НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

СКОРОХОДОВ Дмитро Сергійович

УДК 517.5

Оптимальне відновлення операторів та функціоналів і суміжні екстремальні задачі теорії наближення

01.01.01 – Математичний аналіз
111 – Математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2019

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано у Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара Міністерства освіти і науки України.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ВАКАРЧУК Сергій Борисович,
ВНЗ «Університет імені Альфреда Нобеля», МОН України, м. Дніпро, професор кафедри інформаційних технологій;

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
СЕРДЮК Анатолій Сергійович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу теорії функцій;

доктор фізико-математичних наук, професор
СКАСКІВ Олег Богданович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка МОН України, професор
кафедри теорії функцій і теорії ймовірностей.

Захист відбудеться "5" березня 2019 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «_29_» _січня__2019 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Романюк А.С.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Центральне місце в теорії апроксимації посідає задача найкращого наближення функціональних класів тими чи іншими наближуючими апаратами. Для оцінювання міри апроксимативних можливостей функціональних класів А.М. Колмогоров у 1936 р. запропонував дослідження поперечників та отримав перші точні результати щодо їх обчислення.

В подальшому задача про знаходження точних значень поперечників за Колмогоровим вивчалася У. Рудіним, С.Б. Стєчкіним, В.М. Тихомировим, останній з яких розробив потужний метод отримання точних оцінок знизу поперечників, що спирається на топологічну теорему К. Борсука. Цей метод був застосований В.М. Тихомировим, Ю.М. Суботіним, Ю.І. Маковозом, М.П. Корнєйчуком, В.П. Моторним, В.І. Рубаном, А.О. Лігуном, А. Пінкусом та ін. для обчислення поперечників за Колмогоровим цілого ряду класів функцій.

Певні задачі вимагають більш специфічної структури наближуючих апаратів. Це спонукало до запровадження й інших апроксимативних характеристик, наприклад, лінійного поперечника, запропонованого В.М. Тихомировим у 1960 р. Незважаючи на численні дослідження, на сьогодні не створено загальних методів отримання точних оцінок знизу лінійних поперечників, які б суттєво використовували лінійність наближуючих методів. Натомість, в переважній більшості випадків, в яких відомі точні значення лінійних поперечників, вдалося побудувати лінійний метод наближення, який виявився також найкращим. Але для деяких класичних функціональних множин і, зокрема, класів H^{ω}, встановлено, що лінійні методи наближення не є найкращими. Тому задача про обчислення точних значень лінійних поперечників таких класів функцій залишається відкритою.

Збагачення і розширення області застосувань теорії наближення сприяло узагальненню постановок її основних задач. Одним з найбільш важливих таких узагальнень є задача найкращого відновлення операторів, споріднені до якої задачі розглядалися ще в середині XX ст. в роботах А.М. Колмогорова, А. Сарда, С.М. Нікольського, Дж. Кіфера та ін. Задача найкращого відновлення операторів починає досліджуватися як окремий клас задач в теорії апроксимації та теорії інформаційної складності в 1970-х рр. С.А. Смоляком, М.С. Бахваловим, О.Г. Марчуком, К.Ю. Осипенком, М. Голомбом, С.А. Мічелі, Т.Дж. Рівліном, А.А. Мелкманом. Вагомий внесок в її дослідження належить також Х. Вожняковському, Е. Новаку, А.Г. Вершульцу, Л. Пласкоті, Дж.Ф. Траубу, Г.В. Васільковському, О.А. Женсикбаєву та багатьом іншим математикам. Хоча ними отримано ряд важливих результатів, задачі найкращого відновлення операторів на класах гладких функцій багатьох змінних залишаються розв’язаними лише у виключних випадках.

