Міністерство освіти і науки України

ДЗ „Луганський національний університет імені Тараса Шевченка”

Національна академія наук України

Інститут математики

Тоїчкіна Олена Олександрівна

УДК 512.53

НАПІВГРУПИ ЕНДОМОРФІЗМІВ ДЕЯКИХ КЛАСІВ БІНАРНИХ ВІДНОШЕНЬ

01.01.06 – алгебра і теорія чисел

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі алгебри та системного аналізу
ДЗ „Луганський національний університет імені Тараса Шевченка”
Міністерства освіти і науки України

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, доцент
ЖУЧОК Юрій Володимирович,
ДЗ „Луганський національний університет
імені Тараса Шевченка”,
професор кафедри алгебри та системного аналізу.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
БОНДАРЕНКО Віталій Михайлович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу алгебри;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
ГУТІК Олег Володимирович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
доцент кафедри геометрії і топології.

Захист дисертації відбудеться „12” лютого 2019 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий „8” січня 2019 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради С. І. Максименко

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Одним з основних напрямів дослідження в алгебрі є вивчення алгебраїчних систем за допомогою похідних структур, певним чином пов'язаних з цими системами. З одного боку, характеристики цих структур мають визначатися через властивості алгебраїчних систем, а з іншого – певною мірою характеризувати самі системи. Такий підхід надає нові можливості як для класифікації й пошуку характеристик заданої алгебраїчної системи, так і для поглибленого вивчення самих структур. Важливе місце серед похідних структур займають, передусім, напівгрупи перетворень[1], зокрема, напівгрупи ендоморфізмів алгебраїчних систем[2], напівгрупи ізотонних перетворень упорядкованих множин[3], напівгрупи неперервних відображень топологічних просторів[4] тощо. Один із засновників теорії напівгруп Є. С. Ляпін[5], підкреслюючи значення напівгруп ендоморфізмів, зауважив, що встановлення взаємних зв'язків між властивостями напівгруп ендоморфізмів і властивостями самих множин, наділених деякою додатковою структурою, повинно стати одним із найважливіших напрямів розвитку теорії напівгруп. До того ж, цей напрям можна розглядати як природне узагальнення ідей Е. Галуа[6]. Дійсно, у багатьох випадках напівгрупа ендоморфізмів алгебраїчної системи надає суттєву інформацію про її загальні властивості та дозволяє вивчати будову цієї системи новою та більш зручною мовою. Вивченню властивостей саме напівгруп ендоморфізмів реляційних систем і присвячено цю дисертаційну роботу.

Напівгрупи ендоморфізмів алгебраїчних систем та їх властивості вивчалися різними авторами, наприклад, такими як Б. І. Плоткін, Б. М. Шайн, О. В. Міхальов, М. Петрич, В. С. Мазорчук, В. О. Молчанов, І. Б. Кожухов, В. М. Усенко, Б. В. Попов, П. Пуусемп. Значна увага при їх вивченні приділялася з'ясуванню ролі напівгруп ендоморфізмів для характеризації заданих алгебраїчних систем, дослідженню визначеності алгебраїчних систем їх напівгрупами ендоморфізмів, знаходженню їх абстрактних характеристик, опису точних зображень, вивченню комбінаторних властивостей напівгруп ендоморфізмів та іншим проблемам.

Один із напрямів у вивченні напівгруп ендоморфізмів бінарних відношень визначила теорема Л. М. Глускіна[3], згідно з якою будь-яке відношення квазіпорядку однозначно визначається напівгрупою ендоморфізмів цього відношення з точністю до ізоморфізму або антиізоморфізму. Подібні результати отримали Б. В. Попов[7] і

---

[1]Ganyushkin. O. Classical Finite Transformation Semigroups: An Introduction / O. Ganyushkin, V. Mazorchuk. – Springer-Verlag, 2009.– Algebra and Applications. – Vol. 9. – 317 p.

[2]Mashevitsky G. Automorphisms of the endomorphism semigroup of a free monoid or a free semigroup / G. Mashevitsky, B. M. Schein // Proc. Amer. Math. Soc. – 2003. – Vol. 131, no. 6. – P. 1655 – 1660.

[3]Глускин Л. М. Полугруппы изотонных преобразований / Л. М. Глускин // Успехи матем. наук. – 1961. – Т. 16, № 5. – С. 157 – 162.

[4]Гельфанд И. М. О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах / И. М. Гельфанд, А. Н. Колмогоров // Докл. АН СССР. – 1939. – Т. 22, № 1. – С. 11 – 15.

[5]Ляпин Е. С. Полугруппы / Е. С. Ляпин. – М. : Физматлит. – 1960. – 592 с.

[6]Математическая энциклопедия : в 5 т. / ред. совет : И. М. Виноградов (гл. ред.) и др. – М. : Сов. энцикл. – 1984. – Т. 4. – С. 599 – 600.

[7]Попов Б. В. Полугруппы эндоморфизмов рефлексивных бинарных отношений / Б. В. Попов // Ученые записки ЛГПИ им. А. И. Герцена. – 1967. – Т. 302. – С. 116 – 123.

Ю. М. Важенін[8] для класів рефлексивних бінарних відношень, Дж. Арауджо й Я. Конечни[9] – для щільних I-відношень тощо. Окрема увага приділялася дослідженню напівгрупи ендоморфізмів часткового порядку, зокрема, напівгрупи ендоморфізмів ланцюга. Так, А. Я. Айзенштат[10] було знайдено твірні та співвідношення напівгрупи ендоморфізмів скінченного ланцюга, а Б. М. Шайном[11] отримано умови, за яких елемент напівгрупи ендоморфізмів довільного ланцюга розкладається у добуток ідемпотентів. А. Умар і А. Лараджі[12] вивчали комбінаторні властивості напівгрупи ендоморфізмів часткового порядку, І. Б. Кожухов і В. І. Кім[13] – умови її регулярності та інші алгебраїчні властивості.

Певна увага в роботі приділена так званим сильним ендоморфізмам. Це поняття було запропоновано К. Чуліком[14] і вивчалося такими авторами як С. Фан і В. Лі, У. Кнауер, М. Ніпорте, У. А. Нуммерт, С. Арворн, С. Ліратанавалі. До перших структурних результатів про моноїди сильних ендоморфізмів належить теорема Кнауера–Ніпорте[15] про точне зображення моноїда сильних ендоморфізмів скінченного неорієнтованого графа без кратних ребер у вигляді вінцевого добутку групи підстановок і малої категорії. Пізніше було отримано точні зображення моноїда сильних ендоморфізмів нескінченного неорієнтованого графа без кратних ребер і n-однорідного гіперграфа заданого класу[16]. Крім цього, М. Боттчер і У. Кнауер розглядали інші типи ендоморфізмів графів: квазісильні, локально сильні та напівсильні, що разом з сильними і звичайними ендоморфізмами та автоморфізмами надало можливість класифікувати графи за значенням їх ендотипу, а також досліджувати ендоспектри скінченних графів[17].

