НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Черевко Євген Володимирович

УДК 514.763.4

ГЕОМЕТРІЯ СПЕЦІАЛЬНИХ ДИФЕОМОРФІЗМІВ ЛОКАЛЬНО КОНФОРМНО-КЕЛЕРОВИХ МНОГОВИДІВ

01.01.04 — Геометрія та топологія

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2018

Дисертацією є рукопис.
Роботу виконано на кафедрі економічної кібернетики у державному вищому навчальному закладі “Одеський національний економічний університет” МОН України.

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент
Березовський Володимир Євгенійович
Уманський наіональний університет садівництва
МОН України, завідувач кафедри
математики і фізики;

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Горькавий Василь Олексійович
Фізико-технічний інститут низьких температур
ім. Б. Веркіна НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу диференціальних рівнянь та геометрії;

доктор фізико-математичних наук, професор
Пришляк Олександр Олегович
Київський національний університет ім. Т. Шевченка
МОН України, професор кафедри геометрії,
топології і динамічних систем.

Захист відбудеться “ 12 ” лютого 2019 року о 15.00 на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 в Інституті математики НАН України за адресою: 01400, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України, 01004, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

Автореферат розіслано “ 04 ” січня 2019 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Максименко С. І.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Конформно-келерові многовиди були вперше розглянуті Уестлейком у 1953 році, але їх бурхливе дослідження почалося лише в кінці 70-х років двадцятого сторіччя. Це сталося завдяки роботам І. Вайсмана, який помітив, що класичний многовид Хопфа є типовим прикладом ермітового многовиду, локально конформно еквівалентним до келерового многовиду.

Келерові многовиди завдяки своїм властивостям вже давно використовуються у моделюванні багатьох процесів у фізиці, зокрема, у суперсиметричних теоріях (Wess, Zumino) та теорії струн, у вигляді так званих многовидів Калабі-Яу. Локально конформно-келерові многовиди, як це видно з назви, пов'язані з келеровими многовидами за допомогою конформних відображень. У свою чергу, конформні відображення серед дифеоморфізмів займають особливе місце – вони не змінюють тип простору за класифікацією Петрова. Локально конформно-келерові многовиди безпосередньо використовуються у побудові фізичних моделей. Наприклад, Januş S., Visineşcu M. запропонована модель Калуци-Клейна із спонтанною компактифікацією, причому у якості простору додаткових розмірностей виступає представник ЛКК-многовидів, а саме, узагальнений многовид Хопфа. Останнім часом при побудові суперсиметричних моделей у рамках так званої M-теорії використовують локально конформні многовиди Калабі-Яу (Shahbazi), зокрема, добре відомий восьмивимірий многовид Хопфа, який є типовим представником локально конформних многовидів Калабі-Яу, його можна застосувати для побудови одинадцятивимірної моделі супергравітації. Деякі властивості ЛКК-многовидів є близькими до властивостей келерових многовидів, проте є чимало відмінностей. Значна частина проблем, які вже розв'язані для келерових многовидів, є досі актуальними для ЛКК-многовидів. Одним із засобів дослідження многовидів є вивчення скінчених та інфінітезимальних дифеоморфізмів, які можна застосувати до них. Також, вивчаючи дифеоморфізми, доводиться приділяти увагу деяким суміжним питанням, наприклад, як у нашому випадку, властивостям занурених підмноговидів. Це пов'язано з тим, що занурені підмноговиди можуть виявитись орбітами певних перетворень.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано на кафедрі економічної кібернетики та інформаційних технологій Одеського національного економічного університету згідно з науково-дослідними темами "Комп'ютерне моделювання і теоретико-статистичний опис процесів в суспільстві, економіці і навколишньому середовищі" (номер держреєстрації 0105U008967), "Агентно-динамічне моделювання економічних процесів" (номер держреєстрації 0111U000216), "Розвиток і удосконалення освіти та підвищення якості навчання в аграрному вищому учбовому закладі" (номер держреєстрації 0106U004499).

Мета та завдання дослідження. *Метою* роботи є дослідження геометрії локально конформно-келерових многовидів та їх дифеоморфізмів, що зберігають комплексну структуру.

Об'єктом дослідження є конформно-келерові многовиди, скінченні та інфенітезімальні дифеоморфізми многовидів.

Предметом дослідження є геометричні об'єкти ЛКК-многовидів: метрика, комплексна структура та похідні від них об'єкти – тензори Римана, Річчі, форма Лі, векторні поля на ЛКК-многовидах, що породжують перетворення, та асоційовані з ними поля, а також параметри, що визначають ці дифеоморфізми.

Завдання дослідження:

— дослідити зміну форми Лі ЛКК-многовидів під дією дифеоморфізмів;
— дослідити можливість існування проективних та голоморфно-проективних інфінітезимальних перетворень ЛКК-многовидів;
— вивчити конформні відображення ЛКК-многовидів, знаходження інваріантних об'єктів цих відображень, зокрема, у частинних випадках, таких як відображення многовидів Вайсмана, конциркулярних відображень;
— вивчити інфінітезимальні конформні перетворення ЛКК-многовидів, їх зв'язок з гомотетіями келерових многовидів;
— дослідити голоморфно-проективні інфінітезимальні перетворення ЛКК-многовидів, що є узгодженими з майже комплексною зв'язністю Вейля.

Методи дослідження. Многовиди, що розглядалися, є рімановими, тобто метрика на них є додатньо визначеною. Дослідження диференціальних рівнянь проводиться в локальній системі координат. Крім того, використані функції є диференційовними до потрібного нам порядку. Також ми користуємося апаратом тензорного аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати, що виносяться на захист є новими і полягають у наступному:

— знайдено необхідні та достатні умови занурення комплексної гіперповерхні у ЛКК-многовид перпендикулярно до полів Лі та анти-Лі;
— знайдено інваріанти відносно конформних відображень ЛКК-многовидів;
— знайдено умови на параметр конформного відображення, що забезпечує збереження тензора Рімана при конформних відображеннях;
— доведено локальний ізоморфізм групи конформних перетворень

ЛКК-многовиду та групи гомотетій відповідного келерового многовиду;

— доведено неможливість існування нетривіальних проективних та голоморфно-проективних інфінітезимальних перетворень ЛКК-многовидів відносно зв'язності Леві-Чівіта;

— введено в розгляд конформно голоморфно-проективні інфінітезимальні перетворення ЛКК-многовидів, отримана система диференціальних рівнянь у частинних похідних, яка визначає ці перетворення. Знайдені інваріанти відносно цих перетворень.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер і можуть бути використані при подальших дослідженнях дифеоморфізмів ЛКК-многовидів та при побудові фізичних моделей типу Калуци-Клейна. Їх також можна застосувати до локально конформних многовидів Калабі-Яу, що є складовими деяких моделей супергравітації.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану досліджень і постановка задач належать доценту Кузаконю В. М. Згодом план досліджень та постановка задач коригувалися доцентом Березовським В. Є.

Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися та обговорювались на:

— Міжнародній конференції, присвяченій 120 річниці С. Банаха (Львів, вересень 17-21, 2012)

— XI Білоруській математичній конференції: Тези доп. Міжнар. наук. конф. (Мінськ, 5 – 9 листопада 2012);

— X Міжнародній конференції "Geometry in Odessa - 2013" (Одеса, травень 2013);

— Міжднародному геометричному семінарі ім. Г.Ф. Лаптєва "Лаптевські читання - 2013"(Пєнза 11-15 вересня 2013г);

— XI Міжнародній конференції "Geometry in Odessa - 2014" (Одеса, травень 2014);

— XII Міжнародній конференції "Geometry in Odessa - 2015" (Одеса, травень 2015);

— X Літній школі "Алгебра, Топологія, Аналіз" (Одеса, серпень 2015);

— XIII Міжнародній конференції "Geometry in Odessa - 2016" (Одеса, червень 2016);

— XVIII International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, Varna, June 3-8, 2016;

— XI Літній школі "Алгебра, Топологія, Аналіз" (Одеса, серпень 2016);

— XVI Conference on Applied Mathematics "APLIMAT 2017" January 31 - February 2, 2017 Institute of Mathematics and Physics Faculty of Mechanical Engineering, Slovak University of Technology in Bratislava, SLOVAKIA.

— XIV Міжнародній конференції "Algebraic and geometric methods of analysis" (Одеса, травень-червень 2017);

— XII Літній школі "Алгебра, Топологія, Аналіз" (Колочава, Закарпатська обл., 10 – 23 липня 2017р.);

— "APLIMAT 2018" 17th Conference on Applied Mathematics February 6-8, 2018 Institute of Mathematics and Physics Faculty of Mechanical Engineering, Slovak University of Technology in Bratislava, SLOVAKIA.

Публікації. За результатами дисертаційної роботи опубліковано 11 наукових праць [1], [2], [7], [8], [13]-[15], [21], [22], [27], [29], з них дві [22], [29] включені до наукометричної бази SCOPUS, одна [27] – до наукометричної бази Web of Science, одна [8] – у міжнародному періодичному виданні та чотири [1], [2], [7], [21] – у провідних наукових виданнях, включених до переліку фахових видань.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація викладена на 184 сторінках і складається із вступу, трьох розділів і списку літератури, що містить 97 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі дається загальна характеристика роботи й формулюються основні результати.

У першому розділі вводяться в розгляд основні означення та базові теореми, що є необхідними для дослідження. Зокрема, у п.1.1, ми даємо означення майже комплексної структури, поняття її інтегровності та тензору скруту. Також вводиться поняття майже комплексного многовиду. П. 1.2 присвячений розгляду метрик на майже комплексних многовидах. В ньому дається означенення ермітової метрики та вводиться важливе поняття фундаментальної форми. На основі властивостей згаданих тензорів даються означення майже ермітового, ермітового та келерового многовидів. Далі наведено класифікацію Грея-Хервели ермітових многовидів, яка виділяє шістнадцять класів таких структур. П. 1.3 зосереджений на класі, який за класифікацією Грея-Хервели має позначення W_4, а саме, конформно-келеровим многовидам. В цьому пункті дається визначення ЛКК-многовидів.

Означення. *Ермітовий многовид M^n називається* локально конформно-келеровим *(коротше, ЛКК-)* многовидом*, якщо існує відкрите* *покриття* $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *многовиду* M *та система* $\Sigma = \{\sigma_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}\}_{\alpha \in A}$ *гладких функцій таких, що* $\{J|_{U_\alpha}, \overline{g}_\alpha = e^{-\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}\}$ *– келерова структура для будь якого* $\alpha \in A$*. Перехід від метрики* $g|_{U_\alpha}$ *до метрики* $e^{-\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}$ *називається* локально конформним перетворенням структури. *Функція* σ *називається* визначальною функцією *конформного перетворення .*

Також наведені основні теореми, найбільш важливі у теорії ЛКК-многовидів. Зокрема,

Теорема 1.2 *На локально конформно-келеровому многовиді* (M^n, J, g) $(n = 2m > 2)$ *майже комплексна структура* J *задовільняє умові (Dragomir S., Ornea L.):*

$$J^k_{i,j} = \frac{1}{2}\big(\delta^k_j J^\alpha_i \sigma_\alpha - \sigma^k J_{ij} - J^k_j \sigma_i + J^k_\alpha \sigma^\alpha g_{ij}\big).$$

Визначальна функція σ *локально може бути знайдена за формулою:*

$$\sigma(x^1, ..., x^n) = -\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x^i_0}^{x^i} J^\alpha_{\beta,\alpha} J^\beta_i (x^1_0, ..., x^{i-1}_0, x^i, ..., x^n) dx^i + \sigma(x^1_0, ..., x^n_0),$$

де $\sigma(x^1_0, ..., x^n_0)$ *- початкове значення в точці* $(x^1_0, ..., x^n_0)$*.*

Зроблені автором у цих пунктах викладки стосуються відомих фактів і не претендують на новизну. Однак вони є необхідними, оскільки потрібні для узгодження з системою позначень та використаною далі методикою. Нарешті, у підпункті 1.3.1 розглянуті класичні приклади ЛКК-многовидів, зокрема, відомий многовид Хопфа.

Пункт 1.4 присвячено підмноговидам ЛКК-многовидів. Підмноговиди відіграють важливу роль у дослідженні дифеоморфізмів, оскільки можуть бути орбітами певних перетворень, а дотичні та нормальні розподіли можуть містити векторні поля, що є генераторами перетворень. В пункті вводяться означення CR-підмноговиду, а також комплексного (голоморфного) та дійсного підмноговидів. Доведено такі теореми:

Теорема 1.7 *Якщо існує голоморфне занурення* $\Psi : \acute{M}^{2p} \longrightarrow M^{2m}$ *комплекного підмноговиду* $\acute{M}^{2p}$ *у ЛКК-многовид* M^{2m}*, то занурений многовид* $\acute{M}^{2p}$ *є ЛКК-многовидом. Зокрема, якщо поле Лі є нормальним до* $\acute{M}^{2p}$*, то занурений многовид є келеровим.*

Теорема 1.9 *Для того, щоб ЛКК-многовид* M^{2m} *допускав занурення комплексних гіпеповерхонь так, щоб поле Лі* $B = \omega^\#$ *було нормальним до зануреної гіперповерхні* M^{2m-2} *, необхідно та достатньо, щоб форма Лі задовільняла умові:*

$$\Phi_4(\nabla_X \omega(Y)) = \frac{||\omega||^2}{2} g(X, Y),$$

де Φ_4 – четвертий проекційний оператор Обати:

$$\Phi_4(\omega_{i,j}) = \frac{1}{2}(\delta_i^a \delta_j^b + J_i^a J_j^b)\omega_{a,b}.$$

Теорема 1.11 *На гіперповерхні $\acute{M}^{2m-1}$, що локально є інтегральним многовидом рівняння*

$$\omega = 0,$$

ізометрично зануреним у ЛКК-многовид M^{2m}, індукована майже контактна структура

$$\begin{array}{ll} 1) & f_i^j = J_\beta^\alpha B_\alpha^j B_i^\beta; \\ 2) & \eta_k = \frac{1}{||\omega||} B_k^\beta J_\beta^\alpha \omega_\alpha; \\ 3) & \xi^k = -\frac{1}{||\omega||} B_\beta^k J_\alpha^\beta \omega^\alpha, \end{array}$$

є метричною нормальною майже контактною стуктурою.

