НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

СТЕПАНЮК Тетяна Анатоліївна

УДК 517.5

АПРОКСИМАТИВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КЛАСІВ (ψ, β)-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2015

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь та математичної фізики Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки Міністерства освіти і науки України

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
СЕРДЮК Анатолій Сергійович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу теорії функцій.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ЗАДЕРЕЙ Петро Васильович,
Київський національний університет
технологій та дизайну,
завідувач кафедри вищої математики;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
ЧАЙЧЕНКО Станіслав Олегович,
ДВНЗ "Донбаський державний педагогічний університет",
проректор з науково–педагогічної роботи.

Захист відбудеться «__» ___________ 201 р. о __ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01601, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «__» ___________ 201 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Романюк А. С.**

Загальна характеристика роботи

Робота присвячена встановленню порядкових оцінок наближень сумами Фур'є, найкращих наближень, найкращих m-членних тригонометричних наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів 2π–періодичних функцій, які задаються за допомогою поняття (ψ, β)–похідної.

Актуальність теми. Тригонометричні поліноми як апарат наближення 2π–періодичних функцій привернули увагу дослідників завдяки відомим роботам П. Л. Чебишова, К. Вейєрштрасса, А. Лебега, Д. Джексона, Ш. Валле Пуссена, Л. Фейєра, С. Н. Бернштейна та ін.

На початку двадцятого століття у теорії наближення почав активно розвиватись напрям, пов'язаний з дослідженням швидкості спадання до нуля найкращих наближень для тих чи інших функціональних класів у залежності від їх гладкісних чи диференціально–різницевих властивостей.

У 1936 р. Ж. Фавар для класів $W^r_\infty, r \in \mathbb{N}$, — 2π-періодичних функцій f, у яких $(r-1)$-а похідна $f^{(r-1)}$ абсолютно неперервна на $[-\pi, \pi]$, а $f^{(r)}$ майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ задовольняє умову $|f^{(r)}(x)| \leq 1$, встановив точні значення найкращих рівномірних наближень тригонометричними поліномами t_{n-1} порядку не вищого ніж $n-1$, тобто величин вигляду

$$E_n(W^r_\infty)_C = \sup_{f \in W^r_\infty} \inf_{t_{n-1}} \|f - t_{n-1}\|_C.$$

Оцінки найкращих наближень класів $W^r_{\beta,p}$ досліджувались також Н. І. Ахієзером, М. Г. Крейном, Б. Надем, С. М. Нікольським, В. К. Дзядиком, С. Б. Стєчкіним, Сунь Юн-шеном та ін.

На сьогоднішній день для класів Вейля–Надя $W^r_{\beta,p}$ порядкові оцінки найкращих наближень в просторах L_s відомі при усіх допустимих значеннях параметрів r, p, s і β. А саме: при довільних $\beta \in \mathbb{R}$, $r > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right)_+$ і $1 \leq p, s \leq \infty$ справедливі порядкові рівності

$$E_n(W^r_{\beta,p})_s \asymp n^{-r + (\frac{1}{p} - \frac{1}{s})_+},$$

тут і надалі $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right)_+ := \max\left\{0, \ \frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right\}$, а для додатних послідовностей $A(n)$ і $B(n)$ запис $A(n) \asymp B(n)$ означає, що існують додатні сталі K_1 і K_2 такі, що $K_1 B(n) \leq A(n) \leq K_2 B(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Дослідженням поведінки точних верхніх меж наближень сумами Фур'є на різноманітних функціональних класах займались А. Лебег, А. М. Колмогоров, В. К. Дзядик, М. П. Корнійчук, С. М. Нікольський, С. Б. Стєчкін, С. О. Теляковський, О. І. Степанець, І. Г. Соколов, В. П. Моторний, В. Т. Пінкевич, Р. М. Тригуб, О. В. Єфімов, О. П. Тіман та інші. Як і для найкращих наближень, на класах $W^r_{\beta,p}$ порядкові оцінки наближень сумами Фур'є відомі при всіх допустимих значеннях параметрів r, p, s і β, а саме: при $r > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right)_+$ і $1 \le p, s \le \infty$ для величин

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_s = \sup_{f \in W^r_{\beta,p}} \Big\| f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot) \Big\|_s,$$

де

$$S_{n-1}(f;x) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

а

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \qquad (1)$$

— коефіцієнти Фур'є функції f, мають місце порядкові рівності

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_s \asymp \begin{cases} n^{-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{s})_+}, & 1 \le p < s \le \infty \vee 1 < p = s < \infty, \\ & 1 \le s < p \le \infty, \\ n^{-r} \ln n, & p = s = 1, \ p = s = \infty. \end{cases}$$

Поряд із дослідженням частинних сум Фур'є як апарату наближення періодичних функцій вивчались апроксимативні властивості тригонометричних поліномів, які містять фіксоване число m ($m \in \mathbb{N}$) вибраних довільним чином гармонік із ряду Фур'є цих функцій. Це спонукало до появи наступної характеристики:

$$e^{\perp}_m(F)_s := \sup_{f \in F} e^{\perp}_m(f)_s = \sup_{f \in F} \inf_{\gamma_m} \Big\| f(x) - \sum_{k \in \gamma_m} \hat{f}(k) e^{ikx} \Big\|_s, \quad 1 \le s \le \infty, \qquad (2)$$

де γ_m — довільний набір m цілих чисел. Величину (2) називають найкращим ортогональним тригонометричним наближенням класу F в метриці простору L_s. На класах Вейля–Надя $W^r_{\beta,p}$ порядкові оцінки величин (2) встановлювались Е. С. Белінським, В. М. Темляковим і А. С. Романюком.

У 1983 році О.І. Степанцем запроваджені класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ ($C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$), що означаються за допомогою поняття (ψ,β)-похідної, яка задається фіксованою послідовністю $\psi(k)$ та числовим параметром β. За допомогою (ψ,β)-похідних можна класифікувати весь спектр сумовних (неперервних) періодичних функцій і, в той же час, виділяти більш тонкі властивості кожної окремої функції. Для зазначених класів на даний час отримано розв'язки цілої низки задач теорії наближення функцій, які раніше були відомі для класів Вейля-Надя.

