Міністерство освіти і науки України
Державний заклад „Луганський національний університет
імені Тараса Шевченка”

Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Тоічкіна Олена Олександрівна

УДК 512.53

ДИСЕРТАЦІЯ

Напівгрупи ендоморфізмів деяких класів бінарних відношень

01.01.06 – алгебра і теорія чисел

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання
ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне
джерело ______________ О. О. Тоічкіна

Науковий керівник
Жучок Юрій Володимирович,
доктор фізико-математичних наук,
доцент

Київ – 2018

АНОТАЦІЯ

Тоічкіна О. О. Напівгрупи ендоморфізмів деяких класів бінарних відношень. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра і теорія чисел. – ДЗ „Луганський національний університет імені Тараса Шевченка” Міністерства освіти і науки України, Старобільськ. – Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена вивченню абстрактних властивостей напівгруп ендоморфізмів бінарних відношень заданих класів: відношень еквівалентності, симетричних, ефективних і зв’язних відношень. Вивчаються напівгрупи ендотопізмів та відповідності напівгруп ендоморфізмів зазначених реляційних систем.

Відповідністю універсальної алгебри G називається будь-яка підалгебра з декартового добутку $G \times G$.

Ендотопізмом бінарного відношення ρ, визначеного на деякій множині X, називається упорядкована пара (φ,ψ) перетворень φ та ψ множини X, для яких з умови $(x,y)\in\rho$ випливає $(x\varphi, y\psi)\in\rho$ для $x,y\in X$. Множина всіх ендотопізмів відношення ρ відносно операції покоординатного множення утворює напівгрупу, яка називається *напівгрупою ендотопізмів* цього відношення та позначається через $Et(\rho)$.

Будь-який ендотопізм (φ,ψ), де $\varphi=\psi$, задає ендоморфізм відношення ρ, отже, напівгрупа ендоморфізмів $End(\rho)$ відношення ρ з точністю до ізоморфізму міститься в напівгрупі ендотопізмів $Et(\rho)$.

Напівгрупа S називається *регулярною,* якщо для будь-якого $a\in S$ існує такий $x\in S,$ що $axa=a,$ та *корегулярною*, якщо $axa = xax = a.$

Бінарне відношення $\rho\subseteq A\times B$ називається *ефективним*, якщо

$\{ x \in A \mid \exists y \in B : (x,y) \in \rho \} = A$ і $\{ y \in B \mid \exists x \in A : (x,y) \in \rho \} = B.$

Бінарне відношення $\rho \subseteq A \times B,$ де $|A| \geq 2,$ $|B| \geq 2,$ називається *зв'язним*, якщо не існує непорожніх множин A_1, A_2, B_1 і B_2, таких що $A_1 \cup A_2 = A,$ $B_1 \cup B_2 = B,$ $A_1 \cap A_2 = \varnothing,$ $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ і $\rho \subseteq (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2).$

Робота складається з анотації, вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, визначено мету, завдання, об'єкт та предмет дослідження, вказано методи дослідження, сформульовано наукову новизну, теоретичне та практичне значення одержаних результатів, а також особистий внесок здобувача. Наведено перелік семінарів і конференцій, на яких було апробовано результати дисертації, охарактеризовано структуру роботи.

У першому розділі подаються необхідні теоретичні відомості з теорії напівгруп і теорії графів та наводяться відомі результати, які використовуються в дисертаційній роботі надалі. Для довільного бінарного відношення визначено шість типів ендотопізмів та описано напівгрупу ендотопізмів $Et(\alpha)$, множини напівсильних $HEt(\alpha)$, локально сильних $LEt(\alpha)$, квазісильних $QEt(\alpha)$ ендотопізмів, моноїд сильних ендотопізмів $SEt(\alpha)$ та групу автотопізмів $At(\alpha)$ відношення еквівалентності α. Встановлено зв'язок між відповідностями напівгрупи ендоморфізмів $End(\alpha)$ довільної еквівалентності α на множині X та напівгрупами ендотопізмів цього відношення, а саме: напівгрупа ендотопізмів $Et(\alpha) = \{ (\varphi,\psi) \in \Im(X) \times \Im(X) \mid (x,y) \in \alpha \Rightarrow (x\varphi, y\psi) \in \alpha \},$ моноїд сильних ендотопізмів $SEt(\alpha) = \{ (\varphi,\psi) \in \Im(X) \times \Im(X) \mid (x,y) \in \alpha \Leftrightarrow (x\varphi, y\psi) \in \alpha \}$ і група автотопізмів $At(\alpha) = \{ (\varphi,\psi) \in S(X) \times S(X) \mid (x,y) \in \alpha \Leftrightarrow (x\varphi, y\psi) \in \alpha \}$ відношення еквівалентності α є відповідностями напівгрупи ендоморфізмів тієї ж еквівалентності. Через $\Im(X)$ та $S(X)$ тут позначаються відповідно симетрична напівгрупа та симетрична група на множині X. Знайдено необхідні та достатні умови, за яких множини $HEt(\alpha)$, $LEt(\alpha)$ та $QEt(\alpha)$ є відповідностями напівгрупи $End(\alpha)$.

У другому розділі вивчаються відповідності напівгрупи ендоморфізмів довільного відношення еквівалентності. Визначено малу категорію K, множиною об'єктів якої є фактор-множина X/α множини X за еквівалентністю $\alpha \subseteq X \times X$, а морфізмами – будь-які відображення між класами еквівалентності з X/α. За допомогою конструкції $\Im(X/\alpha)wrK$ вінцевого добутку моноїда $\Im(X/\alpha)$ з малою категорією K описано зображення трьох відповідностей напівгрупи всіх ендоморфізмів довільного відношення еквівалентності, а саме: напівгрупи всіх ендотопізмів, моноїда всіх сильних ендотопізмів та групи автотопізмів довільної еквівалентності. За допомогою властивостей мінімального ідеалу напівгрупи ендотопізмів відношення еквівалентності отримано доведення визначеності відношень еквівалентності з точністю до ізоморфізму їх напівгрупами ендотопізмів. Крім того, побудовано всі ізоморфізми між напівгрупами ендотопізмів довільних еквівалентностей. Описано критеріальні умови регулярності та корегулярності відповідностей як напівгруп ендотопізмів відношення еквівалентності.

Визначено поняття *ендотипу* $Ettype(X,\rho)$ бінарного відношення $\rho \subseteq X \times X$ відносно його ендотопізмів як значення суми $Ettype(X,\rho)=\sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1}$, де s_i, $i \in \{1,\ldots,5\}$, приймають значення 0 або 1 та визначаються в такий спосіб: $s_i = 0$, якщо на i-тій позиції в послідовності включень $Et(\rho) \supseteq HEt(\rho) \supseteq LEt(\rho) \supseteq QEt(\rho) \supseteq SEt(\rho) \supseteq At(\rho)$ множини збігаються, $s_i = 1$ в іншому випадку. Отримано класифікацію всіх еквівалентностей за значенням їх ендотипу відносно ендотопізмів, а також класифікацію всіх строгих часткових еквівалентностей за значенням їх ендотипу відносно ендоморфізмів.

Визначено поняття *ендоспектра* $Etspec(X,\rho)$ бінарного відношення

$\rho \subseteq X \times X$, $|X| < \infty$, відносно його ендотопізмів як послідовності потужностей $(|Et(\rho)|, |HEt(\rho)|, |LEt(\rho)|, |QEt(\rho)|, |SEt(\rho)|, |At(\rho)|)$. Досліджено ендоспектр довільного відношення еквівалентності на скінченній множині.

У третьому розділі вивчається напівгрупа ендотопізмів ефективного і зв'язного бінарного відношення і моноїд сильних ендотопізмів симетричного бінарного відношення. Для бінарних відношень, які задовольняють умови ефективності та зв'язності, доведено, що напівгрупа ендотопізмів будь-якого такого відношення характеризує це бінарне відношення з точністю до ізотопізму або антиізотопізму. Для симетричних бінарних відношень певного класу отримано точне зображення моноїда сильних ендотопізмів такого відношення у вигляді вінцевого добутку моноїда сильних ін'єктивних ендоморфізмів і деякої малої категорії.

Ключові слова: напівгрупа ендоморфізмів, ендотопізм, сильний ендотопізм, відповідність, регулярність, вінцевий добуток, ізоморфізм, мала категорія, ендотип, ендоспектр, еквівалентність, ефективне відношення, зв'язне відношення, симетричне відношення.

АННОТАЦИЯ

Тоичкина Е. А. Полугруппы эндоморфизмов некоторых классов бинарных отношений. – Квалификационный научный труд на правах рукописи.

Диссертационная работа на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – алгебра и теория чисел. – ГУ „Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко” Министерства образования и науки Украины, Старобельск. – Институт математики Национальной академии наук Украины, Киев, 2018.

Диссертация посвящена исследованию абстрактных свойств полугрупп эндоморфизмов отношений эквивалентности, симметричных бинарных отношений, а также эффективных и связных бинарных отношений. Изучаются полугруппы эндотопизмов и соответствия полугрупп эндоморфизмов указанных реляционных систем.

Соответствием универсальной алгебры G называется любая подалгебра из декартового произведения $G \times G$.

Эндотопизмом бинарного отношения ρ, определенного на некотором множестве X, называется упорядоченная пара (φ, ψ) преобразований φ и ψ множества X, для которых из $(x, y) \in \rho$ следует $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ для $x, y \in X$. Множество всех эндотопизмов отношения ρ относительно операции покоординатного умножения образует полугруппу, которая называется *полугруппой эндотопизмов* этого отношения и обозначается через $Et(\rho)$.

Каждый эндотопизм (φ, ψ) при $\varphi = \psi$ определяет эндоморфизм отношения ρ, следовательно, полугруппа эндоморфизмов $End(\rho)$ отношения ρ с точностью до изоморфизма содержится в полугруппе эндотопизмов $Et(\rho)$.

Полугруппа S называется *регулярной*, если для любого $a \in S$ существует такой $x \in S,$ что $axa = a,$ и *корегулярной*, если $axa = xax = a.$

Бинарное отношение $\rho \subseteq A \times B$ называется *эффективным*, если $\{ x \in A \,|\, \exists y \in B : (x, y) \in \rho \} = A$ и $\{ y \in B \,|\, \exists x \in A : (x, y) \in \rho \} = B.$

Бинарное отношение $\rho \subseteq A \times B,$ где $|A| \geq 2,$ $|B| \geq 2,$ называется *связным*, если не существует непустых множеств A_1, A_2, B_1 і B_2, таких что $A_1 \bigcup A_2 = A,$ $B_1 \bigcup B_2 = B,$ $A_1 \bigcap A_2 = \varnothing,$ $B_1 \bigcap B_2 = \varnothing$ и $\rho \subseteq (A_1 \times B_1) \bigcup (A_2 \times B_2).$

Работа состоит из аннотации, введения, трех разделов, выводов, списка использованных источников и приложений. Во введении обоснована актуальность темы диссертации, определены цель, задачи, объект и предмет исследования, указаны методы исследования, сформулирована научная новизна, теоретическое и практическое значение полученных результатов, а также личный вклад автора. Перечислены семинары и конференции, на которых были апробированы результаты диссертации, охарактеризована структура работы.

В первом разделе приведены необходимые теоретические сведения из теории полугрупп и известные результаты, которые используются далее. Для произвольного бинарного отношения определены шесть типов эндотопизмов и описаны полугруппа эндотопизмов $Et(\alpha)$, множества полусильных $HEt(\alpha),$ локально сильных $LEt(\alpha)$, квазисильных $QEt(\alpha)$ эндотопизмов, моноид сильных эндотопизмов $SEt(\alpha)$ и группа автотопизмов $At(\alpha)$ отношения эквивалентности α. Установлено, что полугруппа эндотопизмов $Et(\alpha) = \{ (\varphi, \psi) \in \Im(X) \times \Im(X) \,|\, (x, y) \in \alpha \Rightarrow (x\varphi, y\psi) \in \alpha \},$ моноид сильных эндотопизмов $SEt(\alpha) = \{ (\varphi, \psi) \in \Im(X) \times \Im(X) \,|\, (x, y) \in \alpha \Leftrightarrow (x\varphi, y\psi) \in \alpha \}$ и группа автотопизмов $At(\alpha) = \{ (\varphi, \psi) \in S(X) \times S(X) \,|\, (x, y) \in \alpha \Leftrightarrow (x\varphi, y\psi) \in \alpha \}$ отношения эквивалентности α являются соответствиями полугруппы эндоморфизмов этой эквивалентности. Через $\Im(X)$ и $S(X)$ здесь обозначаются соответственно симметрическая полугруппа и симметрическая группа на множестве X. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых множества $HEt(\alpha)$, $LEt(\alpha)$ и $QEt(\alpha)$ являются соответствиями полугруппы $End(\alpha)$.

Во втором разделе изучаются соответствия полугруппы эндоморфизмов произвольного отношения эквивалентности. Определена малая категория K, множеством объектов которой является фактор-множество X/α множества X по эквивалентности $\alpha \subseteq X \times X$, а морфизмами – любые отображения между классами эквивалентности из X/α. При помощи конструкции $\Im(X/\alpha)wrK$ сплетения моноида $\Im(X/\alpha)$ с малой категорией K описаны представления трёх соответствий полугруппы всех эндоморфизмов произвольного отношения эквивалентности, а именно: полугруппы всех эндотопизмов, моноида всех сильных эндотопизмов и группы автотопизмов эквивалентности. В терминах понятия минимального идеала полугруппы эндотопизмов доказано, что произвольные отношения эквивалентности с точностью до изоморфизма определяются своими полугруппами эндотопизмов. Кроме того, построены все изоморфизмы между полугруппами эндотопизмов произвольных эквивалентностей. Описаны условия регулярности и корегулярности соответствий как полугрупп эндотопизмов отношения эквивалентности.

Определено понятие *эндотипа* $Ettype(X,\rho)$ бинарного отношения $\rho \subseteq X \times X$ относительно его эндотопизмов как значение суммы $Ettype(X,\rho) = \sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1}$, где s_i, $i \in \{1,\ldots,5\}$, принимают значения 0 или 1 и определяются следующим образом: $s_i = 0$, если на i-той позиции в цепи включений $Et(\rho) \supseteq HEt(\rho) \supseteq LEt(\rho) \supseteq QEt(\rho) \supseteq SEt(\rho) \supseteq At(\rho)$ множества равны, $s_i = 1$ в противном случае. Получена классификация всех эквивалентностей по значению их эндотипа относительно эндотопизмов, а также классификация всех строгих частичных эквивалентностей по значению их эндотипа относительно эндоморфизмов.

Определено понятие *эндоспектра* $Etspec(X,\rho)$ бинарного отношения $\rho \subseteq X \times X$, $|X| < \infty$, относительно его эндотопизмов как последовательности мощностей $(|Et(\rho)|,|HEt(\rho)|,|LEt(\rho)|,|QEt(\rho)|,|SEt(\rho)|,|At(\rho)|)$. Исследован эндоспектр произвольного отношения эквивалентности на конечном множестве.

В третьем разделе изучается полугруппа эндотопизмов эффективного и связного бинарного отношения, а также моноид сильных эндотопизмов симметричного бинарного отношения. Для бинарных отношений, которые удовлетворяют условию эффективности и связности, доказано, что полугруппа эндотопизмов любого такого отношения характеризует это бинарное отношение с точностью до изотопизма или атиизотопизма. Для симметричных бинарных отношений определённого класса получено точное представление моноида сильных эндотопизмов в виде сплетения моноида сильных инъективных эндоморфизмов и некоторой малой категории.

Ключевые слова: полугруппа эндоморфизмов, эндотопизм, сильный эндотопизм, соответствие, регулярность, сплетение, изоморфизм, малая категория, эндотип, эндоспектр, эквивалентность, эффективное отношение, связное отношение, симметричное отношение.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Жучок Ю. В. Полугруппы эндотопизмов отношения эквивалентности / Ю. В. Жучок, Е. А. Тоичкина // Матем. сб. – 2014. – Т. 205, № 5. – С. 37 – 54.
2. Жучок Ю. В. Соответствия полугруппы эндоморфизмов отношения эквивалентности / Ю. В. Жучок, Е. А. Тоичкина // Матем. заметки. – 2015. – Т. 97, № 2. – С. 217 – 230.
3. Тоичкина Е. А. Полугруппы эндотопизмов эффективных связных отношений / Е. А. Тоичкина // Укр. матем. журн. – 2016. – Т. 68, № 3. – С. 378 – 386.
4. Тоічкіна О. О. Ендоспектр відношень еквівалентності / О. О. Тоічкіна // Матем. студії. – 2016. – Т. 46, № 1. – С. 3 – 12.
5. Тоічкіна О. О. Ендотипи деяких часткових відношень еквівалентності / О. О. Тоічкіна // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. математика і інформатика. – 2017. – Вип. 31, № 2. – С. 122 – 128.
6. Тоічкіна О. О. Моноїд сильних ендотопізмів симетричного відношення / О. О. Тоічкіна // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. механіко-математична. – 2017. – Вип. 83. – С. 128 – 135.
7. Romanenko E. A. On endomorphism semigroups of the some relational systems / E. A. Romanenko // 8th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the memory of Professor V. M. Usenko : Abstracts. – Luhansk, 2011. – P. 273.
8. Romanenko E. The semigroup of endotopisms of the equivalence relation / E. Romanenko // International Mathematical Conference devoted to the 70th anniversary of V. V. Kirichenko : Abstracts. – Mykolaiv, 2012. – P. 170.
9. Romanenko E. A. Correspondences of the semigroup of endomorphisms of an equivalence relation / E. A. Romanenko // 9th International Algebraic Conference in Ukraine : Book of Abstracts. – L’viv, 2013. – P. 155.
10. Жучок Ю. В. Полугруппы эндотопизмов эквивалентности /

Ю. В. Жучок, Е. А. Тоичкина // XII Международная конференция „Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения”, посвященная 80-летию проф. В. Н. Латышева : материалы конференции. – Тула, 2014. – С. 87 – 89.

11. Toichkina E. A. The endotopism spectrum of an equivalence / E. A. Toichkina // Міжнародна конференція молодих математиків : тези доп. – Київ, 2015. – С. 24.
12. Toichkina O. O. The monoid of strong endotopisms of a symmetric relation / O. O. Toichkina // Book of abstracts of the conference „Groups and Actions: Geometry and Dynamics” dedicated to the memory of Professor Vitaly Sushchanskyy. – Kyiv, 2016. – P. 46.

ABSTRACT

Toichkina O. O. **–** Endomorphism semigroups of certain classes of binary relations. – A qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.06 – algebra and number theory. – Luhansk Taras Shevchenko National University of Ministry of Education and Science of Ukraine, Starobilsk. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to studying abstract properties of the endomorphism semigroups of equivalence relations, symmetric binary relations, effective and connected binary relations, and to the classification of these semigroups up to an isomorphism. Endotopism semigroups and correspondences of endomorphism semigroups of these relational systems are studied.

A *correspondence* of a universal algebra G is any subalgebra of the direct product $G \times G$.

An ordered pair (φ, ψ) of transformations φ and ψ of a set X is called an *endotopism* of a binary relation $\rho \subseteq X \times X$ if the condition $(x, y) \in \rho$ implies that $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ for all $x, y \in X$. The set of all endotopisms of a binary relation ρ with respect to the operation of componentwise multiplication forms a semigroup which is called the endotopism semigroup of this relation and it is denoted by $Et(\rho)$.

Every endotopism (φ, ψ), where $\varphi = \psi$, defines an endomorphism of the relation ρ. Thus, a semigroup of endomorphisms $End(\rho)$ of the relation ρ is contained in the semigroup of endotopisms $Et(\rho)$ up to an isomorphism.

A semigroup S is called *regular* if for any $a \in S$ there exists $x \in S$ such that $axa = a$, and S is *coregular* if $axa = xax = a$.

A binary relation $\rho \subseteq A \times B$ is called *effective* if

$\{x \in A \mid \exists y \in B : (x,y) \in \rho\} = A$ and $\{y \in B \mid \exists x \in A : (x,y) \in \rho\} = B.$

A binary relation $\rho \subseteq A \times B,$ where $|A| \geq 2, |B| \geq 2,$ is called *connected* if there are no non-empty sets A_1, A_2, B_1 and B_2 such that $A_1 \cup A_2 = A,$ $B_1 \cup B_2 = B,$ $A_1 \cap A_2 = \varnothing,$ $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ and $\rho \subseteq (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2).$

The thesis consists of an annotation, an introduction, three sections, conclusions, a list of publications on the topic of the thesis and additions. In the introduction the urgency of the topic of the dissertation is substantiated, the goal, objectives, object and subject of the study are determined, research methods are indicated. The scientific novelty and the theoretical and practical significance of the results are formulated as well as the author personal contribution is given. The list of seminars and conferences on which the results of the thesis have been represented is indicated, and the structure of the work is characterized.

The first section contains the necessary theoretical information from the theory of semigroups and known results that are used below. Six types of endotopisms of binary relation are defined. For an arbitrary equivalence relation an endotopism semigroup $Et(\alpha)$, a set $HEt(\alpha)$ of semi-strong endotopisms, a set $LEt(\alpha)$ of locally strong endotopisms, a set $QEt(\alpha)$ of quasi-strong endotopisms, a strong endotopism monoid $SEt(\alpha)$ and an autotopism group $At(\alpha)$ are described. It is established that the endotopism semigroup $Et(\alpha) = \{(\varphi,\psi) \in \Im(X) \times \Im(X) \mid (x,y) \in \alpha \Rightarrow (x\varphi, y\psi) \in \alpha\},$ the strong endotopism monoid $SEt(\alpha) = \{(\varphi,\psi) \in \Im(X) \times \Im(X) \mid (x,y) \in \alpha \Leftrightarrow (x\varphi, y\psi) \in \alpha\}$ and the autotopism group $At(\alpha) = \{(\varphi,\psi) \in S(X) \times S(X) \mid (x,y) \in \alpha \Leftrightarrow (x\varphi, y\psi) \in \alpha\}$ of an equivalence relation α are correspondences of the monoid of all endomorphisms of the equivalence relation. By $\Im(X)$ and $S(X)$ we denote the symmetric semigroup and the symmetric group on a set X respectively. Necessary and sufficient conditions under which sets $HEt(\alpha)$, $LEt(\alpha)$ and $QEt(\alpha)$ are correspondences of $End(\alpha)$ are found.

In the second section, correspondences of the endomorphism semigroup of an equivalence relation are studied. For an equivalence $\alpha \subseteq X \times X$ we define a small category K such that $ObK = X/\alpha$ and the morphism set $MorK$ consist of all mappings between any two classes of X/α. Using the construction $\Im(X/\alpha)wrK$ of the wreath product of a monoid $\Im(X/\alpha)$ with a small category K, faithful representations of three correspondences of the semigroup of all endomorphisms of an arbitrary equivalence relation are described, namely, of the semigroup of all endotopisms, of the monoid of all strong endotopisms, and, correspondingly, of the group of all autotopisms of the given equivalence. The regularity and coregularity conditions for endotopism semigroups of the given type are established.

The concept of an *endotype* $Ettype(X,\rho)$ of the binary relation $\rho \subseteq X \times X$ with respect to its endotopisms is defined. We put $Ettype(X,\rho) = \sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1}$, where s_i, $i \in \{1,\ldots,5\}$, take a value 0 or 1. In addition, $s_i = 0$, if at the i-th position in the chain of inclusions

$$Et(\rho) \supseteq HEt(\rho) \supseteq LEt(\rho) \supseteq QEt(\rho) \supseteq SEt(\rho) \supseteq At(\rho)$$

corresponding sets are coincide and $s_i = 1$ otherwise. A classification of all equivalences according to a value of their endotypes relative to endotopisms is obtained. All possible endotype values of an arbitrary strict partial equivalence with respect to its endomorphisms are found.

The concept of an *endospectrum* $Etspec(X,\rho)$ of the binary relation $\rho \subseteq X \times X$, $|X| < \infty$, with respect to its endotypes is defined as a sequence of powers $(|Et(\rho)|,|HEt(\rho)|,|LEt(\rho)|,|QEt(\rho)|,|SEt(\rho)|,|At(\rho)|)$. For an arbitrary equivalence relation on a finite set the endospectrum is studied.

In the third section, we study the semigroup of endotopisms of effective and connected binary relations and the monoid of strong endotopisms of a symmetric binary relation. For binary relations that satisfy the condition of efficiency and connectivity, it is proved that the endotopism semigroup of any such relation characterizes this binary relation up to an isotopism or an antiisotopism. For symmetric binary relations of a certain class, the faithful representation of the monoid of strong endotopisms is obtained.

LIST OF PUBLICATIONS ON THE TOPIC OF THE THESIS

1. Toichkina E. A. The endotopism semigroups of an equivalence relation / Yu. V. Zhuchok, E. A. Toichkina // Sbornik: Mathematics. – 2014. – Vol. 205, no. 5. – P. 646 – 662.
2. Toichkina E. A. Correspondences of the semigroup of endomorphisms of an equivalence relation / Yu. V. Zhuchok, E. A. Toichkina // Mathematical Notes. – 2015. – Vol. 97, no. 1-2. – P. 201 – 212.
3. Toichkina O. O. The endotopism spectrum of an equivalence / O. O. Toichkina // Matematychni Studii. – 2016. – Vol. 46, no. 1. – P. 3 – 12 (in Russian).
4. Toichkina E. A. Semigroups of endotopisms of the efficient connected relations / E. A. Toichkina // Ukrainian Mathematical Journal. – 2016. – Vol. 68, no. 3. – P. 422 – 432.
5. Toichkina O. O. Endotypes of some partial equivalence relations / O. O. Toichkina // Nauk. Visn. Uzhgorod. Univ. Series Mat. Inform. – 2017. – Vol. 31, № 2. – P. 122 – 128 (in Ukrainian).
6. Toichkina O. O. The monoid of strong endotopisms of a symmetric relation / O. O. Toichkina // Visn. of the Lviv Univ. Series Mech. Math. – 2017. – Vol. 83. – P. 128 – 135 (in Ukrainian).
7. Romanenko E. A. On endomorphism semigroups of the some relational systems / E. Romanenko // 8th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the memory of Professor V. M. Usenko : Abstracts. – Luhansk, 2011. – P. 273.
8. Romanenko E. The semigroup of endotopisms of the equivalence relation / E. Romanenko // International Mathematical Conference devoted to the 70th anniversary of V. V. Kirichenko : Abstracts. – Mykolaiv, 2012. – P. 170.

9. Romanenko E. A. Correspondences of the semigroup of endomorphisms of an equivalence relation / E. A. Romanenko // 9th International Algebraic Conference in Ukraine : Book of Abstracts. – L'viv, 2013. – P. 155.
10. Toichkina E. A. Endotopism semigroups of an equivalence / Yu. V. Zhuchok, E. A. Toichkina // Proc. XII Intern. Conf. Algebra and Number Theory: Modern Problems and Applications dedicated to 80th anniversary of Prof. V. N. Latyshev : Abstracts. – Tula, 2014. – P. 205 – 207.
11. Toichkina E. A. The endotopism spectrum of an equivalence / E. A. Toichkina // International Conference of Young Mathematicians : Abstracts. – Kyiv, 2015. – P. 24.
12. Toichkina O. O. The monoid of strong endotopisms of a symmetric relation / O. O. Toichkina // Book of abstracts of the conference „Groups and Actions: Geometry and Dynamics" dedicated to the memory of Professor Vitaly Sushchanskyy. – Kyiv, 2016. – P. 46.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Одним із основних напрямів дослідження в алгебрі є вивчення алгебраїчних систем за допомогою похідних структур, певним чином пов'язаних з цими системами. З одного боку, характеристики цих структур мають визначатися через властивості алгебраїчних систем, а з іншого – певною мірою характеризувати самі системи. Такий підхід надає нові можливості як для класифікації й пошуку характеристик заданої алгебраїчної системи, так і для поглибленого вивчення самих структур. Важливе місце серед похідних структур займають, передусім, напівгрупи перетворень [1], зокрема, напівгрупи ендоморфізмів алгебраїчних систем [2], напівгрупи ізотонних перетворень упорядкованих множин [3], напівгрупи неперервних перетворень топологічних просторів [4] тощо. Один із засновників теорії напівгруп Є. С. Ляпін [5], підкреслюючи значення напівгруп ендоморфізмів, зауважив, що встановлення взаємних зв'язків між властивостями напівгруп ендоморфізмів і властивостями самих множин, наділених деякою додатковою структурою, повинно стати одним із найважливіших напрямів розвитку теорії напівгруп. До того ж, цей напрям можна розглядати як природне узагальнення ідей Е. Галуа [6]. Справді, у багатьох випадках напівгрупа ендоморфізмів алгебраїчної системи надає суттєву інформацію про її загальні властивості та дозволяє вивчати будову цієї системи новою та більш зручною мовою. Вивченню властивостей саме напівгруп ендоморфізмів реляційних систем і присвячено цю дисертаційну роботу.

Напівгрупи ендоморфізмів алгебраїчних систем та їх властивості вивчалися різними авторами, наприклад, такими як Б. І. Плоткін, Б. М. Шайн, О. В. Міхальов, М. Петріч, В. С. Мазорчук, В. О. Молчанов, І. Б. Кожухов, В. М. Усенко, Б. В. Попов, П. Пуусемп. Значна увага при їх вивченні приділялася з'ясуванню ролі напівгруп ендоморфізмів для характеризації заданих алгебраїчних систем, дослідженню визначеності алгебраїчних систем їх напівгрупами ендоморфізмів, знаходженню їх абстрактних характеристик, опису точних зображень, вивченню комбінаторних властивостей напівгруп ендоморфізмів та іншим проблемам.

Один із напрямів у вивченні напівгруп ендоморфізмів бінарних відношень визначила теорема Л. М. Глускіна [3], згідно з якою будь-яке відношення квазіпорядку однозначно визначається напівгрупою ендоморфізмів цього відношення з точністю до ізоморфізму або антиізоморфізму. Подібні результати отримали Б. В. Попов [7] і Ю. М. Важенін [8] для класів рефлексивних бінарних відношень та Дж. Арауджо й Я. Конєчни [9] – для щільних I-відношень. Окрема увага приділялася дослідженню напівгрупи ендоморфізмів часткового порядку, зокрема, напівгрупи ендоморфізмів ланцюга. Так, А. Я. Айзенштат [10] було знайдено твірні та співвідношення напівгрупи ендоморфізмів скінченного ланцюга, а Б. М. Шайном [11] отримано умови, за яких елемент напівгрупи ендоморфізмів довільного ланцюга розкладається у добуток ідемпотентів. А. Умар і А. Лараджі [12] вивчали комбінаторні властивості напівгрупи ендоморфізмів часткового порядку, І. Б. Кожухов і В. І. Кім [13] – умови її регулярності та інші алгебраїчні властивості.

Певна увага в роботі приділена так званим сильним ендоморфізмам. Це поняття було запропоновано К. Чуліком [14] і вивчалося такими авторами як С. Фан і В. Лі, У. Кнауер, М. Ніпорте, У. А. Нуммерт, С. Арворн, С. Ліратанавалі. До перших структурних результатів про моноїди сильних ендоморфізмів належить теорема Кнауера–Ніпорте [15] про точне зображення моноїда сильних ендоморфізмів скінченного неорієнтованого графа без кратних ребер у вигляді вінцевого добутку групи підстановок і малої категорії. Пізніше було отримано точні зображення моноїда сильних ендоморфізмів нескінченного неорієнтованого графа без кратних ребер і n-однорідного гіперграфа заданого класу [16]. Крім цього, М. Боттчер і У. Кнауер розглядали інші типи ендоморфізмів графів: квазісильні, локально сильні та напівсильні, що разом з сильними і звичайними ендоморфізмами та автоморфізмами надало можливість класифікувати графи за значенням їх ендотипу, а також досліджувати ендоспектри скінченних графів [17].

Природним узагальненням поняття ендоморфізму є поняття відповідності алгебраїчної системи. Задача вивчення напівгруп відповідностей була визначена О. Г. Курошем [18] ще в кінці 60-х років минулого століття. Відповідності як підалгебри прямого добутку деякої алгебри досліджувалися в роботах А. А. Іскандера, Д. О. Бредіхіна, С. М. Гоберштейна, М. Ш. Цаленка, О. Г. Ганюшкіна, Т. В. Турки та інших. Зокрема, доведено, що будь-яка компактно-породжена решітка ізоморфна решітці всіх відповідностей деякої універсальної алгебри [19], а також досліджено зв'язки між решітками всіх підалгебр і решітками всіх відповідностей часткових універсальних алгебр [20]. Для ортодоксальних напівгруп досліджено проблему визначеності їх сполуками відповідностей [21]. Знайдено порядок напівгруп відповідностей циклічних, діедральних і елементарних абелевих скінченних груп [22], а також центр напівгрупи відповідностей скінченної групи [23].

Іншою структурою, що вивчається в дисертаційній роботі та тісно пов'язана з відповідностями, є напівгрупа ендотопізмів. Поняття ендотопізму було введене Б. В. Поповим [24] як узагальнення поняття ендоморфізму μ-арного відношення. За допомогою напівгруп ендотопізмів він охарактеризував з точністю до ізотопізму певні структури μ-арних відношень. У цьому напрямку актуальними є задачі дослідження реляційних систем, для яких напівгрупи ендотопізмів є відповідностями напівгрупи ендоморфізмів заданої системи, а також проблема класифікації з точністю до ізоморфізму напівгруп ендоморфізмів бінарних відношень та їх відповідностей.

Отже, вивчення властивостей напівгруп ендоморфізмів реляційних систем є дійсно важливим та актуальним напрямом у теорії напівгруп.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана за програмою НДР „Напівгрупи та структурні властивості дімоноїдів” (№ держреєстрації 0115U000199), що здійснювалася у Державному закладі „Луганський національний університет імені Тараса Шевченка” у 2015 – 2017 роках.

Мета й завдання дослідження. *Метою* дослідження є вивчення властивостей напівгруп ендоморфізмів заданих бінарних відношень.

Основними завданнями при цьому є:

- класифікація відповідностей напівгрупи ендоморфізмів відношення еквівалентності з точністю до ізоморфізму;
- опис умов регулярності заданих відповідностей напівгрупи ендоморфізмів довільної еквівалентності;
- знаходження ендотипу та ендоспектра відношення еквівалентності відносно його ендотопізмів;
- розв’язання проблеми визначеності ефективних зв’язних бінарних відношень їх напівгрупами ендотопізмів;
- характеризація моноїда сильних ендотопізмів симетричного бінарного відношення.

Об’єктом дослідження є відношення еквівалентності, ефективні зв’язні бінарні відношення та симетричні бінарні відношення.

Предметом дослідження є властивості ендоморфізмів зазначених об’єктів дисертаційної роботи.

Методи дослідження – загальноалгебраїчні з використанням основних методів теорії графів, теорії напівгруп та комбінаторного аналізу.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації автором отримано такі результати:

1. Описано точні зображення напівгрупи ендотопізмів, моноїда сильних ендотопізмів та групи автотопізмів відношення еквівалентності, а також моноїда сильних ендотопізмів симетричного відношення заданого

класу.

Отримані результати є такими, що розвивають та доповнюють описи М. Ніпорте та У. Кнауера, У. А. Нуммерта, Ю. В. Жучка та Є. О. Бондар про точні зображення моноїда сильних ендоморфізмів скінченних неорієнтовних графів без кратних ребер, узагальнених лексикографічних добутків графів і, відповідно, певних нескінченних графів та гіперграфів.

2. Знайдено умови регулярності для шести типів відповідностей напівгрупи ендоморфізмів відношення еквівалентності.

Установлені описи доповнюють та розвивають відомі результати А. Я. Айзенштат, В. І. Кіма, І. Б. Кожухова та В. А. Ярошевича про регулярність моноїдів ендоморфізмів злічених ланцюгів, напівгруп ендоморфізмів упорядкованих і квазівпорядкованих множин.

3. Класифіковано всі еквівалентності за значенням їх ендотипу відносно ендотопізмів. Знайдено ендотипи усіх строгих часткових еквівалентностей відносно ендоморфізмів. Досліджено ендоспектр відношення еквівалентності відносно його ендотопізмів.

Ці результати доповнюють результати У. Кнауера та М. Боттчера, Х. Хоу, К. Фана й Ю. Луо, В. Ванга та Х. Хоу про класифікацію деяких скінченних графів, узагальнених полігонів та графів N-призм з точністю до значення їх ендотипу.

4. Доведено визначеність ефективних зв’язних бінарних відношень їх напівгрупами ендотопізмів.

Отримані результати доповнюють результати Л. М. Глускіна, Л. Б. Шнепермана, Дж. Арауджо та Я. Конєчни про визначеність відношень квазіпорядку, рефлексивних бінарних відношень та щільних I-відношень їх напівгрупами ендоморфізмів, а також результат Б. В. Попова про визначеність квазівпорядкованих множин з точністю до ізоморфізму або антиізоморфізму їх напівгрупами ендотопізмів.