Теорема 1.12 *На гіперповерхні $\acute{M}^{2m-1}$, що локально є інтегральним многовидом рівняння*

$$\omega = 0,$$

ізометрично зануреним у ЛКК-многовид M^{2m} з формою Лі, що задовільняє умові

$$\Phi_4(\omega_{i,j}) = \frac{1}{2}||\omega||^2 g_{ij},$$

індукована майже контактна структура

$$\begin{array}{ll} 1) & f_i^j = J_\beta^\alpha B_\alpha^j B_i^\beta; \\ 2) & \eta_k = \frac{1}{||\omega||} B_k^\beta J_\beta^\alpha \omega_\alpha; \\ 3) & \xi^k = -\frac{1}{||\omega||} B_\beta^k J_\alpha^\beta \omega^\alpha, \end{array}$$

є нормальною майже контактною метричною структурою, для якої

$$1) d\eta \wedge \eta = 0, \quad 2) d\acute{\Omega} = 0, \quad 3) n_{ij}^k = 0.$$

Теорема 1.13 *На гіперповерхні $\acute{M}^{2m-1}$, що локально є інтегральним многовидом рівняння*

$$\omega = 0,$$

ізометрично зануреним у многовид Вайсмана, індукована майже контактна структура

$$\begin{array}{ll} 1) & f_i^j = J_\beta^\alpha B_\alpha^j B_i^\beta; \\ 2) & \eta_k = \frac{1}{||\omega||} B_k^\beta J_\beta^\alpha \omega_\alpha; \\ 3) & \xi^k = -\frac{1}{||\omega||} B_\beta^k J_\alpha^\beta \omega^\alpha, \end{array}$$

є c-Сасакієвою стуктурою, $c = ||\omega||$. При цьому $\acute{M}^{2m-1}$ є цілком геодезич-

ною гіперповерхнею у M^{2m}.

У цьому розділі ми пропонуємо, враховуючи спеціальні властивості многовидів із формою Лі, що задовільняє умові

$$\Phi_4(\omega_{i,j}) = \frac{1}{2}||\omega||^2 g_{ij},$$

надалі називати їх псевдовайсмановими многовидами.

Другий розділ присвячено вивченню конформних відображень ЛКК-многовидів. На початку розділу у підрозділі 2.1 ми даємо означення дифеоморфізму та переходимо до конформних відображень. У підрозділі 2.2 вивчаються скінченні відображення. У пункті 2.2.1 встановлено, як змінюється форма Лі при перетвореннях, а у п. 2.2.2 знайдено основні інваріанти відносно цих перетворень:

Теорема 2.2 *Якщо ЛКК-многовиди* (M^n, J, g) *і* $(\overline{M}^n, J, \overline{g})$ *знаходяться у конформній відповідності так, що* $\overline{g}_{ij}(x) = e^{2\varphi(x)} g_{ij}(x)$, *то тензори:*

$$P_{ij} = L_{ij} - \frac{1}{2}\omega_{i,j} - \frac{1}{4}\omega_i\omega_j + \frac{1}{8}||\omega||^2 g_{ij};$$

$$\begin{aligned} Q^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_j\Big(\frac{1}{2}\omega_{i,k} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_k - \frac{1}{8}||\omega||^2 g_{ik}\Big) - \\ -\delta^h_k\Big(\frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \frac{1}{8}||\omega||^2 g_{ij}\Big) + \\ +\Big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,j} + \frac{1}{4}\omega^h\omega_j - \frac{1}{8}||\omega||^2\delta^h_j\Big) g_{ik} \\ -\Big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,k} + \frac{1}{4}\omega^h\omega_k - \frac{1}{8}||\omega||^2\delta^h_k\Big) g_{ij}, \end{aligned}$$

будуть інваріантними. Крім того, існує інваріантний об'єкт, що не є тензором:

$$\hat{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \frac{1}{2}\delta^k_i\omega_j - \frac{1}{2}\delta^k_j\omega_i + \frac{1}{2}\omega^k g_{ij}.$$

Він являє собою об'єкт ріманової зв'язності келерової метрики $\hat{g}$, *що є конформною метрикам обох ЛКК-многовидів – як* (M^n, J, g), *так і* $(\overline{M}^n, J, \overline{g})$.

Ця теорема має цікавий наслідок:

Наслідок *Якщо фома Лі ЛКК-многовиду задовільняє умові*

$$\omega_{i,k} + \frac{1}{2}\omega_i\omega_k - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ik} = 0,$$

то тензори кривини зв'язностей $\hat{\Gamma}^k_{ij}$ *та* Γ^k_{ij} *збігатимуться:*

$$\hat{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk}.$$

Також збігатимуться тензори Річчі R_{ij}, Брінкмана L_{ij} та добутки Rg_{ij}.

Наслідок пояснює, чому на ЛКК-многовиді в цьому випадку виконується келерова тотожність

$$R(X,Y,Z,W) = R(X,Y,JZ,JW).$$

У пункті 2.2.3 досліджується випадок конциркулярних перетворень та отримано відповідні інваріанти. П. 2.2.4 присвячено частинним випадкам ЛКК-многовидів: многовидам Вайсмана, псевдовайсмановим многовидам, конформно-плоским многовидам. Серед отриманих тверджень варто відзначити наступні:

Теорема 2.7 *ЛКК-многовид сталої кривини не може бути псевдовайсмановим многовидом, тобто таким, для форми Лі якого є справедливою рівність $\Phi_4(\omega_{i,j}) = \frac{1}{2}||\omega||^2 g_{ij}$.*

Теорема 2.8 *Якщо ЛКК-многовид (M^n, J, g) є конформно-плоским, то його тензор кривини, тензор Річчі та скалярна кривина визначаються наступними виразами:*

$$R^h_{ijk} = \delta^h_k\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij}\big) - \delta^h_j\big(\frac{1}{2}\omega_{i,k} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_k - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ik}\big) + \\ + \big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,k} + \frac{1}{4}\omega^h\omega_k\big)g_{ij} - \big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,j} + \frac{1}{4}\omega^h\omega_j\big)g_{ik},$$

$$R_{ij} = \big(\frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij}\big)(n-2) + \frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2},$$

$$R = (n-1)\Delta_2\omega - \frac{(n-1)(n-2)}{2}||\omega||^2.$$

Зокрема, якщо ЛКК-многовид (M^n, J, g) є многовидом сталої кривини, то тензор кривини та тензор Річчі мають вигляд:

$$R^h_{ijk} = \frac{1}{n}\big(\Delta_2\omega - \frac{n-2}{2}||\omega||^2\big)\big(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}\big);$$

$$R_{ij} = \frac{n-1}{n}\big(\Delta_2\omega - \frac{n-2}{2}||\omega||^2\big)g_{ij}.$$

У п. 2.2.5 доведено такі теореми.

Теорема 2.10 *Якщо (M^n, g) та $(\overline{M}^n, \overline{g})$ $(n > 3)$ знаходяться у конформній відповідності, так, що узагальнений тензор Ейнштейна $\mathfrak{E}_{ij} = R_{ij} - \kappa R g_{ij}$ зберігається при відображенні, причому, $\kappa \neq \frac{1}{n}$, то функція φ, що породжує відображення, має задовільняти системі диференціальних рівнянь:*

$$\nabla_j\varphi_i = \varphi_i\varphi_j - \frac{1}{2}g_{ij}\Delta_1\varphi,$$

умови інтегровності якої мають вигляд:

$$\varphi_\alpha R^\alpha_{ijk} = 0.$$

При цьому тензор Рімана R^h_{ijk}, тензор Річчі R_{ij}, добуток Rg_{ij} також є інваріантними.

Теорема 2.10 є справедливою не тільки для ЛКК-многовидів, а і у випадку довільних псевдоріманових многовидів.