Задача оптимізації квадратурних формул виступає важливою конкретизацією задачі найкращого відновлення операторів. Перші її постановки в смислі відшукання квадратурних формул найвищої алгебраїчної точності були сформульовані К.Ф. Гаусом ще в 1804 р. Виходячи з ідей теорії наближення, А.М. Колмогоров запропонував іншу постановку задачі оптимізації квадратур, що полягає в знаходженні квадратурних формул з найменшою можливою похибкою на функціональних класах. С.М. Нікольський, Т.Н. Бусарова, М.П. Корнєйчук, В.П. Моторний, А.О. Лігун, О.А. Женсикбаєв довели оптимальність формули з рівновіддаленими вузлами та рівними коефіцієнтами – формули прямокутників – на класах Соболєва періодичних функцій. К.І. Осколков, М.А. Чахкієв, В.Ф. Бабенко, Т.А. Гранкіна та Нгуєн Тхі Т.Х. поширили цей результат на класи згорток ядер, що не збільшують осциляцію, з широким класом множин періодичних функцій.

Важливі застосування в чисельному аналізі знаходять також квадратури за іншими типами інформації про підінтегральну функцію. Природний інтерес становить дослідження інтервальних квадратурних формул, які використовують в якості інформації усереднення підінтегральної функції вздовж малих інтервалів області визначення. Задачі оптимізації інтервальних квадратур виявилися принципово складнішими за задачі оптимізації точкових квадратурних формул. Оптимальність інтервального аналогу формули прямокутників – формули з рівними коефіцієнтами та рівновіддаленими серединами вузлових інтервалів – була встановлена лише на окремих класах періодичних функцій В.Ф. Бабенком, В.П. Моторним, С.В. Бородачовим, Е.В. Дерец, та відкритою залишалася гіпотеза про оптимальність такої формули на класах згорток ядер, що не збільшують осциляцію з переставно інваріантними множинами періодичних функцій.

Сплайни є одним з найважливіших апаратів теорії наближення та знаходять численні застосування в різноманітних областях знань. Починаючи з роботи М.Ш. Бірмана і М.З. Соломяка активного розвитку набувають дослідження властивостей нелінійних наближень функцій сплайнами, а на початку 1980-х рр. виокремлюється напрям, пов'язаний зі встановленням точної асимптотичної поведінки нелінійних наближень. Попри чималу кількість отриманих результатів, відритим залишається, навіть, питання про точну асимптотику найкращого нелінійного наближення функцій багатьох змінних лінійними сплайнами.

Серед екстремальних задач теорії наближення чільне місце посідають нерівності для норм похідних, які вперше виникають на початку XX ст. в роботах А. Кнезера, Ж. Адамара, Г.Г. Харді, Дж.І. Літлвуда, Е. Ландау. Один з найвизначніших результатів тут належить А.М. Колмогорову і саме тому нерівності для похідних називають також нерівностями типу Колмогорова. Точні нерівності типу Колмогорова становлять особливий інтерес, оскільки саме вони та методи їх доведення знаходять найбільше застосувань.

Завдяки зусиллям Е. Ландау, Ч.К. Чуї, А. Пінкуса, С. Карліна, О.І. Звягінцева, М. Сато, О.Ю. Шадріна, В.Ф. Бабенка, А.О. Лігуна, В.О. Кофанова, В.І. Бурєнкова, Б.Д. Боянова, Н. Найденова, Ю.В. Бабенко та ін. відомо багато точних нерівностей для похідних як довільних функцій, визначених на скінченному відрізку, так і для їх спеціальних класів. Але переважна більшість таких нерівностей отримана для функцій малої гладкості. Отже, задача про знаходження непокращуваних нерівностей типу Колмогорова для функцій, визначених на скінченному відрізку, потребує подальшого вивчення. Становить інтерес і дослідження споріднених задач, зокрема, задачі про найкраще наближення операторів диференціювання лінійними обмеженими операторами.

