Міністерство освіти і науки України

Східноєвропейський національний університет
імені Лесі Українки

На правах рукопису

СТЕПАНЮК Тетяна Анатоліївна

УДК 517.5

АПРОКСИМАТИВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КЛАСІВ (ψ, β)-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

Спеціальність 01.01.01 — математичний аналіз

Д и с е р т а ц і я
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
СЕРДЮК Анатолій Сергійович
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник

Луцьк — 2015

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Базові позначення

$\forall$ — квантор загальності: «для всіх»;

$\exists$ — квантор існування: «існує»;

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел;

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;

$\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел;

$x \in A$ — елемент x належить множині A;

$A \cap B$ — перетин множин A і B;

$A \subset B$ — множина A міститься в множині B;

$A \setminus B$ — різниця множин A і B;

$:=$ — дорівнює за означенням;

$(\alpha)_+$ — величина вигляду: $\max\{0, \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

$\sup\limits_{x \in A} F(x)$ — точна верхня межа значень функціонала F на множині A;

$\inf\limits_{x \in A} F(x)$ — точна нижня межа значень функціонала F на множині A;

$\operatorname{ess\,sup}$ — суттєва точна верхня межа;

$f \perp 1$ для $f \in L_1$ означає, що $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = 0$;

$\{x : \ S\}$ — сукупність елементів x, які мають властивість S;

$\|f\|_X$ — норма функції $f(\cdot)$ в просторі X;

$[a, b]$ — сегмент числової прямої;

(a, b) — інтервал числової прямої;

$[a, b)$ — півінтервал числової прямої;

$A(n) \asymp B(n)$ $(A(n), B(n) > 0)$ — порядкова рівність;

i — комплексна одиниця: $i^2 = -1$;

$[\alpha]$ — ціла частина дійсного числа α;

$\{\alpha\}$ — дробова частина дійсного числа α.

Функції та функціонали

$\hat{f}(k)$ — k–ий коефіцієнт Фур'є функції f: $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt$;

$f^{(r)}$ — r–та похідна функції f;

f_r^r — r–та похідна функції f в сенсі Вейля;

f_β^r — (r,β)–похідна функції f в сенсі Вейля–Надя;

f_β^ψ — (ψ,β)–похідна функції f в сенсі Степанця;

$\eta(\psi;t)$ — характеристика функції ψ вигляду: $\eta(\psi;t) = \psi^{-1}(1/2\psi(t))$, де ψ^{-1} — функція обернена до ψ;

$\mu(\psi;t)$ — модуль напіврозпаду функції ψ: $\mu(\psi;t) = \frac{t}{\eta(\psi;t)-t}$;

$\alpha(\psi;t)$ — характеристика функції ψ вигляду: $\alpha(\psi;t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}$, $\psi'(t) := \psi'(t+0)$;

$\Psi_\beta(t)$ — ядра вигляду: $\Psi_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$, $\psi(k)\geq 0$, $\beta\in\mathbb{R}$;

$D_{k,\beta}(t)$ — ядра Діріхле вигляду: $D_{k,\beta}(t) = \frac{1}{2}\cos\frac{\beta\pi}{2} + \sum\limits_{\nu=1}^{k}\cos\left(\nu t - \frac{\beta\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbb{N}$, $\beta\in\mathbb{R}$;

$V_{m,n}(t)$ — ядра Валле Пуссена: $V_{m,n}(t) = \frac{1}{n-m}\sum\limits_{k=m}^{n-1}D_{k,0}(t)$, $m,n\in\mathbb{N}$;

$V_n(t)$ — ядра Валле Пуссена вигляду: $V_n(t) = V_{2n,n}(t)$, $n\in\mathbb{N}$.

Лінійні нормовні простори

C — простір неперервних 2π-періодичних функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ з нормою

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|;$$

L_∞ — простір 2π–періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ з нормою

$$\|f\|_{L_\infty} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|;$$

L_p, $1\leq p<\infty$, — простір 2π–періодичних сумовних в p–му степені на $[0,2\pi)$ функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ з нормою

$$\|f\|_{L_p} = \|f\|_p = \left(\int\limits_0^{2\pi}|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, \quad p\in[1,\infty).$$

Апроксимативні характеристики

$\mathcal{E}_n(F)_s$ — точна верхня межа норм наближень відхилення від функцій з класу F їх частинних сум Фур'є порядку $n-1$ в метриці простору L_s;

$E_n(F)_s$ — найкраще наближення класу F за допомогою тригонометричних поліномів порядку не вищого за $n-1$ в метриці простору L_s;

$e_m^{\perp}(F)_s$ — найкраще ортогональне тригонометричне наближення класу F в метриці простору L_s;

$e_m(F)_s$ — найкраще m–членне тригонометричне наближення класу F в метриці простору L_s;

$d_m^{\top}(F, L_s)$ — тригонометричний поперечник класу F в метриці простору L_s.

Функціональні класи

B_p — одинична куля в просторі L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$;

W_p^r — клас 2π–періодичних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, у яких існують абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку включно, а $f^{(r)} \in B_p$;

$W_{\beta,p}^r$ — класи Вейля–Надя: $W_{\beta,p}^r = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \in L_1,\ f_\beta^r \in B_p\}$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$;

$L_{\beta,p}^{\psi}$ — класи вигляду: $L_{\beta,p}^{\psi} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \in L_1,\ f_\beta^{\psi} \in B_p\}$;

$C_{\beta,p}^{\psi}$ — класи неперервних функцій з множин $L_{\beta,p}^{\psi}$: $C_{\beta,p}^{\psi} = L_{\beta,p}^{\psi} \bigcap C$.

Множини функцій

$\mathfrak{M}$ — множина деяких додатних, неперервних, опуклих донизу функцій $\psi(t)$, $t \geq 1$, таких, що $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$;

$\mathfrak{M}_0$ — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для кожної з яких існує стала $K > 0$ така, що $\mu(\psi; t) \leq K < \infty,\ t \geq 1$;

$\mathfrak{M}_C$ — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для кожної з яких існують сталі $K_1, K_2 > 0$ такі, що $K_1 \leq \mu(\psi; t) \leq K_2 < \infty,\ t \geq 1$;

$\mathfrak{M}_\infty^+$ — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{M}$ таких, що $\mu(\psi; t) \uparrow \infty$;

$\mathfrak{M}_\infty'$ — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, для кожної з яких існує стала $K > 0$ така, що $\eta(\psi; t) - t \leq K,\ t \geq 1$;

$\mathfrak{M}''_{\infty}$ — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$, для кожної з яких існує стала $K > 0$ така, що $\eta(\psi; t) - t \geq K,\ t \geq 1$;

B — множина незростаючих додатних функцій $\psi(t)$, $t \geq 1$, для кожної з яких можна вказати додатну сталу K таку, що $\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \leq K, \ \ t \geq 1$;

$\mathcal{T}_{2n-1}$ — підпростір усіх тригонометричних поліномів t_{n-1} порядку не вищого за $n-1$ з дійсними коефіцієнтами.

ВСТУП

Робота присвячена встановленню порядкових оцінок наближень сумами Фур'є, найкращих наближень, найкращих m-членних тригонометричних наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів 2π–періодичних функцій, які задаються за допомогою поняття (ψ, β)–похідної.

Актуальність теми. Тригонометричні поліноми, як апарат наближення 2π–періодичних функцій, привернули увагу дослідників завдяки відомим роботам П.Л. Чебишова та К. Вейєрштрасса, А. Лебега, Д. Джексона, Ш. Валле Пуссена, Л. Фейєра, С.Н. Бернштейна та інших.

На початку двадцятого століття в теорії наближення почав активно розвиватись напрям пов'язаний з дослідженням швидкості спадання до нуля найкращих наближень для тих чи інших функціональних класів в залежності від їх гладкісних чи диференціально–різницевих властивостей.

У 1936 р. Ж. Фавар для класів $W^r_\infty, r \in \mathbb{N}$, — 2π-періодичних функцій f, у яких $(r-1)$-а похідна $f^{(r-1)}$ абсолютно неперервна на $[-\pi, \pi]$, а $f^{(r)}$ майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ задовольняє умову $|f^{(r)}(x)| \leq 1$, встановив точні значення найкращих рівномірних наближень тригонометричними поліномами t_{n-1} порядку не вищого ніж $n-1$, тобто величин вигляду

$$E_n(W^r_\infty)_C = \sup_{f \in W^r_\infty} \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_C.$$

Оцінки найкращих наближень класів $W^r_{\beta,p}$ досліджувались також Н.І. Ахієзером, М.Г. Крейном, Б. Надем, С.М. Нікольським, В.К. Дзядиком, С.Б. Стєчкіним, Сунь Юн-шеном та ін.

На сьогоднішний день для класів Вейля–Надя $W^r_{\beta,p}$ порядкові оцінки найкращих наближень в просторах L_s відомі при усіх допустимих значеннях параметрів r, p, s і β. А саме при довільних $\beta \in \mathbb{R}$, $r > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right)_+$

і $1 \le p, s \le \infty$ справедливі порядкові рівності

$$E_n(W^r_{\beta,p})_s \asymp n^{-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{s})_+},$$

тут і надалі $\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{s}\right)_+ := \max\left\{0,\ \frac{1}{p}-\frac{1}{s}\right\}$, а для додатних послідовностей $A(n)$ і $B(n)$ запис $A(n) \asymp B(n)$ означає, що існують додатні сталі K_1 і K_2 такі, що $K_1 B(n) \le A(n) \le K_2 B(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Дослідженням поведінки точних верхніх меж наближень сумами Фур'є на різноманітних функціональних класах займались А. Лебег, А.М. Колмогоров, В.К. Дзядик, М.П. Корнійчук, С.М. Нікольський, С.Б. Стєчкін, С.О. Теляковський, О.І. Степанець, І.Г. Соколов, В.П. Моторний, В.Т. Пінкевич, Р.М. Тригуб, О.В. Єфімов, О.П. Тіман та інші. Як і для найкращих наближень, на класах $W^r_{\beta,p}$ порядкові оцінки наближень сумами Фур'є відомі при всіх допустимих значеннях параметрів r, p, s і β, а саме при $r > \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{s}\right)_+$ і $1 \le p, s \le \infty$ для величин

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_s = \sup_{f \in W^r_{\beta,p}} \left\| f(x) - S_{n-1}(f;x) \right\|_s,$$

де

$$S_{n-1}(f;x) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \hat{f}(k) e^{ikx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx),$$

а

$$a_k(f) = \hat{f}(k) + \hat{f}(-k), \qquad b_k(f) = i(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k)),$$

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \tag{В.1}$$

— коефіцієнти Фур'є функції f, мають місце порядкові рівності

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_s \asymp \begin{cases} n^{-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{s})_+}, & 1 \le p < s \le \infty \vee 1 < p = s < \infty, \\ & 1 \le s < p \le \infty, \\ n^{-r} \ln n, & p = s = 1,\ p = s = \infty. \end{cases}$$

Поряд із дослідженням частинних сум Фур'є, як апарату наближення періодичних функцій, вивчались апроксимативні властивості тригонометричних поліномів, які містять фіксоване число m $(m \in \mathbb{N})$ вибраних довільним чином гармонік із ряду Фур'є цих функцій. Це спонукало до появи наступної характеристики

$$e_m^{\perp}(F)_s := \sup_{f\in F} e_m^{\perp}(f)_s = \sup_{f\in F} \inf_{\gamma_m} \left\| f(x) - \sum_{k\in\gamma_m} \hat{f}(k) e^{ikx} \right\|_s, \quad 1 \leq s \leq \infty, \tag{В.2}$$

де γ_m — довільний набір m цілих чисел. Величину (В.2) називають найкращим ортогональним тригонометричним наближенням класу F в метриці простору L_s. На класах Вейля–Надя $W^r_{\beta,p}$ порядкові оцінки для величин (В.2) встановлювались Е.С. Белінським, В.М. Темляковим і А.С. Романюком.

В 1983 році О. І. Степанцем запроваджені класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ ($C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$), що означаються за допомогою поняття (ψ,β)-похідної, яка задається фіксованою послідовністю $\psi(k)$ та числовим параметром β. За допомогою (ψ,β)-похідних можна класифікувати весь спектр сумовних (неперервних) періодичних функцій і, в той же час, виділяти більш тонкі властивості кожної окремої функції. Для зазначених класів на даний час отримано розв'язки цілої низки задач теорії наближення функцій, які раніше були відомі для класів Вейля-Надя.

Оцінки швидкості спадання до нуля точних верхніх меж наближень сумами Фур'є та найкращих наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ і $C^{\psi}_{\beta,p}$ в метриках просторів L_s при різноманітних співвідношеннях між параметрами p і s та при різноманітних швидкостях прямування до нуля послідовності $\psi(k)$ досліджувались у роботах О.І. Степанця, С.О. Теляковського, Р.М. Тригуба, П.В. Задерея, О.К. Кушпеля, С.Б. Вакарчука, В.І. Рукасова, А.С. Сердюка, С.О. Чайченка, І.В. Соколенка, В.С. Романюка, Є.Ю. Овсія, У.З. Грабової та ін. Порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень на класах $L^{\psi}_{\beta,p}$ і $C^{\psi}_{\beta,p}$ в L_s–метриках досліджувались О.І. Степанцем, О.С. Федоренком, А.Л. Шидлічом та В.В. Шкапою.

Незважаючи на значне число опублікованих робіт, в даній тематиці залишився ряд нез'ясованих питань. Так, зокрема, не були встановлені точні порядки величин найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$ в рівномірній метриці, у випадку коли добуток $\psi(t)t^{\frac{1}{p}}$ спадає до нуля повільніше за довільну степеневу функцію. Також не були відомі точні порядкові оцінки величин $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$, $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$ і $e^{\perp}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$, коли $\psi(t)t^{\frac{s-1}{s}}$ спадає до нуля повільніше за довільну степеневу функцію.

Крім того, у випадку, коли послідовність ψ спадає до нуля швидше за будь–яку степеневу функцію і повільніше за будь–яку геометричну прогресію, питання про точні порядки спадання до нуля величин $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$, $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$ та $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$, $1 < s \leq \infty$, також залишалась відкритою. Розв'язання цих задач дозволяє суттєво доповнити вже відомі результати в окресленому напрямку, що підтверджує актуальність теми дисертаційного дослідження.

Поряд з апроксимативною характеристикою (B.2) в теорії наближень розглядають величини

$$e_m(F)_s := \sup_{f\in F} e_m(f)_s = \sup_{f\in F} \inf_{\gamma_m} \inf_{c_k\in\mathbb{C}} \left\| f(x) - \sum_{k\in\gamma_m} c_k e^{ikx} \right\|_s, \quad 1 \leq s \leq \infty, \tag{B.3}$$

$$d^{\top}_m(F, L_s) := \inf_{\gamma_m} \sup_{f\in F} \inf_{c_k\in\mathbb{C}} \left\| f(x) - \sum_{k\in\gamma_m} c_k e^{ikx} \right\|_s, \quad 1 \leq s \leq \infty, \tag{B.4}$$

де γ_m — довільні набори з m цілих чисел.

Величину (B.3) називають найкращим m–членним тригонометричним наближенням класу F в метриці простору L_s, а величину (B.4) — тригонометричним поперечником класу F в метриці простору L_s.

Дослідженням величин $e_m(F)_s$ для класів диференційовних (в тому чи іншому сенсі) функцій займалися С.Б. Стєчкін, Р.С. Ісмагілов, К.І. Осколков, Б.С. Кашин, В.М. Темляков, Е.С. Белінський, Г. Маковоз, Е.М. Галєєв, О.І. Степанець, А.С. Романюк, А.Л. Шидліч, О.С. Федоренко, А.С. Федоренко та ін.

Порядкові оцінки тригонометричних поперечників для різноманітних функціональних компактів встановлювались в роботах Я.С. Бугрова, Р.С. Ісмагілова, В.Є. Майорова, Б.С. Кашина, В.М. Темлякова, Е.С. Белінського, А.С. Романюка та інших.

Для класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень та найкращих m–членних тригонометричних наближень встановлювались, як правило, у випадках, коли ψ спадають до нуля зі швидкістю степеневої функції.

Задачі по встановленню точних порядків зазначених характеристик класів $C^{\psi}_{\beta,p}$ у випадку, коли ψ спадають до нуля дуже швидко (не повільніше за геометричну прогресію) з певних причин залишались нерозв'язаними. Тому тематика дисертаційного дослідження, пов'язана з розв'язанням саме таких задач, є актуальною в сенсі підходу до своєї завершеності.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь та математичної фізики у Східноєвропейському національному університеті імені Лесі Українки згідно з планом наукових робіт за науковою темою "Теорія функцій та диференціальні рівняння".

Мета і завдання дослідження.

Метою роботи є: знаходження у нових, недосліджених раніше ситуаціях, точних порядкових оцінок найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \leq p < \infty$, та $L^{\psi}_{\beta,1}$ в метриках просторів C та L_s, $1 < s \leq \infty$, відповідно, а також встановлення точних порядків найкращих m–членних тригонометричних наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$ в метриках просторів L_s при всіх $1 \leq p, s \leq \infty$.

Об'єктом дослідження є класи $C^{\psi}_{\beta,p}$ і $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Предметом дослідження є величини $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$, $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$, $e^{\perp}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ та $e_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ при тих чи інших обмеженнях на параметри ψ, p, s і β.

Задачі дослідження:

1. Знайти порядкові оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \leq p < \infty$, в рівномірній метриці у випадку, коли добуток $\psi(t)t^{\frac{1}{p}}$ спадає до нуля повільніше за будь–яку степеневу функцію. Одержати аналогічні оцінки в метриках просторів L_s, $1 < s \leq \infty$, для класів $L^{\psi}_{\beta,1}$.

2. Отримати порядкові рівності для найкращих рівномірних наближень тригонометричними поліномами класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \leq p < \infty$, у випадку, коли ψ спадають до нуля швидше за будь–яку степеневу функцію. Встановити при вказаних обмеженнях на функцію ψ точні порядки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ в метриках просторів L_s, $1 < s \leq \infty$.

3. Знайти точні порядкові оцінки найкращих m–членних тригонометричних наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$ в метриках просторів L_s при всіх $1 \leq p, s \leq \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$ у випадку, коли $\psi(k)$ прямує до нуля не повільніше за геометричну прогресію.

Методи дослідження. При розв'язанні поставлених задач в дисертаційній роботі використано загальні методи математичного аналізу та теорії функцій в поєднанні із методами теорії наближення функцій, розробленими в роботах С.М. Нікольського, О.І. Степанця, А.С. Сердюка, В.М. Темлякова та інших.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи є новими і полягають в наступному:

1. Знайдено порядкові оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \leq p < \infty$, в рівномірній метриці у випадку, коли добуток $\psi(t)t^{\frac{1}{p}}$ спадає до нуля повільніше за будь–яку степеневу функцію. Аналогічні оцінки одержано в метриках просторів L_s, $1 < s \leq \infty$, для класів $L^{\psi}_{\beta,1}$.

2. Отримано порядкові рівності для найкращих рівномірних набли-

жень тригонометричними поліномами класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \leq p < \infty$, у випадку, коли ψ спадають до нуля швидше за будь–яку степеневу функцію. При вказаних обмеженнях на функцію ψ встановлено точні порядки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ в метриках просторів L_s, $1 < s \leq \infty$.

3. Знайдено точні порядкові оцінки найкращих m–членних тригонометричних наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$ в метриках просторів L_s при всіх $1 \leq p, s \leq \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$ у випадку, коли послідовність $\psi(k)$ прямує до нуля не повільніше за геометричну прогресію.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи і методика їх отримання можуть бути використані при дослідженні різноманітних питань математичного аналізу та теорії наближення функцій.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження, а також постановка задач належить науковому керівникові А.С. Сердюку. Результати робіт [71, 78–81] отримано спільно з науковим керівником, внесок співавторів є рівноцінним. Результати роботи [99] отримано здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на:

— семінарах відділу теорії функцій (Інститут математики НАН України; керівник семінару: доктор фіз.-мат. наук, професор, А.С. Романюк);

— семінарі «Сучасний аналіз» (механіко-математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка; керівники семінару: доктори фіз.-мат. наук, професори І.О. Шевчук, О.О. Курченко, В.М. Радченко);

— міжнародній математичній конференції «Боголюбовські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75–річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка, Севастополь, 23–30 червня 2013 року;

— міжнародній науковій конференції «Современные проблемы математики, механики и информатики», присвяченій 90–річчю з дня народження Л.О. Толоконнікова, Тула, 16 — 20 вересня 2013 року;

— міжнародній математичній конференції присвяченій 60–річчю В.І. Рукасова (1953–2009) «Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування», Слов'янськ, 21–24 травня 2014 року;

— XVII міжнародній математичній конференції "Conference on Analytic Functions and Related Topics", Хелм (Польща), 29 червня–2 липня 2014 року;

— IV міжнародній ганській конференції, присвяченій 135–ій річниці від дня народження Ганса Гана, Чернівці, 30 червня–5 липня 2014 року;

— IX Літній школі «Алгебра, топологія і аналіз», Поляниця, 7–18 липня 2014 року;

— всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу», Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2015 року;

— міжнародній конференції молодих математиків, Київ, 3–6 червня 2015 року;

— міжнародному семінарі по гіперкомплексному аналізу "Hypercomplex Seminar 2015: (Hyper)Complex and Dynamical Processes; Modelling and Simulations", Бедлево (Польща), 2–9 липня 2015 року;

— X Літній школі "Алгебра, Топологія, Аналіз", Одеса, 3–15 серпня 2015 року.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у п'ятнадцяти наукових публікаціях [71–83, 99, 100]. Шість з них [71, 78–81, 99] є статтями у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань з фізико–математичних наук, три з яких [78, 79, 81] надруковано у виданні, внесеному до міжнародних наукометричних баз. Решта дев'ять опубліковано у збірниках тез міжнародних наукових конференцій.

Структура дисертації. Дисертаційне дослідження складається з переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел, який містить 138 найменувань. Повний обсяг дисертації складає 147 сторінок друкованого тексту.

Користуючись нагодою, висловлюю глибоку вдячність Анатолію Сергійовичу СЕРДЮКУ за постановку задач, постійну увагу, підтримку і допомогу в роботі.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури

1.1. Означення класів (ψ,β)–диференційовних функцій та основних апроксимативних характеристик

Нехай C — простір 2π–періодичних неперервних функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, у якому норма задана за допомогою рівності

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|;$$

L_∞ — простір 2π–періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ з нормою

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|;$$

L_p, $1\le p<\infty$, — простір 2π–періодичних сумовних в p–му степені на $[0,2\pi)$ функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ в якому норма задана формулою

$$\|f\|_p := \Big(\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Нехай $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — функція із L_1, ряд Фур'є якої має вигляд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx},$$

де $\hat{f}(k)$ означаються формулою (B.1), $\psi(k)$ — довільна фіксована послідовність дійсних чисел і β — фіксоване дійсне число. Тоді якщо ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\hat{f}(k)}{\psi(|k|)} e^{i(kx+\frac{\beta\pi}{2}\mathrm{sign}k)}$$

є рядом Фур'є деякої функції φ з L_1, то цю функцію називають (ψ,β)-похідною функції f і позначають через f^ψ_β (див., наприклад, [95, с. 132]).

Множину функцій f, для яких існує (ψ,β)-похідна, позначають через L^{ψ}_{β}.

Через B_p позначимо одиничну кулю в просторі дійснозначних функцій з L_p, тобто множину всіх функцій $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таких, що $\|\varphi\|_p\le 1$, $1\le p\le\infty$. Якщо $f\in L^{\psi}_{\beta}$ і, крім того, $f^{\psi}_{\beta}\in B_p$, то кажуть, що функція f належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$. Підмножини неперервних функцій із L^{ψ}_{β} та $L^{\psi}_{\beta,p}$ будемо позначати через C^{ψ}_{β} та $C^{\psi}_{\beta,p}$ відповідно.

Поняття (ψ,β)-похідної є природним узагальненням поняття (r,β)-похідної в розумінні Вейля-Надя і збігається з останнім при $\psi(k)=k^{-r}$, $r>0$, тобто, якщо $\psi(k)=k^{-r}$, $r>0$, то майже скрізь $f^{\psi}_{\beta}=f^{r}_{\beta}$ (див., наприклад, [95, Гл. 3, §6–7]). При $\beta=r$ похідні Вейля–Надя f^{r}_{β} майже скрізь збігаються з похідними в сенсі Вейля f^{r}_{r}. Якщо, крім того, $\beta=r$, $r\in\mathbb{N}$, то f^{r}_{β} майже скрізь збігаються зі звичайними r–похідними $f^{(r)}$ функції f.

Згідно з теоремою 3.7.3 та твердженням 3.7.2 монографії [95, с. 136], якщо послідовність $\psi(k)$ монотонно прямує до нуля при $k\to\infty$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k}<\infty, \tag{1.1}$$

то елементи f множини $L^{\psi}_{\beta,p}$ при будь–якому $\beta\in\mathbb{R}$ і майже для всіх $x\in\mathbb{R}$ представляються за допомогою згортки

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Psi_{\beta}(x-t)\varphi(t)dt,\ a_0\in\mathbb{R},\ \varphi\in B_p,\ \varphi\perp 1, \tag{1.2}$$

з сумовним ядром $\Psi_{\beta}(t)$ вигляду

$$\Psi_{\beta}(t)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}/\{0\}}\psi(|k|)e^{-i(kt+\frac{\beta\pi}{2}\operatorname{sign}k)}=\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\big). \tag{1.3}$$

При цьому функція φ з рівності (1.2) майже скрізь збігається з f^{ψ}_{β}, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\big)$$

є рядом Фур'є функції Ψ_{β}.

Нехай при $1 < p \le \infty$ послідовність $\psi(k)$ така, що

$$\psi(k)k^{\frac{1}{p}} \downarrow 0,\ k \to \infty, \tag{1.4}$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty. \tag{1.5}$$

Тоді виконується умова (1.1) і, згідно з лемою 12.6.6 монографії [25, с.193], має місце включення $\Psi_\beta \in L_{p'}$. Отже, внаслідок твердження 3.8.3 монографії [95, с.139], одержимо, що при виконанні умов (1.4) і (1.5) функції f з множини $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ зображуються у вигляді (1.2). Зрозуміло, що при виконанні умов (1.4) і (1.5) має місце вкладення $L^{\psi}_{\beta,p} \subset L_\infty$, $1 < p \le \infty$.

Зрозуміло також, що коли $\psi(k)$ задовольняє умову

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty, \tag{1.6}$$

то класи $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, при всіх $x \in \mathbb{R}$ є класами згорток (1.2) і при цьому $L^{\psi}_{\beta,p} \subset L_\infty$, $1 \le p \le \infty$.

Нехай $1 < s < \infty$. Якщо послідовність $\psi(k)$ така, що

$$\psi(k)k^{\frac{s-1}{s}} \downarrow 0,\ k \to \infty, \tag{1.7}$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{s}(k)k^{s-2} < \infty, \tag{1.8}$$

то згідно з лемою 12.6.6 із [25, с.193], для ядер Ψ_β вигляду (1.3) має місце включення $\Psi_\beta \in L_s$. Тому в силу твердження 1.5.5 роботи [37, с. 43] справедливе вкладення $L^{\psi}_{\beta,1} \subset L_s$.

При $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, ядра $\Psi_\beta(t)$ із (1.3) є ядрами Вейля–Надя $B_{r,\beta}(t)$

$$B_{r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\big), \quad r > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{1.9}$$

а класи функцій f, що зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B_{r,\beta}(x-t)\varphi(t)dt,\ \varphi \in B_p,\ \varphi \perp 1, \tag{1.10}$$

є класами Вейля-Надя $W^r_{\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$. Оскільки, при $\psi(k) = k^{-r}$, $r > \frac{1}{p}$, $1 < p \le \infty$, виконуються умови (1.4) і (1.5), і отже, згідно з викладеним вище, для довільних $\beta \in \mathbb{R}$ має місце вкладення $W^r_{\beta,p} \subset C$.

При $\beta = r$ класи $W^r_{\beta,p}$ є класами Вейля $W^r_{r,p}$. Якщо, до того ж $r = \beta \in \mathbb{N}$, то $W^r_{\beta,p}$ є класами W^r_p диференційовних в звичайному розумінні функцій f, таких, що $f^{(r)} \in B_p$ (див., наприклад, [95, Гл. 3, §6–7]). При $\beta = r+1$, $r \in \mathbb{N}$, класи $W^r_{\beta,p}$ є класами спряжених функцій $\overline{W}^r_p$.

У випадку коли $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$, $r > 0$, $\alpha > 0$, класи $L^\psi_{\beta,p}$ та $C^\psi_{\beta,p}$ будемо позначати через $L^{\alpha,r}_{\beta,p}$ і $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$ відповідно.

Послідовності $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, що визначають класи $L^\psi_{\beta,p}$, зручно розглядати як звуження на множину натуральних чисел $\mathbb{N}$ деяких додатних, неперервних, опуклих донизу функцій $\psi(t)$, $t \ge 1$, таких, що $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$. Множину всіх таких функцій $\psi(t)$ прийнято позначати через $\mathfrak{M}$.

Множина $\mathfrak{M}$ неоднорідна за швидкістю спадання до нуля її елементів: функції $\psi(t)$ можуть прямувати до нуля як завгодно повільно, а можуть спадати як завгодно швидко. Тому виникла необхідність виокремити з множини $\mathfrak{M}$ підмножини функцій, що у певному сенсі мають однаковий характер спадання до нуля. З цією метою для довільної функціїй ψ із $\mathfrak{M}$ розглядають характеристики:

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) := \psi^{-1}\left(\psi(t)/2\right), \tag{1.11}$$

$$\mu(t) = \mu(\psi; t) := \frac{t}{\eta(t) - t}, \tag{1.12}$$

де ψ^{-1} — обернена до ψ функція. Величина $\eta(t) - t$ це довжина проміжку $[t, \eta(t)]$, на якому значення функції $\psi(t)$ зменшується рівно в 2 рази. Тому, функцію $\mu(t)$, означену рівністю (1.12), називають модулем напіврозпаду функції $\psi(t)$.

За допомогою характеристики $\mu(\psi; t)$ з множини $\mathfrak{M}$ прийнято виділяти (див., наприклад, [95, с.160]), наступні підмножини:

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} : \quad \exists K > 0 \quad \forall t \ge 1 \quad 0 < \mu(\psi; t) \le K < \infty\}, \tag{1.13}$$

$$\mathfrak{M}_C = \{\psi \in \mathfrak{M} : \ \exists K_1, K_2 > 0 \quad \forall t \geq 1 \quad K_1 \leq \mu(\psi;t) \leq K_2 < \infty\}, \tag{1.14}$$

$$\mathfrak{M}_\infty^+ = \{\psi \in \mathfrak{M} : \quad \mu(\psi;t) \uparrow \infty\}.$$

Очевидно, що $\mathfrak{M}_C \subset \mathfrak{M}_0$.

В свою чергу з множини $\mathfrak{M}_\infty^+$ прийнято виділяти такі підмножини:

$$\mathfrak{M}_\infty^{'} = \left\{\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+ : \ \exists K > 0 \quad \forall t \geq 1 \quad \eta(\psi;t) - t \leq K\right\}, \tag{1.15}$$

$$\mathfrak{M}_\infty^{''} = \left\{\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+ : \ \exists K > 0 \quad \forall t \geq 1 \quad \eta(\psi;t) - t \geq K\right\}. \tag{1.16}$$

В (1.13)–(1.16) константи K, K_1 і K_2 є різними в різних співвідношеннях і взагалі кажучи, можуть залежати від ψ.

Типовими представниками множини $\mathfrak{M}_C$ є функції $\psi(t) = t^{-r}$, $r > 0$, множини $\mathfrak{M}_0 \setminus \mathfrak{M}_C$ — функції $\psi(t) = \ln^{-\varepsilon}(t+1)$, $\varepsilon > 0$. Для множини $\mathfrak{M}_\infty^{''}$ типовими представниками є функції $\psi(t) = e^{-\alpha t^r}$, $0 < r < 1$, $\alpha > 0$, а для множини $\mathfrak{M}_\infty^{'}$ — функції $\psi(t) = e^{-\alpha(t+K)^r}$, $r \geq 1$, $\alpha > 0$, $K > \left(\left(\frac{r-1}{\alpha r}\right)^{\frac{1}{r}} - 1\right)_+$.

Будемо розглядати також множину B — множину незростаючих додатних функцій $\psi(t)$, $t \geq 1$, для кожної з яких можна вказати додатну сталу K таку, що

$$\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \leq K, \quad t \geq 1.$$

Згідно з теоремою 3.16.1 роботи [95, с.175] для того, щоб ψ з множини $\mathfrak{M}$ належала до $\mathfrak{M}_0$ необхідно і достатньо, щоб вона належала до множини B.

Окрім характеристики $\mu(\psi;t)$ вигляду (1.12) для функцій ψ з множини $\mathfrak{M}$ застосовуватимемо також характеристику

$$\alpha(\psi;t) := \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}, \quad \psi'(t) := \psi'(t+0). \tag{1.17}$$

Згідно з теоремою 3.12.1 з [95, с.160] функція ψ з множини $\mathfrak{M}$ належить до множини $\mathfrak{M}_0$ тоді і тільки тоді, коли існує стала K така, що

$$\alpha(\psi;t) > K > 0 \ \forall t \geq 1;$$

функція ψ з множини $\mathfrak{M}$ належить до множини $\mathfrak{M}_0$ тоді і тільки тоді, коли існують сталі $K_1 > 0$ і $K_2 > 0$ такі, що

$$0 < K_1 \leq \alpha(\psi;t) \leq K_2 < \infty \quad \forall t \geq 1.$$

В роботі [98, с. 1692] було показано, що множини C^{ψ}_{β} при $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$ складаються з нескінченно диференційовних 2π–періодичних функцій і тільки з них, а множини C^{ψ}_{β} при $\psi \in \mathfrak{M}^{'}_{\infty}$ (див. [98, с. 1698]), складаються із тих і тільки тих 2π–періодичних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження в деяку смугу $|\mathrm{Im}\, z| \leq c,\ c > 0$ комплексної площини. Отже, класи $C^{\psi}_{\beta,p}$ при $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$ є класами нескінченно диференційовних функцій, а при $\psi \in \mathfrak{M}^{'}_{\infty}$ — класами аналітичних функцій.

Нехай $f \in L_s$. Будемо розглядати відхилення від функції f її частинної суми Фур'є порядку $n-1$ $S_{n-1}(f;x)$

$$\rho_n(f;x) = f(x) - S_{n-1}(f;x) = f(x) - \sum_{k=-n+1}^{n-1} \hat{f}(k)e^{ikx},\ n \in \mathbb{N}, \tag{1.18}$$

де $\hat{f}(k)$ означаються формулою (В.1) та найкраще наближення функції f в метриці простору L_s, тобто величину вигляду

$$E_n(f)_s = \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_s,\ 1 \leq s \leq \infty,\ \ n \in \mathbb{N}, \tag{1.19}$$

де $\mathcal{T}_{2n-1}$ — підпростір усіх тригонометричних поліномів t_{n-1} порядку не вищого за $n-1$ вигляду

$$t_{n-1}(x) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} c_k e^{ikx}, \quad c_k = c_{-k}, \quad c_k \in \mathbb{Z}.$$

Також для функції $f \in L_s$ розглянемо наступні апроксимативні характеристики:

$$e^{\perp}_m(f)_s = \inf_{\gamma_m} \|f(x) - S_{\gamma_m}(f;x)\|_s,\ 1 \leq s \leq \infty,\ \ m \in \mathbb{N}, \tag{1.20}$$

$$e_m(f)_s = \inf_{\gamma_m} \inf_{c_k \in \mathbb{C}} \|f(x) - \sum_{k \in \gamma_m} c_k e^{ikx}\|_s,\ \ 1 \leq s \leq \infty,\ \ m \in \mathbb{N}, \tag{1.21}$$

де γ_m — довільні набори з m цілих чисел, а

$$S_{\gamma_m}(f;x) = \sum_{k \in \gamma_m} \hat{f}(k)e^{ikx}.$$

Для довільного класу $F \subset L_s$ розглянемо величини

$$\mathcal{E}_n(F)_s = \sup_{f \in F} \|\rho_n(f;x)\|_s,\ 1 \le s \le \infty, \tag{1.22}$$

$$E_n(F)_s = \sup_{f \in F} E_n(f)_s,\ 1 \le s \le \infty, \tag{1.23}$$

$$e^{\perp}_m(F)_s = \sup_{f \in F} e^{\perp}_m(f)_s,\ 1 \le s \le \infty, \tag{1.24}$$

$$e_m(F)_s = \sup_{f \in F} e_m(f)_s,\ \ 1 \le s \le \infty, \tag{1.25}$$

$$d^{\top}_m(F, L_s) := \inf_{\gamma_m} \sup_{f \in F} \inf_{c_k \in \mathbb{C}} \|f(x) - \sum_{k \in \gamma_m} c_k e^{ikx}\|_s,\ \ 1 \le s \le \infty. \tag{1.26}$$

Величини (1.24) і (1.25) називають відповідно найкращим ортогональним тригонометричним і найкращим m–членним тригонометричним наближеннями класу F в просторі L_s, а величину (1.26) називають тригонометричним поперечником класу F в метриці простору L_s.

Зрозуміло, що коли $f \in C$, то

$$\|\rho_n(f;x)\|_\infty = \|\rho_n(f;x)\|_C, \quad E_n(f)_\infty = E_n(f)_C,$$

$$e^{\perp}_m(f)_C = e^{\perp}_m(f)_\infty, \quad e_m(f)_C = e_m(f)_\infty.$$

Тому, у випадку коли $F = C^{\psi}_{\beta,p}$ норму $\|\cdot\|_\infty$ в (1.22)–(1.26) можна замінити на $\|\cdot\|_C$ і при цьому

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C = \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_\infty, \quad E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C = E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_\infty,$$

$$e^{\perp}_m(C^{\psi}_{\beta,p})_C = e^{\perp}_m(C^{\psi}_{\beta,p})_\infty,\ e_m(C^{\psi}_{\beta,p})_C = e_m(C^{\psi}_{\beta,p})_\infty,\ d^{\top}_m(C^{\psi}_{\beta,p}, C) = d^{\top}_m(C^{\psi}_{\beta,p})_\infty.$$

Для величин (1.22)–(1.26) мають місце очевидні співвідношення

$$e_{2n-1}(F)_s \le d^{\top}_{2n-1}(F, L_s) \le E_n(F)_s \le \mathcal{E}_n(F)_s, \tag{1.27}$$

$$e_{2n-1}(F)_s \le e^{\perp}_{2n-1}(F)_s \le \mathcal{E}_n(F)_s. \tag{1.28}$$

Оцінки величини $\mathcal{E}_n(F)_s$ можуть природньо слугувати за оцінки зверху найкращих наближень, найкращих ортогональних тригонометричних наближень, найкращих m–членних тригонометричних наближень та тригонометричних поперечників вигляду (1.23)–(1.26).

