delta_{k,j} I_m, \quad j = 0, \ldots, r-1. \tag{2.9}$$

Тут $Y_k(t) = (y_k^{\alpha,\beta}(t))_{\alpha,\beta=1}^m$ — шукана $m \times m$ — матриця-функція, точку $t_0 \in [a, b]$ вибрано довільно, $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера, а I_m — одинична матриця порядку m. Ця задача є сукупністю m задач Коші, які є окремим випадком задачі (2.1), (2.2). Тому, за лемою 2.1, єдиний розв'язок $Y_k(t)$ задачі (2.8), (2.9) належить до $(C^{n+r,\alpha})^{m\times m}$.

Як відомо, загальний розв'язок однорідного рівняння (2.1) з $f \equiv 0$ набуває вигляду

$$y = \sum_{k=0}^{r-1} Y_k q_k, \tag{2.10}$$

де вектор-стовпці $q_k \in \mathbb{C}^m$ довільні (див., наприклад, [13, розд. 2, п. 2.5]).

Наслідуючи [15, с. 8], уведемо блочну числову матрицю

$$[BY] := ([BY_0] \ ... \ [BY_{r-1}]), \tag{2.11}$$

де

$$[BY_k] := \left(B \begin{pmatrix} y_k^{1,1} \\ \vdots \\ y_k^{m,1} \end{pmatrix} \ \ldots \ B \begin{pmatrix} y_k^{1,m} \\ \vdots \\ y_k^{m,m} \end{pmatrix} \right)$$

для кожного номера $k \in \{0, ..., r-1\}$. Коротко кажучи, кожна матриця $[BY_k]$ розміру $rm \times m$ утворена у результаті дії оператора B на стовпці матриці Y_k. Отже, $[BY]$ — квадратна матриця порядку rm.

Теорема 2.2. *Оператор* (2.5) *оборотний тоді і тільки тоді, коли матриця* (2.11) *невироджена.*

Доведення теореми 2.2. За теоремою 2.1 оператор (2.5) фредгольмів. Отже, він оборотний тоді і тільки тоді, коли $\ker(L, B) = \{0\}$. Тому для доведення теореми 2.2 достатньо показати, що

$$\ker(L, B) \neq \{0\} \Leftrightarrow \det[BY] = 0.$$

Для цього нам знадобиться така рівність:

$$B(Y_k q_k) = [BY_k] q_k \text{ для кожного } k \in \{0, \dots, r-1\}, \tag{2.12}$$

де $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{C}^m$. Вона перевіряється безпосередньо (див., наприклад, [59, лема 2.2]).

Нехай $\ker(L, B) \neq \{0\}$. Тоді існує нетривіальний розв'язок однорідного рівняння $(L, B)y = (0, 0)$, який подаємо у вигляді (2.10), де хоча б один із вектор-стовпців $q_0, q_1, \dots, q_{r-1} \in \mathbb{C}^m$ відмінний від нуля. Тому з урахуванням (2.12), маємо рівності

$$0 = By = \sum_{k=0}^{r-1} B(Y_k q_k) = \sum_{k=0}^{r-1} [BY_k] q_k.$$

Отже, блоки матриці (2.11) є лінійно залежними, де коефіцієнтами служать стовпці $q_k \in \mathbb{C}^m$. Отож,

$$\ker(L, B) \neq \{0\} \Rightarrow \det[BY] = 0.$$

Це рівносильно лінійній залежності стовпців цієї матриці (див. нижче зауваження 2.1).

Обґрунтуємо обернену імплікацію. Нехай $\det[BY] = 0$. Тоді стовпці матриці $[BY]$ є лінійно залежними. Це еквівалентно тому, що

$$\sum_{k=0}^{r-1} [BY_k] q_k = 0, \tag{2.13}$$

для деяких вектор-стовпців $q_0, q_1, \dots, q_{r-1} \in \mathbb{C}^m$, серед яких принаймні один відмінний від нуля. Означимо ненульову функцію $y \in (C^{n+r,\alpha})^m$ за формулою (2.10). Для неї $Ly = 0$ і

$$By = \sum_{k=0}^{r-1} B(Y_k q_k) = \sum_{k=0}^{r-1} [BY_k] q_k = 0$$

на підставі рівностей (2.12) і (2.13). Отже, $y \in \ker(L, B)$, тобто $\ker(L, B) \neq \{0\}$. Таким чином,

$$\det[BY] = 0 \Rightarrow \ker(L, B) \neq \{0\}.$$

Теорему 2.2 доведено.

Для систем диференціальних рівнянь першого порядку теореми 2.1 і 2.2 доведено В. А. Михайлецем, О. О. Мурачем і В. О. Солдатовим [83, c. 5 – 6] (теорема 3.1, теорема 3.3), а у випадку $\alpha = 0$ і довільного $r \in \mathbb{N}$ — [87, c. 787] (теорема 1, теорема 2).

Зауваження 2.1. Нехай задано $l \geq 2$ числових матриць $M_1, \ldots, M_l$ одного порядку $\mu \times \nu$, де $\mu, \nu \in \mathbb{N}$. Утворимо з них блочну матрицю

$$M := (M_1 \vdots \ldots \vdots M_l)$$

порядку $\mu \times (\lambda\nu)$. Перевіримо, що блоки $M_1, \ldots, M_l$ матриці M лінійно залежні з коефіцієнтами-векторами з $\mathbb{C}^\nu$ тоді і лише тоді, коли рядки матриці M лінійно залежні (з числовими коефіцієнтами). Нехай

$$M_k = (m_k^{\alpha,\beta})_{\substack{\alpha=1,\ldots,\mu \\ \lambda=1,\ldots,\mu}}$$

для кожного номера $k \in \{1, \ldots, l\}$. Для довільних вектор-стовпців $\lambda_k = \mathrm{col}\{\lambda_k^1, \ldots, \lambda_k^\nu\} \in \mathbb{C}^m$ маємо:

$$\sum_{k=1}^{l} M_k \lambda_k = \sum_{k=1}^{l} \begin{pmatrix} \sum\limits_{\beta=1}^{\nu} m_k^{1,\beta} \lambda_{k,\beta} \\ \vdots \\ \sum\limits_{\beta=1}^{\nu} m_k^{\mu,\beta} \lambda_{k,\beta} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{l} \sum_{\beta=1}^{\nu} \begin{pmatrix} m_k^{1,\beta} \lambda_{k,\beta} \\ \vdots \\ m_k^{\mu,\beta} \lambda_{k,\beta} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{l} \sum_{\beta=1}^{\nu} \lambda_{k,\beta} \begin{pmatrix} m_k^{1,\beta} \\ \vdots \\ m_k^{\mu,\beta} \end{pmatrix}.$$

Отже, умова „рівність

$$\sum_{k=1}^{l} M_k \lambda_k = 0$$

виконується для деяких вектор-стовпців $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{C}^m$ таких, що принаймні один з них відмінний від нульового стовпця“, рівносильна лінійній залежності стовпців

$$\begin{pmatrix} m_k^{1,\beta} \\ \vdots \\ m_k^{\mu,\beta} \end{pmatrix}, \ k = 1, \dots, l, \ \beta = 1, \dots, \nu, \ \text{матриці } M.$$

2.3. Критерій неперервності за параметром розв'язків задачі у просторі Гельдера

Зафіксуємо число $\varepsilon_0 > 0$. Розглянемо лінійну крайову задачу, для систем $m \geq 1$ диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$ вигляду (2.1), (2.2), залежну від числового параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) \equiv y^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,\varepsilon)y^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \tag{2.14}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = c(\varepsilon). \tag{2.15}$$

Тут для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n+r,\alpha})^m$ є шуканою, а всі матриці-функції $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^{m\times m}$, де $j \in \{1,\ldots,r\}$, вектор-функція $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^m$, лінійний неперервний оператор

$$B(\varepsilon) : (C^{n+r,\alpha})^m \to \mathbb{C}^{rm} \tag{2.16}$$

і вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ є довільно вибраними. Отже, для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ крайова задача (2.14), (2.15) є найбільш загальною щодо простору Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$.

Для цієї задачі розглянемо такі

Граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(2.I) $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \to A_{r-j}(\cdot,0)$ в $(C^{n,\alpha})^{m\times m}$ для кожного номера $j \in \{1,\ldots,r\}$;

(2.II) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ в $\mathbb{C}^{rm}$ для довільної вектор-функції $y \in (C^{n+r,\alpha})^m$.

Крім того, розглядається

Умова (2.0). Гранична однорідна крайова задача

$$L(0)y(t,0) = 0, \quad a \leq t \leq b,$$

$$B(0)y(\cdot,0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

Введемо

Базове означення розд. 2. Говоримо, що розв'язок крайової задачі (2.14), (2.15) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$ у просторі $(C^{n+r,\alpha})^m$, якщо виконуються такі дві умови:

($*$) Існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ і будь-яких правих частин $f(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^m$ та $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$, ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n+r,\alpha})^m$.

($**$) Із збіжності правих частин

$$f(\cdot, \varepsilon) \to f(\cdot, 0) \ \text{ в } \ (C^{n,\alpha})^m, \quad c(\varepsilon) \to c(0) \ \text{ в } \ \mathbb{C}^{rm} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+$$

випливає збіжність розв'язків

$$y(\cdot, \varepsilon) \to y(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad (C^{n+r,\alpha})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ .$$

Сформулюємо основну теорему другого розділу.

Теорема 2.3. *Для того, щоб розв'язок крайової задачі* (2.14), (2.15) *неперервно залежав від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *у просторі* $(C^{n+r,\alpha})^m$ *необхідно і достатньо, щоб ця задача задовольняла умову* (2.0) *і граничні умови* (2.I) *та* (2.II).

Для систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку ця теорема сформульована і доведена В. А. Михайлецем, О. О. Мурачем і В. Солдатовим [83, с. 3] (основна теорема) або (див. п. 1.2 дисертації, твердження 1.2), а у випадку $\alpha = 0$ і довільного $r \in \mathbb{N}$ — [87, с. 788] (теорема 3).

Доведення теореми 2.3 подамо у наступних пп. 2.4 (необхідність) і 2.5 (достатність). Воно буде спиратися на результат [83, основна теорема].

2.4. Доведення критерію. Необхідність

Обґрунтуємо необхідність в теоремі 2.3. Пов'яжемо з крайовою задачею (2.14), (2.15) лінійний неперервний оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) : (C^{n+r,\alpha})^m \to (C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^{rm} \tag{2.17}$$

для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. За теоремою 2.1, цей оператор є фредгольмовим з індексом нуль. Тому умова (2.0) еквівалентна тому, що оператор (2.17) для $\varepsilon = 0$ є ізоморфізмом

$$(L(0), B(0)) : (C^{n+r,\alpha})^m \leftrightarrow (C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^{rm}. \tag{2.18}$$

Припускаємо, що задача (2.14), (2.15) задовольняє базове означення. Тоді виконується умова (2.0). Залишається довести, що для цієї задачі виконуються умови (2.I) та (2.II). Проведемо міркування у три кроки.

Крок 1. Доведемо, що крайова задача (2.14), (2.15) задовольняє граничну умову (2.I). Зведемо цю задачу до крайової задачі для системи диференціальних рівнянь першого порядку (див., наприклад, [13, п. 2.5]). Для цього, як звичайно, покладемо

$$x(\cdot, \varepsilon) := \mathrm{col}\big(y(\cdot, \varepsilon), y'(\cdot, \varepsilon), \ldots, y^{(r-1)}(\cdot, \varepsilon)\big) \in (C^{n+1,\alpha})^{rm}, \tag{2.19}$$

$$g(\cdot, \varepsilon) := \mathrm{col}\big(\underbrace{0, \ldots, 0,}_{(r-1)m \text{ разів}} f(\cdot, \varepsilon)\big) \in (C^{n,\alpha})^{rm},$$

та

$$A(\cdot, \varepsilon) := \begin{pmatrix} O_m & -I_m & O_m & \ldots & O_m \\ O_m & O_m & -I_m & \ldots & O_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_m & O_m & O_m & \ldots & -I_m \\ A_0(\cdot, \varepsilon) & A_1(\cdot, \varepsilon) & A_2(\cdot, \varepsilon) & \ldots & A_{r-1}(\cdot, \varepsilon) \end{pmatrix} \in (C^{n,\alpha})^{rm \times rm}.$$

Тут $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ та, нагадаємо, I_m — одинична матриця, а O_m — нуль-матриця порядку $m\times m$. Якщо вектор-функція $y(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n+r,\alpha})^m$ є розв'язком системи (2.14), то $x(\cdot, \varepsilon)$ є розв'язком системи

$$x'(t, \varepsilon) + A(t, \varepsilon)x(t, \varepsilon) = g(t, \varepsilon), \quad a \leq t \leq b.$$

Розглянемо таку матричну крайову задачу:

$$Y^{(r)}(t, \varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t, \varepsilon)Y^{(r-j)}(t, \varepsilon) = O_{m\times rm}, \quad a \leq t \leq b,$$

$$[B(\varepsilon)Y(\cdot, \varepsilon)] = I_{rm}. \tag{2.20}$$

Тут,

$$Y(\cdot, \varepsilon) := \big(y_{j,k}(\cdot, \varepsilon)\big)_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,rm}}$$

шукана $m \times rm$ — матриця-функція з простору $(C^{n+r,\alpha})^{m\times rm}$. Крім того, $O_{m\times rm}$, як звичайно, позначає нульову матрицю порядку $m \times rm$, і

$$[B(\varepsilon)Y(\cdot, \varepsilon)] := \left(B(\varepsilon)\begin{pmatrix} y_{1,1}(\cdot, \varepsilon) \\ \vdots \\ y_{m,1}(\cdot, \varepsilon) \end{pmatrix} \;\ldots\; B(\varepsilon)\begin{pmatrix} y_{1,rm}(\cdot, \varepsilon) \\ \vdots \\ y_{m,rm}(\cdot, \varepsilon) \end{pmatrix} \right).$$

Ця задача є сукупністю rm крайових задач (2.14), (2.15), праві частини яких не залежать від ε. За умовою $(*)$ базового означення ця задача має єдиний розв'язок $Y(\cdot, \varepsilon)$ для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$. Більше того, внаслідок умови $(**)$ цього означення, кожна функція

$$y_{j,k}(\cdot, \varepsilon) \to y_{j,k}(\cdot, 0) \;\text{ в }\; C^{n+r,\alpha} \;\text{ при }\; \varepsilon \to 0+\,. \tag{2.21}$$

Для будь-яких $k \in \{1, \ldots, rm\}$ і $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ означимо вектор-функцію $x_k(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n+1,\alpha})^{rm}$ за формулою (2.19), у якій замінимо $x(\cdot, \varepsilon)$ на $x_k(\cdot, \varepsilon)$ і візьмемо

$$y(\cdot, \varepsilon) := \mathrm{col}(y_{1,k}(\cdot, \varepsilon), \ldots, y_{m,k}(\cdot, \varepsilon)).$$

Нехай $X(\cdot,\varepsilon)$ позначає матрицю-функцію з простору $(C^{n+1,\alpha})^{rm\times rm}$ таку, що $x_k(\cdot,\varepsilon)$ — її k-й стовпець для кожного $k\in\{1,\dots,rm\}$. Ця функція задовольняє матричне диференціальне рівняння

$$X'(t,\varepsilon)+A(t,\varepsilon)X(t,\varepsilon)=O_{rm},\quad a\le t\le b. \tag{2.22}$$

Крім того, $\det X(t,\varepsilon)\neq 0$ для кожного $t\in[a,b]$, бо інакше стовпці матриці-функції $X(\cdot,\varepsilon)$ і, отже, $Y(\cdot,\varepsilon)$ були б лінійно залежними на $[a,b]$ всупереч крайовій умові (2.20). Завдяки (2.21), отримаємо збіжність $X(\cdot,\varepsilon)\to X(\cdot,0)$ на банаховій алгебрі $(C^{n+1,\alpha})^{rm\times rm}$ при $\varepsilon\to 0+$. Отже, $(X(\cdot,\varepsilon))^{-1}\to(X(\cdot,0))^{-1}$ в цій алгебрі. Тому, враховуючи (2.22), робимо висновок, що

$$A(\cdot,\varepsilon)=-X'(\cdot,\varepsilon)(X(\cdot,\varepsilon))^{-1}\to -X'(\cdot,0)(X(\cdot,0))^{-1}=A(\cdot,0)$$

в $(C^{n,\alpha})^{rm\times rm}$ при $\varepsilon\to 0+$. Таким чином, задача (2.14), (2.15) задовольняє граничну умову (2.I). Зокрема,

$$\|A_{r-j}(\cdot,\varepsilon)\|_{n,\alpha}=O(1)\ \text{ при }\ \varepsilon\to 0+\ \text{ для кожного }\ j\in\{1,\dots,r\}. \tag{2.23}$$

Крок 2. Доведемо, що

$$\|B(\varepsilon)\|=O(1)\quad\text{при}\quad \varepsilon\to 0+\,. \tag{2.24}$$

Тут $\|\cdot\|$ позначає норму обмеженого оператора, що діє з простору $(C^{n+r,\alpha})^m$ у простір $\mathbb{C}^{rm}$.