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Усі результати є новими й можуть бути використані при вивченні будови напівгруп ендоморфізмів реляційних систем різних класів, а також при викладанні спецкурсів з теорії напівгруп і теорії графів.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, отримано дисертанткою самостійно. У роботах, виконаних у співавторстві, здобувачці належить практична реалізація висунутих завдань та низка конкретних ідей. Зокрема, у статті [25] дисертанткою отримано опис умов регулярності відповідностей напівгрупи ендоморфізмів відношення еквівалентності, знайдено ендотипи тривіальних еквівалентностей; у статті [26] отримано точні зображення напівгрупи ендотопізмів, моноїда сильних ендотопізмів та групи автотопізмів еквівалентності в термінах конструкцій підпрямого та вінцевого добутків, за допомогою властивостей мінімального ідеалу розв’язано проблему визначеності відношень еквівалентності їх напівгрупами ендотопізмів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження оприлюднено на таких конференціях і семінарах:

- VIII Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (м. Луганськ, 5 – 12 липня 2011 р.);
- Міжнародній математичній конференції, присвяченій 70-річчю проф. В. В. Кириченка (м. Миколаїв, 13 – 19 червня 2012 р.);
- IX Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (м. Львів, 8 – 13 липня 2013 р.);
- XII Міжнародній конференції „Алгебра і теорія чисел: сучасні проблеми і застосування”, присвяченій 80-річчю проф. В. М. Латишева (м. Тула, 21 – 25 квітня 2014 р.);
- Міжнародній конференції молодих математиків (м. Київ, 3 – 6 червня 2015 р.);
- Міжнародній математичній конференції „Групи та дії: геометрія та динаміка”, присвяченій пам’яті проф. В. І. Сущанського (м. Київ, 19 – 22

грудня 2016 р.);

- Міжнародному семінарі з графів, напівгруп та напівгрупових дій (м. Берлін, 10 – 13 жовтня 2017 р.);
- алгебраїчному семінарі „Під кінець року” механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ, 26 грудня 2017 р., керівники – доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України Ю. А. Дрозд, доктор фізико-математичних наук, професор, старший науковий співробітник НДЧ В. В. Кириченко, доктор фізико-математичних наук, професор А. П. Петравчук);
- алгебраїчному семінарі Інституту математики НАН України (м. Київ, 13 березня 2018 р., керівник – доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України Ю. А. Дрозд);
- алгебраїчних семінарах кафедри алгебри та системного аналізу ДЗ „Луганський національний університет імені Тараса Шевченка” (м. Луганськ, 2012 – 2014 рр., м. Старобільськ, 2015 – 2017 рр., керівник – доктор фізико-математичних наук, професор А. В. Жучок).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 6 наукових статтях: з них 3 – у наукових фахових виданнях України [27; 29; 30] (1 з яких входить до міжнародної наукометричної бази даних Scopus [27]), 1 – у науковому періодичному виданні України [28], 2 – в іноземних наукових періодичних виданнях, що входять до міжнародної наукометричної бази даних Scopus [25; 26], та в 6-ти тезах міжнародних наукових конференцій [31 – 36].

Структура й обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з анотації, вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг дисертації складає 130 сторінок, з яких основний зміст роботи викладено на 101 сторінці. Список використаних джерел містить 77 найменувань та займає 8 сторінок. Додатки займають 3 сторінки і містять список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію її результатів.

Автор щиро вдячний своєму науковому керівнику Ю. В. Жучку за постановку задач, цінні поради та постійну увагу до роботи.

РОЗДІЛ 1

ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

У цьому розділі наведено основні позначення та необхідні теоретичні відомості з теорії напівгруп і теорії графів, які використовуються в дисертаційній роботі далі. Підрозділ 1.1 містить визначення основних понять та відомі результати, що стосуються бінарних відношень, графів та їх ендоморфізмів. Зокрема, розглядаються деякі узагальнення поняття ендоморфізму алгебрачної системи – відповідності та ендотопізми, а також вводиться конструкція вінцевого добутку моноїда й малої категорії, що надалі застосовується для опису певних зображень. Підрозділ 1.2 присвячено різним типам ендотопізмів довільних бінарних відношень. Визначаються поняття напівсильного, локально сильного, квазісильного та сильного ендотопізмів бінарних відношень, кожне з яких проілюстровано на прикладі. У підрозділі 1.3 зазначені типи ендотопізмів описано для довільного відношення еквівалентності. З'ясовано, що напівгрупа ендотопізмів, моноїд сильних ендотопізмів і група автотопізмів відношення еквівалентності є відповідностями напівгрупи ендоморфізмів цього ж відношення. Знайдено необхідні та достатні умови, за яких відповідностями є множини напівсильних, локально сильних і квазісильних ендотопізмів відношення еквівалентності.

1.1. Основні поняття

Усі поняття, що зустрічаються в роботі й не визначені в пункті 1.1, можна знайти, наприклад, у [37; 38].

1.1.1. Деякі поняття теорії напівгруп. Нехай S – довільна непорожня множина. *Бінарною операцією* на множині S називається відображення множини $S \times S$ усіх упорядкованих пар елементів з S в S. Бінарна операція $\circ$ на множині S називається *асоціативною*, якщо $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ для всіх a, b, c з S. Система $(S, \circ)$, яка складається з непорожньої множини S і бінарної асоціативної операції $\circ$, визначеній на ній, називається *напівгрупою*. *Порядком* напівгрупи S називається потужність множини S та позначається $|S|$.

Добутком AB *підмножин* A і B напівгрупи S називається множина всіх елементів виду ab, де $a \in A,\ b \in B.$ *Двобічним ідеалом* напівгрупи S називається така непорожня підмножина $A \subseteq S,$ що $SA \subseteq A,\ AS \subseteq A.$ Двобічний ідеал M напівгрупи S називається *мінімальним ідеалом*, якщо він не містить строго інших двобічних ідеалів напівгрупи S.

Елемент $e \in S$ називається *одиницею* напівгрупи S, якщо $ea = ae = a$ для всіх $a \in S$. Напівгрупа з одиницею називається *моноїдом.* Напівгрупа S, яка містить таку одиницю $e,$ що для будь-якого елемента $a \in S$ існує $y \in S$ такий, що $ya = ay = e,$ називається *групою*.

Бінарним відношенням на непорожній множині X називається підмножина ρ декартового добутку $X \times X$ множини X на себе. Відношення ρ^{-1}, *обернене* до відношення $\rho,$ визначається таким чином: $(a, b) \in \rho^{-1}$ тоді й тільки тоді, коли $(b, a) \in \rho.$

Для відношення $\rho \subseteq A \times B$ множини $Dom\,\rho = \{x \in A \,|\, \exists y \in B : (x, y) \in \rho\}$ і $\operatorname{Im}\rho = \{y \in B \,|\, \exists x \in A : (x, y) \in \rho\}$ називаються *областю визначення* і, відповідно, *областю значень* цього відношення.

Відношення $i_X = \{(a, a) \,|\, a \in X\}$ і $\omega_X = X \times X$ називаються відповідно *тотожним* і *універсальним* відношеннями на X. Бінарне відношення ρ на множині X називається *тривіальним*, якщо $\rho = i_X$ або $\rho = \omega_X$.

Говорять, що відношення $\rho \subseteq X \times X$ *симетричне*, якщо $\rho = \rho^{-1}$; *рефлексивне*, якщо $i_X \subseteq \rho$; *транзитивне*, якщо $\rho \circ \rho \subseteq \rho.$ Відношення ρ на множині X називається *відношенням еквівалентності*, якщо воно рефлексивне, симетричне й транзитивне, та *відношенням часткової еквівалентності* [39], якщо воно симетричне і транзитивне.

Будь-яке відношення еквівалентності ρ на X визначає *розбиття* множини X на класи еквівалентності, які попарно не перетинаються, а їх об'єднання дорівнює X. Множина всіх класів еквівалентності називається *фактор-множиною* та позначається X/ρ. Через a_ρ (або $\overline{a}$) позначається клас еквівалентності множини X за еквівалентністю ρ, який містить $a \in X$. Множину всіх еквівалентностей на X позначатимемо через $Eq(X)$.

Нехай A – непорожня підмножина множини X, α_A – еквівалентність на A. Множину всіх часткових еквівалентностей на множині A будемо позначати $Eq_A(X)$. Якщо $A \subset X$, то відношення $\alpha_A \in Eq_A(X)$ будемо називати *строгою частковою еквівалентністю* на X.

Для будь-яких непорожніх множин A і B через $Map(A,B)$ будемо позначати множину всіх відображень з множини A в B. Якщо $f \in Map(A,B)$, то через $im(f)$ позначатимемо множину значень відображення f. Потужність $|im(f)|$ називається *рангом* відображення f. *Образ* елемента $x \in A$ при відображенні f будемо позначати через xf.

Перетворенням множини X називається відображення X в себе. *Композицією* двох перетворень f і g множини X називається перетворення fg, визначене таким чином: $x(fg) = (xf)g$ для всіх $x \in X$. Множина всіх перетворень множини X відносно композиції перетворень утворює напівгрупу, яка називається *симетричною напівгрупою* та позначається як $\Im(X)$. Елементи з $\Im(X)$ зручно записувати за допомогою таблиць вигляду $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$, де у першому рядку знаходяться всі елементи множини X, а в другому – відповідні образи цих елементів.

Перетворення f множини X називається *тотожним*, якщо $xf = x$

для будь-якого $x \in X$. Через c_a позначатимемо *стале* перетворення множини X, таке що $Xc_a = \{a\}$, $a \in X$.

Якщо f – деяке перетворення множини X і $A \subseteq X$, то через $f|_A$ позначається *звуження* перетворення f на підмножину A та визначається умовою: $x f|_A = xf$ для будь-якого $x \in A$.

Підстановкою множини X називається бієктивне відображення множини X на себе. Множина всіх підстановок множини X з операцією композиції підстановок утворює групу, яка називається *симетричною групою* на X та позначається як $S(X)$.

Відображення φ напівгрупи S в S' називається *гомоморфізмом*, якщо $(ab)\varphi = (a\varphi)(b\varphi)$ для всіх $a, b \in S$. Область значення $S\varphi$ гомоморфізму φ є напівгрупою. Бієктивний гомоморфізм φ напівгрупи S в S' називається *ізоморфізмом* S в S'. У цьому випадку говорять, що напівгрупи S і S' ізоморфні й пишуть $S \cong S'$. Гомоморфізм напівгрупи S в себе називається *ендоморфізмом*, а ізоморфізм напівгрупи S на себе – *автоморфізмом.* Відображення φ напівгрупи S у напівгрупу S' називається *антигомоморфізмом*, якщо $(ab)\varphi = (b\varphi)(a\varphi)$. Ізоморфізм φ напівгрупи S у симетричну напівгрупу $\Im(X)$ називається *точним зображенням* напівгрупи S перетвореннями множини X .

1.1.2. Вінцевий добуток моноїда та категорії. Категорія C [40] складається з двох компонент:

а) деякий клас ObC, елементи якого називаються об’єктами;

б) для кожної пари об’єктів $a, b \in ObC$ задана множина (можливо, порожня) $Mor_C(a,b)$, елементи якої називаються морфізмами. При цьому виконуються аксіоми:

1) для будь-яких трьох об’єктів $a, b, c \in ObC$ визначене відображення

$$Mor_C(a,b) \times Mor_C(b,c) \to Mor_C(a,c),$$

яке називається *композицією морфізмів*. Композиція морфізмів $f \in Mor_C(a,b)$ і $g \in Mor_C(b,c)$ позначається через fg;

2) для будь-яких $f \in Mor_C(a,b)$, $g \in Mor_C(b,c)$, $h \in Mor_C(c,d)$ композиція відображень є асоціативною: $(fg)h = f(gh)$;

3) для кожного $a \in ObC$ існує тотожний морфізм $i_a \in Mor_C(a,a)$ такий, що для будь-яких $b,c \in ObC$ і будь-яких $f \in Mor_C(a,b)$, $g \in Mor_C(c,a)$ виконуються рівності: $i_a f = f$, $gi_a = g$.

Категорія C, в якій клас ObC є множиною, називається *малою*.

Визначимо *вінцевий добуток* моноїда з малою категорією. Нехай C – мала категорія, R – моноїд з одиницею 1, який діє справа на множині ObC об'єктів категорії C. Покладемо $M = \bigcup\limits_{a,b \in X} Mor_C(a,b)$ та позначимо через $Map(X,M)$ множину всіх відображень з X в M. Нехай

$$W = \left\{ (s,f) \mid s \in R,\ f \in Map(X,M),\ xf \in Mor_C(x,xs)\ \forall x \in X \right\}.$$

Для всіх $(r,f),(p,q) \in W$ визначена операція $(r,f)(p,q) = (rp, fq_r)$, де $x(fq_r) = (xf)((xr)q)$ для всіх $x \in X$ і $(xf)((xr)q)$ є композицією морфізмів у категорії C. Зауважимо, що композиція морфізмів у цій конструкції визначається зліва направо. Множина W з таким множенням є моноїдом з одиницею $(1,e)$, де відображення $e \in Map(X,M)$ таке, що $xe \in Mor_C(x,x)$ – тотожний морфізм для кожного об'єкта x в C. Моноїд W називається *вінцевим добутком моноїда R з малою категорією C* [41] і позначається через $RwrC$.

Зазначимо, що тут дається дуальна конструкція вінцевого добутку до визначеного в [41]. Це пояснюється вибором порядку множення відображень зліва направо, а не навпаки. Для розуміння проілюструємо множення елементів вінцевого добутку на прикладі.

Приклад 1.1. Нехай $ObC = \{X_1 = \{1,2\}, X_2 = \{3,4\}\}$ та для будь-яких $A,B \in ObC$ покладемо $Mor_C(A,B) = Map(A,B)$. Симетрична напівгрупа

$$\Im(ObC)=\left\{i_{ObC}, c_{X_1}, c_{X_2}, \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & X_1 \end{pmatrix}\right\}$$

діє справа на множині об'єктів ObC. Розглянемо вінцевий добуток $\Im(ObC)wrC$ та елементи $(c_{X_1}, f), \left(\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & X_1 \end{pmatrix}, g\right) \in \Im(ObC)wrC$:

$$(c_{X_1}, f)=\left(\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_1 & X_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}\right), \quad \left(\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & X_1 \end{pmatrix}, g\right)=\left(\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & X_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}\right).$$

За визначенням

$$(c_{X_1}, f)\left(\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & X_1 \end{pmatrix}, g\right)=\left(\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_1 & X_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & X_1 \end{pmatrix}, fg_{C_{X_1}}\right)=\left(c_{X_2}, fg_{C_{X_1}}\right),$$

де $fg_{C_{X_1}}$ – добуток відповідних морфізмів, $Af \in Mor_C\left(A, Ac_{X_1}\right)$, $Ag_{C_{X_1}} \in Mor_C\left(Ac_{X_1}, (Ac_{X_1})c_{X_1}\right)$ для будь-якого $A \in ObC$:

$$X_1\left(fg_{C_{X_1}}\right)=(X_1 f)\left((X_1 c_{X_1})g\right)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$X_2\left(fg_{C_{X_1}}\right)=(X_2 f)\left((X_2 c_{X_1})g\right)=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Отже, $(c_{X_1}, f)\left(\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & X_1 \end{pmatrix}, g\right)=\left(c_{X_2}, \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}\right).$

1.1.3. Напівгрупи ендоморфізмів алгебраїчних систем. Нехай X – довільна непорожня множина.

Ендоморфізмом відношення $\rho \subseteq X \times X$ називається перетворення $f \in \Im(X)$, для якого з умови $(x, y) \in \rho$ випливає, що $(xf, yf) \in \rho$ для $x, y \in X$. Множина всіх ендоморфізмів бінарного відношення ρ відносно операції композиції перетворень утворює напівгрупу, яка позначається через $End(\rho)$.

Ендоморфізм f відношення $\rho \subseteq X \times X$ називається *автоморфізмом*, якщо f є біекцією і f^{-1} – ендоморфізм бінарного відношення ρ.

Один з перших суттєвих результатів про напівгрупи ендоморфізмів реляційних систем належить Л. М. Глускіну, який отримав характеризацію відношень квазіпорядку.

Теорема 1.1. [3] *Нехай* $\rho \subseteq X \times X$ *– рефлексивне відношення,* $\sigma \subseteq Y \times Y$ *– відношення квазіпорядку. Напівгрупи* $End(X,\rho)$ *і* $End(Y,\sigma)$ *ізоморфні тоді й тільки тоді, коли реляційні системи* (X,ρ) *та* (Y,σ) *або* (X,ρ) *та* (Y,σ^{-1}) *ізоморфні.*

Далі в цьому напрямі було отримано численні результати для різних класів відношень, зокрема, Л. Б. Шнеперман [42] побудував приклад, який свідчив про те, що результат Л. М. Глускіна не можливо поширити на клас усіх рефлексивних бінарних відношень, при цьому ним було знайдено абстрактні характеристики напівгрупи всіх ендоморфізмів квазівпорядкованих множин і квазівпорядкованої напівгрупи всіх ендоморфізмів відношення квазіпорядку. Згодом Б. В. Попов [7] з класу R усіх рефлексивних бінарних відношень на множині Ω виділив підклас

$$R_1 = \left\{\rho \in R \,\middle|\, \exists \alpha,\beta,\gamma \in \Omega :\ (\alpha,\beta),(\alpha,\gamma),(\gamma,\alpha),(\beta,\gamma),(\gamma,\beta) \subset \rho \,\&\, (\beta,\alpha) \notin \rho\right\},$$

для якого отримав такий результат.

Теорема 1.2. [7] *Нехай* $\rho \in R_1$, *а* $\sigma \in R$. *Напівгрупи* $F_\mu(\rho)$ *та* $F_{\mu'}(\sigma)$ $(\mu \geq 3)$ *сукупності всіх ендоморфізмів рангу не вище* μ *та* μ' *бінарних відношень* ρ *та* σ *відповідно є ізоморфними тоді й тільки тоді, коли* $\mu = \mu'$ *і бінарне відношення* ρ *є ізоморфним бінарному відношенню* σ *або бінарному відношенню* σ^{-1}.

Б. В. Попов також описав усі ізоморфізми між напівгрупами $F_\mu(\rho)$ та $F_{\mu'}(\sigma)$, таким чином розв'язавши проблему визначеності рефлексивних бінарних відошень класу R_1 їх напівгрупами ендоморфізмів.

Цікавий результат отримали Дж. Арауджо і Я. Конєчни [9] для щільних I-відношень.

Нехай I – довільна непорожня множина індексів. I*-кортежем* елементів множини X називається відображення $f: I \to X$. Якщо I є скінченною множиною з $|I| = n,$ то вважається, що $I = \{1,2,\ldots,n\}$ та $f: I \to X$ позначається як $(1f, 2f, \ldots, nf)$. I*-відношенням* ρ на множині X називається будь-який набір I-кортежів елементів множини X. Якщо $|I| = n,$ I-відношення є n-арним відношенням на X для деякого індексу з множини I.

Нехай ρ – I-відношення на X. Через ρ^* позначається множина всіх таких відображень $f: I \to X$, що $\sigma f \notin \rho$ для кожного $\sigma \in S(I),$ де $S(I)$ – симетрична група на множині I.

Рефлексивне I-відношення ρ на X називається *щільним*, якщо воно задовольняє дві умови:

(i) для кожного ін’єктивного $f_1 \in \rho \cup \rho^*$ та кожного $f \in \rho$ існує такий $a \in End(X, \rho),$ що $f_1 a = f$;

(ii) існує ін’єктивний f_1 в $\rho.$

Тут $f_1 a: I \to X$ – це композиція $f_1: I \to X$ та $a: X \to X$, яка визначається зліва направо за формулою: $i(f_1 a) = (if_1)a$ для будь-якого $i \in I.$

Нехай ρ_1 та ρ_2 – I-відношення на X_1 та X_2 відповідно. Бієктивне відображення $g: X_1 \to X_2$ називається *напівізоморфізмом* реляційних систем (X_1, ρ_1) та $(X_2, \rho_2),$ а відповідні реляційні системи напівізоморфними, якщо існує така підстановка $\sigma \in S(I),$ що для всіх $f: I \to X_1$ виконується умова: $f \in \rho_1 \Leftrightarrow \sigma f g \in \rho_2.$

Теорема 1.3. [9] *Нехай ρ_1 та ρ_2 – щільні I-відношення на X_1 та X_2 відповідно. Моноїди ендоморфізмів $End(X_1, \rho_1)$ та $End(X_2, \rho_2)$ є ізоморфними тоді й тільки тоді, коли реляційні системи (X_1, ρ_1) та (X_2, ρ_2) є напівізоморфними.*

У роботі [43] побудовано приклад, який вказує на те, що нільпотентні бінарні відношення не визначаються їх моноїдами ендоморфізмів.

1.1.4. Ендоморфізми графів. Нехай V – непорожня множина, E – множина, яка складається з невпорядкованих пар різних елементів із V. Пара (V, E) називається *неорієнтованим графом* [44] з множиною вершин V та множиною ребер E. Множини вершин і ребер графа G позначаються також через $V(G)$ та $E(G)$ відповідно. Довільний неорієнтований граф будемо позначати як $G = (V, E)$.

Ребра, що з'єднують одну й ту ж саму пару вершин, називаються *кратними*. Ребра, які з'єднують вершину саму з собою, називаються петлями. Граф без ребер називається *0-графом*. Говорять, що дві вершини x і y графа є *суміжними*, якщо множина $\{x, y\}$ є ребром. Якщо $e = \{x, y\}$ – ребро, то вершина x і ребро e (вершина y і ребро e) називаються *інцидентними*. Далі під графом будемо розуміти довільний неорієнтований граф без кратних ребер.

Нехай $G = (V, E)$ – довільний граф. *Околом* $N(x)$ вершини $x \in V$ називається множина всіх вершин графа G, які є суміжними з вершиною x, тобто $N(x) = \{y \in V \mid \{x, y\} \in E\}$.

Нехай на G визначене відношення еквівалентності ν за формулою:

$$(x, y) \in \nu \Leftrightarrow N(x) = N(y).$$

Канонічним сильним фактор-графом G/ν [15] називається граф, вершинами якого є класи еквівалентності $x_\nu \in V/\nu$, а $(x_\nu, y_\nu) \in E(G/\nu)$ лише в тому випадку, коли $(x, y) \in E(G)$.

Узагальненим лексикографічним добутком $U((Y_u)_{u \in U})$ [15] графа U і графів $(Y_u)_{u \in U}$ називається такий граф, у якого

$$V(U((Y_u)_{u \in U})) = \{(u, y_u) \mid u \in U, y_u \in Y_u\},$$

а $\{(u, y_u), (v, y_v)\}$ є ребром у $U((Y_u)_{u \in U})$ тоді й лише тоді, коли $\{u, v\} \in E(U)$ або $u = v$ і $\{y_u, y_u'\} \in E(Y_u)$.

Твердження 1.4. [15] *Нехай* G *– довільний неорієнтований граф без* *кратних ребер,* $U = G/\nu$ *– його канонічний сильний фактор-граф,* Y_u, $u \in U$ *– 0-графи такі, що* $|Y_u| = |u|$ *для всіх* $u \in U$. *Тоді* $G \cong U((Y_u)_{u \in U})$.

Надалі вершини графа G ототожнюються з відповідними елементами узагальненого лексикографічного добутку $U((Y_u)_{u \in U})$.

Перетворення φ множини V називається *ендоморфізмом* графа G, якщо з $\{x, y\} \in E$ випливає, що $\{x\varphi, y\varphi\} \in E$ для $x, y \in V$. Множина всіх ендоморфізмів графа G відносно операції композиції перетворень утворює напівгрупу, яка позначається через $EndG$.

Ендоморфізм φ графа G називається *напівсильним*, якщо з $\{x\varphi, y\varphi\} \in E$ випливає, що існують такі $x' \in x\varphi\varphi^{-1}$, $y' \in y\varphi\varphi^{-1}$, що $\{x', y'\} \in E$. Множина всіх напівсильних ендоморфізмів графа G позначається як $HEndG$.

Ендоморфізм φ графа G називається *локально сильним*, якщо з $\{x\varphi, y\varphi\} \in E$ випливає, що для кожного $x' \in x\varphi\varphi^{-1}$ знайдеться такий $y' \in y\varphi\varphi^{-1}$, що $\{x', y'\} \in E$, і аналогічно для кожного прообразу $y' \in y\varphi\varphi^{-1}$. Множина всіх локально сильних ендоморфізмів графа G позначається як $LEndG$.

Ендоморфізм φ графа G називається *квазісильним*, якщо з $\{x\varphi, y\varphi\} \in E$ випливає, що існує такий $x' \in x\varphi\varphi^{-1}$, який є суміжним з кожним прообразом з $y' \in y\varphi\varphi^{-1}$, й аналогічно для деякого прообразу $y' \in y\varphi\varphi^{-1}$. Множина всіх квазісильних ендоморфізмів графа G позначається через $QEndG$.

Ендоморфізм φ графа G називається *сильним* ендоморфізмом, якщо з $\{x\varphi, y\varphi\} \in E$ випливає, що $\{x, y\} \in E$ для $x, y \in V$. Множина всіх сильних ендоморфізмів графа G відносно композиції перетворень утворює моноїд, який позначається через $SEndG$.

Підстановка φ множини V називається *автоморфізмом* графа G, якщо $\{x, y\} \in E$ тоді й лише тоді, коли $\{x\varphi, y\varphi\} \in E$ для $x, y \in V$. Множина всіх автоморфізмів графа G відносно операції композиції підстановок утворює групу, яка позначається через $AutG$.

Для довільного графа G виконується ланцюг включень:

$$EndG \supseteq HEndG \supseteq LEndG \supseteq QEndG \supseteq SEndG \supseteq AutG.$$

Для орієнтованих графів усі типи ендоморфізмів визначаються аналогічно.

Приклад 1.2. Розглянемо приклади ендоморфізмів кожного типу для відношення

$$\rho = \{(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b),(c,d),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(e,f),$$
$(f,e)(f,f)\}$, визначеного на множині $X = \{a,b,c,d,e,f\}$.

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ c & c & c & b & c & c \end{pmatrix} \in End(X,\rho) \setminus HEnd(X,\rho),$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ c & c & b & b & e & e \end{pmatrix} \in HEnd(X,\rho) \setminus LEnd(X,\rho),$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & b & b & b & d & d \end{pmatrix} \in LEnd(X,\rho) \setminus QEnd(X,\rho),$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & b & c & d & e & e \end{pmatrix} \in QEnd(X,\rho) \setminus SEnd(X,\rho),$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a & b & c & d & e & e \end{pmatrix} \in SEnd(X,\rho) \setminus Aut(X,\rho),$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a & b & c & d & f & e \end{pmatrix} \in Aut(X,\rho).$$

Дослідженню напівгруп ендоморфізмів графів присвячено роботи таких учених, як В. О. Молчанов [45 – 47], К. В. Хворостухіна [48], М. Боттчер і У. Кнауер [17], С. Фан [49] та інших. Напівсильні гомоморфізми, відомі як повні гомоморфізми, досліджувалися в роботах П. Хелла [50] та Г. Сабідуссі [51], та як частково суміжні гомоморфізми – у роботах Ст. Анто та Е. Олару [52]. Сюр'єктивні локально сильні гомоморфізми зустрічаються в працях А. Пультра та Трнкової [53]. Сильні гомоморфізми було вперше визначено та досліджено К. Чуліком [14], а пізніше й іншими математиками [54; 55]. Зокрема, У. Кнауер та М. Ніпорте отримали такий результат.

Теорема 1.5. [15] *Нехай* $G = U\left(\left(Y_u\right)_{u\in U}\right)$ *– довільний скінченний неорієнтований граф без кратних ребер, де* K *– мала категорія, об'єктами якої є множина* $ObK = \{Y_u | u \in U\}$, *а морфізмами* $MorK = \bigcup_{u,v\in U} Mor_K\left(Y_u, Y_v\right)$. *Тоді*

$$SEndG \cong AutUwrK.$$

При цьому в [15] зазначено, що теорема 1.5 не виконується для довільних нескінченних неорієнтованих графів без кратних ребер. Ю. В. Жучок та Є. О. Бондар у [16] визначили клас нескінченних неорієнтованих графів без кратних ребер та показали, що моноїд усіх сильних ендоморфізмів будь-якого графа заданого класу може бути точно зображений як вінцевий добуток певного моноїда перетворень і малої категорії. Е. Вілкейт [56] та С. Фан [57] описали графи, в яких напівгрупи сильних ендоморфізмів є регулярними моноїдами. У роботах В.-М. Лі [58] вивчалися відношення Гріна на моноїді сильних ендоморфізмів графів та деякі їх комбінаторні властивості.

Поняття квазісильного гомоморфізму визначили М. Боттчер та У. Кнауер [17], що разом із зазначеними напівсильними, локально сильними, сильними ендоморфізмами, а також звичайними ендоморфізмами та автоморфізмами дозволило отримати класифікацію деяких класів графів за значенням їх ендотипу [59 – 62] та дослідити спектр скінченних неорієнтованих графів відносно їх ендоморфізмів [17].

1.1.5. Деякі узагальнення ендоморфізму. Природним узагальненням поняття ендоморфізму є поняття відповідності алгебраїчної системи.

Нехай G – універсальна алгебра. Якщо підалгебру з $G \times G$ розглядати як бінарне відношення на множині G, то множина усіх підалгебр з $G \times G$ утворює напівгрупу відносно операції композиції бінарних відношень. Елементи цієї напівгрупи називаються *відповідностями* алгебри G [18].

Це поняття визначив О. Г. Курош та поставив питання про вивчення структур відповідностей універсальних алгебр. Перші та найбільш відомі результати в цьому напрямі отримав А. А. Іскандер, який вивчав структури відповідностей універсальних та часткових універсальних алгебр.

Нехай S – повна структура і $a, a_i \in S$, *де* $i \in I$. Сім'я a_i, $i \in I$, називається покриттям елемента a, якщо $a \leq \bigvee_{i \in I} a_i$. Через $\vee$ позначається об'єднання в структурі S. Елемент a структури S називається *компактним*, якщо з будь-якого його покриття можна виділити скінченне покриття. Структура S називається *компактно-породженою* [19], якщо кожний її елемент є об'єднанням компактних елементів.

Теорема 1.6. [19] *Структура S тоді й тільки тоді є ізоморфною структурі всіх відповідностей деякої алгебри, а її автоморфізм f, квадрат якого є тотожним автоморфізмом, реалізується переходом до протилежної відповідності, коли S є компактно-породженою.*

Нехай S – компактно-породжена структура. Через 0 позначається нуль цієї структури, а через G – або напівструктура всіх її компактних елементів, або напівструктура всіх її ненульових компактних елементів, за умови, що перетин усіх таких елементів дорівнює 0. Нехай F та H – напівструктури. Через π_1 (π_2) позначається проектування прямого добутку $F \times H$ на F (відповідно H). Через $\wp(A)$ позначається множина всіх підалгебр часткової алгебри A, а через $\wp(A, B)$ – множина всіх відповідностей часткової алгебри A з частковою алгеброю B. Наступна теорема описує зв'язки між структурами всіх підалгебр і структурами всіх відповідностей часткових універсальних алгебр.

Теорема 1.7. [20] *Нехай задані три структури S_1, S_2 та S_3, підструктури L_i і автоморфізм f_i структури S_i, де $i = 1, 2$, квадрат* *якого є тотожним. Умови, які є необхідними та достатніми для того, аби існували такі однотипні часткові алгебри* A_1 *та* A_2, *що* $L_i \cong \wp(A_i)$, $S_i \cong \wp(A_i, A_i)$, $S_3 \cong \wp(A_1, A_2)$, *до того ж* L_i *переходить у підструктуру всіх діагональних відповідностей при ізоморфізмі* $S_i \cong \wp(A_i, A_i)$, $i = 1, 2$, *а* f_1, f_2 *реалізуються переходом до протилежних відповідностей, є такими:*

1) S_1, S_2 *та* S_3 *є компактно-породженими;*

2) $L_i \bigcup \{0_i\}$ *– головний ідеал структури* S_i, f_i *є тотожним на* L_i, $i = 1, 2$*;*

3) існують такі епіморфізми $\nu_i : G_i \to (G_i \cap L_i) \times (G_i \cap L_i)$, $i = 1, 2$, $\nu_3 : G_3 \to (G_1 \cap L_1) \times (G_2 \cap L_2)$, *що* $(g_i f_i)\nu_i \pi_i = g_i \nu_i \pi_2$, $g_i \in G_i$, $g_i \nu_i \pi_i = g_i$, $g_i \in G_i \cap L_i$, $i = 1, 2$*;*

4) якщо $0_1 \in G_1$ $(0_2 \in G_2)$, *то* $0_1 \in L_1$ $(0_2 \in L_2)$*;*

5) якщо g, g' *– мінімальні елементи множини* $G_1 \cap L_1$ $(G_2 \cap L_2)$ *і* $(g, g)\nu_1^{-1}$, $(g', g')\nu_1^{-1}$ $\left((g, g)\nu_2^{-1}, (g', g')\nu_2^{-1}\right)$ *є одноелементними, то й* $(g, g')\nu_2^{-1} \times \left((g, g')\nu_1^{-1}\right)$ *є одноелементним. Більш того, якщо* $\bar{g}$ *– мінімальний елемент множини* $G_2 \cap L_2 (G_1 \cap L_1)$ *та* $(\bar{g}, \bar{g})\nu_2^{-1}\left((\bar{g}, \bar{g})\nu_1^{-1}\right)$ *є одноелементним, то й* $(g, \bar{g})\nu_3^{-1}\left((\bar{g}, g)\nu_3^{-1}\right)$ *є одноелементним.*

Проблемі визначеності нільнапівгруп, інверсних напівгруп і ортодоксальних напівгруп їх сполуками відповідностей присвячено роботи Д. О. Бредіхіна [63] та С. М. Гоберштейна [21]. Напівгрупи відповідностей різних класів скінченних груп вивчали О. Г. Ганюшкін та Т. В. Турка [22]. Для циклічних, діедральних та елементарних абелевих скінченних груп було визначено порядок відповідностей їх напівгруп ендоморфізмів, розглянуто будову ідемпотентів та решітки ідеалів, а також описано відношення Гріна [64].

Іншим узагальненням ендоморфізму для реляційних систем є поняття ендотопізму, введене Б. В. Поповим [24] на випадок μ-арних відношень.

Сукупність перетворень $(\varphi_i)_{i\in I}$, $|I|=\mu$, множини X називається *ендотопізмом* μ-арного відношення $\rho\subseteq X^{\mu}$, якщо з умови $(x_1,x_2,...,x_\mu)\in\rho$ випливає $(x_1\varphi_1,x_2\varphi_2,...,x_\mu\varphi_\mu)\in\rho$ для всіх $x_1,x_2,...,x_\mu\in X$.

У [24] досліджується зв'язок μ-арного відношення $\rho\subseteq\prod_{i\in I}X_i$, визначеного між елементами сім'ї $\{X_i \mid i\in I, |I|=\mu\geq 2, |X_i|\geq 2\}$ підмножин множини X, з його напівгрупою ендотопізмів $G(\rho)$. Кожному μ-арному відношенню ρ ставиться у відповідність певна ρ_μ-структура $A_\varepsilon=(A,\varepsilon)$: множина A з сім'єю еквівалентностей $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ на ній, які визначаються таким чином: $(x_1,x_2,...,x_\mu)\varepsilon_i(y_1,y_2,...,y_\mu)\Leftrightarrow x_i=y_i$ для всіх $(x_1,x_2,...,x_\mu)$, $(y_1,y_2,...,y_\mu)\in\rho$. Для двох певних класів Γ та Γ^* ρ_μ-структур доведено їх визначеність з точністю до ізоморфізму відповідними напівгрупами ендоморфізмів, у зв'язку з чим виокремлюється досить широкий клас μ-арних відношень, для яких розв'язано проблему визначеності напівгрупами ендотопізмів цих відношень.

Теорема 1.8. [24] *Нехай ρ та ρ' – μ-арні відношення, $\rho_\varepsilon,\rho'_{\varepsilon'}\in\Gamma$ або $\rho_\varepsilon,\rho'_{\varepsilon'}\in\Gamma^*$. Напівгрупи ендотопізмів $G(\rho)$ та $G(\rho')$ ізоморфні тоді й тільки тоді, коли μ-арні відношення ρ та ρ' ізотопні.*

1.2. Бінарні відношення та їх ендотопізми

У цьому підрозділі визначено шість типів ендотопізмів бінарних відношень. Як приклад, наведено необхідні та достатні умови існування напівгруп ендотопізмів тотожного й універсального відношень, а також ендотопізми кожного типу.

Нехай X – довільна непорожня множина, ρ – бінарне відношення на X.

Упорядкована пара (φ,ψ) перетворень φ і ψ множини X називається *ендотопізмом* відношення ρ, якщо з $(x,y)\in\rho$ випливає $(x\varphi,y\psi)\in\rho$ для $x,y\in X$. Множина всіх ендотопізмів бінарного відношення ρ відносно операції покоординатного множення утворює напівгрупу, яку позначатимемо через $Et(X,\rho)$.

Ендотопізм (φ,ψ) відношення $\rho\subseteq X\times X$ називатимемо *напівсильним ендотопізмом*, якщо з $(x\varphi,y\psi)\in\rho$ випливає, що існують такі $x'\in x\varphi\varphi^{-1}$, $y'\in y\psi\psi^{-1}$, що $(x',y')\in\rho.$ Множину всіх напівсильних ендотопізмів відношення ρ позначимо через $HEt(X,\rho)$.