Оцінки швидкості спадання до нуля точних верхніх меж наближень сумами Фур'є та найкращих наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ і $C^{\psi}_{\beta,p}$ в метриках просторів L_s при різноманітних співвідношеннях між параметрами p і s та при різноманітних швидкостях прямування до нуля послідовності $\psi(k)$ досліджувались у роботах О. І. Степанця, С. О. Теляковського, Р. М. Тригуба, П. В. Задерея, О. К. Кушпеля, С. Б. Вакарчука, В. І. Рукасова, А. С. Сердюка, С. О. Чайченка, І. В. Соколенка, В. С. Романюка, Є. Ю. Овсія, У. З. Грабової та ін. Порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень на класах $L^{\psi}_{\beta,p}$ і $C^{\psi}_{\beta,p}$ в L_s–метриках досліджувались О. І. Степанцем, О. С. Федоренком, А. Л. Шидлічем та В. В. Шкапою.

Незважаючи на значне число опублікованих робіт, у даній тематиці залишився ряд нез'ясованих питань. Так, зокрема, не були встановлені точні порядки величин найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$ у рівномірній метриці у випадку, коли добуток $\psi(t)t^{\frac{1}{p}}$ спадає до нуля повільніше за довільну степеневу функцію. Також не були відомі точні порядкові оцінки величин $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$, $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$ і $e^{\perp}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$, коли $\psi(t)t^{\frac{s-1}{s}}$ спадає до нуля повільніше за довільну степеневу функцію.

Крім того, у випадку, коли послідовність ψ спадає до нуля швидше за будь–яку степеневу функцію і повільніше за будь–яку геометричну прогресію, питання про точні порядки спадання до нуля величин $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$, $1 \le p < \infty$, $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$ та $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$, $1 < s \le \infty$, залишалось відкритим. Розв'язання цих задач дозволяє суттєво доповнити вже відомі результати в окресленому напрямку, що підтверджує актуальність теми дисертаційного дослідження.

Поряд з апроксимативною характеристикою (2) у теорії наближень розглядають величини

$$e_m(F)_s := \sup_{f\in F} e_m(f)_s = \sup_{f\in F}\inf_{\gamma_m}\inf_{c_k\in\mathbb{C}} \Big\| f(x) - \sum_{k\in\gamma_m} c_k e^{ikx}\Big\|_s, \ \ 1\le s\le\infty, \tag{3}$$

$$d_m^{\top}(F, L_s) := \inf_{\gamma_m}\sup_{f\in F}\inf_{c_k\in\mathbb{C}} \Big\| f(x) - \sum_{k\in\gamma_m} c_k e^{ikx}\Big\|_s, \ \ 1\le s\le\infty, \tag{4}$$

де γ_m — довільні набори з m цілих чисел.

Величину (3) називають найкращим m–членним тригонометричним наближенням класу F у метриці простору L_s, а величину (4) тригонометричним поперечником класу F у метриці простору L_s.

Дослідженням величин $e_m(F)_s$ для класів диференційовних (в тому чи іншому сенсі) функцій займалися С. Б. Стєчкін, Р. С. Ісмагілов, К. І. Осколков, Б. С. Кашин, В. М. Темляков, Е. С. Белінський, Ю. І. Маковоз, О. І. Степанець, А. С. Романюк, А. Л. Шидліч, А. С. Стасюк, О. С. Федоренко, А. С. Федоренко та ін.

Порядкові оцінки тригонометричних поперечників для різноманітних функціональних компактів встановлювались в роботах Я. С. Бугрова, Р. С. Ісмагілова, В. Є. Майорова, Б. С. Кашина, В. М. Темлякова, Е. С. Белінського, А. С. Романюка та ін.

Для класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень та найкращих m–членних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ встановлювались, як правило, у випадках, коли ψ спадають до нуля зі швидкістю степеневої функції.

Задачі по встановленню точних порядків зазначених характеристик класів $C^{\psi}_{\beta,p}$ у випадку, коли ψ спадають до нуля дуже швидко (не повільніше за геометричну прогресію), з певних причин залишались нерозв'язаними. Тому тематика дисертаційного дослідження, пов'язана з розв'язанням саме таких задач, є актуальною в сенсі підходу до своєї завершеності.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь та математичної фізики у Східноєвропейському національному університеті імені Лесі Українки згідно з планом наукових робіт за науковою темою "Теорія функцій та диференціальні рівняння".

Мета і завдання дослідження.

Метою дослідження дисертаційної роботи є знаходження у нових, недосліджених раніше ситуаціях, точних порядкових оцінок найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1\le p<\infty$, та $L^{\psi}_{\beta,1}$ у метриках просторів C та L_s, $1 < s \le \infty$, відповідно, а також встановлення точних порядків найкращих m–членних тригонометричних наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$ у метриках просторів L_s при всіх $1 \le p, s \le \infty$.

Об'єктом дослідження є класи $C^{\psi}_{\beta,p}$ і $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Предметом дослідження є величини $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$, $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$, $e^{\perp}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ та $e_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ при тих чи інших обмеженнях на параметри ψ, p, s і β.

Завдання дослідження:

1. Знайти порядкові оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p < \infty$, в рівномірній метриці у випадку, коли добуток $\psi(t)t^{\frac{1}{p}}$ спадає до нуля повільніше за будь-яку степеневу функцію. Одержати аналогічні оцінки у метриках просторів L_s, $1 < s \le \infty$, для класів $L^{\psi}_{\beta,1}$.

2. Отримати порядкові рівності для найкращих рівномірних наближень тригонометричними поліномами класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p < \infty$, у випадку, коли ψ спадають до нуля швидше за будь-яку степеневу функцію. Встановити при вказаних обмеженнях на функцію ψ точні порядки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ у метриках просторів L_s, $1 < s \le \infty$.

3. Знайти точні порядкові оцінки найкращих m–членних тригонометричних наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$ у метриках просторів L_s при всіх $1 \le p, s \le \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$ у випадку, коли $\psi(k)$ прямує до нуля не повільніше за геометричну прогресію.

Методи дослідження. При розв'язанні поставлених задач у дисертаційній роботі використано загальні методи математичного аналізу та теорії функцій у поєднанні із методами теорії наближення функцій, розробленими в роботах С. М. Нікольського, О. І. Степанця, А. С. Сердюка, В. М. Темлякова та ін.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи є новими і полягають у наступному:

1. Знайдено порядкові оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p < \infty$, у рівномірній метриці у випадку, коли добуток $\psi(t)t^{\frac{1}{p}}$ спадає до нуля повільніше за будь-яку степеневу функцію. Аналогічні оцінки одержано у метриках просторів L_s,

$1 < s \le \infty$, для класів $L^{\psi}_{\beta,1}$.

2. Отримано порядкові рівності для найкращих рівномірних наближень тригонометричними поліномами класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p < \infty$, у випадку, коли ψ спадають до нуля швидше за будь-яку степеневу функцію. При вказаних обмеженнях на функцію ψ встановлено точні порядки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ у метриках просторів L_s, $1 < s \le \infty$.