Припустимо супротивне; тоді існує числова послідовність $(\varepsilon^{(k)})_{k=1}^{\infty}\subset(0,\varepsilon_1)$ така, що

$$\varepsilon^{(k)}\to 0\quad\text{і}\quad \|B(\varepsilon^{(k)})\|\to\infty\quad\text{при}\quad k\to\infty. \tag{2.25}$$

При цьому можна вважати, що $\|B(\varepsilon^{(k)})\|\neq 0$ для кожного $k\in\mathbb{N}$. Для кожного $k\in\mathbb{N}$ виберемо функцію $w_k\in(C^{n+r,\alpha})^m$, яка задовольняє умови

$$\|w_k\|_{n+r,\alpha}=1\quad\text{і}\quad |B(\varepsilon^{(k)})w_k|\ge\frac{1}{2}\,\|B(\varepsilon^{(k)})\|. \tag{2.26}$$

Покладемо

$$y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) := \|B(\varepsilon^{(k)})\|^{-1}\, w_k \in (C^{n+r,\alpha})^m,$$
$$f(\cdot,\varepsilon^{(k)}) := L(\varepsilon^{(k)})\, y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \in (C^{n,\alpha})^m,$$
$$c(\varepsilon^{(k)}) := B(\varepsilon^{(k)})\, y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \in \mathbb{C}^{rm}.$$

Враховуючи співвідношення (2.25) і (2.26), маємо збіжність

$$y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \to 0 \ \text{ в } \ (C^{n+r,\alpha})^m \ \text{ при } \ k\to\infty. \tag{2.27}$$

Таким чином,

$$f(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \to 0 \ \text{ в } \ (C^{n,\alpha})^m \ \text{ при } \ k\to\infty \tag{2.28}$$

оскільки крайова задача (2.14), (2.15) задовольняє граничну умову (2.I), як було показано на кроці 1.

Крім того, на підставі (2.26) маємо двобічну оцінку

$$1/2 \le |c(\varepsilon^{(k)})| \le 1 \quad \text{для кожного} \quad 1\le k\in\mathbb{Z}.$$

Справді,

$$|c(\varepsilon^{(k)})| \le \|B(\varepsilon^{(k)})\|\cdot\|y(\cdot,\varepsilon^{(k)})\|_{n+r,\alpha} =$$
$$= \|B(\varepsilon^{(k)})\|\cdot\|B(\varepsilon^{(k)})\|^{-1}\cdot\|w_k\|_{n+r,\alpha} = 1$$

та

$$|c(\varepsilon^{(k)})| = |B(\varepsilon^{(k)})(\|B(\varepsilon^{(k)})\|^{-1}\, w_k)| = \|B(\varepsilon^{(k)})\|^{-1}|B(\varepsilon^{(k)}w_k| \ge \frac{1}{2}.$$

Тому існує підпослідовність $(c(\varepsilon^{(k_p)}))_{p=1}^{\infty} \subset (c(\varepsilon^{(k)}))_{k=1}^{\infty}$ та ненульовий вектор $c(0)\in\mathbb{C}^{rm}$ такі, що

$$c(\varepsilon^{(k_p)}) \to c(0) \ \text{ в } \ \mathbb{C}^{rm} \ \text{ при } \ p\to\infty. \tag{2.29}$$

Для кожного $p \in \mathbb{N}$ функція $y(\cdot, \varepsilon^{(k_p)}) \in (C^{n+r,\alpha})^m$ є розв'язком, і до того ж єдиним (умова $(*)$ базового означення), крайової задачі

$$L(\varepsilon^{(k_p)})y(t, \varepsilon^{(k_p)}) = f(t, \varepsilon^{(k_p)}), \quad a \leq t \leq b,$$
$$B(\varepsilon^{(k_p)})y(\cdot, \varepsilon^{(k_p)}) = c(\varepsilon^{(k_p)}).$$

Тому на підставі формул (2.28) і (2.29) та умови $(**)$ базового означення робимо висновок, що функція $y(\cdot, \varepsilon^{(k_p)})$ збігається до єдиного розв'язку $y(\cdot, 0)$ граничної крайової задачі

$$L(0)y(t, 0) = 0, \quad a \leq t \leq b,$$

$$B(0)y(\cdot, 0) = c(0);$$

ця збіжність виконується у просторі $(C^{n+r,\alpha})^m$ при $k \to \infty$. Отже, $y(\cdot, 0) \equiv 0$ згідно з формулою (2.27). Ця рівність суперечить крайовій умові $B(0)y(\cdot, 0) = c(0)$, де $c(0) \neq 0$. Таким чином, зроблене припущення є хибним, чим і доведено властивість (2.24).

Крок 3. Доведемо, що крайова задача (2.14), (2.15) задовольняє граничну умову (2.II). На підставі формул (2.23) і (2.24) існують числа $\varkappa' > 0$ і $\varepsilon' \in (0, \varepsilon_1)$ такі, що

$$\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))\| \leq \varkappa' \quad \text{для кожного} \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon'). \tag{2.30}$$

Тут $\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))\|$ позначає норму обмеженого оператора (2.17). Виберемо довільним чином вектор-функцію $y \in (C^{n+r,\alpha})^m$ та покладемо $f(\cdot, \varepsilon) := L(\varepsilon)y$ і $c(\varepsilon) := B(\varepsilon)y$ для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon')$. Отже,

$$y = (L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot, \varepsilon), c(\varepsilon)) \quad \text{для кожного} \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon'). \tag{2.31}$$

Тут $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}$ позначає оператор, обернений до (2.17); цей оператор оборотний за умовою $(*)$ базового означення.

Застосовуючи формули (2.30) і (2.31), отримаємо такі співвідношення для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$:

$$
\begin{aligned}
&|B(\varepsilon)y - B(0)y| \leq \big\|(f(\cdot, \varepsilon), c(\varepsilon)) - (f(\cdot, 0), c(0))\big\|_{(C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^{rm}} = \\
&= \big\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}\big((f(\cdot, \varepsilon), c(\varepsilon)) - (f(\cdot, 0), c(0))\big)\big\|_{(C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^{rm}} \leq \\
&\leq \varkappa' \big\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}\big((f(\cdot, \varepsilon), c(\varepsilon)) - (f(\cdot, 0), c(0))\big)\big\|_{n+r,\alpha} = \\
&= \varkappa' \big\|(L(0), B(0))^{-1}(f(\cdot, 0), c(0)) - (L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot, 0), c(0))\big\|_{n+r,\alpha}.
\end{aligned}
$$

Остання норма прямує до нуля при $\varepsilon \to 0+$ на підставі умови $(**)$ базового означення. Отже, $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ в $\mathbb{C}^{rm}$ при $\varepsilon \to 0+$ для кожного $y \in (C^{n+r,\alpha})^m$, тобто крайова задача (2.14), (2.15) задовольняє граничну умову (2.II).

Необхідність доведено.

2.5. Доведення критерію. Достатність

Обґрунтуємо достатність в теоремі 2.3. Припустимо, що крайова задача (2.14), (2.15) задовольняє умову (2.0) і граничні умови (2.I) і (2.II). Покажемо, що розв'язок цієї задачі неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$ у просторі $(C^{n+r,\alpha})^m$. Міркування проведемо у чотири кроки.

Крок 1 *є підготовчим.* Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ розглянемо задачу Коші

$$L(\varepsilon)\hat{y}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \;\; a \leq t \leq b, \tag{2.32}$$

$$\hat{y}^{(j-1)}(a,\varepsilon) = h_j(\varepsilon), \;\; j = 1, \ldots, r. \tag{2.33}$$

Тут вектор-функція $\hat{y}(\cdot,\varepsilon)$ є шуканою, а вектори $h_1, \ldots, h_r \in \mathbb{C}^m$ є довільно вибраними. Ця задача має єдиний розв'язок $\hat{y}(\cdot,\varepsilon)$, який належить до простору $(C^{n+r,\alpha})^m$ згідно з лемою 2.1.

Покажемо, що із збіжності правих частин

$$f(\cdot,\varepsilon) \to f(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (C^{n,\alpha})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+, \tag{2.34}$$

$$h_j(\varepsilon) \to h_j(0) \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ \quad \text{для усіх} \quad j \in \{1, \ldots, r\} \tag{2.35}$$

цієї задачі випливає збіжність її розв'язків

$$\hat{y}(\cdot,\varepsilon) \to \hat{y}(\cdot,0) \quad \text{в просторі} \quad (C^{n+r,\alpha})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{2.36}$$

Зведемо задачу Коші (2.32), (2.33) до такої задачі Коші для диференціальних рівнянь першого порядку

$$\hat{x}(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)\hat{x}(t,\varepsilon) = g(t,\varepsilon), \;\; a \leq t \leq b, \tag{2.37}$$

$$\hat{x}(a,\varepsilon) = h(\varepsilon). \tag{2.38}$$

Тут матриця-функція $A(\cdot,\varepsilon)$ і вектор $g(\cdot,\varepsilon)$ такі самі як на кроці 1 доведення необхідності поданому у п. 2.4. Крім того,

$$\hat{x}(\cdot,\varepsilon) := \operatorname{col}\bigl(\hat{y}(\cdot,\varepsilon), \hat{y}^{'}(\cdot,\varepsilon), \ldots, \hat{y}^{(r-1)}(\cdot,\varepsilon)\bigr) \in (C^{n+1,\alpha})^{rm},$$

$$h(\varepsilon) := \mathrm{col}\big(h_1(\varepsilon), \ldots, h_r(\varepsilon)\big) \in \mathbb{C}^{rm}.$$

Оскільки, за припущенням, крайова задача (2.14), (2.15) задовольняє умову (2.I), то

$$A(\cdot, \varepsilon) \to A(\cdot, 0) \quad \text{в просторі} \quad (C^{n,\alpha})^{rm\times rm} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ . \tag{2.39}$$

Із умов (2.34) і (2.35) випливає збіжність правих частин задачі (2.37), (2.38):

$$g(\cdot, \varepsilon) \to g(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad (C^{n,\alpha})^{rm} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+,$$

$$h(\varepsilon) \to h(0) \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^{rm} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ .$$

Тому на підставі [83, с. 3] (основна теорема) з умов (2.34) і (2.35) випливає збіжність (2.36).

Крок 2. Доведемо, що крайова задача (2.14), (2.15) задовольняє умову $(*)$ базового означення, тобто, що для малих $\varepsilon \geq 0$ оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ оборотний.

Розглянемо при будь-яких $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ і $k \in \{0, \ldots, r-1\}$ задачу Коші (2.8), (2.9), де $Y_k(\cdot) := Y_k(\cdot, \varepsilon)$ і кожне $A_{r-j}(\cdot) := A_{r-j}(\cdot, \varepsilon)$, а $t_0 := a$. Вона складається з m задач Коші вигляду (2.32), (2.33) з $f = 0$ відносно вектор-функцій $\hat{y}(\cdot, \varepsilon)$, які є стовпцями матриці $Y_k(\cdot, \varepsilon)$. Оскільки праві частини цієї задачі не залежать від ε, то

$$Y_k(\cdot, \varepsilon) \to Y_k(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad (C^{n+r,\alpha})^{m\times m} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ \tag{2.40}$$

згідно з кроком 1. Отож, оскільки крайова задача (2.14), (2.15) задовольняє, за припущенням, граничну умову (2.II), то

$$\begin{gathered}[\mathrm{B}(\varepsilon)Y(\cdot, \varepsilon)] = ([B(\varepsilon)Y_0(\cdot, \varepsilon)] \ \ldots \ [B(\varepsilon)Y_{r-1}(\cdot, \varepsilon)]) \to \\ \to ([B(0)Y_0(\cdot, 0)] \ \ldots \ [B(0)Y_{r-1}(\cdot, 0)]) = \\ = [B(0)Y(\cdot, 0)] \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^{rm\times rm} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ .\end{gathered} \tag{2.41}$$

Згідно з припущенням про те, що крайова задача (2.14), (2.15) задовольняє умову (2.0) маємо нерівність $\det[B(0)Y(0)] \neq 0$ на підставі теореми 2.2. Тому

$$\det[B(\varepsilon)Y(\varepsilon)] \neq 0 \quad \text{для достатньо малих} \quad \varepsilon \geq 0. \tag{2.42}$$

Отже, за теоремою 2.2, оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ оборотний для усіх малих $\varepsilon \geq 0$.

Крок 3. Покажемо тепер, що крайова задача (2.14), (2.15) задовольняє умову $(**)$ базового означення. Дослідимо спочатку випадок $f(\cdot, \varepsilon) \equiv 0$.