Ендотопізм (φ,ψ) відношення $\rho\subseteq X\times X$ назвемо *локально сильним ендотопізмом,* якщо з $(x\varphi,y\psi)\in\rho$ випливає, що для кожного $x'\in x\varphi\varphi^{-1}$ знайдеться такий $y'\in y\psi\psi^{-1}$, що $(x',y')\in\rho,$ й аналогічно для кожного прообразу $y'\in y\psi\psi^{-1}$. Множину всіх локально сильних ендотопізмів відношення ρ будемо позначати як $LEt(X,\rho)$.

Назвемо ендотопізм (φ,ψ) відношення $\rho\subseteq X\times X$ *квазісильним ендотопізмом*, якщо з $(x\varphi,y\psi)\in\rho$ випливає, що існує такий $x'\in x\varphi\varphi^{-1}$, який знаходиться у відношенні ρ з кожним прообразом з $y'\in y\psi\psi^{-1}$, й аналогічно для відповідного прообразу $y'\in y\psi\psi^{-1}$. Позначимо множину всіх квазісильних ендотопізмів бінарного відношення ρ через $QEt(X,\rho)$.

Називатимемо ендотопізм (φ,ψ) відношення $\rho\subseteq X\times X$ *сильним ендотопізмом,* якщо з $(x\varphi,y\psi)\in\rho$ випливає, що $(x,y)\in\rho$ для $x,y\in X$. Множина всіх сильних ендотопізмів відношення ρ відносно операції покоординатного множення утворює моноїд, який позначатимемо як $SEt(X,\rho)$.

Упорядкована пара (φ,ψ) підстановок φ і ψ множини X називається *автотопізмом* відношення $\rho\subseteq X\times X$, якщо $(x,y)\in\rho$ тоді й лише тоді, коли $(x\varphi,y\psi)\in\rho$ для $x,y\in X$. Множина всіх автотопізмів відношення ρ відносно операції покоординатного множення утворює групу, яку будемо позначати через $At(X,\rho)$.

Якщо відомо, на якій множині розглядається ендотопізм бінарного відношення $\rho \subseteq X \times X$, для зручності надалі напівгрупу ендотопізмів $Et(X,\rho)$ будемо позначати через $Et(\rho)$. Відповідні позначення стосуються й множин ендотопізмів інших типів.

Як бачимо, для довільного бінарного відношення ρ на множині X виконується такий ланцюг включень:

$$Et(\rho) \supseteq HEt(\rho) \supseteq LEt(\rho) \supseteq QEt(\rho) \supseteq SEt(\rho) \supseteq At(\rho).$$

Зазначимо, що множини $HEt(X,\rho)$, $LEt(X,\rho)$ і $QEt(X,\rho)$ у загальному випадку не є напівгрупами. Зрозуміло також, що коли для ендотопізму (φ,ψ) відношення ρ виконується рівність $\varphi = \psi$, то отримуємо відповідне поняття ендоморфізму [3].

Розглянемо приклади напівгруп ендотопізмів тривіальних бінарних відношень. Нагадаємо, що через $\Im(X)$ ($S(X)$) позначається симетрична напівгрупа (відповідно симетрична група) на множині X, а через i_X та ω_X відповідно *тотожне* й *універсальне* відношення на X.

Приклад 1.3. Упорядкована пара (τ,σ) перетворень множини X є ендотопізмом відношення $\rho = i_X$ тоді й тільки тоді, коли $\tau = \sigma$. У цьому випадку

$$Et(\rho) = i_{End(\rho)} = i_{\Im(X)}, \quad At(\rho) = i_{Aut(\rho)} = i_{S(X)}.$$

Приклад 1.4. Візьмемо $\rho = \omega_X$. Тоді будь-яка впорядкована пара (τ,σ) перетворень множини X є ендотопізмом відношення ρ. Отже,

$$Et(\rho) = \omega_{\Im(X)}, \quad At(\rho) = \omega_{S(X)}.$$

Приклад 1.5. Нехай $\rho = \omega_X \setminus i_X$. Упорядковану пару (τ,σ) перетворень множини X будемо називати *ін'єктивною*, якщо з $a\tau = b\sigma$ випливає $a = b$ для $a,b \in X$. Зазначимо, що при ін'єктивних τ і σ пара (τ,σ) не завжди є ін'єктивною, а також ін'єктивність пари (τ,σ) не вимагає ін'єктивності перетворень τ і σ. Отже, $(\tau,\sigma)\in Et(\rho)$ тоді й лише тоді, коли пара (τ,σ) є ін'єктивною.

Приклад 1.6. Розглянемо приклади ендотопізмів кожного з шести типів для бінарного відношення $\rho=\{(a,a),(a,c),(c,b),(d,a),(a,d),(d,d)\}$, визначеного на множині $X=\{a,b,c,d\}$.

$$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & a \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & d & a \end{pmatrix}\right)\in Et(\rho)\setminus HEt(\rho),$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & c & a \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & b & d & a \end{pmatrix}\right)\in HEt(\rho)\setminus LEt(\rho),$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & b & c & c \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & b & b & b \end{pmatrix}\right)\in LEt(\rho)\setminus QEt(\rho),$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & b & a & c \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & b & b \end{pmatrix}\right)\in QEt(\rho)\setminus SEt(\rho),$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & b & c & d \end{pmatrix}\right)\in SEt(\rho)\setminus At(\rho),$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & b & c & a \end{pmatrix}\right)\in At(\rho).$$

1.3. Ендотопізми відношень еквівалентності

У цьому підрозділі вивчаються ендотопізми шести типів для довільного відношення еквівалентності. Описано необхідні та достатні умови існування всіх таких ендотопізмів. Установлено зв'язок відповідностей напівгрупи ендоморфізмів довільної еквівалентності з напівгрупою ендотопізмів цієї еквівалентності. Доведено, що такими відповідностями є напівгрупа ендотопізмів, моноїд сильних ендотопізмів та група автотопізмів цього відношення. Знайдено необхідні та достатні умови, за яких множини трьох інших типів ендотопізмів відношень еквівалентності є відповідностями напівгрупи ендоморфізмів відповідних відношень.

Нехай X – довільна непорожня множина, $\alpha \in Eq(X)$ – довільна еквівалентність на X. Нагадаємо, що класи еквівалентності з X/α позначаються через $\overline{x}$, якщо містять $x \in X$, або великими літерами латинського алфавіту.

Ендотопізми відношення еквівалентності описує така лема.

Лема 1.9. *Пара* (τ,σ) *перетворень множини* X *є ендотопізмом відношення еквівалентності* $\alpha \in Eq(X)$ *тоді й тільки тоді, коли для кожного* $A \in X/\alpha$ *існує такий* $B \in X/\alpha$, *що* $A\tau \subseteq B$ *і* $A\sigma \subseteq B$.

Доведення. Нехай $(\tau,\sigma) \in Et(\alpha)$, тоді для будь-якого $A \in X/\alpha$ і будь-яких $x, y \in A$ з умови $(x, y) \in \alpha$ випливає $(x\tau, y\sigma) \in \alpha$, звідки $x\tau, y\sigma \in B$ для деякого $B \in X/\alpha$. Завдяки довільності $x, y \in A$ маємо: $A\tau \subseteq B$ і $A\sigma \subseteq B$.

Припустимо, що для перетворень $\tau,\sigma \in \mathfrak{I}(X)$ і кожного $A \in X/\alpha$ існує такий $B \in X/\alpha$, що $A\tau \subseteq B$ і $A\sigma \subseteq B$. Тоді для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $(x, y) \in \alpha$, випливає $x, y \in \overline{x}$, звідки за припущенням $x\tau, y\sigma \in B$ для деякого $B \in X/\alpha$. Отже, $(x\tau, y\sigma) \in \alpha$ і, як наслідок, $(\tau,\sigma) \in Et(\alpha)$. □

Лема 1.10. *Пара* (τ,σ) *підстановок множини* X *є автотопізмом відношення еквівалентності* $\alpha \in Eq(X)$ *тоді й тільки тоді, коли для кожного* $A \in X/\alpha$ *існує такий* $B \in X/\alpha$, *що* $A\tau = B$ *і* $A\sigma = B$.

Доведення є очевидним. □

Лема 1.11. *Ендотопізм* (τ,σ) *відношення еквівалентності* $\alpha \in Eq(X)$ *є сильним ендотопізмом тоді й тільки тоді, коли*

$$\tau^* : X/\alpha \to X/\alpha : \overline{a} \mapsto \overline{a\tau}$$

є ін'єктивним перетворенням.

Доведення. Нехай $(\tau,\sigma) \in SEt(\alpha)$ і $\tau^* \in \mathfrak{I}(X/\alpha)$ таке, що $\overline{a}\tau^* = \overline{a\tau}$. За лемою 1.9, τ^* є коректно визначеним перетворенням. Припустимо, що

$\overline{a}\tau^* = \overline{b}\tau^*$ для деяких різних $\overline{a}, \overline{b} \in X/\alpha$. Тоді $(a\tau, b\sigma) \in \alpha$, однак $(a,b) \notin \alpha$, а це суперечить тому, що (τ,σ) – сильний ендотопізм. Отже, τ^* – ін'єктивне перетворення фактор-множини X/α. Обернене твердження є очевидним.□

Оскільки ендотопізмом відношення $\rho \subseteq X \times X$ є упорядкована пара перетворень множини X, то множину $Et(\rho)$ можна розглядати як бінарне відношення на симетричній напівгрупі $\Im(X)$.

Для бінарного відношення ρ на множині X множини

$$pr_1\rho = \{x \in X \mid \exists y \in X : (x,y) \in \rho\}, \quad pr_2\rho = \{y \in X \mid \exists x \in X : (x,y) \in \rho\}$$

називаються відповідно *першою* та *другою проекціями* відношення ρ на множники декартового добутку $X \times X$.

Використовуючи будову ендоморфізмів відношення еквівалентності [65] і лему 1.9, отримуємо, що для будь-якого відношення еквівалентності α на множині X виконуються включення:

$$pr_1Et(\alpha) \subseteq End(\alpha), \quad pr_2Et(\alpha) \subseteq End(\alpha).$$

Зрозуміло, що подібні включення виконуються й для моноїда сильних ендотопізмів і групи автотопізмів відношення еквівалентності.

З означення відповідності в розумінні О. Г. Куроша, леми 1.9 та попередніх міркувань, як наслідок, отримуємо такий результат.

Наслідок 1.12. *Для будь-якої еквівалентності* $\alpha \in Eq(X)$ *напівгрупа* $Et(\alpha)$, *моноїд* $SEt(\alpha)$ *та група* $At(\alpha)$ *є відповідностями напівгрупи* $End(\alpha)$, *тобто підалгебрами прямого добутку* $End(\alpha) \times End(\alpha)$.

Зазначимо, що це твердження не виконується для довільного бінарного відношення. Це випливає з такого прикладу.

Приклад 1.7. Нехай X – довільна непорожня множина, $|X| \geq 2$ і $\rho = (X \times X) \setminus \{(x,x)\}$, де $x \in X$. Упорядкована пара (τ,σ) таких перетворень множини X , що

$$X\tau = \{x\} \text{ і } X\sigma = \{a\},\ a \in X,\ a \neq x,$$

є ендотопізмом бінарного відношення ρ, при цьому $\tau \notin End(\rho)$. Отже,

$Et(\rho)$ не є відповідністю напівгрупи $End(\rho)$.

Лема 1.13. *Ендотопізм (τ,σ) відношення еквівалентності $\alpha \in Eq(X)$ є квазісильним ендотопізмом тоді й тільки тоді, коли (τ,σ) – сильний ендотопізм.*

Доведення. Нехай $(\tau,\sigma)\in QEt(\alpha)$ і $(a\tau,b\sigma)\in\alpha$ для деяких $a,b\in X$. Оскільки (τ,σ) – квазісильний ендотопізм, то знайдеться такий $a'\in a\tau\tau^{-1}$, що $(a',b')\in\alpha$ для будь-якого $b'\in b\sigma\sigma^{-1}$. Зрозуміло, що в такому випадку для всіх $x\in a\tau\tau^{-1}$, $y\in b\sigma\sigma^{-1}$ маємо $(x,y)\in\alpha$, зокрема, і для $x=a$, $y=b$. Отже, $(\tau,\sigma)\in SEt(\alpha)$. Обернене твердження є очевидним. □

Наслідок 1.14. *Для будь-якого відношення $\alpha\in Eq(X)$ виконується рівність*

$$QEt(\alpha)=SEt(\alpha).$$

Надалі розглядатимемо лише напівгрупу $SEt(\alpha)$, розуміючи, що результати, отримані для $SEt(\alpha)$, виконуються і для напівгрупи $QEt(\alpha)$.

Лема 1.15. *Ендотопізм (τ,σ) відношення еквівалентності $\alpha\in Eq(X)$ є локально сильним ендотопізмом тоді й лише тоді, коли $B\tau=C\tau$ і $B\sigma=C\sigma$ для будь-якого $A\in(X/\alpha)\tau^{*}$ і для всіх $B,C\in A\tau^{*-1}$.*

Доведення. Нехай $(\tau,\sigma)\in LEt(\alpha)$ та існують $A\in(X/\alpha)\tau^{*}$ і два прообрази $B,C\in A\tau^{*-1}$ такі, що $B\tau\neq C\tau$. Розглянемо такі випадки.

1) $B\tau\cap C\tau=\varnothing$ і $B\sigma\cap C\sigma\neq\varnothing$.

Нехай $x\in B\tau$, $y\in B\sigma\cap C\sigma$, тоді $(x,y)\in\alpha$. Оскільки $x\tau^{-1}\cap C=\varnothing$, то для будь-яких $y'\in C\cap y\sigma^{-1}$ і $x'\in x\tau^{-1}$ маємо $(x',y')\notin\alpha$, що суперечить умові $(\tau,\sigma)\in LEt(\alpha)$.

2) $B\tau\cap C\tau\neq\varnothing$ і $B\sigma\cap C\sigma=\varnothing$ (аналогічно випадку 1)).

3) $B\tau\cap C\tau=\varnothing$ і $B\sigma\cap C\sigma=\varnothing$.

Нехай $(x,y)\in\alpha,$ де $x\in B\tau,$ $y\in C\sigma.$ Оскільки $y\sigma^{-1}\bigcap B=\varnothing,$ то для будь-яких $x'\in B\bigcap x\tau^{-1}$ і $y'\in y\sigma^{-1}$ маємо $(x',y')\notin\alpha,$ а це суперечить тому, що $(\tau,\sigma)\in LEt(\alpha).$

4) $B\tau\bigcap C\tau\neq\varnothing$ і $B\sigma\bigcap C\sigma\neq\varnothing.$

Не зменшуючи загальності, нехай $B\tau\setminus C\tau\neq\varnothing$ і $x\in B\tau\setminus C\tau,$ $y\in C\sigma.$ Враховуючи, що $x\tau^{-1}\bigcap C=\varnothing,$ для всіх $y'\in C\bigcap y\sigma^{-1}$ і $x'\in x\tau^{-1}$ отримуємо $(x',y')\notin\alpha,$ що суперечить припущенню $(\tau,\sigma)\in LEt(\alpha).$ Отож, $B\tau=C\tau.$ Аналогічно доводиться, що $B\sigma=C\sigma$ для всіх $B,C\in A\tau^{*-1}.$

Нехай тепер $(\tau,\sigma)\in Et(\alpha)$ такий, що виконується умова леми, і $x\tau, y\sigma\in A.$ Зрозуміло, що $x\tau\tau^{-1}\subseteq\bigcup\limits_{Y\in A\tau^{*-1}}Y$ і $y\sigma\sigma^{-1}\subseteq\bigcup\limits_{Y\in A\tau^{*-1}}Y.$ Оскільки $x\tau\tau^{-1}\bigcap Y\neq\varnothing,$ $y\sigma\sigma^{-1}\bigcap Y\neq\varnothing$ для будь-якого $Y\in A\tau^{*-1},$ то для всіх $x'\in x\tau\tau^{-1}\bigcap Y$ існує $y'\in y\sigma\sigma^{-1}\bigcap Y$ такий, що $(x',y')\in\alpha.$ Тоді для будь-якого $x'\in x\tau\tau^{-1}$ знайдеться $y'\in y\sigma\sigma^{-1}$ такий, що $(x',y')\in\alpha.$ Аналогічні міркування виконуються і для кожного прообразу з $y\sigma\sigma^{-1}.$ Отже, $(\tau,\sigma)\in LEt(\alpha).$ □

Множина $LEt(\alpha)$ усіх локально сильних ендотопізмів відношення еквівалентності α у загальному випадку не утворює напівгрупу. Розглянемо такий приклад.

Приклад 1.8. Нехай $X=\{a,b,c,d,e\},$ $\alpha=i_X\cup\{(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)\}.$ Тоді

$$(\varphi,\psi)=\left(\begin{pmatrix}a&b&c&d&e\\c&d&c&d&b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a&b&c&d&e\\d&c&d&c&a\end{pmatrix}\right)\in LEt(\alpha),$$

$$(\varphi',\psi')=\left(\begin{pmatrix}a&b&c&d&e\\a&b&a&b&c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a&b&c&d&e\\b&a&a&b&d\end{pmatrix}\right)\in LEt(\alpha),$$

проте

$$(\varphi,\psi)(\varphi',\psi')=(\varphi\varphi',\psi\psi')=$$

$$=\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & d & c & d & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ d & c & d & c & a \end{pmatrix}\right)\times$$

$$\times\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & b & a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a & a & b & d \end{pmatrix}\right)=$$

$$=\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & b & a & b & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a & b & a & b \end{pmatrix}\right)\notin LEt(\alpha).$$

Лема 1.16. *Множина $LEt(\alpha)$ усіх локально сильних ендотопізмів відношення еквівалентності $\alpha \in Eq(X)$ є напівгрупою тоді й тільки тоді, коли виконується одна з таких умов:*

(i) α – тотожне відношення еквівалентності;

(ii) існує єдиний клас $A \in X/\alpha$ такий, що $|A| \geq 2$.

Доведення. Нехай $\alpha \in Eq(X)$ і $LEt(\alpha)$ – напівгрупа. Зрозуміло, що при $|X| \leq 3$ будь-яка еквівалентність з $Eq(X)$ задовольняє одну з умов цієї леми. Припустимо тепер, що $|X| > 3$ і в X/α знайдуться принаймні два різні класи A і B потужності ≥ 2. Візьмемо $a, a' \in A$ і $b, b' \in B$ такі, що $a \neq a'$, $b \neq b'$, і визначимо перетворення τ і σ множини X за формулами:

$$Y\tau = \begin{cases} \{a, a'\} \text{ і } \tau|_{\{a,a'\}} - \textit{бієкція, якщо } Y \in \{A, B\}, \\ \{b\} \quad \textit{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$Y\sigma = \begin{cases} \{a, a'\} \text{ і } \tau|_{\{a,a'\}} - \textit{бієкція, якщо } Y \in \{A, B\}, \\ \{b'\} \quad \textit{в інших випадках} \end{cases}$$

для всіх $Y \in X/\alpha$.

За лемами 1.9 і 1.15, $(\tau, \sigma) \in LEt(\alpha)$. Квадрати τ^2, σ^2 перетворень τ і σ задовольняють умови:

$$Y\tau^2 = \begin{cases} \{a, a'\}, \textit{ якщо } Y \in \{A, B\}, \\ \{b\tau\} \quad \textit{в інших випадках,} \end{cases} \quad Y\sigma^2 = \begin{cases} \{a, a'\}, \textit{ якщо } Y \in \{A, B\}, \\ \{b'\sigma\} \quad \textit{в інших випадках} \end{cases}$$

для всіх $Y \in X/\alpha$.

За лемою 1.9, $(\tau, \sigma)^2 = (\tau^2, \sigma^2) \in Et(\alpha)$, а за лемою 1.15,

$(\tau,\sigma)^2 \notin LEt(\alpha)$, що суперечить припущенню.

Нехай тепер $\alpha \in Eq(X)$ задовольняє умову (ii) цієї леми й $\alpha \neq \omega_X$. Припустимо, що $(\tau_1,\sigma_1),(\tau_2,\sigma_2) \in LEt(\alpha)$, але $(\tau_1\tau_2,\sigma_1\sigma_2) \notin LEt(\alpha)$. Оскільки $(\tau_1\tau_2,\sigma_1\sigma_2) \in Et(\alpha)$, то, за лемою 1.15, знайдуться принаймні два різні класи $A,B \in X/\alpha$ такі, що $A\tau_1^*\tau_2^* = B\tau_1^*\tau_2^* = C$, де $C \in X/\alpha$, при цьому $A\tau_1\tau_2 \neq B\tau_1\tau_2$ або $A\sigma_1\sigma_2 \neq B\sigma_1\sigma_2$. Для визначеності вважатимемо, що $A\tau_1\tau_2 \neq B\tau_1\tau_2$. Зрозуміло, що це можливо тільки в тому випадку, коли $|C| \geq 2$. Тоді, очевидно, $|C\tau_2^{-1}| \geq 2$. Враховуючи умову на α, маємо $C\tau_2^{-1} = C$ і, як наслідок, $A = B$, що суперечить припущенню. Отже, $LEt(\alpha)$ є напівгрупою. Для $\alpha = i_X$ або $\alpha = \omega_X$ очевидно $LEt(\alpha)$ $(= Et(\alpha))$ – напівгрупа. □

Множину всіх еквівалентностей на X з n класами потужності ≥ 2 позначимо через $Eq^n(X)$.

Опис будови напівсильних ендотопізмів довільного відношення еквівалентності дає така лема.

Лема 1.17. *Ендотопізм (τ,σ) відношення еквівалентності $\alpha \in Eq(X)$ є напівсильним ендотопізмом тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $A \in (X/\alpha)\tau^*$ виконується рівність:*

$$(A \cap X\tau) \times (A \cap X\sigma) = \bigcup_{Y \in A\tau^{*-1}} (Y\tau \times Y\sigma).$$

Доведення. Нехай $(\tau,\sigma) \in HEt(\alpha)$ й умова леми не виконується. Зрозуміло, що $(A \cap X\tau) \times (A \cap X\sigma) \supset \bigcup_{Y \in A\tau^{*-1}} (Y\tau \times Y\sigma)$ для всіх $A \in (X/\alpha)\tau^*$. Тоді існує пара $(x,y) \in \alpha$ така, що $(x,y) \in (A \cap X\tau) \times (A \cap X\sigma)$ і $(x,y) \notin \bigcup_{Y \in A\tau^{*-1}} (Y\tau \times Y\sigma)$ для деякого $A \in (X/\alpha)\tau^*$. Звідси $x\tau^{-1} \cap y\sigma^{-1} = \varnothing$ і, як наслідок, для будь-яких

$x' \in x\tau^{-1}$, $y' \in y\sigma^{-1}$ маємо $(x', y') \notin \alpha$. Отож, $(\tau, \sigma) \notin HEt(\alpha)$, що суперечить припущенню.

Нехай тепер $(\tau, \sigma) \in Et(\alpha)$ – такий ендотопізм, що умова леми виконується і $(x\tau, y\sigma) \in \alpha$. Тоді для деякого $A \in (X/\alpha)\tau^*$ маємо $(x\tau, y\sigma) \in (A \bigcap X\tau) \times (A \bigcap X\sigma)$, звідки за припущенням $(x\tau, y\sigma) \in (Y\tau \times Y\sigma)$ для відповідного $Y \in A\tau^{*-1}$. Це означає, що $x\tau\tau^{-1} \bigcap y\sigma\sigma^{-1} \neq \varnothing$ і, як наслідок, знайдуться $x' \in x\tau\tau^{-1}$, $y' \in y\sigma\sigma^{-1}$ такі, що $(x', y') \in \alpha$. Отже, $(\tau, \sigma) \in HEt(\alpha)$. □

Як показує наступний приклад, множина $HEt(\alpha)$ усіх напівсильних ендотопізмів відношення еквівалентності α у загальному випадку не утворює напівгрупу.

Приклад 1.9. Нехай $X = \{a, b, c, d\}$, $\alpha = i_X \bigcup \{(a,b),(b,a)\}$. Тоді

$$(\varphi, \psi) = \left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & b & d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \end{pmatrix} \right) \in HEt(\alpha),$$

$$(\varphi', \psi') = \left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & a & a \end{pmatrix} \right) \in HEt(\alpha),$$

проте

$$(\varphi, \psi)(\varphi', \psi') =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & b & d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & a & a \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & b & b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & a & a \end{pmatrix} \right) \notin HEt(\alpha).$$

Лема 1.18. *Множина $HEt(\alpha)$ усіх напівсильних ендотопізмів відношення еквівалентності $\alpha \in Eq(X)$ є напівгрупою тоді й тільки тоді, коли α – тривіальне відношення еквівалентності.*

Доведення. Нехай $HEt(\alpha)$, $\alpha \in Eq(X)$, – напівгрупа. Зрозуміло, що при $|X| < 3$ кожне $\alpha \in Eq(X)$ задовольняє умову цієї леми. Припустимо, що

$|X| \geq 3$ і α – нетривіальне відношення еквівалентності на X. Тоді існує хоча б один клас $A \in X/\alpha$ такий, що $|A| \geq 2$. Візьмемо різні елементи $a, b \in A$, $c \in X \setminus A$ і розглянемо перетворення φ, ψ і φ', ψ' множини X, визначені таким чином:

$$x\varphi = \begin{cases} c, \text{ якщо } x \in A, \\ a \text{ в інших випадках}, \end{cases} \quad x\psi = \begin{cases} c, \text{ якщо } x \in A, \\ b \text{ в інших випадках}, \end{cases}$$

$$x\varphi' = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \in A, \\ b \text{ в інших випадках}, \end{cases} \quad x\psi' = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \in A, \\ a \text{ в інших випадках} \end{cases}$$

для будь-якого $x \in X$.

За лемами 1.9 і 1.17, $(\varphi, \psi), (\varphi', \psi') \in HEt(\alpha)$, при цьому добутки $\varphi\varphi'$, $\psi\psi'$ задовольняють умови:

$$x\varphi\varphi' = \begin{cases} b, \text{ якщо } x \in A, \\ a \text{ в інших випадках}, \end{cases} \quad x\psi\psi' = \begin{cases} a, \text{ якщо } x \in A, \\ b \text{ в інших випадках} \end{cases}$$

для будь-якого $x \in X$.

За лемою 1.9, $(\varphi\varphi', \psi\psi') \in Et(\alpha)$, а за лемою 1.17, $(\varphi\varphi', \psi\psi') \notin HEt(\alpha)$. Отже, $HEt(\alpha)$ не є напівгрупою, що суперечить припущенню.

Якщо ж $\alpha = i_X$ або $\alpha = \omega_X$, то $HEt(\alpha)$ $(= Et(\alpha))$ – напівгрупа. □

Зауважимо, що напівгрупи $LEt(\alpha)$ і $HEt(\alpha)$ як піднапівгрупи в $Et(\alpha)$ (тобто коли α задовольняє умову леми 1.16 і леми 1.18 відповідно) є відповідностями напівгрупи $End(\alpha)$.

Висновки до розділу 1

У цьому розділі викладено основні відомості з теорії напівгруп і теорії графів, які використовуються в дисертації.

У першому підрозділі введено необхідні поняття та позначення, а також зроблено стислий огляд деяких результатів про напівгрупи ендоморфізмів певних структур, близьких до основних об’єктів цієї роботи. Розглянуто узагальнення поняття ендоморфізму алгебраїчних систем. Визначено конструкцію вінцевого добутку моноїда й малої категорії.

У другому підрозділі визначено різні типи ендотопізмів бінарних відношень, наведено їх приклади. Зокрема, розглянуто необхідні та достатні умови існування напівгруп ендотопізмів тотожного й універсального відношень.

У третьому підрозділі відповідні типи ендотопізмів описано для відношень еквівалентності. Визначено поняття відповідності довільної алгебри та встановлено, що напівгрупа ендотопізмів довільного бінарного відношення, визначеного на деякій множині, є відповідністю симетричної напівгрупи на цій самій множині. Для довільного відношення еквівалентності доведено, що його напівгрупа всіх ендотопізмів, моноїд усіх сильних ендотопізмів та група автотопізмів є відповідностями напівгрупи ендоморфізмів тієї ж самої еквівалентності. Знайдено необхідні та достатні умови, за яких множини напівсильних, локально сильних і квазісильних ендотопізмів відношень еквівалентності є напівгрупами.

РОЗДІЛ 2

ВІДПОВІДНОСТІ НАПІВГРУПИ ЕНДОМОРФІЗМІВ ВІДНОШЕННЯ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ

У цьому розділі вивчаються відповідності напівгрупи ендоморфізмів відношення еквівалентності. У термінах вінцевого добутку моноїда з малою категорією описано зображення трьох відповідностей напівгрупи ендоморфізмів довільної еквівалентності – напівгрупи всіх ендотопізмів, моноїда всіх сильних ендотопізмів та групи всіх автотопізмів цього відношення. Описано умови регулярності та корегулярності відповідностей як напівгруп ендотопізмів відношення еквівалентності. Визначено поняття ендотипу та ендоспектра бінарного відношення відносно його ендотопізмів. Отримано класифікацію всіх еквівалентностей (строгих часткових еквівалентностей) за значенням їх ендотипу відносно ендотопізмів (відповідно ендоморфізмів). Для довільного відношення еквівалентності на скінченній множині досліджено ендоспектр відносно ендотопізмів.

2.1. Точні зображення відповідностей

Сьогодні в багатьох роботах з теорії напівгруп досить часто використовується конструкція вінцевого добутку та її різні модифікації. Наприклад, В. Флейшером [41] було запропоновано конструкцію вінцевого добутку моноїда з малою категорією, що дозволило з точністю до ізоморфізму описати будову напівгруп ендоморфізмів різних алгебраїчних систем [66; 67]. У цьому підрозділі з використанням зазначеної конструкції описано точне зображення трьох відповідностей напівгрупи ендоморфізмів довільної еквівалентності, а саме: напівгрупи ендотопізмів, моноїда сильних ендотопізмів та групи автотопізмів цього відношення.

2.1.1. Напівгрупа ендотопізмів. Нехай X – довільна непорожня множина, $\alpha \in Eq(X)$. Нагадаємо, що через $\varphi|_A$ ми позначаємо звуження перетворення $\varphi: X \to X$ на підмножину $A \subseteq X$.

Визначимо малу категорію K, поклавши

$$ObK = X/\alpha,\; MorK = \bigcup_{\bar{a},\bar{b} \in ObK} Map(\bar{a},\bar{b}),$$

де $Map(\bar{a},\bar{b})$ – множина всіх відображень з класу $\bar{a}$ в клас $\bar{b}$. Зрозуміло, що для кожного морфізму $f \in MorK$ існує одна й лише одна впорядкована пара об'єктів $\bar{a},\bar{b} \in ObK$ така, що $f \in Mor(\bar{a},\bar{b})$. До того ж, симетрична напівгрупа $\Im(X/\alpha)$ природно діє справа на об'єктах категорії K.

Отже, виникає вінцевий добуток $\Im(X/\alpha)wrK$ симетричної напівгрупи $\Im(X/\alpha)$ з малою категорією K (див. п. 1.1.2).

Зазначимо, що тут використовується дуальний вінцевий добуток до конструкції, визначеної в [41].

У декартовому квадраті вінцевого добутку $\Im(X/\alpha)wrK$ на себе виділимо таку піднапівгрупу:

$$P_X^\alpha = \left\{ ((\varphi, f),(\psi, g)) \middle| \varphi = \psi \right\}.$$

Нехай задана довільна сукупність категорій C_i, $i \in I$. Визначимо нову категорію $\prod_{i \in I} C_i$, прийнявши

$$Ob\left(\prod_{i \in I} C_i\right) = \prod_{i \in I} ObC_i, \quad Mor\left(\prod_{i \in I} C_i\right) = \prod_{i \in I} MorC_i.$$

Добуток морфізмів у цій категорії визначається покомпонентно. Отримана категорія називається *добутком категорій* C_i, $i \in I$ [40].

Позначимо через K^2 добуток визначеної вище категорії K на себе, а через K_*^2 – повну підкатегорію категорії K^2, яка розглядається на множині об'єктів $ObK_*^2 = \{(A, A) | A \in ObK\}$.

Аналогічно тому як вище, для будь-якої еквівалентності α на множині X можна визначити вінцевий добуток $\Im(X/\alpha)wrK_*^2$ симетричної напівгрупи $\Im(X/\alpha)$ з малою категорією K_*^2. Операція на $\Im(X/\alpha)wrK_*^2$ визначається в такий спосіб:

$$(\gamma, f)(\mu, h) = (\gamma\mu, fh_\gamma),$$

де $(fh_\gamma)_{(\bar{a},\bar{a})} = f_{(\bar{a},\bar{a})} h_{(\bar{a}\gamma,\bar{a}\gamma)}$ для всіх $(\bar{a},\bar{a}) \in ObK_*^2$.

Нехай C – мала категорія, R – моноїд, який діє справа на множині $X = ObC$ об'єктів цієї категорії, і $M = \bigcup_{x,y \in X} Mor_C(x, y)$ – множина всіх морфізмів категорії C. Візьмемо натуральне число n і покладемо

$$V = \left\{ \left(r, f^{(1)},..., f^{(n)}\right) \,\middle|\, r \in R,\ f^{(i)} \in Map(X, M),\ xf^{(i)} \in Mor_C(x, xr)\ \forall x \in X \right\}.$$

Далі для всіх $(r, f^{(1)},\ldots, f^{(n)})$, $(p, g^{(1)},\ldots, g^{(n)}) \in V$ визначимо множення:

$$\left(r, f^{(1)},..., f^{(n)}\right)\left(p, g^{(1)},..., g^{(n)}\right) = \left(rp, f^{(1)}g_r^{(1)},..., f^{(n)}g_r^{(n)}\right),$$

де $x\left(f^{(i)}g_r^{(i)}\right) = xf^{(i)}(xr)g^{(i)}$ для всіх $x \in X$ і $xf^{(i)}(xr)g^{(i)}$ – це композиція морфізмів $xf^{(i)}$ і $(xr)g^{(i)}$ у категорії C. Задана у такий спосіб операція є асоціативною. Крім того, у напівгрупі V є одиниця $\left(1, \underbrace{e,\ldots,e}_{n}\right)$, де $e \in Map(X, M)$ такий, що $xe \in Mor_C(x, x)$ – тотожний морфізм для будь-якого x з C.

Моноїд V з таким множенням називається n*-кратним вінцевим добутком* моноїда R з категорією C і позначається через $Rwr^{(n)}C$.

Слід зазначити, що при $n = 1$ виникає дуальна конструкція до вінцевого добутку, визначеного в [41].

Виконується

Теорема 2.1. *Нехай* $\alpha \in Eq(X)$. *Напівгрупа* $Et(\alpha)$ *ізоморфна кожній з таких напівгруп:*

(i) 2-кратному вінцевому добутку $\Im(X/\alpha)wr^{(2)}K$ *напівгрупи перетворень* $\Im(X/\alpha)$ *з малою категорією* K;

(ii) піднапівгрупі P_X^α *напівгрупи* $(\Im(X/\alpha)wrK) \times (\Im(X/\alpha)wrK)$;

(iii) вінцевому добутку $\Im(X/\alpha)wrK_*^2$ *напівгрупи* $\Im(X/\alpha)$ *з категорією* K_*^2.

Доведення. (i) Для будь-якого ендотопізму $(\tau,\sigma)\in Et(\alpha)$ покладемо

$$(\tau,\sigma)\Xi = \left(\tau^*, f^{\tau}, g^{\sigma}\right),$$

де $\tau^* \in \Im(X/\alpha)$ таке, що $\overline{a}\tau^* = \overline{a\tau}$, і $f^{\tau}, g^{\sigma} \in Map(ObK, MorK)$ такі, що $\overline{a} f^{\tau} = \tau|_{\overline{a}}$, $\overline{a} g^{\sigma} = \sigma|_{\overline{a}}$ для будь-якого $\overline{a} \in X/\alpha$.