1.2. Оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів $L^{\psi}_{\beta,p}$: огляд результатів і постановка задач дослідження

Одним із найбільш простих і природних апаратів наближення періодичних функцій f є їх частинні суми Фур'є

$$S_{n-1}(f;x) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \hat{f}(k)e^{ikx},$$

де $\hat{f}(k)$ — коефіцієнти Фур'є, які означаються формулою (В.1).

Дослідження швидкості наближення періодичних функцій частинними сумами Фур'є бере початок з робіт А. Лебега [39, 40] 1909–1910 років, який, зокрема, встановив [40] порядкову рівність

$$\mathcal{E}_n(W^1_\infty)_C \asymp \frac{\ln n}{n}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Асимптотична поведінка величин

$$\mathcal{E}_n(F)_s = \sup_{f\in F} \|\rho_n(f;x)\|_s,\ 1 \le s \le \infty,\ n \in \mathbb{N},$$

на деяких важливих класах періодичних функцій $F \subset L_s$ досліджувалась у роботах А. Лебега [39, 40], Л. Фейєра [131], Ш. Валле Пуссена [14,15], А.М. Колмогорова [34], С.М. Нікольського [47,48], Б. Надя [46], В.Т. Пінкевича [50], М.П. Корнійчука [37], С.Б. Стєчкіна [101], О.І. Степанця [86–96], В.П. Моторного [45], О.П. Тімана [116, 117], М.П. Тімана [118, 119], І.Г. Соколова [84], С.О. Теляковського [105–107], В.Ф. Бабенка [2], О.К. Кушпеля [91], О.В. Єфімова [26–27], П.В. Задерея [23], С.О. Пічугова [2], В.І. Рукасова [97], А.С. Сердюка [18, 65–70], В.В. Савчука [44], С.О. Чайченка [97, 132], В.С. Романюка [62], Р.М. Тригуба [120], В.О. Леонтьєва [41, 42] та багатьох інших математиків.

У 1935 році А.М. Колмогоров [34] встановив асимптотичні рівності величин $\mathcal{E}_n(W^r_\infty)_C$, $r \in \mathbb{N}$.

Теорема 1.1 (А.М. Колмогоров). *Нехай $r \in \mathbb{N}$. Тоді має місце асимп-*

тотична при $n \to \infty$ рівність

$$\mathcal{E}_n(W^r_\infty)_C = \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r} + O\Big(\frac{1}{n^r}\Big), \tag{1.29}$$

де O — величина рівномірно обмежена відносно n.

В.Т. Пінкевич [50] показав, що рівність (1.29) виконується для класів Вейля $W^r_{r,\infty}$ при довільних $r > 0$. С.О. Теляковський [105] знайшов асимптотичні рівності величин $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,\infty})_C$ при довільних $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1.2 (С.О. Теляковський). *Нехай $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді має місце асимптотична при $n \to \infty$ рівність*

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,\infty})_C = \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r} + O\Big(\frac{1}{n^r}\Big). \tag{1.30}$$

Завдяки дослідженням С.М. Нікольського [48, с. 248] було встановлено аналогічні рівності і для величин $\mathcal{E}_n(W^r_{r,1})_1$, $r > 0$, а завдяки роботам [48, 103, 106] знайдено асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_1$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Що стосується порядкових оцінок величин $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_s$, то вони відомі при всіх допустимих значеннях параметрів r, p, s і β, а саме при $r > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right)_+$, $1 \le p, s \le \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$ (див., наприклад, [115, с. 47–49]).

Теорема 1.3 *Нехай $1 \le p, s \le \infty$, $r > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right)_+$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді мають місце порядкові рівності*

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_s \asymp \begin{cases} n^{-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{s})_+}, & 1 \le p < s \le \infty \vee 1 < p = s < \infty, \\ & 1 \le s < p \le \infty, \\ n^{-r}\ln n, & p = s = 1,\ p = s = \infty. \end{cases} \tag{1.31}$$

В багатьох важливих випадках знайдено точні значення величин $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_s$. Зокрема, відомі точні значення величин $\mathcal{E}_n(W^r_2)_2$, $r, n \in \mathbb{N}$ (див., наприклад, [36, с. 125–127]), а також величин $\mathcal{E}_n(W^r_2)_C$, $r, n \in \mathbb{N}$ (див. роботу В.Ф. Бабенка та С.О. Пічугова [2, с. 684,686]).

Постановка задачі про знаходження точних значень або визначення асимптотичної при $n \to \infty$ поведінки величин найкращих наближень належить А. Лебегу [39, 40], а перші результати по обчисленню точних значень найкращих рівномірних наближень тригонометричними поліномами порядку не вище ніж $n-1$ на класах диференційовних функцій $W^r_\infty, r \in \mathbb{N}$, були одержані Бором [12] ($r=1$) та Ж. Фаваром [121] ($r \in \mathbb{N}$).

Теорема 1.4 (Ж. Фавар). *Нехай $r \in \mathbb{N}$. Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$ справедливі рівності*

$$E_n(W^r_\infty)_C = \frac{K_r}{n^r},$$

де

$$K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j(r-1)}}{(2j+1)^{r+1}}$$

— константи Фавара.

Дослідження, пов'язані з встановленням точних значень найкращих наближень класів спряжених функцій $\overline{W}^r_\infty$, $r \in \mathbb{N}$, були продовжені в роботах Ж. Фавара [122], Н.І. Ахієзера та М.Г. Крейна [1], Б. Надя [46].

У 1946 році С.М. Нікольський [48], застосовуючи теореми двоїстості, встановив точні значення найкращих наближень класів W^r_1 тригонометричними поліномами порядку $n-1$ в метриці L_1, показавши, що

$$E_n(W^r_1)_{L_1} = E_n(W^r_\infty)_C = \frac{K_r}{n^r},\ r \in \mathbb{N},\ n = 1, 2, \dots . \tag{1.32}$$

Відшуканням точних значень величин $E_n(W^r_{\beta,\infty})_C$ і $E_n(W^r_{\beta,1})_1$ при довільних $r > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$ займалися В.К. Дзядик [20–22], С.Б. Стєчкін [101, 102] та Сунь Юн-шен [104]. Повністю задача про знаходження точних значень величин $E_n(W^r_{\beta,\infty})_C$ і $E_n(W^r_{\beta,1})_1$ була розв'язана В.К. Дзядиком [22].

Теорема 1.5 (В.К. Дзядик). *Нехай $r > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Нехай, далі, θ — величина, яка приймає наступні значення:*

а) $\theta = 1$, якщо $r \in (0,1]$ і $\beta \in [r, 2r]$;

б) $\theta \in (0,1]$ і θ — корінь рівняння

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\cos\left((2j+1)\theta\pi - \frac{\pi\beta}{2}\right)}{(2j+1)^r} = 0,$$

якщо $r \in (0,1]$ і $\beta \in [0,2] \setminus [r, 2r]$ або ж $r > 1$ і $\beta \in \mathbb{R}$.

Тоді при всіх $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$ справедливі рівності

$$E_n(W^r_{\beta,\infty})_C = E_n(W^r_{\beta,1})_1 = \frac{1}{\pi} E_n(B^r_\beta)_1 = \frac{M_{r,\beta}}{n^r},$$

де

$$M_{r,\beta} = \frac{4}{\pi} \Big| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2j+1)\theta\pi - \frac{\pi\beta}{2}\right)}{(2j+1)^{r+1}} \Big|,$$

а ядро B^r_β означається рівністю (1.9).

Зауважимо, що при $r \in \mathbb{N}$ і $\beta = r$ константи $M_{r,\beta}$ збігаються з константами Фавара

$$M_{r,r} = K_r, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Для класів Вейля–Надя $W^r_{\beta,p}$ точні порядкові оцінки величин $E_n(W^r_{\beta,p})_s$ відомі при всіх допустимих значеннях параметрів r, p, s і β (див., наприклад, [115, с. 47–49]).

Теорема 1.6 *Нехай $1 \le p, s \le \infty$, $r > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right)_+$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді мають місце порядкові рівності*

$$E_n(W^r_{\beta,p})_s \asymp n^{-r + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right)_+}. \tag{1.33}$$

Зі співвідношень (1.31) і (1.33) бачимо, що при $r > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right)_+$ у випадках коли $1 \le p < s \le \infty$ або $1 < p = s < \infty$ або $1 \le s < p \le \infty$ справедлива порядкова оцінка

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_s \asymp E_n(W^r_{\beta,p})_s \asymp n^{-r + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right)_+}.$$

Це означає, що в цих випадках суми Фур'є забезпечують порядок найкращих наближень класів Вейля–Надя в L_s–метриках.

При $p = s = 2$ для величин $E_n(W^r_{\beta,p})_s$ і $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_s$ мають місце рівності (див., наприклад, [96, с. 18])

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,2})_2 = E_n(W^r_{\beta,2})_2 = n^{-r}, \ r > 0, \ \beta \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}. \tag{1.34}$$

Дослідженню слабкої та сильної асимптотик наближень сумами Фур'є та найкращих наближень на класах $L^\psi_{\beta,p}$ в метриках просторів L_s при різних співвідношеннях між параметрами p та s, в залежності від порядку спадання до нуля послідовності ψ, присвячено роботи О.І. Степанця [86–96], О.К. Кушпеля [91], С.О. Теляковського [107], Р.М. Тригуба [120], А.С. Сердюка [18, 64–70], І.В. Соколенка [69, 70], В.С. Романюка [62], У.З. Грабової [18] та інших. Наведемо деякі важливі результати з зазначених робіт.

Теорема 1.7 (О.І. Степанець, О.К. Кушпель). *Нехай* $1 < s \leq p < \infty$, *послідовність* $\psi(k)$ *не зростає і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді для довільного* $n \in \mathbb{N}$

$$C_{p,s}^{(1)}\psi(n) \leq E_n(L_{\beta,p}^{\psi})_s \leq \mathcal{E}(L_{\beta,p}^{\psi})_s \leq C_{p,s}^{(2)}\psi(n), \tag{1.35}$$

де $C_{p,s}^{(1)}$ *і* $C_{p,s}^{(2)}$ *— додатні величини, що можуть залежати тільки від* p *і* s.

Нехай, як і раніше, B — множина незростаючих додатних функцій $\psi(t)$, $t \geq 1$, для кожної з яких можна вказати додатну сталу K таку, що $\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \leq K, \quad t \geq 1$.

Теорема 1.8 (О.І. Степанець, О.К. Кушпель). *Нехай* $1 < p < s < \infty$, $\psi \in B$, *послідовність* $\psi(k)k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{s}}$ *не зростає і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді для довільного* $n \in \mathbb{N}$

$$C_{p,s}^{(3)}\psi(n)n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{s}} \leq E_n(L_{\beta,p}^{\psi})_s \leq \mathcal{E}(L_{\beta,p}^{\psi})_s \leq C_{p,s}^{(4)}\psi(n)n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{s}}, \tag{1.36}$$

де $C_{p,s}^{(3)}$ *і* $C_{p,s}^{(4)}$ *— додатні величини, що можуть залежати тільки від* p *і* s.

Позначимо через Θ_p, $1 \leq p < \infty$, — множину незростаючих функцій $\psi(t)$, для яких існує стала $\alpha > \frac{1}{p}$ така, що добуток $t^{\alpha}\psi(t)$ майже спадає (тобто знайдеться додатна стала K така, що $t_1^{\alpha}\psi(t_1) \leq Kt_2^{\alpha}\psi(t_2)$ для будь–яких $t_1 > t_2 \geq 1$).

Теорема 1.9 (У.З. Грабова, А.С. Сердюк). *Нехай* $1 < s \leq \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in B \cap \Theta_{s'}, \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, *і виконується одна з умов*

$$\Delta^2\big(1/\psi(k)\big) \geq 0, \quad k \in \mathbb{N} \tag{1.37}$$

або

$$\Delta^2\big(1/\psi(k)\big) \leq 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1.38}$$

де $\Delta^2\big(1/\psi(k)\big) := \frac{1}{\psi(k)} - \frac{2}{\psi(k+1)} + \frac{1}{\psi(k+2)}$. *Тоді існують додатні величини* $C^{(1)}$ *і* $C^{(2)}$, *що можуть залежати лише від* ψ *і* s, *такі, що для довільних* $n \in \mathbb{N}$

$$C^{(1)}\psi(n)n^{\frac{1}{s'}} \leq E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \leq \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \leq C^{(2)}\psi(n)n^{\frac{1}{s'}}. \tag{1.39}$$

Теорема 1.10 (У.З. Грабова, А.С. Сердюк). *Нехай* $1 < p < \infty$, $\psi \in B \cap \Theta_p$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді існують додатні величини* $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, *що можуть залежати лише від* ψ *і* p, *такі, що для довільних* $n \in \mathbb{N}$

$$C^{(3)}\psi(n)n^{\frac{1}{p}} \leq E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \leq \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \leq C^{(4)}\psi(n)n^{\frac{1}{p}}. \tag{1.40}$$

Зауважимо, що умова $\psi \in \Theta_p$ є достатньою, але не необхідою умовою того, щоб згортки $\Big(\Psi_\beta * \varphi\Big)(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x-t)\varphi(t)dt$, де $\varphi \in B_p$, $\varphi \perp 1$, були неперервними функціями. Існують приклади функцій ψ таких, що $\psi \notin \Theta_p$, для яких має місце включення $\Psi_\beta * \varphi \subset C$. Тому природньо постала задача про встановлення порядкових оцінок величин $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$ і $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$, $1 < p < \infty$, для функцій ψ таких, що $\psi \notin \Theta_p$. При цьому важливо з'ясувати чи зберігатимуться порядкові співвідношення

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \psi(n)n^{\frac{1}{p}}$$

за умови $\psi \notin \Theta_p$.

При $1 \leq s < \infty$ умова $\psi \in \Theta_{s'}$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, забезпечує вкладення $L^{\psi}_{\beta,1} \subset L_s$. Проте існують приклади функцій $\psi \notin \Theta_{s'}$ для яких теж справедливе вкладення $L^{\psi}_{\beta,1} \subset L_s$. Тож виникла задача про встановлення точних порядкових оцінок величин $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$ і $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$ за умови $L^{\psi}_{\beta,1} \subset L_s$ для функцій ψ таких, що $\psi \notin \Theta_{s'}$. Розв'язанню вказаних задач присвячено підрозділи 2.1 та 2.3 дисертаційного дослідження.

Теореми 1.6–1.10 охоплюють випадок, коли $\psi(t)$ спадає до нуля не швидше за степеневу функцію. В той же час проводились дослідження по знаходженню оцінок величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ та $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ у випадку, коли $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$ (в цьому випадку функція $\psi(t)$ спадає до нуля швидше за довільну степеневу функцію). Зокрема, порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$

та $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ при $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, $1 \le p, s \le \infty$, встановлені О.І. Степанцем в [92, с. 226] (див. також [96, с. 48]), а при $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$ — О.І. Степанцем в [92, с. 227] (див. також [96, с. 60]) та В.С. Романюком [62].

Теорема 1.11 (О.І. Степанець). *Нехай* $1 \le p, s \le \infty$, $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді для довільного* $n \in \mathbb{N}$

$$C^{(5)}_{p,s}\psi(n) \le E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s \le \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s \le C^{(6)}_{p,s}\psi(n), \tag{1.41}$$

де $C^{(5)}_{p,s}$, $C^{(6)}_{p,s}$ *— додатні сталі, що не залежать від* n.

Теорема 1.12 (О.І. Степанець). *Нехай* $1 < p, s < \infty$, $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді для довільного* $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{gathered} C^{(7)}_{p,s}\psi(n)(\eta(n)-n)^{(p^{-1}-s^{-1})_+} \le \\ \le E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s \le \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s \le \\ \le C^{(8)}_{p,s}\psi(n)(\eta(n)-n)^{(p^{-1}-s^{-1})_+}, \end{gathered} \tag{1.42}$$

де $C^{(7)}_{p,s}$, $C^{(8)}_{p,s}$ *— додатні сталі, що залежать тільки від* p *і* s.

Теорема 1.13 (В.С. Романюк). *Нехай* $1 < p < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$ *і, починаючи з деякого* $t_0 \ge 1$, *виконується нерівність* $\eta(t) - t > K > 1$. *Тоді*

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\psi}_{\beta,p}\big)_C \asymp \psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}}.$$

В ряді випадків для величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ знайдено асимптотичні рівності (див., наприклад, роботи О.І. Степанця [92, с. 121, 153], А.С. Сердюка [67], Р.М. Тригуба [120]).

Теорема 1.14 (О.І. Степанець). *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}^+_\infty$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді при* $n \to \infty$ *мають місце рівності*

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\psi}_{\beta,\infty}\big)_C = \frac{4\psi(n)}{\pi^2}\ln^+ \pi(\eta(n)-n) + O(1)\psi(n), \tag{1.43}$$

$$\mathcal{E}_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_1 = \frac{4\psi(n)}{\pi^2}\ln^+ \pi(\eta(n)-n) + O(1)\psi(n), \tag{1.44}$$

де $\ln^+ t = \max\{0,\ \ln t\}$, $O(1)$ *– величина рівномірно обмежена відносно* n *і* β.

Асимптотичні рівності для величин найкращих наближень $E_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C$ при $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$ знайдено А.С. Сердюком [66].

При деяких значеннях параметрів p і s для величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ та $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ встановлено точні значення (див., наприклад, роботи А.В. Бушанського [13], М.Г. Крейна [38], Б. Надя [46], С.М. Нікольського [48], В.Т. Шевалдіна [133], О.І. Степанця, О.К. Кушпеля [91], А.С. Сердюка [64, 69, 70] та І.В. Соколенка [69, 70]).

Теорема 1.15 (О.І. Степанець, О.К. Кушпель). *Нехай ψ — довільна незростаюча послідовність і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,2})_2 = E_n(L^{\psi}_{\beta,2})_2 = \psi(n).$$

Теорема 1.16 (А.С. Сердюк, І.В. Соколенко). *Нехай $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^2(k) < \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,2})_C = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^2(k)\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^2(k)\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

У випадку коли $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$ задача про знаходження точних порядкових оцінок величин $E_n\big(C^{\psi}_{\beta,p}\big)_C$, $1 \le p < \infty$, $\mathcal{E}_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_s$ і $E_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_s$, $1 < s \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, розв'язана не були. Розв'язанню вказаної задачі присвячено підрозділи 3.1 та 3.2 дисертаційного дослідження.

1.3. Порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів згорток періодичних функцій: огляд результатів і постановка задач дослідження

Порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень для різних функціональних компактів вивчались в роботах Е.С. Белінського [7–10], В.М. Темлякова [111], О.І. Степанця [93–94, 96], А.С. Романюка [54, 56, 59, 61], В.С. Романюка [63], Н.М. Консевич [35], О.С. Федоренка [125, 127], А.С. Стасюка [85], А.Л. Шидліча [134, 135], В.В. Шкапи [136, 137] та інших.

Апроксимативні характеристики $e^{\perp}_m(F)_s$ виду (1.24) вперше були розглянуті Е.С. Белінським [7] у 1988 році при дослідженні класів $W^r_{\beta,p}$.

З робіт Е.С. Белінського [7], Б.С. Кашина і В.М. Темлякова (див. теорему 2.1 в [111] і наслідок 1 в [33]) та А.С. Романюка [54, 56, 59, 61] випливають порядкові оцінки для величин найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $W^r_{\beta,p}$ в метриках просторів L_s, при різних (але не при всіх можливих) значеннях параметрів r, p, s і β.

Теорема 1.17. (Е.С. Белінський, Б.С. Кашин, В.М. Темляков, А.С. Романюк) *Нехай* $r > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right)_+$ *і*

$\beta \in \mathbb{R}$, $1 < p, s < \infty \vee 1 < p < \infty, s = \infty \vee p = 1, 1 < s < \infty$,

або

$\beta = 2l - 1,\ l \in \mathbb{Z}$, $p = 1$, $s = \infty$.

Тоді

$$e^{\perp}_m(W^r_{\beta,p})_s \asymp m^{-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{s})_+}.$$

Зауважимо, що теорема 1.17 містить точні порядки величин $e^{\perp}_m(W^r_{\beta,1})_C$ лише у випадку $\beta = 2l - 1$, $l \in \mathbb{Z}$ (див. [59]). При всіх інших значеннях $\beta \in \mathbb{R}$ питання про точні порядки оцінки цих величин залишалось відкритим. Розв'язання цієї задачі міститься в підрозділі 2.4 дисертації.

В роботах [125] і [127] О.С. Федоренко встановив порядкові оцінки величин $e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ для всіх $1 < p, s < \infty$ за умови $\psi \in B$.

Теорема 1.18 (О.С. Федоренко). *Нехай* $1 < p, s < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in B$ *і* *послідовність $\psi(k)k^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{s})_+}$ не зростає. Тоді мають місце співвідношення*

$$e_m^{\perp}(L_{\beta,p}^{\psi})_s \asymp \psi(m)m^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{s})_+}.$$

Випадки $p=1$, $1<s<\infty$ і $1<p<\infty$, $s=\infty$ розглянуто в роботах В.В. Шкапи [136, 137]. Нехай, Θ_{α}^{*}, $\alpha \geq 0$, — множина незростаючих функцій $\psi(t)$, для яких існує $\varepsilon>0$ таке, що послідовність $\psi(k)k^{\alpha+\varepsilon}$ не зростає.

Теорема 1.19 (В.В. Шкапа). *Нехай $1<p<\infty$, $\psi \in B \cap \Theta_{\frac{1}{p}}^{*}$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді*

$$e_m^{\perp}(C_{\beta,p}^{\psi})_C \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{p}}. \tag{1.45}$$

Теорема 1.20 (В.В. Шкапа). *Нехай $1<s<\infty$, $\psi \in B \cap \Theta_{\frac{s}{s-1}}^{*}$, $\beta \in \mathbb{R}$ і виконується одна з умов (1.37) або (1.38). Тоді*

$$e_m^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_s \asymp \psi(m)m^{1-\frac{1}{s}}. \tag{1.46}$$

В зв'язку з теоремами 1.19 і 1.20 зазначимо наступне: існують приклади функцій ψ, таких що $\psi \notin \Theta_{\frac{1}{p}}^{*}$ і для яких має місце включення $\Big(\Psi_{\beta} * \varphi\Big)(x) \subset C$, а також таких, що $\psi \notin \Theta_{\frac{s}{s-1}}^{*}$ і $L_{\beta,1}^{\psi} \subset L_s$. Тому природньо постали задачі про встановлення точних порядкових оцінок величин $e_n^{\perp}(C_{\beta,p}^{\psi})_C$, $1<p<\infty$, для функцій ψ таких, що $\psi \notin \Theta_{\frac{1}{p}}^{*}$, а також про встановлення точних порядкових оцінок величин $e_n^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_s$, $1<s<\infty$, для функцій ψ таких, що $\psi \notin \Theta_{\frac{s}{s-1}}^{*}$. Важливою є також задача про точні порядки величин $e_n^{\perp}(C_{\beta,1}^{\psi})_C$. Розв'язанню окреслених задач присвячено підрозділи 2.2 та 2.4 дисертації.

Коли класи $C_{\beta,p}^{\psi}$ є класами нескінченно диференційовних функцій порядкові оцінки величин $e_m^{\perp}(C_{\beta,p}^{\psi})_s$ знайдені лише в окремих випадках (див. роботи О.І. Степанця [93–94, 96], А.Л. Шидліча [134, 135] та В.С. Романюка [63]).

Зокрема з результатів А.Л. Шидліча [135, с.325] випливають порядкові оцінки величин $e_m^{\perp}(L_{\beta,p}^{\psi})_s$ при $p=2$ і $1 \leq s < \infty$.

Теорема 1.21 (А.Л. Шидліч). *Нехай* $1 \leq s < \infty$, $\psi \in \mathfrak{M}$, $\psi(t)/\psi'(t) \downarrow 0$, $\psi'(t) := \psi'(t+0)$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$e_m^{\perp}(L_{\beta,2}^{\psi})_s \asymp \psi\Big(\Big[\frac{m+1}{2}\Big]\Big),$$

де $[\alpha]$ — *ціла частина дійсного числа* α.

В загальному випадку задача про знаходження точних порядкових оцінок величин $e_n^{\perp}\big(C_{\beta,p}^{\psi}\big)_s$, $1 \leq p, s \leq \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, при $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}'$ розв'язана не була. Її розв'язанню присвячено підрозділ 3.3 дисертаційного дослідження.

1.4. Порядкові оцінки найкращих m–членних тригонометричних наближень класів згорток періодичних функцій: огляд результатів і постановка задач дослідження

Величини найкращих m–членних наближень $e_m(f)_s$ виду (1.21) були введені С.Б. Стєчкіним [101] при $s = 2$ з метою встановлення критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів. Перші оцінки величин $e_m(f)_\infty$ для деяких індивідуальних функцій встановлені Р.С. Ісмагіловим [28]. Згодом почали досліджувати найкращі m–членні тригонометричні наближення класів функцій, які володіють певними диференціально-різницевими чи гладкісними властивостями.

Історія дослідження найкращих m–членних тригонометричних наближень пов'язана з іменами таких математиків, як К.І. Осколков [49], Б.С. Кашин [29–32], В.М. Темляков [108–114], Е.С. Белінський [3–11], Г.І. Маковоз [43], Е.М. Галєєв [16–17], О.І. Степанець [93, 94, 96], А.С. Романюк [51–61], А.Л. Шидліч [134, 135] та багато інших.

Порядкові оцінки величин $e_m(F)_s$ на класах Вейля–Надя $W^r_{\beta,p}$ досліджувались в роботах Б.С. Кашина і В.М. Темлякова [33], Е.С. Белінського [3, 4, 6, 7, 11], А.С. Романюка [52, 55, 61].

В роботах Е.С. Белінського [3, 4, 6] знайдено порядкові оцінки величин $e_m(W^r_{\beta,p})_s$ при $1 < p \le 2 < s \le \infty$.

Теорема 1.22 (Е.С. Белінський). *Нехай* $1 < p \le 2 < s \le \infty$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$e_m(W^r_{\beta,p})_s \asymp \begin{cases} m^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & r > \frac{1}{p}, \\ m^{-\frac{s}{2}(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{s})}, & \frac{1}{p} > r > \frac{1}{p} - \frac{1}{s}. \end{cases} \tag{1.47}$$

В [7] Е.С. Белінський встановив порядкові оцінки величин $e_m(W^r_{\beta,p})_s$ у випадку $1 < p < s < 2$ і $\frac{1}{p} - \frac{1}{s} < r < 2\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\Big)$.

Теорема 1.23 (Е.С. Белінський). *Нехай* $1 < p < s < 2$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{s} < r < 2\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\Big)$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$e_m(W^r_{\beta,p})_s \asymp m^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{s}}.$$

В [52] А.С. Романюк встановив порядкові оцінки величин $e_m(W^r_{\beta,p})_s$ при $2 \le p < s < \infty$.

Теорема 1.24 (А.С. Романюк). *Нехай* $2 \le p < s < \infty$, $r > \frac{1}{2}$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$e_m(W^r_{\beta,p})_s \asymp m^{-r}. \tag{1.48}$$

В [33, с.74] Б.С. Кашин і В.М. Темляков знайшли також точні за порядком оцінки знизу величин $e_m(W^r_{\beta,p})_s$ при $1 < s \le p < \infty$.

Теорема 1.25 (Б.С. Кашин, В.М. Темляков). *Нехай* $1 < s \le p < \infty$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $m \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$e_m(W^r_{\beta,p})_s \asymp m^{-r}.$$

В роботах Е.С. Белінського [3] та А.С. Романюка [55] досліджувались також точні порядки величин $e_m(W^r_{\beta,p})_s$ при $p = 1$, $1 < s < \infty$.

В [11] Е.С. Белінський знайшов порядкові оцінки для величин $e_m(W^r_{\beta,p})_C$ при $r > \frac{1}{p}$.

Теорема 1.26 (Е.С. Белінський.) *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $r > \frac{1}{p}$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$e_m(W^r_{\beta,p})_C \asymp m^{-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+}.$$

Сформулюємо ще декілька результатів щодо величин $e_m(L^\psi_{\beta,p})_s$ (див. роботи [123–127]). Нехай Θ^{**}_α, $\alpha \ge 0$, — множина незростаючих функцій $\psi(t)$, для яких послідовність $\psi(k)k^\alpha$ не зростає, а Θ^{***}_α, $\alpha \ge 0$, — множина функцій $\psi(t)$, для яких існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(k)k^{\alpha-\varepsilon}$ не спадає.

Теорема 1.27 (О.С. Федоренко.) *Нехай* $1 < p, s < \infty$, $\psi \in B$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_s \asymp \begin{cases} \psi(m^{\frac{s}{2}})m^{\frac{s}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{s})}, & 1<p\le 2<s<\infty, \\ & \psi\in B\cap\Theta^{**}_{\frac{1}{p}-\frac{1}{s}}\cap\Theta^{***}_{\frac{1}{p}}, \\ \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1<p\le 2<s<\infty,\ \psi\in\Theta^{*}_{\frac{1}{p}}, \\ \psi(m), & 2\le p\le s<\infty,\ \psi\in\Theta^{*}_{\frac{1}{2}}, \\ \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{s}}, & 1<p<s\le 2,\ \psi\in\Theta^{**}_{\frac{1}{p}-\frac{1}{s}}, \\ \psi(m)m^{\frac{1}{2}}, & p=1,\ 2<s<\infty,\ \ \psi\in\Theta^{*}_{1}, \\ \psi(m)m^{\frac{1}{s}}, & p=1,\ 1<s\le 2,\ \ \psi\in\Theta^{**}_{1}, \\ \psi(m), & 2\le s\le p<\infty. \end{cases}$$

Із робіт [128, 129, 138] випливає наступне твердження.

Теорема 1.28 (А.С. Федоренко, О.С. Федоренко, В.В. Шкапа). *Нехай* $1<p\le\infty$, $\psi\in B\cap\Theta^{*}_{\frac{1}{p}}$ *і* $\beta\in\mathbb{R}$. *Тоді має місце співвідношення*

$$e_m(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \psi(m)m^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+}.$$

У випадку, коли класи $C^{\psi}_{\beta,p}$ є класами нескінченно диференційовних функцій оцінки величин $e^{\perp}_m(C^{\psi}_{\beta,p})_s$ відомі лише в окремих випадках (див. роботи О.І. Степанця [93, 94, 96], та А.Л. Шидліча [135].

При $p=s=2$ О.І. Степанцем [96, с. 317] знайдені точні значення величин $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_s$.

Теорема 1.29 (О.І. Степанець). *Нехай послідовність* $\psi(k)$ *монотонно прямує до нуля і* $\beta\in\mathbb{R}$. *Тоді*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,2})_2=\sup_{l>m}(l-m)\Big(\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{\psi^2(k)}\Big)^{-1}=(l^*-m)\Big(\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{\psi^2(k)}\Big)^{-1},$$

де l^* *— деяке натуральне число.*

В загальному випадку задача про знаходження порядкових оцінок найкращих m–членних тригонометричних наближень для класів $C^{\psi}_{\beta,p}$ в метриках просторів L_s за умови $\psi\in\mathfrak{M}'_{\infty}$, $1\le p,s\le\infty$ і $\beta\in\mathbb{R}$ розв'язана не була. Розв'язанню вказаної задачі присвячено підрозділ 3.3 дисертації.

РОЗДІЛ 2

Апроксимативні характеристики класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості

В даному розділі встановлено порядкові оцінки для наближень сумами Фур'є, найкращих наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$ в рівномірній метриці у випадку, коли добуток $\psi(t)t^{\frac{1}{p}}$ спадає до нуля не швидше за деяку степеневу функцію. В L_s–метриках аналогічні оцінки встановлено для наближень сумами Фур'є, найкращих наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,1}$.

2.1. Порядкові оцінки найкращих рівномірних наближень та наближень сумами Фур'є класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості

Для будь–якої функції $\psi \in \mathfrak{M}$ через $\underline{\alpha}_n(\psi)$ і $\overline{\alpha}_n(\psi)$, $n \in \mathbb{N}$, позначимо величини

$$\underline{\alpha}_n(\psi) := \inf_{t \geq n} \alpha(\psi; t), \tag{2.1}$$

$$\overline{\alpha}_n(\psi) := \sup_{t \geq n} \alpha(\psi; t), \tag{2.2}$$

де характеристика $\alpha(\psi; t)$ означається формулою (1.17).

Через $\xi(s)$, $1 < s < \infty$, будемо позначати наступну величину:

$$\xi(s) := \max\left\{4\left(\frac{\pi}{s-1}\right)^{\frac{1}{s}}, \;\; 14(8\pi)^{\frac{1}{s}} s\right\}. \tag{2.3}$$

В прийнятих позначеннях має місце теорема.

Теорема 2.1. *Нехай* $1 < p < \infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *і функція* $g_p(t) = \psi(t) t^{\frac{1}{p}}$ *така, що*

$$g_p \in \mathfrak{M}_0.$$

Тоді для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $\beta \in \mathbb{R}$ мають місце співвідношення

$$K^{(1)}_{\psi,p}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}} \le \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \le K^{(2)}_{\psi,p}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}}, \qquad (2.4)$$

в яких

$$K^{(1)}_{\psi,p} = \frac{1}{\xi(p)}\Big(\frac{\underline{\alpha}_1(g_p)}{p' + \underline{\alpha}_1(g_p)}\Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad (2.5)$$

$$K^{(2)}_{\psi,p} = \frac{1}{\pi}\xi(p')\Big(1 + \frac{p'}{\underline{\alpha}_1(g_p)}\Big)^{\frac{1}{p'}}. \qquad (2.6)$$

Доведення теореми 2.1. Згідно з інтегральним зображенням (1.2), за виконання умов теореми, для довільної функції $f \in C^{\psi}_{\beta,p}$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ справедлива рівність

$$f(x) - S_{n-1}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_{\beta,n}(x-t)f^{\psi}_{\beta}(t)dt, \quad f^{\psi}_{\beta} \in B_p, \qquad (2.7)$$

де

$$\Psi_{\beta,n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos\big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\big), \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (2.8)$$

Далі буде потрібним таке твердження (див., наприклад, [95, с. 137–138]).

Твердження 2.1. *Якщо $h \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, $g \in L_{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, то згортка*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi}h(x-t)g(t)dt$$

неперервна на всій осі, причому

$$\|f\|_C \le \frac{1}{\pi}\|h\|_p\|g\|_{p'}. \qquad (2.9)$$

З рівності (2.7) і твердження 2.1 одержуємо нерівності

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \le \frac{1}{\pi}\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,p}}\big\|\Psi_{\beta,n}\big\|_{p'}\|f^{\psi}_{\beta}\|_p \le \frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}\big\|_{p'}, \ 1 < p < \infty, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \qquad (2.10)$$

Для оцінки величини $\big\|\Psi_{\beta,n}\big\|_{p'}$ буде корисна наступна лема.

Лема 2.1. *Нехай* $1 < s < \infty$ *і* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *монотонно незростаюча послідовність додатних чисел така, що* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^s k^{s-2} < \infty$. *Тоді для* L_s–*норми функції*

$$h_{\gamma,n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cos(kx+\gamma),\ \gamma \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

має місце нерівність

$$\|h_{\gamma,n}(x)\|_s \leq \xi(s)\Big(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^s k^{s-2} + a_n^s n^{s-1}\Big)^{\frac{1}{s}}, \tag{2.11}$$

де $\xi(s)$ *означається формулою (2.3).*

Доведення леми 2.1. Для довільних $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ і $1 < s < \infty$ маємо

$$\|h_{\gamma,n}(x)\|_s^s = \int_{-\pi}^{\pi} |h_{\gamma,n}(x)|^s dx = \int\limits_{\frac{\pi}{2n} \leq |x| \leq \pi} |h_{\gamma,n}(x)|^s dx + \int\limits_{|x| \leq \frac{\pi}{2n}} |h_{\gamma,n}(x)|^s dx =$$
$$= J_{s,n}^{(1)} + J_{s,n}^{(2)}, \tag{2.12}$$

де

$$J_{s,n}^{(1)} := \int\limits_{\frac{\pi}{2n} \leq |x| \leq \pi} |h_{\gamma,n}(x)|^s dx,$$
$$J_{s,n}^{(2)} := \int\limits_{|x| \leq \frac{\pi}{2n}} |h_{\gamma,n}(x)|^s dx.$$

Оцінимо зверху величину $J_{s,n}^{(1)}$. Згідно з перетворенням Абеля для довільних $M, N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=M}^{N} a_k \cos(kx+\gamma) =$$
$$= \sum_{k=M}^{N-1} \Delta a_k \sum_{j=0}^{k} \cos(jx+\gamma) - a_M \sum_{j=0}^{M-1} \cos(jx+\gamma) + a_N \sum_{j=0}^{N} \cos(jx+\gamma), \tag{2.13}$$

де $\Delta a_k := a_k - a_{k+1}$.