Розглянемо напіводнорідну крайову задачу

$$L(\varepsilon)v(\cdot, \varepsilon) \equiv 0, \tag{2.43}$$

$$B(\varepsilon)v(\cdot, \varepsilon) = c(\varepsilon) \tag{2.44}$$

залежну від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. Згідно з кроком 2 вона має єдиний розв'язок $v(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n+r,\alpha})^m$ для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$, де ε_1 достатньо мале додатнє число. Припустимо, що

$$c(\varepsilon) \to c(0) \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{2.45}$$

Треба показати, що

$$v(\cdot, \varepsilon) \to v(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad (C^{n+r,\alpha})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{2.46}$$

Запишемо при кожному $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (2.43) у вигляді (2.10), тобто

$$v(\cdot, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{r-1} Y_k(\cdot, \varepsilon) q_k(\varepsilon), \tag{2.47}$$

де вектори $q_0(\varepsilon), \ldots, q_{r-1}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ довільні, а кожна матриця-функція $Y_k(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n+r,\alpha})^{m\times m}$ така як і на кроці 2. Скориставшись формулою (2.12), запишемо

$$B(\varepsilon)v(\cdot, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{r-1} B(\varepsilon)(Y_k(\cdot, \varepsilon) q_k(\varepsilon)) = \sum_{k=0}^{r-1} [B(\varepsilon)Y_k(\cdot, \varepsilon)] q_k(\varepsilon).$$

Тому крайова умова (2.44) рівносильна умові

$$\sum_{k=0}^{r-1}[B(\varepsilon)Y_k(\cdot,\varepsilon)]q_k(\varepsilon)=c(\varepsilon).$$

Останню можна записати у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$([B(\varepsilon)Y_0(\cdot,\varepsilon)]\ \dots\ [B(\varepsilon)Y_{r-1}(\cdot,\varepsilon)])q(\varepsilon)=c(\varepsilon),$$

тобто

$$[B(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)]q(\varepsilon)=c(\varepsilon)$$

відносно координат стовпця $q(\varepsilon):=\mathrm{col}(q_0(\varepsilon),\dots,q_{r-1}(\varepsilon))$. На підставі (2.41), (2.42) і припущення (2.45) маємо збіжність

$$q(\varepsilon)=[B(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)]^{-1}c(\varepsilon)\to[B(0)Y(\cdot,0)]^{-1}c(0)\quad\text{в}\quad\mathbb{C}^{rm}\quad\text{при}\quad\varepsilon\to0+.$$

Тому з формул (2.40) і (2.47) випливає потрібна збіжність (2.46), тобто

$$\upsilon(\cdot,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{r-1}Y_k(\cdot,\varepsilon)q_k(\varepsilon)\to\upsilon(\cdot,0)=\sum_{k=0}^{r-1}Y_k(\cdot,0)q_k(0)=\upsilon(\cdot,0)$$

$$\text{в}\quad(C^{n+r,\alpha})^m\quad\text{при}\quad\varepsilon\to0+.$$

Крок 4. Перейдемо тепер до загального випадку неоднорідного диференціального рівняння (2.14). Припустимо, що виконується умова

$$f(\cdot,\varepsilon)\to f(\cdot,0)\quad\text{в}\quad(C^{n,\alpha})^m\quad\text{при}\quad\varepsilon\to0+\tag{2.48}$$

і умова (2.45).

Для кожного $\varepsilon\in[0,\varepsilon_1]$ покладемо

$$z(\cdot,\varepsilon):=y(\cdot,\varepsilon)-\hat{y}(\cdot,\varepsilon),$$

де вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon)$ є розв'язком неоднорідної крайової задачі (2.32), (2.33), а вектор-функція $\hat{y}(\cdot,\varepsilon)$ є розв'язком задачі Коші (2.32), (2.33), де усі $h_j(\varepsilon)\equiv0$. Тоді $z(\cdot,\varepsilon)$ є розв'язком напіводнорідної крайової задачі

$$L(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon)\equiv0,$$

$$B(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon) = \tilde{c}(\varepsilon),$$

$$\tilde{c}(\varepsilon) := c(\varepsilon) - B(\varepsilon)\hat{y}(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^m.$$

На кроці 1 було показано, що $\hat{y}(\cdot,\varepsilon)$ задовольняє властивість (2.36), за умови (2.48). На підставі цієї властивості і припущень про те, що крайова задача (2.14), (2.15) задовольняє граничні умови (2.I) і (2.45), маємо збіжність

$$\tilde{c}(\varepsilon) \to \tilde{c}(0) \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^{rm} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ .$$

Тому згідно з кроком 3 робимо висновок, що

$$z(\cdot,\varepsilon) \to z(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (C^{n+r,\alpha})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ .$$

Звідси та з формули (2.36) отримуємо потрібну збіжність

$$y(\cdot,\varepsilon) = \hat{y}(\cdot,\varepsilon) + z(\cdot,\varepsilon) \to \hat{y}(\cdot,0) + z(\cdot,0) = y(\cdot,0)$$

$$\text{в} \quad (C^{n+r,\alpha})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ .$$

Достатність доведено.

2.6. Оцінка швидкості збіжності розв'язків задачі за параметром

Для крайової задачі (2.14), (2.15) розглянемо нев'язку її розв'язку

$$d_{n,\alpha}(\varepsilon) := \|L(\varepsilon)y(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon))\|_{n,\alpha} + |B(\varepsilon)y(\cdot,0) - c(\varepsilon)|. \tag{2.49}$$

При цьому $y(\cdot,0)$ розглядаємо як наближений розв'язок цієї задачі.

Теорема 2.4. *Нехай крайова задача* (2.14), (2.15) *задовольняє умову* (2.0) *і граничні умови* (2.I) *та* (2.II). *Тоді існують додатні числа* $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, $\varkappa_1$ *і* $\varkappa_2$ *такі, що для довільного* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2)$ *виконується двобічна оцінка*

$$\varkappa_1\, d_{n,\alpha}(\varepsilon) \leq \|y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon)\|_{n+r,\alpha} \leq \varkappa_2\, d_{n,\alpha}(\varepsilon). \tag{2.50}$$

Тут числа ε_2, $\varkappa_1$ *і* $\varkappa_2$ *не залежать від вектор-функцій* $y(\cdot,0)$ *і* $y(\cdot,\varepsilon)$.

Згідно з (2.50), похибка і нев'язка розв'язку $y(\cdot,\varepsilon)$ крайової задачі (2.14), (2.15) мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$.

Для систем диференціальних рівнянь першого порядку цю теорему доведено В. А. Михайлецем, О. О. Мурачем і В. О. Солдатовим в [83, с. 3] (теорема 2.1) або (див. п. 1.2 дисертації, твердження 1.3), а у випадку $\alpha = 0$ і довільного $r \in \mathbb{N}$ встановлено О. О. Мурачем і В. О. Солдатовим в [42, с. 261] (теорема про оцінку похибки).

Доведення теореми 2.4. Доведемо ліву частину оцінки (2.50). З граничних умов (2.I) і (2.II) випливає сильна збіжність операторів

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) \xrightarrow{s} (L(0), B(0)) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Тут, як і раніше, $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$, де $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$, є обмеженим оператором, що діє з простору $(C^{n+r,\alpha})^m$ у простір $(C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^{rm}$. Тому існують числа $\varkappa' > 0$ і $\varepsilon' \in (0,\varepsilon_1)$ такі, що норма цього оператора задовольняє нерівність (2.30).

Справді, в іншому випадку існувала б послідовність додатних чисел $(\varepsilon^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ така, що

$$\varepsilon^{(k)} \to 0 \quad \text{і} \quad \|(L(\varepsilon^{(k)}), B(\varepsilon^{(k)}))\| \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Це з огляду на теорему Банаха–Штейнгауза суперечило б вказаній вище сильній збіжності операторів.

Тепер на підставі нерівності (2.30) робимо висновок, що

$$d_{n,\alpha}(\varepsilon) = \|L(\varepsilon)(y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon))\|_{n,\alpha} + |B(\varepsilon)(y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon))| \leq$$
$$\leq \varkappa' \, \|y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon)\|_{n+r,\alpha}$$

для довільного $\varepsilon \in [0, \varepsilon')$. Отримали ліву частину двобічної оцінки (2.50), де $\varkappa_1 := 1/\varkappa'$.

Доведемо тепер праву частину цієї оцінки. Згідно з основною теоремою, крайова задача (2.14), (2.15) задовольняє базове означення. Тому оператор (2.17) є оборотним для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$. Більше того, оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}$, обернений до (2.17), збігається сильно до $(L(0), B(0))^{-1}$ при $\varepsilon \to 0+$. Справді, для довільних $f \in (C^{n,\alpha})^m$ і $c \in \mathbb{C}^{rm}$ за умовою $(**)$ базового означення маємо збіжність

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f,c) =: y(\cdot,\varepsilon) \to y(\cdot,0) := (L(0), B(0))^{-1}(f,c)$$

у просторі $(C^{n+r,\alpha})^m$ при $\varepsilon \to 0+$.

Отже, за теоремою Банаха–Штейнгауза існують додатні числа $\varepsilon_2 < \varepsilon'$ і $\varkappa_2$ такі, що норма оберненого оператора

$$\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}\| \leq \varkappa_2 \text{ для кожного } \varepsilon \in [0, \varepsilon_2).$$

Тому для довільного числа $\varepsilon \in [0, \varepsilon_2)$ правильні такі співвідношення:

$$\|y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon)\|_{n+r,\alpha} =$$

$$= \|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(L(\varepsilon), B(\varepsilon))(y(\cdot, 0) - y(\cdot, \varepsilon))\|_{n+r,\alpha} \leq$$

$$\leq \varkappa_2 \, \|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))(y(\cdot, 0) - y(\cdot, \varepsilon))\|_{(C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^{rm}} = \varkappa_2 \, d_n(\varepsilon).$$

Отримали праву частину двобічної оцінки (2.50).

Теорему 2.4 доведено.

Висновки до розділу 2

У другому розділі дисертації введено і досліджено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$, де $n \geq 0$ і $0 < \alpha \leq 1$. Ці крайові задачі є найбільш загальними щодо простору $(C^{n+r,\alpha})^m$. Отримано такі основні результати:

1. Показано, що введеним крайовим задачам відповідає фредгольмів оператор з індексом нуль на парі нормованих просторів $(C^{n+r,\alpha})^m$ і $(C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^{rm}$ (теорема 2.1).

2. Встановлено критерій однозначної розв'язності введених крайових задач у цих просторах (теорема 2.2).

3. Для крайових задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$ (теорема 2.3). Це — основний результат другого розділу.

4. Показано, що похибка і нев'язка розв'язків цих задач мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Гельдера (теорема 2.4).

Результати другого розділу опубліковано у статтях [28, 31] та висвітлено в тезах конференцій [32, 34].

РОЗДІЛ 3
КРАЙОВІ ЗАДАЧІ, НАЙБІЛЬШ ЗАГАЛЬНІ ЩОДО ПРОСТОРІВ СЛОБОДЕЦЬКОГО

У цьому розділі вводимо і досліджуємо максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають відповідний комплексний простір Слободецького.

Випадок $r = 1$ досліджено раніше Є. В. Гнип і В. А. Михайлецем [7, 8].

3.1. Формулювання задачі

Нехай задано довільним чином скінченний відрізок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, дійсне число $p \in (1, \infty)$, цілі числа $m \geq 1$ і $r \geq 2$ та дробове число $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$. Запишемо число s у вигляді $s := [s] + \{s\}$, де, як звичайно, $[s]$ — ціла частина, а $\{s\}$ — дробова частина числа s; тут $\{s\} \in (0, 1)$.

Розглянемо лінійну крайову задачу для системи m лінійних диференціальних рівнянь r-го порядку

$$Ly(t) \equiv y^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) y^{(r-j)}(t) = f(t), \quad a \leq t \leq b, \tag{3.1}$$

$$By = c. \tag{3.2}$$

Тут вектор-функція $y \in (W_p^{s+r})^m$ є шуканою, а всі матриці-функції $A_{r-j} \in (W_p^s)^{m \times m}$, вектор-функція $f \in (W_p^s)^m$, лінійний неперервний оператор

$$B = (B_1, \dots, B_r) : (W_p^{s+r})^m \to \mathbb{C}^{rm} \tag{3.3}$$

і вектор $c \in \mathbb{C}^{rm}$ є довільно вибраними. Як і раніше, числові вектори і вектор-функції подано у вигляді стовпців. Оператор B зручно представляти як набір операторів $B_1, \dots, B_r$ кожен з яких діє у простір $\mathbb{C}^m$, а отже і крайову умову (3.2) можна трактувати як систему r крайових умов.

Крайова умова (3.2) з неперервним оператором (3.3) є найбільш загальною для рівняння (3.1) з правою частиною класу $(W_p^{s+r})^m$ (див. лему 3.1, подану нижче). Вона охоплює як усі класичні види крайових умов, так і некласичні умови, що містять похідні (класичні) аж до порядку k, де $r \le k < s + r - 1/p$. Тому крайова задача (3.1), (3.2) *є найбільш загальною щодо простору Слободецького* $(W_p^{s+r})^m$. У випадку $r = 1$ це поняття уведено Є. В. Гнип і В. А. Михайлецем [7, 8].

Обговоримо питання про те, у якому сенсі слід розуміти диференціальне рівняння (3.1). За теоремою вкладення Соболєва, $W_p^{s+r} \subset C^k$ для деякого цілого $k \ge 0$ тоді і лише тоді, коли $s + r > k + 1/p$. Отже, якщо $s > 1/p$, то $W_p^{s+r} \subset C^r$, й тому для кожної вектор-функції $y \in (W_p^{s+r})^m$ існують неперервні класичні похідні на відрізку $[a, b]$ до порядку r включно. Крім того,

$$\text{кожне} \quad A_{r-j} \in (W_p^s)^{m\times m} \subset (C)^{m\times m} \quad \text{і} \quad f \in (W_p^s)^m \subset (C)^m.$$

Отже, у випадку $s > 1/p$ обидві частини диференціального рівняння (3.1) є неперервними функціями на $[a, b]$ і тому воно розглядається на усьому відрізку $[a, b]$. Якщо $0 < s \le 1/p$, то $W_p^{s+r} \subset C^{r-1}$, але $W_p^{s+r} \not\subset C^r$. Тому у цьому випадку для кожної вектор-функції $y \in (W_p^{s+r})^m$ існують неперервні класичні похідні на $[a, b]$ лише до порядку $r - 1$ включно. Оскільки

$$y^{(r-1)} \in (W_p^{s+1})^m \subset (W_1^1)^m = (AC[a, b])^m,$$

то класична похідна $y^{(r)}$ існує майже скрізь на $[a, b]$ як функція класу $(W_p^s)^m$. Тому у випадку $0 < s \le 1/p$ диференціальне рівняння (3.1) розглядається майже скрізь на $[a, b]$ (звісно, відносно міри Лебега).

Взагалі, для кожної вектор-функції $y \in (W_1^r)^m$ вираз Ly має сенс, бо

$$W_1^r = \{y \in C^{r-1} : y^{(r-1)} \in AC[a, b]\};$$

при цьому $y^{(r)}$ існує майже скрізь на $[a,b]$ і диференціальне рівняння (3.1) розглядається майже скрізь на $[a,b]$. Зауважимо, що $W_p^{s+r} \subset W_1^r$.