Природним узагальненням поняття ендоморфізму є поняття відповідності алгебраїчної системи. Задача вивчення напівгруп відповідностей була визначена О. Г. Курошем[18] ще в кінці 60-х років минулого століття. Відповідності як підалгебри прямого добутку деякої алгебри досліджувалися в роботах А. А. Іскандера, Д. О. Бредихіна, С. М. Гоберштейна, М. Ш. Цаленка, О. Г. Ганюшкіна, Т. В. Турки та інших. Зокрема, доведено, що будь-яка компактно-породжена решітка ізоморфна решітці всіх відповідностей деякої універсальної

[8]Важенин Ю. М. Об элементарной определяемости и элементарной характеризуемости графов / Ю. М. Важенин // Изв. вузов. матем. – 1972. – № 7. – С. 3 – 11.

[9]Araujo J. Dense relations are determined by their endomorphisms monoids / J. Araujo, J. Konieczny // Semigroup Forum. – 2005. – Vol. 70. – P. 302–306.

[10]Айзенштат А. Я. Определяющие соотношения полугруппы эндоморфизмов конечного линейного упорядоченного множества / А. Я. Айзенштат // Сиб. мат. журн. – 1962. – Т. 3, № 2. – С. 161 – 169.

[11]Schein B. M. Products of idempotent order-preserving transformations of arbitrary chains / B. M. Schein // Semigroup Forum. – 1975. – Vol. 11, № 1. – P. 297 – 309.

[12]Laradji. A. Combinatorial results for semigroups of order-preserving partial transformations / A. Laradji, A. Umar // King Fand Univ. of Petroleum and Minerals (Saudi Arabia). Dept. Math. Sci. Technikal Report Series. – 2004. – P. 1 – 18.

[13]Ким В. И.Условия регулярности полугрупп изотонных преобразований счётных цепей / В. И. Ким, И. Б. Кожухов // Фундамент. и прикл. мат. – 2006. – Т. 12, № 8. – С. 97 – 104.

[14]Čulík K. Zur Theorie der Graphen / K. Čulík // Časopis Pěst. Mat. – 1958. – Vol. 83. – P. 133 – 155.

[15]Knauer U. Endomorphisms of graphs I. The monoid of strong endomorphisms / U. Knauer, M. Nieporte // Arch. Math. – 1989. – Vol. 52, № 6. – P. 607 – 614.

[16]Бондарь Е. А. Полугруппы сильных эндоморфизмов бесконечных графов и гиперграфов / Е. А. Бондарь, Ю. В. Жучок // Укр. мат. журн. – 2013. – Т. 65, № 6. – С. 743 – 754.

[17]Böttcher M. Endomorphism spectra of graphs / M. Böttcher, U. Knauer // Discrete Math. – 1992. – Vol. 109. – P. 45 – 57.

[18]Курош А. Г. Общая алгебра (лекции 1969-70 учебного года) / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1974. – 160 с.

алгебри[19], а також досліджено зв’язки між решітками всіх підалгебр і решітками всіх відповідностей часткових універсальних алгебр[20]. Для нільнапівгруп, інверсних напівгруп і ортодоксальних напівгруп досліджено проблему визначеності їх сполуками відповідностей[21]. Знайдено порядок напівгруп відповідностей циклічних, діедральних і елементарних абелевих скінченних груп[22], а також центр напівгрупи відповідностей скінченної групи[23].

Іншою структурою, що вивчається в цій роботі та тісно пов’язана з відповідностями, є напівгрупа ендотопізмів. Поняття ендотопізму було введене Б. В. Поповим[24] як узагальнення поняття ендоморфізму μ-арного відношення. За допомогою напівгруп ендотопізмів він охарактеризував з точністю до ізотопізму певні структури μ-арних відношень. У цьому напрямі актуальними є задачі дослідження реляційних систем, для яких напівгрупи ендотопізмів є відповідностями напівгрупи ендоморфізмів заданої системи, а також проблема класифікації з точністю до ізоморфізму напівгруп ендоморфізмів змістовних бінарних відношень та їх відповідностей.

Отже, вивчення властивостей напівгруп ендоморфізмів реляційних систем є дійсно важливим та актуальним напрямом у теорії напівгруп.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана за програмою НДР „Напівгрупи та структурні властивості дімоноїдів” (№ держреєстрації 0115U000199), що здійснювалася у Державному закладі „Луганський національний університет імені Тараса Шевченка” у 2015 – 2017 роках.

Мета й завдання дослідження. Метою дослідження є вивчення властивостей напівгруп ендоморфізмів заданих бінарних відношень.

Основними завданнями при цьому є:

- класифікація відповідностей напівгрупи ендоморфізмів відношення еквівалентності з точністю до ізоморфізму;
- опис умов регулярності заданих відповідностей напівгрупи ендоморфізмів довільної еквівалентності;
- знаходження ендотипу та ендоспектра відношення еквівалентності відносно його ендотопізмів;
- розв’язання проблеми визначеності ефективних зв’язних бінарних відношень їх напівгрупами ендотопізмів;
- характеризація моноїда сильних ендотопізмів симетричного бінарного відношення.

Об’єктом дослідження є відношення еквівалентності, ефективні зв’язні

---

[19]Искандер А. А. Структура соответствий универсальной алгебры / А. А. Искандер // Изв. АН СССР, серия матем. – 1965. – Т. 29, № 6. – С. 1357 – 1372.

[20]Искандер А. А. Частичные универсальные алгебры с заданными структурами подалгебр и соответствий / А. А. Искандер // Матем. сб. – 1966. – Т. 70, № 3. – С. 438 – 456.

[21]Goberstein S. M. On orthodox semigroups determined by their bundles of correspondences / S. M. Goberstein // Pacific J. Math. – 1992. – Vol. 153, № 1. – 1992. – P. 71 – 84.

[22]Ганюшкін О. Г. Порядок напівгрупи відповідностей скінченної групи / О. Г. Ганюшкин, Т. В. Турка // Вісн. Київ. ун-ту. Серія : фіз.-мат. науки. – 2009. – № 3. – С. 9 – 13.

[23]Турка Т. В. Центр напівгрупи відповідностей / Т. В. Турка // Вісн. Київ. ун-ту. Серія : фіз.-мат. науки. – 2015. – № 2. – С. 41 – 44.

[24]Попов Б. В. Полугруппы эндотопизмов $\mu-$арных отношений / Б. В. Попов // Ученые записки ЛГПИ им. А. И. Герцена. – 1965. – Т. 274. – С. 184 – 201.

бінарні відношення та симетричні бінарні відношення.

Предметом дослідження є властивості напівгруп ендоморфізмів зазначених об’єктів дисертаційної роботи.