3. Знайдено точні порядкові оцінки найкращих m–членних тригонометричних наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$ у метриках просторів L_s при всіх $1 \le p, s \le \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$ у випадку, коли послідовність $\psi(k)$ прямує до нуля не повільніше за геометричну прогресію.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи та методика їх отримання можуть бути використані при подальшому вивченні питань теорії наближення функцій.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження, а також постановка задач належить науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук А. С. Сердюку. Результати робіт [1, 3–6] отримано спільно з науковим керівником, внесок співавторів є рівноцінним. Результати роботи [2] отримано здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на:

— семінарах відділу теорії функцій (Інститут математики НАН України; керівник семінару — доктор фіз.-мат. наук професор, А. С. Романюк);

— семінарі «Сучасний аналіз» (механіко-математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка; керівники семінару: доктори фіз.-мат. наук, професори І. О. Шевчук, О. О. Курченко, В. М. Радченко);

— міжнародній математичній конференції «Боголюбовські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, Севастополь, 23–30 червня 2013 року;

— міжнародній науковій конференції «Современные проблемы математики, механики и информатики», присвяченій 90–річчю з дня народження Л. О. Толоконнікова, Тула, 16–20 вересня 2013 року;

— міжнародній математичній конференції, присвяченій 60-річчю В. І. Рукасова (1953-2009) «Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування», Слов'янськ, 21–24 травня 2014 року;

— XVII міжнародній математичній конференції "Conference on Analytic Functions and Related Topics", Хелм (Польща), 29 червня–2 липня 2014 року;

— IV міжнародній ганській конференції, присвяченій 135-ій річниці від дня народження Ганса Гана, Чернівці, 30 червня–5 липня 2014 року;

— IX Літній школі «Алгебра, топологія і аналіз», Поляниця, 7–18 липня 2014 року;

— всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу», Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2015 року;

— Міжнародній конференції молодих математиків, Київ, 3–6 червня 2015 року;

— міжнародному семінарі з гіперкомплексного аналізу "Hypercomplex Seminar 2015: (Hyper)Complex and Dynamical Processes; Modelling and Simulations", Бедлево (Польща), 2–9 липня 2015 року;

— X Літній школі "Алгебра, Топологія, Аналіз", Одеса, 3–15 серпня 2015 року.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у п'ятнадцяти наукових публікаціях [1–14]. Шість з них [1-6] є статтями у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань з фізико–математичних наук, три з яких [3, 4, 6] надруковано у виданні, внесеному до міжнародних наукометричних баз. Решта дев'ять опубліковано у збірниках тез міжнародних наукових конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційне дослідження складається з переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел, який містить 138 найменувань. Повний обсяг дисертації складає 147 сторінок друкованого тексту.

Основний зміст дисертації

У **першому розділі** дисертаційної роботи "Апроксимативні характеристики класів (ψ, β)-диференційовних функцій" проведено огляд літератури за темою дослідження. У підрозділі 1.1 наведено означення класів (ψ, β)–диференційовних функцій та апроксимативних характеристик, що досліджуються у роботі. У підрозділі 1.2 наведено деякі результати з наближення сумами Фур'є та найкращих наближень на класах (ψ, β)–диференційовних функцій, а також здійснено постановку задач дослідження. Підрозділи 1.3 та 1.4 присвячено огляду основних результатів із найкращих ортогональних тригонометричних наближень та найкращих m-членних тригонометричних наближень на класах $L^{\psi}_{\beta,p}$ відповідно. В підрозділах 1.3 та 1.4 сформульовано задачі дослідження.

Нехай C — простір 2π–періодичних неперервних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, у якому норма задана за допомогою рівності $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; L_∞ — простір 2π–періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ з нормою $\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}\limits_t |f(t)|$; L_p, $1 \le p < \infty$, — простір 2π–періодичних сумовних в p–му степені на $[0, 2\pi)$ функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, в якому норма задана формулою $\|f\|_p := \Big(\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \Big)^{\frac{1}{p}}$.

Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функція із L_1, ряд Фур'є якої має вигляд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

де $\psi(k)$ — довільна фіксована послідовність дійсних чисел і β — фіксоване дійсне число. Тоді, якщо ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\hat{f}(k)}{\psi(|k|)} e^{i(kx + \frac{\beta\pi}{2} \operatorname{sign} k)}$$

є рядом Фур'є деякої функції φ з L_1, то цю функцію називають (ψ, β)-похідною функції f і позначають через f^{ψ}_{β}. Множину усіх функцій f, для яких існує (ψ, β)-похідна, позначають через L^{ψ}_{β}.

Через B_p позначимо одиничну кулю в просторі дійснозначних функцій з L_p, тобто множину всіх функцій $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, що $\|\varphi\|_p \le 1$, $1 \le p \le \infty$. Якщо $f \in L^{\psi}_{\beta}$ і, крім того, $f^{\psi}_{\beta} \in B_p$, то кажуть, що функція f належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$. Підмножини неперервних функцій із L^{ψ}_{β} та $L^{\psi}_{\beta,p}$ будемо позначати через C^{ψ}_{β} та $C^{\psi}_{\beta,p}$ відповідно.

Якщо послідовність $\psi(k)$ монотонно прямує до нуля при $k \to \infty$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} < \infty$, то елементи f множини $L^{\psi}_{\beta,p}$ при будь–якому $\beta \in \mathbb{R}$ і майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ зображуються за допомогою згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x - t) \varphi(t) dt, \ a_0 \in \mathbb{R}, \ \varphi \in B_p, \ \varphi \perp 1, \qquad (5)$$

з сумовним ядром $\Psi_\beta(t)$ вигляду

$$\Psi_\beta(t) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}/\{0\}} \psi(|k|)e^{-i(kt+\frac{\beta\pi}{2}\mathrm{sign}k)}. \tag{6}$$

Послідовності $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, що визначають класи $L^\psi_{\beta,p}$, зручно розглядати як звуження на множину натуральних чисел $\mathbb{N}$ деяких додатних, неперервних, опуклих донизу функцій $\psi(t)$, $t \geq 1$, таких, що $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t) = 0$. Множину всіх таких функцій $\psi(t)$ прийнято позначати через $\mathfrak{M}$.