Використовуючи формулу

$$\sum_{j=0}^{k} \cos(jx+\gamma) = \cos\Big(\frac{k}{2}x+\gamma\Big) \sin\frac{(k+1)x}{2} \operatorname{cosec}\frac{x}{2} \tag{2.14}$$

(див., наприклад, [19, с. 43]) та очевидну нерівність

$$\sin\frac{|x|}{2}\ge\frac{|x|}{\pi},\ \ 0\le|x|\le\pi,$$

отримаємо

$$\Big|\sum_{j=0}^{k}\cos(jx+\gamma)\Big|\le\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}\le\frac{\pi}{|x|},\ \ 0<|x|\le\pi. \tag{2.15}$$

З умов леми 2.1 випливає, що $a_k\to 0$ при $k\to\infty$. Тому з (2.13), (2.15) і того, що внаслідок монотонності послідовності a_k $\Delta a_k\ge 0$, одержуємо

$$\Big|\sum_{k=M}^{\infty}a_k\cos(kx+\gamma)\Big|\le\frac{\pi}{|x|}\sum_{k=M}^{\infty}\Delta a_k+a_M\frac{\pi}{|x|}=a_M\frac{2\pi}{|x|},\ 0<|x|\le\pi,\ M\in\mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Використавши нерівність (2.16) при $M=n$, запишемо оцінку

$$J_{s,n}^{(1)}\le(2\pi a_n)^s\int\limits_{\frac{\pi}{2n}\le|x|\le\pi}\frac{1}{|x|^s}dx<\frac{4^s\pi}{s-1}a_n^s n^{s-1}. \tag{2.17}$$

Знайдемо оцінку зверху величини $J_{s,n}^{(2)}$. Для довільних $l,n\in\mathbb{N},l>n$,

$$|h_{\gamma,n}(x)|\le\sum_{k=n}^{l-1}a_k+\Big|\sum_{k=l}^{\infty}a_k\cos(kx+\gamma)\Big|. \tag{2.18}$$

Покладемо

$$A_{n,l}:=\sum_{k=n}^{l-1}a_k. \tag{2.19}$$

Беручи до уваги формули (2.18)–(2.19), та використавши нерівність (2.16) при $M=l$, отримаємо

$$|h_{\gamma,n}(x)|\le A_{n,l}+a_l\frac{2\pi}{|x|},\ \ 0<|x|\le\pi. \tag{2.20}$$

Для довільних $l\ge 2n$, $\frac{\pi}{l+1}<|x|\le\frac{\pi}{l}$, $l,n\in\mathbb{N}$, в силу монотонного незростання послідовності a_k, можемо записати

$$\frac{a_l\pi}{|x|}\le a_l(l+1)=a_l(l-n+n+1)\le a_l(2(l-n)+1)\le 3a_l(l-n)\le$$

$$\le 3\sum_{k=n}^{l-1}a_k=3A_{n,l}. \tag{2.21}$$

Об'єднуючи (2.20) і (2.21), запишемо

$$|h_{\gamma,n}(x)| \le 7A_{n,l},\ \frac{\pi}{l+1} < |x| \le \frac{\pi}{l},\ l \ge 2n. \tag{2.22}$$

Із (2.22) випливає

$$J_{s,n}^{(2)} = \int\limits_{|x|\le\frac{\pi}{2n}} |h_{\gamma,n}(x)|^s dx = \sum_{l=2n}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{l+1}<|x|\le\frac{\pi}{l}} |h_{\gamma,n}(x)|^s dx \le 2\cdot 7^s \sum_{l=2n}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}} A_{n,l}^s dx \le$$

$$\le 2\pi 7^s \sum_{l=2n}^{\infty} \frac{A_{n,l}^s}{l^2} \le 2\pi 7^s \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{A_{n,l}^s}{l^2}. \tag{2.23}$$

При кожному фіксованому $n \in \mathbb{N}$ позначимо через $\alpha_n(t),\ t \ge 0$, функцію, що означається натупним чином:

$$\alpha_n(t) := \begin{cases} a_k, & k \le t < k+1,\ k \ge n, \\ 0, & 0 \le t < n. \end{cases}$$

При таких позначеннях має місце рівність $A_{n,l} = \int\limits_0^l \alpha_n(t)dt$. Тоді

$$\sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{A_{n,l}^s}{l^2} = \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{\left(\int\limits_0^l \alpha_n(t)dt\right)^s}{l^2} = \sum_{l=n+1}^{\infty} \int\limits_l^{l+1} \frac{\left(\int\limits_0^l \alpha_n(t)dt\right)^s}{l^2} dx \le$$

$$\le \sum_{l=n+1}^{\infty} \int\limits_l^{l+1} \frac{\left(\int\limits_0^x \alpha_n(t)dt\right)^s}{(x-1)^2} dx = \int\limits_{n+1}^{\infty} \frac{\left(\int\limits_0^x \alpha_n(t)dt\right)^s}{(x-1)^2} dx =$$

$$= \int\limits_{n+1}^{\infty} \frac{\left(\int\limits_0^x \alpha_n(t)dt\right)^s}{x^2} dx + \int\limits_{n+1}^{\infty} \frac{\left(\int\limits_0^x \alpha_n(t)dt\right)^s}{x^2} \frac{2x-1}{(x-1)^2} dx \le$$

$$= \int\limits_{n+1}^{\infty} \frac{\left(\int\limits_0^x \alpha_n(t)dt\right)^s}{x^2} dx + \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \int\limits_{n+1}^{\infty} \frac{\left(\int\limits_0^x \alpha_n(t)dt\right)^s}{x^2} dx \le$$

$$\le 4 \int\limits_n^{\infty} \frac{\left(\int\limits_0^x \alpha_n(t)dt\right)^s}{x^2} dx. \tag{2.24}$$

Для оцінки останнього інтеграла нам буде корисним наступне твердження, встановлене Харді (див., наприклад, [24, с.40]).

Твердження 2.2. *Нехай $g(x)$ невід'ємна функція, визначена для $x \geq 0$ і нехай $r > 1$, $\sigma < r - 1$. Тоді, якщо $g^r(x)x^\sigma$ інтегровна на $(0, \infty)$, то функція $\left(\frac{1}{x}\int\limits_0^x g(t)dt\right)^r x^\sigma$ також інтегровна на $(0, \infty)$ і при цьому виконується нерівність*

$$\int\limits_0^\infty \Big(\frac{1}{x}\int\limits_0^x g(t)dt\Big)^r x^\sigma dx \leq \Big(\frac{r}{r-\sigma-1}\Big)^r \int\limits_0^\infty g^r(x)x^\sigma dx. \tag{2.25}$$

Застосовуючи нерівність (2.25) при $g(\cdot) = \alpha_n(\cdot)$, $r = s$, $\sigma = s-2$, одержуємо

$$\int\limits_n^\infty \frac{\Big(\int\limits_0^x \alpha_n(t)dt\Big)^s}{x^2} dx \leq s^s \int\limits_n^\infty \alpha_n^s(x) x^{s-2} dx =$$

$$= s^s \sum_{l=n}^\infty \int\limits_l^{l+1} a_l^s x^{s-2} dx \leq (2s)^s \sum_{l=n}^\infty a_l^s l^{s-2}. \tag{2.26}$$

Формули (2.23), (2.24) і (2.26) дозволяють записати оцінку

$$J_{s,n}^{(2)} \leq 8\pi(14s)^s \sum_{l=n}^\infty a_l^s l^{s-2}. \tag{2.27}$$

Об'єднавши (2.12), (2.17) і (2.27), маємо

$$\|h_{\gamma,n}(x)\|_s^s = J_{s,n}^{(1)} + J_{s,n}^{(2)} \leq$$

$$\leq \max\Big\{\frac{4^s\pi}{s-1}, 8\pi(14s)^s\Big\}\Big(\sum_{l=n}^\infty a_l^s l^{s-2} + a_n^s n^{s-1}\Big),\ n \in \mathbb{N},\ 1 < s < \infty. \tag{2.28}$$

Із (2.28) випливає (2.11). Лему 2.1 доведено.

Застосуємо до функції $\Psi_{\beta,n}(t)$ вигляду (2.8) лему 2.1, поклавши в її умовах $a_k = \psi(k)$, $\gamma = -\frac{\beta\pi}{2}$, $s = p'$. Отримаємо оцінку

$$\|\Psi_{\beta,n}(t)\|_{p'} \leq$$

$$\leq \xi(p')\Big(\sum_{k=n}^\infty \psi^{p'}(k)k^{p'-2} + \psi^{p'}(n)n^{p'-1}\Big)^{\frac{1}{p'}},\ 1 < p < \infty,\ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{2.29}$$

де характеристика $\xi(p')$ означається рівністю (2.3).

В прийнятих позначеннях має місце наступне твердження.

Лема 2.2. *Нехай* $g_p(t) := \psi(t)t^{\frac{1}{p}}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $n \in \mathbb{N}$. *Тоді, якщо* $g_p \in \mathfrak{M}_0$, *то виконується нерівність*

$$\psi^{p'}(n)n^{p'-1} \leq \frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}, \tag{2.30}$$

якщо ж $g_p \in \mathfrak{M}_C$, *то має місце співвідношення*

$$\frac{p'}{\overline{\alpha}_n(g_p)} \cdot \frac{n\underline{\alpha}_n(g_p)}{p' + n\underline{\alpha}_n(g_p)} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} \leq \psi^{p'}(n)n^{p'-1} \leq \frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}. \tag{2.31}$$

Доведення леми 2.2. Нехай $g_p \in \mathfrak{M}_0$. Покажемо справедливість нерівності (2.30).

Оскільки $g_p(t)$ монотонно спадає до нуля, то

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{g_p^{p'}(k)}{k} \geq \int\limits_{n}^{\infty} \frac{g_p^{p'}(t)}{t} dt = \int\limits_{n}^{\infty} \psi^{p'}(t)t^{p'-2}dt. \tag{2.32}$$

Проінтегрувавши частинами останній інтеграл з (2.32), отримаємо

$$\int\limits_{n}^{\infty} \psi^{p'}(t)t^{p'-2}dt = \frac{-1}{p'-1}\psi^{p'}(n)n^{p'-1} - \frac{p'}{p'-1} \int\limits_{n}^{\infty} \psi^{p'-1}(t)\psi'(t)t^{p'-1}dt =$$

$$= \frac{-1}{p'-1}\psi^{p'}(n)n^{p'-1} + \frac{p'}{p'-1} \int\limits_{n}^{\infty} \frac{\psi^{p'}(t)t^{p'-2}}{\alpha(\psi;t)} dt. \tag{2.33}$$

З (2.33) випливає

$$\psi^{p'}(n)n^{p'-1} = p' \int\limits_{n}^{\infty} \frac{\psi^{p'}(t)t^{p'-2}}{\alpha(\psi;t)} dt - (p'-1) \int\limits_{n}^{\infty} \psi^{p'}(t)t^{p'-2}dt. \tag{2.34}$$

Покажемо, що

$$\frac{1}{\alpha(\psi;t)} - \frac{1}{\alpha(g_p;t)} = \frac{1}{p}, \ t \geq 1, \quad 1 < p < \infty. \tag{2.35}$$

Дійсно, оскільки $\psi(t) = g_p(t)t^{-\frac{1}{p}}$, то

$$\frac{1}{\alpha(\psi;t)} = \frac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)} = \frac{-t\left(\frac{-1}{p}t^{-\frac{1}{p}-1}g_p(t) + t^{-\frac{1}{p}}g_p'(t)\right)}{g_p(t)t^{-\frac{1}{p}}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{p}t^{-\frac{1}{p}}g_p(t) + t^{-\frac{1}{p}+1}|g_p'(t)|}{g_p(t)t^{-\frac{1}{p}}} = \frac{1}{p} + \frac{t|g_p'(t)|}{g_p(t)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\alpha(g_p;t)}.$$

В силу (2.34) і (2.35)

$$\psi^{p'}(n)n^{p'-1} = p'\int\limits_n^\infty \psi^{p'}(t)t^{p'-2}\Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{\alpha(g_p;t)}\Big)dt - (p'-1)\int\limits_n^\infty \psi^{p'}(t)t^{p'-2}dt =$$

$$= p'\int\limits_n^\infty \psi^{p'}(t)t^{p'-2}\frac{1}{\alpha(g_p;t)}dt. \tag{2.36}$$

З (2.1), (2.32) і (2.36) випливають співвідношення

$$\psi^{p'}(n)n^{p'-1} \le \frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)}\int\limits_n^\infty \psi^{p'}(t)t^{p'-2}dt \le \frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)}\sum_{k=n}^\infty \psi^{p'}(k)k^{p'-2}. \tag{2.37}$$

Нерівність (2.30) доведено.

Нехай $g_p \in \mathfrak{M}_C$. Оскільки $\mathfrak{M}_C \subset \mathfrak{M}_0$, то справедливість другої нерівності в (2.31) випливає з (2.30).

Врахувавши (2.37), маємо

$$\sum_{k=n}^\infty \psi^{p'}(k)k^{p'-2} \le \psi^{p'}(n)n^{p'-2} + \int\limits_n^\infty \psi^{p'}(t)t^{p'-2}dt \le$$

$$\le \Big(\frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)}\cdot\frac{1}{n} + 1\Big)\int\limits_n^\infty \psi^{p'}(t)t^{p'-2}dt. \tag{2.38}$$

На підставі формул (2.2), (2.36) і (2.38) одержуємо

$$\psi^{p'}(n)n^{p'-1} \ge \frac{p'}{\overline{\alpha}_n(g_p)}\int\limits_n^\infty \psi^{p'}(t)t^{p'-2}dt \ge$$

$$\ge \frac{p'}{\overline{\alpha}_n(g_p)}\Big(\frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)}\cdot\frac{1}{n} + 1\Big)^{-1}\sum_{k=n}^\infty \psi^{p'}(k)k^{p'-2}.$$

Тим самим співвідношення (2.31), а отже і лему 2.2, доведено.

З нерівностей (2.10), (2.29) і (2.30) отримуємо

$$\mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,p})_C \le \frac{1}{\pi}\xi(p')\Big(1 + \frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)}\Big)^{\frac{1}{p'}}\Big(\sum_{k=n}^\infty \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}}. \tag{2.39}$$

Оскільки послідовність $\underline{\alpha}_n(g_p)$ монотонно неспадає, то для довільних $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \leq$$
$$\leq \frac{1}{\pi}\xi(p')\Big(1+\frac{p'}{\underline{\alpha}_1(g_p)}\Big)^{\frac{1}{p'}}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}},\ 1<p<\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\ (2.40)$$

Знайдемо оцінку знизу величини $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$. З цією метою розглянемо функцію

$$f^*(t) = f^*(\psi;p;n;t) := \frac{\lambda}{\Big(\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p}}}\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\cos kt, \quad (2.41)$$

де

$$\lambda = \lambda(\psi;p;n) := \frac{1}{\xi(p)}\Big(\frac{\underline{\alpha}_n(g_p)}{p'+\underline{\alpha}_n(g_p)}\Big)^{\frac{1}{p}},\ 1<p<\infty,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \quad (2.42)$$

а величини $\xi(p)$ і $\underline{\alpha}_n(g_p)$ означаються формулами (2.3) і (2.1) відповідно.

З умови $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$ випливає, що $f^* \in C$. Покажемо, що $\|(f^*(t))^{\psi}_{\beta}\|_p \leq 1$. Оскільки, згідно з умовою теореми 2.1, $g_p \in \mathfrak{M}_0$, то функція $\psi^{p'-1}(t)t^{p'-2} = g_p^{p'-1}(t)t^{-\frac{1}{p'}}$ монотонно спадає до нуля. В силу означення (ψ,β)–похідної, майже скрізь виконується рівність

$$(f^*(t))^{\psi}_{\beta} = \frac{\lambda}{\Big(\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p}}}\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'-1}(k)k^{p'-2}\cos\Big(kt+\frac{\beta\pi}{2}\Big). \quad (2.43)$$

Поклавши в умовах леми 2.1 $a_k = \psi^{p'-1}(k)k^{p'-2}$, $\gamma = \frac{\beta\pi}{2}$, $s = p$, із (2.43) і (2.30), одержуємо

$$\|(f^*)^{\psi}_{\beta}\|_p \leq \frac{\lambda\xi(p)}{\Big(\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p}}}\times$$
$$\times\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\big(\psi^{p'-1}(k)k^{p'-2}\big)^p k^{p-2} + \psi^{(p'-1)p}(n)n^{(p'-2)p}n^{p-1}\Big)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= \lambda\xi(p)\Big(1+\frac{\psi^{p'}(n)n^{p'-1}}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}}\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \lambda\xi(p)\Big(1+\frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)}\Big)^{\frac{1}{p}} = 1. \quad (2.44)$$

З (2.44) випливає включення $f^* \in C^{\psi}_{\beta,p}$.

Оскільки послідовність $\underline{\alpha}_n(g_p)$ монотонно неспадає, то в силу (2.42)

$$\lambda \geq \frac{1}{\xi(p)}\Big(\frac{\underline{\alpha}_1(g_p)}{p'+\underline{\alpha}_1(g_p)}\Big)^{\frac{1}{p}},\ n\in\mathbb{N},$$

і для функції f^* має місце оцінка

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \geq |f^*(0)-S_{n-1}(f^*,0)| =$$

$$= \frac{\lambda}{\Big(\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p}}}\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2} = \lambda\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\xi(p)}\Big(\frac{\underline{\alpha}_1(g_p)}{p'+\underline{\alpha}_1(g_p)}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}},\ n\in\mathbb{N}. \qquad (2.45)$$

Об'єднуючи (2.40), (2.42) і (2.45), отримуємо (2.4). Теорему 2.1 доведено.

Зауваження 2.1. *В ході доведення теореми 2.1 за виконання її умов було показано, що для довільних $n\in\mathbb{N}$ виконується більш точна, порівняно з (2.4), оцінка:*

$$\frac{1}{\xi(p)}\Big(\frac{\underline{\alpha}_n(g_p)}{p'+\underline{\alpha}_n(g_p)}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}} \leq \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\xi(p')\Big(\frac{p'+\underline{\alpha}_n(g_p)}{\underline{\alpha}_n(g_p)}\Big)^{\frac{1}{p'}}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}}, \qquad (2.46)$$

де $\xi(p),\ 1<p<\infty$, і $\underline{\alpha}_n(g_p)$ — величини, що означаються за допомогою формул (2.3) і (2.1) відповідно.

Теорема 2.2. *Нехай $1<p<\infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, функція $g_p(t)=\psi(t)t^{\frac{1}{p}}$ така, що*

$$g_p\in\mathfrak{M}_0$$

і

$$\underline{\alpha}_1(g_p)=\inf_{t\geq 1}\alpha(g_p;t)>\frac{p'}{2}. \qquad (2.47)$$

Тоді для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $\beta \in \mathbb{R}$ мають місце співвідношення

$$K^{(3)}_{\psi,p}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}} \leq$$

$$\leq E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \leq \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \leq$$

$$\leq K^{(2)}_{\psi,p}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}}, \quad (2.48)$$

в яких

$$K^{(3)}_{\psi,p} = \frac{1}{12\xi(p)}\Big(\frac{\underline{\alpha}_1(g_p)}{p'+\underline{\alpha}_1(g_p)}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(1-\frac{p'}{2\underline{\alpha}_1(g_p)}\Big), \quad (2.49)$$

а величини $K^{(2)}_{\psi,p}$, $\xi(p)$ і $\underline{\alpha}_1(g_p)$ означаються формулами (2.6), (2.3) і (2.1) відповідно.

Доведення теореми 2.2. В силу теореми 2.1 якщо $1 < p < \infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$, і функція $g_p(t) = \psi(t)t^{\frac{1}{p}}$ така, що $g_p \in \mathfrak{M}_0$, то при всіх $n \in \mathbb{N}$ і $\beta \in \mathbb{R}$

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \leq \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \leq K^{(2)}_{\psi,p}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}}, \quad (2.50)$$

де $K^{(2)}_{\psi,p}$ означена формулою (2.6).

Знайдемо оцінку знизу для величин $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$. Покладемо

$$\Phi_{p'}(x) := \int_x^{\infty}\psi^{p'}(t)t^{p'-2}dt$$

і

$$A(n) = A(\psi;p;n) := \big[\Phi^{-1}_{p'}\big(\frac{K^*}{n}\Phi_{p'}(n)\big)\big] + 1, \quad (2.51)$$

де $[\alpha]$ — ціла частина дійсного числа α, $\Phi^{-1}_{p'}$ — функція обернена до $\Phi_{p'}$, а

$$K^* = K^*(\psi;p) := \frac{1}{2}\Big(1-\frac{p'}{2\underline{\alpha}_1(g_p)}\Big), \quad 1 < p < \infty, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1. \quad (2.52)$$

Розглянемо функцію f^* вигляду (2.41). Як зазначалось раніше (див. (2.44)), $f^* \in C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 < p < \infty$. Покажемо, що має місце оцінка

$$E_n(f^*)_C = \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}}\|f^*-t_{n-1}\|_C \geq K^{(3)}_{\psi,p}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}}, \quad (2.53)$$

де $K_{\psi,p}^{(3)}$ означена формулою (2.49).

Розглянемо інтеграл

$$I_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f^*(t) - t_{n-1}(t))(V_{A(n)}(t) - V_{n-1}(t))dt, \tag{2.54}$$

де $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$, а $V_m(t)$ — ядра Валле Пуссена вигляду

$$V_m(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m-1} \sum_{j=1}^{k} \cos jt, \ m \in \mathbb{N}, \tag{2.55}$$

а послідовність $A(n)$ означається формулою (2.51).

Далі буде потрібним таке твердження (див., наприклад, твердження Д.1.1 з [37, с. 391]).

Твердження 2.3. *Якщо $h \in L_p, \ 1 \leq p \leq \infty, \ g \in L_{p'}, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, то справедлива нерівність*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t)g(t)dt \leq \|h\|_p \, \|g\|_{p'} \,. \tag{2.56}$$

В силу твердження 2.3

$$I_1 \leq \|f^* - t_{n-1}\|_C \|V_{A(n)} - V_{n-1}\|_1. \tag{2.57}$$

Знайдемо оцінку норми $\|V_{A(n)} - V_{n-1}\|_1$. Відомо, що

$$V_m(t) = 2F_{2m-1}(t) - F_{m-1}(t) \tag{2.58}$$

(див., наприклад, [115, с. 28]), де $F_k(t)$ — ядра Фейєра порядку k

$$F_k(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^{k} \Big(\sum_{j=1}^{\nu} \cos jt \Big), \ k \in \mathbb{N}.$$

Оскільки (див., наприклад, [24, с. 148])

$$\|F_k\|_1 = \pi, \ k \in \mathbb{N}, \tag{2.59}$$

то з (2.58) і (2.59) отримуємо

$$\|V_m\|_1 \leq 2\|F_{2m-1}\|_1 + \|F_{m-1}\|_1 \leq 3\pi, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{2.60}$$

Тому

$$\|V_{A(n)} - V_{n-1}\|_1 \le \|V_{A(n)}\|_1 + \|V_{n-1}\|_1 \le 6\pi. \tag{2.61}$$

З (2.57) і (2.61), маємо

$$I_1 \le 6\pi \|f^* - t_{n-1}\|_C. \tag{2.62}$$

Для ядер $V_m(t)$ виконується рівність (див., наприклад, формулу (1.3.15) роботи [95, с. 31])

$$V_m(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2 \sum_{k=m+1}^{2m-1} \Big(1 - \frac{k}{2m}\Big) \cos kt, \;\; m \in \mathbb{N},$$

а тому

$$V_{A(n)}(t) - V_{n-1}(t) =$$

$$= \sum_{k=n}^{A(n)} \cos kt + 2 \sum_{k=A(n)+1}^{2A(n)-1} \Big(1 - \frac{k}{2A(n)}\Big) \cos kt - 2 \sum_{k=n}^{2n-3} \Big(1 - \frac{k}{2n-2}\Big) \cos kt. \tag{2.63}$$

Враховуючи очевидні рівності

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos mt dt = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \pi, & k = m, \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{N},$$

з формул (2.41), (2.54) і (2.63) отримаємо, що для довільних $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} (f^*(t) - t_{n-1})(V_{A(n)}(t) - V_{n-1}(t)) dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^*(t)(V_{A(n)}(t) - V_{n-1}(t)) dt =$$

$$= \frac{\lambda}{\Big(\sum\limits_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p}}} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} \cos kt \times$$

$$\times \Big(\sum_{k=n}^{A(n)} \cos kt + 2 \sum_{k=A(n)+1}^{2A(n)-1} \Big(1 - \frac{k}{2A(n)}\Big) \cos kt - 2 \sum_{k=n}^{2n-3} \Big(1 - \frac{k}{2n-2}\Big) \cos kt \Big) dt =$$

$$= \frac{\pi\lambda}{\Big(\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p}}}\Bigg(\sum_{k=n}^{A(n)}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}+2\sum_{k=A(n)+1}^{2A(n)-1}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big(1-\frac{k}{2A(n)}\Big)-$$

$$-2\sum_{k=n}^{2n-3}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big(1-\frac{k}{2n-2}\Big)\Bigg) >$$

$$> \frac{\pi\lambda}{\Big(\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p}}}\Bigg(\sum_{k=n}^{A(n)}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}-2\sum_{k=n}^{2n-3}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big(1-\frac{k}{2n-2}\Big)\Bigg). \tag{2.64}$$

Знайдемо оцінку зверху для суми $\sum\limits_{k=n}^{2n-3}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big(1-\frac{k}{2n-2}\Big)$. Враховуючи нерівність (2.30) та спадання функції $\psi^{p'}(t)t^{p'-2}$, одержимо

$$2\sum_{k=n}^{2n-3}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big(1-\frac{k}{2n-2}\Big) \le \psi^{p'}(n)n^{p'-2}\frac{1}{n-1}\sum_{k=n}^{2n-3}(2n-k-2) =$$

$$= \psi^{p'}(n)n^{p'-2}\frac{n-2}{2} < \frac{1}{2}\psi^{p'}(n)n^{p'-1} < \frac{p'}{2\underline{\alpha}_n(g_p)}\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}. \tag{2.65}$$

Беручи до уваги співвідношення (2.62), (2.64) і (2.65), запишемо

$$\|f^* - t_{n-1}\|_C \ge \frac{1}{6\pi}I_1 \ge$$

$$\ge \frac{1}{6\pi}\frac{\pi\lambda}{\Big(\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p}}}\Bigg(\sum_{k=n}^{A(n)}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}-\frac{p'}{2\underline{\alpha}_n(g_p)}\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Bigg) >$$

$$> \frac{1}{6}\frac{\lambda}{\Big(\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p}}}\Bigg(\Big(1-\frac{p'}{2\underline{\alpha}_n(g_p)}\Big)\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}-\sum_{k=A(n)+1}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Bigg). \tag{2.66}$$

З (2.51) та монотонного спадання функції $\Phi_{p'}(\cdot)$ випливає, що

$$\Phi_{p'}(A(n)) = \Phi_{p'}(\big[\Phi_{p'}^{-1}\big(\frac{K^*}{n}\Phi_{p'}(n)\big)\big]+1) < \frac{K^*}{n}\Phi_{p'}(n),$$

а тому

$$\sum_{k=A(n)+1}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2} \le \int\limits_{A(n)}^{\infty}\psi^{p'}(t)t^{p'-2}dt = \Phi_{p'}(A(n)) <$$

$$< \frac{K^*}{n}\Phi_{p'}(n) \le \frac{K^*}{n}\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}, \tag{2.67}$$

при цьому в силу (2.47) і (2.52) $0 < K^* < \frac{1}{2}$.

Із (2.66) і (2.67) з урахуванням монотонного неспадання послідовності $\underline{\alpha}_n(g_p)$, для полінома $t^*_{n-1}(t)$ найкращого рівномірного наближення функції f^* отримаємо оцінку

$$E_n(f^*)_C = \|f^* - t^*_{n-1}\|_C \ge$$

$$\ge \frac{1}{6}\frac{\lambda}{\Big(\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p}}}\Big(1 - \frac{p'}{2\underline{\alpha}_n(g_p)} - \frac{K^*}{n}\Big)\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2} \ge$$

$$\ge \frac{1}{12\xi(p)}\Big(\frac{\underline{\alpha}_1(g_p)}{p' + \underline{\alpha}_1(g_p)}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(1 - \frac{p'}{2\underline{\alpha}_1(g_p)}\Big)\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}}. \tag{2.68}$$

З (2.68) випливає справедливість оцінки (2.53). Об'єднуючи (2.50) і (2.53) отримуємо (2.48). Теорему 2.2 доведено.

Неважко переконатись, що умовам теореми 2.2 задовольняють, наприклад, функції

- $\psi(t) = t^{-r}, \quad \dfrac{1}{p} < r < 1 + \dfrac{1}{p};$
- $\psi(t) = t^{-\frac{1}{p}}\ln^{-\gamma}(t + K), \quad \gamma > \dfrac{1}{p'}, \quad K \ge e^{\frac{\gamma p'}{2}} - 1;$ (2.69)
- $\psi(t) = t^{-\frac{1}{p}}\ln^{-\gamma}(t + K_1)(\ln\ln(t + K_2))^{-\delta}, \qquad \gamma \ge \dfrac{1}{p'}, \qquad \delta > \dfrac{1}{p'},$

$$K_2 \ge K_1 \ge e^{\max\{\frac{(\gamma+\delta)p'}{2}, e\}} - 1. \tag{2.70}$$

Зауваження 2.2. *З (2.46) та ходу доведення теореми 2.2 випливає, що за виконання умов:* $1 < p < \infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *та, якщо функція* $g_p(t) = \psi(t)t^{\frac{1}{p}}$ *така, що* $g_p \in \mathfrak{M}_0$ *і*

$$\underline{\alpha}_n(g_p) = \inf_{t \ge n}\alpha(g_p; t) > \frac{p'}{2},$$

то для довільного $\beta \in \mathbb{R}$ *виконується більш точна, порівняно з (2.48), оцінка:*

$$\frac{1}{12\xi(p)}\Big(\frac{\underline{\alpha}_n(g_p)}{p' + \underline{\alpha}_n(g_p)}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(1 - \frac{p'}{2\underline{\alpha}_n(g_p)}\Big)\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}} \le$$

$$\leq E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \leq \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\xi(p')\Big(\frac{p'+\underline{\alpha}_n(g_p)}{\underline{\alpha}_n(g_p)}\Big)^{\frac{1}{p'}}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}}, \quad (2.71)$$

де $\xi(p)$, $1<p<\infty$, *і* $\underline{\alpha}_n(g_p)$ *— величини, що означаються формулами (2.3) і (2.1) відповідно.*

Із теорем 2.1 і 2.2 безпосередньо випливає наступне твердження

Наслідок 2.1. *Нехай* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$, $\psi(t) = g_p(t)t^{-\frac{1}{p}}$, *де* $g_p \in \mathfrak{M}_0$, $1<p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $n\in\mathbb{N}$ *і* $\beta\in\mathbb{R}$. *Тоді*

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}}. \quad (2.72)$$

Якщо, крім того, виконується умова (2.47), то

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}}. \quad (2.73)$$

Припустимо, що виконуються умови наслідку 2.1, і крім того, $g_p \in \mathfrak{M}_C$, тоді як випливає зі співвідношення (2.31),

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2} \asymp \psi^{p'}(n)n^{p'-1}. \quad (2.74)$$

Отже, має місце твердження.

Наслідок 2.2. *Нехай* $1<p<\infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, *функція* $g_p(t)=\psi(t)t^{\frac{1}{p}}$ *така, що* $g_p\in\mathfrak{M}_C$, $n\in\mathbb{N}$ *і* $\beta\in\mathbb{R}$. *Тоді*

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \psi(n)n^{\frac{1}{p}}. \quad (2.75)$$

Якщо, крім того, виконується умова (2.47), то

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \psi(n)n^{\frac{1}{p}}. \quad (2.76)$$

Справедливість порядкових оцінок (2.75) і (2.76) встановлена раніше в [18].

Зауважимо, що коли $g_p\in\mathfrak{M}_0$ і

$$\lim_{t\to\infty}\alpha(g_p;t)=\infty, \quad (2.77)$$

то порядкові оцінки (2.75) і (2.76) місця не мають, оскільки в цьому випадку виконується оцінка

$$\psi(n)n^{\frac{1}{p}} = o\bigg(\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}}\bigg),\ n\to\infty,$$

яка є наслідком нерівності (2.30) і того, що $\underline{\alpha}_n(g_p(t)) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Прикладом функцій $\psi(t)$, які задовольняють умови наслідку 2.1 і для яких виконується умова (2.77), є функції виду (2.69). Для них

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ln^{\gamma p'}(k+K)} < \infty$$

і

$$g_p(t) = \ln^{-\gamma}(t+K),\quad g_p'(t) = -\gamma\ln^{-\gamma-1}(t+K)\frac{1}{t+K},$$

$$\alpha(g_p;t) = \frac{\ln(t+K)}{\gamma}\frac{t+K}{t} > \frac{\ln(t+e^{\frac{\gamma p'}{2}})}{\gamma},$$

а тому $\alpha(g_p;t)\to\infty$ при $t\to\infty$, тобто виконується умова (2.77), і

$$\underline{\alpha}_1(g_p) > \frac{p'}{2}. \tag{2.78}$$

Умови наслідку 2.1 і умову (2.77) задовольняють також функції виду (2.70) та інші.

Наведемо порядкові оцінки величин $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$ і $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$ у випадку коли $\psi(t)$ мають вигляд (2.69) і (2.70).

Наслідок 2.3. *Нехай* $\psi(t) = t^{-\frac{1}{p}}\ln^{-\gamma}(t+K)$, $\gamma > \frac{1}{p'}$, $K \geq e^{\frac{\gamma p'}{2}} - 1$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \psi(n)n^{\frac{1}{p}}\ln^{\frac{1}{p'}} n,\quad n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Доведення наслідку 2.3. З (2.38) і (2.78), одержуємо

$$\int_n^{\infty}\psi^{p'}(t)t^{p'-2}dt \leq \sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2} \leq 3\int_n^{\infty}\psi^{p'}(t)t^{p'-2}dt. \tag{2.79}$$

Згідно з (2.73) і (2.79) для зазначених ψ

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}} \asymp \Big(\int_n^{\infty}\psi^{p'}(t)t^{p'-2}dt\Big)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$
= \Big(\int\limits_n^\infty \frac{dt}{t\ln^{\gamma p'}(t+K)} \Big)^{\frac{1}{p'}} \asymp \ln^{\frac{1}{p'}-\gamma} n = \psi(n) n^{\frac{1}{p}} \ln^{\frac{1}{p'}} n \frac{\ln^{-\gamma}(n)}{\ln^{-\gamma}(n+K)} \asymp
$$

$$
\asymp \psi(n) n^{\frac{1}{p}} \ln^{\frac{1}{p'}} n, \ n \geq 2.
$$

Наслідок 2.3 доведено.

Наслідок 2.4. *Нехай* $\psi(t) = t^{-\frac{1}{p}} \ln^{-\frac{1}{p'}}(t+K_1)(\ln\ln(t+K_2))^{-\delta}$, $\delta > \frac{1}{p'}$, $K_2 \geq K_1 \geq e^{\max\{\frac{(\gamma+\delta)p'}{2}, e\}} - 1$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$
E_n(C^\psi_{\beta,p})_C \asymp \mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,p})_C \asymp \psi(n) n^{\frac{1}{p}} (\ln n)^{\frac{1}{p'}} (\ln\ln n)^{\frac{1}{p'}}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}.
$$

Доведення наслідку 2.4. Як зазначалось вище, функції $\psi(t)$ вигляду (2.70) задовольняють умови наслідку 2.1 і умову (2.77). Тому, враховуючи співвідношення (2.30), неважко переконатись в справедливості співвідношення

$$
\int\limits_n^\infty \psi^{p'}(t) t^{p'-2} dt \leq \sum_{k=n}^\infty \psi^{p'}(k) k^{p'-2} \leq \psi^{p'}(n) n^{p'-2} + \int\limits_n^\infty \psi^{p'}(t) t^{p'-2} dt \leq
$$

$$
\leq \Big(\frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)} \cdot \frac{1}{n} + 1 \Big) \int\limits_n^\infty \psi^{p'}(t) t^{p'-2} dt. \tag{2.80}
$$

З (2.73), (2.80) і того, що $\underline{\alpha}_n(g_p) > K > 0$ випливає, що при $n \geq 3$

$$
E_n(C^\psi_{\beta,p})_C \asymp \mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,p})_C \asymp \Big(\sum_{k=n}^\infty \psi^{p'}(k) k^{p'-2} \Big)^{\frac{1}{p'}} \asymp
$$

$$
\asymp \Big(\int\limits_n^\infty \psi^{p'}(t) t^{p'-2} dt \Big)^{\frac{1}{p'}} = \Big(\int\limits_n^\infty \frac{dt}{t\ln(t+K_1)(\ln\ln(t+K_2))^{\gamma p'}} \Big)^{\frac{1}{p'}} \asymp
$$

$$
\asymp \Big(\int\limits_n^\infty \frac{dt}{t\ln t (\ln\ln t)^{\gamma p'}} \Big)^{\frac{1}{p'}} \asymp (\ln\ln n)^{\frac{1}{p'}-\gamma} \asymp
$$

$$
\asymp \psi(n) n^{\frac{1}{p}} (\ln n)^{\frac{1}{p'}} (\ln\ln n)^{\frac{1}{p'}}, \ n \geq 3.
$$

Наслідок 2.4 доведено.

2.2. Порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості в рівномірній метриці

Теорема 2.3. *Нехай* $1 < p < \infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *а функція* $g_p(t) = \psi(t) t^{\frac{1}{p}}$ *така, що*

$$g_p \in \mathfrak{M}_0$$

і

$$\underline{\alpha}_1(g_p) = \inf_{t \geq 1} \alpha(g_p; t) > p'.$$

Тоді для довільних $n \in \mathbb{N}$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$ *мають місце співвідношення*

$$K_{\psi,p}^{(4)} \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} \Big)^{\frac{1}{p'}} \leq$$
$$\leq e_{2n}^{\perp}(C_{\beta,p}^{\psi})_C \leq e_{2n-1}^{\perp}(C_{\beta,p}^{\psi})_C \leq$$
$$\leq K_{\psi,p}^{(2)} \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} \Big)^{\frac{1}{p'}}, \quad (2.81)$$

в яких

$$K_{\psi,p}^{(4)} = \frac{1}{3\xi(p)} \Big(\frac{\underline{\alpha}_1(g_p)}{p' + \underline{\alpha}_1(g_p)} \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(1 - \frac{p'}{\underline{\alpha}_1(g_p)} \Big), \quad (2.82)$$

а величини $K_{\psi,p}^{(2)}$, $\xi(p)$ *і* $\underline{\alpha}_1(g_p)$ *означаються формулами (2.6), (2.3) і (2.1) відповідно.*

Доведення теореми 2.3. Згідно з теоремою 2.1 при виконанні умов $\psi(t) t^{\frac{1}{p}} \in \mathfrak{M}_0$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} < \infty$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$ справедлива оцінка

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{\psi})_C \leq K_{\psi,p}^{(2)} \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} \Big)^{\frac{1}{p'}}, \quad (2.83)$$

в якій величина $K_{\psi,p}^{(2)}$ означена формулою (2.6).