Є правильним таке твердження про підвищення регулярності розв'язків $y \in (W_1^r)^m$ диференціального рівняння (3.1) з правою частиною класу $(W_p^s)^m$.

Лема 3.1. *Нехай матриця-функція* $A_{r-j} \in (W_p^s)^{m\times m}$ *для кожного номера* $j \in \{1,\dots,r\}$. *Якщо вектор-функція* $y \in (W_1^r)^m$ *є розв'язком рівняння* (3.1) *для деякої правої частини* $f \in (W_p^s)^m$, *то* $y \in (W_p^{s+r})^m$. *Більше того, якщо* f *пробігає весь простір* $(W_p^s)^m$, *то розв'язки рівняння* (3.1) *пробігають весь простір* $(W_p^{s+r})^m$.

Доведення. Припустимо, що для деякого $f \in (W_p^s)^m$ вектор-функція $y \in (W_1^r)^m$ є розв'язком рівняння (3.1). Доведемо, що $y \in (W_p^{s+r})^m$. Оскільки $f \in (W_p^s)^m \subset (W_p^0)^m$ і кожне

$$A_{r-j} \in (W_p^s)^{m\times m} \subset (W_p^0)^{m\times m},$$

а вектор-функції $y^{(r-j)}$ неперервні на $[a,b]$ для кожного $j \in \{1,\dots,r\}$, то

$$y^{(r)} = f - \sum_{j=1}^{r} A_{r-j} y^{(r-j)} \in (W_p^0)^m.$$

Нагадаємо, що для вектор-функції $y \in (W_1^r)^m$ класична похідна $y^{(r)}$, яка існує майже скрізь на $[a,b]$, збігається з узагальненою похідною $y^{(r)}$, оскільки $y^{(r-1)} \in (AC[a,b])^m$. Крім того, $y \in (W_p^0)^m$. Тому $y \in (W_p^r)^m$.

Покажемо, що $y \in (W_p^{r+\{s\}})^m$. Оскільки для кожного номера $j \in \{1,\dots,r\}$ виконується включення $y^{(r-j)} \in (W_p^1)^m$, а клас $(W_p^1)^m$ складається з мультиплікаторів у просторі $(W_p^{\{s\}})^m$ (див., наприклад, [10] (лема 3.1)), та

$$A_{r-j} \in (W_p^s)^{m\times m} \subset (W_p^{\{s\}})^{m\times m},$$

то $A_{r-j} y^{(r-j)} \subset (W_p^{\{s\}})^m$. Отже,

$$y^{(r)} = f - \sum_{j=1}^{r} A_{r-j} y^{(r-j)} \in (W_p^{\{s\}})^m,$$

бо $f \in (W_p^s)^m$. Крім того,

$$y \in (W_p^r)^m \subset (W_p^{\{s\}})^m.$$

Тому виконується потрібне включення $y \in (W_p^{r+\{s\}})^m$. Якщо $[s] = 0$, то ми цим довели, що $y \in (W_p^{r+s})^m$.

Розглянемо випадок $[s] \geq 1$. Доведемо таку властивість:

$$\begin{gathered} y \in (W_p^{r+n+\{s\}})^m \Rightarrow y \in (W_p^{r+n+1+\{s\}})^m \\ \text{для кожного номера} \quad n \in \{0, \dots, [s]-1\}. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Припустимо, що $y \in (W_p^{r+n+\{s\}})^m$ для деякого $n \in \{0, \dots, [s]-1\}$. Тоді для кожного номера $j \in \{1, \dots, r\}$ виконуються такі включення:

$$y^{(r-j)} \in (W_p^{n+j+\{s\}})^m \subset (W_p^{n+1+\{s\}})^m,$$

$$A_{r-j} \in (W_p^s)^{m \times m} \subset (W_p^{n+1+\{s\}})^m.$$

Оскільки простір $W_p^{n+1+\{s\}}$ — банахова алгебра, то $A_{r-j}y^{(r-j)} \in (W_p^{n+1+\{s\}})^m$. Крім того, $f \in (W_p^s)^m \subset (W_p^{n+1+\{s\}})^m$. Тому

$$y^{(r)} = f - \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}y^{(r-j)} \in (W_p^{n+1+\{s\}})^m.$$

Отже, $y^{(r+n+1)} \in (W_p^{\{s\}})^m$. Це, з урахуванням включення $y \in (W_p^{\{s\}})^m$, тягне за собою висновок імплікації (3.4). Таким чином, її доведено.

З цієї імплікації та включення $y \in (W_p^{r+\{s\}})^m$ негайно випливає потрібне включення

$$y \in (W_p^{r+[s]-1+1+\{s\}})^m = (W_p^{s+r})^m.$$

Доведемо останнє твердження леми. Нехай f – довільна вектор-функція з простору $(W_p^s)^m$. Оскільки $W_p^s \subset L_1$, то $f \in (L_1)^m$ і кожне $A_{r-j} \in (L_1)^{m \times m}$. Тоді існує розв'язок $y \in (W_1^r)^m$ диференціального рівняння (3.1) (наприклад, розв'язок деякої задачі Коші). За вже доведеним $y \in (W_p^{s+r})^m$. Отже, для кожного $f \in (W_p^s)^m$ існує розв'язок класу $(W_p^{s+r})^m$. Крім того,

$$y \in (W_p^{s+r})^m \Rightarrow f = y^{(r)} + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j} y^{(r-j)} \in (W_p^s)^m. \tag{3.5}$$

Тут $A_{r-j} y^{(r-j)} \in (W_p^s)^m$ для кожного номера $j \in \{1, \dots, r\}$, оскільки $y^{(r-j)} \in (W_p^{s+1})^m$, а усі елементи простору W_p^{s+1} є мультиплікаторами у просторі W_p^s. Справді, якщо $s > 1/p$, то W_p^s — банахова алгебра і $W_p^{s+1} \subset W_p^s$. Якщо ж $0 < s \leq 1/p$, то W_p^1 складається з мультиплікаторів у просторі W_p^s (див., [10] (лема 3.1)), а $W_p^{s+1} \subset W_p^1$.

Лему 3.1 доведено.

3.2. Розв'язність задачі у просторі Слободецького

Крайову задачу (3.1), (3.2) коротко запишемо у вигляді операторного рівняння

$$(L,B)y=(f,c).$$

Тут (L,B) – лінійний оператор у парі банахових просторів

$$(L,B):(W_p^{s+r})^m\to(W_p^s)^m\times\mathbb{C}^{rm}, \tag{3.6}$$

згідно з формулами (3.3) і (3.5).

Теорема 3.1. *Лінійний оператор* (3.6) *обмежений і фредгольмів з індексом нуль.*

Доведення теореми 3.1. Обґрунтуємо обмеженість лінійного оператора

$$L:(W_p^{s+r})^m\to(W_p^s)^m \tag{3.7}$$

Для довільного $y\in(W_p^{s+r})^m$ маємо

$$\begin{gathered}\|Ly\|_{s;p}\le\|y^{(r)}\|_{s;p}+\sum_{j=1}^{r}\|A_{r-j}y^{(r-j)}\|_{s;p}\le\\ \le c_1\cdot\|y\|_{s+r;p}+\sum_{j=1}^{r}\|A_{r-j}y^{(r-j)}\|_{s;p}\,,\end{gathered} \tag{3.8}$$

де c_1 — деяке додатне число, не залежне від y. Оператор диференціювання є обмежений ним на парі просторів Слободецького W_p^σ і $W_p^{\sigma-1}$ для кожного дробового числа $\sigma>1$. Оцінимо згори норму $\|A_{r-j}y^{(r-j)}\|_{s;p}$ для кожного номера $j\in\{1,\dots,r\}$.

Розглянемо два випадки: $s>1/p$ і $0<s\le1/p$. Якщо $s>1/p$, то W_p^s — банахова алгебра, і тому

$$\begin{gathered}\|A_{r-j}y^{(r-j)}\|_{s;p}\le c_2\cdot\|A_{r-j}\|_{s;p}\cdot\|y^{(r-j)}\|_{s;p}\le\\ \le c_3\cdot\|A_{r-j}\|_{s;p}\cdot\|y\|_{s+r-j;p}\le c_4\cdot\|A_{r-j}\|_{s;p}\cdot\|y\|_{s+r;p}\,,\end{gathered}$$

де c_2, c_3, c_4 — деякі додатні сталі, незалежні від y. Якщо ж $0 < s \leq 1/p$, то скориставшись тим, що простір W_p^1 складається з мультиплікаторів у простір W_p^s і норми цих мультиплікаторів мажоровні нормою в W_p^1 (див. [10], лема 3.1), запишемо

$$\|A_{r-j}y^{(r-j)}\|_{s;p} \leq c_5 \cdot \|A_{r-j}\|_{s;p} \cdot \|y^{(r-j)}\|_{1;p} \leq$$
$$\leq c_6 \cdot \|A_{r-j}\|_{s;p} \cdot \|y^{(r-j)}\|_{s;p} \leq c_7 \cdot \|A_{r-j}\|_{s;p} \cdot \|y\|_{s+r-j;p} \leq$$
$$\leq c_8 \cdot \|A_{r-j}\|_{s;p} \cdot \|y\|_{s+r;p}\,.$$

Тут компоненти вектор-функції $y^{(r-j)} \in (W_p^{s+j})^m \subset W_p^1$ розглядаємо як мультиплікатори у просторі W_p^s, а c_5, c_6, c_7, c_8 — деякі додатні числа, незалежні від y.

Таким чином, в обох випадках

$$\|A_{r-j}y^{(r-j)}\|_{s;p} \leq c \cdot \|A_{r-j}\|_{s;p} \cdot \|y\|_{s+r;p}\,. \tag{3.9}$$

Із нерівностей (3.8) і (3.9) негайно випливає обмеженість оператора (3.7). Звідси та з обмеженості крайового оператора (3.3) дістаємо обмеженість досліджуваного оператора (3.6).

Доведемо фредгольмовість оператора (3.6). Уведемо лінійний обмежений оператор

$$C : (W_p^{s+r})^m \to \mathbb{C}^{rm} \tag{3.10}$$

за формулою

$$Cy := \mathrm{col}(y(a), y'(a), \dots, y^{(r-1)}(a)) \quad \text{для довільного} \quad y \in (W_p^{s+r})^m.$$

Оскільки $W_p^{s+r} \subset C^{r-1}$, то Cy означено коректно для кожної вектор-функції $y \in (W_p^{s+r})^m$. А також, для кожного номера $k \in \{0, \dots, r-1\}$ виконується оцінка

$$|y^{(k)}(a)| \leq \|y\|_{C^k} \leq \|y\|_{C^{r-1}} \leq c \cdot \|y\|_{s+r;p}\,,$$

де число $c > 0$ не залежить від $y \in (W_p^{s+r})^m$. Отже, оператор (3.10) обмежений.

Розглянемо неоднорідну задачу Коші

$$(L, C)y = (f, c) \in (W_p^s) \times \mathbb{C}^{rm}.$$

Вона є окремим випадком досліджуваної задачі (3.1), (3.2). Ця задача Коші має єдиний розв'язок $y \in (W_1^r)^m$ для довільних $f \in (W_p^s)^m \subset (W_1^0)^m$ і $c \in \mathbb{C}^{rm}$. За лемою 3.1, він задовольняє умову $y \in (W_p^{s+r})^m$. Отже, лінійний обмежений оператор

$$(L, C) : (W_p^{s+r})^m \to (W_p^s)^m \times \mathbb{C}^{rm} \tag{3.11}$$

бієктивний. Тому, за теоремою Банаха про обернений оператор, (3.11) — ізоморфізм.

Оператор (L, B) запишемо у вигляді

$$(L, B) = (L, C) + (0, B - C);$$

тут перший доданок — ізоморфізм, а другий доданок — скінченновимірний оператор, обидва на парі просторів (3.6). Отже, за теоремою Нікольського (див., наприклад, [90, § 21.5]), оператор (3.6) є фредгольмовим з індексом нуль.

Теорему 3.1 доведено.

Розглянемо питання про оборотність оператора (3.6). Як і в другому розділі, для кожного номера $k \in \{0, \dots, r-1\}$ розглянемо матричну задачу Коші

$$Y_k^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) Y_k^{(r-j)}(t) = 0, \quad a \le t \le b, \tag{3.12}$$

$$Y_k^{(j)}(t_0) = \delta_{k,j} I_m, \quad j = 0, \dots, r-1. \tag{3.13}$$

Тут $Y_k(t) = (y_k^{\alpha,\beta}(t))_{\alpha,\beta=1}^m$ — шукана $m \times m$ — матриця-функція, точку $t_0 \in (a, b)$ вибрано довільно, $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера, а I_m — одинична матриця порядку m. Ця задача є сукупністю m задач Коші, які є окремим випадком задачі (3.1), (3.2). Тому, за лемою 3.1, єдиний розв'язок $Y_k(t)$ задачі (3.12), (3.13) належить до простору $(W_p^{s+r})^{m\times m}$.

Розглянемо блочну числову квадратну матрицю

$$[BY] := ([BY_0] \ \dots \ [BY_{r-1}])$$

порядку rm.

Теорема 3.2. *Оператор* (3.6) *оборотний тоді і тільки тоді, коли матриця* $[BY]$ *невироджена.*

Доведення теореми 3.2. За теоремою 3.1 оператор (3.6) фредгольмів. Отже, він оборотний тоді і тільки тоді, коли його ядро $\ker(L, B)$ тривіальне. Тому для доведення теореми 3.2 достатньо показати, що

$$\ker(L, B) \neq \{0\} \Leftrightarrow \det[BY] = 0.$$

Припустимо, що $\ker(L, B) \neq \{0\}$. Тоді існує нетривіальний розв'язок однорідного рівняння $(L, B)y = (0, 0)$, який подаємо у вигляді $y = \sum\limits_{k=0}^{r-1} Y_k q_k$, де хоча б один із вектор-стовпців $q_0, q_1, \dots, q_{r-1} \in \mathbb{C}^m$ відмінний від нуля. Тому з урахуванням (2.12), маємо рівності

$$0 = By = \sum_{k=0}^{r-1} B(Y_k q_k) = \sum_{k=0}^{r-1} [BY_k] q_k.$$

Звідси випливає нерівність $\det[BY] = 0$ на підставі зауваження 2.1.

Обґрунтуємо обернену імплікацію. Припустимо, що $\det[BY] = 0$. Тоді, згідно із зауваженням 2.1,

$$\sum_{k=0}^{r-1} [BY_k] q_k = 0, \tag{3.14}$$

для деяких вектор-стовпців $q_0, q_1, \dots, q_{r-1} \in \mathbb{C}^m$, серед яких принаймні один відмінний від нуля. Розглянемо ненульову функцію $y := \sum\limits_{k=0}^{r-1} Y_k q_k \in (W_p^{s+r})^m$. Для неї $Ly = 0$ і

$$By = \sum_{k=0}^{r-1} B(Y_k q_k) = \sum_{k=0}^{r-1} [BY_k] q_k = 0$$

на підставі рівностей (2.12) і (3.14). Отже, $0 \neq y \in \ker(L, B)$.