Теорема 2.11 *Простори (M^n, g), що є рекурентними (зокрема, симетричними), з тензором кривини тотожно не рівним нулю, а також простори Ейнштейна, що не є Річчі-плоскими, не допускають нетривіальних конформних відображень, при яких узагальнений тензор Ейнштейна $\mathfrak{E}_{ij} = R_{ij} - \kappa R g_{ij}$, $(\kappa \neq \frac{1}{n})$ є інваріантним геометричним об'єктом.*

Теорема 2.13 *Компактні орієнтовні многовиди (M^n, g) $(n > 2)$ не допускають таких нетривіальних конформних відображень, що залишають узагальнений тензор Ейнштейна $\mathfrak{E}_{ij} = R_{ij} - \kappa R g_{ij}$ $(\kappa \neq \frac{1}{n})$ інваріантним геометричним об'єктом.*

Теорема 2.14 *Рімановий многовид (M^n, g), що не є локально метричним добутком, допускає нетривіальні конформні відображення такі, що узагальнений тензор Ейнштейна $\mathfrak{E}_{ij} = R_{ij} - \kappa R g_{ij}$ $(\kappa \neq \frac{1}{n})$ зберігається, тоді і тільки тоді, коли існує така система локальних координат, у якій його метрика g має вигляд:*

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2 h_{ts} dx^t dx^s, \qquad t, s = \overline{2, n},$$

де h_{ts} не залежить від x^1.
У цьому випадку існує сім'я розв'язків системи

$$\nabla_j \varphi_i = \varphi_i \varphi_j - \frac{1}{2} g_{ij} \Delta_1 \varphi,$$

що визначає функцію, породжуючу конформне перетворення, яка має вигляд:

$$\varphi = ln \frac{2}{c(x^1)^2}, \quad c = const > 0.$$

Теорема 2.15 *Рімановий многовид (M^n, g), допускає нетривіальні конформні відображення такі, що узагальнений тензор Ейнштейна $\mathfrak{E}_{ij} = R_{ij} - \kappa R g_{ij}$ $(\kappa \neq \frac{1}{n})$ зберігається, тоді і тільки тоді, коли існує така система локальних координат, у якій його метрика g має вигляд:*

$$ds^2 = \sum_{r=1}^{p} \left(d\underset{r}{z}^2 + \underset{r}{z}^2 \sum_{r} \underset{r}{a}_{\sigma\tau} d\underset{r}{x}^\sigma d\underset{r}{x}^\tau \right) + \sum_{i=1}^{q} (dx^i)^2,$$

де $\underset{r}{a}_{\sigma\tau}$ *не залежить від* $\underset{r}{z}$.
У цьому випадку загальний розв'язок системи

$$\nabla_j\varphi_i = \varphi_i\varphi_j - \frac{1}{2}g_{ij}\Delta_1\varphi,$$

що визначає функцію, породжуючу конформне перетворення, має вигляд:

$$\varphi = ln\frac{1}{\sum_{r=1}^{p}\frac{c}{2}\underset{r}{z}^2 + \sum_{i=1}^{q}\left(\frac{c}{2}(x^i)^2 + \beta_i x^i\right) + \sum_{i=1}^{q}\frac{\beta_i^2}{2c}},$$
$$c = const > 0, \qquad \beta_i = const.$$

У підрозділі 2.3 вивчаються інфінітезимальні перетворення. У п. 2.3.1 доведено теорему стосовно існування проективних перетворень.

Теорема 2.16 *ЛКК-многовид* M^n *розмірності* $n > 2$ *не допускає існування нетривіальних інфінітезимальних проективних перетворень із збереженням комплексної структури.*

У п. 2.3.2 розглянуті основні рівняння конформних інфінітезимальних перетворень. У п. 2.3.3 доведено, що тензор Нейєнхеєса зберігається при вказаних перетвореннях. Має місце:

Теорема 2.18 *Якщо при інфінітезимальних конформних перетвореннях ЛКК-многовидів, зберігаючих комплексну структуру, векторне поле* ξ *та інваріант* φ *визначаються з відповідної системи диференціальних рівнянь, то компоненти похідної Лі форми Лі дорівнюють частинним похідним інваріанта* φ:

$$\mathfrak{L}_\xi\omega_i = \varphi_i.$$

У п. 2.3.4 містяться такі важливі теореми.

Теорема 2.19 *Для того щоб ЛКК-многовид* (M^n, J, g) *допускав наявність групи конформних перетворень, що зберігають комплексну структуру, необхідно та достатньо, щоб система умов інтегровності*

$$\mathfrak{L}_\xi Q^h_{ijk} = 0,$$

їх продовжень

$$\mathfrak{L}_\xi\nabla_l Q^h_{ijk} = \mathfrak{L}_\xi\Gamma^h_{tl}Q^t_{ijk} - \mathfrak{L}_\xi\Gamma^t_{il}Q^h_{tjk} - \mathfrak{L}_\xi\Gamma^t_{jl}Q^h_{itk} - \mathfrak{L}_\xi\Gamma^t_{kl}Q^h_{ijt},$$

та диференціальних наслідків цих продовжень, була сумісною. Тоді, ЛКК-многовид (M^n, J, g) *допускає наявність* r*-параметричної групи,* $r = (m+1)^2 - k$, *де* m *та* k *є відповідно комплексною розмірністю многовиду та рангом системи умов інтегровності з їх продовженнями. У випадку, якщо система умов інтегровності задовільняється тотожно, розв'язок* *системи*

$$\begin{aligned}
&1)\xi_{i,j}=\xi_{ij};\\
&2)\xi_{i,j}+\xi_{j,i}=\big(\omega_\alpha\xi^\alpha+C\big)g_{ij};\\
&3)\xi_{i,jk}=\xi_\alpha R^\alpha_{kji}+\tfrac{1}{2}\Big(\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,k}g_{ij}+\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,j}g_{ik}-\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,i}g_{jk}\Big);\\
&4)J^i_{j,k}\xi^k-J^\alpha_j\xi^i{}_{,\alpha}+J^i_\alpha\xi^\alpha{}_{,j}=0,
\end{aligned}$$

залежатиме від $r=(m+1)^2$ *параметрів.*

Теорема 2.21 *Якщо ЛКК-многовид* (M^n,J,g) *де* $n=2m$, *допускає групу* G_r *інфінітезимальних конформних перетворень, що зберігають комплексну структуру, то ця група локально изоморфна групі гомотетій келерової метрики* $\hat{g}$, *що знаходиться у конформній відповідності з метрикою* g *многовиду* (M^n,J,g).