Враховуючи нерівності (1.27) і (2.83), отримуємо

$$e_{2n}^{\perp}(C_{\beta,p}^{\psi})_C \leq e_{2n-1}^{\perp}(C_{\beta,p}^{\psi})_C \leq K_{\psi,p}^{(2)} \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} \Big)^{\frac{1}{p'}}. \quad (2.84)$$

Знайдемо оцінку знизу величини $e^{\perp}_{2n}(C^{\psi}_{\beta,p})_C$.

Розглянемо функцію f^* вигляду (2.41). Як показано в підрозділі 2.1 при $g_p \in \mathfrak{M}_0$ має місце включення $f^* \in C^{\psi}_{\beta,p},\ 1<p<\infty$. Покажемо, що

$$e^{\perp}_{2n}(f^*)_C \geq K^{(3)}_{\psi,p}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}}. \qquad (2.85)$$

Нехай

$$\Phi_s(x) := \int\limits_x^{\infty}\psi^s(t)t^{s-2}dt \qquad (2.86)$$

і

$$A_s(l;n) = A_s(\psi;l;n) := \big[\Phi_s^{-1}\big(\frac{1}{2l}\Phi_s(n)\big)\big] + 2n,\ l \in \mathbb{N}, \qquad (2.87)$$

де $[\alpha]$ — ціла частина дійсного числа α, Φ_s^{-1} — функція обернена до Φ_s.

Розглянемо величину

$$I_2 := \inf_{\gamma_{2n}}\Bigg|\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f_p^*(t) - S_{\gamma_{2n}}(f^*;t))V_{A_{p'}(l;n)}(t)dt\Bigg|, \qquad (2.88)$$

де $V_{A_{p'}(l;n)}$ — ядра Валле Пуссена V_m вигляду (2.55) при $m = A_{p'}(l;n)$.

В силу твердження 2.3

$$I_2 \leq \inf_{\gamma_{2n}}\|f^*(t) - S_{\gamma_{2n}}(f^*;t)\|_\infty\|V_{A_{p'}(l;n)}\|_1 = e^{\perp}_{2n}(f^*)_C\|V_{A_{p'}(l;n)}\|_1. \qquad (2.89)$$

Оскільки

$$\|V_m\|_1 \leq 3\pi, \quad m \in \mathbb{N}, \qquad (2.90)$$

то з (2.89) і (2.90) можемо записати оцінку

$$e^{\perp}_{2n}(f^*)_C \geq \frac{1}{3\pi}I_2. \qquad (2.91)$$

Ядра V_m вигляду (2.55) можна зобразити у вигляді

$$V_m(t) = \frac{1}{2}\Big(1 + \sum_{1\leq k\leq m}e^{ikt} + \sum_{-m\leq k\leq -1}e^{ikt} +$$

$$+2\sum_{m+1\leq k\leq 2m-1}\Big(1-\frac{k}{2m}\Big)e^{ikt} + 2\sum_{-2m+1\leq k\leq -m-1}\Big(1-\frac{|k|}{2m}\Big)e^{ikt}\Big). \qquad (2.92)$$

Крім того

$$f^*(t)-S_{\gamma_{2n}}(f^*;t)=\frac{\lambda}{2\Big(\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p}}}\sum_{\substack{|k|\geq n,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi^{p'}(|k|)|k|^{p'-2}e^{ikt}. \qquad (2.93)$$

Оскільки

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{ikt}e^{imt}dt=\begin{cases}0, & k+m\neq 0,\\ 2\pi, & k+m=0,\end{cases}\qquad k,m\in\mathbb{Z}, \qquad (2.94)$$

то з урахуванням (2.92) маємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{\substack{|k|\geq n,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi^{p'}(|k|)|k|^{p'-2}e^{ikt}V_{A_{p'}(l;n)}(t)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Bigg(\sum_{\substack{k\geq n,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}e^{ikt}+\sum_{\substack{k\leq -n,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi^{p'}(|k|)|k|^{p'-2}e^{ikt}\Bigg)\times$$

$$\times\Bigg(1+\sum_{1\leq k\leq A_{p'}(l;n)}e^{ikt}+\sum_{-A_{p'}(l;n)\leq k\leq -1}e^{ikt}+$$

$$+2\sum_{A_{p'}(l;n)+1\leq k\leq 2A_{p'}(l;n)-1}\Big(1-\frac{k}{2A_{p'}(l;n)}\Big)e^{ikt}+$$

$$+2\sum_{-2A_{p'}(l;n)+1\leq k\leq -A_{p'}(l;n)-1}\Big(1-\frac{|k|}{2A_{p'}(l;n)}e^{ikt}\Big)\Bigg)dt=$$

$$=\pi\Bigg(\sum_{\substack{n\leq k\leq A_{p'}(l;n),\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}+\sum_{\substack{-A_{p'}(l;n)\leq k\leq -n,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi^{p'}(|k|)|k|^{p'-2}+$$

$$+2\sum_{\substack{A_{p'}(l;n)+1\leq k\leq 2A_{p'}(l;n)-1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\Big(1-\frac{k}{2A_{p'}(l;n)}\Big)\psi^{p'}(k)k^{p'-2}+$$

$$+2\sum_{\substack{-2A_{p'}(l;n)+1\leq k\leq -A_{p'}(l;n)-1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\Big(1-\frac{|k|}{2A_{p'}(l;n)}\Big)\psi^{p'}(|k|)|k|^{p'-2}\Bigg)>$$

$$>\pi\Bigg(\sum_{\substack{n\leq k\leq A_{p'}(l;n),\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}+\sum_{\substack{-A_{p'}(l;n)\leq k\leq -n,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi^{p'}(|k|)|k|^{p'-2}\Bigg)=$$

$$=\pi\sum_{\substack{n\leq |k|\leq A_{p'}(l;n),\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}. \qquad (2.95)$$

В силу (2.88), (2.93) і (2.95)

$$I_2 > \frac{\pi\lambda}{2\Big(\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p}}} \inf_{\gamma_{2n}} \sum_{\substack{n\le|k|\le A_{p'}(l;n),\\ k\notin\gamma_{2n}}} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}. \tag{2.96}$$

Оскільки при $g_p \in \mathfrak{M}_0$ функція $\psi^{p'}(t)t^{p'-2}$ монотонно спадає, то

$$\inf_{\gamma_{2n}} \sum_{\substack{n\le|k|\le A_{p'}(l;n),\\ k\notin\gamma_{2n}}} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} = \sum_{\substack{2n\le|k|\le A_{p'}(l;n),\\ k\notin\gamma_{2n}}} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} =$$

$$= 2\sum_{k=2n}^{A_{p'}(l;n)} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}. \tag{2.97}$$

Покажемо, що за умови, коли функція $g_{s'}(t) = \psi(t)t^{\frac{1}{s'}}$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, така, що $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$, то для довільних $l, n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=2n}^{A_s(l;n)} \psi^s(k)k^{s-2} > \Big(1 - \frac{1}{2l} - \frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}\Big)\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}. \tag{2.98}$$

Представимо $\sum\limits_{k=2n}^{A_s(l;n)} \psi^s(k)k^{s-2}$ у вигляді

$$\sum_{k=2n}^{A_s(l;n)} \psi^s(k)k^{s-2} = \sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2} - \sum_{k=n}^{2n-1}\psi^s(k)k^{s-2} - \sum_{k=A_s(l;n)+1}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}. \tag{2.99}$$

З (2.87) та спадання функції $\Phi_s(\cdot)$ вигляду (2.86) випливає оцінка

$$\sum_{k=A_s(l;n)+1}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2} \le \int\limits_{A_s(l;n)}^{\infty}\psi^s(t)t^{s-2}dt =$$

$$= \Phi_s(A_s(l;n)) < \frac{1}{2l}\Phi_s(n) \le \frac{1}{2l}\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}. \tag{2.100}$$

Знайдемо оцінку зверху для суми $\sum\limits_{k=n}^{2n-1}\psi^s(k)k^{s-2}$. Враховуючи, що при $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$ функція $\psi^s(t)t^{s-2}$ спадає та використовуючи нерівність (2.30) леми 2.2, одержимо

$$\sum_{k=n}^{2n-1}\psi^s(k)k^{s-2} \le \psi^s(n)n^{s-1} \le \frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}. \tag{2.101}$$

Із (2.99), (2.100) і (2.101) одержимо нерівність (2.98).

Застосовуючи нерівність (2.98) при $s = p'$, в силу формул (2.91), (2.96) і (2.97), для довільних $l \in \mathbb{N}$ отримуємо оцінку

$$e_{2n}^{\perp}(f^*)_C \geq \frac{\lambda}{3}\Big(1 - \frac{1}{2l} - \frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)}\Big)\Big(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \frac{1}{3\xi(p)}\Big(\frac{\underline{\alpha}_n(g_p)}{p' + \underline{\alpha}_n(g_p)}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(1 - \frac{1}{2l} - \frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)}\Big)\Big(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}}. \qquad (2.102)$$

Перейшовши до границі в нерівності (2.102) при $l \to \infty$, отримуємо (2.85). Із (2.84) і (2.85) випливає (2.81). Теорему 2.3 доведено.

Неважко переконатись, що умовам теореми 2.3 задовольняють, наприклад, функції

- $\psi(t) = t^{-r}, \quad \frac{1}{p} < r < 1;$ (2.103)
- $\psi(t) = t^{-\frac{1}{p}} \ln^{-\gamma}(t + K),\ \gamma > \frac{1}{p'},\ K \geq e^{\gamma p'} - 1;$ (2.104)
- $\psi(t) = t^{-\frac{1}{p}} \ln^{-\gamma}(t + K_1)(\ln\ln(t + K_2))^{-\delta}, \quad \gamma \geq \frac{1}{p'}, \quad \delta > \frac{1}{p'},$

$K_2 \geq K_1 \geq e^{\max\{(\gamma+\delta)p', e\}} - 1.$ (2.105)

Оскільки у випадку, коли $g_p \in \mathfrak{M}_C$ має справедливе співвідношення (2.74), то з теореми 2.3 випливає наступне твердження.

Наслідок 2.5. *Нехай* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$, *і*

$$\underline{\alpha}_1(g_p) = \inf_{t \geq 1} \alpha(g_p; t) > p',$$

де $g_p(t) = \psi(t)(t)t^{\frac{1}{p}}$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Тоді, якщо* $g_p \in \mathfrak{M}_0$, *то для довільного* $\beta \in \mathbb{R}$

$$e_n^{\perp}(C_{\beta,p}^{\psi})_C \asymp \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}}, \qquad (2.106)$$

якщо ж $g_p \in \mathfrak{M}_C$, *то для довільного* $\beta \in \mathbb{R}$

$$e_n^{\perp}(C_{\beta,p}^{\psi})_C \asymp \psi(n)n^{\frac{1}{p}}. \qquad (2.107)$$

Прикладом функцій ψ, які задовольняють умови наслідку 2.5 і для яких виконується умова (2.77), є функції виду (2.104) і (2.105).

Застосувавши наслідок 2.5 до функцій ψ виду (2.104) і (2.105), отримаємо наступні твердження.

Наслідок 2.6. *Нехай* $\psi(t) = t^{-\frac{1}{p}} \ln^{-\gamma}(t+K)$, $\gamma > \frac{1}{p'}$, $K \geq e^{\gamma p'} - 1$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$e_n^{\perp}(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \psi(n) n^{\frac{1}{p}} \ln^{\frac{1}{p'}} n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Наслідок 2.7. *Нехай* $\psi(t) = t^{-\frac{1}{p}} \ln^{-\frac{1}{p'}}(t+K_1)(\ln\ln(t+K_2))^{-\delta}$, $\delta > \frac{1}{p'}$, $K_2 \geq K_1 \geq e^{\max\{\delta p'+1,\ e\}} - 1$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$e_n^{\perp}(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \psi(n) n^{\frac{1}{p}} (\ln n)^{\frac{1}{p'}} (\ln\ln n)^{\frac{1}{p'}}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}.$$

2.3. Оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості в інтегральних метриках

Теорема 2.4. *Нехай* $1 < s < \infty$, *функція* $g_{s'}(t) = \psi(t)t^{\frac{1}{s'}}$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, *така, що*

$$g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} < \infty. \tag{2.108}$$

Тоді для довільних $n \in \mathbb{N}$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$ *мають місце співвідношення*

$$K^{(5)}_{\psi,s}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2}\Big)^{\frac{1}{s}} \leq$$

$$\leq E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \leq \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \leq$$

$$\leq K^{(2)}_{\psi,s'}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2}\Big)^{\frac{1}{s}}, \tag{2.109}$$

в яких

$$K^{(5)}_{\psi,s} = \frac{1}{8\xi(s')}\Big(\frac{\underline{\alpha}_1(g_{s'})}{\underline{\alpha}_1(g_{s'}) + s}\Big)^{\frac{1}{s'}} \tag{2.110}$$

а величини $K^{(2)}_{\psi,s'}$, $\xi(s')$ *і* $\underline{\alpha}_1(g_{s'})$ *означаються формулами (2.6), (2.3) і (2.1) відповідно.*

Доведення теореми 2.4. Згідно з інтегральним зображенням (1.2), для довільної функції $f \in L^{\psi}_{\beta,1}$, $\beta \in \mathbb{R}$, майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ справедлива рівність

$$f(x) - S_{n-1}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{\beta,n}(x-t)f^{\psi}_{\beta}(t)dt, \quad f^{\psi}_{\beta} \in B_1, \tag{2.111}$$

де $\Psi_{\beta,n}(t)$ означається формулою (2.8).

При цьому в силу включення $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$ і умови (2.108), $\Psi_{\beta,n} \in L_s$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$.

Далі нам буде корисною нерівність (1.5.28) роботи [37, с. 43].

Твердження 2.4. *Якщо* $h \in L_p,\ 1 \le p \le \infty$, *то згортка*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\pi} h(x-t)g(t)dt$$

належить до L_p, *причому*

$$\|f\|_p \le \frac{1}{\pi}\,\|h\|_p\,\|g\|_1\,, \tag{2.112}$$

а у випадку $h \in L_\infty$ *згортка* $f(x)$ *неперервна на всій осі.*

Скориставшись нерівністю (2.112), одержимо, що для довільних $1 < s < \infty$

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \le \frac{1}{\pi}\sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,1}} \|\Psi_{\beta,n}\|_s\|f^{\psi}_{\beta}\|_1 \le \frac{1}{\pi}\|\Psi_{\beta,n}\|_s. \tag{2.113}$$

З формул (2.29) і (2.30) при виконанні умови (2.108), і умови $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$, $1 < s < \infty,\ \frac{1}{s}+\frac{1}{s'} = 1$ випливає нерівність

$$\frac{1}{\pi}\|\Psi_{\beta,n}\|_s \le \frac{1}{\pi}\xi(s)\Big(1+\frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}\Big)^{\frac{1}{s}}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\Big)^{\frac{1}{s}}, \tag{2.114}$$

в якій $\xi(s)$, $\underline{\alpha}_n(\psi)$ і $\alpha(\psi;t)$ означаються формулами (2.3), (2.1) і (1.17) відповідно.

З нерівностей (2.113) і (2.114) отримуємо оцінку

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \le \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\xi(s)\Big(\frac{\underline{\alpha}_n(g_{s'})+s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}\Big)^{\frac{1}{s}}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\Big)^{\frac{1}{s}} \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\xi(s)\Big(\frac{\underline{\alpha}_1(g_{s'})+s}{\underline{\alpha}_1(g_{s'})}\Big)^{\frac{1}{s}}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\Big)^{\frac{1}{s}},\ 1<s<\infty, \frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1. \tag{2.115}$$

Знайдемо оцінку знизу для $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$, $1 < s < \infty$. З цією метою розглянемо функцію

$$f_m(t) = f_m(\psi;\beta;t) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_m(\tau)\Psi_\beta(t-\tau)d\tau, \tag{2.116}$$

де

$$\varphi_m(t) := \frac{1}{4\pi}\Big(V_m(t)-\frac{1}{2}\Big), \tag{2.117}$$

а $V_m(t)$ — ядра Валле Пуссена вигляду (2.55). Згідно формули (1.3.15) роботи [95, с. 31] для ядер $V_m(t)$ справедлива рівність

$$V_m(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2 \sum_{k=m+1}^{2m-1} \Big(1 - \frac{k}{2m}\Big) \cos kt,\ \ m \in \mathbb{N}. \qquad (2.118)$$

Покажемо, що $\|\varphi_m\|_1 \le 1$, $m \in \mathbb{N}$.

Враховуючи (2.60), одержуємо

$$\|\varphi_m\|_1 = \frac{1}{4\pi}\Big\|V_m(t) - \frac{1}{2}\Big\|_1 \le \frac{1}{4\pi}(\|V_m\|_1 + \pi) \le 1.$$

Оскільки $\|\varphi_m\|_1 \le 1$ і $\varphi_m \perp 1$, то $f_m \in L^{\psi}_{\beta,1}$, $m \in \mathbb{N}$. Використовуючи співвідношення (2.116)–(2.118), а також твердження 3.7.1 з [95, с. 134] отримаємо рівність

$$f_m(t) = \frac{1}{4\pi}\Big(\sum_{k=1}^{m} \psi(k) \cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big) + 2 \sum_{k=m+1}^{2m-1} \Big(1 - \frac{k}{2m}\Big)\psi(k) \cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big). \qquad (2.119)$$

Покладемо

$$\Phi_s(x) := \int_x^{\infty} \psi^s(t) t^{s-2} dt, \quad 1 < s < \infty,$$

і

$$B(n) = B(\psi; s; n) := \big[\Phi_s^{-1}\big(\frac{1}{2n}\Phi_s(n)\big)\big] + 1, \qquad (2.120)$$

де $[\alpha]$ — ціла частина дійсного числа α, а Φ_s^{-1} — функція обернена до Φ_s.

Розглянемо інтеграл

$$I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} (f_{B(n)}(t) - t_{n-1}(t)) \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big) dt, \qquad (2.121)$$

де $t_{n-1}(t) \in \mathcal{T}_{2n-1}$, а функція $f_{B(n)}(t)$ означається формулою (2.119) при $m = B(n)$.

Використавши твердження 2.3, запишемо

$$I_3 \le \|f_{B(n)} - t_{n-1}\|_s \Big\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big\|_{s'}. \qquad (2.122)$$

Для оцінки норми $\Big\| \sum\limits_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big\|_{s'}$ скористаємось лемою 2.1.

Оскільки, згідно з умовою теореми, $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$, то функція $\psi^{s-1}(t)t^{s-2} = g_{s'}^{s-1}(t)t^{-\frac{1}{s}}$ монотонно спадає до нуля. Тому, поклавши в умовах леми 2.1 $a_k = \psi^{s-1}(k)k^{s-2}$, $\gamma = -\frac{\beta\pi}{2}$, $p = s'$, запишемо

$$\Big\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k)k^{s-2} \cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big\|_{s'} \leq$$

$$\leq \xi(s')\bigg(\sum_{k=n}^{\infty} \big(\psi^{s-1}(k)k^{s-2}\big)^{s'} k^{s'-2} + \big(\psi^{s-1}(n)n^{s-2}\big)^{s'} n^{s'-1}\bigg)^{\frac{1}{s'}} =$$

$$= \xi(s')\bigg(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s}(k)k^{s-2} + \psi^{s}(n)n^{s-1}\bigg)^{\frac{1}{s'}}. \qquad (2.123)$$

Застосувавши лему 2.2 при $p = s'$, з (2.123) отримаємо

$$\Big\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k)k^{s-2} \cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big\|_{s'} \leq$$

$$\leq \xi(s')\Big(1 + \frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}\Big)^{\frac{1}{s'}} \bigg(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s}(k)k^{s-2}\bigg)^{\frac{1}{s'}}. \qquad (2.124)$$

Зі співвідношень (2.122) і (2.124) отримуємо оцінку

$$\|f_{B(n)} - t_{n-1}\|_s \geq$$

$$\geq \frac{1}{\xi(s')}\Big(\frac{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}{\underline{\alpha}_n(g_{s'}) + s}\Big)^{\frac{1}{s'}} \bigg(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s}(k)k^{s-2}\bigg)^{-\frac{1}{s'}} I_3. \qquad (2.125)$$

Оскільки для будь–якого $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} t_{n-1}(t) \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k)k^{s-2} \cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big)dt = 0, \qquad (2.126)$$

то на підставі (2.121)

$$I_3 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{B(n)}(t) \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k)k^{s-2} \cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big)dt. \qquad (2.127)$$

Відомо, що

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(kt + \theta)\cos(mt + \theta)dt = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \pi, & k = m, \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{N}, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (2.128)$$

Використовуючи (2.128) при $\theta = -\frac{\beta\pi}{2}$ і (2.119) при $m = B(n)$, з (2.127) одержуємо

$$I_3 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{k=1}^{B(n)}\psi(k)\cos\Big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\Big)+$$

$$+2\sum_{k=B(n)+1}^{2B(n)-1}\Big(1-\frac{k}{2B(n)}\Big)\psi(k)\cos\Big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big)\times$$

$$\times\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{s-1}(k)k^{s-2}\cos\Big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\Big)dt=$$

$$=\frac{1}{4}\Big(\sum_{k=n}^{B(n)}\psi^s(k)k^{s-2}+2\sum_{k=B(n)+1}^{2B(n)-1}\Big(1-\frac{k}{2B(n)}\Big)\psi^s(k)k^{s-2}\Big)>$$

$$>\frac{1}{4}\sum_{k=n}^{B(n)}\psi^s(k)k^{s-2}=\frac{1}{4}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}-\sum_{k=B(n)+1}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\Big). \qquad (2.129)$$

Для оцінки знизу інтеграла I_3 залишилось оцінити зверху суму $\sum\limits_{k=B(n)+1}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}$. З (2.120) випливає

$$\sum_{k=B(n)+1}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\leq\int\limits_{B(n)}^{\infty}\psi^s(t)t^{s-2}dt=\Phi_s(B(n))<$$

$$<\frac{1}{2n}\Phi_s(n)\leq\frac{1}{2n}\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}. \qquad (2.130)$$

З нерівностей (2.125), (2.129) і (2.130) для довільного $t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}$ отримаємо оцінку

$$\|f_{B(n)}-t_{n-1}\|_s\geq$$

$$\geq\frac{1}{\xi(s')}\Big(\frac{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})+s}\Big)^{\frac{1}{s'}}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\Big)^{-\frac{1}{s'}}\frac{1}{4}\Big(1-\frac{1}{2n}\Big)\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\geq$$

$$\geq\frac{1}{8\xi(s')}\Big(\frac{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})+s}\Big)^{\frac{1}{s'}}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\Big)^{\frac{1}{s}}\geq$$

$$\geq\frac{1}{8\xi(s')}\Big(\frac{\underline{\alpha}_1(g_{s'})}{\underline{\alpha}_1(g_{s'})+s}\Big)^{\frac{1}{s'}}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\Big)^{\frac{1}{s}}. \qquad (2.131)$$

Об'єднуючи (2.115) і (2.131), отримуємо співвідношення (2.109). Теорему 2.4 доведено.

Прикладами функцій ψ, які задовольняють умови теореми 2.4, є функції:

- $\psi(t) = t^{-r}, \quad r > \frac{1}{s'};$
- $\psi(t) = t^{-\frac{1}{s'}} \ln^{-\gamma}(t+K), \quad \gamma > \frac{1}{s}, \quad K > 0; \qquad (2.132)$
- $\psi(t) = t^{-\frac{1}{s'}}(\ln(t+K_1))^{-\frac{1}{s}}(\ln\ln(t+K_2))^{-\gamma}, \quad \gamma > \frac{1}{s}, \quad K_2 \geq e-1,$

$K_1 > 0, \qquad (2.133)$

та інші.

Зауваження 2.3. *В ході доведення теореми 2.4 було показано, що при виконанні її умов для довільного $n \in \mathbb{N}$ виконується більш точна, ніж (2.109), оцінка:*

$$\frac{1}{8\xi(s')}\Big(\frac{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})+s}\Big)^{\frac{1}{s'}}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\Big)^{\frac{1}{s}} \leq E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \leq \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\xi(s)\Big(\frac{\underline{\alpha}_n(g_{s'})+s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}\Big)^{\frac{1}{s}}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\Big)^{\frac{1}{s}}, \qquad (2.134)$$

де $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, а $\xi(s')$ і $\underline{\alpha}_n(g_{s'})$ — додатні величини, що означаються за допомогою формул (2.3) і (2.1) відповідно.

З (2.134) випливає наступне твердження.

Наслідок 2.9. *Нехай $r > \frac{1}{s'}$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$. Тоді для довільних $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$ виконується оцінка:*

$$\frac{1}{8\xi(s')}\Big(\frac{s'}{s'+s(rs'-1)}\Big)^{\frac{1}{s'}}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{s(r-1)+2}}\Big)^{\frac{1}{s}} \leq E_n(W^r_{\beta,1})_s \leq$$

$$\leq \mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_s \leq \frac{1}{\pi}\xi(s)\Big(\frac{s'+s(rs'-1)}{s'}\Big)^{\frac{1}{s}}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{s(r-1)+2}}\Big)^{\frac{1}{s}}, \qquad (2.135)$$

де $\xi(s)$ — додатня величина, що означається за допомогою формули (2.3).

Оскільки

$$\frac{1}{\alpha-1}n^{1-\alpha} \le \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}} \le \Big(1+\frac{1}{\alpha-1}\Big)n^{1-\alpha},\ \alpha>1,$$

то з (2.135) одержуємо співвідношення

$$\frac{1}{8\xi(s')}\Big(\frac{s'}{s'+s(rs'-1)}\Big)^{\frac{1}{s'}}\Big(\frac{1}{s(r-1)+1}\Big)^{\frac{1}{s}}n^{-r+\frac{1}{s'}} \le E_n(W^r_{\beta,1})_s \le$$

$$\le \mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_s \le \frac{1}{\pi}\xi(s)\Big(\frac{s'+s(rs'-1)}{s'}\Big)^{\frac{1}{s}}\Big(\frac{s(r-1)+2}{s(r-1)+1}\Big)^{\frac{1}{s}}n^{-r+\frac{1}{s'}}. \quad (2.136)$$

Нерівності (2.136) уточнюють порядкові оцінки (1.31) і (1.33) при $p=1$ і $1<s<\infty$.

Нехай виконуються умови $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}<\infty$, $\psi(t)t^{\frac{1}{s'}}\in\mathfrak{M}_C$, $1<s<\infty$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, тоді як випливає зі співвідношення (2.31), має місце порядкова оцінка

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\asymp\psi^s(n)n^{s-1}. \quad (2.137)$$

Отже, з (2.109) і (2.137) отримуємо наступне твердження.

Наслідок 2.10. *Нехай* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}<\infty$, $1<s<\infty$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, $\beta\in\mathbb{R}$ *і* $n\in\mathbb{N}$. *Тоді, якщо функція* $g_{s'}(t)=\psi(t)t^{\frac{1}{s'}}$ *належить до* $\mathfrak{M}_0$, *то*

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s\asymp\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s\asymp\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\Big)^{\frac{1}{s}}, \quad (2.138)$$

якщо ж $g_{s'}\in\mathfrak{M}_C$, *то*

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s\asymp\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s\asymp\psi(n)n^{\frac{1}{s'}}. \quad (2.139)$$

Порядкові оцінки (2.139) встановлені раніше в роботі [18].

Зауважимо, що у випадку, коли

$$g_{s'}\in\mathfrak{M}_0,\quad \lim_{t\to\infty}\alpha(g_{s'};t)=\infty, \quad (2.140)$$

виконується оцінка

$$\psi(n)n^{\frac{1}{s'}}=o\bigg(\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\Big)^{\frac{1}{s}}\bigg),\ n\to\infty,$$

тобто порядкові оцінки (2.139) місця не мають. Умова (2.140) виконується, зокрема, для функцій $\psi(t)$ вигляду (2.132) і (2.133). Наведемо наслідок з теореми 2.4 для таких функцій ψ.

Наслідок 2.10. *Нехай* $\psi(t) = t^{-\frac{1}{s'}} \ln^{-\gamma}(t+K)$, $\gamma > \frac{1}{s}$, $K > 0$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. *Тоді*

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \asymp \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \asymp \psi(n) n^{\frac{1}{s'}} (\ln n)^{\frac{1}{s}}.$$

Наслідок 2.11. *Нехай* $\psi(t) = t^{-\frac{1}{s'}} \ln^{-\frac{1}{s}}(t+K_1)(\ln\ln(t+K_2))^{-\gamma}$, $\gamma > \frac{1}{s}$, $K_2 \geq e-1$, $K_1 > 0$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. *Тоді*

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \asymp \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \asymp \psi(n) n^{\frac{1}{s'}} (\ln n)^{\frac{1}{s}} (\ln\ln n)^{\frac{1}{s}}.$$

Теорема 2.5. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $\cos\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$. *Тоді для довільних* $n \in \mathbb{N}$ *мають місце нерівності*

$$\frac{1}{4\pi}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big| \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \leq \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k). \tag{2.141}$$

Доведення теореми 2.5. Встановимо оцінку зверху величини $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}$. Враховуючи формули (2.111) і твердження 2.1, запишемо

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \leq \frac{1}{\pi} \big\|\Psi_{\beta,n}\big\|_{\infty}. \tag{2.142}$$

Оскільки

$$\|\Psi_{\beta,n}\|_{\infty} = \Big\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big) \Big\|_{\infty} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k),$$

то з (2.142) одержуємо

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k), \;\; \beta \in \mathbb{R}, \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{2.143}$$

Встановимо оцінку знизу величини $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}$. Покладемо

$$\Psi(x) := \int\limits_{x}^{\infty} \psi(t) dt$$

і

$$D(l;n)=D(\psi;l;n):=\left[\Psi^{-1}\Big(\frac{1}{2l}\Psi(n)\Big)\right]+2n,\quad l,n\in\mathbb{N}. \tag{2.144}$$

Розглянемо функцію $f_{D(l;n)}(t)$, що означається формулою (2.119) при $m=D(l;n)$, тобто

$$f_{D(l;n)}(t)=\frac{1}{4\pi}\Big(\sum_{k=1}^{D(l;n)}\psi(k)\cos\Big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\Big)+$$

$$+2\sum_{k=D(l;n)+1}^{2D(l;n)-1}\Big(1-\frac{k}{2D(l;n)}\Big)\psi(k)\cos\Big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big). \tag{2.145}$$

Як було показано при доведенні теореми 2.4, $f_{D(l;n)}\in L^{\psi}_{\beta,1}$. Беручи до уваги рівність (2.145) та враховуючи умови теореми 2.5, отримуємо, що при довільних $l\in\mathbb{N}$

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}\geq|f_{D(l;n)}(0)-S_{n-1}(f_{D(l;n)};0)|=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\Big(\sum_{k=n}^{D(l;n)}\psi(k)+2\sum_{k=D(l;n)+1}^{2D(l;n)-1}\Big(1-\frac{k}{2D(l;n)}\Big)\psi(k)\Big)>$$

$$>\frac{1}{4\pi}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\sum_{k=n}^{D(l;n)}\psi(k)=\frac{1}{4\pi}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)-\sum_{k=D(l;n)+1}^{\infty}\psi(k)\Big). \tag{2.146}$$

З (2.144) випливає, що для довільних $l\in\mathbb{N}$

$$\sum_{k=D(l;n)+1}^{\infty}\psi(k)\leq\int\limits_{D(l;n)}^{\infty}\psi(t)dt=\Psi(D(l;n))<\frac{1}{2l}\Psi(n)\leq\frac{1}{2l}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{2.147}$$

Тому

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}>\frac{1}{4\pi}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\Big(1-\frac{1}{2l}\Big)\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k).\ l,n\in\mathbb{N} \tag{2.148}$$

Перейшовши в нерівності (2.148) до границі при $l\to\infty$, одержимо

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}\geq\frac{1}{4\pi}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{2.149}$$

На підставі (2.143) і (2.149) отримуємо оцінку (2.141). Теорему 2.5 доведено.

Теорема 2.6. *Нехай* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k)<\infty$, *функція* $g(t)=\psi(t)t$ *така, що*

$$g\in\mathfrak{M}_0$$

і

$$\underline{\alpha}_1(g)=\inf_{t\geq 1}\alpha(g;t)>1. \tag{2.150}$$

Тоді для довільних $\beta\in\mathbb{R}$, $\cos\frac{\beta\pi}{2}\neq 0$ *і* $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{1}{48\pi}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\Big(1-\frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\Big)\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\leq E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}\leq$$

$$\leq\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}\leq\frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{2.151}$$

Доведення теореми 2.6. В силу теореми 2.5 при умові $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k)<\infty$ справедливі оцінки

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}\leq\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}\leq\frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k),\ \ \beta\in\mathbb{R},\ \ n\in\mathbb{N}. \tag{2.152}$$

Знайдемо оцінку знизу величини $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}$. Розглянемо інтеграл

$$I_4=\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f_{D(l;n)}(t)-t_{n-1}(t))(V_{D(l;n)}(t)-V_{n-1}(t))dt, \tag{2.153}$$

де $t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}$, а функція $f_{D(l;n)}(t)$ та величина $D(l;n)$ означаються формулами (2.145) і (2.144) відповідно. Оцінимо знизу $|I_4|$.

Використавши формулу (2.118), запишемо

$$V_{D(l;n)}(t)-V_{n-1}(t)=$$

$$=\sum_{k=n}^{D(l;n)}\cos kt+2\sum_{k=D(l;n)+1}^{2D(l;n)-1}\Big(1-\frac{k}{2D(l;n)}\Big)\cos kt-2\sum_{k=n}^{2n-3}\Big(1-\frac{k}{2n-2}\Big)\cos kt. \tag{2.154}$$

З (2.154) випливає, що для довільного $t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}t_{n-1}(t)\big(V_{D(l;n)}(t)-V_{n-1}(t)\big)dt=0\ \ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{2.155}$$

Оскільки

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos\Big(mt - \frac{\beta\pi}{2}\Big) dt = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \pi \cos\frac{\beta\pi}{2}, & k = m, \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{N}, \ \beta \in \mathbb{R}, \tag{2.156}$$

то, беручи до уваги (2.145), (2.154) і (2.155), одержуємо

$$|I_4| = \Big|\int_{-\pi}^{\pi} f_{D(l;n)}(t)(V_{D(l;n)}(t) - V_{n-1}(t))dt\Big| =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{k=1}^{D(l;n)} \psi(k)\cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big) +$$

$$+2\sum_{k=D(l;n)+1}^{2D(l;n)-1}\Big(1 - \frac{k}{2D(l;n)}\Big)\psi(k)\cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big)\times$$

$$\times\Big(\sum_{k=n}^{D(l;n)} \cos kt + 2\sum_{k=D(l;n)+1}^{2D(l;n)-1}\Big(1 - \frac{k}{2D(l;n)}\Big)\cos kt -$$

$$-2\sum_{k=n}^{2n-3}\Big(1 - \frac{k}{2n-2}\Big)\cos kt\Big)dt\Big| =$$

$$= \frac{1}{4}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\Big(\sum_{k=n}^{D(l;n)} \psi(k) - 2\sum_{k=n}^{2n-3}\Big(1 - \frac{k}{2n-2}\Big)\psi(k) +$$

$$+4\sum_{k=D(l;n)+1}^{2D(l;n)-1}\Big(1 - \frac{k}{2D(l;n)}\Big)^2\psi(k)\Big) >$$

$$> \frac{1}{4}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\Big(\sum_{k=n}^{D(l;n)} \psi(k) - 2\sum_{k=n}^{2n-3}\Big(1 - \frac{k}{2n-2}\Big)\psi(k)\Big) =$$

$$= \frac{1}{4}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\Big(\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) - \sum_{k=D(l;n)+1}^{\infty} \psi(k) - 2\sum_{k=n}^{2n-3}\Big(1 - \frac{k}{2n-2}\Big)\psi(k)\Big). \tag{2.157}$$

Враховуючи монотонність функції $\psi(t)$, отримуємо

$$2\sum_{k=n}^{2n-3}\Big(1 - \frac{k}{2n-2}\Big)\psi(k) \leq \psi(n)\frac{1}{n-1}\sum_{k=n}^{2n-3}(2n-2-k) =$$

$$= \frac{1}{2}\psi(n)(n-2) < \frac{1}{2}\psi(n)n. \tag{2.158}$$

Далі нам буде корисним наступне твердження.

Лема 2.3. *Нехай* $\psi(t) = g(t)t^{-1}$ *і* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$. *Тоді, якщо* $g \in \mathfrak{M}_0$, *то для довільних* $n \in \mathbb{N}$

$$\psi(n)n \leq \frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k), \tag{2.159}$$

де величина $\underline{\alpha}_n(g)$ *означається формулою (2.1).*

Якщо ж $g \in \mathfrak{M}_C$, *то*

$$\frac{1}{\overline{\alpha}_n(g)} \cdot \frac{n\underline{\alpha}_n(g)}{1 + n\underline{\alpha}_n(g)} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \leq \psi(n)n \leq \frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k), \tag{2.160}$$

де величина $\overline{\alpha}_n(g)$ означається формулою (2.2).

Доведення леми 2.3. Нехай $g \in \mathfrak{M}_0$. Покажемо справедливість нерівності (2.159). Очевидно,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \geq \int\limits_{n}^{\infty} \psi(t)dt. \tag{2.161}$$

Оскільки функція $\psi(t)t$ монотонно спадає до нуля, то застосувавши метод інтегрування частинами до інтегралу $\int\limits_{n}^{\infty} \psi(t)dt$, отримаємо

$$\int\limits_{n}^{\infty} \psi(t)dt = -\psi(n)n - \int\limits_{n}^{\infty} \psi'(t)tdt = -\psi(n)n + \int\limits_{n}^{\infty} \psi(t)\frac{1}{\alpha(\psi;t)}dt. \tag{2.162}$$

З рівності (2.162) випливає рівність

$$\psi(n)n = \int\limits_{n}^{\infty} \psi(t)\frac{1}{\alpha(\psi;t)}dt - \int\limits_{n}^{\infty} \psi(t)dt. \tag{2.163}$$

Покажемо, що

$$\frac{1}{\alpha(\psi;t)} = 1 + \frac{1}{\alpha(g;t)},\ t \geq 1. \tag{2.164}$$

Дійсно, оскільки $\psi(t) = g(t)t^{-1}$, то

$$\frac{1}{\alpha(\psi;t)} = \frac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)} = \frac{t^{-1}g(t) + |g'(t)|}{g(t)t^{-1}} =$$

$$= 1 + \frac{t|g'(t)|}{g(t)} = 1 + \frac{1}{\alpha(g;t)}.$$

Підставивши (2.164) в (2.163), отримаємо рівність

$$\psi(n)n = \int\limits_n^\infty \psi(t)\Big(1 + \frac{1}{\alpha(g;t)}\Big)dt - \int\limits_n^\infty \psi(t)dt = \int\limits_n^\infty \psi(t)\frac{1}{\alpha(g;t)}dt. \quad (2.165)$$

З (2.161) і (2.165) випливає співвідношення

$$\psi(n)n \le \frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)} \int\limits_n^\infty \psi(t)dt \le \frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)} \sum_{k=n}^\infty \psi(k). \quad (2.166)$$

Нерівність (2.159) доведено.