Зрозуміло, що Ξ відображає $Et(\alpha)$ в $\Im(X/\alpha)wr^{(2)}K$, при цьому ін'єктивність Ξ є очевидною. Візьмемо довільну впорядковану трійку $(\psi, f, g)\in \Im(X/\alpha)wr^{(2)}K.$ Враховуючи означення напівгрупи $\Im(X/\alpha)wr^{(2)}K,$ для кожного $\overline{a}\in X/\alpha$ знайдеться такий клас $\overline{a}\psi \in X/\alpha,$ що $\overline{a} f_{\overline{a}} \subseteq \overline{a}\psi$ і $\overline{a} g_{\overline{a}} \subseteq \overline{a}\psi$. За лемою 1.9, упорядкована пара (λ,μ) перетворень множини X, визначених за формулою

$$x\lambda = xf_{\overline{x}},\ x\mu = xg_{\overline{x}} \text{ для всіх } x\in X,$$

є ендотопізмом відношення еквівалентності α, при цьому

$$(\lambda,\mu)\Xi = \left(\lambda^*, f^{\lambda}, g^{\mu}\right) = (\psi, f, g).$$

Для завершення доведення залишається показати, що Ξ є гомоморфізмом. Справді, нехай $(\tau,\sigma),(\rho,\delta)\in Et(\alpha)$ – такі ендотопізми, що

$$(\tau,\sigma)\Xi = \left(\tau^*, f^{\tau}, g^{\sigma}\right), \quad (\rho,\delta)\Xi = \left(\rho^*, f^{\rho}, g^{\delta}\right).$$

Тоді, з одного боку, маємо:

$$\left((\tau,\sigma)(\rho,\delta)\right)\Xi = (\tau\rho, \sigma\delta)\Xi = \left((\tau\rho)^*, f^{\tau\rho}, g^{\sigma\delta}\right),$$

а з іншого боку,

$$(\tau,\sigma)\Xi(\rho,\delta)\Xi=\left(\tau^*, f^{\tau}, g^{\sigma}\right)\left(\rho^*, f^{\rho}, g^{\delta}\right)=\left(\tau^*\rho^*, f^{\tau} f^{\rho}_{\tau^*}, g^{\sigma} g^{\delta}_{\tau^*}\right).$$

Оскільки для будь-якого $\overline{a}\in X/\alpha$ виконуються рівності

$$\overline{a}(\tau^*\rho^*)=(\overline{a}\tau^*)\rho^*=\overline{a\tau}\rho^*=\overline{(a\tau)\rho}=\overline{a(\tau\rho)}=\overline{a}(\tau\rho)^*,$$

то $\tau^*\rho^*=(\tau\rho)^*$. Крім того, для всіх $\overline{a}\in X/\alpha$

$$\overline{a}\left(f^{\tau} f^{\rho}_{\tau^*}\right)=\left(\overline{a} f^{\tau}\right)\left(\overline{a\tau} f^{\rho}\right)=\tau|_{\overline{a}}\,\rho|_{\overline{a\tau}},$$

$$\overline{a} f^{\tau\rho}=(\tau\rho)|_{\overline{a}.},$$

тому при будь-якому $x\in\overline{a}$

$$x\left(\tau|_{\overline{a}}\,\rho|_{\overline{a\tau}}\right)=\left(x\tau|_{\overline{a}}\right)\rho|_{\overline{a\tau}}=(x\tau)\,\rho|_{\overline{a\tau}}=x(\tau\rho)=x(\tau\rho)|_{\overline{a}}.$$

Отже, $f^{\tau} f^{\rho}_{\tau^*}=f^{\tau\rho}$.

Аналогічно доводиться, що $g^{\sigma} g^{\delta}_{\tau^*}=g^{\sigma\delta}$.

Нарешті,

$$\left((\tau,\sigma)(\rho,\delta)\right)\Xi=(\tau\rho,\sigma\delta)\Xi=\left((\tau\rho)^*, f^{\tau\rho}, g^{\sigma\delta}\right)=\left(\tau^*\rho^*, f^{\tau} f^{\rho}_{\tau^*}, g^{\sigma} g^{\delta}_{\tau^*}\right)=$$

$$=\left(\tau^*, f^{\tau}, g^{\sigma}\right)\left(\rho^*, f^{\rho}, g^{\delta}\right)=(\tau,\sigma)\Xi(\rho,\delta)\Xi.$$

(ii) Для будь-якого $(\varphi, f, g)\in\Im(X/\alpha)wr^{(2)}K$ покладемо

$$(\varphi, f, g)\Theta=((\varphi, f),(\varphi, g)).$$

Неважко переконатися, що Θ є ізоморфізмом $\Im(X/\alpha)wr^{(2)}K$ на P_X^{α}.

(iii) Для будь-якого $(\varphi, f, g)\in\Im(X/\alpha)wr^{(2)}K$ відображення Υ, визначене за формулою:

$$(\varphi, f, g)\Upsilon=\left(\varphi, h_{f,g}\right),$$

де $\left(\overline{a};\overline{a}\right)h_{f,g}=\left(f_{\overline{a}}, g_{\overline{a}}\right)$ для всіх $\left(\overline{a},\overline{a}\right)\in ObK_*^2$, є ізоморфізмом $\Im(X/\alpha)wr^{(2)}K$ на $\Im(X/\alpha)wrK_*^2$, що встановлюється безпосередньою перевіркою. Теорему доведено. □

Надалі елементи напівгрупи $Et(\alpha)$ будемо ототожнювати з відповідними їм елементами з вінцевого добутку $\Im(X/\alpha)wr^{(2)}K$.

2.1.2. Моноїд сильних ендотопізмів. Ураховуючи необхідні та достатні умови існування сильного ендотопізму (див. лему 1.11), для ендоморфізмів еквівалентності α, з одного боку, отримуємо, що $SEt(\alpha)$ є еквівалентністю на моноїді $SEnd(\alpha)$, а з іншого, що $SEt(\alpha)$ є відповідністю напівгрупи $SEnd(\alpha)$.

Нехай α – відношення еквівалентності на множині X, K – мала категорія, визначена так само, як у п. 2.1.1. Через $\Im_{in}(X/\alpha)$ позначимо напівгрупу всіх ін'єктивних перетворень фактор-множини X/α і виділимо в декартовому квадраті вінцевого добутку $\Im_{in}(X/\alpha)wrK$ на себе таку піднапівгрупу:

$$S_X^\alpha = \left\{ \left((\varphi, f), (\psi, g) \right) \middle| \varphi = \psi \right\}.$$

Позначимо через $\Im_{in}(X/\alpha)wrK_*^2$ вінцевий добуток напівгрупи перетворень $\Im_{in}(X/\alpha)$ з малою категорією K_*^2, а через $\Im_{in}(X/\alpha)wr^{(2)}K$ – 2-кратний вінцевий добуток напівгрупи $\Im_{in}(X/\alpha)$ з категорією K (див. п. 2.1.1).

Основним результатом цього підрозділу є така теорема.

Теорема 2.2. *Нехай α – відношення еквівалентності на множині X. Напівгрупа $SEt(\alpha)$ є ізоморфною кожній з таких напівгруп:*

(i) 2-кратному вінцевому добутку $\Im_{in}(X/\alpha)wr^{(2)}K$ моноїда перетворень $\Im_{in}(X/\alpha)$ з малою категорією K;

(ii) піднапівгрупі S_X^α моноїда $(\Im_{in}(X/\alpha)wrK)\times(\Im_{in}(X/\alpha)wrK)$;

(ii) вінцевому добутку $\Im_{in}(X/\alpha)wrK_*^2$ моноїда $\Im_{in}(X/\alpha)$ з категорією K_*^2.

Доведення теореми 2.2 є аналогічним доведенню теореми 2.1. □

У випадку, коли множина X є скінченною, очевидно, що $\Im_{in}(X/\alpha) = S(X/\alpha)$.

Приклад 2.1. Нехай на множині $X=\{a,b,c,d,e,f\}$ задане відношення еквівалентності $\alpha=(A_1\times A_1)\cup(A_2\times A_2)\cup(A_3\times A_3)$, де $A_1=\{a\}$, $A_2=\{b,c\}$, $A_3=\{d,e,f\}$.

У такому випадку $ObK=\{A_1,A_2,A_3\}$, морфізми категорії K – усі можливі відображення з будь-якого класу еквівалентності α у будь-який інший клас і $\Im_{in}(X/\alpha)=S_3$, де S_3 – симетрична група на 3-елементній множині. За теоремою 2.2, маємо

$$SEt(\alpha)\cong S_3 wr^{(2)}K\cong S_3 wrK_*^2\cong S_X^\alpha .$$

Подібна властивість виконується і для групи автотопізмів відношення еквівалентності, відповідний результат для якої розглядається в наступному пункті.

2.1.3. Група автотопізмів. З леми 1.10 і будови автоморфізмів довільної еквівалентності випливає, що для будь-якої еквівалентності α виконуються включення:

$$pr_1At(\alpha)\subseteq Aut(\alpha),\ \ pr_2At(\alpha)\subseteq Aut(\alpha).$$

Більш того, з одного боку, відношення $At(\alpha)$ є еквівалентністю на групі автоморфізмів $Aut(\alpha)$, а з іншого – відповідністю напівгрупи ендоморфізмів $End(\alpha)$ і, зокрема, групи $Aut(\alpha)$.

Визначимо малу категорію K, поклавши

$$ObK=X/\alpha,\ MorK=\bigcup_{\bar{a},\bar{b}\in ObK} Map_b(\bar{a},\bar{b}),$$

де $Map_b(\bar{a},\bar{b})$ – множина всіх бієкцій з класу $\bar{a}$ в клас $\bar{b}$.

Через $B(X/\alpha)$ позначимо таку множину всіх бієкцій $\delta: X/\alpha\to X/\alpha$, що клас $\bar{a}$ та його образ $\bar{a}\delta$ є рівнопотужними як підмножини для кожного $\bar{a}\in X/\alpha$. Зрозуміло, що $B(X/\alpha)$ є підгрупою групи $S(X/\alpha)$ усіх підстановок на фактор-множині X/α.

У прямому добутку вінцевого добутка $B(X/\alpha)wrK$ на себе виділимо підгрупу

$$A_X^{\alpha}=\{((\varphi,f),(\psi,g))|\varphi=\psi\}.$$

Позначимо через $B(X/\alpha)wrK_*^2$ вінцевий добуток групи підстановок $B(X/\alpha)$ з малою категорією K_*^2, а через $B(X/\alpha)wr^{(2)}K$ – 2-кратний вінцевий добуток групи $B(X/\alpha)$ з категорією K, які визначаються аналогічно до подібних конструкцій вінцевого добутку з п. 2.1.2.

Теорема 2.3. *Нехай α – відношення еквівалентності на множині X. Група $At(\alpha)$ є ізоморфною кожній з таких груп:*

(i) 2-кратному вінцевому добутку $B(X/\alpha)wr^{(2)}K$ групи підстановок $B(X/\alpha)$ з малою категорією K;

(ii) підгрупі A_X^{α} групи $(B(X/\alpha)wrK)\times(B(X/\alpha)wrK)$;

(iii) вінцевому добутку $B(X/\alpha)wrK_*^2$ групи підстановок $B(X/\alpha)$ з категорією K_*^2.

Доведення теореми 2.3 є аналогічним доведенню теореми 2.1. □

2.2. Ізоморфізми напівгруп ендотопізмів еквівалентності

У [24] з використанням властивості проекцій бінарних відношень було доведено визначеність квазівпорядкованих множин з точністю до ізоморфізму або антиізоморфізму їх напівгрупою ендотопізмів. У цьому підрозділі цей результат доведено для відношення еквівалентності за допомогою властивостей мінімального ідеалу напівгрупи ендотопізмів цього відношення.

Нехай ρ – відношення еквівалентності на множині X. Через ν_a, $a\in X$, позначимо стале перетворення множини X, тобто $x\nu_a=a$ для всіх $x\in X$, а через $Et_C(\rho)$ – множину всіх ендотопізмів відношення ρ вигляду (ν_a,ν_a), $a\in X$.

Зрозуміло, що елементи з $Et_C(\rho)$ і тільки вони мають властивість

$$Et(\rho)\cdot\{(\nu_a,\nu_a)\}=\{(\nu_a,\nu_a)\},$$

тобто $Et_C(\rho)$ – мінімальний правий ідеал напівгрупи $Et(\rho)$.

Основним результатом цього підрозділу є така теорема

Теорема 2.4. *Нехай α – відношення еквівалентності на множині X, β – відношення еквівалентності на множині X'. Якщо відповідності $Et(\alpha)$ і $Et(\beta)$ ізоморфні, то реляційні системи (X,α) та (X',β) ізоморфні.*

Доведення. Нехай Θ – довільний ізоморфізм напівгрупи $Et(\alpha)$ на $Et(\beta)$ і $(\nu_a,\nu_a)\in Et_C(\alpha)$. Доведемо спочатку, що $(Et_C(\alpha))\Theta=Et_C(\beta)$. Оскільки Θ – ізоморфізм, то

$$(\varphi,\psi)\Theta\cdot(\nu_a,\nu_a)\Theta=((\varphi,\psi)\cdot(\nu_a,\nu_a))\Theta=(\nu_a,\nu_a)\Theta$$

для будь-якого $(\varphi,\psi)Et(\alpha)$. Отже, $(\nu_a,\nu_a)\Theta\in Et_C(\beta)$. Це означає, що $(Et_C(\alpha))\Theta\subseteq Et_C(\beta)$. З використанням оберненого ізоморфізму Θ^{-1} аналогічно доводиться обернене включення $Et_C(\beta)\subseteq(Et_C(\alpha))\Theta$.

Тепер для будь-якого $a\in X$ маємо:

$$(a,a)\in\alpha\Leftrightarrow(\nu_a,\nu_a)\in Et_C(\alpha)\Leftrightarrow(\nu_a,\nu_a)\Theta\in Et_C(\beta)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\nu_{a'},\nu_{a'})\in Et_C(\beta)\Leftrightarrow(a',a')\in\beta,$$

де $a'\in X'$. Таким чином, відображення Θ індукує бієкцію f_Θ між елементами множин X і X':

$$af_\Theta=a'\Leftrightarrow(\nu_a,\nu_a)\Theta=(\nu_{a'},\nu_{a'})$$

для всіх $a\in X$.

Припустимо, що $i_{End(\alpha)}\Theta\neq i_{End(\beta)}$. Тоді знайдеться такий ендотопізм $(\varphi,\psi)\in i_{End(\alpha)}$, що $(\varphi,\psi)\Theta=(\varphi',\psi')\notin i_{End(\beta)}$. Звідси $\varphi'\neq\psi'$ і, як наслідок, $t'\varphi'\neq t'\psi'$ для деякого $t'\in X'$. Прийнявши $tf_\Theta=t'$, з одного боку, отримуємо

$$((\nu_t,\nu_t)(\varphi,\psi))\Theta=(\nu_{t\varphi},\nu_{t\psi})\Theta=(\nu_{(t\varphi)'},\nu_{(t\varphi)'})\in Et_C(\beta),$$

а з іншого боку,

$$((\nu_t,\nu_t)(\phi,\psi))\Theta=(\nu_t,\nu_t)\Theta(\varphi,\psi)\Theta=(\nu_{t'},\nu_{t'})(\varphi',\psi')=$$

$$=(\nu_{t'\varphi'},\nu_{t'\psi'})\notin Et_C(\beta),$$

оскільки $t'\varphi'\neq t'\psi'$.

Отже, припущення не є правильним і тоді $i_{End(\alpha)}\Theta=i_{End(\beta)}$. Враховуючи, що напівгрупа ендоморфізмів довільного бінарного відношення природним чином ізоморфно занурюється в напівгрупу ендотопізмів цього відношення, отримуємо $End(\alpha)\cong End(\beta)$. Звідси, за теоремою 1.1, випливає, що $(X,\alpha)\cong(X',\beta)$. Теорему доведено. □

Далі з'ясуємо, яку будову мають ізоморфізми між напівгрупами ендотопізмів довільних еквівалентностей.

Теорема 2.5. *Нехай α – відношення еквівалентності на множині X, β – відношення еквівалентності на множині X'. Відображення Ψ відповідності $Et(\alpha)$ на відповідність $Et(\beta)$ є ізоморфізмом тоді й тільки тоді, коли*

$$g\Psi=\tau^{-1}g\tau \quad \textit{для всіх } g\in Et(\alpha),$$

де τ – деякий ізотопізм реляційної системи (X,α) на (X',β).

Доведення. Нехай $\Psi: g\mapsto g'$ – довільний ізоморфізм відповідності $Et(\alpha)$ на $Et(\beta)$. Покажемо, що будь-який ендотопізм $g'\in Et(\beta)$ має вигляд $g'=\tau^{-1}g\tau$ для відповідного ізотопізму τ системи (X,α) на (X',β). За теоремою 2.4, Ψ індукує ізоморфізм $\Psi^*: End(\alpha)\to End(\beta)$, звідки, за теоремою 1.1, маємо, що $\varphi\Psi^*=\eta^{-1}\varphi\eta$ для всіх $\varphi\in End(\alpha)$ і деякого ізоморфізму $\eta:(X,\alpha)\to(X,\beta)$. Очевидно, що $\tau=(\eta,\eta)$ – ізотопізм (X,α) на (X',β). Таким чином, для будь-якого $g=(g_1,g_2)\in Et(\alpha)$ маємо

$$g\Psi=(g_1\Psi^*,g_2\Psi^*)=(\eta^{-1}g_1\eta,\eta^{-1}g_2\eta)=(\eta^{-1},\eta^{-1})(g_1,g_2)(\eta,\eta)=\tau^{-1}g\tau.$$

Візьмемо тепер довільний ізотопізм $\tau=(\tau_1,\tau_2)$ з (X,α) на (X',β) і для всіх $g\in Et(\alpha)$ покладемо $g\Psi=\tau^{-1}g\tau.$ Зрозуміло, що Ψ відображає $Et(\alpha)$ в $Et(\beta).$ Крім того, для будь-яких $(\varphi_1,\psi_1),$ $(\varphi_2,\psi_2)\in Et(\alpha)$ маємо

$$((\varphi_1,\psi_1),(\varphi_2,\psi_2))\Psi=(\varphi_1\varphi_2,\psi_1\psi_2)\Psi=\left(\tau_1^{-1}(\varphi_1\varphi_2)\tau_1,\tau_2^{-1}(\psi_1\psi_2)\tau_2\right)=$$
$$=\left((\tau_1^{-1}\varphi_1\tau_1)(\tau_1^{-1}\varphi_2\tau_1),(\tau_2^{-1}\psi_1\tau_2)(\tau_2^{-1}\psi_2\tau_2)\right)=$$
$$=\left(\tau_1^{-1}\varphi_1\tau_1,\tau_2^{-1}\psi_1\tau_2\right)\cdot\left(\tau_1^{-1}\varphi_2\tau_1,\tau_2^{-1}\psi_2\tau_2\right)=(\varphi_1,\psi_1)\Psi\cdot(\varphi_2,\psi_2)\Psi.$$

Бієктивність відображення Ψ є очевидною. Теорему доведено. □

2.3. Регулярність та корегулярність відповідностей

Як відомо, напівгрупа всіх перетворень довільної множини є регулярною, проте не кожна її піднапівгрупа має таку властивість. Тому природно виникає питання про регулярність різних її піднапівгруп. Вивченням цього питання займалося чимало математиків. Зокрема, У. Кнауер і М. Ніпорте [15] вивчали регулярність моноїда сильних ендоморфізмів скінченних неорієнтованих графів без кратних ребер. Регулярність напівгруп ендоморфізмів упорядкованих і квазівпорядкованих множин було досліджено в роботах І. Б. Кожухова, В. О. Ярошевича [68] та А. Я. Айзенштат [69], моноїда ендоморфізмів злічених ланцюгів – у роботі В. І. Кіма та І. Б. Кожухова [13]. Ю. В. Жучок та Є. О. Бондар [16; 70] знайшли умови регулярності скінченних n-однорідних гіперграфів і певних нескінченних неорієнтованих графів і гіперграфів.

Важливим підкласом регулярних напівгруп є клас корегулярних напівгруп. Поняття корегулярності для напівгруп було введено Д. Біджевим і К. Тодоровим [71], дослідження в цьому напрямі продовжили Дж. Чваліна й К. Матоускова [72], отримавши опис корегулярності напівгрупи ендоморфізмів унарів, а також І. Дімітрова та Й. Копіц [73], які охарактеризували всі корегулярні піднапівгрупи порядку не більше трьох для скінченної напівгрупи перетворень.

Отже, головна мета цього підрозділу – описати умови регулярності та корегулярності отриманих відповідностей напівгрупи ендоморфізмів відношення еквівалентності.

Нагадаємо, що напівгрупа S називається *регулярною*, якщо для будь-якого $a \in S$ існує такий $x \in S$, що $axa = a$. Через $Eq^n(X)$ ми позначаємо множину всіх еквівалентностей на X з n класами потужності ≥ 2.

Очевидно, що для довільного $\alpha \in Eq(X)$ група $At(\alpha)$ є регулярною. Регулярність напівгруп інших типів ендотопізмів довільного відношення еквівалентності встановлює така теорема.

Теорема 2.6. *(i) Напівгрупа $Et(\alpha)$, $\alpha \in Eq(X)$, є регулярною тоді й тільки тоді, коли α – тривіальне відношення еквівалентності.*

(ii) Напівгрупа $HEt(\alpha)$, де α – тривіальна еквівалентність, є регулярною.

(iii) Напівгрупа $LEt(\alpha)$, де $\alpha \in Eq^1(X)$ або $\alpha = i_X$, є регулярною.

(iv) Напівгрупа $SEt(\alpha)$, $\alpha \in Eq(X)$, є регулярною тоді й тільки тоді, коли фактор-множина X / α є скінченною.

Доведення. (i) Нехай $\alpha = i_X$, тоді напівгрупа $Et(\alpha) = i_{\Im(X)}$ є ізоморфною симетричній напівгрупі $\Im(X)$, яка, як відомо, регулярна (див. [38]). Якщо $\alpha = \omega_X$, то напівгрупа $Et(\alpha) = \omega_{\Im(X)}$ є регулярною як прямий добуток двох регулярних напівгруп.

Нехай тепер X – така множина, що $|X| \geq 3$, α – нетривіальне відношення еквівалентності на X і $Et(\alpha)$ – регулярна напівгрупа. Зрозуміло, що $|X / \alpha| \geq 2$, окрім того, існує принаймні один клас $A \in X / \alpha$ такий, що $|A| \geq 2$. Візьмемо різні елементи $a, b \in A$ і визначимо перетворення τ і σ множини X таким чином:

$$x\tau = \begin{cases} a, \ якщо\ x \in A, \\ b\ \ в\ інших\ випадках, \end{cases} \qquad x\sigma = \begin{cases} b, \ якщо\ x \in A, \\ a\ \ в\ інших\ випадках \end{cases}$$

для будь-якого $x \in X$.

За лемою 1.9, $(\tau,\sigma) \in Et(\alpha)$. Оскільки напівгрупа $Et(\alpha)$ є регулярною, то знайдеться $(\varphi,\psi) \in Et(\alpha)$ такий, що

$$(\tau,\sigma)(\varphi,\psi)(\tau,\sigma) = (\tau\varphi\tau, \sigma\psi\sigma) = (\tau,\sigma).$$

Звідси для будь-яких $x, y \in A$ маємо:

$$(a,b) = (x\tau, y\sigma) = (x(\tau\varphi\tau), y(\sigma\psi\sigma)) = ((x\tau)\varphi\tau, (y\sigma)\psi\sigma) = ((a\varphi)\tau, (b\psi)\sigma),$$

отже, $a\varphi \in A$.

З іншого боку, з умови $\alpha \neq \omega_X$ випливає, що знайдеться відмінний від A клас $B \in X/\alpha$, для якого при будь-яких $x', y' \in B$

$$(b,a) = (x'\tau, y'\sigma) = (x'(\tau\varphi\tau), y'(\sigma\psi\sigma)) = ((x'\tau)\varphi\tau, (y'\sigma)\psi\sigma) = ((b\varphi)\tau, (a\psi)\sigma),$$

звідки $b\varphi \notin A$.

Отже, $a, b \in A$ і $a\varphi \in A$, однак $b\varphi \notin A$, а це суперечить тому, що (φ,ψ) – ендотопізм еквівалентності α (див. лему 1.9).

(ii) Регулярність напівгрупи $HEt(\alpha)$, $\alpha \in \{i_X, \omega_X\}$, випливає з рівності $HEt(\alpha) = Et(\alpha)$ і твердження (i) цієї теореми.

(iii) Нехай $(\varphi,\psi) \in LEt(\alpha)$, $\alpha \in Eq^1(X)$. Якщо $\alpha = \omega_X$, то напівгрупа $LEt(\alpha)$ є регулярною, оскільки вона збігається з $Et(\alpha)$.

Нехай тепер $\alpha \neq \omega_X$ і клас $A \in X/\alpha$ такий, що $|A| \geq 2$. Позначимо $\overline{X\varphi} = X \setminus X\varphi$, $\overline{X\psi} = X \setminus X\psi$ і покладемо

$$X_1^{\varphi} = \left\{ x \in \overline{X\varphi} \,\middle|\, \overline{x}\varphi^{-1} = \varnothing \right\},$$

$$X_2^{\varphi} = \left\{ x \in \overline{X\varphi} \,\middle|\, \overline{x}\varphi^{-1} \neq \varnothing \right\},$$

$$X_1^{\psi} = \left\{ x \in \overline{X\psi} \,\middle|\, \overline{x}\psi^{-1} = \varnothing \right\},$$

$$X_2^{\psi} = \left\{ x \in \overline{X\psi} \,\middle|\, \overline{x}\psi^{-1} \neq \varnothing \right\}.$$

Візьмемо елемент $b \in X$ такий, що $|\overline{b}| = 1$, і визначимо перетворення τ і σ множини X таким чином:

$$x\tau = \begin{cases} a \in x\varphi^{-1}, & \textit{якщо } x \in X\varphi, \\ b, & \textit{якщо } x \in X_1^{\varphi}, \\ c \in \overline{x}\varphi^{-1} : \exists u \in \overline{x}(u\tau = c), & \textit{якщо } x \in X_2^{\varphi}, \end{cases}$$

$$x\sigma = \begin{cases} a' \in x\psi^{-1}, & \textit{якщо } x \in X\psi, \\ b, & \textit{якщо } x \in X_1^{\psi}, \\ c' \in \overline{x}\psi^{-1} : \exists v \in \overline{x}(v\sigma = c'), & \textit{якщо } x \in X_2^{\psi}. \end{cases}$$

За лемою 1.9, $(\tau,\sigma) \in Et(\alpha)$. Оскільки при цьому $\tau^* = \sigma^*$, то достатньо охарактеризувати одне з перетворень ендотопізму $(\tau,\sigma) \in Et(\alpha)$, наприклад, τ. Розглянемо такі випадки.

1) $|A \cap X\varphi| = 0$. Тоді $A \subseteq X_1^{\varphi}$, і за побудовою τ маємо $|Y\tau| = 1$ для будь-якого $Y \in X/\alpha$.

2) $|A \cap X\varphi| = 1$. Тоді $A \subseteq X\varphi \cup X_2^{\varphi}$.

Якщо $Y\varphi \cap A = \varnothing$ для будь-якого $Y \in X/\alpha$, $Y \neq A$, то $A\tau \subset A$ і $|Y\tau| = 1$ для будь-якого $Y \in X/\alpha$. Якщо ж $Y\varphi \cap A \neq \varnothing$ хоча б для одного $Y \in X/\alpha$, $Y \neq A$, то $A\varphi^{-1} = \bigcup\limits_{Y \in A\tau^{*-1}} Y$. З побудови τ для будь-якого $x \in A$ отримуємо $x\tau = a$, де $a \in A\varphi^{-1}$, і $|Y\tau| = 1$ для будь-якого $Y \in X/\alpha$.

3) $|A \cap X\varphi| \geq 2$. Тоді $A \subseteq X\varphi \cup X_2^{\varphi}$ і з умови на α маємо: $Y\varphi \cap A = \varnothing$ для будь-якого $Y \in X/\alpha$, $Y \neq A$. Це означає, що $A\tau \subseteq A$ і $|Y\tau| = 1$ для будь-якого $Y \in X/\alpha$, $Y \neq A$.

Отож, беручи до уваги характеристику перетворень τ і σ, за лемою 1.15, отримуємо $(\tau,\sigma) \in LEt(\alpha)$.

Крім того, для будь-якого $x \in X$ маємо $(x\varphi)\tau \in x\varphi\varphi^{-1}$, $(x\psi)\sigma \in x\psi\psi^{-1}$, звідки

$$(x\varphi)\tau\varphi \in (x\varphi)\varphi^{-1}\varphi = \{x\varphi\},$$

$$(x\psi)\sigma\psi \in (x\psi)\psi^{-1}\psi = \{x\psi\}.$$

Отже, $(\varphi\tau\varphi,\psi\sigma\psi)=(\varphi,\psi)$ і, як результат, $(\varphi,\psi)(\tau,\sigma)(\varphi,\psi)=(\varphi,\psi)$.

Для випадку $\alpha = i_X$ зрозуміло, що $LEt(\alpha)=Et(\alpha)$, тому напівгрупа $LEt(\alpha)$ є регулярною.

(iv) Припустимо, що напівгрупа $SEt(\alpha)$ регулярна, але фактор-множина X/α нескінченна. Нехай $A \in X/\alpha$ – фіксований клас, $\tau,\sigma \in End(\alpha)$ такі, що τ^*, σ^* є рівними ін'єктивними перетвореннями й $A \notin (X/\alpha)\tau^*$. Зазначимо, що вказані ендоморфізми τ, σ завжди існують, бо X/α – нескінченна фактор-множина. За лемами 1.9 і 1.11, $(\tau,\sigma)\in SEt(\alpha)$. Тоді знайдеться $(\varphi,\psi)\in SEt(\alpha)$ такий, що $(\tau,\sigma)=(\tau,\sigma)(\varphi,\psi)(\tau,\sigma)$, звідки $\tau^*\varphi^*\tau^*=\tau^*$. Це означає, що $\varphi^*\big|_{(X/\alpha)\tau^*}=\tau^{*-1}$ і образ звуження $\varphi^*\big|_{(X/\alpha)\tau^*}$ збігається з X/α. Оскільки при цьому $A \notin (X/\alpha)\tau^*$, то область визначення $\varphi^*\big|_{(X/\alpha)\tau^*}$ не містить *A*. Отже, отримуємо суперечність ін'єктивності φ.

Нехай тепер фактор-множина X/α є скінченною і $(\tau,\sigma)\in SEt(\alpha)$. Очевидно, τ^* – підстановка фактор-множини X/α. Визначимо перетворення φ і ψ множини X за формулами:

$$x\varphi = \begin{cases} a,\ a\in x\tau^{-1}, & \textit{якщо } x\in X\tau, \\ b,\ b\in \overline{x}\tau^{-1}, & \textit{якщо } x\notin X\tau, \end{cases}$$

$$x\psi = \begin{cases} c,\ c\in x\sigma^{-1}, & \textit{якщо } x\in X\sigma, \\ d,\ d\in \overline{x}\sigma^{-1}, & \textit{якщо } x\notin X\sigma \end{cases}$$

для будь-якого $x\in X$.

Зрозуміло, що $(\varphi,\psi)\in SEt(\alpha)$. Аналогічно тому, як у (iii), можна показати, що $(\tau,\sigma)(\varphi,\psi)(\tau,\sigma)=(\tau,\sigma)$. □

Напівгрупа S називається *корегулярною* [71], якщо для будь-якого

$a \in S$ існує такий $x \in S,$ що

$$axa = xax = a.$$

Зрозуміло, що коли напівгрупа S корегулярна, для будь-якого $a \in S$ виконуються рівності:

$$a^3 = a(xax)a = (axa)xa = axa = a.$$

Корегулярність напівгруп ендотопізмів усіх типів довільного відношення еквівалентності встановлює така теорема.

Теорема 2.7. *(i) Напівгрупа $Et(\alpha),\ \alpha \in Eq(X),$ корегулярна тоді й тільки тоді, коли $|X| \in \{1,2\}$.*

(ii) Напівгрупа $HEt(\alpha)$, де α – тривіальна еквівалентність, корегулярна тоді й тільки тоді, коли $Et(\alpha)$ корегулярна.

(iii) Напівгрупа $SEt(\alpha),\ \alpha \in Eq(X),$ корегулярна тоді й тільки тоді, коли $|X| \in \{1,2\}$ або $|X| = 3,\ \alpha \notin \{i_X, \omega_X\}$.

(iv) Напівгрупа $LEt(\alpha)$, де $\alpha \in Eq^1(X)$ або $\alpha = i_X$, корегулярна тоді й тільки тоді, коли напівгрупа $SEt(\alpha)$ корегулярна.

(v) Група $At(\alpha),\ \alpha \in Eq(X),$ корегулярна тоді й тільки тоді, коли напівгрупа $SEt(\alpha)$ корегулярна або $|X| = 4,\ |X/\alpha| = 3.$

Доведення. (i) Нехай X – така множина, що $|X| \geq 3,$ і $Et(\alpha)$ – корегулярна напівгрупа. Виберемо елементи $a, b \in X,\ a \neq b.$ Якщо $\alpha = i_X$, то пара (φ, φ), де

$$x\varphi = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in \{a, b\}, \\ b & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

для будь-якого $x \in X$, є ендотопізмом еквівалентності α. При цьому з умови корегулярності (φ, φ) для будь-якого $x \in X \setminus \{a, b\}$ маємо:

$$b = x\varphi = x(\varphi\varphi\varphi) = (x\varphi)\varphi\varphi = (b\varphi)\varphi = a\varphi = a,$$

що суперечить вибору елементів $a,\ b.$

Нехай $\alpha \neq i_X$. Тоді існують різні $u, v \in X$ такі, що $(u,v) \in \alpha$ і $(v,u) \in \alpha$. Упорядкована пара (τ, σ), де

$$x\tau = \begin{cases} u, & якщо\ x \in \{u,v\}, \\ v & в\ інших\ випадках, \end{cases} \qquad x\sigma = \begin{cases} v, & якщо\ x \in \{u,v\}, \\ u & в\ інших\ випадках \end{cases}$$

для всіх $x \in X$, за лемою 1.9, є ендотопізмом еквівалентності α. При цьому для будь-якого $x \in X \setminus \{u,v\}$ з умови корегулярності (τ, σ) маємо:

$$(v,u) = (x\tau, x\sigma) = (x(\tau\tau\tau), x(\sigma\sigma\sigma)) = ((x\tau)\tau\tau, (x\sigma)\sigma\sigma) =$$
$$= ((v\tau)\tau, (u\sigma)\sigma) = (u\tau, v\sigma) = (u,v),$$

звідки $u = v$. Отримана суперечність завершує доведення необхідності твердження.

Достатність твердження (i) є очевидною.

(ii) Доведення випливає з (i) і того, що $HEt(\alpha) = Et(\alpha)$ для тривіальної еквівалентності α.

(iii) Нехай $SEt(\alpha)$, де $\alpha \in Eq(X)$, – корегулярна напівгрупа. Розглянемо можливі випадки.

1) $\alpha = i_X$, $|X| \geq 3$. Зафіксуємо три різні елементи $a, b, c \in X$ і визначимо перетворення φ, ψ множини X у такий спосіб:

$$x\varphi = x\psi = \begin{cases} b, & якщо\ x = a, \\ c, & якщо\ x = b, \\ a, & якщо\ x = c, \\ x & в\ інших\ випадках \end{cases}$$

для будь-якого $x \in X$.

За лемами 1.9 і 1.11, $(\varphi, \psi) \in SEt(\alpha)$. Враховуючи, що φ^3 є тотожним перетворенням множини X, з умови корегулярності (φ, ψ) маємо $a = b = c$, що суперечить вибору елементів $a, b, c \in X$.

2) $\alpha = \omega_X$, $|X| \geq 3$. Оскільки $SEt(i_X) \subset SEt(\omega_X)$, і $SEt(i_X)$ не є корегулярною напівгрупою, отримуємо суперечність до корегулярності $SEt(\omega_X)$.

3) $\alpha \notin \{i_X, \omega_X\}$, $|X| > 3$. Припустимо, що $|X/\alpha| \geq 3$. Зафіксуємо три різні класи $A, B, C \in X/\alpha$ і виберемо $\varphi,\ \psi \in End(\alpha)$ такі, що φ^* – ін'єкція, $\varphi^*\big|_{\{A,B,C\}} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ і $\psi^* = \varphi^*$.

За лемами 1.9 і 1.11, $(\varphi,\psi) \in SEt(\alpha)$. З умови корегулярності (φ,ψ) маємо $(\varphi^3,\psi^3) = (\varphi,\psi)$, звідки $(\varphi^*)^3 = \varphi^*$. Враховуючи, що $(\varphi^*)^3\big|_{\{A,B,C\}}$ – тотожне перетворення, отримуємо $A = A(\varphi^*)^3 = A\varphi^* = B$. А це суперечить вибору класів $A, B \in X/\alpha$. Отож, $|X/\alpha| = 2$.

Нехай $X/\alpha = \{D, E\}$. Припустимо, що один з класів, наприклад D, має потужність ≥ 3. Позначимо через T множину пар $(f, g) \in SEt(\alpha)$ таких, що $f\big|_E$ – тотожне перетворення і $g\big|_E = f\big|_E$. Зрозуміло, що T є піднапівгрупою в $SEt(\alpha)$, причому T є ізоморфною $SEt(\omega_D)$, $|D| \geq 3$. За п. 2) цього доведення $SEt(\omega_D)$ не є корегулярною напівгрупою, що суперечить корегулярності $SEt(\alpha)$. Отже, $|D| = |E| = 2$.

Нехай

$$X = \{a, b, c, d\},$$
$$\alpha = i_X \cup \{(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)\}.$$

Тоді

$$(\varphi,\psi) = \left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & c & a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & d & b & a \end{pmatrix}\right) \in SEt(\alpha),$$

проте

$$(\varphi,\psi)^3 = \left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & c & a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & d & a & a \end{pmatrix}\right) \neq (\varphi,\psi),$$

що суперечить корегулярності напівгрупи $SEt(\alpha)$.

Достатність твердження встановлюється безпосередньою перевіркою.

(iv) Необхідність твердження випливає з очевидного факту, що будь-яка піднапівгрупа корегулярної напівгрупи є корегулярною.