Теорему 3.2 доведено.

Для систем диференціальних рівнянь першого порядку теореми 3.1 і 3.2 доведено Є. В. Гнип [8, с. 748] (теорема 1 і теорема 2).

3.3. Достатні умови неперервності за параметром розв'язків задачі у просторі Слободецького

Зафіксуємо додатне число $\varepsilon_0 > 0$. Розглянемо сім'ю крайових задач вигляду (3.1), (3.2) залежних від числового параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) \equiv y^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,\varepsilon)y^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon),\ a \leq t \leq b, \quad (3.15)$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = c(\varepsilon). \quad (3.16)$$

Тут для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ є невідомою вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{s+r})^m$, а всі матриці-функції $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^s)^{m\times m}$, вектор-функція $f(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^s)^m$, лінійний неперервний оператор $B(\varepsilon) : (W_p^{s+r})^m \to \mathbb{C}^{rm}$ і вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ є довільно вибраними. Отже, крайова задача (3.15), (3.16) є найбільш загальною щодо простору Слободецького $(W_p^{s+r})^m$ при кожному $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$.

Умови, достатні для однозначної розв'язності цієї задачі і неперервної залежності її розв'язку за параметром ε при $\varepsilon \to 0+$ в просторі $(W_p^{s+r})^m$, дає така теорема.

Теорема 3.3. *Припустимо, що крайова задача* (3.15), (3.16) *задовольняє умову* (2.0) *і такі граничні умови:*

(i) $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \to A_{r-j}(\cdot,0)$ *в* $(W_p^s)^{m\times m}$ *при* $\varepsilon \to 0+$ *для кожного номера* $j \in \{1,\dots,r\}$;

(ii) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ *при* $\varepsilon \to 0+$ *для кожного* $y \in (W_p^{s+r})^m$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon \geq 0$ *ця задача має єдиний розв'язок* $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{s+r})^m$.

Якщо, крім того,

(iii) $f(\cdot,\varepsilon) \to f(\cdot,0)$ *в* $(W_p^s)^m$ *при* $\varepsilon \to 0+$,

(iv) $c(\varepsilon) \to c(0)$ *в* $\mathbb{C}^{rm}$ *при* $\varepsilon \to 0+$,

то цей розв'язок задовольняє граничну умову

$$y(\cdot, \varepsilon) \to y(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad (W_p^{s+r})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{3.17}$$

Для систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку ця теорема сформульована і доведена Є. В. Гнип [8, с. 749] (теорема 3). Для просторів Соболєва, коли $s \in \mathbb{N}_0$, версії теореми 3.3 встановлено Т. І. Кодлюк і В. А. Михайлецем в [79] у випадку $r = 1$ і Є. В. Гнип, Т. І. Кодлюк і В. А. Михайлецем в [5] у випадку $r \geq 2$.

Доведення теореми подамо у пункті 3.4.

3.4. Доведення достатності умов

Розглянемо параметризовану сім'ю неоднорідних задач Коші для системи $k \geq 1$ лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$y'(t,\varepsilon) = A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) + g(t,\varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \tag{3.18}$$

$$y(a,\varepsilon) = h(\varepsilon). \tag{3.19}$$

Тут для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{s+1})^k$ шукана, а матриця-функція $A(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^s)^{k\times k}$, вектор-функція $g(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^s)^k$, і вектор $h(\varepsilon) \in \mathbb{C}^k$ є довільно заданими. Як відомо, ця задача має єдиний розв'язок $y \in (W_1^1)^k$ для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$. Згідно з лемою 3.1 (яка, звісно, правильна і для $r = 1$), цей розв'язок $y \in (W_p^{s+1})^k$.

Лема 3.2. *Нехай при $\varepsilon \to 0+$ задача* (3.18), (3.19) *задовольняє такі умови*

(a) $A(\cdot,\varepsilon) \to A(\cdot,0)$ *в* $(W_p^s)^{k\times k}$;

(b) $g(\cdot,\varepsilon) \to g(\cdot,0)$ *в* $(W_p^s)^k$;

(c) $h(\varepsilon) \to h(0)$ *в* $\mathbb{C}^k$.

Тоді

$$y(\cdot,\varepsilon) \to y(\cdot,0) \quad \textit{в} \quad (W_p^{s+1})^k \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{3.20}$$

Це твердження є безпосереднім наслідком теореми 3 із статті Є. В. Гнип, Т. І. Кодлюк і В. А. Михайлеця [5, с. 586 – 587], оскільки задача Коші (3.18), (3.19) є окремим випадком граничної задачі для диференціального рівняння (3.18), найбільш загальної щодо простору $(W_p^{s+1})^m$.

Доведемо спочатку теорему 3.3 для задачі Коші

$$L(\varepsilon)x(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \tag{3.21}$$

$$x^{(j-1)}(a,\varepsilon) = h_j(\varepsilon), \quad j = 1,\dots,r, \tag{3.22}$$

залежної від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. Тут $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{C}^m$. Ця задача Коші має єдиний розв'язок $x(\cdot, \varepsilon) \in (W_1^r)^m$, який належить до простору $(W_p^{s+r})^m$ за лемою 3.1.

Лема 3.3. *Нехай виконуються умови* (i), (iii) *теореми* 3.3 *і, крім того,*

$$h_j(\varepsilon) \to h_j(0) \quad \text{\textit{в}} \quad \mathbb{C}^m \quad \text{\textit{при}} \quad \varepsilon \to 0+ \quad \text{\textit{для кожного}} \quad j \in \{1, \dots, r\}. \tag{3.23}$$

Тоді

$$x(\cdot, \varepsilon) \to x(\cdot, 0) \quad \text{\textit{в}} \quad (W_p^{s+r})^m \quad \text{\textit{при}} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{3.24}$$

Доведення. При $r = 1$ лема 3.3 рівносильна лемі 3.2, де $k = m$. Нехай $r \geq 2$. Зведемо задачу Коші (3.21), (3.22) до задачі Коші вигляду (3.18), (3.19), де $k = rm$. Як і в п. 2.4, покладемо

$$y(\cdot, \varepsilon) = \mathrm{col}(x(\cdot, \varepsilon), x'(\cdot, \varepsilon), \dots, x^{(r-1)}(\cdot, \varepsilon)) \in (W_p^{s+1})^{rm}, \tag{3.25}$$

$$A(\cdot, \varepsilon) := \begin{pmatrix} O_m & -I_m & O_m & \dots & O_m \\ O_m & O_m & -I_m & \dots & O_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_m & O_m & O_m & \dots & -I_m \\ A_0(\cdot, \varepsilon) & A_1(\cdot, \varepsilon) & A_2(\cdot, \varepsilon) & \dots & A_{r-1}(\cdot, \varepsilon) \end{pmatrix} \in (W_p^s)^{rm \times rm},$$

$$g(\cdot, \varepsilon) := \mathrm{col}(0, f(\cdot, \varepsilon)) \in (W_p^s)^{rm},$$

$$h(\varepsilon) := \mathrm{col}(h_1(\varepsilon), \dots, h_r(\varepsilon)) \in \mathbb{C}^{rm}.$$

Із умов (i), (iii) теореми 3.3 і умови (3.23) випливають умови (a), (b) і (c) леми 3.2. Тому $y(\cdot, \varepsilon)$ задовольняє граничну властивість (3.20) за цією лемою. Отже,

$$x(\cdot, \varepsilon) \to x(\cdot, 0) \quad \text{і} \quad x^{(r)}(\cdot, \varepsilon) \to x^{(r)}(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad (W_p^s)^{rm} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+,$$

тобто виконується (3.24).

Лему 3.3 доведено.

Доведемо існування і єдиність розв'язку крайової задачі (3.15), (3.16) при малих значеннях параметра $\varepsilon \geq 0$.

Лема 3.4. *Нехай крайова задача* (3.15), (3.16) *задовольняє умову* (2.0) *і граничні умови* (i) *та* (ii) *теореми* 3.3. *Тоді для достатньо малих* $\varepsilon \geq 0$ *ця задача має єдиний розв'язок* $y(\cdot, \varepsilon) \in (W_p^{s+r})^m$.

Доведення. Розглянемо при кожних $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ і $k \in \{0, \ldots, r-1\}$ задачу Коші (3.12), (3.13), де $Y_k^{(r)}(\cdot) := Y_k^{(r)}(\cdot, \varepsilon)$ і кожне $A_{r-j}(\cdot) := A_{r-j}(\cdot, \varepsilon)$ та $t_0 := a$. Вона складається з m задач Коші вигляду (3.21), (3.22) з $f = 0$ відносно вектор-функцій $x(\cdot, \varepsilon)$, які є стовпцями матриці $Y_k(\cdot, \varepsilon)$. Тому вона має єдиний розв'язок $Y(\cdot, \varepsilon) \in (W_p^{s+r})^{m \times m}$, який, за лемою 3.3, задовольняє граничну умову

$$Y_k(\cdot, \varepsilon) \to Y_k(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad (W_p^{s+r})^{m \times m} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{3.26}$$

Звідси на підставі умови (ii) теореми 3.3 маємо збіжність при $\varepsilon \to 0+$ блочних числових матриць

$$\begin{gathered}[\mathrm{B}(\varepsilon) Y(\cdot, \varepsilon)] = ([B(\varepsilon) Y_0(\cdot, \varepsilon)] \ \ldots \ [B(\varepsilon) Y_{r-1}(\cdot, \varepsilon)]) \to \\ \to ([B(0) Y_0(\cdot, 0)] \ \ldots \ [B(0) Y_{r-1}(\cdot, 0)]) = [B(0) Y(\cdot, 0)].\end{gathered} \tag{3.27}$$

Згідно з умовою (2.0) і теоремою 3.1 оператор

$$(L(0), B(0)) : (W_p^{s+r})^m \to (W_p^s)^m \times \mathbb{C}^{rm}$$

оборотний. Тому $\det[B(0) Y(\cdot, 0)] \neq 0$ за теоремою 3.2. Отже,

$$\det[B(\varepsilon) Y(\cdot, \varepsilon)] \neq 0 \quad \text{для достатньо малих} \quad \varepsilon \geq 0 \tag{3.28}$$

для достатньо малих $\varepsilon \geq 0$ на підставі (3.27). Тому, згідно з теоремою 3.2, задача (3.15), (3.16) має єдиний розв'язок $y(\cdot, \varepsilon) \in (W_p^{s+r})^m$ для цих самих ε.

Лему 3.4 доведено.

Розглянемо напіводнорідну крайову задачу

$$L(\varepsilon)\upsilon(\cdot,\varepsilon) \equiv 0, \tag{3.29}$$

$$B(\varepsilon)\upsilon(\cdot,\varepsilon) = c(\varepsilon) \tag{3.30}$$

залежну від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. За лемою 3.4 ця задача має єдиний розв'язок $\upsilon(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{s+r})^m$ для достатньо малих $\varepsilon \geq 0$, якщо вона задовольняє умову (2.0) і граничні умови (i) та (ii) теореми 3.3.

Лема 3.5. *Нехай крайова задача* (3.29), (3.30) *задовольняє умову* (2.0) *і граничні умови* (i), (ii), (iv) *теореми* 3.3. *Тоді*

$$\upsilon(\cdot,\varepsilon) \to \upsilon(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (W_p^{s+r})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{3.31}$$

Доведення. Запишемо розв'язок однорідного диференціального рівняння (3.29) у вигляді

$$\upsilon(\cdot,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{r-1} Y_k(\cdot,\varepsilon) q_k(\varepsilon), \tag{3.32}$$

з довільними вектор-функціями $q_0(\varepsilon), \ldots, q_{r-1}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, де кожна матриця-функція $Y_k(\cdot,\varepsilon)$ належить простору $(W_p^{s+r})^{m\times m}$, а $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$. На підставі рівності (2.12) маємо

$$B(\varepsilon)\upsilon(\cdot,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{r-1} B(\varepsilon)(Y_k(\cdot,\varepsilon)q_k(\varepsilon)) = \sum_{k=0}^{r-1}[B(\varepsilon)Y_k(\cdot,\varepsilon)]q_k(\varepsilon).$$

Тому крайова умова (3.30) рівносильна умові

$$\sum_{k=0}^{r-1}[B(\varepsilon)Y_k(\cdot,\varepsilon)]q_k(\varepsilon) = c(\varepsilon). \tag{3.33}$$

Рівність (3.33) можна записати у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$([B(\varepsilon)Y_0(\cdot,\varepsilon)] \;\ldots\; [B(\varepsilon)Y_{r-1}(\cdot,\varepsilon)])q(\varepsilon) = c(\varepsilon). \tag{3.34}$$

відносно координат стовпця $q(\varepsilon) := \mathrm{col}(q_0(\varepsilon), \ldots, q_{r-1}(\varepsilon))$. Згідно з (3.28) матриця

$$[B(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)] = ([B(\varepsilon)Y_0(\cdot,\varepsilon)] \ \ldots \ [B(\varepsilon)Y_{r-1}(\cdot,\varepsilon)])$$

невироджена для достатньо малих $\varepsilon \geq 0$. Тому для цих ε система (3.34) має єдиний розв'язок $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$. На підставі умови (iv) теореми 3.3 і формули (3.27) робимо висновок, що $q(\varepsilon) \to q(0)$ в $\mathbb{C}^{rm}$ при $\varepsilon \to 0+$. Звідси, з огляду на формули (3.26) і (3.32), отримаємо потрібну збіжність (3.31).

Лему 3.5 доведено.

Припустимо тепер, що крайова задача (3.15), (3.16) задовольняє умову (2.0) і граничні умови (i) – (iv) теореми 3.3. За лемою (3.4), ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{s+r})^m$, для достатньо малих $\varepsilon \geq 0$. Спираючись, на леми (3.3) і (3.5) покажемо, що цей розв'язок задовольняє умову (3.17), і цим завершимо доведення теореми 3.3.

Для кожного достатньо малого $\varepsilon \geq 0$ покладемо

$$z(\cdot,\varepsilon) := y(\cdot,\varepsilon) - x(\cdot,\varepsilon),$$

де вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon)$ є розв'язком неоднорідної крайової задачі (3.15), (3.16), а вектор-функція $x(\cdot,\varepsilon)$ — розв'язком задачі Коші (3.21), (3.22), де кожне $h_j(\varepsilon) = 0$. Тоді $z(\cdot,\varepsilon)$ є розв'язком напіводнорідної крайової задачі

$$L(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon) \equiv 0, \quad B(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon) = \tilde{c}(\varepsilon),$$

де

$$\tilde{c}(\varepsilon) := c(\varepsilon) - B(\varepsilon)x(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^m.$$

На підставі зроблених припущень і леми 3.3 робимо висновок, що $\tilde{c}(\varepsilon) \to \tilde{c}(0)$ при $\varepsilon \to 0+$. Таким чином, за лемою 3.5, виконується збіжність

$$z(\cdot,\varepsilon) \to z(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (W_p^{s+r})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{3.35}$$

Із (3.24) і (3.35) випливає потрібна гранична властивість (3.17).

Теорему 3.3 доведено.