У третьому розділі розглядаються голоморфно-проективні перетворення. В підрозділі 3.1 дається означення майже комплексної зв'язності і пов'язаних з нею голоморфно-проективних відображень. Вводиться означення конформно голоморфно-проективного відображення. У підрозділі 3.2 доведено теорему щодо існування перетворень для зв'язності Леві-Чівіта на ЛКК-многовидах:

Теорема 3.1 *ЛКК-многовид* M^n *не дозволяє існування нетривіальних інфінітезимальних перетворень із збереженням комплексної структури та її коварінтної похідної по зв'язності Леві-Чівіта таких, що*

$$\mathfrak{L}_\xi\Gamma^h_{ij}=\rho_j\delta^h_i+\rho_i\delta^h_j-\rho_tJ^t_iJ^h_j-\rho_tJ^t_jJ^h_i.$$

У наступному п.3.3 введено інфінітезимальні конформно голоморфно-проективні перетворення, що зберігають комплексну структуру та записано систему диференціальних рівнянь у частинних похідних, що визначають ці перетворення:

$$\begin{aligned}
&1)\xi_{i,j}=\xi_{ij};\\
&2)\rho_{,i}=\rho_i;\\
&3)\xi_{i,jk}=\xi_\alpha R^\alpha_{kji}+\frac{1}{2}\Big(\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,k}g_{ij}+\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,j}g_{ik}\\
&\qquad-\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,i}g_{jk}-\omega_i\mathfrak{L}_\xi g_{jk}+\omega^\alpha(\mathfrak{L}_\xi g_{i\alpha})g_{jk}\Big)\\
&\qquad+\rho_jg_{ik}+\rho_kg_{ij}-\rho_tJ^t_jJ_{ki}-\rho_tJ^t_kJ_{ji};\\
&4)\rho_{i,j}=\frac{1}{2}\omega^t\rho_tg_{ij}-\frac{1}{2}\rho_i\omega_j-\frac{1}{2}\rho_j\omega_i+\frac{1}{n+2}\mathfrak{L}_\xi\big(R_{ij}\\
&\qquad-\frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{i,j}+\frac{\omega_i\omega_j}{2}-\frac{||\omega||^2g_{ij}}{2}\big)-\frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}\big);\\
&5)\mathfrak{L}_\xi J^i_j=\xi^k\nabla_kJ^i_j-J^\alpha_j\nabla_\alpha\xi^i+J^i_\alpha\nabla_j\xi^\alpha=0.
\end{aligned}$$

У п. 3.3.1 доведено таку теорему:

Теорема 3.4 *Якщо на ЛКК-многовиді (M^n, g, J) контраварінтне аналітичне векторне поле ξ породжує інфенітезимальні конформно голоморфно-проективні перетворення, то об'єкт*

$$\Pi^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \frac{1}{2}\omega^h g_{ij} - \frac{1}{n+2}\big(\big(\Gamma^s_{js} + \omega_j\big)\delta^h_i + \big(\Gamma^s_{is} + \omega_i\big)\delta^h_j \\ +\big(\Gamma^s_{ts} - \frac{n}{2}\omega_t\big)J^t_i J^h_j + \big(\Gamma^s_{ts} - \frac{n}{2}\omega_t\big)J^t_j J^h_i\big)$$

є інваріантним відносно цих перетворень:

$$\mathfrak{L}_\xi \Pi^h_{ij} = 0.$$

Теорема 3.5 *Якщо на ЛКК-многовиді (M^n, g, J) контраваріантне аналітичне векторне поле ξ породжує інфенітезимальні конформно голоморфно-проективні перетворення, то тензор*

$$P^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \delta^h_k\big(2\omega_{i,j} + \omega_i\omega_j - ||\omega||^2 g_{ij}\big) \\ +\delta^h_j\big(2\omega_{i,k} + \omega_i\omega_k - ||\omega||^2 g_{ik}\big)$$

$$-\frac{1}{2}\big(\omega^h{}_{,k} + \frac{1}{2}\omega^h\omega_k\big)g_{ij} + \frac{1}{2}\big(\omega^h{}_{,j} + \frac{1}{2}\omega^h\omega_j\big)g_{ik} \\ -\frac{1}{n+2}\big(\delta^h_k\big(R_{ij} - \frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}\big) - \delta^h_j\big(R_{ik} - \frac{\Delta_2\omega g_{ik}}{2}\big) \\ +(J^h_k J^t_i - J^h_i J^t_k)\big(R_{tj} - \frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{t,j} + \frac{\omega_t\omega_j}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{tj}}{2}\big) \\ -\frac{\Delta_2\omega g_{tj}}{2}\big) - (J^h_j J^t_i - J^h_i J^t_j)\big(R_{tk} \\ -\frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{t,k} + \frac{\omega_t\omega_k}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{tk}}{2}\big) - \frac{\Delta_2\omega g_{tk}}{2}\big)\big),$$

є інваріантним відносно цих перетворень:

$$\mathfrak{L}_\xi P^h_{ijk} = 0.$$

Теорема 3.6 *Для того щоб ЛКК-многовид (M^n, J, g) допускав наявність групи конформно голоморфно-проективних перетворень, необхідно та достатньо, щоб система умов інтегровності*

$$\mathfrak{L}_\xi P^h_{ijk} = 0,$$

$$
\rho_t P^t_{ijk} = \frac{1}{n+2}\mathfrak{L}_\xi\big(\nabla_k\big(R_{ij} - \frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{i,j} + \frac{\omega_i\omega_j}{2}
- \frac{||\omega||^2 g_{ij}}{2}\big) - \frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}\big) - \nabla_j\big(R_{ik} - \frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{i,k}
+ \frac{\omega_i\omega_k}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{ik}}{2}\big) - \frac{\Delta_2\omega g_{ik}}{2}\big) + \frac{1}{2}\big(\delta^t_i\omega_k + \delta^t_i\omega_k - \omega^t g_{ik}\big)\big(R_{tj}
- \frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{t,j} + \frac{\omega_t\omega_j}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{tj}}{2}\big) - \frac{\Delta_2\omega g_{tj}}{2}\big) - \frac{1}{2}\big(\delta^t_i\omega_j + \delta^t_i\omega_j
- \omega^t g_{ij}\big)\big(R_{tk} - \frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{t,k} + \frac{\omega_t\omega_k}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{tk}}{2}\big) - \frac{\Delta_2\omega g_{tk}}{2}\big)\big),
$$

та їх продовжень, була сумісною. Тоді ЛКК-многовид (M^n, J, g) допускає наявність r-параметричної групи, $r = 2(m+1)^2 - 1 - k$, де m та k є відповідно комплексною розмірністю многовиду та рангом системи умов інтегровності з їх продовженнями. У випадку, якщо умови інтегровності виконуються тотожно, розв'язок системи

$$
\begin{aligned}
1)\xi_{i,j} &= \xi_{ij};\\
2)\rho_{,i} &= \rho_i;\\
3)\xi_{i,jk} &= \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + \frac{1}{2}\big(\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,k} g_{ij} + \big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,j} g_{ik}\\
&- \big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,i} g_{jk} - \omega_i\mathfrak{L}_\xi g_{jk} + \omega^\alpha(\mathfrak{L}_\xi g_{i\alpha})g_{jk}\big)\\
&+ \rho_j g_{ik} + \rho_k g_{ij} - \rho_t J^t_j J_{ki} - \rho_t J^t_k J_{ji};\\
4)\rho_{i,j} &= \frac{1}{2}\omega^t\rho_t g_{ij} - \frac{1}{2}\rho_i\omega_j - \frac{1}{2}\rho_j\omega_i + \frac{1}{n+2}\mathfrak{L}_\xi\big(R_{ij}\\
&- \frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{i,j} + \frac{\omega_i\omega_j}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{ij}}{2}\big) - \frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}\big);\\
5)\mathfrak{L}_\xi J^i_j &= \xi^k\nabla_k J^i_j - J^\alpha_j\nabla_\alpha\xi^i + J^i_\alpha\nabla_j\xi^\alpha = 0,
\end{aligned}
$$

залежатиме від $r = 2(m+1)^2 - 1$ параметрів.