Нехай $g \in \mathfrak{M}_C$. Оскільки $\mathfrak{M}_C \subset \mathfrak{M}_0$, то справедливість другої нерівності в (2.160) випливає з (2.159).

Врахувавши (2.166), маємо

$$\sum_{k=n}^\infty \psi(k) \le \psi(n) + \int\limits_n^\infty \psi(t)dt \le \Big(\frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)} \cdot \frac{1}{n} + 1\Big) \int\limits_n^\infty \psi(t)dt. \quad (2.167)$$

Тоді на підставі формул (2.165)–(2.167) одержуємо

$$\psi(n)n \ge \frac{1}{\overline{\alpha}_n(g)} \int\limits_n^\infty \psi(t)dt \ge \frac{1}{\overline{\alpha}_n(g)}\Big(\frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)} \cdot \frac{1}{n} + 1\Big)^{-1} \sum_{k=n}^\infty \psi(k).$$

Співвідношення (2.160), а отже і лему 2.3, доведено.

З (2.158) і (2.159) випливає нерівність

$$2\sum_{k=n}^{2n-3} \psi(k)\Big(1 - \frac{k}{2n-2}\Big) < \frac{1}{2\underline{\alpha}_n(g)} \sum_{k=n}^\infty \psi(k). \quad (2.168)$$

Об'єднуючи (2.147), (2.157) і (2.168), отримаємо, що для довільних $l \in \mathbb{N}$ і $n \in \mathbb{N}$

$$|I_4| > \frac{1}{4}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\Big(1 - \frac{1}{2l} - \frac{1}{2\underline{\alpha}_n(g)}\Big) \sum_{k=n}^\infty \psi(k). \quad (2.169)$$

З іншого боку, використовуючи твердження 2.3 та формулу (2.60), переконуємось, що для довільного $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$

$$|I_4| \le \|f_{D(l;n)} - t_{n-1}\|_\infty \|V_{D(l;n)} - V_{n-1}\|_1 \le$$

$$\leq 6\pi \|f_{D(l;n)} - t_{n-1}\|_\infty. \tag{2.170}$$

З (2.169), (2.170) та умови $\cos\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$ отримаємо

$$E_n(f_{D(l;n)})_\infty = \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f_{D(l;n)} - t_{n-1}\|_\infty \geq \frac{1}{6\pi}|I_4| \geq$$

$$\geq \frac{1}{24\pi}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\Big(1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2\underline{\alpha}_n(g)}\Big)\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) \geq$$

$$\geq \frac{1}{48\pi}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\Big(1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\Big)\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{2.171}$$

Об'єднуючи (2.152) і (2.171), отримуємо (2.151). Теорему 2.6 доведено.

Теорема 2.7. *Нехай* $\beta = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$, *функція* $g(t) = \psi(t)t$ *така, що*

$$g \in \mathfrak{M}_0$$

і

$$\underline{\alpha}_1(g) = \inf_{t\geq 1}\alpha(g;t) > 1.$$

Тоді для довільних $n \in \mathbb{N}$ *мають місце нерівності*

$$\frac{1}{360\pi}\Big(1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\Big)\psi(n)n \leq E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_\infty \leq$$

$$\leq \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_\infty \leq \Big(1 + \frac{2}{\pi}\Big)\psi(n)n. \tag{2.172}$$

Доведення теореми 2.7. Спочатку знайдемо оцінку зверху для величини $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_\infty$. З формули (2.142) при $\beta = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$, випливає

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_\infty \leq \frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}\big\|_\infty = \frac{1}{\pi}\Big\|\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\sin kt\Big\|_\infty. \tag{2.173}$$

Відомо (див., наприклад, [130, с. 611]), що

$$\Big|\sum_{j=1}^{k}\frac{\sin jx}{j}\Big| \leq \frac{\pi}{2} + 1,\ k \in \mathbb{N},\quad 0 < x < 2\pi. \tag{2.174}$$

Застосувавши перетворення Абеля до суми $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi(k)\sin kt$, та використавши те, що $g(t) = \psi(t)t$ монотонно спадає, а також формулу (2.174), отримуємо

$$\Big\|\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\sin kt\Big\|_\infty =$$

$$= \Big\| \sum_{k=n}^{\infty} (k\psi(k) - (k+1)\psi(k+1)) \sum_{j=1}^{k} \frac{\sin jt}{j} - n\psi(n) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin jt}{j} \Big\|_{\infty} \leq$$

$$\leq \Big(\frac{\pi}{2} + 1\Big) \sum_{k=n}^{\infty} |g(k) - g(k+1)| + \Big(\frac{\pi}{2} + 1\Big) g(n) =$$

$$= (\pi + 2) g(n) = (\pi + 2)\psi(n) n. \qquad (2.175)$$

З формул (2.173) і (2.175) випливає оцінка зверху величини $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}$ у випадку, коли $\cos\frac{\beta\pi}{2} = 0$. А саме

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \leq \Big(1 + \frac{2}{\pi}\Big)\psi(n) n. \qquad (2.176)$$

Знайдемо оцінку знизу величини $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}$. Розглянемо функцію

$$f^*_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{\beta}(\tau) \varphi^*_n(t - \tau) d\tau, \qquad (2.177)$$

де

$$\varphi^*_n(t) = \frac{-1}{5\pi n} \Big(\sum_{k=1}^{n} k \sin kt + \sum_{k=n+1}^{2n} (2n + 1 - k) \sin kt \Big). \qquad (2.178)$$

Покажемо, що $\|\varphi^*_n\|_1 \leq 1$. Очевидно,

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} k \sin kt + \sum_{k=n+1}^{2n} (2n + 1 - k) \sin kt \Big| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=n+1}^{2n} (2n + 1 - k) = n(n+1), \ \ 0 \leq |t| \leq \pi. \qquad (2.179)$$

Застосовуючи перетворення Абеля до кожної з сум в (2.178), отримуємо

$$\sum_{k=1}^{n} k \sin kt + \sum_{k=n+1}^{2n} (2n + 1 - k) \sin kt =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{k} \sin jt + n \sum_{j=1}^{n} \sin jt + \sum_{k=n+1}^{2n-1} \sum_{j=1}^{k} \sin jt + \sum_{j=1}^{2n} \sin jt - n \sum_{j=1}^{n} \sin jt =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{k} \sin jt + \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{j=1}^{k} \sin jt. \qquad (2.180)$$

Використавши рівність

$$\sum_{k=0}^{N}\cos(kt+\gamma)=\cos\Big(\frac{N}{2}t+\gamma\Big)\sin\frac{(N+1)t}{2}\operatorname{cosec}\frac{t}{2},\quad \gamma\in\mathbb{R},\ 0<|t|\leq\pi,$$

(див., наприклад, [19, с. 43]) з (2.180) отримуємо

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}k\sin kt+\sum_{k=n+1}^{2n}(2n+1-k)\sin kt\Big|=$$

$$=\Big|-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}+\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\Big|=$$

$$=\frac{1}{2|\sin\frac{t}{2}|}\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\cos\Big(k+\frac{1}{2}\Big)t-\sum_{k=n+1}^{2n}\cos\Big(k+\frac{1}{2}\Big)t\Big|=$$

$$=\frac{1}{2|\sin\frac{t}{2}|}\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\cos\Big(k+\frac{1}{2}\Big)t-\sum_{k=0}^{2n}\cos\Big(k+\frac{1}{2}\Big)t+\sum_{k=0}^{n}\cos\Big(k+\frac{1}{2}\Big)t\Big|\leq$$

$$\leq\frac{3}{2(\sin\frac{t}{2})^2},\ 0<|t|\leq\pi. \tag{2.181}$$

Зі співвідношення (2.181) та нерівності

$$\sin\frac{t}{2}\geq\frac{t}{\pi},\quad 0\leq t\leq\pi,$$

маємо

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}k\sin kt+\sum_{k=n+1}^{2n}(2n+1-k)\sin kt\Big|\leq\frac{3\pi^2}{2t^2},\ 0<|t|\leq\pi. \tag{2.182}$$

З (2.179) і (2.182) випливає, що

$$\|\varphi_n^*\|_1\leq\frac{1}{5\pi n}\bigg(\int\limits_{|t|\leq\frac{\pi}{n}}n(n+1)dt+\frac{3\pi^2}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{n}\leq|t|\leq\pi}\frac{dt}{t^2}\bigg)=$$

$$=\frac{1}{5\pi n}\big(2\pi(n+1)+3\pi(n-1)\big)<1.$$

Оскільки $\|\varphi_n^*\|_1\leq 1$ і $\varphi_n^*\perp 1$, то $f_n^*\in L^{\psi}_{\beta,1}$.

З урахуванням формул (2.177), (2.178) та твердження (3.7.1) роботи [95, с. 134] неважко переконатись, що для функції f_n^* вигляду (2.177) має місце рівність

$$f_n^*(t)=\frac{1}{5\pi n}\Big(\sum_{k=1}^{n}k\psi(k)\cos kt+\sum_{k=n+1}^{2n}(2n+1-k)\psi(k)\cos kt\Big). \tag{2.183}$$

Розглянемо інтеграл

$$I_5=\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f_n^*(t)-t_{n-1}(t))(V_{2n}(t)-V_n(t))dt, \tag{2.184}$$

де $t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}$, а $V_m(t)$ — суми Валле Пуссена вигляду (2.118). Використавши твердження 2.3 та нерівність (2.60), отримаємо

$$I_5\le\|f_n^*-t_{n-1}\|_\infty\|V_{2n}-V_n\|_1\le 6\pi\|f_n^*-t_{n-1}\|_\infty. \tag{2.185}$$

Оскільки, згідно з (2.118),

$$V_{2n}(t)-V_n(t)=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{2n}\cos kt+2\sum_{k=2n+1}^{4n-1}\Big(1-\frac{k}{4n}\Big)\cos kt-2\sum_{k=n+1}^{2n-1}\Big(1-\frac{k}{2n}\Big)\cos kt,$$

то, враховуючи формули (2.128), (2.183), (2.184), та виконуючи елементарні перетворення, запишемо оцінку знизу

$$I_5=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_n^*(t)(V_{2n}(t)-V_n(t))dt=$$

$$=\frac{1}{5\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{k=1}^{n}k\psi(k)\cos kt+\sum_{k=n+1}^{2n}(2n+1-k)\psi(k)\cos kt\Big)\times$$

$$\times\Big(\sum_{k=n+1}^{2n}\cos kt+2\sum_{k=2n+1}^{4n-1}\Big(1-\frac{k}{4n}\Big)\cos kt-2\sum_{k=n+1}^{2n-1}\Big(1-\frac{k}{2n}\Big)\cos kt\Big)dt=$$

$$=\frac{1}{5n}\Big(\sum_{k=n+1}^{2n}(2n+1-k)\psi(k)-2\sum_{k=n+1}^{2n-1}(2n+1-k)\psi(k)\Big(1-\frac{k}{2n}\Big)\Big)=$$

$$=\frac{1}{5n^2}\sum_{k=n+1}^{2n}\psi(k)(2n+1-k)(k-n)\ge$$

$$=\frac{\psi(2n)}{5n^2}\Big((2n+1)\sum_{k=n+1}^{2n}(k-n)-\sum_{k=n+1}^{2n}k^2+n\sum_{k=n+1}^{2n}k\Big)=$$

$$=\frac{\psi(2n)}{5n^2}\Big(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}-\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}+$$

$$+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n^2(3n+1)}{2}\Big)=$$

$$= \frac{\psi(2n)}{10n}\Big(\frac{1}{3}n^2 + n + \frac{2}{3}\Big) > \frac{1}{30}\psi(2n)n =$$

$$= \frac{1}{30}\psi(n)n\frac{\psi(2n)}{\psi(n)} = \frac{1}{60}\psi(n)n\frac{g(2n)}{g(n)}. \tag{2.186}$$

Оскільки

$$\frac{g(2n)}{g(n)} = \frac{g(2n)-g(n)}{g(n)} + 1 > \frac{g'(n)n}{g(n)} + 1 = 1 - \frac{1}{\alpha(g;n)} \geq 1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}, \tag{2.187}$$

то використовуючи співвідношення (2.185), (2.186), отримаємо, що для довільного $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ справедливі нерівності

$$\|f_n^* - t_{n-1}\|_\infty \geq \frac{1}{6\pi}I_5 \geq \frac{1}{6\pi}\frac{1}{60}\psi(n)n\frac{g(2n)}{g(n)} \geq \frac{1}{360\pi}\Big(1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\Big)\psi(n)n.$$

Тому, в силу довільності полінома $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$, одержуємо оцінку

$$E_n(L^\psi_{\beta,1})_\infty \geq \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f_n^* - t_{n-1}\|_\infty \geq \frac{1}{360\pi}\Big(1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\Big)\psi(n)n. \tag{2.188}$$

Об'єднуючи (2.176) і (2.188), отримуємо (2.172). Теорему 2.7 доведено.

Прикладами функцій ψ, які задовольняють умови теорем 2.6–2.7 є функції:

- $\psi(t) = t^{-r}$, $1 < r < 2$;
- $$\psi(t) = t^{-1}\ln^{-\gamma}(t + K_1), \quad K_1 \geq e^\gamma, \quad \gamma > 1; \tag{2.189}$$
- $\psi(t) = t^{-1}\ln^{-\gamma}(t + K_1)(\ln\ln(t + K_2))^{-\delta}, \quad \gamma \geq 1, \quad \delta > 1,$

$$K_2 \geq K_1 \geq e^{\gamma+\delta+1}, \tag{2.190}$$

та інші.

Із теорем 2.6–2.7 безпосередньо випливає твердження.

Наслідок 2.12. *Нехай* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$, *функція* $g(t) = \psi(t)t$ *така, що* $g \in \mathfrak{M}_0$ *і* $\underline{\alpha}_1(g) > 1$. *Тоді, якщо* $\beta \in \mathbb{R}$ *такі, що* $\cos\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$, *то*

$$E_n(L^\psi_{\beta,1})_\infty \asymp \mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,1})_\infty \asymp \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k); \tag{2.191}$$

якщо ж $\cos\frac{\beta\pi}{2} = 0$, *то*

$$E_n(L^\psi_{\beta,1})_\infty \asymp \mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,1})_\infty \asymp \psi(n)n. \tag{2.192}$$

Якщо в умовах наслідку 2.12 $g \in \mathfrak{M}_C$, то згідно зі співвідношенням (2.160), має місце порядкова рівність

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \asymp \psi(n)n. \tag{2.193}$$

Отже, в цьому випадку має місце твердження.

Наслідок 2.13. *Нехай* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$, *функція* $g(t) = \psi(t)t$ *така, що* $g \in \mathfrak{M}_C$, $\underline{\alpha}_1(g) > 1$. *Тоді для довільних* $\beta \in \mathbb{R}$ *справедливі порядкові оцінки*

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \asymp \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \asymp \psi(n)n. \tag{2.194}$$

Справедливість порядкових оцінок (2.194) було встановлено в [18].

Зауважимо, що коли $g \in \mathfrak{M}_0$, $g(t) = \psi(t)t$ і

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(g;t) = \infty, \tag{2.195}$$

то виконується оцінка

$$\psi(n)n = o\biggl(\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)\biggr),\ n \to \infty,$$

яка є наслідком нерівності (2.159).

Прикладом функцій ψ, які задовольняють умови теорем 2.6–2.7 і для яких виконується умова (2.195), є функції виду (2.189) і (2.190).

Наведемо наслідки з теорем 2.6–2.7 для функцій виду (2.189) і (2.190).

Наслідок 2.14. *Нехай* $\psi(t) = t^{-1}\ln^{-\gamma}(t+e^{\gamma})$, $\gamma > 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, *і* $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. *Тоді*

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \asymp \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \asymp \begin{cases} \psi(n)n\ln n, & \cos\frac{\beta\pi}{2} \neq 0, \\ \psi(n)n, & \cos\frac{\beta\pi}{2} = 0. \end{cases} \tag{2.196}$$

Доведення наслідку 2.14. Покажемо, що для функцій $\psi(t) = t^{-1}\ln^{-\gamma}(t+e^{\gamma})$, $\gamma > 1$, виконуються умови теорем 2.5–2.6. Дійсно, для них

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\ln^{\gamma}(k+e^{\gamma})} < \infty$$

і

$$\alpha(g;t)=\frac{\ln(t+e^{\gamma})}{\gamma}\frac{t+e^{\gamma}}{t}>\frac{\ln(t+e^{\gamma})}{\gamma}>1.$$

Якщо $\cos\frac{\beta\pi}{2}=0$, то порядкова оцінка (2.196) безпосередньо випливає з (2.192). Покажемо справедливість (2.196) у випадку коли $\cos\frac{\beta\pi}{2}\neq 0$. Враховуючи нерівність (2.167) та монотонність функції $\psi(t)$ маємо

$$\int\limits_{n}^{\infty}\psi(t)dt\leq\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\leq\Big(\frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)}\cdot\frac{1}{n}+1\Big)\int\limits_{n}^{\infty}\psi(t)dt\leq 2\int\limits_{n}^{\infty}\psi(t)dt. \quad (2.197)$$

Тоді з (2.191) і (2.197) одержуємо

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}\asymp\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}\asymp$$

$$\asymp\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\asymp\int\limits_{n}^{\infty}\psi(t)dt\asymp\int\limits_{n}^{\infty}\frac{dt}{t\ln^{\gamma}(t+e^{\gamma})}\asymp$$

$$\asymp\ln^{1-\gamma}n\asymp\psi(n)n\ln n,\ n\geq 2.$$

Наслідок 2.14 доведено.

Наслідок 2.15. *Нехай* $\psi(t)=t^{-1}\ln^{-1}(t+K_1)(\ln\ln(t+K_2))^{-\delta}$, $\delta>1$, $K_2\geq K_1\geq e^{\delta+2}$, $\beta\in\mathbb{R}$, *і* $n\in\mathbb{N}\setminus\{1,2\}$. *Тоді*

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}\asymp\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}\asymp\begin{cases}\psi(n)n\ln n\ln(\ln n), & \cos\frac{\beta\pi}{2}\neq 0,\\ \psi(n)n, & \cos\frac{\beta\pi}{2}=0.\end{cases} \quad (2.198)$$

Доведення наслідку 2.15. Покажемо, що для функцій $\psi(t)=t^{-1}\ln^{-1}(t+K_1)(\ln\ln(t+K_2))^{-\delta}$, $\delta>1$, $K_2\geq K_1\geq e^{\delta+2}$, виконуються умови теорем 2.5–2.6. Дійсно, для них

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ln(k+K_1)(\ln\ln(k+K_2))^{\delta}}<\infty$$

і

$$\alpha(g;t)=\frac{1}{t\Big(\frac{1}{\ln(t+K_1)}\frac{1}{t+K_1}+\frac{\delta}{\ln\ln(t+K_2)}\frac{1}{\ln(t+K_2)}\frac{1}{t+K_2}\Big)}>$$

$$>\frac{\ln(t+K_1)(t+K_1)}{t\Big(1+\frac{\delta}{\ln\ln(t+K_2)}\Big)}>\frac{\ln(t+K_1)}{1+\frac{\delta}{\ln\ln(t+K_2)}}>\frac{\ln(1+e^{\delta+2})}{1+\frac{\delta}{\ln\ln(1+e^{\delta+2})}}>1.$$

У випадку коли $\cos\frac{\beta\pi}{2} = 0$ порядкова оцінка (2.198) безпосередньо випливає з (2.192). У випадку коли $\cos\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$ з (2.191) і (2.197) одержуємо

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \asymp \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \asymp$$

$$\asymp \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \asymp \int\limits_{n}^{\infty} \psi(t)dt \asymp \int\limits_{n}^{\infty} \frac{dt}{t\ln(t+K_1)(\ln\ln(t+K_2))^{\delta}} \asymp$$

$$\asymp \big(\ln\ln n\big)^{1-\delta} \asymp \psi(n)n\ln n\ln(\ln n), \; n \geq 3.$$

Наслідок 2.15 доведено.

2.4. Порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості в інтегральних метриках

Теорема 2.8. *Нехай* $1 < s < \infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} < \infty$, *а функція* $g_{s'}(t) = \psi(t) t^{\frac{1}{s'}}$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, *така, що*

$$g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$$

і

$$\underline{\alpha}_1(g_{s'}) = \inf_{t \geq 1} \alpha(g_{s'}; t) > s.$$

Тоді для довільних $n \in \mathbb{N}$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$ *мають місце співвідношення*

$$\frac{4}{3} K^{(5)}_{\psi,s'} \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \Big)^{\frac{1}{s}} \leq$$

$$\leq e^{\perp}_{2n}(L^{\psi}_{\beta,1})_s \leq e^{\perp}_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,1})_s \leq$$

$$\leq K^{(2)}_{\psi,s'} \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \Big)^{\frac{1}{s}}, \tag{2.199}$$

де $K^{(5)}_{\psi,s'}$ *і* $K^{(2)}_{\psi,s'}$ *означаються формулами (2.110) і (2.6) відповідно.*

Доведення теореми 2.8. Згідно з теоремою 2.4 при виконанні умов $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} < \infty$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$, має місце оцінка

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \leq K^{(2)}_{\psi,s'} \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \Big)^{\frac{1}{s}}. \tag{2.200}$$

Враховуючи (1.28) і (2.200), отримуємо оцінку

$$e^{\perp}_{2n}(L^{\psi}_{\beta,1})_s \leq e^{\perp}_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,1})_s \leq K^{(2)}_{\psi,s'} \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \Big)^{\frac{1}{s}}. \tag{2.201}$$

Залишається показати, що

$$e^{\perp}_{2n}(L^{\psi}_{\beta,1})_s \geq \frac{4}{3} K^{(5)}_{\psi,s'} \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \Big)^{\frac{1}{s}}. \tag{2.202}$$

Функцію $f_m(t)$ вигляду (2.119) запишемо у вигляді

$$f_m(t) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\Big(\sum_{k=1}^{m}\psi(k)\cos\Big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\Big)+2\sum_{k=m+1}^{2m-1}\Big(1-\frac{k}{2m}\Big)\psi(k)\cos\Big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big)=$$

$$=\frac{1}{8\pi}\Big(e^{-i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{1\le k\le m}\psi(k)e^{ikt}+e^{i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{-m\le k\le -1}\psi(|k|)e^{ikt}+$$

$$+2e^{-i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{m+1\le k\le 2m-1}\Big(1-\frac{k}{2m}\Big)\psi(k)e^{ikt}+$$

$$+2e^{i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{-2m+1\le k\le m-1}\Big(1-\frac{|k|}{2m}\Big)\psi(|k|)e^{ikt}\Big). \qquad (2.203)$$

При доведенні теореми 2.4 було встановлено, що $f_m\in L^{\psi}_{\beta,1}$ при будь–яких $m\in\mathbb{N}$.

Покажемо, що при $m=A_s(l;n)$, де $A_s(l;n)$ означається рівністю (2.87), має місце нерівність

$$e^{\perp}_{2n}(f_{A_s(l;n)})_s\ge$$

$$\ge\frac{1}{4\xi(s')}\Big(\frac{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}{s+\underline{\alpha}_n(g_{s'})}\Big)^{\frac{1}{s'}}\Big(1-\frac{1}{2l}-\frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}\Big)\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\Big)^{\frac{1}{s}},\ l,n\in\mathbb{N}. \qquad (2.204)$$

Покладемо

$$I_6:=\inf_{\gamma_{2n}}\Big|\int_{-\pi}^{\pi}(f_{A_s(l;n)}(t)-S_{\gamma_{2n}}(f_{A_s(l;n)};t))\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{s-1}(k)k^{s-2}\cos\Big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\Big)dt\Big|. \qquad (2.205)$$

Використавши нерівність Гельдера, запишемо

$$I_6\le\inf_{\gamma_{2n}}\|f_{A_s(l;n)}(t)-S_{\gamma_{2n}}(f_{A_s(l;n)};t)\|_s\Big\|\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{s-1}(k)k^{s-2}\cos\Big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big\|_{s'}=$$

$$=e^{\perp}_{2n}(f_{A_s(l;n)})_s\Big\|\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{s-1}(k)k^{s-2}\cos\Big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big\|_{s'},\quad 1<s<\infty. \qquad (2.206)$$

В силу (2.203) має місце рівність

$$f_{A_s(l;n)}(t)-S_{\gamma_{2n}}(f_{A_s(l;n)};t)=$$

$$=\frac{1}{8\pi}\Big(e^{-i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{\substack{1\le k\le A_s(l;n),\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(k)e^{ikt}+e^{i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{\substack{-A_s(l;n)\le k\le -1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(|k|)e^{ikt}+$$

$$+2e^{-i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{\substack{A_s(l;n)+1\le k\le 2A_s(l;n)-1,\\ k\notin\gamma_{2n}}} \Big(1-\frac{k}{2A_s(l;n)}\Big)\psi(k)e^{ikt}+$$

$$+2e^{i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{\substack{-2A_s(l;n)+1\le k\le A_s(l;n)-1,\\ k\notin\gamma_{2n}}} \Big(1-\frac{|k|}{2A_s(l;n)}\Big)\psi(|k|)e^{ikt}\Big). \tag{2.207}$$

Крім того,

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{s-1}(k)k^{s-2}\cos\Big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\Big)=$$

$$=\frac{1}{2}\Big(e^{-i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{k\ge n}\psi^{s-1}(k)k^{s-2}e^{ikt}+e^{i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{k\le -n}\psi^{s-1}(|k|)|k|^{s-2}e^{ikt}\Big). \tag{2.208}$$

Використавшии (2.94), (2.207) і (2.208), одержуємо

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f_{A_s(l;n)}(t)-S_{\gamma_{2n}}(f_{A_s(l;n)};t))\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{s-1}(k)k^{s-2}\cos\Big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\Big)dt=$$

$$=\frac{1}{8}\Big(\sum_{\substack{n\le k\le A_s(l;n),\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi^s(k)k^{s-2}+\sum_{\substack{-A_s(l;n)\le k\le -n,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi^s(|k|)|k|^{s-2}+$$

$$+2\sum_{\substack{A_s(l;n)+1\le k\le 2A_s(l;n)-1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\Big(1-\frac{k}{2A_s(l;n)}\Big)\psi^s(k)k^{s-2}+$$

$$+2\sum_{\substack{-2A_s(l;n)+1\le k\le -A_s(l;n)-1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\Big(1-\frac{|k|}{2A_s(l;n)}\Big)\psi^s(|k|)|k|^{s-2}\Big)>$$

$$>\frac{1}{8}\Big(\sum_{\substack{n\le k\le A_s(l;n),\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi^s(k)k^{s-2}+\sum_{\substack{-A_s(l;n)\le k\le -n,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi^s(|k|)|k|^{s-2}\Big)=$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{\substack{n\le |k|\le A_s(l;n),\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi^s(k)k^{s-2}. \tag{2.209}$$

Отже, в силу (2.205) і (2.209)

$$I_6>\frac{1}{8}\inf_{\gamma_{2n}}\sum_{\substack{n\le |k|\le A_s(l;n),\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi^s(k)k^{s-2}. \tag{2.210}$$

Враховуючи, що при $g_{s'}\in\mathfrak{M}_0$ функція $\psi^s(t)t^{s-2}$ спадає, то

$$\inf_{\gamma_{2n}}\sum_{\substack{n\le |k|\le A_s(l;n),\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi^s(k)k^{s-2}=2\sum_{k=2n}^{A_s(l;n)}\psi^s(k)k^{s-2}. \tag{2.211}$$

З (2.98), (2.210) і (2.211) випливає оцінка

$$I_6 > \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{2l} - \frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}\Big)\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}. \qquad (2.212)$$

На підставі формул (2.206), (2.124) і (2.212) отримуємо (2.204).

З того, що $f_{A_s(l;n)} \in L^{\psi}_{\beta,1}$, випливає нерівність

$$e^{\perp}_{2n}(f_{A_s(l;n)})_s \leq e^{\perp}_{2n}(L^{\psi}_{\beta,1})_s, \quad l \in \mathbb{N}.$$

При $l \to \infty$ з останньої нерівності і нерівності (2.204) отримуємо (2.202). Теорему 2.8 доведено.

Умовам теореми 2.8 задовольняють, наприклад, функції

- $\psi(t) = t^{-r}, \quad \dfrac{1}{s'} < r < 1;$ (2.213)
- $\psi(t) = t^{-\frac{1}{s'}}\ln^{-\gamma}(t+K), \quad \gamma > \dfrac{1}{s}, \quad K \geq e^{\gamma s} - 1;$ (2.214)
- $\psi(t) = t^{-\frac{1}{s'}}\ln^{-\gamma}(t+K_1)(\ln\ln(t+K_2))^{-\delta}, \quad \gamma \geq \dfrac{1}{s}, \quad \delta > \dfrac{1}{s},$

$K_2 \geq K_1 e^{\max\{(\gamma+\delta)s, e\}} - 1.$ (2.215)

Оскільки, у випадку, при $g_{s'} \in \mathfrak{M}_C$ виконується порядкова оцінка (2.137), то з теореми 2.8 випливає наступне твердження.

Наслідок 2.16. *Нехай* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2} < \infty$, *і*

$$\underline{\alpha}_1(g_{s'}) = \inf_{t\geq 1}\alpha(g_{s'};t) > s,$$

де $g_{s'}(t) = \psi(t)(t)t^{\frac{1}{s'}}$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$. *Тоді, якщо* $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$, *то для довільного* $\beta \in \mathbb{R}$

$$e^{\perp}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \asymp \Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\Big)^{\frac{1}{s}}, \qquad (2.216)$$

якщо ж $g_{s'} \in \mathfrak{M}_C$, *то для довільного* $\beta \in \mathbb{R}$

$$e^{\perp}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \asymp \psi(n)n^{\frac{1}{s'}}. \qquad (2.217)$$

Прикладом функцій ψ, які задовольняють умови наслідку 2.16 і для яких виконується умова (2.140), є функції виду (2.214) і (2.215).

Застосувавши наслідок 2.16 до функцій ψ виду (2.214) і (2.215), отримаємо наступне твердження.

Наслідок 2.17. *Нехай* $\psi(t) = t^{-\frac{1}{s'}} \ln^{-\gamma}(t+K)$, $\gamma > \frac{1}{s}$, $K \geq e^{\gamma s} - 1$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$e_n^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_s \asymp \psi(n) n^{\frac{1}{s'}} \ln^{\frac{1}{s}} n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Наслідок 2.18. *Нехай* $\psi(t) = t^{-\frac{1}{s'}} \ln^{-\frac{1}{s}}(t+K_1)(\ln\ln(t+K_2))^{-\delta}$, $\delta > \frac{1}{s}$, $K_2 \geq K_1 \geq e^{\max\{\delta s+1,\ e\}} - 1$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$e_n^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_s \asymp \psi(n) n^{\frac{1}{s'}} (\ln n)^{\frac{1}{s}} (\ln\ln n)^{\frac{1}{s}}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}.$$

Теорема 2.9. *Нехай* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$, *а функція* $g(t) = \psi(t)t$ *така, що*

$$g \in \mathfrak{M}_0$$

і

$$\underline{\alpha}_1(g) = \inf_{t \geq 1} \alpha(g; t) > 1.$$

Тоді, якщо $\cos\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, *то для довільного* $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{12\pi}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\right)\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) \leq e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \leq$$

$$\leq e_{2n-1}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \leq \frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \quad (2.218)$$

Доведення теореми 2.9. В силу теореми 2.5 за умови $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$ справедлива нерівність

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \leq \frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \quad (2.219)$$

Із (1.28) і (2.219) маємо

$$e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \leq e_{2n-1}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \leq \frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \quad (2.220)$$

Знайдемо оцінку знизу величини $e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty}$.

Покладемо

$$\Psi(x) := \int\limits_x^{\infty} \psi(t)dt,$$

$$D(l;n) = D(\psi;l;n) := \left[\Psi^{-1}\Big(\frac{1}{2l}\Psi(n)\Big)\right] + 2n, \quad l,n \in \mathbb{N}, \tag{2.221}$$

і

$$I_7 := \inf_{\gamma_{2n}} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f_{D(l;n)}(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_{D(l;n)};t)) V_{D(l;n)}(t)dt \right|, \tag{2.222}$$

де функція $f_{D(l;n)}(t)$ означається формулою (2.203) при $m = D(l;n)$.

Використовуючи твердження 2.3 та формулу (2.90), можемо записати оцінку

$$I_7 \le \inf_{\gamma_{2n}} \|f_{D(l;n)}(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_{D(l;n)};t)\|_\infty \|V_{D(l;n)}\|_1 =$$

$$= e^{\perp}_{2n}(f_{D(l;n)})_\infty \|V_{D(l;n)}\|_1 \le 3\pi e^{\perp}_{2n}(f_{D(l;n)})_\infty. \tag{2.223}$$

Згідно з (2.203)

$$f_{D(l;n)}(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_{D(l;n)};t) =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\Bigg(e^{-i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{\substack{1\le k\le D(l;n),\\ k\notin\gamma_{2n}}} \psi(k)e^{ikt} + e^{i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{\substack{-D(l;n)\le k\le -1,\\ k\notin\gamma_{2n}}} \psi(|k|)e^{ikt} +$$

$$+ 2e^{-i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{\substack{D(l;n)+1\le k\le 2D(l;n)-1,\\ k\notin\gamma_{2n}}} \Big(1 - \frac{k}{2D(l;n)}\Big)\psi(k)e^{ikt} +$$

$$+ 2e^{i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{\substack{-2D(l;n)+1\le k\le -D(l;n)-1,\\ k\notin\gamma_{2n}}} \Big(1 - \frac{|k|}{2D(l;n)}\Big)\psi(|k|)e^{ikt}\Bigg). \tag{2.224}$$

Із (2.92) при $m = D(l;n)$ маємо

$$V_{D(l;n)}(t) = \frac{1}{2}\Bigg(1 + \sum_{1\le k\le D(l;n)} e^{ikt} + \sum_{-D(l;n)\le k\le -1} e^{ikt} +$$

$$+ 2 \sum_{D(l;n)+1\le k\le 2D(l;n)-1} \Big(1 - \frac{k}{2D(l;n)}\Big)e^{ikt} +$$

$$+ 2 \sum_{-2D(l;n)+1\le k\le -D(l;n)-1} \Big(1 - \frac{|k|}{2D(l;n)}\Big)e^{ikt}\Bigg). \tag{2.225}$$

Із (2.94), (2.224) і (2.225) випливає

$$\Big|\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f_{D(l;n)}(t)-S_{\gamma_{2n}}(f_{D(l;n)};t))V_{D(l;n)}(t)dt\Big|=$$

$$=\frac{1}{8}\Big|e^{-i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{\substack{1\le k\le D(l;n),\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(k)+e^{i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{\substack{-D(l;n)\le k\le -1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(|k|)+$$

$$+2e^{-i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{\substack{D(l;n)+1\le k\le 2D(l;n)-1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\Big(1-\frac{k}{2D(l;n)}\Big)^2\psi(k)+$$

$$+2e^{i\frac{\beta\pi}{2}}\sum_{\substack{-2D(l;n)+1\le k\le -D(l;n)-1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\Big(1-\frac{|k|}{2D(l;n)}\Big)^2\psi(|k|)\Big|=$$

$$=\frac{1}{8}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\Big(\sum_{\substack{1\le k\le D(l;n),\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(k)+\sum_{\substack{-D(l;n)\le k\le -1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(|k|)+$$

$$+2\sum_{\substack{D(l;n)+1\le k\le 2D(l;n)-1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\Big(1-\frac{k}{2D(l;n)}\Big)^2\psi(k)+$$

$$+2\sum_{\substack{-2D(l;n)+1\le k\le -D(l;n)-1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\Big(1-\frac{|k|}{2D(l;n)}\Big)^2\psi(|k|)\Big)+$$

$$+i\sin\frac{\beta\pi}{2}\Big(-\sum_{\substack{1\le k\le D(l;n),\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(k)+\sum_{\substack{-D(l;n)\le k\le -1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(|k|)-$$

$$-2\sum_{\substack{D(l;n)+1\le k\le 2D(l;n)-1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\Big(1-\frac{k}{2D(l;n)}\Big)^2\psi(k)+$$

$$+2\sum_{\substack{-2D(l;n)+1\le k\le -D(l;n)-1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\Big(1-\frac{|k|}{2D(l;n)}\Big)^2\psi(|k|)\Big)\Big|\ge$$

$$\ge\frac{1}{8}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\Big(\sum_{\substack{1\le k\le D(l;n),\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(k)+\sum_{\substack{-D(l;n)\le k\le -1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(|k|)+$$

$$+2\sum_{\substack{D(l;n)+1\le k\le 2D(l;n)-1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\Big(1-\frac{k}{2D(l;n)}\Big)^2\psi(k)+$$

$$+2\sum_{\substack{-2D(l;n)+1\le k\le -D(l;n)-1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\Big(1-\frac{|k|}{2D(l;n)}\Big)^2\psi(|k|)\Big)>$$

$$> \frac{1}{8}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\Bigg(\sum_{\substack{1\le k\le D(l;n),\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(k)+\sum_{\substack{-D(l;n)\le k\le -1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(|k|)\Bigg). \tag{2.226}$$

На підставі (2.222) і (2.226) отримуємо оцінку

$$I_7 > \frac{1}{8}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\inf_{\gamma_{2n}}\Bigg(\sum_{\substack{1\le k\le D(l;n),\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(k)+\sum_{\substack{-D(l;n)\le k\le -1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(|k|)\Bigg)=$$

$$=\frac{1}{8}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\inf_{\gamma_{2n}}\sum_{\substack{1\le |k|\le D(l;n),\\ k\notin\gamma_{2n}}}\psi(k)=\frac{1}{4}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\sum_{k=n+1}^{D(l;n)}\psi(k)=$$

$$=\frac{1}{4}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\Bigg(\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)-\psi(n)-\sum_{k=D(l;n)+1}^{\infty}\psi(k)\Bigg). \tag{2.227}$$

З (2.221) випливає, що для довільних $l\in\mathbb{N}$

$$\sum_{k=D(l;n)+1}^{\infty}\psi(k)\le\int\limits_{D(l;n)}^{\infty}\psi(t)dt=\Psi(D(l;n))<\frac{1}{2l}\Psi(n)\le\frac{1}{2l}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{2.228}$$

Далі нам буде корисною лема 2.3. На підставі формул (2.159), (2.227) і (2.228), маємо

$$I_7 > \frac{1}{4}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\Big(1-\frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)n}-\frac{1}{2l}\Big)\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k),\quad l\in\mathbb{N}. \tag{2.229}$$

З (2.223) та (2.229) за умови $\cos\frac{\beta\pi}{2}\neq 0$ отримаємо

$$e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty}\ge e_{2n}^{\perp}(f_{D(l;n)})_{\infty}\ge\frac{1}{3\pi}I_7>$$

$$>\frac{1}{12\pi}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\Big(1-\frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)n}-\frac{1}{2l}\Big)\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{2.230}$$

Перейшовши в формулі (2.230) до границі при $l\to\infty$, одержимо

$$e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty}\ge\frac{1}{12\pi}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\Big(1-\frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)n}\Big)\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{2.231}$$

Об'єднуючи (2.220) і (2.231), отримуємо (2.218). Теорему 2.9 доведено.