Методи дослідження – загальноалгебраїчні з використанням основних методів теорії графів, теорії напівгруп та комбінаторного аналізу.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації автором отримано такі результати:

1. Описано точні зображення напівгрупи ендотопізмів, моноїда сильних ендотопізмів та групи автотопізмів відношення еквівалентності, а також моноїда сильних ендотопізмів симетричного відношення заданого класу.

Отримані результати є такими, що розвивають та доповнюють описи М. Ніпорте та У. Кнауера, У. А. Нуммерта, Ю. В. Жучка та Є. О. Бондар про точні зображення моноїда сильних ендоморфізмів скінченних неорієнтованих графів без кратних ребер, узагальнених лексикографічних добутків графів і, відповідно, певних нескінченних графів та гіперграфів.

2. Знайдено умови регулярності для шести типів відповідностей напівгрупи ендоморфізмів відношення еквівалентності.

Установлені описи доповнюють та розвивають відомі результати А. Я. Айзенштат, В. І. Кіма, І. Б. Кожухова та В. А. Ярошевича про регулярність моноїдів ендоморфізмів злічених ланцюгів, напівгруп ендоморфізмів упорядкованих і квазівпорядкованих множин.

3. Класифіковано всі еквівалентності за значенням їх ендотипу відносно ендотопізмів. Знайдено ендотипи усіх строгих часткових еквівалентностей відносно ендоморфізмів. Досліджено ендоспектр відношення еквівалентності відносно його ендотопізмів.

Ці результати доповнюють результати У. Кнауера та М. Боттчера, Х. Хоу, К. Фана й Ю. Луо, В. Ванга та Х. Хоу про класифікацію деяких скінченних графів, узагальнених полігонів і графів N-призм з точністю до значення їх ендотипу.

4. Доведено визначеність ефективних зв’язних бінарних відношень їх напівгрупами ендотопізмів.

Отримані результати доповнюють результати Л. М. Глускіна, Л. Б. Шнепермана, Дж. Арауджо та Я. Конечни про визначеність відношень квазіпорядку, рефлексивних бінарних відношень та щільних I-відношень їх напівгрупами ендоморфізмів, а також результат Б. В. Попова про визначеність квазівпорядкованих множин з точністю до ізоморфізму або антиізоморфізму їх напівгрупами ендотопізмів.

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Усі результати є новими й можуть бути використані при вивченні будови напівгруп ендоморфізмів реляційних систем різних класів, а також при викладанні спецкурсів з теорії напівгруп і теорії графів.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, отримано дисертанткою самостійно. У роботах, виконаних у співавторстві, здобувачці належить практична реалізація висунутих завдань та низка конкретних ідей. Зокрема, у статті [1] дисертанткою отримано опис умов регулярності відповідностей напівгрупи ендоморфізмів відношення еквівалентності, знайдено ендотипи тривіальних еквівалентностей; у статті [2] отримано точні зображення напівгрупи ендотопізмів, моноїда сильних ендотопізмів та групи автотопізмів еквівалентності в термінах конструкцій підпрямого та вінцевого добутків; за допомогою властивостей мінімального ідеалу розв'язано проблему визначеності відношень еквівалентності їх напівгрупами ендотопізмів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження оприлюднено на таких конференціях та семінарах:

- VIII Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (м. Луганськ, 5 – 12 липня 2011 р.);
- Міжнародній математичній конференції, присвяченій 70-річчю проф. В. В. Кириченка (м. Миколаїв, 13 – 19 червня 2012 р.);
- IX Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (м. Львів, 8 – 13 липня 2013 р.);
- XII Міжнародній конференції „Алгебра і теорія чисел: сучасні проблеми і застосування”, присвяченій 80-річчю проф. В. М. Латишева (м. Тула, 21 – 25 квітня 2014 р.);
- Міжнародній конференції молодих математиків (м. Київ, 3 – 6 червня 2015 р.);
- Міжнародній математичній конференції „Групи та дії: геометрія та динаміка”, присвяченій пам'яті проф. В. І. Сущанського (м. Київ, 19 – 22 грудня 2016 р.);
- Міжнародному семінарі з графів, напівгруп та напівгрупових дій (м. Берлін, 10 – 13 жовтня 2017 р.);
- алгебраїчному семінарі „Під кінець року” механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ, 26 грудня 2017 р., керівники – доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України Ю. А. Дрозд, доктор фізико-математичних наук, професор, старший науковий співробітник НДЧ В. В. Кириченко, доктор фізико-математичних наук, професор А. П. Петравчук);
- алгебраїчному семінарі Інституту математики НАН України (м. Київ, 13 березня 2018 р., керівник – доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України Ю. А. Дрозд);
- алгебраїчних семінарах кафедри алгебри та системного аналізу ДЗ „Луганський національний університет імені Тараса Шевченка” (м. Луганськ, 2012 – 2014 рр., м. Старобільськ, 2015 – 2017 рр., керівник – доктор фізико-математичних наук, професор А. В. Жучок).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 6 наукових статтях [1 – 6]: з них 3 – у наукових фахових виданнях України (1 з яких входить до міжнародної наукометричної бази даних Scopus), 1 – у науковому періодичному виданні України, 2 – в іноземних наукових періодичних виданнях, що входять до міжнародної наукометричної бази даних Scopus, та в 6-ти тезах міжнародних наукових конференцій [7 – 12].

Структура й обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг дисертації складає 130 сторінок, з яких основний зміст роботи викладено на 101 сторінці. Список використаних джерел містить 77 найменувань та займає 8 сторінок. Додатки займають 3 сторінки і містять список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію її результатів.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, визначено мету, завдання, об'єкт та предмет дослідження, вказано методи дослідження, сформульовано наукову новизну, теоретичне та практичне значення одержаних результатів, а також особистий внесок здобувача. Наведено перелік семінарів і конференцій, на яких було апробовано результати дисертації, охарактеризовано структуру роботи.

У **першому розділі „Попередні відомості"** подано необхідні теоретичні відомості з теорії напівгруп та теорії графів, які надалі використовуються в дисертації. Зокрема розглянуто два узагальнення поняття ендоморфізму алгебраїчної системи – відповідності та ендотопізми, а також наведено конструкцію вінцевого добутку моноїда й малої категорії.

Нехай X – довільна непорожня множина. Упорядкована пара (φ,ψ) перетворень φ і ψ множини X називається *ендотопізмом* відношення $\rho\subseteq X\times X$, якщо з $(x,y)\in\rho$ випливає, що $(x\varphi,y\psi)\in\rho$ при будь-яких $x,y\in X$. Множина всіх ендотопізмів бінарного відношення ρ відносно операції покомпонентного множення утворює моноїд, який позначатимемо через $Et(X,\rho)$.

Називатимемо ендотопізм (φ,ψ) відношення $\rho\subseteq X\times X$ *сильним ендотопізмом*, якщо з $(x\varphi,y\psi)\in\rho$ випливає, що $(x,y)\in\rho$ при будь-яких $x,y\in X$. Множина всіх сильних ендотопізмів відношення ρ відносно операції покомпонентного множення утворює моноїд, який позначатимемо як $SEt(X,\rho)$.