З множини $\mathfrak{M}$ виділяють наступні підмножини:

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M}: \quad \exists K > 0 \quad \forall t \geq 1 \quad 0 < \mu(\psi;t) \leq K < \infty\}, \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\mathfrak{M}_C = \{\psi \in \mathfrak{M}: \ \exists K_1, K_2 > 0 \quad \forall t \geq 1 \quad K_1 \leq \mu(\psi;t) \leq K_2 < \infty\}, \\ \mathfrak{M}^+_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M}: \quad \mu(\psi;t) \uparrow \infty\},\end{gathered} \tag{8}$$

де

$$\mu(t) = \mu(\psi;t) := \frac{t}{\eta(t)-t}, \qquad \eta(t) = \eta(\psi;t) := \psi^{-1}(\psi(t)/2). \tag{9}$$

Очевидно, що $\mathfrak{M}_C \subset \mathfrak{M}_0$.

В свою чергу з множини $\mathfrak{M}^+_\infty$ прийнято виділяти підмножини:

$$\mathfrak{M}'_\infty = \left\{\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty: \ \exists K > 0 \quad \forall t \geq 1 \quad \eta(\psi;t) - t \leq K\right\}, \tag{10}$$

$$\mathfrak{M}''_\infty = \left\{\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty: \ \exists K > 0 \quad \forall t \geq 1 \quad \eta(\psi;t) - t \geq K\right\}. \tag{11}$$

В (7)–(11) константи K, K_1 і K_2, взагалі кажучи, залежать від ψ.

Типовими представниками множини $\mathfrak{M}_C$ є функції $\psi(t) = t^{-r}$, $r > 0$, множини $\mathfrak{M}_0 \setminus \mathfrak{M}_C$ — функції $\psi(t) = \ln^{-\varepsilon}(t+1)$, $\varepsilon > 0$. Для множини $\mathfrak{M}''_\infty$ типовими представниками є функції $\psi(t) = e^{-\alpha t^r}$, $0 < r < 1$, $\alpha > 0$, а для множини $\mathfrak{M}'_\infty$ — функції $\psi(t) = e^{-\alpha(t+K)^r}$, $r \geq 1$, $\alpha > 0$, $K > \left(\left(\frac{r-1}{\alpha r}\right)^{\frac{1}{r}} - 1\right)_+$.

Для функцій ψ з множини $\mathfrak{M}$ будемо використовувати характеристику

$$\alpha(\psi;t) := \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}, \quad \psi'(t) := \psi'(t+0). \tag{12}$$

Для довільного класу $F \subset L_s$ розглянемо величини

$$\mathcal{E}_n(F)_s = \sup_{f\in F}\Big\| f(x) - \sum_{k=-n+1}^{n-1} \hat{f}(k)e^{ikx}\Big\|_s,\ 1 \le s \le \infty,\ n\in\mathbb{N}, \qquad (13)$$

$$E_n(F)_s = \sup_{f\in F}\ \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_s,\ 1 \le s \le \infty, \qquad (14)$$

де $\hat{f}(k)$ означаються формулою (1), а $\mathcal{T}_{2n-1}$ — підпростір усіх тригонометричних поліномів t_{n-1} порядку не вищого за $n-1$ вигляду

$$t_{n-1}(x) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} c_k e^{ikx},\quad c_k = c_{-k}.$$

Зрозуміло, що у випадку, коли $F = C^{\psi}_{\beta,p}$, норму $\|\cdot\|_\infty$ в (2)–(4), (13) і (14) можна замінити на $\|\cdot\|_C$.

Для величин (2)–(4), (13) і (14) мають місце співвідношення:

$$e_{2n-1}(F)_s \le d^{\top}_{2n-1}(F, L_s) \le E_n(F)_s \le \mathcal{E}_n(F)_s, \qquad (15)$$

$$e_{2n-1}(F)_s \le e^{\perp}_{2n-1}(F)_s \le \mathcal{E}_n(F)_s. \qquad (16)$$

У **другому розділі** знайдено точні порядкові оцінки наближень сумами Фур'є, найкращих наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів (ψ,β)–диференційовних функцій невеликої гладкості. Константи у порядкових оцінках виражені через параметри задачі в явному вигляді.

Підрозділ 2.1 присвячено встановленню порядкових оцінок найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів 2π-періодичних функцій $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 < p < \infty$, в рівномірній метриці у випадку, коли $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, і добуток $\psi(t)t^{\frac{1}{p}}$ спадає до нуля не швидше за деяку степеневу функцію.

Для будь-якої функції $\psi \in \mathfrak{M}$ через $\underline{\alpha}_n(\psi)$, $n \in \mathbb{N}$, позначимо величину

$$\underline{\alpha}_n(\psi) := \inf_{t\ge n} \alpha(\psi; t), \qquad (17)$$

де характеристика $\alpha(\psi;t)$ означається формулою (12).

Через $\xi(s)$, $1 < s < \infty$, будемо позначати наступну величину:

$$\xi(s) := \max\Big\{ 4\Big(\frac{\pi}{s-1}\Big)^{\frac{1}{s}},\ \ 14(8\pi)^{\frac{1}{s}} s\Big\}. \qquad (18)$$

У прийнятих позначеннях має місце теорема.

Теорема 2.1. *Нехай* $1 < p < \infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *і функція* $g_p(t) = \psi(t) t^{\frac{1}{p}}$ *така, що* $g_p \in \mathfrak{M}_0$. *Тоді для довільних* $n \in \mathbb{N}$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$ *мають місце співвідношення*

$$K_{\psi,p}^{(1)} \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} \Big)^{\frac{1}{p'}} \leq \mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{\psi})_C \leq K_{\psi,p}^{(2)} \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} \Big)^{\frac{1}{p'}},$$

в яких

$$K_{\psi,p}^{(1)} := \frac{1}{\xi(p)} \Big(\frac{\underline{\alpha}_1(g_p)}{p' + \underline{\alpha}_1(g_p)} \Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{19}$$

$$K_{\psi,p}^{(2)} := \frac{1}{\pi} \xi(p') \Big(1 + \frac{p'}{\underline{\alpha}_1(g_p)} \Big)^{\frac{1}{p'}}. \tag{20}$$

Теорема 2.2. *Нехай* $1 < p < \infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *функція* $g_p(t) = \psi(t) t^{\frac{1}{p}}$ *така, що* $g_p \in \mathfrak{M}_0$ *і* $\underline{\alpha}_1(g_p) = \inf\limits_{t \geq 1} \alpha(g_p; t) > \frac{p'}{2}$. *Тоді для довільних* $n \in \mathbb{N}$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$ *мають місце співвідношення*

$$K_{\psi,p}^{(3)} \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} \Big)^{\frac{1}{p'}} \leq E_n(C_{\beta,p}^{\psi})_C \leq$$

$$\leq \mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{\psi})_C \leq K_{\psi,p}^{(2)} \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} \Big)^{\frac{1}{p'}},$$