Разом з похідними цілого порядку в ряді питань аналізу, теорії диференціальних рівнянь та їх застосуваннях виникає необхідність в розгляді похідних дробового порядку. Це вказує на важливість дослідження задачі про точні нерівності типу Колмогорова для дробових похідних.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась згідно з загальними планами досліджень кафедри математичного аналізу та кафедри математичного аналізу і теорії функцій Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара, а також згідно з держбюджетними темами №1-147-07 "Оптимізація методів відновлення математичних об'єктів за неповною інформацією", № державної реєстрації 0107U000523; №1-221-10 "Оптимальне відновлення операторів на класах функцій однієї та багатьох змінних", № державної реєстрації 0110U001282; №1-326-17 "Екстремальні проблеми теорії наближень функцій дійсного змінного і нерівності типу Колмогорова", № державної реєстрації 0117U001208, і з науково-дослідною темою ММФ-78-13 "Нерівності для похідних і екстремальні задачі в різних нормованих просторах", № державної реєстрації 0114U000193.

Мета і завдання дослідження. Основною *метою дисертаційного дослідження* є одержання нових результатів щодо розв'язку задач найкращого відновлення операторів і функціоналів та щодо встановлення точної асимптотики найкращого нелінійного наближення функцій багатьох змінних сплайнами, знаходження непокращуваних нерівностей для норм похідних функцій, визначених на дійсній напівосі або на скінченному відрізку, і розв'язання споріднених екстремальних задач теорії наближення.

Об'єктом дослідження є класи функцій однієї та багатьох дійсних змінних, серед яких класи опуклих функцій, класи функцій, заданих обмеженням на норму лапласіана, на норми похідних старшого порядку або на модуль неперервності, класи згорток ядер, що не збільшують осциляцію, з переставно інваріантними множинами; лінійні функціонали та оператори, що діють в нормовних просторах, серед яких функціонали інтегрування, функціонали і оператори диференціювання, інтегральні оператори.

Предметом дослідження є лінійні та лінійні відносні поперечники класів функцій з заданою мажорантою модуля неперервності, в просторі неперервних функцій однієї змінної; найкращі інтервальні квадратурні формули на класах періодичних функцій та найкращі квадратурні формули інших типів на класах функцій багатьох змінних; лінійні сплайни найкращого нелінійного наближення опуклих функцій двох змінних і гармонічні сплайни найкращого наближення класів функцій багатьох змінних з обмеженим лапласіаном; найкращі методи відновлення класів гладких функцій багатьох змінних та інтегральних операторів на класах функцій багатьох змінних за точно або неточно заданою інформацією про елементи з класів; непокращувані нерівності для норм похідних функцій, визначених на дійсній напівосі або на скінченному відрізку; задача про найкраще наближення операторів диференціювання лінійними обмеженими операторами.

Завдання дослідження:

– встановити нові оцінки зверху лінійних поперечників класів $H^{\omega}([0,1])$ і $\widetilde{H}^{\omega}([0,1])$ в просторі неперервних функцій, які покращують відомі оцінки та є точними на широких класах лінійних методів наближення. Застосувати отримані оцінки для обчислення одновимірних лінійних поперечників вказаних функціональних класів;

– перевірити гіпотезу про оптимальність інтервальної формули прямокутників серед всеможливих інтервальних квадратур на класі згорток ядер, що не збільшують осциляцію, з переставно інваріантними множинами періодичних функцій;

– знайти найкращі квадратурні формули, що використовують в якості інформації про підінтегральну функцію її усереднення вздовж перетинів області визначення з гіперплощинами, на класах функцій багатьох змінних, заданих обмеженням на модуль неперервності або на частинні похідні;

– отримати точну асимптотику найкращого несиметричного нелінійного наближення опуклих двічі неперервно диференційовних функцій двох змінних в нормі простору L_p лінійними неперервними сплайнами на тріангуляціях, коли число елементів тріангуляцій прямує до нескінченності, та побудувати асимптотично оптимальні послідовності тріангуляцій і лінійних неперервних сплайнів на них;

– знайти форму d-вимірного симплекса одиничного об’єму, на якому мінімізується похибка найкращого несиметричного наближення квадратичної форми $x_1^2 + \cdots + x_d^2$ лінійними функціями в нормі простору L_p;