Упорядкована пара (φ,ψ) підстановок φ і ψ множини X називається *автотопізмом* відношення $\rho\subseteq X\times X$, якщо $(x,y)\in\rho$ тоді й лише тоді, коли $(x\varphi,y\psi)\in\rho$ при будь-яких $x,y\in X$. Множина всіх автотопізмів відношення ρ відносно операції покомпонентного множення утворює групу, яку будемо позначати через $At(X,\rho)$.

Напівгрупа всіх ендоморфізмів бінарного відношення ρ, тобто множина всіх перетворень множини X, які зберігають це відношення, з операцією композиції, позначається через $End(X,\rho)$. Зрозуміло, що напівгрупа ендоморфізмів довільного бінарного відношення з точністю до ізоморфізму міститься в напівгрупі ендотопізмів цього відношення.

З'ясовано, що для довільної еквівалентності α на множині X напівгрупа всіх ендотопізмів $Et(X,\alpha)$, моноїд усіх сильних ендотопізмів $SEt(X,\alpha)$ та група всіх автотопізмів $At(X,\alpha)$ є відповідностями[18] напівгрупи ендоморфізмів $End(X,\alpha)$, тобто підалгебрами з $End(X,\alpha)\times End(X,\alpha)$.

Для інших типів ендотопізмів, а саме: множини $HEt(X,\alpha)$ напівсильних ендотопізмів, множини $LEt(X,\alpha)$ локально сильних ендотопізмів і множини $QEt(X,\alpha)$ квазісильних ендотопізмів еквівалентності α знайдено необхідні та достатні умови, за яких ці множини є відповідностями моноїда $End(X,\alpha)$.

Для зручності напівгрупу ендотопізмів $Et(X,\rho)$ будемо позначати через $Et(\rho)$. Відповідні позначення стосуються і множин ендотопізмів інших типів.

Нехай C – мала категорія, R – моноїд, який діє справа на множині $X = ObC$ об’єктів цієї категорії, і $M = \bigcup_{x,y\in X} Mor_C(x,y)$ – множина всіх морфізмів категорії C.

Візьмемо натуральне число n і покладемо

$$V = \{(r, f^{(1)}, f^{(2)},\ldots,f^{(n)}) \mid r\in R,\ f^{(i)} \in Map(X,M),\ xf^{(i)} \in Mor_C(x,xr)\ \forall x\in X\ \}.$$

На множині V для всіх $(r, f^{(1)}, f^{(2)},\ldots,f^{(n)}),(p, g^{(1)}, g^{(2)},\ldots,g^{(n)})\in V$ визначимо операцію множення:

$$(r, f^{(1)}, f^{(2)},\ldots,f^{(n)})(p, g^{(1)}, g^{(2)},\ldots,g^{(n)}) = (rp, f^{(1)}g_r^{(1)}, f^{(2)}g_r^{(2)},\ldots,f^{(n)}g_r^{(n)}),$$

де $x(f^{(i)}g_r^{(i)}) = xf^{(i)}(xr)g^{(i)}$ для всіх $x\in X$. Задана у такий спосіб операція є асоціативною, при цьому існує одиниця $(1,\underbrace{e,\ldots,e}_{n})$, де $e\in Map(X,M)$ такий, що $xe\in Mor_C(x,x)$ – тотожний морфізм для будь-якого $x\in C$.

Моноїд V з таким множенням називається n-*кратним вінцевим добутком* моноїда R з категорією C і позначається через $Rwr^{(n)}C$.

Якщо $n=1$, то отримуємо двоїстий вінцевий добуток до визначеного В. Флейшером[25], який позначатимемо як $RwrC$.

Другий розділ „Відповідності напівгрупи ендоморфізмів відношення еквівалентності” присвячено вивченню відповідностей напівгрупи ендоморфізмів довільного відношення еквівалентності.

У підрозділі 2.1 „Точні зображення відповідностей” у термінах вінцевого добутку моноїда з малою категорією описано зображення трьох відповідностей напівгрупи ендоморфізмів довільного відношення еквівалентності, а саме: напівгрупи ендотопізмів, моноїда сильних ендотопізмів та групи автотопізмів відношення еквівалентності.

Нехай X – довільна непорожня множина, $\Im(X)$ – симетрична напівгрупа на X, $Eq(X)$ – множина всіх еквівалентностей на X і $\alpha\in Eq(X)$. Через x_α позначимо клас еквівалентності з X/α, який містить $x\in X$.

Визначимо малу категорію K, об’єктами якої є множина $ObK = X/\alpha$, а морфізмами – будь-які відображення між класами еквівалентності з X/α. Зрозуміло, що симетрична напівгрупа $\Im(X/\alpha)$ діє справа на множині об’єктів ObK. Таким чином, виникає вінцевий добуток $\Im(X/\alpha)wrK$ симетричної напівгрупи $\Im(X/\alpha)$ з малою категорією K.

[25] Флейшер В. О сплетении моноидов с категориями / В. Флейшер // Труды акад. наук Эстонской ССР. – 1986. – Т. 35. – С. 237 – 243.

У декартовому квадраті вінцевого добутку $\Im(X/\alpha)wrK$ на себе виділимо піднапівгрупу $P_X^\alpha = \{((\varphi, f),(\psi, g)) | \varphi = \psi\}$.

Позначимо через K_*^2 повну підкатегорію категорії $K \times K$, яка розглядається на множині об'єктів $ObK_*^2 = \{(A, A) | A \in ObK\}$. Напівгрупа $\Im(X/\alpha)$ природно діє справа на ObK_*^2, тому виникає вінцевий добуток $\Im(X/\alpha)wrK_*^2$ симетричної напівгрупи $\Im(X/\alpha)$ з малою категорією K_*^2.

Має місце така теорема.

Теорема 2.1. *Нехай $\alpha \in Eq(X)$. Напівгрупа $Et(\alpha)$ ізоморфна кожній з таких напівгруп:*

(i) 2-кратному вінцевому добутку $\Im(X/\alpha)wr^{(2)}K$ напівгрупи перетворень $\Im(X/\alpha)$ з малою категорією K;

(ii) підпрямому добутку P_X^α напівгрупи $(\Im(X/\alpha)wrK) \times (\Im(X/\alpha)wrK)$;

(iii) вінцевому добутку $\Im(X/\alpha)wrK_*^2$ напівгрупи $\Im(X/\alpha)$ з категорією K_*^2.

Подібні характеристики отримано для моноїда сильних ендотопізмів (теорема 2.2) та групи автотопізмів (теорема 2.3) довільної еквівалентності.

У підрозділі 2.2 „Ізоморфізми напівгруп ендотопізмів еквівалентності" з використанням властивостей мінімального ідеалу напівгрупи ендотопізмів довільної еквівалентності показано визначеність відношень еквівалентності їх напівгрупами ендотопізмів (теорема 2.4), а також описано всі ізоморфізми напівгруп ендотопізмів довільних еквівалентностей (теорема 2.5).