в яких

$$K_{\psi,p}^{(3)} := \frac{1}{12\xi(p)} \Big(\frac{\underline{\alpha}_1(g_p)}{p' + \underline{\alpha}_1(g_p)} \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(1 - \frac{p'}{2\underline{\alpha}_1(g_p)} \Big), \tag{21}$$

а величини $K_{\psi,p}^{(2)}$, $\xi(p)$ *і* $\underline{\alpha}_1(g_p)$ *означаються формулами (20), (18) і (17) відповідно.*

Наслідок 2.3. *Нехай* $\psi(t) = t^{-\frac{1}{p}} \ln^{-\gamma}(t + K)$, $\gamma > \frac{1}{p'}$, $K \geq e^{\frac{\gamma p'}{2}} - 1$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$E_n(C_{\beta,p}^{\psi})_C \asymp \mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{\psi})_C \asymp \psi(n) n^{\frac{1}{p}} \ln^{\frac{1}{p'}} n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

У підрозділі 2.2 одержано точні за порядком оцінки величин $e_n^{\perp}(C^{\psi}_{\beta,p})_C$ у випадку, коли $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, і добуток $\psi(t)t^{\frac{1}{p}}$ спадає до нуля не швидше за деяку степеневу функцію.

Теорема 2.3. *Нехай* $1<p<\infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, *а функція* $g_p(t)=\psi(t)t^{\frac{1}{p}}$ *така, що* $g_p\in\mathfrak{M}_0$ *і* $\underline{\alpha}_1(g_p)=\inf\limits_{t\geq1}\alpha(g_p;t)>p'$. *Тоді для довільних* $n\in\mathbb{N}$ *і* $\beta\in\mathbb{R}$ *мають місце співвідношення*

$$K^{(4)}_{\psi,p}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}}\leq e^{\perp}_{2n}(C^{\psi}_{\beta,p})_C\leq$$

$$\leq e^{\perp}_{2n-1}(C^{\psi}_{\beta,p})_C\leq K^{(2)}_{\psi,p}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}},$$

в яких

$$K^{(4)}_{\psi,p}:=\frac{1}{3\xi(p)}\Big(\frac{\underline{\alpha}_1(g_p)}{p'+\underline{\alpha}_1(g_p)}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(1-\frac{p'}{\underline{\alpha}_1(g_p)}\Big),\tag{22}$$

а величини $K^{(2)}_{\psi,p}$, $\xi(p)$ *і* $\underline{\alpha}_1(g_p)$ *означаються формулами (20), (18) і (17) відповідно.*

У підрозділах 2.1 та 2.2 наведено наслідки з теорем 2.1–2.3 для функцій виду $\psi(t)=t^{-\frac{1}{p}}\ln^{-\gamma}(t+K)$, $\gamma>\frac{1}{p'}$ та $\psi(t)=t^{-\frac{1}{p}}\ln^{-\frac{1}{p'}}(t+K_1)(\ln\ln(t+K_2))^{-\delta}$, $\delta>\frac{1}{p'}$.

Підрозділ 2.3 присвячено знаходженню точних за порядком оцінок найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів 2π-періодичних функцій $L^{\psi}_{\beta,1}$, у метриках просторів L_s, $1<s\leq\infty$, у випадку, коли добуток $\psi(t)t^{\frac{s-1}{s}}$ спадає до нуля не швидше за деяку степеневу функцію і за умови $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^{s}(k)k^{s-2}<\infty$ при $1<s<\infty$ або $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k)<\infty$ при $s=\infty$.

Теорема 2.4. *Нехай* $1<s<\infty$, *функція* $g_{s'}(t)=\psi(t)t^{\frac{1}{s'}}$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, *така, що* $g_{s'}\in\mathfrak{M}_0$ *і* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^{s}(k)k^{s-2}<\infty$.

Тоді для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $\beta \in \mathbb{R}$ мають місце співвідношення

$$K^{(5)}_{\psi,s}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\Big)^{\frac{1}{s}} \le E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \le$$

$$\le \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \le K^{(2)}_{\psi,s'}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\Big)^{\frac{1}{s}},$$

в яких

$$K^{(5)}_{\psi,s} := \frac{1}{8\xi(s')}\Big(\frac{\underline{\alpha}_1(g_{s'})}{\underline{\alpha}_1(g_{s'})+s}\Big)^{\frac{1}{s'}}, \tag{23}$$

а величини $K^{(2)}_{\psi,s'}$, $\xi(s')$ і $\underline{\alpha}_1(g_{s'})$ означаються формулами (20), (18) і (17) відповідно.

Теорема 2.5. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $\cos\frac{\beta\pi}{2} \ne 0$. Тоді для довільних $n \in \mathbb{N}$ мають місце нерівності*

$$\frac{1}{4\pi}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) \le \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \le \frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{24}$$

Теорема 2.6. *Нехай $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$, функція $g(t) = \psi(t)t$ така, що $g \in \mathfrak{M}_0$ і $\underline{\alpha}_1(g) = \inf\limits_{t\ge1}\alpha(g;t) > 1$. Тоді для довільних $\beta \in \mathbb{R}$, $\cos\frac{\beta\pi}{2} \ne 0$ і $n \in \mathbb{N}$*

$$\frac{1}{48\pi}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\Big(1-\frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\Big)\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) \le E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \le$$

$$\le \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \le \frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{25}$$

Теорема 2.7. *Нехай $\beta = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$, а функція $g(t) = \psi(t)t$ така, що $g \in \mathfrak{M}_0$ і $\underline{\alpha}_1(g) = \inf\limits_{t\ge1}\alpha(g;t) > 1$. Тоді для довільних $n \in \mathbb{N}$ мають місце нерівності*

$$\frac{1}{360\pi}\Big(1-\frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\Big)\psi(n)n \le E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \le \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \le \Big(1+\frac{2}{\pi}\Big)\psi(n)n. \tag{26}$$

У підрозділі 2.4 встановлено точні за порядком оцінки величин $e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_s$, $1<s<\infty$, у випадку, коли $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}<\infty$ і добуток $\psi(t)t^{\frac{s-1}{s}}$ спадає до нуля не швидше за деяку степеневу функцію, а також встановлено порядкові оцінки величин $e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}$ за умови $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k)<\infty$.