у п. 3.3.3

Теорема 3.8 *На компактному ЛКК-многовиді (M^n, J, g) векторне поле ξ, що генерує нетривіальні конформно голоморфно-проективні перетворення, є контраваріантним майже аналітичним.*

ВИСНОВКИ

У першому розділі дисертації з'ясовано

1.Якщо існує голоморфне занурення $\Psi : \acute{M}^{2p} \longrightarrow M^{2m}$ комплексного підмноговиду $\acute{M}^{2p}$ у ЛКК-многовид M^{2m}, то занурений многовид $\acute{M}^{2p}$ є ЛКК-многовидом. Зокрема, якщо поле Лі є нормальним до $\acute{M}^{2p}$, то занурений многовид є келеровим.

2. Знайдено необхідні і достатні умови для того, щом ЛКК многовид допускав занурення комплексних гіперповерхонь так, щоб відповідне поле Лі було нормальним до зануреної поверхні. 3. Досліджені властивості майже контактних структур, індукованих на дійсних гіперповерхнях $\acute{M}^{2m-1}$, що локально є інтегральними многовидом рівняння $\omega = 0$ та їх залежність від властивостей форми Лі.

У цьому розділі ми пропонуємо, враховуючи спеціальні властивості ЛКК-многовидів із формою Лі, що задовільняє умові

$$\Phi_4(\omega_{i,j}) = \frac{1}{2}||\omega||^2 g_{ij},$$

називати їх *псевдовайсмановими многовидами (pseudo-Vaisman manifolds)*.

У другому розділі дисертації

1. Знайдено інваріанти конформних відображень ЛКК-многовидів.

2. Знайдено вирази тензору кривини, тензору Річчі та скалярної кривини конформно-плоского ЛКК-многовиду, а також, ЛКК-многовиду сталої кривини.

3. Знадено необхідні та достатні умови збереження узагальненого тензору Ейнштейна, а також тензору Рімана R^h_{ijk} при конформних перетвореннях. Крім того, доведено що рекурентні (з тензором кривини тотожно не рівним нулю), ейнштейнові (що не є Річчі-плоскими) та орієнтовні компактні многовиди – не допускають таких нетривіальних конформних відображень.

4. З'ясовано, що при інфінітезимальних конформних перетвореннях ЛКК-многовидів, зберігаючих комплексну структуру, якщо векторне поле ξ та інваріант φ визначаються з відповідної системи диференціальних рівнянь, то компоненти похідної Лі форми Лі дорівнюють частинним похідним інваріанта φ.

5. З'ясовано, що порядок групи G_r інфінітезимальних конформних перетворень, що зберігають комплексну структуру, не перевищує $(m+1)^2$, де m є комплексною розмірністю многовиду.

6. З'ясовано, що группа G_r інфінітезимальних конформних перетворень ЛКК-многовиду, що зберігають комплексну структуру, є локально изоморфною групі гомотетій келерової метрики, що знаходиться у конформній відповідності з метрикою ЛКК-многовиду.

Третій розділ дисертації містить такі результати:

1. ЛКК-многовид M^n не дозволяє існування нетривіальних інфінітезимальних голоморфно-проективних перетворень із збереженням комплексної структури та її коварінтної похідної по зв'язності Леві-Чівіта.

2. Вводяться інфінітезимальні конформно голоморфно-проективні перетворення, що зберігають комплексну структуру, виписано систему ди-

ференціальних рівнянь у частинних похідних, що визначають ці перетворення. Доведено, що розв'язок цієї системи залежить не більше ніж від $r = 2(m+1)^2 - 1$ параметрів.

3. Знайдено об'єкти, що є інваріантними відносно інфінітезимальних конформно голоморфно-проективних перетворень.

4. Доведено, що на компактному ЛКК-многовиді векторне поле, що генерує нетривіальні конформно голоморфно-проективні перетворення, є контраваріантним майже аналітичним.

Отримані в дисертації наукові результати можуть бути використані при подальшому дослідженні дифеоморфізмів ЛКК-многовидів. Крім того, результати можуть бути використані при побудові фізичних моделей типу Калуци-Клейна, а також застосовані до локально конформних многовидів Калабі-Яу, що є складовими деяких моделей супергравітації.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Черевко Є. В., Кузаконь В. М.* Конформно-кєлерові простори та конформні перетворення тензору енергії-імпульсу. /*В. М. Кузаконь, Є. В. Черевко*// Proc. Inter. Geom. Center, v.4, № 4, 2011, с. 20-26.
2. *Черевко Є. В.* Сохранение тензора энергии-импульса при конформных отображениях /*Є. В. Черевко* // Proc. of the Intern. Geom. Center.-2012.-V.5, №1-2.-С.51-58.
3. *Черевко Є. В.* Geodesic mappings preserving the stress–energy tensor / *Є. В. Черевко*// Тези доповідей міжнародної конференції, присвячена 120 річниці С. Банаха (Львів, вересень 17-21, 2012) Львів. – 2012. – С. 184–185.
   URL: http://at.yorku.ca/c/b/f/r/35.htm
4. *Черевко Є. В.* Конформные отображения симметрических и конформно-гармонических пространств / *Є. В. Черевко*// Тезисы докладов Международной научной конференции, Минск, 5 – 9 ноября 2012 г. Часть 1 / Институт математики НАН Беларуси, Белорусский государственный университет. - Минск, 2012, с. 20
   URL: http://elib.bsu.by/handle/123456789/23111
5. *Черевко Є. В.* Конформные отображения и сохранение некоторых геометрических объектов / *Є. В. Черевко*// Тези доповідей Міжнародної конференції "Geometry in Odessa" - 2013 (Одеса, 27 травня– 1 червня 2013р.). Одеса. – 2013р. – С. 84.
6. *Черевко Е. В.* Инфинитезимальные конформные преобразования конформно-келлеровых пространств. / *Е. В. Черевко*// Тези Міжнародного геометричного семінару ім. Г.Ф. Лаптєва "Лаптєвсь-

кі читання - 2013" (Пєнза 11-15 вересня 2013г) – с. 68. URL http://dep_geometry.pnzgu.ru

7. *Черевко Є. В.* Геодезичні відображення та інваріантність тензора енергії-імпульсу /*Є. Черевко* // Математичний вісник Наукового товариства ім. Шевченка. - 2013. - Т. 10. - С. 105-114.
8. *Черевко Е. В.* Инфинитезимальные конформные преобразования локально конформно-келеровых многообразий . / *Є. В. Черевко*// Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки № 4 (28), 2013 с. 93-100.
9. *Черевко Є. В.* Группа инфинитезимальных конформных преобразований локально конформно-келеровых многообразий / *Є. В. Черевко*// Тези доповідей Міжнародної конференції "Geometry in Odessa" - 2014 (Одеса, 26 –31 травня 2014р.). Одеса. – 2014р. – С. 62.
10. *Кириченко В. Ф., Черевко Є. В.* ξ-инвариантные формы Ли на почти эрмитовых многообразиях / *Кириченко В. Ф.*// Тези доповідей Міжнародної конференції "Geometry in Odessa" - 2015 (Одеса, 25 – 31 травня 2015р.). Одеса. – 2015р. – С. 34.
11. *Черевко Є. В.* Инварианты конформных отбражений локально конформно-келеровых многообразий / *Є. В. Черевко*// Тези доповідей Міжнародної конференції "Geometry in Odessa" - 2015 (Одеса, 25 – 31 травня 2015р.). Одеса. – 2015р. – С. 93.
12. *Черевко Є. В.* Підмноговиди локально конформно-келерових многовидів / *Є. В. Черевко*// Тези доповідей X Літньої школи "Алгебра, Топологія, Аналіз" - 2015 (Одеса, 3 – 5 серпня 2015р.). Одеса. – 2015р. – С. 64.
13. *Черевко Є. В.* Конформні відображення локально конформно-келерових многовидів. / *Є. В. Черевко*//Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична, № 80 Випуск 80, 2015 с. 166-176.
14. *Черевко Є. В.* Групи конформних перетворень локально конформно-келерових многовидів і гомотетій келерових многовидів. / *Є. В. Черевко*//Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична, № 82 Випуск 82, 2016 с. 208-216.
15. *Черевко Є. В.* Голоморфно-проективні перетворення та конформно-келерові многовиди. /*Є. В. Черевко*// Proc. Inter. Geom. Center, v.4, № 1, 2016 с.51-64.
16. *Черевко Є. В.* Голоморфно-проективні інфінітезимальні перетворення та локально конформно-келерові многовиди / *Є. В. Черевко*// Тези доповідей Міжнародної конференції "Geometry and Topology in Odessa" - 2016 (Одеса, 2 – 8 червня 2016р.). Одеса. – 2016р с. 59. URL:

http://www.onaft.edu.ua/geokonf

17. *Cherevko Y.* Groups of Conformal Transformations on Locally Conformal Kähler Manifolds and Groups of Homothetic Motions on Kähler Manifolds/*Cherevko Y*//Eighteenth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, Varna, June 3-8, 2016 – p. 7.

18. *Черевко Є. В., Чепурна О. Є.* Дифеоморфізми многовидів Калабі-Яу. Голоморфоно-проективні перетворення. / *Є. В. Черевко*// тези доповідей XI Літньої школи "Алгебра, Топологія, Аналіз" - 2016 (Одеса, 1 – 14 серпня 2015р.). Одеса. – 2016р. – С. 137-141.

19. *Березовский В. Е., Микеш Й., Черевко Є. В.* О почти геодезических отображениях пространств аффинной связности. / *В. Є. Березовский*// тези доповідей XI Літньої школи "Алгебра, Топологія, Аналіз" - 2016 (Одеса, 1 – 14 серпня 2015р.). Одеса. – 2016р. – С. 54. URL: https://www.imath.kiev.ua/ topology/ata11/ata11_theses.pdf

20. *Cherevko Y., Berezovski V., Chepurna O.* Complex Submanifolds of LCK-manifold, Pseudo-Vaisman and Vaisman Manifolds/*Cherevko Y*// "APLIMAT 2017" 16th Conference on Applied Mathematics January 31 - February 2, 2017 Institute of Mathematics and Physics Faculty of Mechanical Engineering, Slovak University of Technology in Bratislava, SLOVAKIA p. 66-67. URL: http://evlm.stuba.sk/APLIMAT/indexe.htm

21. *Черевко Є. В., Чепурна О. Є.* Інваріантні об'єкти конформно голоморфно-проективних перетворень ЛКК-многовидів /*Є. В. Черевко*// Proc. Inter. Geom. Center, v.10, № 3-4, 2017 с.29-43.

22. *Cherevko Y., Berezovski V., Chepurna O.* Complex Submanifolds of LCK-manifold, Pseudo-Vaisman and Vaisman Manifolds/*Cherevko Y*// Proceedings of a meeting held 31 January - 2 February 2017, Bratislava, Slovak Republic. p. 343 - 352.

23. *Черевко Є. В., Березовський В. Є.* Конформно голоморфно-проективні інфінітезимальні перетворення локально конформно-келерових многовидів / *Є. В. Черевко*// Тези доповідей Міжнародної конференції "Algebraic and geometric methods of analysis" - 2017 (Одеса, 31 мая– 5 червня 2017р.). Одеса. – 2017р. с.27-28.

24. *Березовский В. Є, Микеш Й., Черевко Є. В.* К вопросу о канонических почти геодезических отображениях первого типа / *В. Є. Березовский*// Тези доповідей Міжнародної конференції "Algebraic and geometric methods of analysis" - 2017 (Одеса, 31 мая– 5 червня 2017р.). Одеса. – 2017р. с.110-111.

25. *Черевко Є. В., Чепурна О. Є.* Симетричні F-зв'язності локально конформно-келерових многовидів. / *Є. В. Черевко*// Тези доповідей

XII Літньої школи ”Алгебра, Топологія, Аналіз” - 2017 (Колочава, Закарпатська обл., 10 – 23 липня 2017р.). Колочава, Закарпатська обл. – 2017р. – С. 29-30.

26. *Черевко Є. В., Березовский В. Е.* Конформні перетворення та збереження тензору Рімана. / *Є. В. Черевко*// Тези доповідей XII Літньої школи ”Алгебра, Топологія, Аналіз” - 2017 (Колочава, Закарпатська обл., 10 – 23 липня 2017р.). Колочава, Закарпатська обл. – 2017р. – С. 27-28.
27. *Cherevko Y., Chepurna O.* Complex and Real Hypersurfaces of Locally Conformal Kähler Manifolds/*Cherevko Y*//Proceedings of the Eighteenth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, Ivaпlo M. Mladenov, Guowu Meng and Akira Yoshioka, eds. (Sofia: Avangard Prima, 2017), p. 117 - 129.
28. *Cherevko Y., Berezovski V., Chepurna O.* Conformal mappings of Riemannian manifolds preserving the generalized Einstein tensor/*Cherevko Y*// ”APLIMAT 2018” 17th Conference on Applied Mathematics February 6-8, 2018 Institute of Mathematics and Physics Faculty of Mechanical Engineering, Slovak University of Technology in Bratislava, SLOVAKIA p. 29. URL: http://evlm.stuba.sk/APLIMAT/indexe.htm
29. *Cherevko Y., Berezovski V., Chepurna O.* Conformal mappings of Riemannian manifolds preserving the generalized Einstein tensor /*Cherevko Y*// Proceedings of a meeting held 6 - 8 February 2018, Bratislava, Slovak Republic. p. 224 - 231.

АНОТАЦІЇ

Черевко Є. В. Геометрія спеціальних дифеоморфізмів локально конформно-келерових многовидів. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.04 — ”Геометрія та топологія”. Одеський національний економічний університет, Одеса, 2018.

Дисертацію присвячено вивченню властивостей локально конформно-келерових многовидів за допомогою дослідження дифеоморфізмів цих многовидів. Знайдено об’єкти тензорного та не тензорного характеру, що є інваріантними відносно конформних відображень ЛКК-многовидів. Знайдено вираз для похідної Лі форми Лі. Для конформних інфінітезимальних перетворень отримано систему диференціальних рівнянь у частинних похідних та умови її інтегровності. Також отримано необхідні та достатні умови для того, щоб ЛКК-многовид допускав існування нетривіальної

групи конформних перетворень, розраховано максимальну кількість параметрів цієї групи. Доведено, що ця група конформних інфінітезимальних перетворень ЛКК-многовиду є ізоморфною до групи гомотетій відповідної келерової метрики.

Введено конформно голоморфно-проективні перетворення. Отримано необхідні та достатні умови для того, щоб ЛКК-многовид допускав існування нетривіальної групи конформно голоморфно-проективних перетворень та обчислено максимальну кількість параметрів цієї групи. Знайдено інваріантні об'єкти відносно цих пертворень, один тензорного, другий не тензорного характеру.