У підрозділі 2.3 „Регулярність та корегулярність відповідностей" описано критеріальні умови регулярності та корегулярності (теорема 2.7) відповідностей як напівгруп ендотопізмів відношень еквівалентності.

Напівгрупа S називається *регулярною*, якщо для будь-якого $a \in S$ існує такий $x \in S$, що $axa = a$.

Нехай X – непорожня множина. Покладемо $i_X = \{(a,a) | a \in X\}$ і $\omega_X = X \times X$. Еквівалентність α на множині X називається *тривіальною*, якщо $\alpha = i_X$ або $\alpha = \omega_X$.

Через $Eq^n(X)$ позначимо множину всіх еквівалентностей на X з n класами потужності ≥ 2.

Очевидно, що для довільного $\alpha \in Eq(X)$ відповідність $At(\alpha)$ є регулярною. Регулярність інших типів відповідностей напівгрупи ендоморфізмів відношення еквівалентності встановлює така теорема.

Теорема 2.6. *(i) Напівгрупа $Et(\alpha)$, де $\alpha \in Eq(X)$, є регулярною тоді й тільки тоді, коли α – тривіальне відношення еквівалентності;*

(ii) Напівгрупа $HEt(\alpha)$, де α – тривіальна еквівалентність, є регулярною;

(iii) Напівгрупа $LEt(\alpha)$, де $\alpha \in Eq^1(X)$ або $\alpha = i_X$, є регулярною;

(iv) Напівгрупа $SEt(\alpha)$, де $\alpha \in Eq(X)$, є регулярною тоді й тільки тоді, коли фактор-множина X/α є скінченною.

Відзначимо, що для еквівалентності α множини $SEt(\alpha)$ та $QEt(\alpha)$ збігаються.

У підрозділі 2.4 „Ендотипи відношень еквівалентності” визначено поняття ендотипу бінарного відношення відносно його ендотопізмів, класифіковано всі еквівалентності за значенням їх ендотипу відносно ендотопізмів, знайдено всі ендотипи строгих часткових відношень еквівалентності відносно ендоморфізмів.

Нехай X – довільна непорожня множина, ρ – бінарне відношення на множині X. Ланцюгу включень $Et(\rho) \supseteq HEt(\rho) \supseteq LEt(\rho) \supseteq QEt(\rho) \supseteq SEt(\rho) \supseteq At(\rho)$ відповідає послідовність чисел $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$, де $s_i \in \{0,1\}$, $1 \le i \le 5$. При цьому $s_i = 0$, якщо на i-тій позиції в наведеній вище послідовності включень множини збігаються, та $s_i = 1$ в іншому випадку. Значення суми $\sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1}$ називається *ендотипом* бінарного відношення ρ відносно його ендотопізмів і позначається через $Ettype(X, \rho)$. Якщо у вказаній вище послідовності включень множини ендотопізмів замінити на відповідні множини ендоморфізмів, то отримаємо поняття ендотипу $Endotype(X, \rho)$ бінарного відношення ρ відносно його ендоморфізмів[17].

Класифікацію всіх еквівалентностей за значенням їх ендотипу відносно ендотопізмів отримано у такій теоремі.

Теорема 2.8. *Для будь-якої еквівалентності α на множині X*

$$Ettype(X, \alpha) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |X| = 1, \\ 4, & \text{якщо } 2 \le |X| < \infty,\ \alpha = i_X, \\ 16, & \text{якщо } 2 \le |X|,\ \alpha = \omega_X, \\ 20, & \text{якщо } |X| = \infty,\ \alpha = i_X, \\ 23, & \text{якщо } \alpha \ne i_X,\ \alpha \ne \omega_X. \end{cases}$$

Бінарне відношення ρ на множині X називається *частковою еквівалентністю*[26] на X, якщо воно симетричне й транзитивне.

Нехай A – непорожня підмножина множини X, α_A – еквівалентність на A. Множину всіх часткових еквівалентностей на множині A будемо позначати через $Eq_A(X)$. Якщо $A \subset X$, то відношення $\alpha_A \in Eq_A(X)$ будемо називати *строгою частковою еквівалентністю* на X. Має місце теорема.

Теорема 2.13. *Нехай $A \subset X$ і $A \ne \varnothing$. Для будь-якої строгої часткової* еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$

$$Endotype\,(X, \alpha_A) = \begin{cases} 2, & \text{якщо } |A| = 1, |X| = 2, \\ 7, & \text{якщо } 2 \le |A| < \infty, |X \setminus A| = 1, \alpha_A = i_A, \\ 18, & \text{якщо } |A| = 1,\ 2 < |X|, \\ 19, & \text{якщо } 2 \le |A| < \infty, \alpha_A = \omega_A, \\ 23, & \text{якщо } 2 \le |A| < \infty, i_A \ne \alpha_A \ne \omega_A \text{ або} \\ & 2 \le |A| < \infty, 1 < |X \setminus A| = 1,\ \alpha_A = i_A, \text{ або} \\ & |A| = \infty,\ \alpha_A \ne \omega_A. \end{cases}$$

---

[26]Дудек В. А. Алгебры Менгера многоместных функций / В. А. Дудек, В. С. Трохименко. – Chişinău: S.n., 2006 (Centrul Ed. USM). – 237 с.

У підрозділі 2.5 „Ендоспектр відношень еквівалентності” визначено поняття ендоспектра бінарного відношення відносно його ендотопізмів та досліджено ендоспектр довільної еквівалентності на скінченній множині.

Нехай X – скінченна непорожня множина, ρ – бінарне відношення на множині X. Ланцюгу включень

$$Et(\rho) \supseteq HEt(\rho) \supseteq LEt(\rho) \supseteq QEt(\rho) \supseteq SEt(\rho) \supseteq At(\rho)$$

відповідає послідовність потужностей

$$(|Et(\rho)|, |HEt(\rho)|, |LEt(\rho)|, |QEt(\rho)|, |SEt(\rho)|, |At(\rho)|),$$

яку будемо називати *ендоспектром* бінарного відношення ρ відносно його ендотопізмів і позначати через $Etspec\,(X, \rho)$.

Нехай $\alpha \in Eq(X)$, $(\tau, \sigma) \in Et(\alpha)$. Через $B(X)$ позначимо множину всіх бієкцій $\eta : X/\alpha \to X/\alpha,$ таких що $|A| = |A\eta|$ для кожного $A \in X/\alpha.$

Зауважимо, що для кожної еквівалентності $\alpha \in Eq(X)$ перетворення $\tau : X \to X$ індукує перетворення $\tau^* : X/\alpha \to X/\alpha,$ визначене таким чином: $x_\alpha \tau^* = (x\tau)_\alpha$ для всіх $x_\alpha \in X/\alpha.$

Нехай $A \in im(\tau^*)$ таке, що $|A\tau^{*^{-1}}| > 1,$ де $im(\tau^*)$ – образ фактор-множини X/α при перетворенні τ^*. Позначимо через M_A клас найменшої потужності з сім’ї $A\tau^{*^{-1}} \bigcup \{A\}$, а через P_i^A, де $1 \le i \le |M_A|$, – множину таких перетворень $\tau \in \Im(X)$, що $|Y\tau| = i$ для будь-якого $Y \in A\tau^{*^{-1}}$.