Теорема 2.10. *Нехай* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k)<\infty$, $\beta=2k+1$, $k\in\mathbb{Z}$, *а функція* $g(t)=\psi(t)t$ *така, що*

$$g\in\mathfrak{M}_0$$

і

$$\underline{\alpha}_1(g) = \inf_{t\geq 1} \alpha(g;t) > 1. \tag{2.232}$$

Тоді для довільних $n \in \mathbb{N}$ мають місце нерівності

$$\frac{1}{60\pi}\Big(1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\Big)\psi(n)n \leq e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_\infty \leq e_{2n-1}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_\infty \leq \Big(1 + \frac{2}{\pi}\Big)\psi(n)n. \tag{2.233}$$

Доведення теореми 2.10. В силу теореми 2.7 при виконанні умов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$, $g \in \mathfrak{M}_0$, $\beta = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, справедливі оцінки

$$e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_\infty \leq e_{2n-1}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_\infty \leq \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^{\psi})_\infty \leq \Big(1 + \frac{2}{\pi}\Big)\psi(n)n. \tag{2.234}$$

Оцінимо знизу величину $e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_\infty$. Розглянемо функцію

$$f_n^*(t) = \frac{1}{5\pi n}\Big(\sum_{k=1}^{n} k\psi(k)\cos kt + \sum_{k=n+1}^{2n}(2n+1-k)\psi(k)\cos kt\Big). \tag{2.235}$$

При доведенні теореми 2.7 було показано, що f_n^* належить класу $L_{\beta,1}^{\psi}$. Доведемо, що

$$e_{2n}^{\perp}(f_n^*)_\infty \geq \frac{1}{60\pi}\Big(1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\Big)\psi(n)n. \tag{2.236}$$

Покладемо

$$I_8 := \inf_{\gamma_{2n}}\Big|\int_{-\pi}^{\pi}(f_n^*(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_n^*;t))V_{2n}(t)dt\Big|, \tag{2.237}$$

де V_m — суми Валле Пуссена вигляду (2.92).

Використавши твердження 2.3 та нерівність (2.90), отримаємо

$$I_8 \leq \inf_{\gamma_{2n}}\|f_n^*(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_n^*;t)\|_\infty \|V_{2n}\|_1 \leq 3\pi\, e_{2n}^{\perp}(f_n^*)_\infty. \tag{2.238}$$

Оскільки, в силу формули (2.235), має місце рівність

$$f_n^*(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_n^*;t) = \frac{1}{10\pi n}\Big(\sum_{\substack{1\leq k\leq n,\\ k\notin\gamma_{2n}}} k\psi(k)e^{ikt} + \sum_{\substack{-n\leq k\leq -1,\\ k\notin\gamma_{2n}}} |k|\psi(|k|)e^{ikt} +$$

$$+ \sum_{\substack{n+1\leq k\leq 2n,\\ k\notin\gamma_{2n}}}(2n+1-k)\psi(k)e^{ikt} + \sum_{\substack{-2n\leq k\leq -n-1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}(2n+1-k)\psi(|k|)e^{ikt}\Big)$$

а в силу (2.92) — рівність

$$V_{2n}(t)=\frac{1}{2}\Big(1+\sum_{1\le k\le 2n}e^{ikt}+\sum_{-2n\le k\le -1}e^{ikt}+2\sum_{2n+1\le k\le 4n-1}\Big(1-\frac{k}{2n}\Big)e^{ikt}+$$

$$+2\sum_{-4n+1\le k\le -2n-1}\Big(1-\frac{|k|}{2n}\Big)e^{ikt}\Big),$$

то, застосовуючи формули (2.94), знаходимо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f_n^*(t)-S_{\gamma_{2n}}(f_n^*;t))V_{2n}(t)dt=$$

$$=\frac{1}{10n}\Bigg(\sum_{\substack{1\le k\le n,\\ k\notin\gamma_{2n}}}k\psi(k)+\sum_{\substack{-n\le k\le -1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}|k|\psi(|k|)+$$

$$+\sum_{\substack{n+1\le k\le 2n,\\ k\notin\gamma_{2n}}}(2n+1-k)\psi(k)+\sum_{\substack{-2n\le k\le -n-1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}(2n+1-|k|)\psi(|k|)\Bigg). \qquad (2.239)$$

Врахувавши формули (2.237) і (2.239), монотонне спадання функції g, та виконуючи елементарні перетворення, запишемо оцінку знизу величини I_8

$$I_8=\frac{1}{10n}\inf_{\gamma_{2n}}\Bigg(\sum_{\substack{1\le k\le n,\\ k\notin\gamma_{2n}}}k\psi(k)+\sum_{\substack{-n\le k\le -1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}|k|\psi(|k|)+$$

$$+\sum_{\substack{n+1\le k\le 2n,\\ k\notin\gamma_{2n}}}(2n+1-k)\psi(k)+\sum_{\substack{-2n\le k\le -n-1,\\ k\notin\gamma_{2n}}}(2n+1-|k|)\psi(|k|)\Bigg)>$$

$$>\frac{1}{5n}\sum_{k=n+1}^{2n}\psi(k)(2n+1-k)\ge\frac{\psi(2n)}{5n}\sum_{k=n+1}^{2n}(2n+1-k)=$$

$$=\psi(2n)\frac{n+1}{10}>\frac{1}{10}\psi(2n)n. \qquad (2.240)$$

Використавши співвідношення (2.238) і (2.240), отримаємо

$$e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty}\ge e_{2n}^{\perp}(f_n^*)_{\infty}\ge\frac{1}{3\pi}I_8\ge\frac{1}{30\pi}\psi(n)n\frac{\psi(2n)}{\psi(n)}=\frac{1}{60\pi}\psi(n)n\frac{g(2n)}{g(n)}. \qquad (2.241)$$

Оскільки за умови (2.232) виконується нерівність (2.187), то з (2.241) випливає оцінка (2.236).

Із (2.234) і (2.236) випливає (2.233). Теорему 2.10 доведено.

Оскільки $g \in \mathfrak{M}_0$, де $g(t) = \psi(t)t$, то згідно з (2.187) виконується нерівність $\frac{g(2n)}{g(n)} > K_1$. Тоді з (2.241) отримуємо оцінку

$$e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \geq K_2\psi(n)n, \quad \cos\frac{\beta\pi}{2} = 0, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{2.242}$$

Крім того, очевидно, що при досить великих n справджується нерівність $\underline{\alpha}_1(g)n > K_3 > 1$. Тоді з (2.231) маємо

$$e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \geq K_4\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k), \quad \cos\frac{\beta\pi}{2} \neq 0, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{2.243}$$

Якщо $g \in \mathfrak{M}_C$, то справедлива порядкова рівність (2.193).

Із (2.220), (2.234), (2.242), (2.243) приходимо до наступного твердження.

Теорема 2.11. *Нехай $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді, якщо функція $g(t) = \psi(t)t$ така, що*

$$g \in \mathfrak{M}_0,$$

то

$$e_n^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \asymp \begin{cases} \sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi(k), & \cos\frac{\beta\pi}{2} \neq 0, \\ \psi(n)n, & \cos\frac{\beta\pi}{2} = 0, \end{cases} \tag{2.244}$$

якщо ж $g \in \mathfrak{M}_C$, то

$$e_n^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \asymp \psi(n)n. \tag{2.245}$$

Неважко переконатись, що умови теореми 2.11 задовольняють, наприклад, функції:

- $\psi(t) = t^{-r}, \ \ r > 1;$ (2.246)
- $\psi(t) = t^{-1}\ln^{-\gamma}(t+K), \quad K > 0, \quad \gamma > 1;$ (2.247)
- $\psi(t) = t^{-1}\ln^{-\gamma}(t+K_1)(\ln\ln(t+K_2))^{-\delta}, \gamma \geq 1, \quad \delta > 1, \quad K_1 > 0,$
  $K_2 > e-1.$ (2.248)

Прикладом функцій $\psi(t)$, які задовольняють умови теореми 2.11 і для яких виконується умова (2.195), є функції виду (2.247) та (2.248).

Наведемо наслідки з теореми 2.11, що містять порядкові оцінки величин $e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty}$ для функцій ψ виду (2.246)–(2.248).

Наслідок 2.19. *Нехай* $\psi(t) = t^{-r}$, $r > 1$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$e_n^{\perp}(W^{r}_{\beta,1})_{\infty} \asymp n^{-r+1}. \tag{2.249}$$

Зауважимо, що раніше порядкову рівність (2.249) було знайдено в роботі [59] у випадку $\beta = 2l - 1$, $l \in \mathbb{Z}$.

Наслідок 2.20. *Нехай* $\psi(t) = t^{-1}\ln^{-\gamma}(t + K)$, $\gamma > 1$, $K > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. *Тоді*

$$e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \asymp \begin{cases} \psi(n) n \ln n, & \cos\frac{\beta\pi}{2} \neq 0, \\ \psi(n) n, & \cos\frac{\beta\pi}{2} = 0. \end{cases}$$

Наслідок 2.21. *Нехай* $\psi(t) = t^{-1}\ln^{-1}(t + K_1)(\ln\ln(t + K_2))^{-\delta}$, $\delta > 1$, $K_1 > 0$, $K_2 > e - 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, *і* $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. *Тоді*

$$e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \asymp \begin{cases} \psi(n) n \ln n \ln(\ln n), & \cos\frac{\beta\pi}{2} \neq 0, \\ \psi(n) n, & \cos\frac{\beta\pi}{2} = 0. \end{cases}$$

Висновки до розділу 2

В другому розділі дисертації знайдено двосторонні оцінки для точних верхніх меж наближень сумами Фур'є, найкращих наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1<p<\infty$, в рівномірній метриці у випадку, коли функція $\psi(t)t^{\frac{1}{p}}$ належить до множини $\mathfrak{M}_0$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. При цьому константи в отриманих оцінках виражаються через параметри задачі в явному вигляді.

Аналогічні двосторонні оцінки одержано і для величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$, $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$, $e^{\perp}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$ при $1<s\leq\infty$ у випадку, коли добуток $\psi(t)t^{\frac{s-1}{s}}$ належить до множини $\mathfrak{M}_0$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^{s}(k)k^{s-2}<\infty$ при $1<s<\infty$ та $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k)<\infty$ при $s=\infty$.

Основні результати, які висвітлені в даному розділі, опубліковано в роботах [74–77], [79], [81], [83] та [99].

РОЗДІЛ 3

Апроксимативні характеристики класів нескінченно диференційовних функцій

Даний розділ присвячено знаходженню порядкових оцінок для найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p < \infty$, і $L^{\psi}_{\beta,1}$, в метриках просторів C і L_s, $1 \le s < \infty$, відповідно у випадку, коли ψ спадають до нуля швидше за будь–яку степеневу функцію. Також в ньому будуть встановлені порядкові оцінки найкращих m–членних тригонометричних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, в метриках просторів L_s, $1 \le s \le \infty$, у випадку, коли послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля не повільніше за геометричні прогресії.

3.1. Порядкові оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів нескінченно диференційовних функцій в рівномірній метриці

Покладемо

$$C_a := \frac{\pi}{96\left(1+\pi^2\right)^2}\frac{(a-1)^2(a-2)^2}{a^3(3a-4)}, \quad a>2, \tag{3.1}$$

$$C_{a,b} := \frac{1}{\pi}\max\left\{\frac{2b}{b-2}+\frac{1}{a}, 2\pi\right\}, \quad a>0, \quad b>2. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le p < \infty$. Тоді для $n \in \mathbb{N}$ таких, що $\eta(n) - n \ge a > 2$, $\mu(n) \ge b > 2$ справедливі оцінки*

$$C_a\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \le \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \le$$

$$\le C_{a,b}\,(2p)^{1-\frac{1}{p}}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.3}$$

де величини C_a та $C_{a,b}$ означені рівностями (3.1) і (3.2) відповідно.

В подальшому нам будуть корисні два наступні допоміжні твердження.

Лема 3.1. *Нехай $\gamma \in \mathbb{R}$, а $\lambda(k),\ k = 1, 2, ...$ — деяка послідовність дійсних чисел. Тоді при будь–яких $N, M \in \mathbb{N}$ $(N < M)$ для величин $W_{N,M}(\lambda;\gamma;t)$, означених формулою*

$$W_{N,M}(\lambda;\gamma;t) = \frac{1}{M-N}\sum_{k=N}^{M-1}\sum_{j=1}^{k}\lambda(j)\cos\left(jt+\gamma\right), \tag{3.4}$$

має місце рівність

$$W_{N,M}(\lambda;\gamma;t) = \sum_{k=1}^{N}\lambda(k)\cos\left(kt+\gamma\right) +$$

$$+\frac{1}{M-N}\sum_{k=N+1}^{M-1}\left(M-k\right)\lambda(k)\cos\left(kt+\gamma\right). \tag{3.5}$$

Доведення леми 3.1. Рівність (3.5) випливає із наступного ланцюжка перетворень:

$$\frac{1}{M-N}\sum_{k=N}^{M-1}\sum_{j=1}^{k}\lambda(j)\cos\left(jt+\gamma\right) =$$

$$= \frac{1}{M-N}\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda(j)\cos\left(jt+\gamma\right) + ... + \sum_{j=1}^{M-1}\lambda(j)\cos\left(jt+\gamma\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\lambda(k)\cos\left(kt+\gamma\right) +$$

$$+\frac{1}{M-N}\left[(M-N-1)\lambda(N+1)\cos\left((N+1)t+\gamma\right) + ...+\right.$$

$$\left.+\lambda(M-1)\cos\left((M-1)t+\gamma\right)\right] = \sum_{k=1}^{N}\lambda(k)\cos\left(kt+\gamma\right) +$$

$$+\frac{1}{M-N}\sum_{k=N+1}^{M-1}\left(M-k\right)\lambda(k)\cos\left(kt+\gamma\right).$$

Лему доведено.

Лема 3.2. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, $\eta(n) - n \geq a > 0$, $\mu(n) \geq b > 0$. Тоді*

1) якщо $a > 1$, то

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)(\eta(n)-n) < [\eta(n)]-n \le \eta(n)-n; \tag{3.6}$$

2) якщо $a > 2$, то

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a}\right)(\eta(n)-n) < [\eta(\eta(n))]-[\eta(n)] < \left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(\eta(n)-n)\,, \tag{3.7}$$

де $[\alpha]$ — ціла частина дійсного числа α.

Доведення леми 3.2. Друга нерівність в (3.6) є очевидною. Позначивши $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$, при $\eta(n) - n \ge a > 1$ одержуємо

$$[\eta(n)]-n = \eta(n)-n-\{\eta(n)\} = (\eta(n)-n)\left(1-\frac{\{\eta(n)\}}{\eta(n)-n}\right) >$$

$$> \left(1-\frac{1}{a}\right)(\eta(n)-n)\,. \tag{3.8}$$

Щоб переконатись в справедливості нерівностей (3.7), спочатку покажемо, що при $\eta(n) - n \ge a > 0$ і $\mu(n) \ge b > 0$ має місце співвідношення

$$\frac{1}{2}(\eta(n)-n) \le \eta(\eta(n))-\eta(n) < \left(1+\frac{1}{b}\right)(\eta(n)-n)\,. \tag{3.9}$$

Дійсно, беручи до уваги означення функції $\mu(t)$, для довільної $\psi \in \mathfrak{M}$ справедлива рівність

$$\eta(t) = t\Big(1+\frac{\eta(t)-t}{t}\Big) = t\Big(1+\frac{1}{\mu(t)}\Big). \tag{3.10}$$

Оскільки $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то функція $\frac{1}{\mu(t)}$ монотонно прямує до нуля при $t \to \infty$. Нехай $\mu(t) \ge b > 0$. Тоді в силу (3.10), маємо

$$\eta'(t) = 1+\frac{1}{\mu(t)}+t\Big(\frac{1}{\mu(t)}\Big)' \le 1+\frac{1}{\mu(t)} \le 1+\frac{1}{b}. \tag{3.11}$$

Зазначимо також, що для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}$ (див., наприклад, [95, с. 162–163]

$$\eta'(t) = \frac{\psi'(t)}{2\psi'(\eta(t))} \ge \frac{1}{2},\ t \ge 1,\ \eta'(t) := \eta'(t+0). \tag{3.12}$$

З (3.11) і (3.12), а також з рівності

$$\eta(\eta(t))-\eta(t) = \int\limits_t^{\eta(t)} \eta'(u)du$$

випливає (3.9).

Використовуючи (3.9) при $a>0,\ b>0$, можна записати:

$$[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]\leq\eta(\eta(n))-\eta(n)+\{\eta(n)\}<\left(1+\frac{1}{b}\right)(\eta(n)-n)+1=$$

$$=(\eta(n)-n)\left(1+\frac{1}{b}+\frac{1}{\eta(n)-n}\right)\leq\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(\eta(n)-n)\,,$$

а при $a>2,\ b>0$

$$[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]\geq\eta(\eta(n))-\eta(n)-\{\eta(\eta(n))\}>\frac{1}{2}(\eta(n)-n)-1=$$

$$=(\eta(n)-n)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\eta(n)-n}\right)\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a}\right)(\eta(n)-n)\,.$$

Лему доведено.

Доведення теореми 3.1. Спочатку оцінимо зверху величину $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$. Згідно з інтегральним зображенням (1.2), для довільної функції $f\in L^{\psi}_{\beta,p},\ 1\leq p\leq\infty,\ \psi\in\mathfrak{M}^{+}_{\infty}$, майже при всіх $x\in\mathbb{R}$ справедлива рівність

$$f(x)-S_{n-1}(f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Psi_{\beta,n}(x-t)\varphi(t)dt, \tag{3.13}$$

де

$$\|\varphi\|_p\leq1,\ \varphi\perp1, \tag{3.14}$$

$$\Psi_{\beta,n}(t)=\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right). \tag{3.15}$$

При цьому, якщо $f\in C^{\psi}_{\beta,p},\ 1\leq p\leq\infty$, то рівність (3.13) справедлива при всіх $x\in\mathbb{R}$.

В силу твердження 2.1, та формул (3.13) і (3.14)

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\psi}_{\beta,p}\big)_C\leq\frac{1}{\pi}\sup_{\substack{\varphi\in B_p,\\ \varphi\perp1}}\big\|\Psi_{\beta,n}\big\|_{p'}\|\varphi\|_p\leq\frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}\big\|_{p'}, \tag{3.16}$$

де $p'=\frac{p}{p-1}$. Знайдемо оцінку зверху $\big\|\Psi_{\beta,n}\big\|_{p'}$.

Застосувавши до функції $\Psi_{\beta,n}(t)$ перетворення Абеля, при довільному $n\in\ \mathbb{N}$ одержимо

$$\Psi_{\beta,n}(t)=\sum_{k=n}^{\infty}(\psi(k)-\psi(k+1))D_{k,\beta}(t)-\psi(n)D_{n-1,\beta}(t), \tag{3.17}$$

де

$$D_{k,\beta}(t) := \frac{1}{2}\cos\frac{\beta\pi}{2} + \sum_{j=1}^{k}\cos\Big(jt - \frac{\beta\pi}{2}\Big).$$

Врахувавши відомі формули (див., наприклад, [92, с. 40,42])

$$D_{k,0}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{k}\cos kt = \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}},\ 0 < |t| \le \pi, \tag{3.18}$$

і

$$D_{k,1}(t) = \sum_{j=1}^{k}\sin kt = \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}},\ 0 < |t| \le \pi, \tag{3.19}$$

де $D_{k,0}$ — ядро Діріхле порядку k, а $D_{k,1}$ — спряжене ядро Діріхле порядку k, можна записати

$$D_{k,\beta}(t) = \cos\frac{\beta\pi}{2}D_{k,0}(t) + \sin\frac{\beta\pi}{2}D_{k,1}(t) =$$

$$= \cos\frac{\beta\pi}{2}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} + \sin\frac{\beta\pi}{2}\frac{\cos\frac{t}{2} - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t - \frac{\beta\pi}{2}\right) + \sin\frac{\beta\pi}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}},\ 0 < |t| \le \pi. \tag{3.20}$$

Оскільки

$$\sin\frac{t}{2} \ge \frac{t}{\pi},\quad 0 \le t \le \pi, \tag{3.21}$$

то з (3.20) одержимо

$$|D_{k,\beta}(t)| \le \frac{\pi}{|t|},\ 0 < |t| \le \pi. \tag{3.22}$$

З формули (3.17), з урахуванням (3.22), випливає, що при $0 < |t| \le \pi$

$$|\Psi_{\beta,n}(t)| \le 2\pi\psi(n)\frac{1}{|t|}. \tag{3.23}$$

З іншого боку, згідно з (3.15) для довільних $t \in \mathbb{R}$

$$|\Psi_{\beta,n}(t)| \le \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) \le \psi(n) + \int\limits_{n}^{\infty}\psi(u)du. \tag{3.24}$$

Для оцінки інтеграла в правій частині формули (3.24), скористаємось наступним твердженням роботи [65, с.500].

Твердження 3.1. *Якщо* $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, *то для довільного* $m \in \mathbb{N}$, *такого, що* $\mu(\psi, m) > 2$ *виконується умова*

$$\int\limits_m^\infty \psi(u)du \le \frac{2}{1 - \frac{2}{\mu(m)}}\psi(m)(\eta(m) - m). \tag{3.25}$$

За умови $\mu(\psi, n) \ge b > 2$ з нерівності (3.25), маємо

$$\int\limits_n^\infty \psi(u)du \le \frac{2b}{b-2}\psi(n)(\eta(n) - n). \tag{3.26}$$

Отже, із (3.24), враховуючи (3.26), для $n \in \mathbb{N}$ таких, що $\eta(n) - n \ge a > 0$, отримуємо

$$|\Psi_{\beta,n}(t)| \le \Big(\frac{2b}{b-2} + \frac{1}{a}\Big)\psi(n)(\eta(n) - n),\ \ a > 0,\ \ b > 2, \tag{3.27}$$

для довільних $t \in \mathbb{R}$.

Поклавши $C_{a,b} = \frac{1}{\pi}\max\{\frac{2b}{b-2} + \frac{1}{a},\ 2\pi\}$ і використовуючи нерівності (3.23) та (3.27), отримуємо при $1 < p < \infty$

$$\frac{1}{\pi}\|\Psi_{\beta,n}\|_{p'} \le$$

$$\le C_{a,b}\psi(n)\Bigg(\int\limits_{|t| \le \frac{1}{\eta(n)-n}} (\eta(n) - n)^{p'}dt + \int\limits_{\frac{1}{\eta(n)-n} \le |t| \le \pi} \frac{dt}{|t|^{p'}}\Bigg)^{\frac{1}{p'}} \le$$

$$\le C_{a,b}\psi(n)\,(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}}\,2^{\frac{1}{p'}}\Bigg(1 + \frac{1}{p'-1}\Big(1 - \frac{\pi^{1-p'}}{(\eta(n) - n)^{p'-1}}\Big)\Bigg)^{\frac{1}{p'}} <$$

$$< C_{a,b}2^{\frac{1}{p'}}\Big(1 + \frac{1}{p'-1}\Big)^{\frac{1}{p'}}\psi(n)\,(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= C_{a,b}2^{\frac{1}{p'}}p^{\frac{1}{p'}}\psi(n)\,(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}}\,,\ \ \ a > 0,\ \ b > 2, \tag{3.28}$$

а при $p = 1$

$$\frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}\big\|_{p'} = \frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}\big\|_\infty \le \frac{1}{\pi}\Big(\frac{2b}{b-2} + \frac{1}{a}\Big)\psi(n)(\eta(n) - n) \le$$

$$\le C_{a,b}\psi(n)(\eta(n) - n),\ \ a > 0,\ \ b > 2. \tag{3.29}$$

Співставивши (3.28) і (3.29) з (3.16), приходимо до нерівності

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^\psi)_C \le C_{a,b}(2p)^{1-\frac{1}{p}}\psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}}$$

при $1 \le p < \infty$, $a > 0$, $b > 2$.

Для завершення доведення теореми 3.1, враховуючи очевидну нерівність

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \le \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C,$$

достатньо показати, що за умов $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$, $\eta(n) - n \ge a > 2$, і $\mu(n) \ge b > 2$, знайдеться функція $f^{**} \in C^{\psi}_{\beta,p}$ така, що

$$E_n(f^{**})_C = \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f^{**} - t_{n-1}\|_C \ge$$

$$\ge C_a\psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}},\ 1 \le p \le \infty, \tag{3.30}$$

де стала C_a означена формулою (3.1).

Розглянемо при заданому $n \in \mathbb{N}$ функцію

$$f_{p,n}(t) = f_{p,n}(\psi; t) = \frac{(a-1)(a-2)}{2\left(1+\pi^2\right)a(3a-4)}\frac{1}{(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{p}}}\times$$

$$\times \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi; 0; t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi; 0; t)\right),\ a > 2, \tag{3.31}$$

де функції $W_{N,M}(\lambda; \gamma; t)$ означені формулою (3.4).

Покажемо, що функція $f_{p,n}(\cdot)$ належить класу $C^{\psi}_{\beta,p}, 1 \le p \le \infty$. Для цього досить переконатись у виконанні нерівності

$$\left\|\left(f_{p,n}(\cdot)\right)^{\psi}_{\beta}\right\|_p \le 1,\ 1 \le p \le \infty. \tag{3.32}$$

З цією метою спочатку виконаємо певні перетворення правої частини рівності (3.31). Двічі використавши рівність (3.5), можемо записати

$$W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi; 0; t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi; 0; t) = \sum_{k=1}^{[\eta(n)]} \psi(k)\cos kt +$$

$$+\frac{1}{[\eta(\eta(n))] - [\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1}\left([\eta(\eta(n))] - k\right)\psi(k)\cos kt -$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\psi(k)\cos kt - \frac{1}{[\eta(n)] - n}\sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1}\left([\eta(n)] - k\right)\psi(k)\cos kt =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]}\psi(k)\cos kt - \frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1}\left([\eta(n)] - k\right)\psi(k)\cos kt +$$

$$+\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1}\left([\eta(\eta(n))]-k\right)\psi(k)\cos kt=$$

$$=\frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1}(k-n)\psi(k)\cos kt+\psi([\eta(n)])\cos([\eta(n)]t)+$$

$$+\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1}\left([\eta(\eta(n))]-k\right)\psi(k)\cos kt. \qquad (3.33)$$

Згідно з означенням (ψ,β)–похідної із співвідношення (3.33) для довільних $\psi\in\mathfrak{M}$ і $\beta\in\mathbb{R}$ знаходимо

$$\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)^{\psi}_{\beta}=$$

$$=\frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1}(k-n)\cos\Big(kt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)+\cos\Big([\eta(n)]t+\frac{\beta\pi}{2}\Big)+$$

$$+\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1}\left([\eta(\eta(n))]-k\right)\cos\Big(kt+\frac{\beta\pi}{2}\Big). \qquad (3.34)$$

Лема 3.3. *Нехай $\psi\in\mathfrak{M}^{+}_{\infty}$, $\eta(n)-n\geq a$, $\mu(n)\geq b$, β – довільне дійсне число. Тоді*

1) якщо $a>0$, $b>0$, то

$$\left|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)^{\psi}_{\beta}\right|\leq$$

$$\leq\Big(1+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\Big)(\eta(n)-n),\ t\in\mathbb{R}; \qquad (3.35)$$

2) якщо $a>2$, $b>0$, то

$$\left|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)^{\psi}_{\beta}\right|\leq$$

$$\leq\Big(\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{a-2}\Big)\frac{\pi^2}{t^2}\frac{1}{\eta(n)-n},\quad 0<|t|\leq\pi. \qquad (3.36)$$

Доведення леми 3.3. Спочатку доведемо (3.35). З рівності (3.34) випливає, що

$$\left|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)^{\psi}_{\beta}\right|\leq\frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1}(k-n)+$$

$$+1+\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1}([\eta(\eta(n))]-k)=\frac{[\eta(n)]-n-1}{2}+1+$$

$$+\frac{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]-1}{2}=\frac{1}{2}\left(([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)])+([\eta(n)]-n)\right). \quad (3.37)$$

Застосувавши до оцінки правої частини (3.37) лему 3.2, приходимо до нерівності (3.35).

Перейдемо до доведення нерівності (3.36). В силу означення (ψ,β)–похідної, для довільних $\psi\in\mathfrak{M}$ і $\beta\in\mathbb{R}$ одержуємо

$$\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)_\beta^\psi=$$

$$=\left(\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]}^{[\eta(\eta(n))]-1}\sum_{j=1}^{k}\psi(j)\cos jt\right)_\beta^\psi-$$

$$-\left(\frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1}\sum_{j=1}^{k}\psi(j)\cos jt\right)_\beta^\psi=$$

$$=\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]}^{[\eta(\eta(n))]-1}\sum_{j=1}^{k}\cos\left(jt+\frac{\beta\pi}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1}\sum_{j=1}^{k}\cos\left(jt+\frac{\beta\pi}{2}\right). \quad (3.38)$$

Із (3.38), використовуючи рівність (3.20) та формулу

$$\sum_{k=0}^{N-1}\sin(x+ky)=\sin\left(x+\frac{N-1}{2}y\right)\sin\frac{Ny}{2}\operatorname{cosec}\frac{y}{2},$$

(див., наприклад, [19, с. 43]) отримуємо

$$\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)_\beta^\psi=$$

$$=\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]}^{[\eta(\eta(n))]-1}D_{k,-\beta}(t)-\frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1}D_{k,-\beta}(t)=$$

$$=\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]}^{[\eta(\eta(n))]-1}\frac{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\sin\frac{\beta\pi}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}-$$

$$-\frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1}\frac{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\sin\frac{\beta\pi}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\Big(\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]}^{[\eta(\eta(n))]-1}\sin\Big(\Big(k+\frac{1}{2}\Big)t+\frac{\beta\pi}{2}\Big)-$$

$$-\frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1}\sin\Big(\Big(k+\frac{1}{2}\Big)t+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big)=$$

$$=\frac{1}{2\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2}\left(\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\Big(\sin\Big(\frac{[\eta(\eta(n))]}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\sin\frac{[\eta(\eta(n))]}{2}t-\right.$$

$$-\sin\Big(\frac{[\eta(n)]}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\sin\frac{[\eta(n)]}{2}t\Big)-$$

$$-\frac{1}{[\eta(n)]-n}\left(\sin\left(\frac{[\eta(n)]}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin\frac{[\eta(n)]}{2}t-\right.$$

$$\left.\left.-\sin\Big(\frac{n}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\sin\frac{n}{2}t\right)\right). \tag{3.39}$$

Із (3.39), беручи до уваги нерівність (3.83), знаходимо

$$\left|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)_\beta^\psi\right|\le$$

$$\le\frac{\pi^2}{t^2}\Big(\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}+\frac{1}{[\eta(n)]-n}\Big),\quad 0<|t|\le\pi. \tag{3.40}$$

Нерівність (3.36) є наслідком (3.40) та оцінок (3.6) і (3.7) леми 3.2. Лему доведено.

Повертаючись до доведення нерівності (3.32), нагадаємо, що для функції (ψ,β)–похідної функції $f_{p,n}(t)$, означеної за формулою (3.31), має місце рівність

$$(f_{p,n}(t))_\beta^\psi=\frac{(a-1)(a-2)}{2\left(1+\pi^2\right)a(3a-4)}\frac{1}{(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{p}}}\times$$

$$\times\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)_\beta^\psi. \tag{3.41}$$

Оцінимо $\left\|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)_\beta^\psi\right\|_p$, $1\le p\le\infty$.

При $1\le p<\infty$ з (3.35) випливає оцінка

$$\int\limits_{|t|\le\frac{1}{\eta(n)-n}}\left|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)_\beta^\psi\right|^p dt\le$$

$$\leq \int\limits_{|t|\leq \frac{1}{\eta(n)-n}} \Big(1+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\Big)^p (\eta(n)-n)^p dt =$$

$$= 2\Big(1+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\Big)^p (\eta(n)-n)^{p-1}, \qquad (3.42)$$

а з нерівності (3.36) — оцінка

$$\int\limits_{\frac{1}{\eta(n)-n}\leq |t|\leq \pi} \Big|\big(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\big)^{\psi}_{\beta}\Big|^p dt \leq$$

$$\leq \Big(\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{a-2}\Big)^p \pi^{2p} \frac{1}{(\eta(n)-n)^p} \int\limits_{\frac{1}{\eta(n)-n}\leq |t|\leq \pi} \frac{1}{t^{2p}} dt =$$

$$= \Big(\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{a-2}\Big)^p \pi^{2p} (\eta(n)-n)^{p-1} \frac{2}{2p-1}\Big(1-\frac{\pi^{1-2p}}{(\eta(n)-n)^{2p-1}}\Big) <$$

$$< 2\pi^{2p}\Big(\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{a-2}\Big)^p (\eta(n)-n)^{p-1}. \qquad (3.43)$$

Об'єднуючи (3.42)–(3.43), та враховуючи очевидну нерівність

$$\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{a-2} > 1+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}, \ a>2, \ b>2, \qquad (3.44)$$

маємо при $1\leq p<\infty$

$$\Big\|\big(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\big)^{\psi}_{\beta}\Big\|_p \leq$$

$$\leq \Big(\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{a-2}\Big) 2^{\frac{1}{p}} \left(1+\pi^{2p}\right)^{\frac{1}{p}} (\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq 2\Big(\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{a-2}\Big)\left(1+\pi^2\right)(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{p}} =$$

$$= \frac{2\left(1+\pi^2\right)a(3a-4)}{(a-1)(a-2)}(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{p}}. \qquad (3.45)$$

При $p=\infty$ з (3.35) та (3.44) маємо

$$\Big\|\big(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\big)^{\psi}_{\beta}\Big\|_\infty \leq$$

$$\leq \Big(1+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\Big)(\eta(n)-n) < \frac{a(3a-4)}{(a-1)(a-2)}(\eta(n)-n). \qquad (3.46)$$

З (3.41), беручи до уваги (3.45) та (3.46), приходимо до нерівності (3.32). Отже, $f_{p,n}\in C^{\psi}_{\beta,p}$ при всіх $1\leq p\leq\infty$ і $\beta\in\mathbb{R}$. Покладемо

$f^{**}(\cdot) = f_{p,n}(\cdot)$ і доведемо (3.30). Оскільки, очевидно, для будь–якого тригонометричного полінома $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\right) t_{n-1}(t)dt = 0, \tag{3.47}$$

то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(f_{p,n}(t) - t_{n-1}(t)\right) \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\right) dt =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{p,n}(t) \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\right) dt =$$

$$= \frac{(a-1)(a-2)}{2\left(1+\pi^2\right) a(3a-4)} \frac{1}{(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{p}}} \times$$

$$\times \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right) \times$$

$$\times \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\right) dt. \tag{3.48}$$

Здійснимо перетворення інтеграла в правій частині (3.48). Застосовуючи рівність (3.5) до функцій $W_{N,M}(\lambda;\gamma;t)$ при $\lambda(k) = 1,\ \gamma = 0,\ N = n,$ $M = [\eta(n)]$, а також при $\lambda(k) = 1,\ \gamma = 0,\ N = [\eta(n)],\ M = [\eta(\eta(n))]$ і діючи так само, як і при доведенні співвідношення (3.33), легко показати, що

$$W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t) =$$

$$= \frac{1}{[\eta(n)]-n} \sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1} (k-n)\cos kt + \cos([\eta(n)]t) +$$

$$+ \frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]} \sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1} ([\eta(\eta(n))]-k)\cos kt. \tag{3.49}$$

Використовуючи рівності (3.33) і (3.49), отримуємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right) \times$$

$$\times \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\right) dt =$$

$$= \frac{\pi}{([\eta(n)]-n)^2}\sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1}\psi(k)(k-n)^2+\pi\psi([\eta(n)])+$$

$$+\frac{\pi}{([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)])^2}\sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1}\psi(k)\left([\eta(\eta(n))]-k\right)^2 := \Sigma_1. \qquad (3.50)$$

Оскільки $\psi(t)$ спадає, то, з урахуванням означення характеристики $\eta(t)$

$$\Sigma_1 > \pi\psi(\eta(\eta(n)))\Bigg(\frac{1}{([\eta(n)]-n)^2}\sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1}(k-n)^2+1+.$$

$$+\frac{1}{([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)])^2}\sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1}\left([\eta(\eta(n))]-k\right)^2\Bigg)=\frac{\pi}{4}\psi(n)\Sigma_2,$$

де

$$\Sigma_2 := \psi(n)\Bigg(\frac{1}{([\eta(n)]-n)^2}\sum_{k=1}^{[\eta(n)]-n-1}k^2+1+$$

$$+\frac{1}{([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)])^2}\sum_{k=1}^{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]-1}k^2\Bigg). \qquad (3.51)$$

Використовуючи формулу (див., наприклад, [19, с.15])

$$\sum_{k=1}^{M}k^2=\frac{M(M+1)(2M+1)}{6}, \quad M\in\mathbb{N},$$

при $M=[\eta(n)]-n-1$ та $M=[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]-1$, одержуємо

$$\Sigma_2=\frac{([\eta(n)]-n-1)([\eta(n)]-n)(2[\eta(n)]-2n-1)}{6([\eta(n)]-n)^2}+1+$$

$$+\frac{([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]-1)([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)])(2[\eta(\eta(n))]-2[\eta(n)]-1)}{6([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)])^2}=$$

$$=\frac{([\eta(n)]-n-1)(2[\eta(n)]-2n-1)}{6([\eta(n)]-n)}+1+$$

$$+\frac{([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]-1)(2[\eta(\eta(n))]-2[\eta(n)]-1)}{6([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)])}=$$

$$=\frac{1}{6}\Bigg(2([\eta(n)]-n)+2([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)])+\frac{1}{[\eta(n)]-n}+$$

$$+\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\Bigg). \qquad (3.52)$$

Але, згідно з нерівностями (3.6) і (3.7), при $a > 2$, маємо

$$\frac{1}{6}\Big(2([\eta(n)] - n) + 2([\eta(\eta(n))] - [\eta(n)]) + \frac{1}{[\eta(n)] - n} +$$

$$+\frac{1}{[\eta(\eta(n))] - [\eta(n)]}\Big) > \frac{3a-4}{6a}(\eta(n) - n),$$

а отже,

$$\Sigma_2 > \frac{3a-4}{6a}(\eta(n) - n). \tag{3.53}$$

Із (3.48), об'єднуючи формули (3.49)–(3.53), отримуємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(f_{p,n}(t) - t_{n-1}(t)\right) \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\right) dt \geq$$

$$\geq \frac{\pi(a-1)(a-2)}{48\left(1+\pi^2\right)a^2}\psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.54}$$

З іншого боку, зауваживши, що виходячи з (3.4), і згідно з означенням (ψ, β)–похідної при $\beta = 0$,

$$W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t) =$$

$$= \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)_0^{\psi}, \tag{3.55}$$

то, використовуючи (3.45) і твердження Д.1.1 з [37, с. 391], отримуємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(f_{p,n}(t) - t_{n-1}(t)\right) \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\right) dt \leq$$

$$\leq \|f_{p,n}(t) - t_{n-1}(t)\|_\infty \left\|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\right)\right\|_1 \leq$$

$$\leq \frac{2\left(1+\pi^2\right)a(3a-4)}{(a-1)(a-2)}\|f_p(t) - t_{n-1}(t)\|_\infty. \tag{3.56}$$

З (3.54) і (3.56) випливає, що для довільного $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$

$$\|f_{p,n}(t) - t_{n-1}(t)\|_\infty \geq$$

$$\geq \frac{\pi(a-1)^2(a-2)^2}{96\left(1+\pi^2\right)^2 a^3(3a-4)}\psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= C_a\psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорему 3.1 доведено.