Нехай напівгрупа $SEt(\alpha)$, де $\alpha \in Eq^1(X)$ або $\alpha = i_X$, є корегулярною. За п. (iii) $|X| = 2$ або $|X| = 3$, $\alpha \notin \{i_X, \omega_X\}$. Якщо $|X| = 2$, то α – тривіальне відношення і $LEt(\alpha) = Et(\alpha)$, звідки за п. (i) $LEt(\alpha)$ є корегулярною. Якщо ж $X/\alpha = \{A, B\}$, де $A = \{1\}$, $B = \{2,3\}$, то $LEt(\alpha) = SEt(\alpha) \bigcup I$. Тут I позначає ідеал $LEt(\alpha)$, який складається з пар (ν_i, ν_j) сталих перетворень ν_i, ν_j множини X таких, що $(i, j) \in \alpha$. Очевидно, ідеал I є корегулярним. Отже, $LEt(\alpha)$ – корегулярна напівгрупа.

(v) Нехай $\alpha \in Eq(X)$ і $At(\alpha)$ – корегулярна група. Розглянемо такі випадки.

1) Серед класів еквівалентності множини X за еквівалентністю α існує принаймні один клас потужності ≥ 3. Візьмемо клас $K \in X/\alpha$ такий, що $|K| \geq 3$. Аналогічно п. (iii), 3) цієї теореми можна показати, що $At(\alpha)$ містить підгрупу, що є ізоморфною $At(i_K)$, яка, як відомо з п. (iii),1), не є корегулярною.

2) Серед класів з X/α існують принаймні три рівнопотужні класи. Нехай $A, B, C \in X/\alpha$ – різні класи однакової потужності і $\varphi, \psi \in Aut(\alpha)$ такі, що $\varphi^*\big|_{\{A,B,C\}} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ і $\psi^* = \varphi^*$. Тоді, за лемою 1.10, $(\varphi, \psi) \in At(\alpha)$ й аналогічно п. (iii), 3) дійдемо до суперечності вибору класів.

3) Серед класів еквівалентності з X/α існує рівно два класи, потужність кожного з яких дорівнює 2. Нехай $K, P \in X/\alpha$ такі, що $K = \{k_1, k_2\}$, $P = \{p_1, p_2\}$. Визначимо перетворення φ, ψ множини X, прийнявши:

$$x\varphi = \begin{cases} p_1, & якщо\ x = k_1, \\ p_2, & якщо\ x = k_2, \\ k_2, & якщо\ x = p_1, \\ k_1, & якщо\ x = p_2, \\ x & в\ інших\ випадках, \end{cases} \qquad x\psi = \begin{cases} p_2, & якщо\ x = k_1, \\ p_1, & якщо\ x = k_2, \\ k_1, & якщо\ x = p_1, \\ k_2, & якщо\ x = p_2, \\ x & в\ інших\ випадках \end{cases}$$

для будь-якого $x \in X$.

За лемою 1.10, $(\varphi,\psi) \in At(\alpha)$, при цьому $(\varphi,\psi)^3 = (\psi,\varphi)$, звідки за корегулярністю $At(\alpha)$ маємо $\varphi = \psi$. А це суперечить вибору підстановок $\varphi,\ \psi$.

Отже, виключаючи всі випадки, для яких група $At(\alpha)$ не є корегулярною, з 1) – 3) отримуємо: $|X| = 4$, $|X/\alpha| = 3$ або $|X| = 3$, $\alpha \notin \{i_X, \omega_X\}$, або $|X| \in \{1,2\}$.

Якщо напівгрупа $SEt(\alpha)$ є корегулярною, то $At(\alpha)$ як підгрупа $SEt(\alpha)$ також є корегулярною. Нехай тепер $X = \{1,2,3,4\}$ і $X/\alpha = \{A,B,C\}$, де $A = \{1,2\}$, $B = \{3\}$, $C = \{4\}$. У цьому випадку

$$At(\alpha) = i_{Aut(\alpha)} \cup$$

$$\cup \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right) \right\}.$$

Звідси зрозуміло, що група $At(\alpha)$ є корегулярною. □

2.4. Ендотипи відношень еквівалентності

Основним поняттям, яке вивчається в цьому підрозділі, є поняття ендотипу реляційної системи. Поняття ендотипу як числової характеристики, що зв’язує множини шести типів ендоморфізмів, було введене М. Боттчером та У. Кнауером у [17] для симетричних бінарних відношень, а пізніше узагальнене А. В. Решетниковим у [74] і для відношень довільної арності. Використовуючи це поняття, можна класифікувати відношення за їх ендотипами відносно ендоморфізмів. Так, у [59] знайдено ендотипи узагальнених полігонів, у [60] – ендотипи доповнень скінченного шляху, а в [61] – ендотипи графів N-призм. У [75] класифіковано всі відношення еквівалентності за значенням їх ендотипу відносно ендоморфізмів. У дисертаційній роботі визначення ендотипу поширено на випадок ендотопізмів бінарних відношень і класифіковано всі еквівалентності за їх ендотипом відносно ендотопізмів. Знайдено всі ендотипи строгих часткових відношень еквівалентності, що доповнює основний результат з [75].

Нехай X – довільна непорожня множина, ρ – бінарне відношення на множині X. Ланцюгу включень

$$Et(\rho)\supseteq HEt(\rho)\supseteq LEt(\rho)\supseteq QEt(\rho)\supseteq SEt(\rho)\supseteq At(\rho)$$

відповідає послідовність $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$, де $s_i \in \{0,1\}$, $i \in \{1,\ldots,5\}$. При цьому $s_i = 0$, якщо на i-тій позиції в наведеній вище послідовності включень множини збігаються, $s_i = 1$ в інших випадках. Наприклад, $s_3 = 0$ означає, що $LEt(\rho) = QEt(\rho)$, а $s_5 = 1$ вказує на $SEt(\rho) \neq At(\rho)$. Значення суми $\sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1}$ називається *ендотипом* бінарного відношення ρ відносно його ендотопізмів і позначається через $Ettype(X,\rho)$. Якщо у вказаній вище послідовності включень множини ендотопізмів замінити на відповідні множини ендоморфізмів, то отримаємо поняття ендотипу $Endotype(X,\rho)$ бінарного відношення ρ відносно його ендоморфізмів [17].

Теорема 2.8. *Для будь-якої еквівалентності α на множині X*

$$Ettype(X,\alpha)=\begin{cases}0, & \text{якщо } |X|=1,\\ 4, & \text{якщо } 2\le |X|<\infty,\ \alpha=i_X,\\ 16, & \text{якщо } 2\le |X|,\ \alpha=\omega_X,\\ 20, & \text{якщо } |X|=\infty,\ \alpha=i_X,\\ 23, & \text{якщо } \alpha\ne i_X,\ \alpha\ne\omega_X.\end{cases}$$

Доведення. 1) Нехай X – одноелементна множина. Тоді $Eq(X)$ вичерпується тривіальною еквівалентністю $\alpha = i_X = \omega_X$, при цьому очевидно, що $At(\alpha) = Et(\alpha)$ і, як наслідок,

$$Ettype(X,\alpha) = \sum_{i=1}^{5} 0 \cdot 2^{i-1} = 0.$$

2) Нехай X – скінченна множина, $|X| \geq 2$ і $\alpha = i_X$. За лемами 1.10, 1.11, $(\tau,\sigma) \in At(\alpha)$ для будь-якого $(\tau,\sigma) \in SEt(\alpha)$, а тому $At(\alpha) = SEt(\alpha)$.

Визначимо перетворення τ множини X таким чином: $X\tau = \{a\}$, $a \in X$. За лемами 1.9 і 1.15, $(\tau,\tau) \in LEt(\alpha)$, при цьому $(\tau,\tau) \notin QEt(\alpha)$, бо $\tau^* \in \Im(X/\alpha)$ не є ін’єктивним перетворенням. Отже, $QEt(\alpha) \neq LEt(\alpha)$.

Очевидно, що $LEt(\alpha) = Et(\alpha)$, тоді

$$Ettype(X,\alpha) = \sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1} = 4.$$

3) Нехай $\alpha = \omega_X$, $|X| \geq 2$. У цьому випадку маємо $At(\alpha) = \omega_{S(X)}$ і $SEt(\alpha) = Et(\alpha) = \omega_{\Im(X)}$. Таким чином, отримуємо

$$Ettype(X,\alpha) = \sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1} = 16.$$

4) Якщо X – нескінченна множина і $\alpha = i_X$, то на відміну від попереднього п. 3) $At(\alpha) \neq SEt(\alpha)$. Приклад відповідного ендотопізму $(\tau,\sigma) \in SEt(\alpha) \setminus At(\alpha)$ отримуємо при виборі двох різних ін’єкцій $\tau,\sigma \in \Im(X)$, які не є сюр’єкціями. У цьому випадку

$$Et(\alpha) = HEt(\alpha) = LEt(\alpha) \supset QEt(\alpha) = SEt(\alpha) \supset At(\alpha),$$

отже,

$$Ettype(X,\alpha) = \sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1} = 20.$$

5) Нехай $\alpha \in Eq(X)$ – нетривіальне відношення еквівалентності. Тоді $|X| \geq 3$, $|X/\alpha| \geq 2$ і у фактор-множині X/α існує принаймні один клас, потужність якого не менше 2. Маємо $At(\alpha) \neq SEt(\alpha)$, що випливає з лем

1.10, 1.11.

Візьмемо різні $a,b\in X$ такі, що $(a,b)\in\alpha$, і визначимо перетворення τ і σ множини X таким чином: $X\tau=\{a\}$, $X\sigma=\{b\}$. За лемами 1.9 і 1.15, $(\tau,\sigma)\in LEt(\alpha)$, при цьому, як випливає з леми 1.13, $(\tau,\sigma)\notin QEt(\alpha)$. Тому $QEt(\alpha)\neq LEt(\alpha)$.

Визначимо тепер перетворення τ і σ множини X за формулами:

$$\overline{x}\tau=\begin{cases}\{a,b\}, & \text{якщо } \overline{x}=\overline{a},\\ \{a\} & \text{в інших випадках,}\end{cases}$$

$$\overline{x}\sigma=\begin{cases}\{a,b\}, & \text{якщо } \overline{x}=\overline{a},\\ \{b\} & \text{в інших випадках}\end{cases}$$

для всіх $\overline{x}\in X/\alpha$. За лемами 1.9 і 1.17, маємо $(\tau,\sigma)\in HEt(\alpha)$, однак $(\tau,\sigma)\notin LEt(\alpha)$, що випливає з леми 1.15. Звідси $LEt(\alpha)\neq HEt(\alpha)$.

Нарешті, визначимо $\tau,\sigma\in\Im(X)$, прийнявши для всіх $\overline{x}\in X/\alpha$

$$\overline{x}\tau=\begin{cases}\{a\}, & \text{якщо } \overline{x}=\overline{a},\\ \{b\} & \text{в інших випадках,}\end{cases}\qquad \overline{x}\sigma=\begin{cases}\{b\}, & \text{якщо } \overline{x}=\overline{a},\\ \{a\} & \text{в інших випадках}.\end{cases}$$

За лемою 1.9, $(\tau,\sigma)\in Et(\alpha)$, проте, як випливає з леми 1.17, $(\tau,\sigma)\notin HEt(\alpha)$. Звідси $HEt(\alpha)\neq Et(\alpha)$ і, як наслідок, отримуємо такий ланцюг включень:

$$Et(\alpha)\supset HEt(\alpha)\supset LEt(\alpha)\supset QEt(\alpha)=SEt(\alpha)\supset At(\alpha).$$

Отже, $Ettype(X,\alpha)=\sum_{i=1}^{5}s_i\cdot 2^{i-1}=23.$ □

Нехай X – довільна непорожня множина, $\alpha\in Eq(X)$. Нагадаємо, якщо $f:X\to X$ – деяке перетворення і $S\subseteq X$, то через $f|_S$ позначається звуження перетворення f на підмножину S.

Лема 2.9. [65] *Перетворення* $f\in\Im(X)$ *є ендоморфізмом відношення* $\alpha\in Eq(X)$ *тоді й тільки тоді, коли для кожного класу еквівалентності* $A\in X/\alpha$ *існує клас* $B\in X/\alpha$, *такий що* $Af\subseteq B$.

Лема 2.10. [76] *(i) Ендоморфізм* $f \in End(X,\alpha)$ *відношення* $\alpha \in Eq(X)$ *є напівсильним тоді й тільки тоді, коли для будь-якого* $B \in X/\alpha$, *такого що* $B \cap im(f) \neq \varnothing$, *і будь-яких* $a,b \in B \cap im(f)$ *існує* $A \in X/\alpha$, *такий що* $a,b \in Af$.

(ii) Ендоморфізм $f \in End(X,\alpha)$ *відношення* $\alpha \in Eq(X)$ *є локально сильним тоді й тільки тоді, коли для будь-яких* $A,B,C \in X/\alpha$ *з того, що* $Af \subseteq C$ *і* $Bf \subseteq C$, *випливає* $Af = Bf$.

(iii) Для будь-якого відношення $\alpha \in Eq(X)$ *маємо*

$$QEnd(X,\alpha) = SEnd(X,\alpha).$$

Лема 2.11. *Ендоморфізм* $f \in End(X,\alpha)$ *відношення* $\alpha \in Eq(X)$ *є сильним тоді й тільки тоді, коли*

$$\tau^* : X/\alpha \to X/\alpha : \overline{a} \to \overline{af}$$

є ін'єктивним перетворенням.

Доведення леми 2.11 випливає з леми 3.1 [16]. □

Нагадаємо, що симетричне й транзитивне бінарне відношення ρ, визначене на множині X, називається відношенням часткової еквівалентності на X.

Нехай A – непорожня підмножина множини X, α_A – часткова еквівалентність на X. Ендотопізми довільної часткової еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ описує така лема.

Лема 2.12. *(i) Перетворення* $f \in \Im(X)$ *є ендоморфізмом часткової еквівалентності* $\alpha_A \in Eq_A(X)$ *тоді й тільки тоді, коли* $f|_A \in End(A,\alpha_A)$.

(ii) Підстановка f *множини* X *є автоморфізмом часткової еквівалентності* $\alpha_A \in Eq_A(X)$ *тоді й тільки тоді, коли* $f|_A \in Aut(A,\alpha_A)$.

(iii) Ендоморфізм f *часткової еквівалентності* $\alpha_A \in Eq_A(X)$ *є напівсильним ендоморфізмом тоді й тільки тоді, коли для будь-якого класу* $B \in A/\alpha_A$ *такого, що* $B \cap im(f) \neq \varnothing$, *і будь-яких* $a,b \in B \cap im(f)$ *існує*

$Y \in A/\alpha_A$ *такий, що* $a,b \in Yf$.

(iv) Ендоморфізм f *часткової еквівалентності* $\alpha_A \in Eq_A(X)$ *є локально сильним ендоморфізмом тоді й тільки тоді, коли*

$$(X \setminus A)f \subseteq X \setminus A \text{ i } f|_A \in LEnd(A,\alpha_A).$$

(v) Ендоморфізм f *часткової еквівалентності* $\alpha_A \in Eq_A(X)$ *є сильним ендоморфізмом тоді й тільки тоді, коли*

$$(X \setminus A)f \subseteq X \setminus A \text{ i } f|_A \in SEnd(A,\alpha_A).$$

(vi) Ендоморфізм f *часткової еквівалентності* $\alpha_A \in Eq_A(X)$ *є квазісильним ендоморфізмом тоді й тільки тоді, коли* f *– сильний ендоморфізм.*

Доведення. Твердження (iii) доводиться аналогічно тому, як лема 2 [76], а решта тверджень (i), (ii), (iv)-(vi) – подібно лемам 2.9 – 2.11 цього підрозділу. □

Відзначимо, що з пунктів (v), (vi) леми 2.12 випливає, що $QEnd(X,\alpha_A) = SEnd(X,\alpha_A)$ для будь-якого $\alpha_A \in Eq_A(X)$.

Нехай $A \subset X$, $\alpha_A \in Eq_A(X)$ – відношення строгої часткової еквівалентності на X .

Класифікацію строгих часткових еквівалентностей за значенням їх ендотипу відносно ендоморфізмів встановлює

Теорема 2.13. *Нехай* $A \subset X$ *і* $A \neq \varnothing$. *Для будь-якої строгої часткової еквівалентності* $\alpha_A \in Eq_A(X)$:

$$Endotype(X,\alpha_A) = \begin{cases} 2, & \text{якщо } |A| = 1,\ |X| = 2, \\ 7, & \text{якщо } 2 \leq |A| < \infty, |X \setminus A| = 1,\ \alpha_A = i_A, \\ 18, & \text{якщо } |A| = 1,\ 2 < |X|, \\ 19, & \text{якщо } 2 \leq |A|,\ \alpha_A = \omega_A, \\ 23, & \text{якщо } 2 \leq |A| < \infty,\ i_A \neq \alpha_A \neq \omega_A \text{ або} \\ & \quad 2 \leq |A| < \infty,\ 1 < |X \setminus A|,\ \alpha_A = i_A \text{ або} \\ & \quad |A| = \infty,\ \alpha_A \neq \omega_A. \end{cases}$$

Доведення. 1) Нехай $|X|=2,\ A\subset X$ – одноелементна підмножина. Тоді $Eq_A(X)$ вичерпується еквівалентністю $\alpha_A=i_A=\omega_A$, при цьому, як випливає з леми 2.12, $End(X,\alpha_A)=HEnd(X,\alpha_A)$ і потужність цих множин дорівнює 2, а $LEnd(X,\alpha_A)=Aut(X,\alpha_A)$ з потужністю 1, отже, $Endotype(X,\alpha_A)=\sum_{i=1}^{5}s_i\cdot 2^{i-1}=2.$

2) Нехай $A\subset X$ – скінченна множина, що містить не менше двох елементів, $|X\setminus A|=1$ і α_A – тотожне відношення. Візьмемо різні $a,b\in A$ і визначимо перетворення f множини X таким чином:

$$xf=\begin{cases}a,\ \textit{якщо}\ x\in A,\\ b,\ \textit{якщо}\ x\notin A\end{cases}$$

для будь-якого $x\in X$. Неважко переконатися, що $f\in End(X,\alpha_A)$, проте $f\notin HEnd(X,\alpha_A)$, що випливає з п. (iii) леми 2.12. Аналогічно можна показати, що $HEnd(X,\alpha_A)\neq LEnd(X,\alpha_A)\neq QEnd(X,\alpha_A)$. Справді, визначивши $f:X\to X$ як

$$xf=\begin{cases}a,\ \textit{якщо}\ x\in A\setminus\{b\},\\ b,\ \textit{якщо}\ x\in\{b\}\cup X\setminus A\end{cases}$$

для різних $a,b\in A$, дійдемо до $f\in HEnd(X,\alpha_A)\setminus LEnd(X,\alpha_A)$.
Визначивши перетворення f множини X за формулою

$$xf=\begin{cases}a,\ \textit{якщо}\ x\in A,\\ x,\ \textit{якщо}\ x\notin A,\end{cases}$$

отримаємо приклад $f\in LEnd(X,\alpha_A)\setminus QEnd(X,\alpha_A)$. Оскільки $|X\setminus A|=1$, $\alpha_A=i_A$ і A – скінченна множина, то за лемою 2.11, п. (ii) і лемою 2.12, п. (v), $f\in Aut(X,\alpha_A)$ для будь-якого $f\in SEnd(X,\alpha_A)$, тому $Aut(X,\alpha_A)=SEnd(X,\alpha_A)$. Відтак,

$$End(X,\alpha_A)\supset HEnd(X,\alpha_A)\supset LEnd(X,\alpha_A)\supset QEnd(X,\alpha_A)=$$
$$=SEnd(X,\alpha_A)=Aut(X,\alpha_A).$$

Отже, $Endotype(X,\alpha_A)=\sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1}=7.$

3) Нехай $A=\{a\}$, X – множина, що містить більше двох елементів. Як і в п. 1), $Eq_A(X)$ вичерпується еквівалентністю $\alpha_A=i_A=\omega_A$, при цьому для ендоморфізму f будь-якого типу очевидно, що $af=a$. За п. (iii) леми 2.12, $f\in HEnd(X,\alpha_A)$ для будь-якого $f\in End(X,\alpha_A)$, тому $HEnd(X,\alpha_A)=End(X,\alpha_A)$. Умови пунктів (iv)-(vi) леми 2.12 у цьому випадку визначають один і той же ендоморфізм, не обов'язково бієктивний, тому $LEnd(X,\alpha_A)=SEnd(X,\alpha_A)$ і $SEnd(X,\alpha_A)\neq Aut(X,\alpha_A)$. Таким чином,

$$End(X,\alpha_A)=HEnd(X,\alpha_A)\supset LEnd(X,\alpha_A)=QEnd(X,\alpha_A)=$$
$$=SEnd(X,\alpha_A)\supset Aut(X,\alpha_A),$$

отже, $Endotype(X,\alpha_A)=\sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1}=18.$

4) Нехай A – множина, що містить не менше двох елементів і α_A – універсальне відношення. Візьмемо різні $a,b\in A$ і визначимо перетворення $f:X\to X$ за формулою:

$$xf=\begin{cases} a, \ \text{якщо} \ x\in A, \\ b, \ \text{якщо} \ x\notin A \end{cases}$$

для будь-якого $x\in X$. За лемою 2.11 і п. (i) леми 2.12, $f\in End(X,\alpha_A)$, але $f\notin HEnd(X,\alpha_A)$, що випливає з п. (iii) леми 2.12. Якщо $Xf=\{a\}$, матимемо $f\in HEnd(X,\alpha_A)\setminus LEnd(X,\alpha_A)$. Оскільки $|A/\alpha_A|=1$, умови пунктів (iv)-(vi) леми 2.12 визначають один і той же не обов'язково бієктивний ендоморфізм, тому $LEnd(X,\alpha_A)=SEnd(X,\alpha_A)$ і $SEnd(X,\alpha_A)\neq Aut(X,\alpha_A)$. Таким чином,

$$End(X,\alpha_A)\supset HEnd(X,\alpha_A)\supset LEnd(X,\alpha_A)=QEnd(X,\alpha_A)=$$
$$=SEnd(X,\alpha_A)\supset Aut(X,\alpha_A),$$

отже, $Endotype(X,\alpha_A)=\sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1}=19.$

5) a). Нехай A – скінченна множина, що містить не менше двох елементів, і $\alpha_A \neq i_A$, $\alpha_A \neq \omega_A$. Тоді $|A|\geq 3$, $|A/\alpha_A|\geq 2$ і в A/α_A існує принаймні один клас, потужність якого не менше 2. Позначимо його через B. Візьмемо різні $a,b\in B$ і визначимо перетворення $f: X\to X$, прийнявши

$$xf=\begin{cases} a, \ якщо \ x\in A, \\ b, \ якщо \ x\notin A \end{cases}$$

для будь-якого $x\in X$. Неважко переконатися, що $f\in End(X,\alpha_A)$, але $f\notin HEnd(X,\alpha_A)$, що випливає з п. (iii) леми 2.12. Якщо $Xf=\{a\}$, будемо мати приклад $f\in HEnd(X,\alpha_A)\setminus LEnd(X,\alpha_A)$.

Визначимо тепер перетворення f множини X, прийнявши

$$xf=\begin{cases} a, \ якщо \ x\in A, \\ x, \ якщо \ x\notin A \end{cases}$$

для всіх $x\in X$. За пунктами (iv) та (v) леми 2.12, $f\in LEnd(X,\alpha_A)$, проте $f\notin SEnd(X,\alpha_A)$, що випливає з п. (v) леми 2.12. Звідси $SEnd(X,\alpha_A)\neq LEnd(X,\alpha_A)$. Нерівність $Aut(X,\alpha_A)\neq SEnd(X,\alpha_A)$ є очевидною. Отже,

$$End(X,\alpha_A)\supset HEnd(X,\alpha_A)\supset LEnd(X,\alpha_A)\supset QEnd(X,\alpha_A)= \\ =SEnd(X,\alpha_A)\supset Aut(X,\alpha_A)$$

і $Endotype(X,\alpha_A)=\sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1}=23.$

b) Нехай A – скінченна непорожня множина з $|A|\geq 2$, $|X\setminus A|>1$ і $\alpha_A=i_A$. Ланцюг включень

$$End(X,\alpha_A)\supset HEnd(X,\alpha_A)\supset LEnd(X,\alpha_A)\supset QEnd(X,\alpha_A)=SEnd(X,\alpha_A)$$

доводиться аналогічно тому, як у п. 2) доведення цієї теореми. Оскільки множина $X\setminus A$ містить не менше двох елементів, то виберемо в ній довільний елемент a і визначимо перетворення f множини X таким чином:

$$xf = \begin{cases} x, \; якщо \;\; x \in A, \\ a, \; якщо \;\; x \notin A \end{cases}$$

для будь-якого $x \in X$. Зрозуміло, що $f \in SEnd(X,\alpha_A) \setminus Aut(X,\alpha_A)$ і, як результат, $Endotype(X,\alpha_A) = \sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1} = 23.$

c) Нехай A – нескінченна множина і $\alpha_A \neq \omega_A$. Розглянемо випадок, коли $\alpha_A = i_A$. Оскільки множина A нескінченна, на відміну від пункту 2), маємо $SEnd(X,\alpha_A) \neq Aut(X,\alpha_A)$. Приклад ендоморфізму $f \in SEnd(X,\alpha_A) \setminus Aut(X,\alpha_A)$ отримуємо при виборі на звуженні $f|_A$ ін'єкції, яка не є сюр'єкцією. У цьому випадку

$$End(X,\alpha_A) \supset HEnd(X,\alpha_A) \supset LEnd(X,\alpha_A) \supset QEnd(X,\alpha_A) =$$
$$= SEnd(X,\alpha_A) \supset Aut(X,\alpha_A).$$

Отже, $Endotype(X,\alpha_A) = \sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1} = 23.$

Якщо ж $\alpha_A \neq i_A$, $\alpha_A \neq \omega_A$, то, міркуючи аналогічно тому, як у п. 5) а), приходимо до $Endotype(X,\alpha_A) = 23.$ Теорему доведено. □

Отож, усі можливі значення ендотипу довільного відношення еквівалентності, знайдені в [75], і всі можливі значення ендотипу довільного строгого часткового відношення еквівалентності, отримані в теоремі 2.13, дають повну класифікацію всіх часткових еквівалентностей α_A, $A \subseteq X$, за їх ендотипами відносно ендоморфізмів.

2.5. Ендоспектр відношень еквівалентності

У цьому підрозділі поняття спектра ендоморфізма симетричних бінарних відношень, запропоноване М. Боттчером та У. Кнауером [17], поширено на випадок ендотопізмів бінарних відношень. Досліджено ендоспектр довільного відношення еквівалентності на скінченній множині відносно його ендотопізмів. Наведено приклад обчислення ендоспектра заданої еквівалентності.

Нехай X – скінченна непорожня множина, ρ – бінарне відношення на множині X. Послідовності включень

$$Et(\rho) \supseteq HEt(\rho) \supseteq LEt(\rho) \supseteq QEt(\rho) \supseteq SEt(\rho) \supseteq At(\rho)$$

відповідає послідовність потужностей

$$(|Et(\rho)|, |HEt(\rho)|, |LEt(\rho)|, |QEt(\rho)|, |SEt(\rho)|, |At(\rho)|),$$

яку назвемо *ендоспектром* бінарного відношення ρ відносно його ендотопізмів і позначимо через $Etspec(X, \rho)$.

Нехай α – відношення еквівалентності на множині X, $(\tau, \sigma) \in Et(\alpha)$.

Зауважимо, що для кожного $\alpha \in Eq(X)$ ендоморфізм $\tau : X \to X$ індукує перетворення $\delta_\tau : X/\alpha \to X/\alpha,$ визначене за формулою: $\overline{a}\delta_\tau = \overline{a\tau}$ для всіх $\overline{a} \in X/\alpha$.

Нагадаємо, що через $im(\tau)$ позначається образ множини X при перетворенні $\tau : X \to X$, а через $S(X)$ – симетрична група на X.

Через $B(X/\alpha)$ позначимо множину всіх бієкцій $\eta : X/\alpha \to X/\alpha$ таку, що клас A та його образ $A\eta$ є рівнопотужними для кожного $A \in X/\alpha$. Зрозуміло, що $B(X/\alpha)$ є підгрупою $S(X/\alpha)$.

Нехай $A \in im(\delta_\tau)$ – такий клас, що $\left|A\delta_\tau^{-1}\right| = 1$ і $Y \in A\delta_\tau^{-1}$. Тоді $A\delta_\tau^{-1} = \{Y\}$. Покладемо

$$\min\{|Y|, |A|\} = \begin{cases} |Y|, & \textit{якщо } |Y| < |A|, \\ |A|, & \textit{якщо } |Y| \geq |A|. \end{cases}$$

Позначимо елементи з класу A через $x_1, x_2, \ldots, x_{|A|}$. Для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, \min\{|Y|, |A|\}\}$ покладемо

$$Y\tau_{(i)}=\left\{\tau\in\Im(X)\,\middle|\,Y\tau=\bigcup_{k=1}^{i}\{x_k\}\right\}.$$

Якщо $i=1$, то $Y\tau=\{x_1\}$ і $\left|Y\tau_{(1)}\right|=1$. Через C_n^m позначається число всіх комбінацій без повторень з n елементів по m.

Лема 2.14. *Нехай* $i\in\left\{2,3,...,\min\left\{|Y|,|A|\right\}\right\}$. *Тоді*

$$\left|Y\tau_{(i)}\right|=i^{|Y|}-\sum_{k=1}^{i-1}C_i^k\cdot\left|Y\tau_{(k)}\right| \tag{2.1}$$

Доведення. Доведемо твердження індукцією по i. Якщо $i=2$, то $Y\tau=\{x_1,x_2\}$ для будь-якого $\tau\in Y\tau_{(2)}$. Число $\left|Y\tau_{(2)}\right|$ знайдемо як різницю числа всіх таких перетворень $\tau\in\Im(X)$, що $Y\tau\subseteq\{x_1,x_2\}$, і числа всіх таких перетворень $\tau\in\Im(X)$, що $Y\tau=\{x_j\}$, де $j\in\{1,2\}$, тобто

$$\left|Y\tau_{(2)}\right|=2^{|Y|}-2=2^{|Y|}-C_2^1\cdot\left|Y\tau_{(1)}\right|$$

і рівність (2.1) леми виконується.

Припустимо, що рівність (2.1) виконується для всіх натуральних l, таких що $3\le l<i$, тобто

$$\left|Y\tau_{(l)}\right|=l^{|Y|}-\sum_{k=1}^{l-1}C_l^k\cdot\left|Y\tau_{(k)}\right|.$$

Покажемо, що рівність (2.1) виконується також для i. Зобразимо число $i^{|Y|}$ перетворень множини X, таких що $Y\tau\subseteq\bigcup_{k=1}^{i}\{x_k\}$, у вигляді суми доданків S_m, де S_m $(1\le m\le i)$ – число всіх таких перетворень $\tau\in\Im(X)$, що $1\le|Y\tau|\le i$. З множини елементів $\bigcup_{k=1}^{i}\{x_k\}$ можна утворити C_i^m, $1\le m\le i$, m-елементних підмножин, для кожної з яких існує $\left|Y\tau_{(m)}\right|$ перетворень множини X, таких що $Y\tau\subseteq\bigcup_{k=1}^{i}\{x_k\}$ і $|Y\tau|=m$. Оскільки, згідно з індукційним припущенням, рівність (2.1) виконується для всіх $l\le i-1$, то

$$i^{|Y|}=C_i^1\left|Y\tau_{(1)}\right|+C_i^2\left|Y\tau_{(2)}\right|+\ldots+C_i^{i-1}\left|Y\tau_{(i-1)}\right|+C_i^i\cdot\left|Y\tau_{(i)}\right|=\sum_{k=1}^{i-1}C_i^k\cdot\left|Y\tau_{(k)}\right|+\left|Y\tau_{(i)}\right|,$$

звідки $\left|Y\tau_{(i)}\right|=i^{|Y|}-\sum_{k=1}^{i-1}C_i^k\cdot\left|Y\tau_{(k)}\right|$. Лему доведено. □

Нехай тепер $A\in im(\delta_\tau)$ таке, що $\left|A\delta_\tau^{-1}\right|>1$. Позначимо через M_A клас найменшої потужності з сім'ї $A\delta_\tau^{-1}\cup\{A\}$. Зауважимо, що коли $|A|\le|Y|$ для будь-якого $Y\in A\delta_\tau^{-1}$, то $|Y\tau|\le|A|$.

Позначимо через P_i^A, де $1\le i\le|M_A|$, множину таких перетворень $\tau\in\Im(X)$, що $|Y\tau|=i$ для будь-якого $Y\in A\delta_\tau^{-1}$. Тоді, враховуючи визначені вище потужності $\left|Y\tau_{(i)}\right|$, отримаємо

Лема 2.15. *Нехай* $i\in\{1,2,\ldots,|M_A|\}$. *Тоді*

$$\left|P_i^A\right|=C_{|A|}^i\cdot\prod_{Y\in A\delta_\tau^{-1}}\left|Y\tau_{(i)}\right| \tag{2.2}$$

Доведення. Доведемо лему індукцією по i. База індукції при $i=1$, очевидно, виконується: $\left|P_1^A\right|=|A|=C_{|A|}^1\cdot\prod_{Y\in A\delta_\tau^{-1}}\left|Y\tau_{(1)}\right|$. Припустимо, що рівність (2.2) є правильною для всіх натуральних l таких, що $2\le l<i$, тобто

$$\left|P_l^A\right|=C_{|A|}^l\cdot\prod_{Y\in A\delta_\tau^{-1}}\left|Y\tau_{(l)}\right|.$$

Покажемо, що рівність (2.2) виконується також для i. З множини A можна вибрати $C_{|A|}^i$ i-елементних підмножин, по одному представнику з яких позначимо через K_i, де $1\le i\le|M_A|$. Тоді існує $\left|Y\tau_{(i)}\right|$ таких перетворень $\tau\in\Im(X)$, що $Y\tau=K_i$ для будь-якого $Y\in A\delta_\tau^{-1}$. Оскільки $\left|A\delta_\tau^{-1}\right|>1$ і, за лемою 1.15, $B\tau=C\tau$ для всіх $B,C\in A\delta_\tau^{-1}$, то існує $\prod_{Y\in A\delta_\tau^{-1}}\left|Y\tau_{(l)}\right|$ таких перетворень $\tau\in\Im(X)$, що $Y\tau=K_i$ для будь-якого $Y\in A\delta_\tau^{-1}$, звідки отримуємо $C_{|A|}^{l} \cdot \prod_{Y \in A\delta_{\tau}^{-1}} \left| Y\tau_{(l)} \right|$ усіх перетворень $\tau \in \Im(X)$, таких що $|Y\tau| = i$ для будь-якого $Y \in A\delta_{\tau}^{-1}$. □

Ендоспектр відношення еквівалентності описує така теорема

Теорема 2.16. *Для будь-якої еквівалентності* α *на скінченній множині* X *виконуються твердження:*

(i) $\left|Et(\alpha)\right| = \sum_{\delta \in \Im(X/\alpha)} \left(\prod_{A \in X/\alpha} |A\delta|^{|A|} \right)^2$;

(ii) $\left|LEt(\alpha)\right| = \sum_{\delta \in \Im(X/\alpha)} \left(\prod_{A \in (X/\alpha)\delta} \sum_{i=1}^{|M_A|} \left|P_i^A\right| \right)^2$;

(iii) $\left|SEt(\alpha)\right| = \sum_{\delta \in S(X/\alpha)} \left(\prod_{A \in X/\alpha} |A\delta|^{|A|} \right)^2$;

(iv) $\left|QEt(\alpha)\right| = \left|SEt(\alpha)\right|$;

(v) $\left|At(\alpha)\right| = \left|B(X/\alpha)\right| \cdot \left(\prod_{A \in X/\alpha} |A|! \right)^2$.

Доведення. (i) Нехай δ – довільне перетворення фактор-множини X/α. Покладемо $Et_{\delta}(\alpha) = \left\{ (\varphi, \psi) \in Et(\alpha) \mid A\varphi \subseteq A\delta \ \ \forall A \in X/\alpha \right\}$. За лемою 1.9,

$$\left|Et_{\delta}(\alpha)\right| = \left(\prod_{A \in X/\alpha} \left|Map(A, A\delta)\right| \right)^2 = \left(\prod_{A \in X/\alpha} |A\delta|^{|A|} \right)^2,$$

де $Map(A, A\delta)$ – множина всіх відображень з класу A в клас $A\delta$. Оскільки $\delta \in \Im(X/\alpha)$ – довільне, то $\left|Et(\alpha)\right| = \sum_{\delta \in \Im(X/\alpha)} \left(\prod_{A \in X/\alpha} |A\delta|^{|A|} \right)^2$.

(ii) Нехай $\delta \in \Im(X/\alpha)$, $A \in im(\delta)$ – деякий клас, $(\varphi, \psi) \in LEt(\alpha)$, M_A – клас, визначений вище. Як випливає з леми 2.13, число всіх перетворень $\varphi \in \Im(X/\alpha)$, таких що $|Y\varphi| \le |M_A|$ для будь-якого $Y \in A\delta^{-1}$, дорівнює

$\sum_{i=1}^{|M_A|}\left|P_i^A\right|$.