Теорема 2.16. *Для будь-якої еквівалентності α на скінченній множині X мають місце такі рівності:*

(i) $|Et(\alpha)| = \sum\limits_{\tau^* \in \Im(X/\alpha)} \left(\prod\limits_{A \in X/\alpha} |A\tau^*|^{|A|} \right)^2;$

(ii) $|LEt(\alpha)| = \sum\limits_{\tau^* \in \Im(X/\alpha)} \left(\prod\limits_{A \in (X/\alpha)\tau^*} \sum\limits_{i=1}^{|M_A|} |P_i^A| \right)^2;$

(iii) $|SEt(\alpha)| = \sum\limits_{\tau^* \in S(X/\alpha)} \left(\prod\limits_{A \in X/\alpha} |A\tau^*|^{|A|} \right)^2;$

(iv) $|QEt(\alpha)| = |SEt(\alpha)|;$

(v) $|At(\alpha)| = |B(X/\alpha)| \cdot \left(\prod\limits_{A \in X/\alpha} |A|! \right)^2.$

У **третьому розділі „Напівгрупи ендотопізмів бінарних відношень”** вивчається напівгрупа ендотопізмів ефективного зв’язного бінарного відношення і моноїд сильних ендотопізмів симетричного бінарного відношення. Отримано характеризацію ефективних зв’язних відношень та встановлено точне зображення моноїда сильних ендотопізмів для певного класу симетричних відношень.

У підрозділі 3.1 „Ендотопізми ефективних зв’язних відношень” досліджуються зазначені бінарні відношення та їх зв’язки з напівгрупами ендотопізмів.

Нехай $\rho \subseteq A \times B$ – довільне бінарне відношення, де A і B – множини, які містять не менше двох елементів. Тут розглядаються випадки, коли $A = B$ і $A \bigcap B = \varnothing$.

Бінарне відношення $\rho \subseteq A \times B$ називається *зв'язним*[27], якщо не існує непорожніх множин A_1, A_2, B_1 і B_2, таких що $A_1 \bigcup A_2 = A,\ B_1 \bigcup B_2 = B,\ A_1 \bigcap A_2 = \varnothing,$ $B_1 \bigcap B_2 = \varnothing$ і

$$\rho \subseteq (A_1 \times B_1) \bigcup (A_2 \times B_2).$$

Бінарне відношення $\rho \subseteq A \times B$ називається *ефективним*, якщо

$$\{x \in A \mid \exists y \in B : (x, y) \in \rho\} = A \text{ і } \{y \in B \mid \exists x \in A : (x, y) \in \rho\} = B.$$

Бінарні відношення $\rho \subseteq A \times B$ і $\rho' \subseteq A' \times B'$ називаються *ізотопними*[25], якщо існує упорядкована пара (τ, σ) бієктивних відображень $\tau : A \to A',\ \ \sigma : B \to B'$, що для всіх $x \in A,\ y \in B$

$$(x, y) \in \rho \Leftrightarrow (x\tau, y\sigma) \in \rho'.$$

Основним результатом цього підрозділу є така теорема.

Теорема 3.5. *Нехай $\rho \subseteq A \times B$ і $\rho' \subseteq A' \times B'$ – довільні ефективні зв'язні відношення. Якщо напівгрупи $Et(\rho)$ і $Et(\rho')$ ізоморфні, то бінарні відношення ρ і ρ' або ρ і ρ'^{-1} ізотопні.*

Також показано, що за певних додаткових умов ефективні і зв'язні бінарні відношення ізоморфні або антиізоморфні в тому й лише в тому разі, коли вони ізотопні або антиізотопні (теорема 3.7).

У підрозділі 3.2 „Моноїд сильних ендотопізмів симетричного відношення" визначено один клас симетричних бінарних відношень і доведено, що моноїд усіх сильних ендотопізмів довільного симетричного відношення такого класу є ізоморфним вінцевому добутку моноїда сильних ін'єктивних ендоморфізмів канонічної сильної фактор-системи з деякою малою категорією.

Нехай X – довільна непорожня множина, $\rho \subseteq X \times X$ – симетричне відношення і $x \in X$. Покладемо $N(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in \rho\}$. На множині X задамо відношення еквівалентності ν за правилом: $(x, y) \in \nu$ тоді й тільки тоді, коли $N(x) = N(y)$.

Канонічною сильною фактор-системою називається реляційна система $(X / \nu, \delta)$, де $(x_\nu, y_\nu) \in \delta$ тоді й тільки тоді, коли $(x, y) \in \rho$ для всіх $x_\nu, y_\nu \in X / \nu$.

Нехай (U, ζ), $(Y_u, \rho_u)_{u \in U}$, де $\zeta \subseteq U \times U$, $\rho_u \subseteq Y_u \times Y_u$, – довільні реляційні системи. *Узагальненим лексикографічним добутком*[15] $U((Y_u)_{u \in U})$ реляційної системи (U, ζ) і реляційних систем $(Y_u, \rho_u)_{u \in U}$ називається модель $(U((Y_u)_{u \in U}), \omega)$, де $U((Y_u)_{u \in U}) = \{(u, a_u) \mid u \in U,\ a_u \in Y_u\}$, і $((u, a_u), (v, b_v)) \in \omega$ тоді й тільки тоді, коли $(u, v) \in \zeta$ або $u = v$ і $(a_u, b_v) \in \rho_u$.

Нехай $U = X / \nu$, $\zeta = \delta$ і (U, ζ) – канонічна сильна фактор-система. Візьмемо для кожного $u \in U$ множину Y_u таку, що $|Y_u| = |u|$. Відомо, що реляційна система (X, ρ) є ізоморфною узагальненому лексикографічному добутку $(U((Y_u)_{u \in U}), \omega)$

---

[27] Riguet J. Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois / J. Riguet // Bull. Soc. Math. France. – 1948. – 76.– P. 114 – 155.

більш простих реляційних систем[15].

Позначимо через $\mathfrak{G}$ клас усіх симетричних відношень ρ, визначених на множині X, для яких при будь-якому $(\varphi,\psi)\in SEt(\rho)$ виконується умова:

$$\forall x_\nu \in X/\nu \ \exists y_\nu \in X/\nu: \ x_\nu\varphi \subseteq y_\nu,\ x_\nu\psi \subseteq y_\nu .$$

Встановлено, що, коли $\rho\in\mathfrak{G}$, моноїд $SEnd(\delta)$ усіх сильних ендоморфізмів відношення $\delta \subseteq X/\nu \times X/\nu$ збігається з моноїдом $SMon(\delta)$ усіх сильних ін'єктивних ендоморфізмів цього відношення (наслідок 3.13).