Висновки до розділу 3

У третьому розділі дисертації введено і досліджено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Слободецького $(W_p^{s+r})^m$, де $p \in (1, \infty)$, $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$. Ці крайові задачі є найбільш загальними щодо простору $(W_p^{s+r})^m$. Отримано такі основні результати:

1. Доведено, що ці крайові задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі просторів $(W_p^{s+r})^m$ і $(W_p^{s})^m \times \mathbb{C}^{rm}$ (теорема 3.1).

2. Встановлено критерій однозначної розв'язності цих крайових задач у вказаних просторах Слободецького (теорема 3.2).

3. Для крайових задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивні достатні умови неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі Слободецького $(W_p^{s+r})^m$ (теорема 3.3). Це — основний результат третього розділу.

Результати цього розділу опубліковано у статті [30] та висвітлено в тезах конференцій [33, 35].

РОЗДІЛ 4
БАГАТОТОЧКОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ

Багатоточкові крайові задачі є важливими прикладами тотальних крайових задач, розглянутих у попередніх розділах. Отже, для них є правильними отримані у цих розділах результати про коректну розв'язність цих задач і неперервну залежність їх розв'язків за параметром.

У даному розділі введемо і дослідимо новий клас залежних від параметра багатоточкових крайових задач для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають заданий простір Гельдера. Використовуючи результати другого розділу, отримаємо явні достатні умови неперервності за параметром розв'язків цих задач. Крім того, покажемо, що розв'язками багатоточкових крайових задач можна апроксимувати розв'язки істотно більш загальних крайових задач.

4.1. Багатоточкові крайові задачі у просторах Гельдера

Нехай, як і у другому розділі, довільно вибрано відрізок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, цілі числа $m \geq 1$, $n \geq 0$ і $r \geq 2$ та дійсне число $\alpha \in (0, 1]$. Розглянемо на відрізку $[a, b]$ систему m лінійних диференціальних рівнянь порядку r, залежних від числового параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) \equiv y^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,\varepsilon)y^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \qquad (4.1)$$

де фіксовано число $\varepsilon_0 > 0$. Тут, як і в п. 2.3, для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ є невідомою вектор-функція $y(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n+r,\alpha})^m$, а усі матриці-функції $A_{r-j}(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^{m\times m}$ і вектор-функція $f(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^m$ є довільно заданими.

Довільно виберемо натуральні числа p і $q_1, \ldots, q_p$. Для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ розглянемо таку багатоточкову крайову умову:

$$B(\varepsilon)y(\cdot, \varepsilon) \equiv \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=1}^{q_j} \sum_{l=0}^{n+r} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon), \varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{4.2}$$

Тут усі матриці $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm\times m}$, точки $t_{j,k}(\varepsilon) \in [a, b]$ і вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ довільно задані. Ця умова має сенс для кожної вектор-функції $y(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n+r,\alpha})^m$.

Використання у багатоточковій крайовій умові (4.2) сум за індексами j і k зумовлено подальшими припущеннями щодо поведінки точок $t_{j,k}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ у залежності від значень параметра j. Припускаємо, що для кожного номера $j \in \{1, \ldots, p\}$ усі точки $t_{j,k}(\varepsilon)$, де $k \in \{1, \ldots, q_j\}$, мають спільну границю при $\varepsilon \to 0+$. Це припущення не робиться для точок $t_{0,k}(\varepsilon)$, де $k \in \{1, \ldots, q_0\}$.

З огляду на сказане, розглядаємо у граничному випадку $\varepsilon = 0$ таку крайову умову:

$$B(0)y(\cdot, 0) \equiv \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+r} \beta_{j}^{(l)} y^{(l)}(t_j, 0) = c(0). \tag{4.3}$$

Тут усі матриці $\beta_{j}^{(l)} \in \mathbb{C}^{rm\times m}$, точки $t_j \in [a, b]$ та вектор $c(0) \in \mathbb{C}^{rm}$ є довільно заданими.

Зауважимо, що крайові умови (4.2) і (4.3) охоплюють як класичні багатоточкові умови, так і некласичні, що містять похідні шуканої функції, порядок яких більший за порядок диференціального рівняння (4.1). У випадку $r = 1$ крайову умову (4.2) увів В. О. Солдатов [58, с. 270].

Звісно, для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ лінійне відображення $y \mapsto B(\varepsilon)y$, де $y \in (C^{n+r,\alpha})^m$, є обмеженим оператором

$$B(\varepsilon)\colon (C^{n+r,\alpha})^m \to \mathbb{C}^{rm}. \tag{4.4}$$

Зроблені припущення стосовно системи (4.1) та обмеженість оператора (4.4) означають, що крайова задача (4.1), (4.2) при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ та гранична крайова задача

$$L(0)y(t,0) = f(t,0), \quad a \leq t \leq b, \tag{4.1 – 0}$$

$$B(0)y(\cdot,0) = c(0) \tag{4.3}$$

є найбільш загальними щодо простору Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$. Отже, для них застосовні результати другого розділу, серед яких основним є теорема 2.3 про необхідні і достатні умови неперервної залежності за параметром розв'язку $y(\cdot,\varepsilon)$ у просторі $C^{n+r,\alpha}$ при $\varepsilon = 0$. Виявляється, що використану у цій теоремі граничну умову (2.II) можна замінити у сенсі достатності на деякі явні умови, пов'язані зі структурою багатоточкових крайових умов (4.2) і (4.3). Попередньо зауважимо, що у випадку, коли гранична багатоточкова крайова задача (4.1 – 0) і (4.3) задовольняє умову (2.0), то за теоремою 2.2 ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot,0) \in (C^{n+r,\alpha})^m$.

Теорема 4.1. *Нехай розглянуті багатоточкові крайові задачі задовольняють умову* (2.0) *і такі граничні умови при* $\varepsilon \to 0+$:

(a) $A_k(\cdot,\varepsilon) \to A_k(\cdot,0)$ *в* $(C^{n,\alpha})^{m\times m}$ *для кожного* $k \in \{0,\dots,r-1\}$*;*

(b1) $t_{j,k}(\varepsilon) \to t_j$ *для усіх* $j \in \{1,\dots,p\}$ *і* $k \in \{1,\dots,q_j\}$;

(b2) $\sum\limits_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \to \beta_j^{(l)}(0)$ *для усіх* $l \in \{0,\dots,n+r\}$ *і* $j \in \{1,\dots,p\}$*;*

(b3) $\|\beta_{j,k}^{(n+r)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j|^\alpha \to 0$ *для усіх* $j \in \{1,\dots,p\}$ *і* $k \in \{1,\dots,q_j\}$*;*

(b4) $\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \to 0$ *для усіх* $j \in \{1,\dots,p\}$, $k \in \{1,\dots,q_j\}$ *і* $l \in \{0,\dots,n+r-1\}$*;*

(b5) $\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) \to 0$ *для усіх* $k \in \{1,\dots,q_0\}$, $l \in \{0,\dots,n+r\}$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ *крайова задача* (4.1), (4.2) *має єдиний розв'язок* $y(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n+r,\alpha})^m$.

Якщо, крім того,

(c) $f(\cdot, \varepsilon) \to f(\cdot, 0)$ *в* $(C^{n,\alpha})^m$*;*

(d) $c(\varepsilon) \to c(0)$ *в* $\mathbb{C}^{rm}$,

то цей розв'язок задовольняє граничну властивість

$$y(\cdot, \varepsilon) \to y(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad (C^{n+r,\alpha})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{4.5}$$

В умові (b4) і надалі під нормою $\|\cdot\|$ числової матриці (зокрема, вектора) розуміємо суму модулів усіх її елементів.

Стосовно цієї теореми корисно зауважити, що умовам (b2) – (b4), накладеним на матриці $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)$, можуть задовольняти матриці такі, що $\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \to \infty$ при $\varepsilon \to 0+$. Ці умови сформульовано при $j \neq 0$ з огляду на умову (b5). Останнє приводить до граничної крайової умови (4.3).

Для диференціальних рівнянь першого порядку (випадок $r = 1$) теорему 4.1 встановив В. О. Солдатов [58, с. 273] або (див. п. 1.3 дисертації, твердження 1.4).

Доведення теореми 4.1. З огляду на теорему 2.3, для доведення достатньо показати, що з умов (b1) – (b5) випливає гранична умова (2.II), тобто властивість

$$\begin{gathered} B(\varepsilon)y \to B(0)y \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^{rm} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ \\ \text{для кожного} \quad y \in (C^{n+r,\alpha})^m. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Припустимо, що умови (b1) – (b5) виконуються. Покажемо, що крайовий оператор $B(\varepsilon)$ задовольняє умову (4.6). Для довільної функції $y \in (C^{n+r,\alpha})^m$

і достатньо малого $\varepsilon > 0$ запишемо:

$$\|B(\varepsilon)y - B(0)y\| =$$

$$= \left\| \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=1}^{q_j} \sum_{l=0}^{n+r} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+r} \beta_{j}^{(l)}(0) y^{(l)}(t_j) \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{q_0} \sum_{l=0}^{n+r} \|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon))\| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+r} \left\| \sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_{j}^{(l)}(0) y^{(l)}(t_j) \right\| \tag{4.7}$$

Тут на підставі умови (b5) маємо:

$$\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon))\| \leq \|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y\|_{n+r,\alpha} \to 0 \tag{4.8}$$

для усіх допустимих значень індексів k і l. Ця і всі інші границі у доведенні розглядаються за умови, що $\varepsilon \to 0+$.

Дослідимо другий доданок в (4.7). Для довільних номерів $j \in \{1, \dots, p\}$ і $l \in \{0, \dots, n+r\}$ запишемо:

$$\left\| \sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_{j}^{(l)}(0) y^{(l)}(t_j) \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_j) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_j) - \beta_{j}^{(l)}(0) y^{(l)}(t_j) \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \cdot \Big(y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j) \Big) \right\| +$$

$$+ \left\| \left(\sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_{j}^{(l)}(0) \right) \cdot y^{(l)}(t_j) \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{q_j} \|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\| +$$

$$+ \left\| \sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_{j}^{(l)}(0) \right\| \cdot \|y\|_{n+r,\alpha}.$$

Отже,

$$
\begin{gathered}
\left\| \sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)}(0) y^{(l)}(t_j) \right\| \leq \\
\leq \sum_{k=1}^{q_j} \|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\| + \\
+ \left\| \sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)}(0) \right\| \cdot \|y\|_{n+r,\alpha}.
\end{gathered} \tag{4.9}
$$

Тут на підставі умови (b2) маємо:

$$
\left\| \sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)}(0) \right\| \cdot \|y\|_{n+r,\alpha} \to 0. \tag{4.10}
$$

Крім того,

$$
\sum_{k=1}^{q_j} \|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\,\| \to 0. \tag{4.11}
$$

Справді, якщо $l = n + r$, то

$$
\begin{gathered}
\|\beta_{j,k}^{(n+r)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(n+r)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(n+r)}(t_j)\,\| \leq \\
\leq \|\beta_{j,k}^{(n+r)}(\varepsilon)\| \cdot \|y\|_{n+r,\alpha} \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j|^{\alpha} \to 0
\end{gathered}
$$

для кожного $k \in \{1, \dots, q_j\}$ з огляду на означення норми у просторі $C^{n+r,\alpha}$ і властивість (b3). Якщо $l \leq n + r - 1$, то (4.11) випливає з теореми Лагранжа про середнє значення функції і умови (b4):

$$
\begin{gathered}
\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\,\| = \\
= \|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l+1)}(\tau_{j,k}(\varepsilon))\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \leq \\
\leq \|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y\|_{n+r,\alpha} \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \to 0
\end{gathered}
$$

для кожного $k \in \{1, \dots, q_j\}$; тут $\tau_{j,k}(\varepsilon)$ – деяка точка на відрізку $[a, b]$.

На підставі (4.9), (4.10) – (4.12) маємо збіжність

$$
\left\| \sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)}(0) y^{(l)}(t_j) \right\| \to 0 \tag{4.12}
$$

Тепер властивість (4.6) є прямим наслідком формул (4.7), (4.8) і (4.12) та довільного вибору вектор-функції $y \in (C^{n+r,\alpha})^m$ у них.

Теорему 4.1 доведено.

4.2. Апроксимативні властивості багатоточкових крайових задач

Нехай довільно вибрано (скінченний) відрізок $[a,b] \subset \mathbb{R}$ і довільні цілі числа $n \geq 0$ і $m \geq 1$. Розглянемо таку крайову задачу для системи m лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$y'(t) + A(t)y(t) = f(t), \quad a \leq t \leq b, \tag{4.13}$$

$$By = c. \tag{4.14}$$

Тут вектор-функція $y \in (C^{(n+1)})^m$ шукана та довільно задано матрицю-функцію $A \in (C^{(n)})^{m\times m}$, вектор-функцію $f \in (C^{(n)})^m$, вектор $c \in \mathbb{C}^m$ і лінійний неперервний оператор

$$B : (C^{(n+1)})^m \to \mathbb{C}^m. \tag{4.15}$$

Крайова умова (4.14) з неперервним оператором (4.15) є найбільш загальною для рівняння (4.13), розв'язок якого пробігає простір $C^{(n+1)}$. Наслідуючи [40, с. 25], крайова задача вигляду (4.13), (4.14) є *найбільш загальною* щодо простору $(C^{(n+1)})^m$.

Окремим і важливим випадком крайової умови (4.14) є багатоточкова крайова умова вигляду

$$By \equiv \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=0}^{n+1} \alpha_j^{(l)} y^{(l)}(a_j) = c. \tag{4.16}$$

Тут довільно вибрано матриці $\alpha_j^{(l)} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ та точки $a_1, \dots, a_p \in [a,b]$.

Для того, щоб неоднорідна крайова задача (4.13), (4.14) мала єдиний розв'язок $y \in (C^{(n+1)})^m$ для довільних правих частин $f \in (C^{(n)})^m$ і $c \in \mathbb{C}^m$, вважаємо, що надалі виконується таке припущення (див. [40, с. 26]).

Умова (4.0). *Однорідна крайова задача*

$$y'(t) + A(t)y(t) = 0, \quad a \le t \le b, \tag{4.17}$$

$$By = 0 \tag{4.18}$$

має лише тривіальний розв'язок.

Нехай X — довільна множина, щільна в просторі $(C^{(n)})^{m\times m}$. Розглянемо на відрізку $[a, b]$ послідовність багатоточкових крайових задач вигляду (4.13), (4.16):

$$y_k'(t) + A_k(t)y_k(t) = f(t), \quad a \le t \le b \tag{4.19}$$

$$B_k y_k \equiv \sum_{j=1}^{p_k}\sum_{l=0}^{n+1} \alpha_{k,j}^{(l)} y_k^{(l)}(a_{k,j}) = c, \tag{4.20}$$

де $k \in \mathbb{N}$. Тут для кожного $k \in \mathbb{N}$ вектор-функція $y_k \in (C^{(n+1)})^m$ є шуканою вектор-функцією і довільно задано матрицю-функцію $A_k \in X$, усі матриці $\alpha_{k,j}^{(l)} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ та точки $a_{k,1}, \dots, a_{k,p_k} \in [a, b]$. Праві частини задачі — вектор-функція $f \in (C^{(n)})^m$ і вектор $c \in \mathbb{C}^m$ — такі самі як і в задачі (4.13), (4.14).