Покладемо $LEt_\delta(\alpha)=\{(\varphi,\psi)\in LEt(\alpha)\,|\,A\varphi\subseteq A\delta\ \ \forall A\in X/\alpha\}$. Тоді

$$\left|LEt_\delta(\alpha)\right|=\left(\prod_{A\in(X/\alpha)\delta}\sum_{i=1}^{|M_A|}\left|P_i^A\right|\right)^2.$$

Нарешті,

$$\left|LEt(\alpha)\right|=\sum_{\delta\in\Im(X/\alpha)}\left|LEt_\delta(\alpha)\right|=\sum_{\delta\in\Im(X/\alpha)}\left(\prod_{A\in(X/\alpha)\delta}\sum_{i=1}^{|M_A|}\left|P_i^A\right|\right)^2.$$

(iii) Нехай δ – довільне бієктивне перетворення фактор-множини X/α. Позначимо через $SEt_\delta(\alpha)=\{(\varphi,\psi)\in SEt(\alpha)\,|\,A\varphi\subseteq A\delta\ \ \forall A\in X/\alpha\}$. Аналогічно доведенню п. (i) цієї теореми

$$\left|SEt_\delta(\alpha)\right|=\left(\prod_{A\in X/\alpha}\left|Map(A,A\delta)\right|\right)^2=\left(\prod_{A\in X/\alpha}|A\delta|^{|A|}\right)^2.$$

Оскільки перетворення $\delta\in S(X/\alpha)$ – довільне, то

$$\left|SEt(\alpha)\right|=\sum_{\delta\in S(X/\alpha)}\left(\prod_{A\in X/\alpha}|A\delta|^{|A|}\right)^2.$$

(iv) Доведення випливає з рівності $QEt(\alpha)=SEt(\alpha)$ (див. підрозділ 1.3).

(v) Нехай $\delta\in B(X/\alpha)$. Аналогічно пп. (i) – (iii) покладемо

$$At_\delta(\alpha)=\{(\varphi,\psi)\in At(\alpha)\,|\,A\varphi=A\delta\ \ \forall A\in X/\alpha\}.$$

Тоді, за лемою 1.10,

$$\left|At_\delta(\alpha)\right|=\left(\prod_{A\in X/\alpha}\left|Map_b(A,A\delta)\right|\right)^2=\left(\prod_{A\in X/\alpha}|A|!\right)^2,$$

де $Map_b(A,A\delta)$ – множина всіх бієкцій з класу A в клас $A\delta$. Нарешті,

$$\left|At(\alpha)\right|=\left|B(X/\alpha)\right|\cdot\left(\prod_{A\in X/\alpha}|A|!\right)^2$$ □

Приклад 2.2. Обчислимо ендоспектр відношення еквівалентності

$\alpha = A^2 \bigcup B^2$, де $A = \{a,b\}$, $B = \{c,d,e\}$, визначеного на множині $X = \{a,b,c,d,e\}$, відносно його ендотопізмів. Покладемо

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ A & A \end{pmatrix},\ \varphi_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ A & B \end{pmatrix},\ \varphi_3 = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix},\ \varphi_4 = \begin{pmatrix} A & B \\ B & B \end{pmatrix}.$$

1. Зрозуміло, що $\Im(X/\alpha) = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$. Тоді

$$|Et(\alpha)| = \sum_{\delta \in \Im(X/\alpha)} \left(\prod_{Y \in \{A,B\}} |Y\delta|^{|Y|} \right)^2 =$$

$$= \left(|A\varphi_1|^{|A|} \cdot |B\varphi_1|^{|B|}\right)^2 + \left(|A\varphi_2|^{|A|} \cdot |B\varphi_2|^{|B|}\right)^2 +$$

$$+ \left(|A\varphi_3|^{|A|} \cdot |B\varphi_3|^{|B|}\right)^2 + \left(|A\varphi_4|^{|A|} \cdot |B\varphi_4|^{|B|}\right)^2 =$$

$$= \left(|A|^{|A|} \cdot |A|^{|B|}\right)^2 + \left(|A|^{|A|} \cdot |B|^{|B|}\right)^2 + \left(|B|^{|A|} \cdot |A|^{|B|}\right)^2 + \left(|B|^{|A|} \cdot |B|^{|B|}\right)^2 =$$

$$= \left(2^2 \cdot 2^3\right)^2 + \left(2^2 \cdot 3^3\right)^2 + \left(3^2 \cdot 2^3\right)^2 + \left(3^2 \cdot 3^3\right)^2 =$$

$$= 1024 + 11664 + 5184 + 59049 = 76921.$$

2. Обчислимо $|HEt(\alpha)|$ як різницю чисел $|Et(\alpha)|$ і $|D|$, де

$$D = \{(\varphi,\psi) \in Et(\alpha) | (\varphi,\psi) \notin HEt(\alpha)\}.$$

Зрозуміло, якщо $\delta \in \{\varphi_2, \varphi_3\}$, то $A\delta \neq B\delta$ і $(\varphi,\psi) \notin D$, тому розглянемо тільки такі $(\varphi,\psi) \in Et(\alpha)$, що $A\delta = B\delta$.

а) нехай $\delta = \varphi_1$ і $(a,a) \in im(\varphi|_A) \times im(\psi|_B)$. Тоді $(\varphi,\psi) \in D$, якщо $a \notin im(\varphi|_B)$ і $a \notin im(\psi|_A)$. Таких пар існує

$$\left(|A\delta|^{|A|} - 1\right) \cdot \left(|B\delta|^{|B|} - 1\right) = \left(|A|^{|A|} - 1\right) \cdot \left(|A|^{|B|} - 1\right) = 21.$$

Випадки $(a,b), (b,a), (b,b) \in im(\varphi|_A) \times im(\psi|_B)$ розглядаються аналогічно. Число відповідних ендотопізмів кожний раз обчислюється за формулою $\left(|A\delta|^{|A|} - 1\right) \cdot \left(|B\delta|^{|B|} - 1\right)$ і дорівнює 21.

б) нехай $\delta = \varphi_1$ і $(a,a) \in im(\varphi|_B) \times im(\psi|_A)$. Тоді $(\varphi,\psi) \in D$, якщо $a \notin im(\varphi|_A)$ і $a \notin im(\psi|_B)$. Таких пар, ураховуючи а), виникає

$$\left(|B\delta|^{|B|} - 1\right) \cdot \left(|A\delta|^{|A|} - 1\right) - 1 = \left(|A|^{|B|} - 1\right) \cdot \left(|A|^{|A|} - 1\right) - 1 = 20.$$

Тут ми відняли пару $\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & b & a & a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & a & b & b & b \end{pmatrix}\right)$.

Для підрахунку $|D|$ при розгляді випадків $(a,b),(b,a),(b,b)\in$ $\in im(\varphi|_B)\times im(\psi|_A)$ використовуємо формулу $\left(|B\delta|^{|B|}-1\right)\cdot\left(|A\delta|^{|A|}-1\right)-1$. Кожного разу віднімаємо врахований в а) ендотопізм. Наприклад, у випадку $(a,b)\in im(\varphi|_B)\times im(\psi|_A)$ віднімаємо

$$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & b & a & a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & b & a & a & a \end{pmatrix}\right)\in D.$$

в) нехай $\delta=\varphi_4$ і $(c,c)\in im(\varphi|_A)\times im(\psi|_B)$. Тоді $(\varphi,\psi)\in D$, якщо $c\notin im(\varphi|_B)$ і $c\notin im(\psi|_A)$. Число таких пар дорівнює

$$\left(|A\delta|^{|A|}-(|A\delta|-1)^{|A|}\right)(|B\delta|-1)^{|B|}(|A\delta|-1)^{|A|}\left(|B\delta|^{|B|}-(|B\delta|-1)^{|B|}\right)=$$

$$=\left(|B|^{|A|}-(|B|-1)^{|A|}\right)(|B|-1)^{|B|}(|B|-1)^{|A|}\left(|B|^{|B|}-(|B|-1)^{|B|}\right)=$$

$$=\left(3^2-2^2\right)2^3 2^2\left(3^3-2^3\right)=3040.$$

г) нехай $\delta=\varphi_4$ і $(c,d)\in im(\varphi|_A)\times im(\psi|_B)$. Тоді $(\varphi,\psi)\in D$, якщо $c\notin im(\varphi|_B)$ і $d\notin im(\psi|_A)$. Підраховуючи $|D|$ для цього випадку, з максимально можливих 3040 ендотопізмів віднімемо ендотопізми, ураховані у випадку в). Це будуть пари, в яких першими компонентами є всі перші компоненти, вказані у випадку в), а другими – такі перетворення:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & d & d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & d & c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & d & c & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & c & d & d \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & c & d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & c & c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & e & d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & d & c & e \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & c & e & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & c & d & e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & d & e & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & e & c & d \end{pmatrix}.$$

Нарешті отримаємо $3040-5\cdot 8\cdot 12=2560$ ендотопізмів. Аналогічно розглядаються всі можливі випадки для кожної пари з B^2. Отже, отримаємо $|D| = 33704$ і $|HEt(\alpha)| = 43217$.

3. У цьому випадку маємо:

$$|LEt(\alpha)| = \sum_{\delta\in\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4\}} \left(\prod_{Y\in im(\delta)} \left(\sum_{i=1}^{|M_Y|} C_{|Y|}^{i} \prod_{Y'\in Y\delta^{-1}} \left(i^{|Y'|} - C_i^{i-1}\cdot\left((i-1)^{|Y'|} - (i-1) \right) - i \right) \right) \right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{|A|} C_{|A|}^{i} \left(i^{|A|} - C_i^{i-1}\left((i-1)^{|A|} - (i-1) \right) - i \right) \cdot \left(i^{|B|} - C_i^{i-1}\left((i-1)^{|B|} - (i-1) \right) - i \right) \right)^2 +$$

$$+ \left(\left(\sum_{i=1}^{|A|} C_{|A|}^{i} \left(i^{|A|} - C_i^{i-1}\left((i-1)^{|A|} - (i-1) \right) - i \right) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{|B|} C_{|B|}^{i} \left(i^{|B|} - C_i^{i-1}\left((i-1)^{|B|} - (i-1) \right) - i \right) \right) \right)^2 +$$

$$+ \left(\left(\sum_{i=1}^{|A|} C_{|A|}^{i} \left(i^{|B|} - C_i^{i-1}\left((i-1)^{|B|} - (i-1) \right) - i \right) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{|A|} C_{|B|}^{i} \left(i^{|A|} - C_i^{i-1}\left((i-1)^{|A|} - (i-1) \right) - i \right) \right) \right)^2 +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{|A|} C_{|B|}^{i} \left(i^{|A|} - C_i^{i-1}\left((i-1)^{|A|} - (i-1) \right) - i \right) \cdot \left(i^{|B|} - C_i^{i-1}\left((i-1)^{|B|} - (i-1) \right) - i \right) \right)^2 =$$

$$= \left(2 + C_2^2\left(2^2 - C_2^1\left(1^2 - 1\right) - 2 \right) \cdot \left(2^3 - C_2^1\left(1^3 - 1\right) - 2 \right) \right)^2 +$$

$$+ \left(\left(2 + C_2^2\left(2^2 - C_2^1\left(1^2 - 1\right) - 2 \right) \right) \cdot \left(3 + C_3^2\left(2^3 - C_2^1\left(1^3 - 1\right) - 2 \right) + C_3^3\left(3^3 - C_3^2\left(2^3 - 2 \right) - 3 \right) \right) \right)^2 +$$

$$+ \left(\left(2 + C_2^2\left(2^3 - C_2^1\left(1^3 - 1\right) - 2 \right) \right) \cdot \left(3 + C_3^2\left(2^2 - C_2^1\left(1^2 - 1\right) - 2 \right) \right) \right)^2 +$$

$$+ \left(3 + C_3^2\left(2^2 - C_2^1\left(1^2 - 1\right) - 2 \right) \cdot \left(2^3 - C_2^1\left(1^3 - 1\right) - 2 \right) \right)^2 =$$

$$= 196 + 11664 + 5184 + 1521 = 18565.$$

4. Зрозуміло, що $S(X/\alpha) = \{\varphi_2, \varphi_3\}$. Тоді

$$|QEt(\alpha)| = |SEt(\alpha)| = \sum_{\delta\in S(X/\alpha)} \left(\prod_{Y\in\{A,B\}} |Y\delta|^{|Y|} \right)^2 =$$

$$\left(|A\varphi_2|^{|A|} \cdot |B\varphi_2|^{|B|} \right)^2 + \left(|A\varphi_3|^{|A|} \cdot |B\varphi_3|^{|B|} \right)^2 =$$

$$= \left(|A|^{|A|} \cdot |B|^{|B|} \right)^2 + \left(|B|^{|A|} \cdot |A|^{|B|} \right)^2 =$$

$$= \left(2^2 \cdot 3^2 \right)^2 + \left(3^2 \cdot 2^3 \right)^2 = 11664 + 5184 = 16848.$$

5. Група $B(X/\alpha)$ є одноелементною, тому

$$|At(\alpha)| = \left(\prod_{Y\in\{A,B\}} |Y|! \right)^2 = \left(|A|! \cdot |B|! \right)^2 = \left(2! \cdot 3! \right) = 144.$$

Отже, $Etspec(X,\alpha)=(76921, 43217, 18565, 16848, 16848, 144)$.

Зауважимо, що питання обчислення $|HEt(\alpha)|$ для довільної еквівалентності α на скінченній множині залишається відкритим.

Висновки до розділу 2

У цьому розділі досліджено властивості відповідностей напівгрупи ендоморфізмів відношення еквівалентності, зокрема, напівгрупи ендотопізмів, моноїда сильних ендотопізмів та групи автотопізмів цього відношення.

У першому підрозділі доведено, що напівгрупа ендотопізмів будь-якої еквівалентності ізоморфна підпрямому добутку вінцевих добутків напівгрупи з малою категорією. Окрім того, побудовано ще два точні зображення напівгрупи ендотопізмів відношення еквівалентності. Подібний результат отримано для моноїда сильних ендотопізмів та групи автотопізмів відношення еквівалентності.

У другому підрозділі за допомогою властивостей мінімального ідеалу напівгрупи ендотопізмів довільної еквівалентності показано, що відношення еквівалентності визначається своєю напівгрупою ендотопізмів, та описано всі ізоморфізми між напівгрупами ендотопізмів довільних еквівалентностей.

У третьому підрозділі описано необхідні та достатні умови, за яких зазначені відповідності є регулярними та корегулярними.

У четвертому підрозділі визначено поняття ендотипу бінарного відношення відносно його ендотопізмів. Отримано класифікацію всіх еквівалентностей за їх ендотипами та обчислено всі можливі значення ендотипу строгих часткових еквівалентностей відносно ендоморфізмів.

У п’ятому підрозділі визначено поняття ендоспектра бінарного відношення відносно ендотопізмів та досліджено ендоспектр довільної еквівалентності на скінченній множині.

Результати цього розділу анонсовано в [32 – 35] та опубліковано в роботах [25; 26; 28; 29].

РОЗДІЛ 3

НАПІВГРУПИ ЕНДОТОПІЗМІВ БІНАРНИХ ВІДНОШЕНЬ

Основним предметом дослідження в цьому розділі є напівгрупи ендотопізмів бінарних відношень двох класів – ефективного і зв'язного відношення та симетричного відношення. Як було зазначено раніше, напівгрупа ендотопізмів будь-якого бінарного відношення на деякій множині є відповідністю симетричної напівгрупи на тій самій множині. Більш того, напівгрупа ендотопізмів довільної еквівалентності є відповідністю напівгрупи ендоморфізмів тієї ж еквівалентності. Проте не для кожного бінарного відношення виконується така властивість. Відповідностями напівгруп ендоморфізмів не є, наприклад, напівгрупи ендотопізмів відношення часткового порядку. Попри це, напівгрупа ендотопізмів є самостійною та не менш цікавою похідною структурою для будь-якої алгебраїчної системи, дослідження якої з огляду на будову вихідної системи теж є досить інформативним. Наприклад, за допомогою напівгруп ендотопізмів Б. В. Попов [24] з точністю до ізотопізму охарактеризував певні структури μ-арних відношень.

У цьому розділі досліджено питання визначеності ефективних і зв'язних бінарних відношень їх напівгрупами ендотопізмів та побудовано точне зображення моноїда сильних ендотопізмів симетричного відношення певного класу.

3.1. Ендотопізми ефективних зв'язних відношень

У цьому підрозділі для бінарних відношень, які задовольняють умови ефективності та зв'язності, доведено, що напівгрупа ендотопізмів будь-якого такого відношення характеризує це бінарне відношення з точністю до ізотопізму або антиізотопізму

3.1.1. Проблема визначеності ендотопізмами. Нехай $\rho \subseteq A \times B$ – довільне бінарне відношення, де A і B – множини, які містять не менше двох елементів. Тут розглядаються випадки, коли $A = B$ або $A \bigcap B = \varnothing$.

Бінарне відношення $\rho \subseteq A \times B$ називається *зв'язним* [77], якщо не існує непорожніх множин A_1, A_2, B_1 і B_2, таких що $A_1 \bigcup A_2 = A$, $B_1 \bigcup B_2 = B$, $A_1 \bigcap A_2 = \varnothing$, $B_1 \bigcap B_2 = \varnothing$ і

$$\rho \subseteq (A_1 \times B_1) \bigcup (A_2 \times B_2).$$

Бінарне відношення $\rho \subseteq A \times B$ називається *ефективним*, якщо $Dom\,\rho = A$ і $\mathrm{Im}\,\rho = B$.

Приклад 3.1. Нехай $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4,5\}$. Тоді

(i) відношення $\alpha = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,5)\}$ є ефективним і зв'язним;

(ii) відношення $\beta = \{(1,3),(1,4),(2,5)\}$ є ефективним, але не зв'язним;

(iii) відношення $\gamma = \{(1,3),(1,4),(2,3)\}$ є зв'язним, але не ефективним;

(iv) відношення $\delta = \{(1,3),(2,5)\}$ не є ані ефективним, ані зв'язним.

Надалі будуть розглядатися тільки ефективні та зв'язні бінарні відношення.

Упорядкована пара (f, g) відображень $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ називається *гомотопізмом* відношення $\rho \subseteq A \times B$ в $\rho' \subseteq A' \times B'$, якщо з $(x, y) \in \rho$ випливає, що $(xf, yg) \in \rho'$ для всіх $x \in A$, $y \in B$.

Гомотопізм (f, g) бінарного відношення ρ в ρ' називається *сильним гомотопізмом*, якщо з $(xf, yg) \in \rho'$ випливає, що $(x, y) \in \rho$ для всіх $x \in A$, $y \in B$.

Якщо $f : A \to A'$ і $g : B \to B'$ – бієктивні відображення і $(x, y) \in \rho \Leftrightarrow (xf, yg) \in \rho'$ для всіх $x \in A$, $y \in B$, то впорядкована пара

(f,g) називається *ізотопізмом* [24] бінарного відношення ρ в ρ'. Для позначення ізотопізму бінарних відношень ρ і ρ' будемо використовувати символ $\simeq$.

Гомотопізм відношення $\rho \subseteq A \times B$ в себе називається *ендотопізмом.*

Оскільки $Et(\rho)$ є напівгрупою ендотопізмів бінарного відношення $\rho \subseteq A \times B$, то напівгрупа ендотопізмів $Et(\rho^{-1})$ бінарного відношення $\rho^{-1} \subseteq B \times A$ очевидно є ізоморфною напівгрупі $Et(\rho)$.

Домовимося перетворення φ довільної множини M, таке, що $M\varphi = \{x\}$, позначати символом φ_x. Неважко помітити, що пара (φ_a, φ_b) перетворень множин A і B відповідно є ендотопізмом $\rho \subseteq A \times B$, якщо $(a,b) \in \rho$. Множину всіх правих нулів напівгрупи $Et(\rho)$ позначатимемо через L, тобто

$$L = \left\{ (\varphi_1, \varphi_2) \;\middle|\; Et(\rho)(\varphi_1, \varphi_2) = \{(\varphi_1, \varphi_2)\} \right\}.$$

Можна довести, що L складається з усіх можливих ендотопізмів вигляду (φ_a, φ_b), де $(a,b) \in \rho$, й утворює двобічний ідеал у напівгрупі $Et(\rho)$.

Через φ_{xy} позначимо перетворення довільної множини M, таке що $M\varphi = \{x, y\}$, де $x \neq y$. Зауважимо, що умова $\varphi_x = \varphi_y \Leftrightarrow x = y$ не виконується для перетворень вигляду φ_{xy}. Неважко перевірити, що $(\varphi_{ab}, \varphi_c)$ є ендотопізмом відношення ρ, якщо $(a,c), (b,c) \in \rho$, і, аналогічно, $(\varphi_a, \varphi_{bc})$ є ендотопізмом відношення ρ, якщо $(a,c), (a,b) \in \rho$.

Нехай $Et_2(\rho)$ – множина всіх ендотопізмів відношення $\rho \subseteq A \times B$ вигляду $(\varphi_{ab}, \varphi_c)$ або $(\varphi_a, \varphi_{bc})$.

Лема 3.1. *Для будь-якого* $g \in Et(\rho)$ *виконується умова:*

$$g \in Et_2(\rho) \Leftrightarrow |L \cdot g| = 2.$$

Доведення. Нехай $g \in Et_2(\rho)$ – довільний ендотопізм. Якщо

$g=(\varphi_{ab},\varphi_c)$, тоді для будь-якого ендотопізму $(\varphi_x,\varphi_y)\in L$ маємо:

$$(\varphi_x,\varphi_y)(\varphi_{ab},\varphi_c)=\begin{cases}(\varphi_a,\varphi_c), & \text{якщо } x\in a\varphi_{ab}^{-1},\\ (\varphi_b,\varphi_c), & \text{якщо } x\in b\varphi_{ab}^{-1}.\end{cases}$$

Таким чином, $|L\cdot g|=2$. Аналогічно, якщо $g=(\varphi_a,\varphi_{bc})$, то також $|L\cdot g|=2$.

Нехай тепер $|L\cdot g|=2$ для деякого $g=(\varphi_1,\varphi_2)\in Et(\rho)$. Зауважимо, що коли ранг якого-небудь з перетворень φ_1 або φ_2 є не менше ніж 3, то $L\cdot g$ складається не менше ніж з 3 елементів. Справді, нехай $A\varphi_1=\{a,b,c,\ldots\}$, де $a,b,c,\ldots$ – попарно відмінні елементи, і $x\in a\varphi_1^{-1}$. Оскільки ρ – ефективне бінарне відношення, то знайдеться такий елемент $y\in B$, що $(x,y)\in\rho$. Тоді $(\varphi_x,\varphi_y)(\varphi_1,\varphi_2)=(\varphi_a,\varphi_z)$, де $z=y\varphi_2$. Отже, $(\varphi_a,\varphi_z)\in L\cdot g$. Аналогічно $(\varphi_b,\varphi_{z'})(\varphi_c,\varphi_{z''})\in L\cdot g$, отже, $|L\cdot g|\geq 3$, тоді як $|L\cdot g|=2$. Таким чином, перетворення φ_1 і φ_2 мають ранг не більший ніж 2, причому принаймні одне з цих перетворень має ранг 2.

Припустимо, що для ендотопізму $g=(\varphi_1,\varphi_2)$ перетворення φ_1 і φ_2 мають ранг 2. Нехай $A\varphi_1=\{a,b\}$, а $B\varphi_2=\{c,d\}$. Так само, як вище, можна показати, що $(\varphi_a,\varphi_x)(\varphi_b,\varphi_y)\in L\cdot g$ де $x,y\in\{c,d\}$. Припустимо, що $x\neq y$. Тоді

$$L\cdot g=\{(\varphi_a,\varphi_c)(\varphi_b,\varphi_d)\} \text{ або } L\cdot g=\{(\varphi_a,\varphi_d)(\varphi_b,\varphi_c)\}.$$

Якщо $L\cdot g=\{(\varphi_a,\varphi_c)(\varphi_b,\varphi_d)\}$, то для всіх $(\varphi_u,\varphi_v)\in L$, тобто для всіх $(u,v)\in\rho$

$$u\in a\varphi_1^{-1}\Rightarrow v\in c\varphi_2^{-1} \text{ і } u\in b\varphi_1^{-1}\Rightarrow v\in d\varphi_2^{-1}.$$

Отже, $\rho\cap(a\varphi_1^{-1}\times d\varphi_2^{-1})=\varnothing$ і $\rho\cap(b\varphi_1^{-1}\times c\varphi_2^{-1})=\varnothing$.

Тому $\rho\subseteq(a\varphi_1^{-1}\times c\varphi_2^{-1})\cup(b\varphi_1^{-1}\times d\varphi_2^{-1})$ і, у підсумку, ρ – не є зв'язним бінарним відношення, що суперечить зв'язності відношення ρ.

Аналогічно можна довести, що у випадку $L\cdot g=\{(\varphi_a,\varphi_d)(\varphi_b,\varphi_c)\}$ також виникає суперечність. Таким чином, $x=y$. Отже, $(\varphi_a,\varphi_d)(\varphi_b,\varphi_d)\in L\cdot g$ або $(\varphi_a,\varphi_c)(\varphi_b,\varphi_c)\in L\cdot g$. У першому випадку, якщо врахувати, що $A\varphi_1=\{a,b\}$, для $v\in d\varphi_2^{-1}$ знайдеться елемент $u\in a\varphi_1^{-1}$ або $u\in b\varphi_1^{-1}$ такий, що $(u,v)\in\rho$, тому $(\varphi_a,\varphi_d)\in L\cdot g$ або $(\varphi_b,\varphi_d)\in L\cdot g$, але тоді в будь-якому випадку $|L\cdot g|\geq 3$, що неможливо. Аналогічно неможливим є випадок, коли $(\varphi_a,\varphi_c)(\varphi_b,\varphi_c)\in L\cdot g$. Таким чином, доведено, що перетворення φ_1 і φ_2 не можуть одночасно мати ранг 2. Отже, одне з перетворень φ_1, φ_2 має ранг 1, а інше – ранг 2. Тому $g=(\varphi_{ab},\varphi_c)$ або $g=(\varphi_a,\varphi_{cd})$, тобто $g\in Et_2(\rho)$. □

Нехай $g,g'\in Et_2(\rho)$, $g\neq g'$, і $g=(\varphi_{ab},\varphi_c)$, $g'=(\varphi_a,\varphi_{bc})$ – довільні ендотопізми відношення $\rho\subseteq A\times B$. Визначимо відношення еквівалентності ε_g і $\varepsilon_{g'}$ таким чином:

$$(x,y)\in\varepsilon_g \Leftrightarrow x\varphi_{ab}=y\varphi_{ab} \text{ і } \varepsilon_g\subseteq A\times A,$$

$$(x,y)\in\varepsilon_{g'} \Leftrightarrow x\varphi_{bc}=y\varphi_{bc} \text{ і } \varepsilon_{g'}\subseteq B\times B.$$

Для кожного $g,g'\in Et_2(\rho)$ покладемо

$$Et_g=g\cdot Et_2(\rho)\setminus L \quad\text{і}\quad Et_{g'}=g'\cdot Et_2(\rho)\setminus L.$$

Лема 3.2. *Виконуються умови:*

1) $h\in Et_g$ тоді й тільки тоді, коли $h=(\varphi_{xy},\varphi_z)$ *і* $\varepsilon_h=\varepsilon_g$,

2) $h\in Et_{g'}$ тоді і тільки тоді, коли $h=(\varphi_x,\varphi_{yz})$ *і* $\varepsilon_h=\varepsilon_{g'}$.

Доведення. 1) Нехай $g=(\varphi_{ab},\varphi_c)$ і $h\in Et_g$, тоді існує елемент $f\in Et_2(\rho)$ такий, що $h=g\cdot f$ і $h\notin L$. Якщо $f=(\varphi_x,\varphi_{yz})$, то

$$h=(\varphi_{ab},\varphi_c)(\varphi_x,\varphi_{yz})=(\varphi_{ab}\varphi_x,\varphi_c\varphi_{yz})=\begin{cases}(\varphi_x,\varphi_y)\ i\ (x,y)\in\rho,\ \textit{якщо}\ \ c\in y\varphi_{yz}^{-1},\\(\varphi_x,\varphi_z)\ i\ (x,z)\in\rho,\ \textit{якщо}\ \ c\in z\varphi_{yz}^{-1},\end{cases}$$

тобто $h\in L$, що суперечить умові $h\in Et_g$. Якщо $f=(\varphi_{xy},\varphi_z)$, то

$h=(\varphi_{ab},\varphi_c)(\varphi_{xy},\varphi_z)=(\varphi_{ab}\varphi_{xy},\varphi_z)$. Якщо $(a,b)\in\varepsilon_f$, то або $h=(\varphi_x,\varphi_z)$, якщо $a\in x\varphi_{xy}^{-1}$, або $h=(\varphi_y,\varphi_z)$, якщо $a\in y\varphi_{xy}^{-1}$, тобто $h\in L$, що суперечить умові $h\in Et_g$. Тому $(a,b)\notin\varepsilon_f$ і тоді $h=(\varphi_{ab}\varphi_{xy},\varphi_z)=(\varphi_{xy},\varphi_z)$. Очевидно, що $\varepsilon_h=\varepsilon_g$.

Нехай тепер $h=(\varphi_{xy},\varphi_z)$, $\varepsilon_h=\varepsilon_g$. Доведемо, що $h\in Et_g$. Нехай $h'=(\psi_{xy},\psi_z)$, де $\psi_{xy}=\begin{pmatrix} a & A\setminus\{a\} \\ x & y\end{pmatrix}$, тоді $h=g\cdot h'$, отже, $h\in Et_g$. Аналогічно доводиться умова 2) леми. □

На множині L задамо відношення еквівалентності ε_1 і ε_2, поклавши

$$((\varphi_u,\varphi_v),(\varphi_p,\varphi_q))\in\varepsilon_1 \Leftrightarrow u=p$$

і

$$((\varphi_u,\varphi_v),(\varphi_p,\varphi_q))\in\varepsilon_2 \Leftrightarrow v=q.$$

Нехай $g,g'\in Et_2(\rho)$, $g\neq g'$, і $g=(\varphi_{ab},\varphi_c)$, $g'=(\varphi_a,\varphi_{bc})$ – довільні ендотопізми. За допомогою ендотопізмів g і g' визначимо бінарні відношення η_g і $\eta_{g'}$ на L, такі що для будь-яких $(\varphi_u,\varphi_v),(\varphi_p,\varphi_q)\in L$

$$\left((\varphi_u,\varphi_v),(\varphi_p,\varphi_q)\right)\in\eta_g \Leftrightarrow \exists\, f\in Et_g\left(L\cdot f=\left\{(\varphi_u,\varphi_v),(\varphi_p,\varphi_q)\right\}\right),$$

$$\left((\varphi_u,\varphi_v),(\varphi_p,\varphi_q)\right)\in\eta_{g'} \Leftrightarrow \exists\, f'\in Et_{g'}\left(L\cdot f'=\left\{(\varphi_u,\varphi_v),(\varphi_p,\varphi_q)\right\}\right).$$

Тоді виконується така лема.

Лема 3.3. *Нехай* $g,g'\in Et_2(\rho)$, $g\neq g'$, *і* $g=(\varphi_{ab},\varphi_c)$, $g'=(\varphi_a,\varphi_{bc})$. *Тоді*

$$\eta_g=\varepsilon_2,\ \eta_{g'}=\varepsilon_1.$$

Доведення. Нехай $g=(\varphi_{ab},\varphi_c)$ і $\left((\varphi_u,\varphi_v),(\varphi_p,\varphi_q)\right)\in\eta_g$, тоді існує такий $f\in Et_g$, що $L\cdot f=\left\{(\varphi_u,\varphi_v),(\varphi_p,\varphi_q)\right\}$. Оскільки $g=(\varphi_{ab},\varphi_c)$, то за лемою 3.2, $f=(\varphi_{a'b'},\varphi_{c'})$ і

$$\left(\varphi_x,\varphi_y\right)\left(\varphi_{a'b'},\varphi_{c'}\right)=\begin{cases}\left(\varphi_{a'},\varphi_{c'}\right), & \text{якщо } x\in a'\varphi_{a'b'}^{-1},\\ \left(\varphi_{b'},\varphi_{c'}\right), & \text{якщо } x\in b'\varphi_{a'b'}^{-1}\end{cases}$$

для будь-якого $\left(\varphi_x,\varphi_y\right)\in L$.

Завдяки довільності вибору $\left(\varphi_x,\varphi_y\right)\in L$ маємо $L\cdot f=\left\{\left(\varphi_{a'},\varphi_{c'}\right),\left(\varphi_{b'},\varphi_{c'}\right)\right\}$. Таким чином,

$$\left\{\left(\varphi_{a'},\varphi_{c'}\right),\left(\varphi_{b'},\varphi_{c'}\right)\right\}=\left\{\left(\varphi_u,\varphi_v\right),\left(\varphi_p,\varphi_q\right)\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\varphi_{a'},\varphi_{c'}\right)=\left(\varphi_u,\varphi_v\right)\&\left(\varphi_{b'},\varphi_{c'}\right)=\left(\varphi_p,\varphi_q\right)\\ \left(\varphi_{a'},\varphi_{c'}\right)=\left(\varphi_p,\varphi_q\right)\&\left(\varphi_{b'},\varphi_{c'}\right)=\left(\varphi_u,\varphi_v\right)\end{cases}\Rightarrow v=q.$$

Отже, $\left(\left(\varphi_u,\varphi_v\right),\left(\varphi_p,\varphi_q\right)\right)\in\varepsilon_2$ і, як наслідок, $\eta_g\subseteq\varepsilon_2$.

Нехай тепер $\left(\left(\varphi_u,\varphi_v\right),\left(\varphi_p,\varphi_q\right)\right)\in\varepsilon_2$, де $v=q.$ Оскільки $(p,v)=(p,q)$, то $(p,v),(u,v)\in\rho.$ Через те, що $g=\left(\varphi_{ab},\varphi_c\right)$, то $f=\left(\varphi_{up},\varphi_v\right)$ – ендотопізм і $f\in Et_g$. Аналогічно попередньому маємо $L\cdot f=\left\{\left(\varphi_u,\varphi_v\right),\left(\varphi_p,\varphi_v\right)\right\}$. Враховуючи, що $v=q$, маємо $\left(\left(\varphi_u,\varphi_v\right),\left(\varphi_p,\varphi_q\right)\right)=L\cdot f$. Але тоді $\left(\left(\varphi_u,\varphi_v\right),\left(\varphi_p,\varphi_q\right)\right)\in\eta_g$. Отже, $\varepsilon_2\subseteq\eta_g$. Аналогічно доводиться виконання твердження у випадку $g'=\left(\varphi_a,\varphi_{bc}\right)$. Очевидно, що коли $g,h\in Et_2(\rho)$ і $\eta_g\neq\eta_h$, то або $\eta_g=\varepsilon_1$ і $\eta_h=\varepsilon_2$, або $\eta_g=\varepsilon_2$ і $\eta_h=\varepsilon_1$. □

Розглянемо фактор-множини $L_1=L/\varepsilon_1$ і $L_2=L/\varepsilon_2$. Визначимо бінарне відношення $\rho^*\subseteq L_1\times L_2$, таке що $\rho^*=\left\{\left(\overline{g}^1,\overline{g}^2\right)\middle|\, g\in L\right\}$, де $\overline{g}^1$ і $\overline{g}^2$ – класи еквівалентних елементів відповідно по ε_1 і ε_2, які містять елемент g як представника.

Лема 3.4. *Бінарні відношення ρ^* та ρ є ізотопними.*

Доведення. Визначимо відображення $f_1:L_1\to A$ і $f_2:L_2\to B,$

прийнявши для довільного елемента $g \in L,$ де $g = (\varphi_x, \varphi_y),$ $\overline{g}^1 f_1 = x$ і $\overline{g}^2 f_2 = y.$ Переконаємося, що $\overline{g}^1 f_1$ не залежить від вибору представника в класі $\overline{g}^1$. Нехай $\overline{g}^1 = \overline{h}^1$. Тоді $(g,h) \in \varepsilon_1,$ де $g = (\varphi_x, \varphi_y),$ а $h = (\varphi_{x'}, \varphi_{y'}).$ Згідно з визначенням еквівалентності $\varepsilon_1,$ матиме місце рівність $x = x'.$ Тому $\overline{g}^1 f_1 = \overline{h}^1 f_1 = x.$ Аналогічно, $\overline{g}^2 f_2$ не залежить від вибору представника в класі $\overline{g}^2$. Якщо врахувати ефективність відношення $\rho,$ можна показати, що відображення f_1 і f_2 є бієктивними. Тепер маємо для будь-яких $\overline{g}_1^1 \in L_1$ і $\overline{g}_2^2 \in L_2$

$$\left(\overline{g}_1^1, \overline{g}_2^2\right) \in \rho^* \Leftrightarrow \exists_{g \in L}\left(\overline{g}_1^1 = \overline{g}^1 \; i \; \overline{g}_2^2 = \overline{g}^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists_{(x,y)\in\rho}\left(g = \left(\varphi_x, \varphi_y\right) i \; g_1 = \left(\varphi_x, \varphi_{y'}\right) i \; g_2 = \left(\varphi_{x'}, \varphi_y\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists_{(x,y)\in\rho}\left(g = \left(\varphi_x, \varphi_y\right) \; i \; \overline{g}_1^1 f_1 = x \; i \; \overline{g}_2^2 f_2 = y\right) \Leftrightarrow \left(\overline{g}_1^1 f_1, \overline{g}_2^2 f_2\right) \in \rho.$$

□

Нехай $h, h' \in Et_2(\rho)$ і $\eta_h \neq \eta_{h'}$. Покладемо $L_1' = L/\eta_h$, а $L_2' = L/\eta_{h'}$. Визначимо бінарне відношення $\rho' \subseteq L_1' \times L_2'$ таке, що $\rho' = \{(\overline{g}^1, \overline{g}^2) | g \in L\},$ де $\overline{g}^1$ і $\overline{g}^2$ – класи еквівалентних елементів відповідно по η_g і η_h, які містять елемент g як представника. З попередніх міркувань виходить, що ρ ізотопне ρ' або $(\rho')^{-1}$.