Якщо функції ψ з множини $\mathfrak{M}_\infty^+$ є такими, що

$$\lim_{t\to\infty}(\eta(\psi,t)-t)=\infty, \tag{3.57}$$

то умови теореми 3.1 виконуватимуться для усіх номерів n, починаючи з деякого номера n_0. Важливим прикладом функцій $\psi(t)$ з множини $\mathfrak{M}_\infty^+$, які задовольняють умову (3.57), є функції

$$\psi_{r,\alpha}(t)=\exp(-\alpha t^r),\ \alpha>0,\ r\in(0,1). \tag{3.58}$$

Для них $\eta(\psi_{r,\alpha};n)=\left(\alpha^{-1}\ln 2+n^r\right)^{\frac{1}{r}}$. Тоді, використавши узагальнену нерівність Бернуллі

$$(1+x)^\rho\geq 1+\rho x,\ x>-1,\ \rho\in(-\infty,0]\cup[1,\infty),$$

отримуємо

$$\eta(\psi_{r,\alpha};n)-n=n\left(\left(1+\frac{\ln 2}{\alpha n^r}\right)^{\frac{1}{r}}-1\right)\geq\frac{\ln 2}{\alpha r}n^{1-r},\ n\in\mathbb{N}. \tag{3.59}$$

З формули (3.59) випливає, що для всіх номерів $n\geq 1+\left(\frac{2r\alpha}{\ln 2}\right)^{\frac{1}{1-r}}$ виконується нерівність

$$\eta(\psi_{r,\alpha};n)-n\geq a>2,$$

при

$$a=a(\alpha,r)=\frac{\ln 2}{\alpha r}\left(1+\left(\frac{2r\alpha}{\ln 2}\right)^{\frac{1}{1-r}}\right)^{1-r}. \tag{3.60}$$

В силу (3.60)

$$\mu(\psi_{r,\alpha};n)=\frac{n}{\eta(\psi_{r,\alpha};n)-n}=\frac{1}{\left(\frac{\ln 2}{\alpha n^r}+1\right)^{\frac{1}{r}}-1}$$

і, як неважко переконатись, для всіх $n\geq 1+2\left(\frac{\ln 2}{\alpha(3^r-2^r)}\right)^{\frac{1}{r}}$ виконується нерівність

$$\mu(\psi_{r,\alpha};n)\geq b>2,$$

де

$$b=b(r,\alpha)=\left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha}\left(1+2\left(\frac{\ln 2}{\alpha(3^r-2^r)}\right)^{\frac{1}{r}}\right)^{-r}+1\right)^{\frac{1}{r}}-1\right)^{-1}. \tag{3.61}$$

З наведених вище міркувань випливає, що до класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, породжених функціями $\psi_{r,\alpha}(t)$ вигляду (3.58), можна застосувати теорему 3.1, в умові якої параметри a і b визначаються формулами (3.60) і (3.61) відповідно. В результаті одержимо наступне твердження.

Наслідок 3.1. *Нехай* $\psi_{r,\alpha}(t) = \exp(-\alpha t^r)$, $r \in (0,1)$, $\alpha > 0$, $1 \leq p < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *таких, що*

$$n \geq 1 + \max\left\{\left(\frac{2r\alpha}{\ln 2}\right)^{\frac{1}{1-r}}, 2\left(\frac{\ln 2}{\alpha\,(3^r - 2^r)}\right)^{\frac{1}{r}}\right\},$$

справедливі оцінки

$$C_a \exp(-\alpha n^r)\, n^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha n^r} + 1\right)^{\frac{1}{r}} - 1\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq E_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_C \leq \mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_C \leq$$

$$\leq C_{a,b}\ (2p)^{1-\frac{1}{p}} \exp(-\alpha n^r)\, n^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha n^r} + 1\right)^{\frac{1}{r}} - 1\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.62)$$

де величини C_a *і* $C_{a,b}$ *означаються формулами (3.1) і (3.2) при* $a = a(\alpha, r)$, $b = b(\alpha, r)$, *що задані за допомогою рівностей (3.60) і (3.61) відповідно.*

Оскільки

$$\eta(\psi_{r,\alpha}; n) - n = n\left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha n^r} + 1\right)^{\frac{1}{r}} - 1\right) \asymp n^{1-r},\ r \in (0,1],\ \alpha > 0,$$

то з (3.62) випливають порядкові рівності

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_C \asymp E_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_C \asymp \exp(-\alpha n^r)\, n^{\frac{1-r}{p}},\ 1 \leq p < \infty. \quad (3.63)$$

Зазначимо, що для величин $\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_C$ при $1 < p < \infty$ порядкові оцінки (3.63) знайдені в [62].

З доведення тереми 3.1 випливає, що для класів $C^{\psi}_{\beta,p}, 1 \leq p < \infty$, $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$, $\eta(n) - n > 2$ суми Фур'є забезпечують порядок найкращих наближень тригонометричними поліномами, тобто

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Водночас, суми Фур'є, як апарат наближення, не дозволяють записати рівномірних відносно параметра p, $1 \le p \le \infty$, оцінок зверху для величин $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$. Цей факт зумовлений тією обставиною, що при $p = \infty$ за умови $\psi \in \mathfrak{M}''_{\infty}$

$$\frac{\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C}{E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C} \asymp \ln^{+}(\eta(n) - n),$$

де $\ln^{+} t = \max\{0,\ \ln t\}$ (див. [95, c. 264] та [96, c. 86]). Далі буде побудовано лінійний метод наближення $V_{n,\psi}(t)$, що дозволяє записати рівномірні відносно параметра p $(1 \le p \le \infty)$ точні за порядком оцінки зверху найкращих наближень $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$ при $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$ і $\beta \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.2. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$. Тоді для $n \in \mathbb{N}$ таких, що $\eta(n) - n \ge a > 2$, $\mu(n) \ge b > 2$ справедливі оцінки*

$$C_a \psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}} \le E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \le C^{*}_{a,b} \psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}}, \qquad (3.64)$$

де C_a означаєтьcя за допомогою формули (3.1), а

$$C^{*}_{a,b} := \frac{2(1+\pi^2)}{\pi}\Big(\frac{2b}{b-2} + \frac{a}{a-1}\Big). \qquad (3.65)$$

Доведення теореми 3.2. Згідно з теоремою 3.1 для довільної $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$ при $\eta(n) - n \ge a > 2$, $\mu(n) \ge b > 2$ має місце оцінка

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \ge C_a \psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty,$$

в якій величина C_a означена рівністю (3.1). Для знаходження оцінки зверху величини $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$ розглянемо лінійний метод $V_{n,\psi}(f;x)$ наближення функцій з множини $L^{\psi}_{\beta,p}$ наступного вигляду:

$$V_{n,\psi}(f;x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{n,[\eta(n)]-n+1}(k)\left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right), n \in \mathbb{N}, \qquad (3.66)$$

де

$$\lambda_{n,[\eta(n)]-n+1}(k) = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le 2n - [\eta(n)] - 1, \\ 1 - \frac{[\eta(n)]-2n+k}{[\eta(n)]-n}\frac{\psi(n)}{\psi(k)}, & 2n - [\eta(n)] \le k \le n-1 \end{cases} \qquad (3.67)$$

(як і раніше $[\alpha]$ — ціла частина дійсного числа α).

Зауважимо, що суми (3.66) є частинним випадком узагальнених сум Валле Пуссена $U^{\nu}_{n,m}(f;x)$, тобто поліномів вигляду (див., наприклад, [68]):

$$U^{\nu}_{n,m}(f;x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_{n,m}(k)\left(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx\right),$$

де

$$\lambda_{n,m}(k)=\begin{cases}1, & 0\le k\le n-m,\\ 1-\frac{\nu(k)}{\nu(n)}, & n-m+1\le k\le n-1,\end{cases}$$

а $\nu(k),\ k\in\mathbb{N}$, — довільно монотонно зростаюча послідовність додатних чисел $m\in[1,n],\ m\in\mathbb{N}$. Поклавши $\nu(k)=\frac{[\eta(n)]-2n+k}{\psi(k)}$ і $m=[\eta(n)]-n+1$, одержимо $U^{\nu}_{n,m}(f;x)=V_{n,\psi}(f;x)$.

Розглянемо величину

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,p};V_{n,\psi})_C=\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,p}}\|f(\cdot)-V_{n,\psi}(f;\cdot)\|_C,\quad 1\le p\le\infty.$$

Оскільки

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C\le\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,p};V_{n,\psi})_C, \tag{3.68}$$

то для доведення теореми 3.2 достатньо показати, що при $\psi\in\mathfrak{M}^{+}_{\infty}$, $\eta(n)-n\ge a>2,\ \mu(n)\ge b>2$ має місце співвідношення

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,p};V_{n,\psi})_C\le C^{*}_{a,b}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}},\ 1\le p\le\infty, \tag{3.69}$$

де $C^{*}_{a,b}$ означаються рівністю (3.65). Згідно з [92, с. 51] для усіх $x\in\mathbb{R}$ має місце рівність

$$f(x)-V_{n,\psi}(f;x)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\psi}_{\beta}(x+t)\left(\sum_{k=1}^{n-1}(1-\lambda_{n,[\eta(n)]-n+1}(k))\psi(k)\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right)dt, \tag{3.70}$$

де $\lambda_{n,[\eta(n)]-n+1}(k)$ означаються формулою (3.67). Із (3.70) і (3.67), отримаємо

$$f(x)-V_{n,\psi}(f;x)=$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t)\Psi_{\beta,n}^*(x-t)dt, \ \|f_\beta^\psi\|_p \le 1, \ 1 \le p \le \infty, \tag{3.71}$$

де

$$\Psi_{\beta,n}^*(t) = \psi(n) \sum_{k=2n-[\eta(n)]}^{n-1} \frac{[\eta(n)]-2n+k}{[\eta(n)]-n} \cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big) +$$

$$+ \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)\cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big) =$$

$$= \psi(n) \sum_{k=2n-[\eta(n)]+1}^{n-1} \Big(1 - \frac{n-k}{[\eta(n)]-n}\Big) \cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big) + \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)\cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big). \tag{3.72}$$

Згідно з твердженням 2.3, отримаємо, що для будь-якої функції $f \in C_{\beta,p}^\psi$ виконується нерівність

$$\Big\| \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t)\Psi_{\beta,n}^*(x-t)dt \Big\|_C \le \frac{1}{\pi}\|f_\beta^\psi\|_p \|\Psi_{\beta,n}^*\|_{p'} \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\|\Psi_{\beta,n}^*\|_{p'}, \quad 1 \le p \le \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{3.73}$$

Оцінимо зверху величину $\|\Psi_{\beta,n}^*\|_{p'}$. З (3.72) одержуємо

$$\Psi_{\beta,n}^*(t) = \psi(n)\left(D_{n-1,\beta}(t) - D_{2n-[\eta(n)],\beta}(t)\right) -$$

$$- \frac{\psi(n)}{[\eta(n)]-n} \sum_{k=2n-[\eta(n)]+1}^{n-1} (n-k)\cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big) + \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)\cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big), \tag{3.74}$$

де як і раніше

$$D_{k,\beta}(t) = \frac{1}{2}\cos\frac{\beta\pi}{2} + \sum_{j=1}^{k} \cos\Big(jt - \frac{\beta\pi}{2}\Big). \tag{3.75}$$

Далі скористаємось лемою 3.1. Поклавши в умовах леми 3.1 $M = n, \ N = 2n - [\eta(n)], \ \lambda(k) \equiv 1, \ \gamma = -\frac{\beta\pi}{2}$, із (3.5) отримаємо

$$\frac{1}{[\eta(n)]-n} \sum_{k=2n-[\eta(n)]+1}^{n-1} (n-k)\cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big) =$$

$$= \frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=2n-[\eta(n)]}^{n-1} D_{k,\beta}(t) - D_{2n-[\eta(n)],\beta}(t). \tag{3.76}$$

Із (3.74) і (3.76) випливає рівність

$$\Psi^*_{\beta,n}(t) = \psi(n)D_{n-1,\beta}(t) - \frac{\psi(n)}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=2n-[\eta(n)]}^{n-1} D_{k,\beta}(t) +$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos\Big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\Big). \tag{3.77}$$

Застосовуючи до останнього доданку з правої частини рівності (3.77) перетворення Абеля, одержимо, що при довільному $n\in\mathbb{N}$

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos\Big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\Big) = \sum_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k)D_{k,\beta}(t) - \psi(n)D_{n-1,\beta}(t), \tag{3.78}$$

де $\Delta\psi(k) := \psi(k)-\psi(k+1)$.

Згідно з (3.77) і (3.78)

$$\Psi^*_{\beta,n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k)D_{k,\beta}(t) - \frac{\psi(n)}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=2n-[\eta(n)]}^{n-1} D_{k,\beta}(t). \tag{3.79}$$

В силу формули (2.14), де $\gamma = \frac{\beta\pi}{2}$, маємо

$$D_{k,\beta}(t) = \sum_{j=0}^{k}\cos\Big(jt+\frac{\beta\pi}{2}\Big) - \frac{1}{2}\cos\frac{\beta\pi}{2} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{kt}{2}-\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin\frac{k+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\cos\frac{\beta\pi}{2} =$$

$$= \frac{\sin\left((k+\frac{1}{2})t-\frac{\beta\pi}{2}\right)+\cos\frac{t}{2}\sin\frac{\beta\pi}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}, \quad 0<|t|\le\pi. \tag{3.80}$$

З (3.79) і (3.80) одержуємо

$$\Psi^*_{\beta,n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k)\frac{\sin\left((k+\frac{1}{2})t-\frac{\beta\pi}{2}\right)+\cos\frac{t}{2}\sin\frac{\beta\pi}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} -$$

$$-\frac{\psi(n)}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=2n-[\eta(n)]}^{n-1}\frac{\sin\left((k+\frac{1}{2})t-\frac{\beta\pi}{2}\right)+\cos\frac{t}{2}\sin\frac{\beta\pi}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k)\sin\Big(\Big(k+\frac{1}{2}\Big)t-\frac{\beta\pi}{2}\Big)-$$

$$-\frac{\psi(n)}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=2n-[\eta(n)]}^{n-1}\sin\Big(\Big(k+\frac{1}{2}\Big)t-\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big). \qquad (3.81)$$

Застосуємо перетворення Абеля до першої суми з правої частини рівності (3.81), внаслідок чого запишемо

$$\Psi^*_{\beta,n}(t)=\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\Delta^2\psi(k)\sum_{j=0}^{k}\sin\Big(\Big(j+\frac{1}{2}\Big)t-\frac{\beta\pi}{2}\Big)-$$

$$-\Delta\psi(n)\sum_{j=0}^{n-1}\sin\Big(\Big(j+\frac{1}{2}\Big)t-\frac{\beta\pi}{2}\Big)-$$

$$-\frac{\psi(n)}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=2n-[\eta(n)]}^{n-1}\sin\Big(\Big(k+\frac{1}{2}\Big)t-\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big),\ 0<|t|\leq\pi, \qquad (3.82)$$

де $\Delta^2\psi(k):=\Delta\psi(k)-\Delta\psi(k+1)=\psi(k)-2\psi(k+1)+\psi(k+2)$.
Оскільки

$$\sin\frac{t}{2}\geq\frac{t}{\pi},\quad 0\leq t\leq\pi, \qquad (3.83)$$

то на підставі формули (2.14)

$$\Big|\sum_{j=0}^{k}\sin\Big(\Big(j+\frac{1}{2}\Big)t-\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big|\leq\frac{\pi}{|t|},\quad 0<|t|\leq\pi. \qquad (3.84)$$

З (3.82)–(3.84) маємо

$$\big|\Psi^*_{\beta,n}(t)\big|\leq\frac{\pi^2}{2t^2}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\Delta^2\psi(k)+\Delta\psi(n)+\frac{2\psi(n)}{[\eta(n)]-n}\Big)=$$

$$=\frac{\pi^2}{t^2}\Big(\Delta\psi(n)+\frac{\psi(n)}{[\eta(n)]-n}\Big),\quad 0<|t|\leq\pi. \qquad (3.85)$$

Оскільки $\psi\in\mathfrak{M}$, то

$$\Delta\psi(n)\leq|\psi'(n)|,\ \psi'(n):=\psi'(n+0). \qquad (3.86)$$

Знайдемо оцінку зверху величини $|\psi'(n)|$. Для цього нам знадобиться наступне твердження.

Лема 3.4. *Нехай* $\psi\in\mathfrak{M}^+_\infty$, $\mu(t)\geq b>0$. *Тоді*

$$\frac{1}{2}\frac{b^2}{(b+1)^2}\left(\eta(t)-t\right)\leq\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|}\leq 4\Big(1+\frac{1}{b}\Big)\left(\eta(t)-t\right),\quad t\geq 1. \qquad (3.87)$$

Доведення леми 3.4. Згідно з [95, с. 165] справедливе співвідношення

$$|\psi'(\eta(\eta(t)))|\,(\eta(\eta(t))-\eta(t)) \le \frac{1}{4}\psi(t) \le |\psi'(\eta(t))|\,(\eta(\eta(t))-\eta(t))\,,\ \ \psi\in\mathfrak{M}. \tag{3.88}$$

З правої частини (3.88) випливає, що

$$\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} \le \frac{4|\psi'(\eta(t))|}{|\psi'(t)|}\,(\eta(\eta(t))-\eta(t)) \le 4\,(\eta(\eta(t))-\eta(t))\,. \tag{3.89}$$

Внаслідок (3.9) для довільної функції $\psi\in\mathfrak{M}_\infty^+$ при $\mu(t)\ge b>0$ має місце співвідношення

$$\frac{1}{2}\,(\eta(t)-t) \le \eta(\eta(t))-\eta(t) < \left(1+\frac{1}{b}\right)(\eta(t)-t)\,, \tag{3.90}$$

тому з (3.89) отримуємо

$$\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} \le 4\Big(1+\frac{1}{b}\Big)\,(\eta(t)-t)\,. \tag{3.91}$$

З іншого боку, в силу (3.88) і (3.90)

$$\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} \ge \frac{4|\psi'(\eta(\eta(t)))|}{|\psi'(t)|}\,(\eta(\eta(t))-\eta(t)) \ge \frac{2|\psi'(\eta(\eta(t)))|}{|\psi'(t)|}\,(\eta(t)-t)\,. \tag{3.92}$$

Оскільки

$$\psi'(t) = (4\psi(\eta(\eta(t))))' = 4\psi'\left(\eta(\eta(t))\right)\eta'(\eta(t))\eta'(t), \quad \psi\in\mathfrak{M},$$

(тут і надалі $\eta'(t)=\eta'(t+0)$), то

$$\frac{\psi'\left(\eta(\eta(t))\right)}{\psi'(t)} = \frac{1}{4\eta'(\eta(t))\eta'(t)}. \tag{3.93}$$

Згідно з формулою (3.11) для довільної $\psi\in\mathfrak{M}_\infty^+$ при $\mu(t)\ge b>0$

$$\eta'(t)\le 1+\frac{1}{b},\ t\ge 1. \tag{3.94}$$

Тому з (3.93) і (3.94) випливає

$$\frac{2|\psi'(\eta(\eta(t)))|}{|\psi'(t)|}\,(\eta(t)-t) \ge \frac{1}{2}\frac{b^2}{(b+1)^2}\,(\eta(t)-t)\,. \tag{3.95}$$

Об'єднавши (3.91), (3.92) і (3.95), отримуємо (3.87). Лему 3.4 доведено.

На підставі (3.86) і (3.87) маємо

$$\Delta\psi(n) \le |\psi'(n)| \le \frac{2(b+1)^2}{b^2}\frac{\psi(n)}{\eta(n)-n},\ \psi \in \mathfrak{M}_\infty^+,\ b>0. \tag{3.96}$$

Згідно з формулою (3.8) якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, $\eta(n)-n \ge a > 1$, $\mu(n) \ge b > 0$, то

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)(\eta(n)-n) < [\eta(n)]-n. \tag{3.97}$$

З (3.85), (3.96) і (3.97) випливає нерівність

$$|\Psi_{\beta,n}^*(t)| \le \pi^2\Big(\frac{2(b+1)^2}{b^2}+\frac{a}{a-1}\Big)\frac{\psi(n)}{\eta(n)-n}\frac{1}{t^2},\ 0<t\le\pi. \tag{3.98}$$

Покажемо також, що при $\eta(n)-n \ge a > 0$ і $\mu(n) \ge b > 2$ для довільних $t \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$|\Psi_{\beta,n}^*(t)| \le \Big(\frac{2b}{b-2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\Big)\psi(n)(\eta(n)-n). \tag{3.99}$$

З (3.72) маємо

$$|\Psi_{\beta,n}^*(t)| \le \Big|\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos\Big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big| + \psi(n)\sum_{k=2n-[\eta(n)]+1}^{n-1}\Big(1-\frac{n-k}{[\eta(n)]-n}\Big). \tag{3.100}$$

Як неважко переконатись,

$$\psi(n)\sum_{k=2n-[\eta(n)]+1}^{n-1}\Big(1-\frac{n-k}{[\eta(n)]-n}\Big) =$$

$$= \psi(n)\Big([\eta(n)]-n-1-\frac{([\eta(n)]-n)([\eta(n)]-n-1)}{2([\eta(n)]-n)}\Big) =$$

$$= \frac{\psi(n)}{2}([\eta(n)]-n-1) < \frac{\psi(n)}{2}(\eta(n)-n). \tag{3.101}$$

З (3.27), (3.100) і (3.101) отримуємо нерівність (3.99).

Враховуючи (3.98) і (3.99), а також нерівності

$$\frac{a}{a-1} > \frac{1}{a}+\frac{1}{2};\quad a>1,\quad \frac{b}{b-2} > \frac{(b+1)^2}{b^2},\quad b>2,$$

маємо, що при $1 \le p' < \infty$, $\eta(n)-n \ge a > 1$ і $\mu(n) \ge b > 2$

$$\|\Psi_{\beta,n}^*\|_{p'} \le \psi(n)\Bigg(\Big(\frac{2b}{b-2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\Big)^{p'}\int\limits_{|t|\le\frac{1}{\eta(n)-n}}(\eta(n)-n)^{p'}dt+$$

$$+\pi^{2p'}\Big(\frac{2(b+1)^2}{b^2}+\frac{a}{a-1}\Big)^{p'}\frac{1}{(\eta(n)-n)^{p'}}\int\limits_{\frac{1}{\eta(n)-n}\le|t|\le\pi}\frac{dt}{t^{2p'}}\Big)^{\frac{1}{p'}}<$$

$$<\psi(n)\Big(\frac{2b}{b-2}+\frac{a}{a-1}\Big)\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{|t|\le\frac{1}{\eta(n)-n}}(\eta(n)-n)^{p'}dt+\frac{\pi^{2p'}}{(\eta(n)-n)^{p'}}\int\limits_{\frac{1}{\eta(n)-n}\le|t|\le\pi}\frac{dt}{t^{2p'}}\Big)^{\frac{1}{p'}}<$$

$$<\psi(n)(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{p'}}\Big(\frac{2b}{b-2}+\frac{a}{a-1}\Big)2^{\frac{1}{p'}}\Big(1+\pi^{2p'}\frac{1}{2p'-1}\Big)^{\frac{1}{p'}}\le$$

$$\le 2(1+\pi^2)\Big(\frac{2b}{b-2}+\frac{a}{a-1}\Big)\psi(n)(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{p'}}. \tag{3.102}$$

У випадку $p'=\infty$ зі співвідношення (3.99) маємо, що при $\eta(n)-n\ge a>1$ і $\mu(n)\ge b>2$

$$\|\Psi^*_{\beta,n}\|_{p'}=\|\Psi^*_{\beta,n}\|_\infty\le\Big(\frac{2b}{b-2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\Big)\psi(n)(\eta(n)-n)<$$

$$<2(1+\pi^2)\Big(\frac{2b}{b-2}+\frac{a}{a-1}\Big)\psi(n)(\eta(n)-n). \tag{3.103}$$

Зі співвідношень (3.71), (3.73), (3.102) і (3.103) випливає справедливість нерівності (3.69). Теорему 3.2 доведено.

Наслідок 3.2. *Нехай* $\psi\in\mathfrak{M}^+_\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\eta(\psi,n)-n)=\infty$, $\beta\in\mathbb{R}$, $1\le p\le\infty$. *Тоді*

$$E_n(C^\psi_{\beta,p})_C\asymp\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}}.$$

Як було показано раніше (див. (3.59–(3.61)) для функції $\psi_{r,\alpha}(t)=\exp(-\alpha t^r)$, $\alpha>0$, $r\in(0,1)$ при

$$n\ge\max\Big\{1+\Big(\frac{2r\alpha}{\ln 2}\Big)^{\frac{1}{1-r}},1+2\Big(\frac{\ln 2}{\alpha(3^r-2^r)}\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\}$$

виконуються нерівності

$$\eta(n)-n=\eta(\psi_{r,\alpha};n)-n\ge a(\alpha,r)>2,$$

$$\mu(n)=\mu(\psi_{r,\alpha};n)\ge b(\alpha,r)>2,$$

де параметри $a(\alpha,r)$ і $b(\alpha,r)$ означаються формулами (3.60) і (3.61) відповідно. З теореми 3.2 випливає наступне твердження.

Наслідок 3.3. *Нехай $r \in (0,1)$, $\alpha > 0$, $1 \le p \le \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для всіх n таких, що*

$$n \ge \max\Big\{1 + \Big(\frac{2r\alpha}{\ln 2}\Big)^{\frac{1}{1-r}}, 1 + 2\Big(\frac{\ln 2}{\alpha(3^r - 2^r)}\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\}, \tag{3.104}$$

справедливі оцінки

$$C_a \exp(-\alpha n^r)\, n^{\frac{1}{p}}\bigg(\Big(1 + \frac{\ln 2}{\alpha n^r}\Big)^{\frac{1}{r}} - 1\bigg)^{\frac{1}{p}} \le E_n\Big(C^{\alpha,r}_{\beta,p}\Big)_C \le$$

$$\le C^*_{a,b} \exp(-\alpha n^r)\, n^{\frac{1}{p}}\bigg(\Big(1 + \frac{\ln 2}{\alpha n^r}\Big)^{\frac{1}{r}} - 1\bigg)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.105}$$

де величини C_a і $C^*_{a,b}$ означаються формулами (3.1) і (3.65) відповідно при $a = a(\alpha, r)$ та $b = b(\alpha, r)$, що задані за допомогою рівностей (3.60) та (3.61).

З рівності (3.59) для величини $\eta(\psi_{r,\alpha}; n) - n$ неважко одержати двосторонні оцінки

$$\frac{\ln 2}{\alpha r} n^{1-r} \le \eta(\psi_{r,\alpha}; n) - n \le (1 + \ln 2^{1/\alpha})^{\frac{1-r}{r}} \frac{\ln 2}{\alpha r} n^{1-r},\ \alpha > 0, r \in (0,1),\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.106}$$

З наслідку 3.4 та формули (3.106) випливає порядкова рівність

$$E_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_C \asymp \exp(-\alpha n^r)\, n^{\frac{1-r}{p}}, \quad 1 \le p \le \infty,$$

Співставлення співвідношення (3.3) з (3.64) при виконанні умов теореми 3.2 дозволяє записати оцінку

$$C_a \psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}} \le E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \le C_{a,b,p} \psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}},$$

де

$$C_{a,b,p} = \min\big\{(2p)^{1-\frac{1}{p}}\, C_{a,b},\ C^*_{a,b}\big\}, \tag{3.107}$$

а величини $C_{a,b}$ і $C^*_{a,b}$ означені формулами (3.2) і (3.65) відповідно.

Обчислення показують, що при невеликих p (а саме при $(2p)^{1-\frac{1}{p}} < 4(1 + \pi^2)$)

$$C_{a,b,p} = (2p)^{1-\frac{1}{p}}\, C_{a,b}, \tag{3.108}$$

а при великих p (а саме при $(2p)^{1-\frac{1}{p}} > \frac{3(1+\pi^2)}{\pi}$)

$$C_{a,b,p} = C^*_{a,b}. \tag{3.109}$$

3.2. Оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів нескінченно диференційовних функцій в інтегральних метриках

Теорема 3.3. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}^{+}$, $\lim\limits_{t\to\infty}(\eta(\psi,t)-t) = \infty$, $1 < s \le \infty$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді для довільних* $n \in \mathbb{N}$ *таких, що* $\eta(n)-n \ge a > 2$, $\mu(n) \ge b > 2$, *справедливі оцінки*

$$C_a\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}} \le$$

$$\le E_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_s \le \mathcal{E}_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_s \le$$

$$\le C_{a,b}\ (2s')^{\frac{1}{s}}\,\psi(n)\,(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}}\,, \quad (3.110)$$

де величини C_a *і* $C_{a,b}$ *означаються формулами (3.1) і (3.2) відповідно.*

Доведення. Використовуючи інтегральне зображення (3.13) та твердження 2.4, при $1 \le s \le \infty$ можемо записати

$$\mathcal{E}_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_s \le \frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}\big\|_s\|\varphi\|_1 \le \frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}\big\|_s. \quad (3.111)$$

Але, із співвідношень (3.28) і (3.29) за умов теореми 3.3 випливає нерівність

$$\frac{1}{\pi}\|\Psi_{\beta,n}\|_s \le C_{a,b}\,(2s')^{\frac{1}{s}}\psi(n)\,(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s}}\,, \quad 1 < s \le \infty,\ \frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1. \quad (3.112)$$

Отже, об'єднуючи (3.111) і (3.112), одержуємо оцінку зверху для величини $\mathcal{E}_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_s$ в співвідношенні (3.110).

Щоб одержати в теоремі 3.3 оцінку знизу для величини $E_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_s$, $1 < s \le \infty$, розглянемо функцію $f_{p,n}(t)$ означену формулою (3.31) при $p=1$, тобто функцію

$$f_{1,n}(t) = f_{1,n}(\psi,t) = \frac{(a-1)(a-2)}{2\,(1+\pi^2)\,a(3a-4)}\times$$

$$\times\big(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\big)\,.$$

Зауваживши, що згідно з (3.32) $f_{1,n} \in L^{\psi}_{\beta,1}$, покажемо, що

$$E_n(f_{1,n})_s \ge C_a\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}},\ 1 \le s \le \infty,\ \frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1. \quad (3.113)$$

З нерівностей (3.45), (3.46) та рівності (3.55), для будь-якого $t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}$, маємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f_{1,n}(t)-t_{n-1}(t)\right)\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\right)dt\leq$$

$$\leq\|f_{1,n}-t_{n-1}\|_s\left\|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\right)\right\|_{s'}=$$

$$=\|f_{1,n}-t_{n-1}\|_s\left\|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)_0^{\psi}\right\|_{s'}\leq$$

$$\leq\frac{2\left(1+\pi^2\right)a(3a-4)}{(a-1)(a-2)}(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{s'}}\|f_{1,n}(t)-t_{n-1}(t)\|_s. \qquad (3.114)$$

Зі співвідношень (3.54) і (3.114) випливає, що для будь-якого $t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}$

$$\|f_{1,n}-t_{n-1}\|_s\geq$$

$$\geq\frac{\pi}{96\left(1+\pi^2\right)^2}\frac{(a-1)^2(a-2)^2}{a^3(3a-4)}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}}=$$

$$=C_{a,b}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}},$$

звідки випливає (3.113). Теорему 3.3 доведено.

Наслідок 3.4. *Нехай* $\psi_{\alpha,r}(t)=\exp\left(-\alpha t^r\right)$, $r\in(0,1)$, $\alpha>0$, $1<s\leq\infty$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, $\beta\in\mathbb{R}$. *Тоді для всіх* $n\in\mathbb{N}$ *таких, що*

$$n\geq 1+\max\left\{\left(\frac{2r\alpha}{\ln 2}\right)^{\frac{1}{1-r}},2\left(\frac{\ln 2}{\alpha\left(3^r-2^r\right)}\right)^{\frac{1}{r}}\right\},$$

справедливі оцінки

$$C_a\exp\left(-\alpha n^r\right)n^{\frac{1}{s'}}\left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha n^r}+1\right)^{\frac{1}{r}}-1\right)^{\frac{1}{s'}}\leq$$

$$\leq E_n(L^{\alpha,r}_{\beta,1})_s\leq\mathcal{E}_n(L^{\alpha,r}_{\beta,1})_s\leq$$

$$\leq C_{a,b}\,\left(2s'\right)^{\frac{1}{s}}\exp\left(-\alpha n^r\right)n^{\frac{1}{s'}}\left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha n^r}+1\right)^{\frac{1}{r}}-1\right)^{\frac{1}{s'}},$$

де величини C_a *і* $C_{a,b}$ *означаються формулами (3.1) і (3.2) відповідно при* $a=a(\alpha,r)$ *та* $b=b(\alpha,r)$, *які задані рівностями (3.60) і (3.61).*

Для $\mathcal{E}_n(L^{\alpha,r}_{\beta,1})_s$, $E_n(L^{\alpha,r}_{\beta,1})_s$, $r\in(0,1]$, $\alpha>0$, $1<s\leq\infty$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, аналогічно до (3.63) можна записати

$$\mathcal{E}_n(L^{\alpha,r}_{\beta,1})_s\asymp E_n(L^{\alpha,r}_{\beta,1})_s\asymp\exp\left(-\alpha n^r\right)n^{\frac{1-r}{s'}},\quad n\in\mathbb{N}.$$

З теореми 3.3 випливає, що на класах $L^{\psi}_{\beta,1}$ при $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$ $\eta(n)-n\ge a>2$ суми Фур'є забезпечують порядок найкращих наближень в L_s–метриках тригонометричними поліномами, тобто

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \asymp \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \asymp \psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}},\ \ 1\le p<\infty.$$

Водночас, суми Фур'є не дозволяють записати рівномірних відносно параметра s, $1\le s\le\infty$, оцінок зверху величин $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$, оскільки при $s=1$ (див. [95, с. 285] та [96, с. 87]) за умови $\psi\in\mathfrak{M}''_\infty$

$$\frac{\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s}{E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s} \asymp \ln^+(\eta(n)-n).$$

Далі буде показано, що лінійний метод наближення $V_{n,\psi}(f;x)$ вигляду (3.66) дозволяє записати рівномірні відносно параметра s, $1\le s\le\infty$ оцінку зверху найкращих наближень $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$ при $\psi\in\mathfrak{M}^+_\infty$ і $\beta\in\mathbb{R}$.

Теорема 3.4. *Нехай $\psi\in\mathfrak{M}^+_\infty$, $\beta\in\mathbb{R}$, $1\le s\le\infty$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$. Тоді для довільних $n\in\mathbb{N}$ таких, що $\eta(n)-n\ge a>2$, $\mu(n)\ge b>2$, справедливі оцінки*

$$C_a\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}} \le E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \le C^*_{a,b}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}}, \tag{3.115}$$

де сталі C_a і $C^*_{a,b}$ означаються формулами (3.1) і (3.65) відповідно.

Доведення теореми 3.4. Згідно з теоремою 3.3 для довільних $\psi\in\mathfrak{M}^+_\infty$ при $\eta(n)-n\ge a>2$, $\mu(n)\ge b>2$ має місце оцінка

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \ge C_a\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}},$$

в якій величина C_a означена рівністю (3.1).

Для оцінки зверху найкращих наближень $E_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_s$ розглянемо величину

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1};V_{n,\psi})_s = \sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,1}} \|f(\cdot)-V_{n,\psi}(f;\cdot)\|_s,\ \ 1\le s\le\infty,$$

де суми $V_{n,\psi}$ означаються формулою (3.66).

Оскільки

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \le \mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1};V_{n,\psi})_s, \tag{3.116}$$

то для доведення теореми 3.4 достатньо показати справедливість співвідношення

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1}; V_{n,\psi})_s \le C^*_{a,b}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}}. \tag{3.117}$$

Для цього використаємо інтегральне зображення (3.71), яке у випадку $f \in L^{\psi}_{\beta,1}$ буде справедливим майже для всіх $x \in \mathbb{R}$, та твердження 2.4. Тоді для довільних $1 \le s \le \infty$ одержимо

$$E_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_s \le \frac{1}{\pi}\|\Psi^*_{\beta,n}\|_s\|\varphi\|_1 \le \frac{1}{\pi}\|\Psi^*_{\beta,n}\|_s. \tag{3.118}$$

Скориставшись співвідношеннями (3.102) і (3.103), поклавши $p' = s$, з (3.118) отримуємо (3.117). Теорему 3.4 доведено.