Крім результатів досліджень безпосередньо за темою, знайдено необхідну та достатню умову, якій має відповідати ЛКК-многовид, щоб дозволяти занурення комплексної гіперповерхні так, щоб поля Лі та анти-Лі були нормальними до зануреної гіперповерхні. Також отримані необхідні та достатні умови для ріманових многовидів (не обов'язково ЛКК-многовидів) які допускають нетривіальні конформні відображення, що зберігатимуть узагальнений тензор Ейнштейна.

Ключові слова: ермітові многовиди, локально конформно-келерові многовиди, дифеоморфізми, конформні перетворення, конформно голоморфно-проективні перетворення.

Черевко Е. В. Геометрия специальных диффеоморфизмов локально конформно-кэлеровых многообразий. - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (доктора философии) по специальности 01.01.04 — " Геометрия и топология ". Одесский национальный экономический университет, Одесса, 2018.

Диссертация посвящена изучению свойств локально конформно-кэлеровых многообразий с помощью исследования диффеоморфизмов этих многообразий. Найдены объекты как тензорного так и не тензорного характера, которые являются инвариантными относительно конформных отображений ЛКК-многообразий. Найдено выражение для производной Ли формы Ли. Для конформных инфинитезимальных преобразований получена система дифференциальных уравнений в частных производных и условия ее интегрируемости. Также получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы ЛКК-многообразие допускало существование нетривиальной группы конформных преобразований, рассчитано максимальное количество параметров этой группы. Доказано, что эта группа конформных инфинитезимальных преобразований ЛКК-многообразия является изоморфной группе гомотетий соответствующей кэлеровои метрики.

Введено понятие конформно голоморфно-проективного преобразования. Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы ЛКК-многообразие допускало существование нетривиальной группы конформно голоморфно-проективных преобразований и рассчитано максимальное количество параметров этой группы. Найдены инвариантные объекты относительно этих преобразований, один тензорного, другой – не тензорного характера.

Кроме результатов исследований непосредственно по теме, найдено необходимое и достаточное условие, которому должно отвечать ЛКК-многообразие, чтобы допускать погружения комплексной гиперповерхности так, чтобы поля Ли и анти-Ли были нормальными к погруженной гиперповерхности. Также получены необходимые и достаточные условия для римановых многообразий (не обязательно ЛКК-многообразий), которые допускают нетривиальные конформные отображения, сохраняющие обобщенный тензор Эйнштейна.

Ключевые слова: эрмитовы многообразия, локально конформно-кэлеровы многообразия, диффеоморфизмы, конформные преобразования, конформно голоморфно-проективные преобразования.

Cherevko Y. V. Geometry of special diffeomorphisms of locally conformal Kähler manifolds. – Manuscript.

Thesis of the dissertation for obtaining of the degree of candidate of sciences in physics and mathematics, speciality 01.01.04 – Geometry and topology. Odesa National Economics University, Odesa, 2018.

Complex geometry deals primarily with Kählerian manifolds i.e. manifolds carrying some Kählerian metric. But some complex manifolds, such as complex Hopf manifolds admit no global Kählerian metrics at all. But we can often find for every map of atlas a multiplyer which transforms a metric into a Kählerian one. One can say that a metric g is a locally conformal Kähler (l.c.K.) metric if g is conformal to some local Kählerian metric in the neighborhood of each point of a manifold.

Actually the locally Conformal Kähler manifolds was introduced by W. Westlake in 1954, some publications was soon made by P. Libermann, but mainly through the works of Vaisman since the 1970s the geometry of l.c.K. manifolds has developed. A great amount of research has been produced by E. Bedford, T. Suwa, A. Cordero, M. Fernandez, M. De Leon, T. Kashiwada, M. Verbitsky, T. Kashiwada S. Sato (who showed that the first Betti number of a compact generalized Hopf manifold is odd), B. Y. Chen, P. Piccinni (who studied foliations naturally occuring on a l.c.K. manifold), S. I. Goldberg, I. Vaisman, C. P. Boyer (who demonstrated the relationship between anti-self-dual compact complex surfaces and l.c.K. surfaces), H. Pedersen, Y. S. Poon, A. Swann (who proved that Hermite-Einstein-Weyl manifolds are generalized Hopf manifolds), M. Pontecorvo (who studied conformally flat l.c.K. surfaces), D. Perrone (who gave a spectral characterization of complex Hopf surfaces), K. Tsukada (who studied holomorphic vector fields on g.H. manifolds), J. C. Marrero, J. Rocha (who studied submersions from a 1.c.K. manifold), etc. The theory of submanifolds in 1.c.K. manifolds, was developed by J. L. Cabrerizo M. F. Andres, S. Ianus, L. Ornea, K. Matsumoto, F. Narita. Mappings and transformations of 1.c.K. manifolds was explored by V. F. Kirichenko, J. Mikes, A. Moroianu, · L. Ornea.

The thesis consists of an introduction, three chapters and a list of references. The introduction includes relevance of research topic, purpose, objectives, subject, object and research methods. There we substantiate the relevance of research topic.

The first Chapter is devoted to formulate the basic ideas of the complex geometry such as almost complex structure, Hermitian metric, Lee form. Also we consider the place taken by 1.c.K manifolds among sixteen Gray-Hervella classes. Also some examples were given. Then we have found the necessarily and sufficient conditions for an LCK-manifold to admit immersion of complex hypersurface so that the Lee field and the anti-Lee field to be normal to the hypersurface. We propose call such LCK-manifolds as the Pseudo-Vaisman manifolds.

The second Chapter has been divided into two sections. The first one is devoted to the finite conformal mappings. We find tensors and non-tensor which are preserved by the mappings. Also we obtain the necessarily and sufficient conditions for Riemannian manifolds (not necessarily an l.c.K. ones) admitting conformal mappings preserving the Generalized Einstein tensor. The second sections is devoted to infinitesimal transformations. We have obtained that l.c.K. manifolds does not admit nontrivial infinitesimal projective transformations. Then we study infinitesimal conformal transformations of l.c.K. manifolds. We have found the expression for the Lie derivative of a Lee form. Also we have obtained the system of partial differential equations for the transformations, and explored its integrability conditions. Finally we have got the necessary and sufficient conditions in order that the an l.c.K. manifold admit a group of conformal motions. Also we have calculated the number of parameters which the group depends on. We have proved that a group of conformal motions admitted by an l.c.K. manifold is isomorphic to a homothetic group admitted by corresponding Kählerian metric.

The third Chapter is devoted to the problem of holomorphically projective transformations of locally conformal manifolds. It's worth to be noted, that J. Mikes and Z. Radulovich have proved that an l.c.K. manifold does not admit finite nontrivial holomorphically projective mappings for a Levi-Civita connection. We have proved that an l.c.K. manifold also does not admit nontrivial infinitesimal holomorphically projective transformations for a Levi-Civita connection. But since the Weyl connection defined by Lee form on an l.c.K. manifold is F-connection, hence for the connection the nontrivial infinitesimal holomorphically projective transformations are admitted. Then we rewrote the system of partial differential equations for the Levi-Civita connection. So we introduced so called infinitesimal conformal holomorphically projective transformations. We have got the necessary and sufficient conditions in order that the an l.c.K. manifold admit a group of infinitesimal conformal holomorphically projective transformations. Also we have calculated the number of parameters which the group depends on. We have got invariants, i. e. a tensor and a non-tensor which are preserved by the transformations.

Key words: Hermitian manifolds, locally Conformal Kähler manifolds, diffeomorphisms, conformal transformations, conformal holomorphically projective transformations.