Теорема 2.8. *Нехай* $1<s<\infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}<\infty$, *а функція* $g_{s'}(t)=\psi(t)t^{\frac{1}{s'}}$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, *така, що* $g_{s'}\in\mathfrak{M}_0$ *і* $\underline{\alpha}_1(g_{s'})>s$. *Тоді для довільних* $n\in\mathbb{N}$ *і* $\beta\in\mathbb{R}$ *мають місце співвідношення*

$$\frac{4}{3}K^{(5)}_{\psi,s'}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\Big)^{\frac{1}{s}}\leq e^{\perp}_{2n}(L^{\psi}_{\beta,1})_s\leq$$

$$\leq e^{\perp}_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,1})_s\leq K^{(2)}_{\psi,s'}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\Big)^{\frac{1}{s}},$$

де $K^{(5)}_{\psi,s'}$ *і* $K^{(2)}_{\psi,s'}$ *означаються формулами (23) і (20) відповідно.*

Теорема 2.9. *Нехай* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k)<\infty$, *а функція* $g(t)=\psi(t)t$ *така, що* $g\in\mathfrak{M}_0$ *і* $\underline{\alpha}_1(g)=\inf\limits_{t\geq1}\alpha(g;t)>1$. *Тоді для довільних* $\beta\in\mathbb{R}$, $\cos\frac{\beta\pi}{2}\neq0$ *і* $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{1}{12\pi}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\Big(1-\frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\Big)\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\leq e^{\perp}_{2n}(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}\leq$$

$$\leq e^{\perp}_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}\leq\frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \quad (27)$$

Теорема 2.10. *Нехай* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k)<\infty$, $\beta=2k+1$, $k\in\mathbb{Z}$, *а функція* $g(t)=\psi(t)t$ *така, що* $g\in\mathfrak{M}_0$ *і* $\underline{\alpha}_1(g)=\inf\limits_{t\geq1}\alpha(g;t)>1$. *Тоді для довільних* $n\in\mathbb{N}$ *мають місце нерівності*

$$\frac{1}{60\pi}\Big(1-\frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\Big)\psi(n)n\leq e^{\perp}_{2n}(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}\leq e^{\perp}_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}\leq\Big(1+\frac{2}{\pi}\Big)\psi(n)n.$$

Теорема 2.11. *Нехай* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k)<\infty$ *і* $\beta\in\mathbb{R}$. *Тоді, якщо функція* $g(t)=\psi(t)t$ *така, що* $g\in\mathfrak{M}_0$, *то*

$$e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}\asymp\begin{cases}\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi(k), & \cos\frac{\beta\pi}{2}\neq 0,\\ \psi(n)n, & \cos\frac{\beta\pi}{2}=0,\end{cases}\tag{28}$$

якщо ж $g\in\mathfrak{M}_C$, *то*

$$e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}\asymp\psi(n)n.\tag{29}$$

У підрозділах 2.3 та 2.4 наведено наслідки з теорем 2.4-2.11 для деяких конкретних функцій ψ таких, що $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(g_{s'};t)=\infty$, де $g_{s'}(t)=\psi(t)t^{\frac{1}{s'}}$, $1<s\leq\infty$.

Третій розділ роботи присвячено знаходженню порядкових оцінок найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1\leq p<\infty$, і $L^{\psi}_{\beta,1}$, в метриках просторів C і L_s, $1\leq s<\infty$, відповідно, у випадку, коли послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля швидше за будь-яку степеневу функцію. Також у ньому встановлюються порядкові оцінки найкращих m-членних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1\leq p\leq\infty$, у метриках просторів L_s, $1\leq s\leq\infty$, у випадку коли послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля не повільніше за геометричні прогресії.

У підрозділі 3.1 встановлено порядкові оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів $C^{\psi}_{\beta,p}$ у рівномірній метриці у випадку, коли ψ спадають до нуля швидше за будь–яку степеневу функцію. Крім того, тут побудовано лінійний метод, який дозволив записати рівномірні відносно параметра p точні за порядком оцінки зверху найкращих наближень $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$, $1\leq p\leq\infty$ при $\psi\in\mathfrak{M}^{+}_{\infty}$ і $\beta\in\mathbb{R}$.

Покладемо

$$C_a:=\frac{\pi}{96\,(1+\pi^2)^2}\,\frac{(a-1)^2(a-2)^2}{a^3(3a-4)},\quad a>2,\tag{30}$$

$$C_{a,b}:=\frac{1}{\pi}\max\left\{\frac{2b}{b-2}+\frac{1}{a},2\pi\right\},\quad a>0,\quad b>2.\tag{31}$$

Теорема 3.1. *Нехай* $\psi\in\mathfrak{M}^{+}_{\infty}$, $\beta\in\mathbb{R}$, $1\leq p<\infty$. *Тоді для* $n\in\mathbb{N}$, *таких, що* $\eta(n)-n\geq a>2$, $\mu(n)\geq b>2$ *справедливі оцінки*

$$C_a\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}}\leq E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C\leq$$

$$\leq \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \leq C_{a,b}\ (2p)^{1-\frac{1}{p}}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}},$$

де $\eta(n)$ і $\mu(n)$ означені формулою (9), а величини C_a та $C_{a,b}$ — рівностями (30) і (31) відповідно.

Теорема 3.2. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$. Тоді для $n \in \mathbb{N}$ таких, що $\eta(n) - n \geq a > 2,\ \mu(n) \geq b > 2$ справедливі оцінки*

$$C_a\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}} \leq E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \leq C^*_{a,b}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}}, \qquad (32)$$

де $\eta(n)$ і $\mu(n)$ означені формулою (9), C_a означається за допомогою формули (30), а

$$C^*_{a,b} := \frac{2(1+\pi^2)}{\pi}\Big(\frac{2b}{b-2} + \frac{a}{a-1}\Big). \qquad (33)$$

У підрозділі 3.2 знайдено порядкові оцінки величин найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ у метриках просторів L_s, $1 < s \leq \infty$. Крім того, у ньому одержано рівномірні відносно параметра s точні за порядком оцінки зверху найкращих наближень $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$, $1 \leq s \leq \infty$ при $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.3. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty}(\eta(\psi,t) - t) = \infty$, $1 < s \leq \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для довільних $n \in \mathbb{N}$ таких, що $\eta(n) - n \geq a > 2,\ \mu(n) \geq b > 2$, справедливі оцінки*

$$C_a\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}} \leq E_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_s \leq$$

$$\leq \mathcal{E}_n\big(L^{\psi}_{\beta,1})_s \leq C_{a,b}\ (2s')^{\frac{1}{s}}\ \psi(n)\,(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}},$$

де $\eta(n)$ і $\mu(n)$ означені формулою (9), а величини C_a і $C_{a,b}$ означаються формулами (30) і (31) відповідно.