Наслідок 3.5. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}^+_{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\eta(\psi,n)-n) = \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le s \le \infty$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'} = 1$. *Тоді*

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \asymp \psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}}.$$

Наслідок 3.6. *Нехай* $r \in (0,1)$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le s \le \infty$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'} = 1$. *Тоді для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *таких, що задовольняють умову (3.104), справедливі оцінки*

$$C_a \exp\left(-\alpha n^r\right) n^{\frac{1}{s'}}\left(\left(1+\frac{\ln 2}{\alpha n^r}\right)^{\frac{1}{r}}-1\right)^{\frac{1}{s'}} \le E_n(L^{\alpha,r}_{\beta,1})_s \le$$

$$\le C^*_{a,b}\exp\left(-\alpha n^r\right) n^{\frac{1}{s'}}\left(\left(1+\frac{\ln 2}{\alpha n^r}\right)^{\frac{1}{r}}-1\right)^{\frac{1}{s'}},$$

де величини C_a *і* $C^*_{a,b}$ *означаються формулами (3.1) та (3.65) при* $a = a(\alpha,r)$, $b = b(\alpha,r)$, *які задані рівностями (3.60) та (3.61).*

З наслідку 3.6 та формули (3.106) випливає порядкова рівність

$$E_n(L^{\alpha,r}_{\beta,1})_s \asymp \exp\left(-\alpha n^r\right) n^{\frac{1-r}{s'}}, \quad 1 \le s \le \infty,\ \frac{1}{s}+\frac{1}{s'} = 1.$$

Співставляючи співвідношення (3.110) і (3.115), при виконанні умов теореми 3.4 можна записати оцінку

$$C_a\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}} \le E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \le C_{a,b,s'}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}},\ \ \frac{1}{s}+\frac{1}{s'} = 1,$$

де величини $C_{a,b}$, $C^*_{a,b}$ і $C_{a,b,p}$ означені формулами (3.2), (3.65) і (3.107) відповідно.

3.3. Порядкові оцінки найкращих m–членних тригонометричних наближень класів аналітичних функцій

Теорема 3.5. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$, $1 \le p, s \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді мають місце порядкові оцінки*

$$e_{2n}(C^{\psi}_{\beta,p})_s \asymp e_{2n-1}(C^{\psi}_{\beta,p})_s \asymp \psi(n). \tag{3.119}$$

Доведення теореми 3.5. Згідно зі співвідношенням (1.41) теореми 1.11, якщо $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$, то існує стала $C_{p,s}$ така, що

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_s \le C_{p,s}\psi(n), \ \ 1 \le p, s \le \infty, \ \ \beta \in \mathbb{R}. \tag{3.120}$$

Враховуючи нерівності (1.27) або (1.28), одержуємо

$$e_{2n}(C^{\psi}_{\beta,p})_s \le e_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,p})_s \le C_{p,s}\psi(n), \ \ 1 \le p, s \le \infty.$$

Знайдемо відповідну оцінку знизу для величини $e_{2n}(C^{\psi}_{\beta,p})_s$. Доозначимо послідовність $\psi(k)$ у точці $k = 0$ за допомогою рівності $\psi(0) = \psi(1)$. Розглянемо функцію

$$f^*(t) = f^*(\psi; n; t) := C_1\Big(\frac{\psi(1)}{2(n+A)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi(k)}{(n-k+A)^2}\cos kt\Big),$$

де C_1 та A — деякі додатні сталі, які будуть визначені пізніше.

Оскільки

$$\|(f^*)^{\psi}_{\beta}(t)\|_p = C_1\Big\|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k+A)^2}\cos\Big(kt + \frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big\|_p \le$$

$$\le 2\pi C_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k+A)^2},$$

то очевидно, що вибравши сталу C_1 так, щоб $2\pi C_1 \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k+A)^2} \le 1$, отримаємо включення $f^* \in L^{\psi}_{\beta,p}$. Покажемо, що

$$e_{2n}(f^*)_s \ge C_2\psi(n), \ n \in \mathbb{N}, \tag{3.121}$$

де C_2 — деяка додатня стала.

З цією метою скористаємось співвідношенням двоїстості (див., наприклад, [37, с. 42])

$$e_m(f)_s = \inf_{\gamma_m} \sup_{\substack{h\in L^{\perp}(\gamma_m),\\ \|h\|_{s'}\leq 1}} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)h(t)dt \right|, \ m\in\mathbb{N}, \tag{3.122}$$

де $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, а запис $h\in L^{\perp}(\gamma_m)$ означає, що

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t)e^{ikt}dt = 0, \quad k\in\gamma_m.$$

Для довільного набору γ_{2n} із $2n$ цілих чисел візьмемо довільне ціле число $k^*=k^*(\gamma_{2n})$ таке, що $k^*\in[-n,n]$ і $k^*\notin\gamma_{2n}$. Покладемо

$$T(t) = T(\gamma_{2n},k^*,t) := \frac{1}{2\pi}e^{-ik^*t}.$$

Очевидно, що $T\in L^{\perp}(\gamma_{2n})$ і $\|T\|_{s'}\leq 1, \ 1\leq s\leq\infty, \ \frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, а отже в силу співвідношення (3.122) та рівності

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{imt}dt = \begin{cases} 0, & k+m\neq 0, \\ 2\pi, & k+m=0, \end{cases} \quad k,m\in\mathbb{Z},$$

отримуємо оцінку

$$e_{2n}(f^*)_s = \inf_{\gamma_{2n}} \sup_{\substack{h\in L^{\perp}(\gamma_{2n}),\\ \|h\|_{s'}\leq 1}} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^*(t)h(t)dt \right| \geq \inf_{\gamma_{2n}} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^*(t)T(t)dt \right| =$$

$$= \frac{C_1}{4\pi} \inf_{\gamma_{2n}} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{|k|\leq n} \frac{\psi(|k|)}{(n-|k|+A)^2} e^{-ikt}e^{-ik^*t}dt \right| = \frac{C_1}{2} \inf_{\gamma_{2n}} \frac{\psi(|k^*|)}{(n-|k^*|+A)^2} \geq$$

$$\geq \frac{C_1}{2} \min_{1\leq k\leq n} \frac{\psi(k)}{(n-k+A)^2}. \tag{3.123}$$

Покажемо, що функція $\psi_n(t)=\frac{\psi(t)}{(n-t+A)^2}$ при певному виборі сталої A не зростає на проміжку $[1,n]$. Легко бачити, що

$$\psi_n'(t) = \left(\frac{\psi(t)}{(n-t+A)^2}\right)' = \frac{2\psi(t)}{(n-t+A)^3} + \frac{\psi'(t)}{(n-t+A)^2} =$$

$$= \frac{\psi(t)}{(n-t+A)^3}\Big(2 - \frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)}(n-t+A)\Big), \quad \psi'(t) := \psi'(t+0). \tag{3.124}$$

Далі скористаємось тим, що для $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$ за умови $\mu(t) \geq b > 0$ має місце нерівність (див. лему 3.4)

$$\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} \leq 4\big(1+\frac{1}{b}\big)\,(\eta(t)-t)\,, \quad t \geq 1. \tag{3.125}$$

Оскільки $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, то існує стала $K_0 > 0$ така, що $\eta(t) - t \leq K_0$, а отже

$$\mu(t) = \frac{t}{\eta(t)-t} \geq \frac{1}{\eta(t)-t} \geq \frac{1}{K_0} \tag{3.126}$$

і, застосовуючи (3.125) при $b = \frac{1}{K_0}$, маємо

$$\frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} \geq \frac{1}{4(K_0+1)(\eta(t)-t)} \geq \frac{1}{4(K_0+1)K_0}. \tag{3.127}$$

Враховуючи (3.127), отримуємо

$$2 - \frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)}(n-t+A) \leq 2 - \frac{1}{4(K_0+1)K_0}(n-t+A) \leq$$

$$\leq 2 - \frac{A}{4(K_0+1)K_0}. \tag{3.128}$$

З (3.124) і (3.128) випливає, що при $A \geq 8K_0(K_0+1)$ справедлива нерівність $\psi_n'(t) \leq 0,\ t \geq 1$, тобто функція $\psi_n(t)$ не зростає. Тому

$$\min_{1\leq k\leq n} \frac{\psi(k)}{(n-k+A)^2} = \frac{\psi(n)}{A^2}. \tag{3.129}$$

З (3.123) та (3.129) отримуємо (3.121). Теорему 3.5 доведено.

Теорема 3.5 разом зі співвідношеннями (1.27), (1.28) та (3.120) дозволяють записати наступне твердження.

Теорема 3.6. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, $1 \leq p, s \leq \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $m \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$e_m(C^\psi_{\beta,p})_s \asymp e^\perp_m(C^\psi_{\beta,p})_s \asymp d^\top_m(C^\psi_{\beta,p}, L_s) \asymp \psi\Big(\Big[\frac{m+1}{2}\Big]\Big),$$

де запис $[a]$ означає цілу частину дійсного числа a.

Висновки до розділу 3

В третьому розділі знайдено двосторонні оцінки для найкращих рівномірних наближень тригонометричними поліномами та наближень сумами Фур'є класів 2π–періодичних неперервних функцій таких, що їх (ψ, β)–похідні f_β^ψ належать одиничним кулям просторів L_p, $1 \le p < \infty$, у випадку коли ψ спадають до нуля швидше за будь–яку степеневу функцію. Аналогічні оцінки одержані для величин $\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,1})_s$, $1 < s \le \infty$.

Побудовано лінійний метод наближення, який дозволив записати рівномірні відносно параметрів p $(1 \le p \le \infty)$ та s $(1 \le s \le \infty)$ оцінки зверху найкращих наближень класів $C^\psi_{\beta,p}$ та $L^\psi_{\beta,1}$ в метриках просторів C та L_s відповідно.

В метриках просторів L_s, $1 \le s \le \infty$, одержано точні за порядком оцінки знизу найкращих m–членних тригонометричних наближень класів $C^\psi_{\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, у випадку коли послідовність $\psi(k)$ прямує до нуля не повільніше за геометричну прогресію ($\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$). Знайдені оцінки збіглися за порядком із наближеннями частинними сумами Фур'є на вказаних класах функцій в L_s–метриці, що дозволило також записати точні порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень та тригонометричних поперечників зазначених класів.

Основні результати, які висвітлені в даному розділі, опубліковані в роботах [71–73], [78] і [80].

ВИСНОВКИ

1. Знайдено двосторонні оцінки для наближень сумами Фур'є, найкращих наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$ в просторі C, у випадку коли послідовності $\psi(k)k^{\frac{1}{p}}$ спадають не швидше за деяку степеневу функцію і, крім того, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}<\infty$, якщо $1<p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, та $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k)<\infty$, якщо $p=1$. Аналогічні оцінки знайдені для наближень зазначених апроксимативних характеристик класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ в метриках просторів L_s, $1\le s<\infty$. При цьому константи в отриманих оцінках виражені через параметри задачі в явному вигляді.

2. Отримано двосторонні оцінки для найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1\le p<\infty$, і $L^{\psi}_{\beta,1}$ в метриках просторів C і L_s, $1\le s<\infty$, відповідно у випадку, коли ψ спадають до нуля швидше за будь–яку степеневу функцію. Побудовано лінійний метод наближення, який дозволив записати рівномірні відносно параметрів p $(1\le p\le\infty)$ та s $(1\le s\le\infty)$ оцінки зверху найкращих наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$ та $L^{\psi}_{\beta,1}$ в метриках просторів C та L_s відповідно. Константи в отриманих оцінках виражені через параметри задачі в явному вигляді.

3. Одержано точні за порядком оцінки знизу найкращих m–членних тригонометричних наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1\le p<\infty$, в метриках просторів L_s, $1\le s\le\infty$, у випадку, коли послідовність $\psi(k)$ прямує до нуля не повільніше за геометричну прогресію.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахиезер Н.И. О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций / Н.И. Ахиезер, М.Г. Крейн // Докл. АН СССР. — 1937. — Т. 15, №3. — С. 107–112.

2. Бабенко В.Ф. О наилучшем линейном приближении некоторых классов дифференцируемых периодических функций / В.Ф. Бабенко, С.А. Пичугов // Матем. заметки. — 1980. — Т. 27, №5. — С. 683–689.

3. Белинский Э.С. Приближение периодических функций многих переменных "плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники / Э.С. Белинский // Исследование по теории функций многих вещественных переменных. — Ярославль: Ярослав. ун-т, 1984. — С. 10–24.

4. Белинский Э.С. Приближение периодических функций многих переменных "плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники / Э.С. Белинский // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 284, №6. — С. 1294–1297.

5. Белинский Э.С. Приближение "плавающей" системой экспонент на классах периодических гладких функций / Э.С. Белинский // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1987. — Т. 180. — С. 46–47.

6. Белинский Э.С. Приближение "плавающей" системой экспонент на классах гладких периодических функций / Э.С. Белинский // Мат. сб. — 1987. — Т. 132, № 1. — С. 20–27.

7. Белинский Э.С. Приближение "плавающей" системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной произ-

водной / Э.С. Белинский // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. — Ярославль: Ярослав. ун-т, 1988. — С. 16–33.

8. Belinskii E.S. Approximation of functions of several variables by trigonometric polynomials with given number of harmonics, and estimates of ε–entropy / E.S. Belinskii // Anal. Math. — 1989. — Vol. 15, No 2. — P. 67–74.

9. Белинский Э.С. Асимптотические характеристики классов функций с условиями на смешанную производную (смешанную разность) / Э.С. Белинский // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. — Ярославль: Ярослав. ун–т, 1990. — С. 22–37.

10. Белинский Э.С. О наименьшей величине норм смешанных производных тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник / Э.С. Белинский, Э.М. Галеев // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. — 1991. — №2. — С. 3–7.

11. Belinskii E.S. Decomposition theorems and approximation by a "floating" system of exponentials / E.S. Belinskii // Trans. of the American Math. Society. — 1998. — Vol. 350, № 1. — P. 43–53.

12. Bohr H. Un theorem generale sur l'integration d'un polynome trigonometrique / H. Bohr // C.R. Acad. Sci. Paris. — 1935 — Vol. 200. — P. 1276–1277.

13. Бушанский А.В. О наилучшем в среднем гармоническом приближении некоторых функций / А.В. Бушанский // Исследования по теории приближения функции и их приложения. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1978. — С. 29–37.

14. Vallé Poussin Ch. J. Sur la meilleure approximation des fonctions d'une variable réelle par des expessions d'ordre donné / Ch. J. de la Vallee

Poussin // Compt., rendus, 1918. — Bd. 166. — P. 799–802.

15. Vallé Poussin Ch. J. Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. / Ch. J. de la Vallee Poussin. — Paris.: Gautier – Villars. — 1919. — 150 p.

16. Галеев Э.М. Приближение некоторых классов периодических функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p / Э.М. Галеев // Успехи мат. наук. — 1977. — Т. 32, № 4. — С. 251–252.

17. Галеев Э.М. Приближение классов периодических функций нескольких переменных ядерными операторами / Э.М. Галеев // Мат. заметки. — 1990. — Т. 47, № 3. — С. 32–41.

18. Грабова У.З. Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів (ψ, β) – диференційовних функцій / У.З. Грабова, А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2013. — Т. 65, №9. — С. 1186 – 1197.

19. Грандштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. / Излаиль Соломонович Грандштейн, Иосиф Моисеевич Рыжик. — М.: Наука, 1971. — 1108 с.

20. Дзядык В.К. О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s–ю производную $(0 < s < 1)$ / В.К. Дзядык // Изв. АН СССР, Сер. мат. — 1953. — Т. 17, №2. — С. 135–162.

21. Дзядык В.К. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых ядрами, являющимися интегралами от абсолютно монотонных функций / В.К. Дзядык // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1959. — Т. 23, №6. — С. 933–950.

22. Дзядык В.К. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации аб-

солютно монотонных ядер / В.К. Дзядык // Мат. заметки. — 1974. — Т. 16, №5. — С. 691–701.

23. Задерей П.В. Приближение дифференцируемых периодических функций двух переменных суммами Фурье / П.В. Задерей // Тр. МИАН СССР. — 1987. —Т. 180. — С. 114–115

24. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: В 2-х т. / А. Зигмунд. — М.: Мир, 1965. — Т. 1. — 615 с.

25. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: В 2-х т. / А. Зигмунд. — М.: Мир, 1965. — Т.2. — 538 с.

26. Ефимов А.В. О приближении непрерывных функций суммами Фурье / А.В. Ефимов // Успехи мат. наук. — 1959. — Т. 14, вып. 2.— С. 225–227.

27. Ефимов А.В. Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье / А.В. Ефимов // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1960. — Т. 24, №2 — С. 243–296.

28. Исмагилов Р.С. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами / Р.С. Исмагилов // Успехи мат. наук. — 1974. — Т. 29, №3. — С. 161–178.

29. Кашин Б.С. Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций / Б.С.Кашин // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1977. — Т. 41, №2. — С. 334-–351.

30. Кашин Б.С. О поперечниках классов Соболева малой гладкости / Б.С.Кашин // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. — 1981. — № 5. — С. 50–54.

31. Кашин Б.С. Об аппроксимационных свойствах полных ортонормированных систем / Б.С.Кашин // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1985. — Т. 172, № 2. — С. 187–191.

32. Кашин Б.С. О нижних оценках для n-членных приближений / Б.С.Кашин // Мат. заметки. — 2001. — Т. 70, №4. — С. 636–638.

33. Кашин Б.С. О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 / Б.С.Кашин, В.Н. Темляков // Мат. заметки. — 1994. — Т. 56, № 5. — С. 57–86.

34. Kolmogoroff A.N. Zer Grössenordnung des Restliedes Fouriershen Riehen differenzierbaren Funktionen / A.N. Kolmogoroff // Ann. Math. — 1935. — Vol. 36. — P. 521–526.

35. Консевич Н.М. Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів функцій багатьох змінних $L^{\psi}_{\beta,p}$ / Н.М. Консевич // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53, №1 — С. 23–29.

36. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения / Николай Павлович Корнейчук. — М.: Наука, 1976. — 320 с.

37. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения / Николай Павлович Корнейчук. — М.: Наука, 1987. — 424 с.

38. Крейн М.Г. К теории наилучшего приближения периодических функций / М.Г. Крейн // Докл. АН СССР. Сер. мат. — 1938. — Т. 18, №4–5. — С. 245–249.

39. Lebesgue H. Sur les intégrales singuliéres / H. Lebesgue //Ann. de Toulous. — 1909. — Vol.1. – P. 17–25.

40. Lebesgue H. Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant á une condition de Lipschitz / H. Lebesgue //Bull. Soc. Math. France. — 1910. — Vol.38. – P. 182–210.

41. Леонтьєв В.О. Другий член в асимптотичній формулі Колмогорова для наближення частинними суммами ряду Фур'є / В.О. Леонтьєв // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1990. — № 5. — С. 16–20.

42. Леонтьев В.О. Асимптотика приближения дифференцируемых функций рядом Фурье / В.О. Леонтьев // Докл. РАН. — 1992. — Т. 326, № 1. — С. 31–34.

43. Macovoz G.I. On trigonometric n-width and their generalization / G.I. Macovoz // J. of Approx. Theory. — 1984. — Vol. 41, № 4. — P. 361–366.

44. Meremelia I. Approximations of holomorphic functions by generalized Zygmund sums / Meremelia I., Savchuk V. // Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics. — 2013. — Vol. 1, №1. — P. 70–81.

45. Моторный В.П. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами в среднем / В.П. Моторный // Матем. заметки. — 1974. — Т. 16, № 1. — С. 15–26.

46. Nagy B. Uber geuisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen / B. Nagy // Ber. Acad. Dtsch. Wiss. — 1938. — Vol. 90. — P. 103–134.

47. Никольский С.М. Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами / С.М. Никольский // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1945. — Т. 15. — С. 1–76.

48. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем / С.М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207–256.

49. Осколков К.И. Аппроксимационные свойства суммируемых функций на множествах полной меры / К.И. Осколков // Мат. сб. — 1977. — Т. 103, № 4. — С. 563–589.

50. Пинкевич В.Т. О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Weyl'я / В.Т. Пинкевич // Изв. АН СССР. сер. мат. — 1940. — Т. 4, №5. — С. 521–528.

51. Романюк А.С. Неравенства типа Бора–Фавара и наилучшие M–членные приближения классов $L^{\psi}_{\beta,p}$ / А.С. Романюк // Некоторые вопросы теории приближения функций и их приложения. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. — С. 98–108.

52. Романюк А.С. Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\Theta}$. I / А.С. Романюк // Укр. мат. журн. — 1992. — Т. 44, № 11. — С. 1535–1537.

53. Романюк А. С. О приближении классов Бесова функций многих переменных частными суммами Фурье с заданным числом гармоник / А.С. Романюк // Оптимизация методов приближения. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1992. — С. 70–78.

54. Романюк А.С. Приближение классов $B^r_{p,\Theta}$ периодических функций многих переменных частными суммами Фурье с произвольным выбором гармоник / А.С. Романюк // Ряды Фурье: теория и приложения. — Киев: Ин-т математики АН Украины. — 1992. — С. 112–118.

55. Романюк А.С. О наилучших приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова периодических функций многих переменных / А.С. Романюк // Укр. мат. журн. — 1995. — Т.47, №1. — С.79–92.

56. Романюк А.С. Приближение классов периодических функций многих переменных / А.С. Романюк // Матем. заметки. — 2002. — Т. 71, №1. — С. 109–121.

57. Романюк А.С. Наилучшие M–членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных / А.С. Романюк // Изв. РАН. Сер. мат. — 2003. — Т. 67, № 2. — С. 61–100.

58. Романюк А.С. Колмогоровские и тригонометрические поперечники классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных /

А.С. Романюк // Мат. сб. — 2006. — Т. 197, № 1. — С. 71–96.

59. Романюк А.С. Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике / А.С. Романюк // Матем. заметки. — 2007. — Т. 82, №2. — С. 247–261.

60. Романюк А.С. Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных / А.С. Романюк // Мат. сб. — 2008. — Т. 199, № 2. — С. 93–114.

61. Романюк А.С. Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных / Анатолий Сергеевич Романюк // Пр. Ін-ту математики НАН України Т. 93. — К.: Ін-т математики НАН України, 2012. — 352 с.

62. Романюк В.С. Дополнения к оценкам приближения суммами Фурье классов бесконечно дифференцируемых функций / В.С. Романюк // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Пр. Ін–ту математики НАН України. — 2003. — Т. 46. — С. 131–135.

63. Романюк В.С. Нелинейные приближения функций нескольких переменных с быстро убывающими коэффициентами Фурье / В.С. Романюк // Тези доповідей міжнародної науковоої конференції "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування"з нагоди 70-річчя з дня народження А.М. Самойленка, Київ, 2008. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2008. — С. 95–96.

64. Сердюк А.С. Про найкраще наближення на класах згорток періодичних функцій / А.С. Сердюк // Теорія наближення та її застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. Т.41. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — С. 168–189.

65. Сердюк А.С. Наближення нескінченно диференційовних періодичних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами /

А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, №4. — С. 495–505.

66. Сердюк А.С. Про один лінійний метод наближення періодичних функцій / А.С. Сердюк // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2004. — Т.1, №1. — С. 294–336.

67. Сердюк А.С. Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в рівномірній метриці / А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, №8. — С. 1079–1096.

68. Serdyuk A.S. Ovsii Ie.Yu. Uniform approximation of periodical functions by trigonometric sums of special type / A.S. Serdyuk Ie.Yu. Ovsii // ISRN Math. Anal. — 2014. — Article ID 165389. — 11 p.

69. Сердюк А.С. Рівномірні наближення класів $(\psi, \overline{\beta})$–диференційовних функцій лінійними методами / А.С. Сердюк, І.В. Соколенко // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін–ту матем. НАН України. — 2011. — Т. 8, №1. — С. 181–189.

70. Сердюк А.С. Наближення лінійними методами класів $(\psi, \overline{\beta})$–диференційовних функцій / А.С. Сердюк, І.В. Соколенко // Зб. праць Ін–ту матем. НАН України. — 2013. — Т. 10, №1. — С. 245–254.

71. Сердюк А.С. Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів нескінченно диференційовних функцій / А.С. Сердюк, Т.А. Степанюк // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2013. — Т. 10, №1. — С. 255–282.

72. Сердюк А.С. Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів нескінченно диференційовних функцій / А.С. Сердюк, Т.А. Степанюк// Міжнародна математична конференція з нагоди 75–річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка «Боголюбовські читання DIF–2013», Севастополь, 23–30 червня 2013 р.: Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2013. — С. 270–271.

73. Сердюк А.С. Порядки наилучших приближений и приближений суммами Фурье классов бесконечно дифференцируемых функций / А.С. Сердюк, Т.А. Степанюк // Международная научная конференция «Современные проблемы математики, механики, информатики» посвященной 90–летию со дня рождения Л.А. Толоконникова, Тула, 16–20 сентября 2013 г.: Материалы конференции. — Тула: Изд–во ТулГу, 2013. — С. 112–113.

74. Сердюк А.С. Оцінки рівномірних наближень сумами Фур'є класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості / А.С. Сердюк, Т.А. Степанюк // Міжнародна математична конференція присвячена 60–річчю В.І. Рукасова (1953-2009) «Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування», Слов'янськ, 21–24 травня 2014 р.: Матеріали конференції. — Слов'янськ: ДДПУ, 2014. — С. 61.

75. Сердюк А.С. Оцінки найкращих рівномірних наближень та наближень сумами Фур'є класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості / А.С. Сердюк, Т.А. Степанюк // IV міжнародна Ганська конференція присвячена 135–ій річниці від дня народження Ганса Гана, Чернівці, 30 червня–5 липня 2014 р.: Тези доповідей. — Чернівці: Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2014. — С. 183–185.

76. Serdyuk A.S. Estimates of the best approximations and approximations of Fourier sums of classes of convolutions of periodic functions of not high smoothness / A.S. Serdyuk, T.A. Stepaniuk // XVIIth Conference on Analytic Functions and Related Topics, Chelm, June 29–July 02, 2014: Abstracts of talks and posters. — Chelm: The State School of Higher Education in Chelm. — P. 42–43.

77. Сердюк А.С. Оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості / А.С. Сердюк, Т.А. Степанюк // IX Літня школа «Алгебра, тополо-

гія і аналіз», Поляниця, 7–18 липня 2014 р.: Тези лекцій і доповідей. — Івано–Франківськ, 2014. — С. 76-78.

78. Сердюк А.С. Оцінки найкращих наближень класів нескінченно диференційовних функцій в рівномірній та інтегральній метриках / А.С. Сердюк, Т.А. Степанюк // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, №9. — С.1244–1256.

79. Сердюк А.С. Порядкові оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є в рівномірній метриці класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості / А.С. Сердюк, Т.А. Степанюк // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, №12. — С. 1658-1675.

80. Сердюк А.С. Оцінки найкращих m–членних тригонометричних наближень класів аналітичних функцій / А.С. Сердюк, Т.А. Степанюк // Доповіді НАНУ — 2015. — №2. — С. 32–37.

81. Сердюк А.С. Порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості / А.С. Сердюк, Т.А. Степанюк // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 7. — С.916–936.

82. Сердюк А.С. Оцінки найкращих m–членних тригонометричних наближень класів аналітичних функцій / А.С. Сердюк, Т.А. Степанюк // Всеукраїнська наукова конференція ″Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу″, Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2015 р.: Тези доповідей. — Івано–Франківськ: ДВНЗ ″Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника″, 2015. — С. 69–70.

83. Сердюк А.С. Порядкові оцінки найкращих орогональних тригонометричних наближень класів згорток в рівномірній метриці / А.С. Сердюк, Т.А. Степанюк // X Літня школа ″Алгебра, Топологія, Аналіз″, Одеса, 3–15 серпня 2015 р.: Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2015. — С. 59.

84. Соколов И.Г. Остаточный член ряда Фурье дифференцируемых функций / И.Г. Соколов // Докл. АН СССР. — 1955. — Т. 103, № 1. — С. 23–26.

85. Стасюк С.А. Найкращі M-членні ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатох змінних / С.А. Стасюк // Укр. мат. журн. — 2008. — Т. 60, № 5. — С. 647–656.

86. Степанец А.И. Уклонение сумм Фурье на классах безконечно дифференцируемых функций / А.И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1984. — Т. 36, № 6. — С. 750–758.

87. Степанец А.И. Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье / А.И. Степанец // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1986. — Т. 50, №1 — С. 101–136.

88. Степанец А.И. Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье / А.И. Степанец // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1986. — Т. 50, №2. — С. 101–136.

89. Степанец А.И. Модули полураспада монотонных функций и скорость сходимости рядов Фурье / А.И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1986. — Т. 38, №5. — С. 618–624.

90. Степанец А.И. Приближение суммами Фурье функций с медленно убывающими коэффициентами Фурье / А.И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1986. — Т. 38, №6. — С. 755–762.

91. Степанец А.И. Скорость сходимости рядов Фурье и наилучшие приближения в пространстве L_p / А.И. Степанец, А.К. Кушпель // Укр. мат. журн. — 1987. — Т. 39, №4. — С. 483–492.

92. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций / Александр Иванович Степанец. — Киев: Наук. Думка. — 1987. — 286 с.

93. Степанец А.И. Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ / А.И. Степанец // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53, №3. — С. 392–416.

94. Степанец А.И. Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ в разных метриках / А.И. Степанец // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53, №8. — С. 1121–1146.

95. Степанец А.И. Методы теории приближений: В 2 ч. / Александр Иванович Степанец // Пр. Ін-ту математики НАН України Т. 40. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. I. — 427 с.

96. Степанец А.И. Методы теории приближений: В 2 ч. / Александр Иванович Степанец // Пр. Ін-ту математики НАН України Т. 40. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. II. — 427 с.

97. Степанец А.И. Приближения суммами Валле Пуссена / Александр Иванович Степанец, Владимир Иванович Рукасов, Станислав Олегович Чайченко // Пр. Ін-ту математики НАН України Т. 68 — К.: Ін-т математики НАН України, 2007. — 386 с.

98. Степанец А.И. Классификация бесконечно дифференцируемых функций / А.И. Степанец, А.С. Сердюк, А.Л. Шидлич // Укр. мат. журн. — 2008. — Т. 60, №12. — С. 1686–1708.

99. Степанюк Т.А. Оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості в інтегральних метриках / Т.А. Степанюк // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін–т математики НАН України. — 2014. — Т. 11, №3. — С. 241–269.

100. Степанюк Т.А. Оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості в інтегральних метриках / Т.А. Степанюк // Матеріали між-

народної конференції молодих математиків 3–6 червня 2015. — Київ: Ін–т математики НАН України, 2015. — С. 86.

101. Стечкин С.Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов / С.Б. Стечкин // Докл. АН СССР. — 1955. — Т. 102, № 1. — С. 37–40.

102. Стечкин С.Б. О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами / С.Б. Стечкин // Изв. АН СССР, Сер. мат. — 1956. — Т. 20. — С. 643–648.

103. Стечкин С.Б. О приближении дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами в метрике L / С.Б. Стечкин, С.А. Теляковский // Тр. Матем. ин-та АН СССР, Сер. мат. — 1967. — Т. 88. — С. 20–29.

104. Сунь Юн–шен. О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами / Сунь Юн–шен // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1959. — Т. 23, №1. — С. 67–92.

105. Теляковский С.А. О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I / С.А. Теляковский // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1961. — Т. 62. — С. 61–97.

106. Теляковский С.А. Приближение дифференцируемых функций частными суммами их рядов Фурье / С.А. Теляковский // Матем. заметки. — 1968. — Т. 4, № 3. — С. 291–300.

107. Теляковский С.А. О приближении суммами Фурье функций высокой гладкости / С.А. Теляковский // Укр. мат. журн. — 1989. — Т. 41, № 4. — С. 510–518.

108. Темляков В.Н. Приближение периодических функций нескольких переменных с ограниченной смешанной разностью / В.Н. Темляков // Матем. сб. — 1980. — Т. 113, №1. — С. 65–80.

109. Темляков В.Н. Приближение периодических функций нескольких переменных с ограниченной смешанной производной / В.Н. Темляков // Тр. МИАН СССР. — 1980. — Т. 156. — С. 223–260.

110. Темляков В.Н. Приближение периодических функций нескольких переменных тригонометрическими полиномами и поперечники некотрых классов функций / В.Н. Темляков // Изв. АН СССР. Сер. матем. Сер. мат. — 1985. — Т. 49, № 5. — С. 986–1030.

111. Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной / В.Н. Темляков // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — Т. 178. — С. 1–112.

112. Темляков В.Н. Оценки наилучших билинейных приближений функций двух переменных и некоторые их приложения / В.Н. Темляков // Мат. Сб.. — 1987. — Т. 176, №9. — С. 93–107.

113. Темляков В.Н. Оценки наилучших билинейных приближений периодических функций / В.Н. Темляков // Тр. Мат. ин–та АН СССР. — 1988. — Т. 181. — С. 250–267.

114. Темляков В.Н. Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью / В.Н. Темляков // Тр. МИАН СССР. — 1988. — Т. 189. — С. 81–120.

115. Temlyakov V.N. Approximation of Periodic Function / V.N. Temlyakov. — Nova Science Publichers, Inc. — 1993. — 419p.

116. Тиман А.Ф. Аппроксимативные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье / А.Ф. Тиман // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1953. — Т. 17, № 2. — С. 99–134.

117. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного / Александр Филипович Тиман. — М. : Физматгиз, 1960. — 624 с.

118. Тиман М.Ф. Некоторые линейные процессы суммирования рядов Фурье и наилучшее приближение / М.Ф. Тиман // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 145, № 4. — С. 741–743.

119. Тиман М.Ф. Наилучшее приближение функции и линейные методы суммирования рядов Фурье / М.Ф. Тиман // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1965. — Т. 29, № 3. — С. 587–604.

120. Тригуб Р.М Мультипликаторы рядов Фурье и приближение функций полиномами в пространствах C и L / Р.М. Тригуб // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 306, №2. — С. 292–296.

121. Favard J. Sur l'approximation des fonctions périodiques par des polynomes trigonométriques / J. Favard // C.R. Acad. Sci. — 1936. — T. 203. — P. 1122–1124.

122. Favard J. Sur les meilleurs procédes d'approximations de certains classes de fontions par des polynomes trigonométriques / J. Favard // Bull. de Sci. Math. — 1937. — Vol. 61. — P. 209–224, 243–256.

123. Федоренко А.С. Наилучшие m–членные тригонометрические приближения функций классов $L^{\psi}_{\beta,p}$ / А.С. Федоренко // Ряди Фур'є: Теорія і застосування. — Киев: Ин-т математики НАН Украины. — 1998. — С.356–364.

124. Федоренко А.С. О наилучших m-членных тригонометрических приближениях классов (ψ, β)–дифференцируемых функций одной переменной / А.С. Федоренко // Крайові задачі для диференц. рівнянь: Зб. наукових праць. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. — Вип. 3. — С. 250–258.

125. Федоренко О.С. Про найкращі m–членні тригонометричні та ортогональні тригонометричні наближення функцій класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ / О.С. Федоренко // Укр. мат. журн. — 1999. — Т. 51, №12. — С.1719–1721.

126. Федоренко А.С. Наилучшие m-членные тригонометрические приближения классов (ψ, β) — дифференцируемых функций одной переменной / А.С. Федоренко // Укр. мат. журн. — 2000. — Т. 52, №6. — С.850–856.

127. Федоренко О.С. Наближення (ψ, β)-диференційовних функцій тригонометричними поліномами: Автореф. дисертації ... канд. фіз.-мат. наук. — К.: Ін-т математики НАН України. — 2001. — 16 с.

128. Федоренко А.С. Найкращі m–членні тригонометричні наближення класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ в рівномірній метриці / А.С. Федоренко, О.С. Федоренко // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. — Київ, 2003. — Т. 46. — С. 276–282.

129. Федоренко А.С. Найкращі m–членні тригонометричні наближення класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у рівномірній метриці / А.С. Федоренко, О.С. Федоренко // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, №1. — С.129–132.

130. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. / Григорий Михайлович Фихтенгольц — М.: Наука, 1969. — T.III. — 656 с.

131. Fejer L. Untersuchungen uber Fouriersche Reihen / L. Fejer // Math. Ann. — 1904. — Vol. 58. — S. 501–569.

132. Чайченко С.О. Наближення сумами Фур'є на множинах $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ / С.О. Чайченко // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, №6. — С.835–846.

133. Шевалдин В.Т. Поперечники классов сверток с ядром Пуассона / В.Т. Шевалдин // Матем. заметки. — 1992. — Т.51, № 6. — С. 126–136.

134. Шидліч А.Л. Порядкові оцінки найкращих n–членних ортогональних тригонометричних наближень класів функцій $F^{\psi}_{q,\infty}$ в просторах $L_p(T^d)$. — Теорія наближення функцій та суміжні питання /

А.Л.Шидліч // Зб. праць Інституту математики НАН України. — Т. 8, №1. — 2011. — С. 302–317.

135. Шидліч А.Л. Порядкові оцінки для деяких апроксимативних характеристик / А.Л.Шидліч // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Інституту математики НАН України. — Т. 10, №1. — 2013. — С. 304–327.

136. Шкапа В.В. Найкращі ортогональні тригонометричні наближення функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ / В.В. Шкапа // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін–ту математики НАН України. — Київ: Ін–т математики НАН України. 2014. — Т. 11, №3. — С. 315–329.

137. Шкапа В.В. Оцінки найкращих m–членних та ортогональних тригонометричних наближень функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у рівномірній метриці / В.В. Шкапа // Диференціальні рівняння та суміжні питання: Зб. праць Ін–ту математики НАН України. — Київ: Ін–т математики НАН України, 2014. — Т. 11, №2. — С. 305–317.

138. Шкапа В.В. Найкращі наближення аналогів ядер Бернуллі та класів (ψ, β)–диференційовних періодичних функцій / В.В. Шкапа // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін–ту математики НАН України. — Київ: Ін–т математики НАН України, 2014. — Т. 11, №4. — С. 413–424.