Покажемо, що для кожної крайової задачі (4.13), (4.14) існує послідовність багатоточкових крайових задач вигляду (4.19), (4.20), розв'язки яких збігаються до розв'язку задачі (4.13), (4.14) в просторі $(C^{(n+1)})^m$.

Теорема 4.2. *Для будь-якої крайової задачі* (4.13), (4.14) *знайдеться послідовність багатоточкових крайових задач* (4.19), (4.20) (*де* $A_k \in X$) *таких, що для достатньо великого номера* k *кожна з них є однозначно розв'язною, а її розв'язок задовольняє умову*

$$y_k(t) \to y(t) \quad \textit{в} \quad (C^{(n+1)})^m \quad \textit{при} \quad k \to \infty. \tag{4.21}$$

Ця послідовність не залежить від f *і* c *та будується явним чином.*

Доведення. З щільності множини X в просторі $C^{(n)}$ випливає існування послідовності $(A_k)_{k=1}^{\infty} \subset X$ такої, що

$$A_k \to A \quad \text{в} \quad C^{(n)} \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{4.22}$$

Нагадаємо, що $BV[a,b]$ — банахів простір усіх функцій $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ з обмеженою варіацією на $[a,b]$, наділений нормою

$$\|g\|_{BV[a,b]} := \bigvee_a^b g,$$

а $NBV[a,b]$ — його підпростір, утворений усіма функціями $g \in BV[a,b]$, які неперервні зліва і задовольняють умову $g(a) = 0$. Крайовий оператор (4.15) допускає таке однозначне зображення:

$$\begin{gathered} By = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j y^{(j-1)}(a) + \int_a^b (d\Phi(t)) y^{(n+1)}(t) \\ \text{для довільного} \quad y \in (C^{(n+1)})^m. \end{gathered} \tag{4.23}$$

Тут кожне α_j — деяка матриця класу $\mathbb{C}^{m\times m}$, а $\Phi(t)$ — деяка матриця-функція розміру $m \times m$, утворена скалярними функціями класу $NBV[a,b]$. Звісно, інтеграл розуміється в сенсі Рімана-Стільтьєса. Таке зображення лінійного неперервного оператора (4.15) безпосередньо випливає з відомого опису простору, спряженого до $C^{(n+1)}$ (див., наприклад, [12, с. 374]).

Отже, крайова умова (4.14) набуває вигляду

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j y^{(j-1)}(a) + \int_a^b (d\Phi(t)) y^{(n+1)}(t) = c.$$

Звідси випливає, що для побудови потрібної апроксимуючої послідовності крайових умов (4.20) достатньо апроксимувати функцію $\Phi(t)$ східчастими функціями. Нагадаємо, що функцію $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ називають *східчастою*, якщо для неї існує скінченне число проміжків скінченної довжини (вони можуть вироджуватися у точки), на кожному з яких вона стала, а зовні їх об'єднання дорівнює нулю (див., наприклад, [50, с. 39]). Надалі знадобиться такий результат.

Лема 4.1. *Для кожної функції $g \in NBV[a,b]$ знайдеться послідовність східчастих функцій $g_k \in NBV[a,b]$, де $k = 1, 2, 3, \ldots$, така, що*

$$\sup_{a \le t \le b} |g(t) - g_k(t)| \to 0 \quad \textit{при} \quad k \to \infty$$

та

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \bigvee_a^b g_k < \infty.$$

Доведення леми 4.1. Кожна функція класу $NBV[a,b]$ є лінійною комбінацією двох дійсних функцій цього ж класу, а будь-яка дійсна функція класу $NBV[a,b]$ є різницею деяких двох зростаючих (нестрого) функцій класу $NBV[a,b]$ (див., наприклад, [1]). Крім того, довільна зростаюча функція класу $NBV[a,b]$ є сумою деяких зростаючих неперервної функції та функції стрибків, які належать до цього ж класу. Згідно з [41, с. 268] (лема 1, лема 2) останні дві функції можна апроксимувати рівномірно на $[a,b]$ послідовностями зростаючих функцій, повні варіації яких обмежені у сукупності. Цим і доведено лему.

Продовжимо доведення теореми 4.2. За лемою 4.1, для матриці-функції $\Phi(t)$ з формули (4.23) існує послідовність матриць-функцій $(\Phi_k(t))_{k=1}^{\infty}$, утворених східчастими скалярними функціями класу $NBV[a,b]$, така, що

$$\sup_{a \le t \le b} \|\Phi(t) - \Phi_k(t)\| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty \tag{4.24}$$

та

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \bigvee_a^b \Phi_k < \infty. \tag{4.25}$$

Звісно, тут $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{C}^{m \times m}$, а повна варіація матриці-функції дорівнює сумі повних варіації усіх скалярних функцій, які утворюють цю матрицю-функцію. Нехай $k \in \mathbb{N}$; покладемо

$$B_k y_k := \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j y_k^{(j-1)}(a) + \int_a^b (d\Phi_k(t)) y_k^{(n+1)}(t)$$

$$\text{для довільного} \quad y_k \in (C^{(n+1)})^m.$$

Оскільки матриця-функція $\Phi_k(t)$ утворена східчастими скалярними функціями, то $B_k y_k$ набуває вигляду лівої частини формули (4.20). Отже, маємо багатоточкову крайову задачу (4.19), (4.20), де матриця-функція $A_k \in X$ задовольняє умову (4.22). Згідно з теоремою Ґеллі [1, с. 336], із умов (4.24), (4.25) випливає властивість

$$B_k y_k \to B y_k \quad \text{при} \quad k \to \infty \quad \text{для довільного} \quad y_k \in (C^{(n+1)})^m.$$

Таким чином, крайова задача (4.19), (4.20) задовольняє умови теореми В. А. Михайлеця і Г. О. Чеханової (див. [40, с. 26 – 27]) або (див. п. 1.1 дисертації, твердження 1.1) про неперервність в $(C^{(n+1)})^m$ за параметром $\varepsilon = 1/k$ її розв'язку при $\varepsilon \to 0+$. Тому останній має властивість (4.21).

Теорему 4.2 доведено.

Відповідна версія цієї теореми правильна і для систем диференціальних рівнянь вищих порядків.

Висновки до розділу 4

У четвертому розділі подано застосування основних результатів другого розділу до одновимірних багатоточкових крайових задач, залежних від параметра. Введено і досліджено новий широкий клас багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$, де $n \geq 0$ і $0 < \alpha \leq 1$. Для цих задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено достатні умови неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у нормованому просторі $(C^{n+r,\alpha})^m$ (теорема 4.1). Крім того доведено, що розв'язок довільної крайової задачі у просторі $C^{(n+1)}$, можна апроксимувати в $C^{(n+1)}$ розв'язками багатоточкових крайових задач (теорема 4.2).

Результати цього розділу опубліковано у статтях [27, 29].

ВИСНОВКИ ДО ДИСЕРТАЦІЇ

У дисертаційній роботі отримано такі основні результати:

1. Введено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$, де $n \geq 0$ і $0 < \alpha \leq 1$.

2. Доведено, що уведені задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі функціональних просторів $(C^{n+r,\alpha})^m$ і $(C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^{rm}$ і встановлено критерій однозначної розв'язності цих задач.

3. Для крайових задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$ та доведено, що похибка і нев'язка цих розв'язків мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Гельдера.

4. Введено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Слободецького $(W_p^{s+r})^m$, де $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$, $p \in (1, \infty)$.

5. Доведено, що уведені задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі функціональних просторів $(W_p^{s+r})^m$ і $(W_p^s)^m \times \mathbb{C}^{rm}$ і встановлено критерій однозначної розв'язності цих задач.

6. Для крайових задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивні достатні умови неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі Слободецького $(W_p^{s+r})^m$.

7. Введено новий широкий клас залежних від параметра $\varepsilon \geq 0$ багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких пробігають простір Гельдера $(C^{n+r,\alpha})^m$, де $n \geq 0$ і $0 < \alpha \leq 1$. Встановлено достатні умови неперервності за параметром цих розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі $(C^{n+r,\alpha})^m$.

8. Доведено, що розв'язок довільної крайової задачі у просторі $C^{(n+1)}$, можна апроксимувати в $C^{(n+1)}$ розв'язками багатоточкових крайових задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Березанский Ю. М.* Функціональний аналіз : підручник / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. — Львів: Видавець І. Є. Чижиков, 2014. — 559 с.

2. *Боголюбов Н. Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — М. : Физматгиз, 1955. — 410 с.

3. *Гихман И. И.* По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова / И. И. Гихман // Український математичний журнал. — 1952. — № 4. — С. 215 – 219.

4. *Гнип Є. В.* Неперервність за параметром розв'язків некласичних багатоточкових крайових задач на просторах Соболєва / Є. В. Гнип, Т. І. Кодлюк // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 2. — С. 101 – 112.

5. *Гнып Е. В.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах Соболева / Е. В. Гнып, Т. И. Кодлюк, В. А. Михайлец // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 5. — С. 584 – 591.

6. *Гнип Є. В.* Неперервність за пераметром розв'язків некласичних багатоточкових крайових задач на просторах Слободецького // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — Т. 13, № 2. — С. 101 – 110.

7. *Гнип Є. В., Михайлець В. А.* Фредгольмові крайові задачі з параметром на просторах Слободецького // Диференціальні рівняння і сумі-

жні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — Т. 13, № 1. — С. 76 – 87.

8. *Гнип Є. В.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач у просторах Слободецького / Є. В. Гнип // Укр. мат. журн. — 2016. — Т. 68, № 6. — С. 746 – 756.

9. *Гнип Є. В., Михайлець В. А., Мурач О. О.* Про критерій неперервної залежності за параметром розв'язків тотальних крайових задач щодо просторів Соболєва // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — Т. 13, № 2. — С. 111 – 125.

10. *Гнип Є. В.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач на просторах Соболєва-Слободецького. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук: 01.01.02 / Є. В. Гнип. — Київ, 2016. — 116 с.

11. *Горюнов А. С.* Регуляризация квазипроизводными двучленных дифференциальных уравнений с сингулярным коэффициентом / А. С. Горюнов, В. А. Михайлец // Український математичний журнал. — 2011. — Т. 63, № 9. — С. 1190 – 1205.

12. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы: Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Шварц. — Москва: Изд-во иностранной лит., 1962. — 895 с.

13. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы / А. Картан. — Москва: Мир, 1971. — 392 с.

14. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Т. Кигурадзе. — Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. — 352 с.

15. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Т. Кигурадзе // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения / ВИНИТИ — 1987. — Т. 30. — С. 3 – 103.

16. *Кигурадзе И. Т.* О краевых задачах для линейных дифференциальных систем с сингулярностями / И. Т. Кигурадзе // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39, № 2. — С. 198 – 209.

17. *Кодлюк Т. И.* Предельный переход в классе многоточечных краевых задач / Т. И. Кодлюк // Аналіз і застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2012. — Т. 9, № 2. — С. 203 – 216.

18. *Кодлюк Т. И.* Многоточечные краевые задачи с параметром в пространствах Соболева / Т. И. Кодлюк, В. А. Михайлец // Доповіді Національної академії наук України. — 2012. — № 11. — С. 15 – 19.

19. *Кодлюк Т. И.* Предельные теоремы для одномерных краевых задач / Т. И. Кодлюк, В. А. Михайлец, Н. В. Рева // Український математичний журнал. — 2013. — Т. 65, № 1. — С. 70 – 81.

20. *Кодлюк Т. И.* Матрицы Грина одномерных краевых задач с параметром в пространствах Соболева / Т. И. Кодлюк // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 2. — С. 191 – 199.

21. *Красносельский М. А.* О принципе усреднения в нелинейной механике / М. А. Красносельский, С. Г. Крейн // Успехи математических наук. — 1955. — Т. 3, № 10. — С. 147 – 153.

22. *Курцвейль Я.* О непрерывной зависимости решений линейных уравнений от параметра / Я. Курцвейль, З. Ворель // Чехословацкий математический журнал. — 1957. — Т. 7, № 4. – С. 568 – 583.

23. *Левин А. Ю.* О дифференциальных свойствах функции Грина многоточечной краевой задачи / А. Ю. Левин // Доклады Академии наук СССР. — 1961. — Т. 136, № 5. — С. 1022 – 1025.

24. *Левин А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ / А. Ю. Левин // Доклады Академии наук СССР. — 1967. — Т. 176, № 4. — С. 774 – 777.

25. *Левин А. Ю.* Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. I / А. Ю. Левин // Вестник Ярославского университета. — 1973. — № 5. — С. 105 – 132.

26. *Левин А. Ю.* О многоточечной краевой задаче / А. Ю. Левин // Научные доклады высшей школы. — 1985. — № 5. — С. 34 – 37.

27. *Маслюк Г. О.* Багатоточкові крайові задачі з параметром для диференціальних рівнянь високого порядку на просторах Гельдера / Г. О. Маслюк // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — Т. 13, № 2. — С. 193 – 203.

28. *Маслюк Г. О.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач у просторах Гельдера / Г. О. Маслюк // Укр. мат. журн. — 2017. — 69, № 1. — С. 83 – 91. (Пере-

клад англ. мовою: *Maslyuk H. O.* Continuity of the solutions of one-dimensional boundary-value problems in Holder spaces with respect to the parameter /H. O. Maslyuk // Ukrainian Math. J. — 2017. — V. 69, № 1. — P. 101 – 110.)

29. *Маслюк Г. О.* Апроксимативні властивості багатоточкових крайових задач, тотальних щодо просторів $C^{(n)}$ / Г. О. Маслюк, В. О. Солдатов // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — Т. 14, № 2. — С. 253 – 264.

30. *Маслюк Г. О.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач для диференціальних систем вищих порядків у просторах Слободецького / Маслюк Г. О., Михайлець В. А. // Укр. мат. журн. — 2018. — Т. 70, № 3. — С. 404 – 411. (Переклад англ. мовою: Maslyuk H. O. Continuity in the parameter for the solutions of one-dimensional boundary-value problems for differential systems of higher orders in Slobodetskii spaces / H. O. Maslyuk, V. A. Mykhailets // Ukrainian Math. J. — 2018. — V. 70, № 3. — P. 467 – 476.)

31. *Masliuk H.* One-dimensional parameter-dependent boundary-value problems in Holder spaces / H. Masliuk, V. Soldatov // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2018. — V. 24, № 2. — P. 143 – 151.

32. *Маслюк Г. О.* Про одновимірні крайові задачі для диференціальних систем високого порядку у просторах Гельдера / Г. О. Маслюк // Матеріали XIV міжнародної науково-практичної конференції для студентів, аспірантів та молодих науковців "Шевченківська весна – 2016". — Київ: Тези доповідей. — 2016. — С. 49 – 52.