Нехай $P = U((Y_u)_{u\in U})$, $\omega \subseteq P\times P$ – довільне відношення з класу $\mathfrak{G}$. Визначимо малу категорію K, поклавши $ObK = \{Y_u \mid u\in U\}$ та позначаючи для будь-яких $u,v\in U$ через $MorK(Y_u,Y_v)$ множину всіх відображень з Y_u в Y_v. Позначимо через $\mathfrak{K}$ повну підкатегорію категорії $K\times K$, яка розглядається на множині об'єктів $Ob\mathfrak{K} = \{(Y_u,Y_u)\in ObK\times ObK \mid u\in U\}$. Моноїд $SMon(\delta)$ усіх сильних ін'єктивних ендоморфізмів відношення δ природно діє справа на $Ob\mathfrak{K}$ у такий спосіб: $(Y_u,Y_u)\tau^* = (Y_{u\tau^*},Y_{u\tau^*})$, $\tau^*\in SMon(\delta)$. Отже, отримуємо вінцевий добуток $SMon(\delta)wr\mathfrak{K}$ моноїда $SMon(\delta)$ з малою категорією $\mathfrak{K}$.

Наступна теорема є основним результатом підрозділу 3.2.

Теорема 3.15. *Нехай $P = U((Y_u)_{u\in U})$, $\omega \subseteq P\times P$ – довільне відношення класу $\mathfrak{G}$ та $\mathfrak{K}$ – мала категорія, визначена вище. Тоді моноїд $SEt(\omega)$ сильних ендотопізмів відношення ω є ізоморфним вінцевому добутку $SMon(\delta)wr\mathfrak{K}$ моноїда $SMon(\delta)$ з малою категорією $\mathfrak{K}$.*

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджено алгебраїчні та комбінаторні властивості напівгруп ендоморфізмів відношення еквівалентності та симетричного бінарного відношення, а також напівгрупи ендотопізмів ефективного і зв'язного бінарного відношення.

Отримано опис точних зображень напівгрупи ендотопізмів, моноїда сильних ендотопізмів та групи автотопізмів відношення еквівалентності, а також моноїда сильних ендотопізмів симетричного відношення заданого класу. Ці результати розвивають та доповнюють результати У. Кнауера та М. Ніпорте про точне зображення моноїда сильних ендоморфізмів скінченних неорієнтованих графів без кратних ребер, У. А. Нуммерта про точне зображення узагальнених лексикографічних добутків графів, а також Ю. В. Жучка та Є. О. Бондар про точні зображення певних нескінченних графів та гіперграфів.

Для шести типів відповідностей напівгрупи ендоморфізмів довільного відношення еквівалентності знайдено умови регулярності. Отримані описи є такими, що розвивають та доповнюють описи А. Я. Айзенштат, В. І. Кіма, І. Б. Кожухова та В. А. Ярошевича про регулярність моноїдів ендоморфізмів злічених ланцюгів та впорядкованих і квазівпорядкованих множин.

Введено поняття ендотипу бінарного відношення відносно його ендотопізмів. Отримано класифікацію всіх еквівалентностей за значенням їх ендотипу відносно ендотопізмів, а також класифікацію строгих часткових еквівалентностей за їх ендотипом відносно ендоморфізмів. Для довільної еквівалентності, визначеної на скінченній множині, введено та досліджено ендоспектр відносно ендотопізмів. Отримані результати доповнюють результати У. Кнауера, М. Боттчера, Х. Хоу, К. Фана й Ю. Луо, В. Ванга та Х. Хоу про класифікацію за ендотипом скінченних графів, узагальнених полігонів і графів N-призм.

Розв’язано проблему визначеності ефективних і зв’язних бінарних відношень їх напівгрупами ендотопізмів. Отриманий результат є аналогом відомих результатів Л. М. Глускіна, Л. Б. Шнепермана, Дж. Араууджо та Я. Конечни про визначеність відношень квазіпорядку, рефлексивних бінарних відношень та щільних I-відношень їх напівгрупами ендоморфізмів, а також результату Б. В. Попова про визначеність квазівпорядкованих множин напівгрупами ендотопізмів.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Жучок Ю. В. Полугруппы эндотопизмов отношения эквивалентности / Ю. В. Жучок, Е. А. Тоичкина // Матем. сб. – 2014. – Т. 205, № 5. – С. 37 – 54.
2. Жучок Ю. В. Соответствия полугруппы эндоморфизмов отношения эквивалентности / Ю. В. Жучок, Е. А. Тоичкина // Матем. заметки. – 2015. – Т. 97, № 2. – С. 217 – 230.
3. Тоичкина Е. А. Полугруппы эндотопизмов эффективных связных отношений / Е. А. Тоичкина // Укр. матем. журн. – 2016. – Т. 68, № 3. – С. 378 – 386.
4. Тоічкіна О. О. Ендоспектр відношень еквівалентності / О. О. Тоічкіна // Матем. студії. – 2016. – Т. 46, № 1. – С. 3 – 12.
5. Тоічкіна О. О. Ендотипи деяких часткових відношень еквівалентності / О. О. Тоічкіна // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. математика і інформатика. – 2017. – Вип. 31, № 2. – С. 122 – 128.
6. Тоічкіна О. О. Моноїд сильних ендотопізмів симетричного відношення / О. О. Тоічкіна // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. механіко-математична. – 2017. – Вип. 83. – С. 128 – 135.
7. Romanenko E. A. On endomorphism semigroups of the some relational systems / E. A. Romanenko // 8th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the memory of Professor V. M. Usenko : Abstracts. – Luhansk, 2011. – P. 273.
8. Romanenko E. The semigroup of endotopisms of the equivalence relation / E. Romanenko // International Mathematical Conference devoted to the 70th anniversary of V. V. Kirichenko : Abstracts. – Mykolaiv, 2012. – P. 170.
9. Romanenko E. A. Correspondences of the semigroup of endomorphisms of an equivalence relation / E. A. Romanenko // 9th International Algebraic Conference in Ukraine : Book of Abstracts. – L’viv, 2013. – P. 155.
10. Zhuchok Yu. V. Endotopism semigroups of an equivalence / Yu. V. Zhuchok, E. A. Toichkina // Proceedings XII International Conference dedicated to 80th anniversary of Professor V. N. Latyshev. Algebra and Number Theory. Modern Problems and Applications : Abstracts. – Tula, 2014. – P. 116 – 118.
11. Toichkina E. A. The endotopism spectrum of an equivalence / E. A. Toichkina // Міжнар. конф. молодих математиків : тези доп. – Київ, 2015. – С. 24.