Таким чином, використовуючи тільки операцію множення в напівгрупі $Et(\rho),$ можна відновити відношення ρ з точністю до ізотопізму, що фактично означає виконання такої теореми.

Теорема 3.5. *Нехай $\rho \subseteq A \times B$ і $\rho' \subseteq A' \times B'$ – довільні ефективні зв'язні відношення. Якщо напівгрупи $Et(\rho)$ і $Et(\rho')$ ізоморфні, то бінарні відношення ρ і ρ' або ρ і ρ'^{-1} ізотопні.*

Доведення. Нехай відображення $\theta : Et(\rho) \to Et(\rho')$ – ізоморфізм напівгрупи $Et(\rho)$ у $Et(\rho').$ Тому $L\theta = L'$ і $Et_2(\rho)\theta = Et_2(\rho').$ Нехай

$g=(\varphi_x,\varphi_{yz})$ і $h=(\varphi_{uv},\varphi_w)$ – довільні елементи множини $Et_2(\rho)$. Тоді

$$Et_g\theta=(g\cdot Et_2(\rho)\setminus L)\theta=g\theta\cdot Et_2(\rho')\setminus L'=Et_{g\theta}$$

і, аналогічно, $Et_h\theta=Et_{h\theta}$. Оскільки $g\theta\neq h\theta$, то в напівгрупі $Et(\rho')$

$$\eta_{g\theta}=\varepsilon_1',\text{ а }\eta_{h\theta}=\varepsilon_2'$$

або

$$\eta_{g\theta}=\varepsilon_2',\text{ а }\eta_{h\theta}=\varepsilon_1'.$$

Припустимо, що $\eta_{g\theta}=\varepsilon_1'$, і $\eta_{h\theta}=\varepsilon_2'$. Доведемо, що ρ і ρ' – ізотопні відношення. Визначимо впорядковану пару відображень (π_1,π_2), де $\pi_1:A\to A'$, а $\pi_2:B\to B'$. Нехай $x\in A$ – довільний елемент. За ефективністю ρ знайдеться елемент $y\in B$ такий, що $(x,y)\in\rho$. Оскільки $(x,y)\in\rho$, то $(\varphi_x,\varphi_y)\in L$. Нехай $(\varphi_x,\varphi_y)\theta=(\varphi_{x'},\varphi_{y'})$, де $(\varphi_{x'},\varphi_{y'})\in L'$. Покладемо $x\pi_1=x'$. Переконаємося, що $x\pi_1$ не залежить від вибору елемента y. Нехай $z\in B$ – будь-який інший елемент, такий що $(x,z)\in\rho$. Тоді $(\varphi_x,\varphi_z)\in L$ і $((\varphi_x,\varphi_y),(\varphi_x,\varphi_z))\in\varepsilon_1$, а $\varepsilon_1=\eta_g$. Тому $((\varphi_{x'},\varphi_{y'}),(\varphi_{x''},\varphi_{z'}))\in\eta_{g\theta}$, де $(\varphi_{x''},\varphi_{z'})=(\varphi_x,\varphi_z)\theta$. Позаяк $\eta_{g\theta}=\varepsilon_1'$, то $x'=x''$. Відображення π_1 є бієктивним. Справді, для будь-якого $x'\in A'$ за ефективністю ρ' знайдеться $y'\in B'$ такий, що $(x',y')\in\rho'$. Нехай $(\varphi_{x'},\varphi_{y'})\theta^{-1}=(\varphi_x,\varphi_y)$. Тоді $x\pi_1=x'$ і сюр'єктивність відображення π_1 доведено. Нехай $x\pi_1=z\pi_1=x'$. Отже, знайдуться $(\varphi_x,\varphi_y),(\varphi_z,\varphi_{y_1})\in L$, такі що $(\varphi_x,\varphi_y)\theta=(\varphi_{x'},\varphi_{y'})$ і $(\varphi_z,\varphi_{y_1})\theta=(\varphi_{x'},\varphi_{y''})$. Через те, що $((\varphi_{x'},\varphi_{y'}),(\varphi_{x'},\varphi_{y''}))\in\varepsilon_1'$, а $\varepsilon_1'=\eta_{g\theta}$, маємо $(\varphi_x,\varphi_y),(\varphi_z,\varphi_{y''})\in\varepsilon_1$, де $\varepsilon_1=\eta_g$. Тому $x=z$ і бієктивність відображення π_1 доведено. Аналогічно визначається бієктивне відображення $\pi_2:B\to B'$. Якщо $(\varphi_x,\varphi_y)\theta=(\varphi_{x'},\varphi_{y'})$, де $(\varphi_{x'},\varphi_{y'})\in L'$, то вважаємо $y\pi_2=y'$. Елемент $y'\in B$ не залежить від вибору елемента $x\in A$ такого, що $(x,y)\in\rho$. Таким чином,

$$\left(\varphi_x,\varphi_y\right)\theta=\left(\varphi_{x\pi_1},\varphi_{y\pi_2}\right)$$

для будь-яких $(x,y)\in\rho$. Тепер для будь-яких $x\in A$ і $y\in B$ матимемо

$$(x,y)\in\rho\Leftrightarrow\left(\varphi_x,\varphi_y\right)\in L\Leftrightarrow\left(\varphi_{x\pi_1},\varphi_{y\pi_2}\right)\in L'\Leftrightarrow\left(x\pi_1,y\pi_2\right)\in\rho',$$

тобто бінарне відношення ρ ізотопне відношенню ρ'.

Нехай тепер $\eta_{g\theta}=\varepsilon_2'$, а $\eta_{h\theta}=\varepsilon_1'$. Покажемо, що ρ і $\left(\rho'\right)^{-1}$ – ізотопні відношення. Визначимо впорядковану пару відображень (π_1,π_2), де $\pi_1:A\to B'$, а $\pi_2:B\to A'$. Нехай $x\in A$ – довільний елемент. Завдяки ефективності ρ знайдеться елемент $y\in B$, такий що $(x,y)\in\rho$. Оскільки $(x,y)\in\rho$, то $\left(\varphi_x,\varphi_y\right)\in L$. Нехай $\left(\varphi_x,\varphi_y\right)\theta=\left(\varphi_{x'},\varphi_{y'}\right)$, де $\left(\varphi_{x'},\varphi_{y'}\right)\in L'$. Покладемо $x\pi_1=y'$. Переконаємося, що $x\pi_1$ не залежить від вибору елемента y. Нехай $z\in B$ – будь-який інший елемент, такий що $(x,z)\in\rho$. Тоді $\left(\varphi_x,\varphi_z\right)\in L$ і $\left(\left(\varphi_x,\varphi_y\right),\left(\varphi_x,\varphi_z\right)\right)\in\varepsilon_1$, а $\varepsilon_1=\eta_g$. Тоді $\left(\left(\varphi_{x'},\varphi_{y'}\right),\left(\varphi_{x''},\varphi_{z'}\right)\right)\in\eta_{g\theta}$, де $\left(\varphi_{x''},\varphi_{z'}\right)=\left(\varphi_x,\varphi_z\right)\theta$. Позаяк $\eta_{g\theta}=\varepsilon_2'$, то $y'=z'$. І в цьому випадку $x\pi_1=z'=y'$. Покажемо, що π_1 – бієктивне відображення. Справді, для будь-якого $y'\in B'$ за ефективності ρ' знайдеться $x'\in A'$ такий, що $(x',y')\in\rho'$. Тоді $\left(\varphi_{x'},\varphi_{y'}\right)\in L'$. Нехай $\left(\varphi_{x'},\varphi_{y'}\right)\theta^{-1}=\left(\varphi_{x''},\varphi_{y''}\right)$, тому $\left(\varphi_{x''},\varphi_{y''}\right)\in L$. Тоді $x''\pi_1=y'$. Таким чином, відображення π_1 є сюр'єктивним. Нехай тепер $x\pi_1=z\pi=y'$. Це означає, що знайдуться $\left(\varphi_x,\varphi_y\right),\left(\varphi_z,\varphi_{y''}\right)\in L$ такі, що $\left(\varphi_x,\varphi_y\right)\theta=\left(\varphi_{x'},\varphi_{y'}\right)$ і $\left(\varphi_z,\varphi_{y''}\right)\theta=\left(\varphi_{z'},\varphi_{y'}\right)$. Оскільки $\left(\left(\varphi_{x'},\varphi_{y'}\right),\left(\varphi_{z'},\varphi_{y'}\right)\right)\in\varepsilon_2'$, а $\varepsilon_2'=\eta_{g\theta}$, то $\left(\left(\varphi_x,\varphi_y\right),\left(\varphi_z,\varphi_{y''}\right)\right)\in\varepsilon_1$, де $\varepsilon_1=\eta_g$. Тому $x=z$ і бієктивність відображення π_1 установлено. Аналогічно визначається бієктивне відображення $\pi_2:B\to A'$. Якщо $\left(\varphi_x,\varphi_y\right)\theta=\left(\varphi_{x'},\varphi_{y'}\right)$, де $\left(\varphi_{x'},\varphi_{y'}\right)\in L'$, то вважаємо $y\pi_2=x'$. Тоді для всіх $x\in A$ і $y\in B$ таких, що $(x,\mathrm{y})\in\rho$

$$\left(\varphi_x,\varphi_y\right)\theta=\left(\varphi_{y\pi_2},\varphi_{x\pi_1}\right)$$

Тепер для будь-яких $x\in A$ і $y\in B$ маємо

$$\left(x,y\right)\in\rho\Leftrightarrow\left(\varphi_x,\varphi_y\right)\in L\Leftrightarrow\left(\varphi_{y\pi_2},\varphi_{x\pi_1}\right)\in L'\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(y\pi_2,x\pi_1\right)\in\rho'\Leftrightarrow\left(x\pi_1,y\pi_2\right)\in\left(\rho'\right)^{-1},$$

тобто бінарне відношення ρ ізотопне відношенню $\left(\rho'\right)^{-1}$. □

Приклад 3.2. Нехай $\alpha=\left\{(1,3),(2,4)\right\}$ – бінарне відношення між множинами $A=\left\{1,2\right\}$ і $B=\left\{3,4,5\right\}$, а $\beta=\left\{(a,d),(b,d)\right\}$ – між множинами $C=\left\{a,b,c\right\}$ і $D=\left\{d\right\}$.

Тоді $Et\left(\alpha\right)=\left\{\varphi_i \,|\, 1\le i\le 12\right\}$, де

$$\varphi_1=\left(\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&4&5\\3&3&3\end{pmatrix}\right),\ \varphi_2=\left(\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&4&5\\3&3&4\end{pmatrix}\right),$$

$$\varphi_3=\left(\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&4&5\\3&3&5\end{pmatrix}\right),\ \varphi_4=\left(\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&4&5\\3&4&3\end{pmatrix}\right),$$

$$\varphi_5=\left(\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&4&5\\3&4&4\end{pmatrix}\right),\ \varphi_6=\left(\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&4&5\\3&4&5\end{pmatrix}\right),$$

$$\varphi_7=\left(\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&4&5\\4&3&3\end{pmatrix}\right),\ \varphi_8=\left(\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&4&5\\4&3&4\end{pmatrix}\right)$$

$$\varphi_9=\left(\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&4&5\\4&3&5\end{pmatrix}\right),\ \varphi_{10}=\left(\begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&4&5\\4&4&3\end{pmatrix}\right),$$

$$\varphi_{11}=\left(\begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&4&5\\4&4&4\end{pmatrix}\right),\ \varphi_{12}=\left(\begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&4&5\\4&4&5\end{pmatrix}\right).$$

Крім того, $Et(\beta)=\{\psi_i \,|\, 1\le i\le 12\}$, де

$$\psi_1=\left(\begin{pmatrix}a&b&c\\a&a&a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}d\\d\end{pmatrix}\right),\ \psi_2=\left(\begin{pmatrix}a&b&c\\a&a&b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}d\\d\end{pmatrix}\right),$$

$$\psi_3=\left(\begin{pmatrix}a&b&c\\a&a&c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}d\\d\end{pmatrix}\right),\ \psi_4=\left(\begin{pmatrix}a&b&c\\a&b&a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}d\\d\end{pmatrix}\right),$$

$$\psi_5=\left(\begin{pmatrix}a&b&c\\a&b&b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}d\\d\end{pmatrix}\right),\ \psi_6=\left(\begin{pmatrix}a&b&c\\a&b&c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}d\\d\end{pmatrix}\right),$$

$$\psi_7=\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & a \end{pmatrix},\begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix}\right),\ \psi_8=\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \end{pmatrix},\begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix}\right),$$

$$\psi_9=\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix},\begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix}\right),\ \psi_{10}=\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & b & a \end{pmatrix},\begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix}\right),$$

$$\psi_{11}=\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & b & b \end{pmatrix},\begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix}\right),\ \psi_{12}=\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & b & c \end{pmatrix},\begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix}\right).$$

Відображення $\theta:\varphi_i\mapsto\psi_i$ є ізоморфізмом напівгруп $Et(\alpha)$ і $Et(\beta)$, при цьому самі відношення α і β не є ані ізотопними, ані антиізотопними. Зауважимо, що теорема 3.5 не виконується, оскільки бінарні відношення α і β не є ефективними.

Нехай тепер $\alpha=\{(1,2),(1,3)\}$ – бінарне відношення між множинами $A=\{1\}$ і $B=\{2,3\}$, $\beta=\{(a,b),(c,d)\}$ – між множинами $C=\{a,c\}$ і $D=\{b,d\}$. Неважко переконатися, що напівгрупи $Et(\alpha)$ і $Et(\beta)$ ізоморфні, проте бінарне відношення α також не є ані ізотопним, ані антиізотопним відношенню β. Як бачимо, α і β – ефективні відношення, але відношення β не є зв'язним, тому теорема 3.5 не виконується.

Зауважимо, що напівгрупа ендотопізмів ефективного та зв'язного бінарного відношення в загальному випадку не є відповідністю напівгрупи ендоморфізмів цього відношення, на що вказує такий приклад.

Приклад 3.3. Нехай $X=\{1,2,3,4\}$. Визначимо на множині X бінарне відношення $\rho=\{(1,1),(1,2),(1,3),(4,2),(4,4),(2,2),(3,4)\}$. За визначенням ρ – ефективне і зв'язне відношення. Розглянемо впорядковану пару

$$(\varphi,\psi)=\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}\right)$$

перетворень множини X. Неважко переконатися, що (φ,ψ) є ендотопізмом відношення ρ, проте $\varphi\notin End(\rho)$ і $\psi\notin End(\rho)$. Отже, $Et(\rho)\not\subset End(\rho)\times End(\rho)$.

3.1.2. Напівгрупа ендоморфізмів ефективних зв'язних відношень. Нехай $\rho \subseteq C \times C$ – довільне відношення на множині C, $\rho \subseteq A \times B$ – ефективне відношення, причому $A \bigcap B = \varnothing$, а $A \bigcup B = C$. Тоді можна вважати, що $\rho \subseteq C \times C$, і розглядати напівгрупу всіх ендоморфізмів $End(\rho)$.

Лема 3.6. *Нехай $\rho \subseteq A \times B$ – ефективне бінарне відношення і $A \bigcap B = \varnothing$. Тоді напівгрупа ендотопізмів $Et(\rho)$ ізоморфна напівгрупі ендоморфізмів $End(\rho)$.*

Доведення. Нехай $(\varphi_1, \varphi_2) \in Et(\rho)$ – довільний ендотопізм. Враховуючи, що $A \bigcap B = \varnothing$, визначимо перетворення φ множини $C = A \bigcup B$, прийнявши $x\varphi = x\varphi_1$, якщо $x \in A$, і $x\varphi = x\varphi_2$, якщо $x \in B$. Тоді

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow (x\varphi_1, y\varphi_2) \in \rho \Rightarrow (x\varphi, y\varphi) \in \rho,$$

тобто $\varphi \in End(\rho)$. Визначимо відображення $\theta : Et(\rho) \to End(\rho)$ таким чином: $(\varphi_1, \varphi_2)\theta = \varphi$. Неважко перевірити, що θ – бієктивне відображення. Для завершення доведення залишається показати, що θ є гомоморфізмом. Справді, нехай $(\varphi_1, \varphi_2), (\psi_1, \psi_2) \in Et(\rho)$ – довільні ендотопізми, $(\varphi_1, \varphi_2)\theta = \varphi$, $(\psi_1, \psi_2)\theta = \psi$. Нехай далі $\varphi|_A$, $(\psi\varphi)|_A$ – звуження перетворень φ і $\psi\varphi$ на множині *A*, а $\varphi|_B$, $(\psi\varphi)|_B$ – звуження перетворень φ і $\psi\varphi$ на множині *B*. Тоді для будь-якого $x \in A$ матимемо

$$x\,\psi|_A \varphi|_A = (x\,\psi|_A)\varphi|_A = (x\,\psi|_A)\varphi = x(\psi\varphi) = x\,(\psi\varphi)|_A.$$

Аналогічно, для будь-якого $y \in B$

$$y\,\psi|_B \varphi|_B = (y\,\psi|_B)\varphi|_B = (y\,\psi|_B)\varphi = y(\psi\varphi) = y\,(\psi\varphi)|_B.$$

Отож, $(\psi\varphi)|_A = \psi|_A \varphi|_A$ і $(\psi\varphi)|_B = \psi|_B \varphi|_B$. Тоді

$$((\psi|_A, \psi|_B) \cdot (\varphi|_A, \varphi|_B))\theta = (\psi|_A \varphi|_A, \psi|_B \varphi|_B)\theta = ((\psi\varphi)|_A, (\psi\varphi)|_B)\theta = \psi\varphi =$$
$$= (\psi|_A, \psi|_B)\theta(\varphi|_A, \varphi|_B)\theta.$$

Теорема 3.7. *Нехай* $\rho \subseteq A \times B$ *і* $\rho' \subseteq A' \times B'$ *– довільні ефективні і зв'язні бінарні відношення, де* $A \bigcap B = \varnothing$ *і* $A' \bigcap B' = \varnothing$. *І нехай* $A \bigcup B = C$ *і* $A' \bigcup B' = C'$. *Якщо напівгрупи ендоморфізмів* $End(\rho)$ *і* $End(\rho')$ *ізоморфні, то бінарні відношення* $\rho \subseteq C \times C$ *і* $\rho' \subseteq C' \times C'$ *ізоморфні або антиізоморфні.*

Доведення. Доведемо спочатку, що з ізоморфізму бінарних відношень $\rho \subseteq C \times C$ і $\rho' \subseteq C' \times C'$ випливає їх ізотопізм. Справді, нехай відображення φ – ізоморфізм бінарних відношень $\rho \subseteq C \times C$ і $\rho' \subseteq C' \times C'$. Покажемо, що $A\varphi = A'$. Для будь-якого $x \in A$ завдяки ефективності ρ знайдеться $y \in B$ такий, що $(x, y) \in \rho$. Тоді $(x\varphi, y\varphi) \in \rho'$. Тому $x\varphi \in A'$, тобто $A\varphi \subseteq A'$. Оскільки φ^{-1} – ізоморфізм бінарних відношень ρ' і ρ, то в свою чергу маємо $A'\varphi^{-1} \subseteq A$. Тоді $A' \subseteq A\varphi$ і, як наслідок, $A\varphi = A'$. Аналогічно маємо $B\varphi = B'$. Нехай $\varphi|_A$ і $\varphi|_B$ – звуження відображення φ відповідно на множинах A і B. Тоді $\varphi|_A : A \to A'$ і $\varphi|_B : B \to B'$ – бієктивні відображення і

$$(x, y) \in \rho \Leftrightarrow (x\varphi, y\varphi) \in \rho' \Leftrightarrow \left(x\,\varphi|_A, y\,\varphi|_B\right) \in \rho',$$

тобто $\left(\varphi|_A, \varphi|_B\right)$ – ізотопізм відношень ρ і ρ'.

З іншого боку, нехай (φ_1, φ_2) – ізотопізм бінарних відношень ρ і ρ'. Визначимо відображення $\varphi : C \to C'$ таким чином: для будь-якого $x \in C$ вважаємо $x\varphi = x\,\varphi|_A$, якщо $x \in A$, і $x\varphi = x\,\varphi|_B$, якщо $x \in B$. Оскільки $\varphi|_A$ і $\varphi|_B$ – бієктивні відображення, то відображення φ також є бієктивним і

$$(x, y) \in \rho \Leftrightarrow \left(x\,\varphi|_A, y\,\varphi|_B\right) \in \rho' \Leftrightarrow (x\varphi, y\varphi) \in \rho',$$

тобто φ – ізоморфізм відношень ρ і ρ'.

Аналогічно з антиізоморфізму бінарних відношень $\rho \subseteq C \times C$ і $\rho' \subseteq C' \times C'$ випливає їх антиізотопізм, і навпаки.

Таким чином, бінарні відношення $\rho \subseteq C \times C$ і $\rho' \subseteq C' \times C'$ ізоморфні або антиізоморфні тоді й тільки тоді, коли вони відповідно ізотопні або антиізотопні. Тепер, за теоремою 3.5 і попередньою лемою, маємо $End(\rho)\cong End(\rho')$ тоді й лише тоді, коли $Et(\rho)\cong Et(\rho')$. А з цього випливає, що $\rho\simeq\rho'$ або $\rho\simeq(\rho')^{-1}$ тоді й тільки тоді коли $\rho\cong\rho'$ або $\rho\cong(\rho')^{-1}$. □

3.2. Моноїд сильних ендотопізмів симетричного відношення

У цьому підрозділі визначається клас симетричних бінарних відношень і доводиться, що моноїд усіх сильних ендотопізмів довільного симетричного відношення такого класу є ізоморфним вінцевому добутку моноїда сильних ін’єктивних ендоморфізмів з деякою малою категорією.

3.2.1. Клас $\mathfrak{S}$ симетричних відношень. Нехай X – довільна непорожня множина. Якщо $\rho\subseteq X\times X$ і $x\in X$, то другу проекцію відношення ρ для x будемо позначати також через $N(x)$, тобто $N(x)=\{y\in X\,|\,(x,y)\in\rho\}$. Виконується така лема.

Лема 3.8. *Нехай X – довільна непорожня множина, $\rho\subseteq X\times X$ – симетричне відношення, $a,b\in X$. Існує сильний ендотопізм (τ,σ) відношення ρ такий, що $\tau\in End(\rho)$, $\sigma\in End(\rho)$, і $a\tau=b\sigma$ тоді й тільки тоді, коли $N(a)=N(b)$.*

Доведення. Нехай $(\tau,\sigma)\in SEt(\rho)$ задовольняє умову леми. Позаяк $\tau\in End(\rho)$, то $c\tau\in N(a\tau)$ для будь-якого $c\in N(a)$. Враховуючи, що $a\tau=b\sigma$, отримуємо $c\tau\in N(b\sigma)$. Оскільки $(\tau,\sigma)\in SEt(\rho)$, то $c\in N(b)$. На підставі довільності вибору $c\in X$ маємо $N(a)\subseteq N(b)$. Доведення оберненого включення є аналогічним.

Візьмемо тепер $a,b\in X$ такі, що $N(a)=N(b)$, визначимо перетворення τ і σ множини X так:

$$x\tau = x, \qquad x\sigma = \begin{cases} a, \text{ якщо } x = b, \\ b, \text{ якщо } x = a, \\ x \text{ в інших випадках} \end{cases}$$

для всіх $x \in X$.

Зрозуміло, що $\tau \in End(\rho)$. Також цілком очевидно, що з $(x,y) \in \rho$ випливає $(x\sigma, y\sigma) \in \rho$ для таких x, y, що 1) $x \neq y$, $x, y \in \{a,b\}$ або 2) $x \in X \setminus \{a,b\}$, $y \in X \setminus \{a,b\}$. Нехай тепер $x, y \in \{a,b\}$, $x = y$. Тоді

$$(x,x) \in \rho \Rightarrow x \in N(x) \text{ і } N(x\sigma) = N(x) \Rightarrow x\sigma \in N(x) = N(x\sigma) \Rightarrow (x\sigma, x\sigma) \in \rho.$$

Якщо $x \in \{a,b\}$, $y \in X \setminus \{a,b\}$, то

$$(x,y) \in \rho \Rightarrow y \in N(x) \Rightarrow y\sigma \in N(x\sigma) \Rightarrow (x\sigma, y\sigma) \in \rho.$$

Випадок $x \in X \setminus \{a,b\}$, $y \in \{a,b\}$ розглядається аналогічно. У підсумку отримуємо, що $\sigma \in End(\rho)$.

Зауважимо, що $(\tau,\sigma) = (\tau^{-1}, \sigma^{-1})$. Тому для доведення того, що $(\tau,\sigma) \in SEt(\rho)$, достатньо довести, що $(\tau,\sigma) \in Et(\rho)$. Доведемо це. Справді, з $(x,y) \in \rho$ випливає $(x\tau, y\sigma) \in \rho$, що є цілком очевидним, якщо $y \notin \{a,b\}$. Розглянемо всі можливі випадки.

1. Якщо $x, y \in \{a,b\}$, то

$$(x,y) \in \rho \Rightarrow x \in N(y) \Rightarrow x \in N(x) \Rightarrow x \in N(y\sigma) \Rightarrow (x\tau, y\sigma) \in \rho.$$

2. Нехай $x \in X \setminus \{a,b\}$, $y \in \{a,b\}$. Тоді

$$(x,y) \in \rho \Rightarrow x \in N(y) \Rightarrow x \in N(y\sigma) \Rightarrow x\tau \in N(y\sigma) \Rightarrow (x\tau, y\sigma) \in \rho.$$

3. Якщо ж $x, y \notin \{a,b\}$, то $(x\tau, y\sigma) = (x,y) \in \rho$.

Отож, $(\tau,\sigma) \in SEt(\rho)$. □

Зауважимо, що ендоморфізми τ, σ з леми 3.8 є сильними. Справді, нехай умова леми 3.8 виконується, $\tau \in End(\rho)$ і $(a\tau, c\tau) \in \rho$ для деяких $a, c \in X$. Тоді $c\tau \in N(a\tau)$, і врахувавши $a\tau = b\sigma$, отримуємо $c\tau \in N(b\sigma)$. Оскільки $(\tau,\sigma) \in SEt(\rho)$, то $c \in N(b)$. Але $N(b) = N(a)$, тоді $c \in N(a)$ і

$(a,c)\in\rho$. Отже, $\tau\in SEnd(\rho)$. Аналогічно можна довести, що $\sigma\in SEnd(\rho)$.

З леми 3.8 випливає, що на множині X природно виникає відношення

$$\nu=\left\{(x,y)\in X\times X \mid N(x)=N(y)\right\},$$

яке очевидно є відношенням еквівалентності. Далі, на фактор-множині X/ν визначимо відношення δ:

$$\delta=\left\{(x_\nu,y_\nu)\in(X/\nu)\times(X/\nu) \mid (x,y)\in\rho\right\},$$

де x_ν є класом еквівалентності, який містить $x\in X$.

Природне відображення $\gamma: X\to X/\nu, x\mapsto x_\nu$ визначає сильний гомотопізм (γ,γ) відношень $\rho\subseteq X\times X$ і $\delta\subseteq X/\nu\times X/\nu$, який, відповідно до леми 3.8 і зауваження до неї, задає сильний гомоморфізм γ цих відношень. Реляційна система $(X/\nu,\delta)$ називається *канонічною сильною фактор-системою.*

Нехай (U,ζ), $(Y_u,\rho_u)_{u\in U}$ – довільні реляційні системи.

Узагальненим лексикографічним добутком $U((Y_u)_{u\in U})$ реляційних систем (U,ζ) і $(Y_u,\rho_u)_{u\in U}$ називається модель $(U((Y_u)_{u\in U}),\omega)$, де

$$U\left((Y_u)_{u\in U}\right)=\left\{(u,a_u) \mid u\in U,\ a_u\in Y_u\right\}$$

і $((u,a_u),(v,b_v))\in\omega$ тоді й тільки тоді, коли $(u,v)\in\zeta$ або $u=v$ і $(a_u,b_v)\in\rho_u$ [15].

Твердження 3.9. [15] *Нехай* X *– довільна непорожня множина,* $\rho\subseteq X\times X$ *– симетричне відношення,* ν *і* δ *– визначені раніше відношення еквівалентності на* X *і* X/ν *відповідно,* $U=X/\nu$ *– канонічна сильна фактор-система. Візьмемо для кожного* $u\in U$ *множину* Y_u *таку, що* $|Y_u|=|u|$, *і взаємно однозначне відображення* $\mu_u: u\to Y_u$. *Тоді*

$$(X,\rho)\cong\left(U\left((Y_u)_{u\in U}\right),\omega\right),$$

де $\zeta=\delta$,

$$\rho_u = \left\{ (y, y') \in Y_u \times Y_u \,\middle|\, \left(y\mu_u^{-1}, y'\mu_u^{-1} \right) \in \rho \right\}$$

при $u \in U$, ω *визначене в означенні узагальненого лексикографічного добутку.*

Надалі елементи множини X будемо ототожнювати з відповідними їм елементами з узагальненого лексикографічного добутку $U\left((Y_u)_{u\in U}\right)$.

Нехай $W \subseteq U\left((Y_u)_{u\in U}\right)$. Нагадаємо, що *першою проекцією* множини W на фактор-систему X / ν називається множина

$$p_1(W) = \{u \in U \,|\, (u, x_u) \in W\}.$$

Покладемо $\bar{u} = \{(u, x_u) \,|\, x_u \in Y_u\}$.

Лема 3.10. *Нехай* $V = U\left((Y_u)_{u\in U}\right)$, $\omega \subseteq V \times V$, $U = X / \nu$ *і* $(\varphi, \psi) \in SEt(\omega)$. *Тоді*

$$p_1(\bar{u}\varphi) \cap p_1(\bar{v}\varphi) = \varnothing \text{ і } p_1(\bar{u}\psi) \cap p_1(\bar{v}\psi) = \varnothing$$

для довільних різних $u, v \in U$.

Доведення. Припустимо протилежне: існують різні $u, v \in U$ такі, що $p_1(\bar{u}\varphi) \cap p_1(\bar{v}\varphi) = p_1(\bar{r})$ для деякого $\bar{r} \subseteq V$, $\bar{r} \neq \varnothing$. Зі структури фактор-системи U і множини V випливає, що $N(u, x_u) = N(u, y_u)$ для будь-якого $u \in U$ і будь-яких $x_u, y_u \in Y_u$. Оскільки $(\varphi, \psi) \in SEt(\omega)$, для будь-яких $(u, y_u), (v, y_v) \in \bar{r}\varphi^{-1}$ маємо $N(u, y_u) = N(v, y_v)$, а це можливо тільки у випадку, коли $u = v$. Міркування для перетворення ψ є аналогічними. З отриманого протиріччя випливає твердження леми. □

Наслідок 3.11. *Нехай* $V = U\left((Y_u)_{u\in U}\right)$, $\omega \subseteq V \times V$, $U = X / \nu$, $|U| < \infty$ *і* $(\varphi, \psi) \in SEt(\omega)$. *Тоді* $|p_1(\bar{u}\varphi)| = p_1(\bar{u}\psi) = 1$ *для будь-якого* $u \in U$.

Приклад 3.4. Нехай $X = \mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, $\rho = \left(\rho_1 \cup \rho_1^{-1}\right) \setminus \left(\rho_2 \cup \rho_2^{-1}\right)$, де $\rho_1 = \left\{ (x, x+1) \,\middle|\, x \in X \right\}$ і

$$\rho_2 = \left\{ (3,4) \right\} \cup \left\{ (x_i, x_i + 1) \,\middle|\, x_0 = 3,\ x_i = x_{i-1} + 4,\ i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Фактор-система X/ν складається з класу $1_\nu=\{1,3\}$ і класів вигляду $x_\nu=\{x\}$, $x\in X\setminus\{1,3\}$. Тоді

$$V=X/\nu\left(\left(x_\nu\right)_{x_\nu\in X/\nu}\right)=\left\{\left(1_\nu,1\right),\left(1_\nu,3\right)\right\}\cup\left\{\left(x_\nu,x\right)\;\middle|\;x\in X\setminus\{1,3\}\right\}.$$

Визначимо перетворення φ і ψ множини X, прийнявши

$$x\varphi=x+4 \quad \text{для будь-якого } x\in X,$$

$$x\psi=\begin{cases}7, & \textit{якщо } x=1,\\ 5, & \textit{якщо } x=3,\\ x+4 & \textit{в інших випадках},\end{cases}$$

що можна записати так:

$$\varphi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & x & \dots\\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \dots & x+4 & \dots\end{pmatrix},$$

$$\psi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & x & \dots\\ 7 & 6 & 5 & 8 & 9 & 10 & 11 & \dots & x+4 & \dots\end{pmatrix}.$$

Неважко переконатися, що $(\varphi,\psi)\in SEt(\rho)$, при цьому для класу $1_\nu=\{1,3\}$ маємо $1\varphi=5\in 5_\nu$, $3\varphi=7\in 7_\nu$. Аналогічно $1\psi=7\in 7_\nu$, $3\psi=5\in 5_\nu$.

Визначимо перетворення $\varphi':V\to V$ і $\psi':V\to V$, прийнявши $\left(x_\nu,x\right)\varphi'=\left(\left(x\varphi\right)_\nu,x\varphi\right)$, $\left(x_\nu,x\right)\psi'=\left(\left(x\psi\right)_\nu,x\psi\right)$ для будь-якого $\left(x_\nu,x\right)\in V$. Очевидно (φ',ψ') – сильний ендотопізм відношення $\omega\subseteq V\times V$ і

$$p_1\left(\overline{x_\nu}\varphi\right)\cap p_1\left(\overline{y_\nu}\varphi\right)=\varnothing,\; p_1\left(\overline{x_\nu}\psi\right)\cap p_1\left(\overline{y_\nu}\psi\right)=\varnothing$$

для будь-яких $x_\nu\neq y_\nu\in X/\nu$, але на підставі нескінченності множини X маємо $\left|p_1\left(\overline{1_\nu}\varphi\right)\right|=\left|\{5_\nu,7_\nu\}\right|\neq 1$ і $\left|p_1\left(\overline{1_\nu}\psi\right)\right|\neq 1.$

Нехай X – довільна непорожня множина. Позначимо через $\mathfrak{G}$ клас усіх симетричних бінарних відношень ρ, визначених на множині X, для яких за будь-якого $(\varphi,\psi)\in SEt(\rho)$ виконується умова:

$$\forall x_\nu\in X/\nu \;\; \exists y_\nu\in X/\nu:\; x_\nu\varphi\subseteq y_\nu,\; x_\nu\psi\subseteq y_\nu \tag{3.1}$$

Зауважимо таке: якщо $\rho\in\mathfrak{G}$, то при різних $x_\nu,y_\nu\in X/\nu$, випадок

$x_\nu\varphi \subseteq z_\nu$ і $y_\nu\psi \subseteq z_\nu$ для деякого $z_\nu \in X/\nu$ є неможливим. Доведемо спочатку, що φ і ψ – ендоморфізми відношення $\rho \in \mathfrak{G}$, де $(\varphi,\psi) \in SEt(\rho)$. Справді, нехай $a,b \in X$ такі, що $(a,b) \in \rho$. Нехай $a \in a_\nu$ і $b \in b_\nu$. Оскільки $(\varphi,\psi) \in Et(\rho)$, то $(a\varphi, b\psi) \in \rho$ і $a\varphi \in a_\nu\varphi$, $b\psi \in b_\nu\psi$. Враховуючи, що $\rho \in \mathfrak{G}$, одержуємо $b_\nu\psi \subseteq c_\nu$, $b_\nu\varphi \subseteq c_\nu$ для деякого $c_\nu \in X/\nu$. Але тоді $(a\varphi, b') \in \rho$ для будь-якого $b' \in c_\nu$, а також і для $b' = b\varphi$, звідки отримуємо $(a\varphi, b\varphi) \in \rho$ і $\varphi \in End(\rho)$. Доведення того, що $\psi \in End(\rho)$, є аналогічним. Нехай тепер $x, y \in X$ такі, що $x_\nu \neq y_\nu$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує такий $a \in N(x)$, що $a \notin N(y)$. Оскільки $\varphi \in End(\rho)$, то $a\varphi \in N(x\varphi) = N(z)$. Враховуючи, що $(\varphi,\psi) \in SEt(\rho)$, отримуємо $a \in N(z\psi^{-1}) = N(y)$, що суперечить нашому припущенню. Отож, умова (3.1) для будь-якого $\rho \in \mathfrak{G}$ задовольняє умову наслідку 3.11.