Теорема 3.4. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq s \leq \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$. Тоді для довільних $n \in \mathbb{N}$ таких, що $\eta(n) - n \geq a > 2,\ \mu(n) \geq b > 2$, справедливі оцінки*

$$C_a\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}} \leq E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \leq C^*_{a,b}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}}, \qquad (34)$$

де сталі C_a і $C^*_{a,b}$ означаються формулами (30) і (33) відповідно.

Як наслідки з теорем 3.1–3.4 у підрозділах 3.1 та 3.2 наведено двосторонні нерівності для найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів узагальнених інтегралів Пуассона $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$,

$1 \le p < \infty$, і $L^{\alpha,r}_{\beta,1}$, $r \in (0,1)$, $\alpha > 0$ в метриках просторів C і $L_s, 1 < s \le \infty$, відповідно.

Підрозділ 3.3 присвячено встановленню порядкових оцінок найкращих m–членних тригонометричних наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, у метриках просторів L_s, $1 \le s \le \infty$, у випадку, коли $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$.

Теорема 3.5. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$, $1 \le p, s \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$e_{2n}(C^{\psi}_{\beta,p})_s \asymp e_{2n-1}(C^{\psi}_{\beta,p})_s \asymp \psi(n). \tag{35}$$

Теорема 3.6. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$, $1 \le p, s \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $m \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$e_m(C^{\psi}_{\beta,p})_s \asymp e^{\perp}_m(C^{\psi}_{\beta,p})_s \asymp d^{\top}_m(C^{\psi}_{\beta,p}, L_s) \asymp \psi\Big(\Big[\frac{m+1}{2}\Big]\Big),$$

де запис $[a]$ *означає цілу частину дійсного числа* a.

Висновки

1. Знайдено двосторонні оцінки наближень сумами Фур'є, найкращих наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі C, у випадку, коли послідовності $\psi(k)k^{\frac{1}{p}}$ спадають не швидше за деяку степеневу функцію і, крім того, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$, якщо $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$, та $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$, якщо $p = 1$. Аналогічні оцінки знайдені для зазначених апроксимативних характеристик класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ у метриках просторів L_s, $1 \le s < \infty$. При цьому константи в отриманих оцінках виражені через параметри задачі в явному вигляді.

2. Отримано двосторонні оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p < \infty$, і $L^{\psi}_{\beta,1}$ у метриках просторів C і L_s, $1 \le s < \infty$, відповідно у випадку, коли ψ спадають до нуля швидше за будь–яку степеневу функцію. Побудовано лінійний метод наближення, який дозволив записати рівномірні відносно параметрів p $(1 \le p \le \infty)$ та s $(1 \le s \le \infty)$ оцінки зверху найкращих наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$ та $L^{\psi}_{\beta,1}$ у метриках просторів C та L_s відповідно. Константи в отриманих оцінках виражені через параметри задачі в явному вигляді.

3. Одержано точні за порядком оцінки знизу найкращих m–членних тригонометричних наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p < \infty$, у метриках

просторів $L_s,\ 1 \leq s \leq \infty$, у випадку, коли послідовність $\psi(k)$ прямує до нуля не повільніше за геометричну прогресію.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Сердюк А. С. Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів нескінченно диференційовних функцій / А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін–т математики НАН України. — 2013. — Т. 10, №1. — С. 255–282.

2. Степанюк Т. А. Оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості в інтегральних метриках / Т. А. Степанюк // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін–т математики НАН України. — 2014. — Т. 11, №3. — С. 241–269.

3. Сердюк А. С. Оцінки найкращих наближень класів нескінченно диференційовних функцій в рівномірній та інтегральній метриках / А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, №9. — С. 1244–1256.

4. Сердюк А. С. Порядкові оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є в рівномірній метриці класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості / А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, №12. — С. 1658-1675.

5. Сердюк А. С. Оцінки найкращих m–членних тригонометричних наближень класів аналітичних функцій / А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк // Доп. НАН України. — 2015. — №2. — С. 32–37.

6. Сердюк А. С. Порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості / А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 7. — С. 916–936.

7. Сердюк А. С. Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів нескінченно диференційовних

функцій / А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк// Міжнародна математична конференція з нагоди 75–річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка «Боголюбовські читання DIF–2013», Севастополь, 23–30 червня 2013 р.: Тези доповідей. — Київ: Ін–т математики НАН України, 2013. — С. 270–271.

8. Сердюк А. С. Порядки наилучших приближений и приближений суммами Фурье классов бесконечно дифференцируемых функций / А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк // Международная научная конференция «Современные проблемы математики, механики, информатики» посвященная 90–летию со дня рождения Л. А. Толоконникова, Тула, 16–20 сентября 2013 г.: Материалы конференции. — Тула: Изд–во ТулГу, 2013. — С. 112–113.

9. Сердюк А. С. Оцінки рівномірних наближень сумами Фур'є класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості / А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк // Міжнародна математична конференція присвячена 60–річчю В. І. Рукасова (1953-2009) «Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування», Слов'янськ, 21–24 травня 2014 р.: Матеріали конференції. — Слов'янськ: ДДПУ, 2014. — С. 61.

10. Сердюк А. С. Оцінки найкращих рівномірних наближень та наближень сумами Фур'є класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості / А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк // IV міжнародна Ганська конференція, присвячена 135–ій річниці від дня народження Ганса Гана, Чернівці, 30 червня–5 липня 2014 р.: Тези доповідей. — Чернівці: Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2014. — С. 183–185.

11. Serdyuk A. S. Estimates of the best approximations and approximations of Fourier sums of classes of convolutions of periodic functions of not high smoothness / A. S. Serdyuk, T. A. Stepaniuk // XVIIth Conference on Analytic Functions and Related Topics, Chelm, June 29–July 02, 2014: Abstracts of talks and posters. — Chelm: The State School of Higher Education in Chelm. — P. 42–43.

12. Сердюк А. С. Оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості / А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк // IX Літня школа

«Алгебра, топологія і аналіз», Поляниця, 7–18 липня 2014 р.: Тези лекцій і доповідей. — Івано–Франківськь, 2014. — С. 76-78.

13. Сердюк А. С. Оцінки найкращих m–членних тригонометричних наближень класів аналітичних функцій / А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк // Всеукраїнська наукова конференція ″Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу″, Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2015 р.: Тези доповідей. — Івано–Франківськ: ДВНЗ ″Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника″, 2015. — С. 69–70.