– встановити точний порядок найкращого наближення класів $W_s^{\Delta}(\Pi)$ функцій, визначених на d-вимірному прямокутному паралелепіпеді Π, в метриці простору L_q за допомогою гармонічних сплайнів на прямокутних розбиттях на Π в термінах кількості елементів розбиттів;

– одержати точне значення похибки найкращого відновлення класу функцій багатьох змінних з обмеженою узагальненою похідною другого порядку за довільним напрямком в нормі простору L_{∞} за інформацією про значення функцій з класу та їх градієнтів в заданій скінченній системі точок;

– розв’язати задачу найкращого відновлення інтегральних операторів з невід’ємним ядром та їх сум на класах $H^{\omega}(M')$ функцій, визначених на компакті M' метричного простору, за неточно заданою інформацією про значення функцій з класу в заданій скінченній системі точок;

– одержати нові точні нерівності типу Колмогорова для норм дробових похідних в смислі Маршо функцій, визначених на напівосі невід'ємних чисел. Застосувати отримані результати до розв'язання задачі Стєчкіна про найкраще наближення оператору диференціювання в смислі Маршо лінійними обмеженими операторами;

– розв'язати задачу про найкраще наближення операторів диференціювання і функціоналів диференціювання в точці лінійними обмеженими операторами на класах $W_\infty^3([0,1])$ та $W_N^{2,*}([0,1])$;

– встановити нові точні нерівності типу Колмогорова для норм похідних абсолютно монотонних і кратно монотонних функцій, визначених на скінченному відрізку числової прямої.

Методи дослідження. В роботі використовуються сучасні методи теорії функцій, функціонального аналізу, теорії наближення та теорії інформаційної складності, загальні методи розв'язання екстремальних задач теорії наближення, методи нелінійної апроксимації функцій багатьох змінних, методи оцінювання найкращого наближення необмежених операторів лінійними обмеженими.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у такому:

– встановлено нові оцінки зверху лінійних поперечників класів $H^\omega([0,1])$ і $\widetilde{H}^\omega([0,1])$ в просторі неперервних функцій, які покращують раніше відомі оцінки. Описано широкий клас лінійних позитивних методів, на якому отримані оцінки є точними. Обчислено точне значення лінійних одновимірних поперечників вказаних функціональних класів;

– доведено оптимальність інтервальної формули прямокутників серед всеможливих інтервальних квадратур на класах згорток ядер, що не збільшують осциляцію, з переставно інваріантними множинами періодичних функцій;

– знайдено найкращі квадратурні формули серед всеможливих квадратур, що використовують в якості інформації про підінтегральну функцію її усереднення вздовж перетинів області визначення гіперплощинами вимірності $k = d - 1$, на класах функцій, заданих обмеженнями на модуль неперервності або на частинні похідні старшого порядку. У випадку $1 \le k < d - 1$ побудовано асимптотично найкращі послідовності квадратур на класах функцій з заданим модулем неперервності;

– встановлено точну асимптотику найкращого несиметричного нелінійного наближення опуклих двічі неперервно диференційовних функцій двох змінних в нормі простору L_p лінійними сплайнами на тріангуляціях їх області визначення в термінах числа елементів тріангуляцій. Запропоновано алгоритм побудови асимптотично оптимальної послідовності тріангуляцій і лінійних неперервних сплайнів на них;

– показано, що правильний d-вимірний симплекс мінімізує L_p-похибку найкращого несиметричного наближення квадратичної форми $x_1^2 + \cdots + x_d^2$

лінійними функціями на симплексах одиничного об’єму;

– встановлено точний порядок величини найкращого наближення класів $W_s^{\Delta}(\Pi)$ функцій, визначених на d-вимірному паралелепіпеді Π, в нормі простору L_∞ за допомогою гармонічних сплайнів на прямокутних розбиттях на Π в термінах кількості елементів розбиттів;

– знайдено двосторонню оцінку похибки найкращого відновлення класу функцій багатьох змінних, визначених на опуклому тілі, з обмеженою узагальненою похідною другого порядку за довільним напрямком в нормі простору L_∞ за значеннями функцій з класу та їх градієнтів в заданій скінченній системі точок. Знайдено широкі достатні умови на систему точок, за яких ця оцінка є точною;