Нехай $(\tau,\sigma) \in Et(\rho)$. Визначимо перетворення τ^* фактор-системи X/ν так: $x_\nu\tau^* = (x\tau)_\nu$ для всіх $x_\nu \in X/\nu$. З означення класу $\mathfrak{G}$ й останнього зауваження випливає таке твердження.

Твердження 3.12. *Для будь-якого $(\varphi,\psi) \in SEt(\rho)$, $\rho \in \mathfrak{G}$, виконується рівність $\varphi^* = \psi^*$, де φ^* – сильний ін'єктивний гомоморфізм відношення $\delta \subseteq X/\nu \times X/\nu$.*

Наслідок 3.13. *Для кожної канонічної сильної фактор-системи $(X/\nu, \delta)$ виконується рівність:*

$$SEnd(\delta) = SMon(\delta),$$

де $SMon(\delta)$ – моноїд сильних ін'єктивних ендоморфізмів відношення δ.

Наслідок 3.14. *Нехай X – скінченна множина та $\rho \in \mathfrak{G}$. Для кожної канонічної сильної фактор-системи $(X/\nu, \delta)$ виконується рівність:*

$$SEnd(\delta) = Aut(\delta).$$

3.2.2. Точне зображення моноїда сильних ендотопізмів. Нагадаємо конструкцію добутку категорій. Нехай задана довільна сукупність категорій C_i, $i \in I$. Визначимо нову категорію $\prod_{i \in I} C_i$, прийнявши

$$Ob\left(\prod_{i \in I} C_i\right) = \prod_{i \in I} ObC_i \quad \text{і} \quad Mor\left(\prod_{i \in I} C_i\right) = \prod_{i \in I} MorC_i .$$

Добуток морфізмів у цій категорії визначається покомпонентно.

Нехай тепер $P = U\left((Y_u)_{u \in U}\right)$, $\omega \subseteq P \times P$ – довільне відношення класу $\mathfrak{G}$. Визначимо малу категорію K, прийнявши

$$ObK = \left\{ Y_u \,\middle|\, u \in U \right\}, \quad MorK = \bigcup_{u,v \in U} Map\left(Y_u, Y_v\right),$$

де $Map(Y_u, Y_v)$ – множина всіх відображень з Y_u в Y_v. Позначимо через K^2 добуток категорії K на себе, а через $\mathfrak{K}$ – повну підкатегорію категорії K^2, яка розглядається на множині об'єктів:

$$Ob\mathfrak{K} = \left\{ \left(Y_u, Y_u\right) \in ObK \times ObK \,\middle|\, u \in U \right\}.$$

Моноїд $SMon(\delta)$ природно діє справа на $Ob\mathfrak{K}$:

$$\left(Y_u, Y_u\right)\tau^* = \left(Y_{u\tau^*}, Y_{u\tau^*}\right),$$

де $\tau^* \in SMon(\delta)$. Отже, отримуємо вінцевий добуток $SMon(\delta) wr \mathfrak{K}$ моноїда $SMon(\delta)$ і малої категорії $\mathfrak{K}$.

Нехай $\left(\tau^*, h_{f,g}\right) \in SMon(\delta) wr \mathfrak{K}$, де $\tau^* \in SMon(\delta)$, $h_{f,g} \in Map\left(Ob\mathfrak{K}, Mor\mathfrak{K}\right)$. Тоді $(Y_u, Y_u)h_{f,g} \in Map\left((Y_u, Y_u), \left(Y_{u\tau^*}, Y_{u\tau^*}\right)\right)$ для всіх $\left(Y_u, Y_u\right) \in Ob\mathfrak{K}$. Позначимо $\left(Y_u, Y_u\right)h_{f,g} = \left(f_u, g_u\right)$, де $\left(y_u, y_u\right)\left(f_u, g_u\right) = \left(y_u f_u, y_u g_u\right) \in \left(Y_{u\tau^*}, Y_{u\tau^*}\right)$ для всіх $y_u \in Y_u$.

Виконується така теорема.

Теорема 3.15. Нехай $P = U\left((Y_u)_{u \in U}\right)$, $\omega \subseteq P \times P$ – довільне відношення класу $\mathfrak{G}$ і $\mathfrak{K}$ – мала категорія, визначена раніше. Тоді

$$SEt(\omega) \cong SMon(\delta) wr \mathfrak{K}.$$

Доведення. Нехай ω – довільне відношення класу $\mathfrak{G}$, $(\varphi,\psi)\in SEt(\omega)$. Згідно з твердженням 3.12 $\varphi^*\in SMon(\delta)$. Визначимо відображення $h_{\varphi,\psi}: Ob\mathfrak{K}\to Mor\mathfrak{K}$ так:

$$(Y_u,Y_u)h_{\varphi,\psi}=(\varphi_u,\psi_u),$$

де для кожного $u\in U$ матимемо

$$(\varphi_u,\psi_u):(Y_u,Y_u)\to\left(Y_{u\varphi^*},Y_{u\varphi^*}\right)$$

і

$$(a_u,b_u)(\varphi_u,\psi_u)=(a_u\varphi_u,b_u\psi_u)=(a_{u'},b_{u'}),$$

якщо $((u,a_u),(u,b_u))(\varphi,\psi)=((u',a_{u'}),(u',b_{u'}))$ для будь-яких $(a_u,b_u)\in Y_u\times Y_u$.

Отже, $((u,a_u),(u,b_u))(\varphi,\psi)=\left((u\varphi^*,a_u\varphi_u),(u\varphi^*,b_u\psi_u)\right)$ і коректно заданим є відображення

$$\theta: SEt(\omega)\to SMon(\delta)wr\mathfrak{K},\ (\varphi,\psi)\mapsto\left(\varphi^*,h_{\varphi,\psi}\right).$$

Нехай тепер $(\varphi,\psi),(\tau,\sigma)\in SEt(\omega)$ – такі ендотопізми, що

$$(\varphi,\psi)\theta=\left(\varphi^*,f_{\varphi,\psi}\right),\quad(\tau,\sigma)\theta=\left(\tau^*,g_{\tau,\sigma}\right)$$

і $((\varphi,\psi)(\tau,\sigma))\theta=\left((\varphi\tau)^*,h_{\varphi\tau,\psi\sigma}\right)$.

Тоді для будь-яких $(u,a_u),(v,b_v)\in P$

$$\left(\left(u(\varphi\tau)^*,a_u(\varphi\tau)_u\right),\left(v(\varphi\tau)^*,b_v(\psi\sigma)_v\right)\right)=((u,a_u),(v,b_v))(\varphi\tau,\psi\sigma)=$$

$$=((u,a_u)\varphi\tau,(v,b_v)\psi\sigma)=(((u,a_u)\varphi)\tau,((v,b_v)\psi)\sigma)=$$

$$\left((u\varphi^*,a_u\varphi_u)\tau,(v\varphi^*,b_v\psi_v)\sigma\right)=\left(\left((u\varphi^*)\tau^*,(a_u\varphi_u)\tau_{u\varphi^*}\right),\left((v\varphi^*)\tau^*,(b_v\psi_v)\sigma_{v\varphi^*}\right)\right)=$$

$$=\left(\left(u\left(\varphi^*\tau^*\right),a_u\left(\varphi_u\tau_{u\varphi^*}\right)\right),\left(v\left(\varphi^*\tau^*\right),b_v\left(\psi_v\sigma_{v\varphi^*}\right)\right)\right).$$

Отож, отримали, що $(\varphi\tau)^*=\varphi^*\tau^*$, $(\varphi\tau)_u=\varphi_u\tau_{u\varphi^*}$ і $(\varphi\tau)_v=\psi_v\sigma_{v\varphi^*}$.

Тепер для будь-якого $(Y_u,Y_u)\in Ob\mathfrak{K}$ маємо

$$(Y_u,Y_u)h_{\varphi\tau,\psi\sigma}=\left((\varphi\tau)_u,(\psi\sigma)_u\right)=\left(\varphi_u\tau_{u\varphi^*},\psi_u\sigma_{u\varphi^*}\right)=\left((\varphi_u,\psi_u)\left(\tau_{u\varphi^*},\sigma_{u\varphi^*}\right)\right)=$$

$$=(Y_u,Y_u)\left(f_{\varphi,\psi}\left(g_{\tau,\sigma}\right)_{\varphi^*,\varphi^*}\right).$$

Отже, $h_{\varphi\tau,\psi\sigma}=f_{\varphi,\psi}\left(g_{\tau,\sigma}\right)_{\varphi^*,\varphi^*}$.

Отож,

$$\left((\varphi,\psi)(\tau,\sigma)\right)\theta=(\varphi\tau,\psi\sigma)\theta=\left((\varphi\tau)^*,h_{\varphi\tau,\psi\sigma}\right)=\left(\varphi^*\tau^*,f_{\varphi,\psi}\left(g_{\tau,\sigma}\right)_{\varphi^*,\varphi^*}\right)=$$

$$=\left(\varphi^*,f_{\varphi,\psi}\right)\left(\tau^*,g_{\tau,\sigma}\right)=(\varphi,\psi)\theta(\tau,\sigma)\theta.$$

Нехай тепер $(\varphi,\psi),(\tau,\sigma)\in SEt(\omega)$ такі, що $(\varphi,\psi)\neq(\tau,\sigma)$. Тоді для будь-яких $((u,a_u),(u,b_u))\in P\times P$ матимемо:

$$((u,a_u),(u,b_u))(\varphi,\psi)\neq((u,a_u),(u,b_u))(\tau,\sigma)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left((u,a_u)\varphi,(u,b_u)\psi\right)\neq\left((u,a_u)\tau,(u,b_u)\sigma\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(u,a_u)\varphi\neq(u,a_u)\tau\quad\text{або}\quad(u,b_v)\psi\neq(v,b_v)\sigma\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(u\varphi^*,a_u\varphi_u\right)\neq\left(u\tau^*,a_u\tau_u\right)\quad\text{або}\quad\left(v\varphi^*,b_v\psi_u\right)\neq\left(v\tau^*,b_v\sigma_u\right).$$

Тоді $u\varphi^*\neq u\tau^*$ або $a_u\varphi_u\neq a_u\tau_u$, що випливає з нерівності $\left(u\varphi^*,a_u\varphi_u\right)\neq\left(u\tau^*,a_u\tau_u\right)$, або $v\psi^*\neq v\sigma^*$ або $b_v\varphi_u\neq b_v\tau_v$, що випливає з нерівності $\left(v\varphi^*,b_v\psi_u\right)\neq\left(v\tau^*,b_v\sigma_u\right)$. У підсумку, $(\varphi,\psi)\theta\neq(\tau,\sigma)\theta$ у будь-якому випадку. Отже, відображення θ є ін'єктивним. Сюр'єктивність θ випливає з його структури. Теорема доведена. □

Зауважимо, що всі симетричні відношення, визначені на скінченній множині X, задовольняють умову (3.1). Справді, нехай X – скінченна множина, $\rho\subseteq X\times X$ – симетричне відношення, (τ,σ) – його сильний ендотопізм. Доведемо, що τ^*, σ^* – бієктивні перетворення фактор-системи X/ν, визначеної як у пункті 3.2.1. Справді, нехай $x_\nu\neq y_\nu$, тоді існує такий $a\in N(x)$, що $a\notin N(y)$. Оскільки, згідно з лемою 3.8 і зауваженням до неї, $\tau\in SEnd(\rho)$, то $a\tau\in N(x\varphi)$ і $a\tau\notin N(y\varphi)$, звідки $(x\tau)_\nu\neq(y\tau)_\nu$ і τ^* є ін'єктивним перетворенням. Сюр'єктивність τ^* є очевидною. Міркування щодо перетворення σ^* аналогічні. Отже, на підставі скінченності X в образі кожного перетворення τ, σ множини X будь-якого сильного ендотопізму (τ,σ) цього відношення завжди є хоча б один представник кожного класу еквівалентності ν.

Припустимо тепер, що існують такі $x,y\in X$, що $(x,y)\in\nu$, але $(x\tau,y\sigma)\notin\nu$. Тоді знайдеться такий $z\in N(x\tau)$, що $z\notin N(y\sigma)$. Через те, що $(\tau,\sigma)\in SEt(\rho)$, одержуємо $z\sigma^{-1}\in N(x)=N(y)$. Оскільки $\sigma\in End(\rho)$, то $z\in N(y\sigma)$, що суперечить нашому припущенню. Отож, наслідком з теореми 3.15 є такий результат.

Наслідок 3.16. *Нехай* X *– скінченна множина,* $P=U\left(\left(Y_u\right)_{u\in U}\right)$, $\omega\subseteq P\times P$ *– довільне симетричне відношення,* $\mathfrak{K}$ *– мала категорія, визначена вище. Тоді*

$$SEt(\omega)\cong Aut(\delta)wr\mathfrak{K}.$$

Наслідок 3.17. *Нехай* X *– скінченна множина,* $P=U\left(\left(Y_u\right)_{u\in U}\right)$, $\omega\subseteq P\times P$ *– довільне симетричне відношення. Тоді*

$$\left|SEt(\omega)\right|=\sum_{\varphi\in Aut(\delta)}\left(\prod_{u\in U}\left|Y_{u\varphi}\right|^{|Y_u|}\right)^2.$$

У зауваженні до визначення класу $\mathfrak{G}$ було показано, що для будь-якого ендотопізму $(\varphi,\psi)\in SEt(\rho)$, $\rho\in\mathfrak{G}$, відображення φ та ψ множини X є ендоморфізмами відношення ρ, тобто $Et(\rho)\subseteq End(\rho)\times End(\rho)$. Отже, у підсумку отримуємо такий результат.

Твердження 3.18. *Для будь-якого відношення* ρ *з класу* $\mathfrak{G}$ *моноїд* $SEt(\rho)$ *є відповідністю напівгрупи* $End(\rho)$.

Висновки до розділу 3

У цьому розділі досліджено напівгрупи ендотопізмів ефективних зв'язних та симетричних бінарних відношень.

У першому підрозділі розв'язано проблему визначеності ефективних зв'язних бінарних відношень їх напівгрупами ендотопізмів, а саме: доведено, що напівгрупа ендотопізмів ефективного зв'язного бінарного відношення характеризує це відношення з точністю до ізотопізму або антиізотопізму. Також показано, що за певних додаткових умов ефективні та зв'язні бінарні відношення є ізоморфними або антиізоморфними в тому й лише в тому разі, коли вони ізотопні або антиізотопні.

У другому підрозділі знайдено клас симетричних бінарних відношень, для яких моноїд усіх сильних ендотопізмів є ізоморфним вінцевому добутку моноїда перетворень і деякої малої категорії. Отриманий результат є аналогом теореми Кнауера-Ніпорте [15] про точне зображення моноїда сильних ендоморфізмів неорієнтованих графів без кратних ребер.

Результати цього розділу анонсовано в [36] та опубліковано в [27, 30].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджено алгебраїчні та комбінаторні властивості напівгруп ендоморфізмів відношення еквівалентності та симетричного бінарного відношення, а також напівгрупи ендотопізмів ефективного і зв’язного бінарного відношення.

Отримано опис точних зображень напівгрупи ендотопізмів, моноїда сильних ендотопізмів, групи автотопізмів відношення еквівалентності, а також моноїда сильних ендотопізмів симетричного відношення заданого класу. Ці результати розвивають та доповнюють описи У. Кнауера та М. Ніпорте про точне зображення моноїда сильних ендоморфізмів скінченних неорієнтовних графів без кратних ребер, У. Нуммерта про точне зображення узагальнених лексикографічних добутків графів, а також Ю. В. Жучка та Є. О. Бондар про точні зображення певних нескінченних графів та гіперграфів.

Для шести типів відповідностей напівгрупи ендоморфізмів довільного відношення еквівалентності знайдено умови регулярності. Отримані описи є такими, що розвивають та доповнюють описи А. Я. Айзенштат, В. І. Кіма, І. Б. Кожухова та В. А. Ярошевича про регулярність моноїдів ендоморфізмів злічених ланцюгів та впорядкованих і квазівпорядкованих множин.

Введено поняття ендотипу бінарного відношення відносно його ендотопізмів та отримано класифікацію еквівалентностей за значенням їх ендотипу відносно ендотопізмів, а також класифікацію строгих часткових еквівалентностей за значенням ендотипу відносно ендоморфізмів. Для довільної еквівалентності, визначеної на скінченній множині, досліджено ендоспектр відносно ендотопізмів. Отримані результати доповнюють результати У. Кнауера, М. Боттчера, Х. Хоу, К. Фана й Ю. Луо, В. Ванга та Х. Хоу про класифікацію за ендотипом скінченних графів, узагальнених полігонів та графів N-призм.

Розв'язано проблему визначеності ефективних і зв'язних бінарних відношень їх напівгрупами ендотопізмів. Отриманий результат є аналогом відомих результатів Л. М. Глускіна, Л. Б. Шнепермана, Дж. Арауджо та Я. Конєчни про визначеність відношення квазіпорядку, рефлексивних бінарних відношень та щільних I-відношень їх напівгрупами ендоморфізмів, а також результату Б. В. Попова про визначеність квазівпорядкованих множин їх напівгрупами ендотопізмів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ganyushkin. O. Classical Finite Transformation Semigroups: An Introduction / O. Ganyushkin, V. Mazorchuk. – Springer-Verlag, 2009. – Algebra and Applications. – Vol. 9. – 317 p.
2. Mashevitsky G. Automorphisms of the endomorphism semigroup of a free monoid or a free semigroup / G. Mashevitsky, B. M. Schein // Proc. Amer. Math. Soc. – 2003. – Vol. 131, no. 6. – P. 1655 – 1660.
3. Глускин Л. М. Полугруппы изотонных преобразований / Л. М. Глускин // Успехи матем. наук. – 1961. – Т. 16, № 5. – С. 157 – 162.
4. Гельфанд И. М. О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах / И. М. Гельфанд, А. Н. Колмогоров // Докл. АН СССР. – 1939. – Т. 22, № 1. – С. 11 – 15.
5. Ляпин Е. С. Полугруппы / Е. С. Ляпин. – М. : Физматлит. – 1960. – 592 с.
6. Математическая энциклопедия : в 5 т. / ред. совет : И. М. Виноградов (гл. ред.) и др. – М. : Сов. энцикл. – 1984. – Т. 4. – С. 599 – 600.
7. Попов Б. В. Полугруппы эндоморфизмов рефлексивных бинарных отношений / Б. В. Попов // Ученые записки ЛГПИ им. А. И. Герцена. – 1967. – Т. 302. – С. 116 – 123.
8. Важенин Ю. М. Об элементарной определяемости и элементарной характеризуемости графов / Ю. М. Важенин // Изв. вузов. матем. – 1972. – № 7. – С. 3 – 11.
9. Araujo J. Dense relations are determined by their endomorphisms monoids / J. Araujo, J. Konieczny // Semigroup Forum. – 2005. – Vol. 70. – P. 302 – 306.
10. Айзенштат А. Я. Определяющие соотношения полугруппы эндоморфизмов конечного линейного упорядоченного множества /

А. Я. Айзенштат // Сиб. мат. журн. – 1962. – Т. 3, № 2. – С. 161 – 169.

11. Schein B. M. Products of idempotent order-preserving transformations of arbitrary chains / B. M. Schein // Semigroup Forum. – 1975. – Vol. 11, № 1. – P. 297 – 309.
12. Laradji. A. Combinatorial results for semigroups of order-preserving partial transformations / A. Laradji, A. Umar // J. Algebra. – 2004. – Vol. 278, no 1. – P. 342 – 359.
13. Ким В. И. Условия регулярности полугрупп изотонных преобразований счётных цепей / В. И. Ким, И. Б. Кожухов // Фундамент. и прикл. мат. – 2006. – Т. 12, № 8. – С. 97 – 104.
14. Čulík K. Zur Theorie der Graphen / K. Čulík // Časopis Pěst. Mat. – 1958. – Vol. 83. – P. 133 – 155.
15. Knauer U. Endomorphisms of graphs I. The monoid of strong endomorphisms / U. Knauer, M. Nieporte // Arch. Math. – 1989. – Vol. 52, № 6. – P. 607 – 614.
16. Бондарь Е. А. Полугруппы сильных эндоморфизмов бесконечных графов и гиперграфов / Е. А. Бондарь, Ю. В. Жучок // Укр. мат. журн. – 2013. – Т. 65, № 6. – С. 743 – 754.
17. Böttcher M. Endomorphism spectra of graphs / M. Böttcher, U. Knauer // Discrete Math. – 1992. – Vol. 109. – P. 45 – 57.
18. Курош А. Г. Общая алгебра (лекции 1969-70 учебного года) / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1974. – 160 с.
19. Искандер А. А. Структура соответствий универсальной алгебры / А. А. Искандер // Изв. АН СССР, серия матем. – 1965. – Т. 29, № 6. – С. 1357 – 1372.
20. Искандер А. А. Частичные универсальные алгебры с заданными структурами подалгебр и соответствий / А. А. Искандер // Матем. сб. – 1966. – Т. 70, № 3. – С. 438 – 456.
21. Goberstein S. M. On orthodox semigroups determined by their bundles of correspondences / S. M. Goberstein // Pacific J. Math. – 1992. – Vol. 153,

№ 1. – 1992. – P. 71 – 84.

22. Ганюшкін О. Г. Порядок напівгрупи відповідностей скінченної групи / О. Г. Ганюшкин, Т. В. Турка // Вісн. Київ. ун-ту. Серія : фіз.-мат. науки. – 2009. – № 3. – С. 9 – 13.
23. Турка Т. В. Центр напівгрупи відповідностей / Т. В. Турка // Вісн. Київ. ун-ту. Серія : фіз.-мат. науки. – 2015. – № 2. – С. 41 – 44.
24. Попов Б. В. Полугруппы эндотопизмов $\mu-$арных отношений / Б. В. Попов // Ученые записки ЛГПИ им. А. И. Герцена. – 1965. – Т. 274. – С. 184 – 201.
25. Жучок Ю. В. Полугруппы эндотопизмов отношения эквивалентности / Ю. В. Жучок, Е. А. Тоичкина // Матем. сб. – 2014. – Т. 205, № 5. – С. 37 – 54.
26. Жучок Ю. В. Соответствия полугруппы эндоморфизмов отношения эквивалентности / Ю. В. Жучок, Е. А. Тоичкина // Матем. заметки. – 2015. – Т. 97, № 2. – С. 217 – 230.
27. Тоичкина Е. А. Полугруппы эндотопизмов эффективных связных отношений / Е. А. Тоичкина // Укр. матем. журн. – 2016. – Т. 68, № 3. – С. 378 – 386.
28. Тоічкіна О. О. Ендоспектр відношень еквівалентності / О. О. Тоічкіна // Матем. студії. – 2016. – Т. 46, № 1. – С. 3 – 12.
29. Тоічкіна О. О. Ендотипи деяких часткових відношень еквівалентності / О. О. Тоічкіна // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. математика і інформатика. – 2017. – Вип. 31, № 2. – С. 122 – 128.
30. Тоічкіна О. О. Моноїд сильних ендотопізмів симетричного відношення / О. О. Тоічкіна // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. механіко-математична. – 2017. – Вип. 83. – С. 128 – 135.
31. Romanenko E. A. On endomorphism semigroups of the some relational systems / E. A. Romanenko // 8th International Algebraic Conference in

Ukraine dedicated to the memory of Professor V. M. Usenko : Abstracts. – Luhansk, 2011. – P. 273.

32. Romanenko E. The semigroup of endotopisms of the equivalence relation / E. Romanenko // International Mathematical Conference devoted to the 70th anniversary of V. V. Kirichenko : Abstracts. – Mykolaiv, 2012. – P. 170.
33. Romanenko E. A. Correspondences of the semigroup of endomorphisms of an equivalence relation / E. A. Romanenko // 9th International Algebraic Conference in Ukraine : Book of Abstracts. – L'viv, 2013. – P. 155.
34. Zhuchok Yu. V. Endotopism semigroups of an equivalence / Yu. V. Zhuchok, E. A. Toichkina // Proceedings XII International Conference dedicated to 80th anniversary of Professor V. N. Latyshev. Algebra and Number Theory. Modern Problems and Applications : Abstracts. – Tula, 2014. – P. 116 – 118.
35. Toichkina E. A. The endotopism spectrum of an equivalence / E. A. Toichkina // Міжнар. конф. молодих математиків : тези доп. – Kyiv, 2015. – C. 24.
36. Toichkina O. O. The monoid of strong endotopisms of a symmetric relation / O. O. Toichkina // Book of abstracts of the conference „Groups and Actions: Geometry and Dynamics" dedicated to the memory of Professor Vitaly Sushchanskyy – Kyiv, 2016. – P. 46.
37. Артамонов В. А. Общая алгебра : справочная математическая библиотека в 2-х томах / В. А. Артамонов, В. Н. Салий, Л. А. Скорняков, Л. И. Шеврин, Е. Г. Шульгейфер; под общ. ред. Л. А. Скорнякова. – Т. 2. – М.: Наука, 1991. – 480 с.
38. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп / А. Клиффорд, Г. Престон. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 285 с.
39. Дудек В. А. Алгебры Менгера многоместных функций / В. А. Дудек, В. С. Трохименко. – Chişinău: S.n., 2006 (Centrul Ed. USM). – 237 c.
40. Новиков Б. В. Лекции по теории категорий / Б. В. Новиков. – Луганск.

Изд. Луганского гос. пед. ун-та им. Тараса Шевченко, 2004. – 60 с.

41. Флейшер В. О сплетении моноидов с категориями / В. Флейшер // Труды Акад. наук Эстонской ССР. – 1986. – Т. 35. – С. 237 – 243.
42. Шнеперман Л. Б. Полугруппы эндоморфизмов квазиупорядоченных множеств / Л. Б. Шнеперман // Ученые записки ЛГПИ им. А. И. Герцена. – 1962. – Т. 238. – С. 21 – 37.
43. Жучок Ю. В. Полугруппы эндоморфизмов 2-нильпотентных бинарных отношений / Ю. В. Жучок // Фундамент. и прикл. матем. – 2008. – Т. 14, № 6. – С. 75 – 83.
44. Харари Ф. Теория графов / Ф. Харари. – М.: Мир, 1973. – 300 с.
45. Молчанов В. А. Полугруппы раскрасок графов / В. А. Молчанов // Изв. вузов. матем. – 1982. – Т. 3. – Р. 26 – 33.
46. Molchanov V. A. Semigroups of mappings on graphs / V. A. Molchanov // Semigroup Forum. – 1983. – Vol. 27. – P. 155 – 199.
47. Молчанов В. А. Полугруппы эндоморфизмов слабых p-гиперграфов / В. А. Молчанов // Изв. вузов. матем. – 2000. – Т. 3, № 454. – С. 80 – 83.
48. Хворостухина Е. В. О гомоморфизмах полугрупп эндоморфизмов гиперграфов / Е. В. Хворостухина // Изв. Саратовского ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т. 9, № 3. – С. 70 – 75.
49. Fan S. H. Generalized symmetry of graphs / S. H. Fan // Electr. Notes in Discrete Math. – 2005. – Vol. 23. – P. 51 – 60.
50. Hell P. Subdirect products of bipartite graphs / P. Hell // Coll. Math. Janos Bolyai 10. Infinite and Finite Sets. – 1973. – Vol. 2. – P. 857 – 866.
51. Sabidussi G. Subdirect representations of graphs / G. Sabidussi // Coll. Math. Janos Bolyai 10. Infinite and Finite Sets. – 1973. – Vol. 3. – P. 1199 – 1226.
52. Antohe St. Uber Homomorphismen und Kongruenzen von Graphen / St. Antohe, E. Olaru // Bul. Univ.Galati. – 1978. – Vol. 11. – P. 15 – 23.
53. Pultr A. Combinational, Algebraic and Topological Representations of

Groups, Semigroups and Categories / A. Pultr, Trnkova. – Amsterdam, 1980.

54. Knauer U. Unretractive and S-unretractive joins and lexicographic products of graphs / U. Knauer // J. Graph Theory – 1987. – Vol. 11. – P. 429 – 440.
55. Nummert U. On the monoid of strong endomorphisms of wreath products of graphs / U. Nummert // Matem. Zam. – 1987. – Vol. 41. – P. 844 – 853 (in Russian, translated to English).
56. Wilkeit E. Graphs with a regular endomorphism monoid / E. Wilkeit // Arch. Math. – 1996. – Vol. 66. – P. 344 – 352.
57. Fan S. H. Graphs whose strong endomorphism monoids are regular / S. H. Fan // Arch. Math. – 1999. – Vol. 73. – P. 419 – 421.
58. Li W.-M. Green's relations on the strong endomorphism monoid of a graph / W.-M. Li // Semigroup Forum. – 1993. – Vol. 47. – P. 209 – 214.
59. Hou H. Endomorphism types of generalized polygons / H. Hou, X. Fan, Y. Luo // Southeast Asian Bull. Math. – 2009. – Vol. 33. – P. 433 – 441.
60. Hou H. The endomorphism monoid of $\overline{P_n}$ / H. Hou, X. Fan, Y. Luo // European J. Combinatorics. – 2008. – Vol. 29. – P. 1173 – 1185.
61. Wang W. The endomorphism monoid of N-prism / W. Wang, H. Hou // Intern. Math. Forum. – 2011. – Vol 6, no. 50. – P. 2461 – 2471.
62. Pipattanajinda N. The endotype of $(n-3)$-regular graphs of order n / N. Pipattanajinda // Southeast Asian Bull. Math. – 2014. – Vol. 38. – P. 535 – 541.
63. Бредихин Д. А. Об определимости нильполугрупп своими связками соответствий / Д. А. Бредихин // Исследования по современной алгебре. Матем. записки. – 1978. – Вып. 11, № 1. – С. 3 – 9.
64. Турка Т. В. Відношення Гріна на напівгрупі відповідностей скінченної групи / Т. В. Турка // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2010. – Т. 4. – С. 38 – 42.
65. Жучок Ю. В. Ендоморфізми відношень еквівалентності / Ю. В. Жучок

// Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2007. – Вип. 3 – С. 22 – 26.

66. Fleischer V. Endomorphism monoids of acts are wreath products of monoids with small categories / V. Fleischer, U. Knauer // Semigroups, Theory and Applications. Proc Conf. Oberwolfach / FRG 1986 (Lect. Notes Math.; Vol. 1320). – Berlin: Springer, 1988. – P. 84 – 96.
67. Жучок Ю. В. Полугруппы эндоморфизмов некоторых свободных произведений / Ю. В. Жучок // Фундамент. и прикл. матем. – 2011 / 2012. – Т. 17, № 3. – С. 51 – 60.
68. Кожухов И. Б. Полугруппы отображений, сохраняющих бинарное отношение / И. Б. Кожухов, В. А. Ярошевич // Фундамент. и прикл. матем. – 2008. – Т. 14, № 7. – С. 129 – 135.
69. Айзенштат А. Я. Регулярные полугруппы эндоморфизмов упорядоченных множеств / А. Я. Айзенштат // Ученые записки ЛГПИ им. А. И. Герцена. – 1968. – Т. 387. – С. 3 – 11.
70. Бондарь Е. А. Представления моноида сильных эндоморфизмов конечных n-однородных гиперграфов / Е. А. Бондарь, Ю. В. Жучок // Фундамент. и прикл. матем. – 2013. – Т. 18, № 1. – С. 21 – 34.
71. Bijev G. Coregular semigroups / G. Bijev, K. Todorov // Notes on Semigroups VI, Budapest. – 1980. – Vol. 4.– P. 1 – 11.
72. Chvalina J. Coregularity of endomorphism monoids of unars / J. Chvalina, K. Matouskova // Arch. Math. – 1984. – Vol. 20, № 1. – P. 43 – 48.
73. Dimitrova I. Coregular semigroups of full transformations / I. Dimitrova, J. Koppitz // Demonstr. Math. – 2011. – Vol. 44. – P. 739 – 753.
74. Решетников А. В. Об определениях гомоморфизма гиперграфов / А. В. Решетнииков // Материалы X Междунар. сем. „Дискретная математика и ее приложения” : тезисы докл. – М., 2010. – С. 325 – 327.
75. Zhuchok Y. V. Endotypes of equivalence relations / Y. V. Zhuchok // Quasigroups and Related Systems. – 2014. – Vol. 22. – P. 295 – 300.
76. Бондарь Е. А. О регулярности некоторых подполугрупп моноида

эндоморфизмов отношения эквивалентности / Е. А. Бондарь / Прикл. дискрет. матем. – 2014. – № 3(25). – С. 5 – 11.

77. Riguet J. Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois / J. Riguet // Bull. Soc. Math. France. – 1948. – Vol. 76. – P. 114 – 155.

ДОДАТКИ

Список публікацій за темою дисертації

1. Жучок Ю. В. Полугруппы эндотопизмов отношения эквивалентности / Ю. В. Жучок, Е. А. Тоичкина // Матем. сб. – 2014. – Т. 205, № 5. – С. 37 – 54.
2. Жучок Ю. В. Соответствия полугруппы эндоморфизмов отношения эквивалентности / Ю. В. Жучок, Е. А. Тоичкина // Матем. заметки. – 2015. – Т. 97, № 2. – С. 217 – 230.
3. Тоичкина Е. А. Полугруппы эндотопизмов эффективных связных отношений / Е. А. Тоичкина // Укр. матем. журн. – 2016. – Т. 68, № 3. – С. 378 – 386.
4. Тоічкіна О. О. Ендоспектр відношень еквівалентності / О. О. Тоічкіна // Матем. студії. – 2016. – Т. 46, № 1. – С. 3 – 12.
5. Тоічкіна О. О. Ендотипи деяких часткових відношень еквівалентності / О. О. Тоічкіна // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. математика і інформатика. – 2017. – Вип. 31, № 2. – С. 122 – 128.
6. Тоічкіна О. О. Моноїд сильних ендотопізмів симетричного відношення / О. О. Тоічкіна // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. механіко-математична. – 2017. – Вип. 83. – С. 128 – 135.
7. Romanenko E. A. On endomorphism semigroups of the some relational systems / E. A. Romanenko // 8th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the memory of Professor V. M. Usenko : Abstracts. – Luhansk, 2011. – P. 273.
8. Romanenko E. The semigroup of endotopisms of the equivalence relation / E. Romanenko // International Mathematical Conference devoted to the 70th anniversary of V. V. Kirichenko : Abstracts. – Mykolaiv, 2012. – P. 170.
9. Romanenko E. A. Correspondences of the semigroup of endomorphisms of an equivalence relation / E. A. Romanenko // 9th International Algebraic

Conference in Ukraine : Book of Abstracts. – L’viv, 2013. – P. 155.

10. Zhuchok Yu. V. Endotopism semigroups of an equivalence / Yu. V. Zhuchok, E. A. Toichkina // Proceedings XII International Conference dedicated to 80th anniversary of Professor V. N. Latyshev. Algebra and Number Theory. Modern Problems and Applications : Abstracts. – Tula, 2014. – P. 116 – 118.
11. Toichkina E. A. The endotopism spectrum of an equivalence / E. A. Toichkina // Міжнар. конф. молодих математиків : тези доп. – Kyiv, 2015. – C. 24.
12. Toichkina O. O. The monoid of strong endotopisms of a symmetric relation / O. O. Toichkina // Book of abstracts of the conference „Groups and Actions: Geometry and Dynamics” dedicated to the memory of Professor Vitaly Sushchanskyy – Kyiv, 2016. – P. 46.

Відомості про апробацію результатів дисертації

1. VIII Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні (м. Луганськ, 5 – 12 липня 2011 р.).
2. Міжнародна математична конференція, присвячена 70-річчю проф. В. В. Кириченка (м. Миколаїв, 13 – 19 червня 2012 р.).
3. IX Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні (м. Львів, 8 – 13 липня 2013 р.).
4. XII Міжнародна конференція „Алгебра і теорія чисел: сучасні проблеми і застосування", присвячена 80-річчю проф. В. М. Латишева (м. Тула, 21 – 25 квітня 2014 р.).
5. Міжнародна конференція молодих математиків (м. Київ, 3 – 6 червня 2015 р.).
6. Міжнародна математична конференція „Групи та дії: геометрія та динаміка", присвячена пам'яті проф. В. І. Сущанського (м. Київ, 19 – 22 грудня 2016 р.).
7. Міжнародний семінар з графів, напівгруп та напівгрупових дій (м. Берлін, 10 – 13 жовтня 2017 р.).
8. Алгебраїчний семінар „Під кінець року" при механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ, 26 грудня 2017 р., керівники – доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАН України Ю. А. Дрозд, доктор фізико-математичних наук, професор В. В. Кириченко, доктор фізико-математичних наук, професор А. П. Петравчук).
9. Алгебраїчний семінар Інституту математики НАН України (м. Київ, 13 березня 2018 р., керівник – доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАН України Ю. А. Дрозд).
10. Алгебраїчні семінари кафедри алгебри та системного аналізу Луганського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Луганськ, 2012 – 2014 рр., м. Старобільськ, 2015 – 2017 рр., керівник – доктор фізико-математичних наук, професор А. В. Жучок).