14. Степанюк Т. А. Оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості в інтегральних метриках / Т. А. Степанюк // Міжнародна конференція молодих математиків, Київ, 3–6 червня 2015 р.: Матеріали конференції. — Київ: Ін–т математики НАН України, 2015. — С. 86.

15. Сердюк А. С. Порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів згорток в рівномірній метриці / А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк // X Літня школа ″Алгебра, Топологія, Аналіз″, Одеса, 3–15 серпня 2015 р.: Тези доповідей. — Київ: Ін–т математики НАН України, 2015. — С. 59.

Анотації

Степанюк Т. А. Апроксимативні характеристики класів (ψ, β)-диференційовних функцій. — Рукопис. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Інститут математики НАН України, Київ, 2015.

Робота присвячена встановленню порядкових оцінок наближень сумами Фур'є, найкращих наближень, найкращих m-членних тригонометричних наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів (ψ, β)–диференційовних функцій.

У ній встановлено точні за порядком оцінки наближень сумами Фур'є, найкращих наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень функцій з класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \leq p < \infty$, у випадку, коли добуток $\psi(t)t^{\frac{1}{p}}$ спадає до нуля не швидше за деяку степеневу функцію або у випадку, коли ψ спадає швидше за довільну степеневу

функцію. Аналогічні результати одержано у метриках просторів L_s, $1 < s \le \infty$, для класів $L^{\psi}_{\beta,1}$.

Також встановлено порядкові оцінки найкращих m–членних тригонометричних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, у метриках просторів L_s, $1 \le s \le \infty$, у випадку, коли послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля не повільніше за геометричні прогресії.

Ключові слова: порядкова рівність, (ψ,β)–диференційовна функція, сума Фур'є, найкраще наближення, найкраще ортогональне тригонометричне наближення, найкраще m–членне тригонометричне наближення.

Степанюк Т. А. Аппроксимативные характеристики классов (ψ,β)–дифференцируемых функций. — Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2015.

Работа посвящена нахождению порядковых оценок приближений суммами Фурье, наилучших приближений, наилучших m–членных тригонометрических приближений и наилучших ортогональных тригонометрических приближений классов (ψ,β)–дифференцируемых функций.

В ней установлены точные по порядку оценки приближений суммами Фурье, наилучших приближений и наилучших ортогональных тригонометрических приближений функций классов $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p < \infty$, в случае, когда произведение $\psi(t)t^{\frac{1}{p}}$ убывает к нулю не быстрее некоторой степенной функции, а также в случае, когда ψ убывает быстрее любой степенной функции. Аналогичные результаты получены в метриках пространств L_s, $1 < s \le \infty$, для классов $L^{\psi}_{\beta,1}$.

Также установлены точные порядковые оценки наилучших m–членных тригонометрических приближений классов $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, в метриках пространств L_s, $1 \le s \le \infty$, в случае, когда последовательности $\psi(k)$ убывают к нулю не медленнее геометрической прогрессии.

Приведем некоторые из полученных результатов работы.

Теорема 2.2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, *функция* $g_p(t)=\psi(t)t^{\frac{1}{p}}$ *такова, что* $g_p \in \mathfrak{M}_0$ *и*

$\underline{\alpha}_1(g_p) = \inf\limits_{t\geq 1} \alpha(g_p;t) > \frac{p'}{2}$. *Тогда для произвольных* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\beta \in \mathbb{R}$ *имеют место соотношения*

$$K_{\psi,p}^{(3)}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}} \leq E_n(C_{\beta,p}^{\psi})_C \leq$$

$$\leq \mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{\psi})_C \leq K_{\psi,p}^{(2)}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}},$$

в которых величины $K_{\psi,p}^{(2)}$ *и* $K_{\psi,p}^{(3)}$ *определяются формулами (20) и (21) соответственно.*

Теорема 2.11. *Пусть* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$ *и* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тогда, если функция* $g(t) = \psi(t)t$, *такова, что* $g \in \mathfrak{M}_0$, *то*

$$e_n^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \asymp \begin{cases} \sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi(k), & \cos\frac{\beta\pi}{2} \neq 0, \\ \psi(n)n, & \cos\frac{\beta\pi}{2} = 0, \end{cases}$$

а если $g \in \mathfrak{M}_C$, *то*

$$e_n^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \asymp \psi(n)n.$$

Теорема 3.2. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}^{+}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$. *Тогда для* $n \in \mathbb{N}$ *таких, что* $\eta(n) - n \geq a > 2$, $\mu(n) \geq b > 2$ *справедливы оценки*

$$C_a\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}} \leq E_n(C_{\beta,p}^{\psi})_C \leq C_{a,b}^{*}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}},$$

где C_a *и* $C_{a,b}^{*}$ *определяются формулами (30) и (33) соответственно.*

Теорема 3.6. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}^{'}$, $1 \leq p, s \leq \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$ *и* $m \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$e_m(C_{\beta,p}^{\psi})_s \asymp e_m^{\perp}(C_{\beta,p}^{\psi})_s \asymp d_m^{\top}(C_{\beta,p}^{\psi}, L_s) \asymp \psi\Big(\Big[\frac{m+1}{2}\Big]\Big),$$

где $[a]$ *— целая часть действительного числа* a.

Ключевые слова: порядковое равенство, (ψ,β)–дифференцируемая функция, сумма Фурье, наилучшее приближение, наилучшее ортогональное тригонометрическое приближение, наилучшее m–членное тригонометрическое приближение.

Stepaniuk T. A. Approximative characteristics of classes of (ψ,β)–differentiable functions. — Manuscript. Thesis for a Candidate

Degree in Physical and Mathematical Sciences by speciality 01.01.01 — Mathematical analysis. — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2015.

Work is devoted to finding of order estimates of approximations by Fourier sums, best approximations, best m–term trigonometric approximations and best orthogonal trigonometric approximations of classes of (ψ, β)–differentiable functions.

We established exact–order estimates of approximations by Fourier sums, best approximations, and best orthogonal trigonometric approximations of classes of $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p < \infty$, in case when the product $\psi(t)t^{\frac{1}{p}}$ decreases to zero not faster than some power function or in the case, when ψ decreases to zero faster than any power function. Analogical results are obtained for classes $L^{\psi}_{\beta,1}$ in metric of spaces L_s, $1 < s \le \infty$.

Also we established order estimates of best m–term trigonometric approximations of classes $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, in metric of spaces L_s, $1 \le s \le \infty$, in the case when sequences $\psi(k)$ decrease to zero not slower than geometric progression.

Key words: order equality, (ψ, β)–differentiable function, Fourier sum, best approximation, best orthogonal trigonometric approximation, best m–term trigonometric approximation.