33. *Masliuk G. A.* On the one-dimensional boundary-value problems for differential systems of higher order in Slobodetsky spaces / G. A. Masliuk // 5th International Conference for Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky. — Kyiv: Abstracts. — 2016. — P. 99 – 100.

34. *Маслюк Г. О.* Про неперервність за параметром розв'язків крайових задач для диференціальних систем вищих порядків у просторах Гельдера / Г. О. Маслюк // Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917-2008). — Київ: Тези доповідей. — 2017. — С. 93.

35. *Маслюк Г. О.* Про неперервність за параметром розв'язків крайових задач у просторах Слободецького / Г. О. Маслюк // VII Всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики. — Київ: Тези доповідей. — 2018. — С. 24.

36. *Михайлец В. А.* Непрерывность по параметру решений общих краевых задач / В. А. Михайлец, Н. В. Рева // Зб-к праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. — Т. 5, № 1. — С. 227 – 239.

37. *Михайлец В. А.* Предельный переход в системах линейных дифференциальных уравнений / В. А. Михайлец, Н. В. Рева // Доповіді Національної академії наук України. — 2008. — № 8. — С. 28 – 30.

38. *Михайлец В. А.* Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач / В. А. Михайлец, Н. В. Рева // Доповіді Національної академії наук України. — 2008. — № 9. — С. 23 – 27.

39. *Михайлец В. А.* Некоторые классы фредгольмовых краевых задач на отрезке / В. А. Михайлець, Г. А. Чеханова // Диференціальні рівняння

і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 2. — С. 268 – 274.

40. *Михайлец В. А.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах $C^{(n)}[a;b]$ / В. А. Михайлець, Г. А. Чеханова // Доповіді Національної академії наук України. — 2014. — № 7. — С. 24 – 28.

41. *Михайлец В. А., Пелехата О. Б.* Про апроксимацію функцій класу $NVB[a,b]$ / В. А. Михайлець, О. Б. Пелехата // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — Т. 13, № 2. — С. 265 – 270.

42. *Мурач О. О., Солдатов В. О.* Критерій неперервності за параметром розв'язків крайових задач для систем диференціальних рівнянь вищих порядків / О. О. Мурач, В. О. Солдатов // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — Т. 13, № 1. — С. 256 – 273.

43. *Мурач О. О., Солдатов В. О.* Неперервність за параметром розв'язків лінійних крайових задач у просторах Гельдера-Зігмунда / О. О. Мурач, В. О. Солдатов // Доповіді Національної академії наук України. — 2016. — № 10. — С. 15 – 21.

44. *Нгуен Тхе Хоан* О зависимости от параметра решений линейной системы дифференциальных уравнений / Тхе Хоан Нгуен // Дифференциальные уравнения. — 1993. — Т. 29, № 6. — С. 970 – 975.

45. *Покорный Ю. М.* О некоторых оценках функции Грина многоточечной краевой задачи / Ю. А. Покорный // Матем. Заметки. — 1968. — Т. 4, № 5. — С. 533 – 540.

46. *Покорный Ю. М.* О неклассической задаче Валле-Пуссена / Ю. А. Покорный // Диф. уравнения. — 1978. — Т. 14. — С. 1018 – 1027.

47. *Покорный Ю. М.* Вопросы качественной теории краевой задачи Валле-Пуссена: Автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра фiз.-мат. наук. — Ленинград, 1980.. — 20 с.

48. *Пономарев В. Д.* Необходимые и достаточные условия разрешимости многоточечной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка / В. Д. Пономарев // Дифференциальные уравнения. — 1978. — Т. 14, № 5. — С. 929 – 932.

49. *Рева Н. В.* Неперервнiсть за параметром розв'язкiв лiнiйних крайових задач: дисертацiя на здобуття наукового ступеня кандидата фiзико-математичних наук: 01.01.02 / Н. В. Рева. — Київ, 2009. — 148 с.

50. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь. — Москва: Мир, 1979. — 592 с.

51. *Самойленко А. М.* Об одном случае непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра / А. М. Самойленко // Український математичний журнал. — 1962. — Т. 14, № 3. — С. 289 – 298.

52. *Самойленко А. М.* Про неперервну залежнiсть розв'язкiв диференцiальних рiвнянь вiд параметра / А. М. Самойленко // Доповiдi Академiї наук УРСР. — 1962. — № 10. — С. 1290 – 1293.

53. *Самойленко А. М.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто. — К.: Вища школа, 1976. — 223 с.

54. *Самойленко А. М.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. — К.: Вища школа, 1987. — 288 с.

55. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Дж. Сансоне. — Москва: ИЛ, 1953. — 346 с.

56. *Солдатов В. О.* Про неперервність за параметром розв'язків крайових задач, тотальних щодо просторів $C^{(n+r)}[a,b]$ / Солдатов В. О. // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 5. — С. 692 – 700.

57. *Солдатов В. О.* Багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь вищих порядків / В. О. Солдатов // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 2. — С. 327 – 337.

58. *Солдатов В. О.* Багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь першого порядку у просторах Гельдера / В. О. Солдатов // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — Т. 13, № 2. — С. 267 – 280.

59. *Солдатов В. О.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач у просторах Гельдера. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук: 01.01.02 / В. О. Солдатов. — Київ, 2016. — 120 с.

60. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. — М. : Мир, 1970. — 720 с.

61. *Хасеинов К. А.* Начальная и многоточечная задачи для линейных дифференциальных уравнений и характеристические уравнения типа Риккати: Автореф. дис. канд. фіз.-мат. наук / К. А. Хасеинов. — Москва, 1984. — 223 с.

62. *Хасеинов К. А.* Сопряженная линейная задача и функции Грина: Методы оптимизации и их приложения / К. А. Хасеинов // Тематич. сб. науч. тр. ВЦСО АНСССР, Иркутск. — 1988. — С. 238 – 243.

63. *Хасеинов К. А.* Построение сопряженной задачи к линейной многоточечной / К. А. Хасеинов // Матер. 10-ой межвуз. конф. по математике и механике, Т. 2. — Алматы, 2005. — С. 317 – 322.

64. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: в 4-х т. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы / Л. Хермандер. — Москва: Мир, 1987. — 696 с.

65. *Чеханова Г.* Непрерывность по параметру решений многоточечных краевых задач / Г. Чеханова // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — Т. 10, № 2. — С. 260 – 279.

66. *Чеханова Г. А.* Непрерывность по параметру функций Грина многоточечных краевых задач / Г. А. Чеханова // Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — Т. 10, № 4–5. — С. 532 – 541.

67. *Чеханова Г. О.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач та їх похідних. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук: 01.01.02 / Г. О. Чеханова. — Київ, 2014. — 122 с.

68. *Чичкин Е. С.* Теорема о дифференциальном неравенстве для многоточечных краевых задач / Е. С. Чичкин // Изв. вузов Математика. — 1962. — Т. 27, № 2. — С. 170 – 179.

69. *Ashordia M.* Criteria of correctness of linear boundary value problems for systems of generalized ordinary differential equations / M. Ashordia // Czechoslovak Mathematical Journal. — 1996. — V. 46, № 3. — P. 385 – 404.

70. *Beesack P. R.* On the Green's function of an a-point Boundary Value Poblem / P. R. Beesack // Pac. J. of Math. — 1962. — V. 12, № 3. — P. 801 – 812.

71. *Gnyp E. V., Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Fredholm boundary-value problems with parameter in Sobolev space // Ukrainian Math. J. — 2015. — V. 67, № 5. — P. 658 – 667.

72. *Gnyp E. V.* Continuity of the solutions of one-dimensional boundary-value problems with respect to the parameter in Slobodetsky spaces // Ukrainian Math. J. — 2016. — V. 68, № 6 — P. 849 – 861.

73. *Goriunov A. S.* Resolvent convergence of Sturm–Liouville operators with singular potentials / A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets // Mathematical Notes. — 2010. — V. 87, № 1–2. — P. 287 – 292.

74. *Goriunov A. S.* Regularization of singular Sturm-Liouville equations / A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets // Methods of Functional Analisys and Topology. — 2010. — V. 16, №. 2. — P. 120 – 130.

75. *Goriunov A. S.* Formally self-ajoint quasi-differential operators and boundary-value problems / A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets,

K. Pankrashkin // Electronic Journal of Differential Equations. — 2013. — V. 2013, № 101. – P. 1 — 16.

76. *Graves L. M.* Theory of function of real variables / L. M. Graves // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1948. — Vol. 54, № 5. — P. 487 – 489.

77. *Grimm L. J.* Multipoint BVP for ODE / L. P. Grimm, P. W. Eloe // Differential Equations and Applications (I): Proc. of the 2 Conference, "Rousse 81". — Bulgaria, 1981.

78. *Jackson L. K.* Existense and uniqueness of solutions of boundary value problems for Lipschitz equations / L. K. Jackson // J. Differential Equations. — 1979. — V. 32. — P. 76 – 90.

79. *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces / T. I. Kodlyuk, V. A. Mikhailets // Journal of Mathematical Sciences (New York). — 2013. — V. 190, № 4. — P. 589 – 599.

80. *Kurzweil J.* Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter / J. Kurzweil // Czechoslovak Mathematical Journal. — 1957. — V. 7, № 3. — P. 418 – 449.

81. *Kurzweil J.* Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter / J. Kurzweil // Czechoslovak Mathematical Journal. — 1959. — V. 9, № 4. — P. 564 – 573.

82. *Mikhailets V. A.* Limit theorems for general one-dimensional boundary-value problems / V. A. Mikhailets, G. A. Chekhanova // Journal of

Mathematical Sciences (New York). — 2015. — V. 204, № 3. — P. 333 – 342.

83. *Mikhailets V. A.* Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems / V. A. Mikhailets, A. A. Murach, V. Soldatov // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations — 2016. — № 87. — P. 1 – 16.

84. *Opial Z.* Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations / Z. Opial // Journal of Differential Equations. — 1967. — № 3. — P. 571 – 579.

85. *Reid W. T.* Some limit theorems for ordinary differential systems / W. T. Reid // Journal of Differential Equations. — 1967. — V. 3, № 3. — P. 423 – 439.

86. *Samoilenko A. M.* Certain questions in the investigation of differential equations with an irregular right side / A. M. Samoilenko // Buletinul Institutului Politehnic din Iasi. — 1965. — V. 11, № 3 – 4. — P. 85 – 92.

87. *Soldatov V. O.* On the continuity in a parameter for the solutions of boundary-value problems total with respect to the spaces $C^{(n+r)}[a,b]$ / V. O. Soldatov // Ukrainian Mathematical Journal — 2015. — V. 67, № 5. — P. 785 – 794.

88. *Tamarkin Y. D.* A lemma of the theory of linear differential systems / Y. D. Tamarkin // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1930. — № 36. — P. 99 – 102.

89. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 495 с.

90. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. — М.: Мир, 1986. — 447 с.

ДОДАТОК

Цей додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Маслюк Г. О. Багатоточкові крайові задачі з параметром для диференціальних рівнянь високого порядку на просторах Гельдера / Г. О. Маслюк // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — Т. 13, № 2. — С. 193 – 203.

2. Маслюк Г. О. Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач у просторах Гельдера / Г. О. Маслюк // Укр. мат. журн. — 2017. — 69, № 1. — С. 83 – 91. (Переклад англ. мовою: *Maslyuk H. O.* Continuity of the solutions of one-dimensional boundary-value problems in Holder spaces with respect to the parameter / H. O. Maslyuk // Ukrainian Math. J. — 2017. — V. 69, № 1. — P. 101 – 110.)

3. Маслюк Г. О. Апроксимативні властивості багатоточкових крайових задач, тотальних щодо просторів $C^{(n)}$ / Г. О. Маслюк, В. О. Солдатов // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — Т. 14, № 2. — С. 253 – 264.

4. Маслюк Г. О. Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач для диференціальних систем вищих порядків у просторах Слободецького / Маслюк Г. О., Михайлець В. А. // Укр. мат. журн. — 2018. — Т. 70, № 3. — С. 404 – 411. (Переклад англ. мовою: Maslyuk H. O. Continuity in the parameter for the solutions of

one-dimensional boundary-value problems for differential systems of higher orders in Slobodetskii spaces / H. O. Maslyuk, V. A. Mykhailets // Ukrainian Math. J. — 2018. — V. 70, № 3. — P. 467 – 476.)

5. Masliuk H. One-dimensional parameter-dependent boundary-value problems in Holder spaces / H. Masliuk, V. Soldatov // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2018. — V. 24, № 2. — P. 143 – 151.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Маслюк Г. О. Про одновимірні крайові задачі для диференціальних систем високого порядку у просторах Гельдера / Г. О. Маслюк // Матеріали XIV міжнародної науково-практичної конференції для студентів, аспірантів та молодих науковців „Шевченківська весна – 2016" (6 – 8 квітня 2016, м. Київ, Україна). — Київ : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2016. — С. 49 – 52.

2. Masliuk G. A. On the one-dimensional boundary-value problems for differential systems of higher order in Slobodetsky spaces / G. A. Masliuk // 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky, 9 – 11 November, 2016, Kyiv, Ukraine: Book of Abstracts. — Vinnytsia: Vasyl' Stus Donetsk National University, 2016. — P. 99 – 100.

3. Маслюк Г. О. Про неперервність за параметром розв'язків крайових задач для диференціальних систем вищих порядків у просторах Гельдера / Г. О. Маслюк // Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917–2008), 7 – 10 червня 2017 р., Київ, Украї-

на. Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2017. — С. 93.

4. Маслюк Г. О. Про неперервність за параметром розв'язків крайових задач у просторах Слободецького / Г. О. Маслюк // VII Всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, 19 – 20 квітня 2018 р., Київ, Україна. Тези доповідей. — Київ: Національний технічний університет України "КПІ імені Ігоря Сікорського", 2018. — С. 24.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

— Чотирнадцятій міжнародній науково-практичній конференції для студентів, аспірантів та молодих науковців „Шевченківська весна – 2016“ (Україна, Київ, 6 – 8 квітня 2016 року);

— П'ятій міжнародній конференції молодих науковців з диференціальних рівнянь і застосувань, присвяченій Я. Б. Лопатинському (Україна, Київ, 9 – 11 листопада 2016 року);

— Міжнародній конференції молодих математиків присвяченій 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917 – 2008) (Україна, Київ, 7 – 10 червня 2017 року);

— Сьомій всеукраїнській науковій конференції студентів, аспірантів та молодих вчених з математики (Україна, Київ, 19 – 20 квітня 2018 року);

— науковому семінарі „Диференціальні рівняння та суміжні питання“ кафедри математики та економіки Національного університету „Чернігівський колегіум“ імені Т. Г. Шевченка (керівник семінару – доктор фізико-математичних наук О. О. Мурач), 25 травня 2018 року;

— науковому семінарі „Диференціальні рівняння. Інтегральні перетворення. Спеціальні функції“ кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного технічного університету України „КПІ імені Ігоря Сікорського“ (керівник семінару – доктор фізико-математичних наук, професор Н. О. Вірченко), 21 червня 2018 року.