12. Toichkina O. O. The monoid of strong endotopisms of a symmetric relation / O. O. Toichkina // Book of abstracts of the conference „Groups and Actions: Geometry and Dynamics” dedicated to the memory of Professor Vitaly Sushchanskyy. – Kyiv, 2016. – P. 46.

АНОТАЦІЯ

Тоічкіна О. О. Напівгрупи ендоморфізмів деяких класів бінарних відношень. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра і теорія чисел. – ДЗ „Луганський національний університет імені Тараса Шевченка” Міністерства освіти і науки України, Старобільськ. – Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2019.

Дисертаційну роботу присвячено вивченню абстрактних властивостей напівгруп ендоморфізмів відношення еквівалентності та симетричного бінарного відношення, а також напівгрупи ендотопізмів ефективного і зв’язного бінарного відношення.

Описано шість типів ендотопізмів відношення еквівалентності. З’ясовано, що напівгрупа ендотопізмів, моноїд сильних ендотопізмів і група автотопізмів довільної еквівалентності є відповідностями напівгрупи ендоморфізмів тієї ж еквівалентності, описано їх точні зображення. Знайдено необхідні та достатні умови, за яких напівгрупи ендотопізмів кожного типу є регулярними.

Введено поняття ендотипу та ендоспектра бінарного відношення відносно ендотопізмів. Отримано класифікацію всіх еквівалентностей за значенням їх ендотипу відносно ендотопізмів. Знайдено ендотипи всіх строгих часткових еквівалентностей відносно ендоморфізмів. Для довільного відношення еквівалентності на скінченній множині досліджено ендоспектр.

Доведено, що напівгрупа ендотопізмів бінарного відношення, яке задовольняє умови ефективності та зв’язності, характеризує це бінарне відношення з точністю до ізотопізму або антиізотопізму. Для симетричних бінарних відношень певного класу отримано точне зображення моноїда сильних ендотопізмів у вигляді вінцевого добутку моноїда сильних ін’єктивних ендоморфізмів і деякої малої категорії.

Ключові слова: напівгрупа ендоморфізмів, ендотопізм, сильний ендотопізм, відповідність, регулярність, вінцевий добуток, ізоморфізм, мала категорія, ендотип, ендоспектр, еквівалентність, ефективне відношення, зв’язне відношення, симетричне відношення.

АННОТАЦИЯ

Тоичкина Е. А. Полугруппы эндоморфизмов некоторых классов бинарных отношений. – Квалификационный научный труд на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – алгебра и теория чисел. – ГУ „Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко” Министерства образования и

науки Украины, Старобельск. – Институт математики Национальной академии наук Украины, Киев, 2019.

Диссертационная работа посвящена изучению абстрактных свойств полугрупп эндоморфизмов отношения эквивалентности и симметричного бинарного отношения, а также полугруппы эндотопизмов эффективного и связного бинарного отношения.

Определены шесть типов эндотопизмов произвольного бинарного отношения: эндотопизмы, полусильные эндотопизмы, локально сильные эндотопизмы, квазисильные эндотопизмы, сильные эндотопизмы и автотопизмы. Для отношения эквивалентности описаны все эндотопизмы каждого типа. Показано, что полугруппа всех эндотопизмов, моноид всех сильных эндотопизмов и группа всех автотопизмов произвольной эквивалентности являются соответствиями полугруппы эндоморфизмов этого отношения. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых соответствиями полугруппы эндоморфизмов произвольной эквивалентности являются множества полусильных, локально сильных и квазисильных эндотопизмов.

В терминах конструкций подпрямого произведения и сплетения моноида преобразований с малой категорией, объектами которой являются классы отношения эквивалентности, а морфизмами – любые отображения между ними, получены точные представления полугруппы эндотопизмов, моноида сильных эндотопизмов и группы автотопизмов произвольной эквивалентности.

С использованием свойств минимального идеала полугруппы эндотопизмов доказано, что произвольные отношения эквивалентности с точностью до изоморфизма определяются своими полугруппами эндотопизмов.

Описаны необходимые и достаточные условия регулярности шести типов соответствий как полугрупп эндотопизмов отношения эквивалентности.

Введено понятие эндотипа бинарного отношения как числовой характеристики, связывающей множества шести типов эндотопизмов этого отношения. Получена классификация всех эквивалентностей по значению их эндотипа относительно эндотопизмов, а также классификация всех строгих частичных эквивалентностей по значению их эндотипа относительно эндоморфизмов.

Для бинарного отношения на конечном множестве введено понятие эндоспектра относительно его эндотопизмов как определенной последовательности мощностей для множеств шести типов эндотопизмов. Исследован эндоспектр произвольного отношения эквивалентности на конечном множестве.

Доказано, что полугруппа эндотопизмов бинарного отношения, удовлетворяющего условиям эффективности и связности, характеризует это отношение с точностью до изотопизма или антиизотопизма.

Определён класс симметричных бинарных отношений, сильные эндоморфизмы которых сохраняют отношение равенства окрестностей вершин. Для произвольных отношений этого класса получено представление моноида сильных эндотопизмов в виде сплетения моноида сильных инъективных эндоморфизмов и некоторой малой категории.

Ключевые слова: полугруппа эндоморфизмов, эндотопизм, сильный эндотопизм, соответствие, регулярность, сплетение, изоморфизм, малая категория, эндотип, эндоспектр, эквивалентность, эффективное отношение, связное отношение, симметричное отношение.

ABSTRACT

Toichkina O.O. Semigroups of endomorphisms of some classes of binary relations. – A qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.06 – algebra and number theory. – Luhansk Taras Shevchenko National University of Ministry of Education and Science of Ukraine, Starobilsk. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2019.

The thesis is devoted to studying abstract properties of the endomorphism semigroups of an equivalence relation, a symmetric binary relation, an effective and connected binary relation.

For an arbitrary equivalence relation six types of endotopisms are described. It is shown that the endotopism semigroup, the strong endotopism monoid and the autotopism group of an equivalence relation are correspondences of the endomorphism semigroup of the equivalence relation and for these correspondences the faithful representations are found. For six types of endotopism semigroups of an equivalence relation the conditions of their coregularity are established.

The concepts of an endotype and of an endospectrum of the binary relation with respect to its endotopisms are defined. All equivalences with respect to a value of an endotype are classified. All possible endotype values of an arbitrary strict partial equivalence with respect to its endomorphisms are found. For an equivalence relation on a finite set the endotopism spectrum with respect to its endotopisms is studied.

A determinability of effective and connected binary relations up to an isotopism or an antiisotopism by their endotopism semigroups is proved. For the strong endotopism monoid of the symmetric relation from a certain class the faithful representation in the form of a wreath product of the strong injective endomorphism monoid and some small category is obtained.

Key words: endomorphism semigroup, endotopism, strong endotopism, correspondence, regularity, wreath product, isomorphism, small category, endotype, endotopism spectrum, equivalence relation, effective relation, connected relation, symmetric relation.