– розв’язано задачу найкращого відновлення інтегральних операторів з невід’ємним ядром та їх сум на класах $H^{\omega}(M')$ функцій, визначених на компакті M' метричного простору, за неточно заданою інформацією про значення функцій з класу в заданій скінченній системі точок. Побудовано найкращі методи відновлення у відповідній задачі;

– одержано нові точні нерівності типу Колмогорова, що оцінюють L_∞ -норму дробової похідної в смислі Маршо порядку $k \in (0,2-1/s)\backslash\{1\}$ функцій, визначених на напівосі невід’ємних чисел $\mathbb{R}_+^0$, в термінах L_∞-норми самої функції та L_s-норми її другої похідної, $1 \le s < \infty$. Розв’язана споріднена задача Стєчкіна про найкраще наближення оператору D_-^k диференціювання в смислі Маршо лінійними обмеженими операторами на класі $W_{\infty,s}^2(\mathbb{R}_+^0)$;

– розв’язано задачу про найкраще наближення операторів диференціювання і функціоналів диференціювання в точці першого та другого порядків лінійними обмеженими операторами на класах $W_\infty^3([0,1])$ та $W_N^{2,*}([0,1])$;

– отримано ряд нових точних нерівностей типу Колмогорова для норм похідних абсолютно монотонних і кратно монотонних функцій, визначених на скінченному відрізку числової прямої.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота містить математичні дослідження, що мають теоретичний характер. Отримані результати в значній мірі доповнюють важливі розділи сучасної теорії наближення, а розроблені методи можуть знайти застосування у подальших дослідженнях екстремальних задач теорії апроксимації: задач найкращого відновлення операторів і функціоналів, задач найкращого наближення функцій сплайнами, задач обчислення точних значень апроксимативних характеристик функціональних класів, задач знаходження точних нерівностей для норм похідних і споріднених задач, тощо.

Особистий внесок здобувача. Визначення теми досліджень та її основних напрямів належить професору В.Ф. Бабенку. Результати дисертаційної роботи опубліковані в 7-ми статтях за одноосібного авторства здобувача та в 15-ти – у співавторстві. В працях, що опубліковані у співавторстві, здобувачеві належить: в [4–6] – доведення властивості ядра Стєклова не збільшувати осциляцію різниць несиметричних ідеальних сплайнів нульового порядку за певних додаткових умов і поширення методу, розробленого В.Ф. Бабенком, для доведення оптимальності інтервальної формули прямокутників на класах згорток ядер, що не збільшують осциляцію, з переставно інваріантними множинами періодичних функцій; в [8] – результати щодо оптимізації квадратурних формул за усередненнями підінтегральної функції вздовж перетинів її області визначення гіперплощинами ковимірності 2, паралельними координатним гіперплощинам; в [9] – встановлення точної асимптотики похибки найкращої квадратурної формули за усередненнями підінтегральної функції вздовж перетинів її області визначення гіперплощинами ковимірності $k,\ 1 \leq k \leq d-1$, паралельними координатним гіперплощинам; в [10] – результати щодо оптимізації на класах функцій з заданою мажорантою модуля неперервності та на класах періодичних функції, заданих обмеженням на частинні похідні, квадратурних формул за усередненнями підінтегральної функції вздовж перетинів її області визначення гіперплощинами ковимірності 1, паралельними координатним гіперплощинам; в [1] – доведення основної теореми у випадку $d \geq 4$; в [2] – доведення точної оцінки знизу асимптотичної поведінки похибки найкращого нелінійного наближення опуклих функцій лінійними неперервними сплайнами та метод побудови асимптотично оптимальної послідовності тріангуляцій та сплайнів на них; в [3] – доведення оцінки зверху величини найкращого наближення функцій з обмеженим лапласіаном гармонічними сплайнами на прямокутних розбиттях та ідея доведення точності цієї оцінки в одному частковому випадку; в [14] – результати щодо найкращого відновлення функцій багатьох змінних з обмеженою в нормі простору L_∞ узагальненою похідною другого порядку у майже всіх напрямках за значеннями функцій та їх градієнтів; в [13] – результати щодо найкращого відновлення інтегральних операторів з невід’ємними ядрами та їх сум на класах функцій з заданою мажорантою модуля неперервності за неточно заданою інформацією про значення функцій з класу в заданій скінченній системі точок; в [15, 16] – доведення основних результатів робіт; в [17] – доведення точних нерівностей типу Колмогорова для норм похідних в смислі Маршо функцій, визначених на напівосі невід’ємних чисел.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на:

– Міжнародних конференціях з теорії наближення (04–08.03.2007, 07–10.03.2010, 07–10.04.2013, Сан Антоніо, США);

– Міжнародній конференції “Екстремальні проблеми в комплексному та дійсному аналізі” (22–26.05.2007, Москва, Росія);

– Міжнародній конференції з геометричного моделювання і обчислень (04–08.11.2007, Сан Антоніо, США);

– Міждержавній науково-методичній конференції “Проблеми математичного моделювання” (28–30.05.2008, Дніпродзержинськ, Україна);

– Міжнародній конференції “Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування”, присвяченій 70-річчю з дня народження академіка А.М. Самойленка (16–21.06.2008, Мелітополь, Україна);

– Міжнародній конференції з гармонічного аналізу та наближень, IV, присвяченій 80-річчю академіка А. Талаляна (19–26.09.2008, Цахкадзор, Вірменія);

– Міжнародній конференції “Вейвлети та застосування” (14–20.06.2009, Санкт-Петербург, Росія);

– Міжнародній конференції “Теорія наближень та її застосування”, присвяченій 80-річчю з дня народження М.П. Корнєйчука (14–17.06.2010, Дніпропетровськ, Україна);

– Міжнародній конференції з сучасного аналізу (20–23.06.2011, Донецьк, Україна);

– Міжнародній конференції Банах-120, присвяченій 120-річчю Стефана Банаха (17–21.09.2012, Львів, Україна);

– Міжнародній конференції Кенгро-100: Методи аналізу і алгебри, присвяченій 100-річчю з дня народження професора Гунара Кенгро (01–06.09.2013, Тарту, Естонія);

– Міжнародній конференції “Теорія наближень та її застосування”, присвяченій 75-річному ювілею В.П. Моторного (08–11.10.2015, Дніпропетровськ, Україна);

– Міжвузівському семінарі з теорії функцій при кафедрі математичного аналізу і теорії функцій ДНУ ім. О. Гончара (Дніпропетровськ, 2010–2014, керівники семінару: член-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., проф. В.П. Моторний і д.ф.-м.н., проф. В.Ф. Бабенко; Дніпро, 31.05.2017 та 20.04.2018, керівник семінару член-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., проф. В.П. Моторний);

– Семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (Київ, 28.04.2017 та 20.10.2017, керівник семінару д.ф.-м.н., проф. А.С. Романюк);

– Семінарі з теорії функцій при кафедрі математичного аналізу Одеського національного університету ім. І.І. Мечнікова (Одеса, 29.09.2017, керівник семінару д.ф.-м.н., проф. А.О. Кореновський);

– Семінарі “Сучасний аналіз” у Київському національному університеті ім. Тараса Шевченка (Київ, 06.12.2017, керівники семінару: д.ф.-м.н., проф. О.О. Курченко, д.ф.-м.н., проф. В.М. Радченко, д.ф.-м.н., проф. І.О. Шевчук);

– Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій у Львівському національному університеті ім. Івана Франка (Львів, 07.12.2017, керівник семінару д.ф.-м.н., проф. О.Б. Скасків);

– Київському семінарі з функціонального аналізу в Інституті математики НАН України (Київ, 11.04.2018, керівники семінару: академік НАН України д.ф.-м.н., проф. Ю.М. Березанський, академік НАН України д.ф.-м.н., проф. Ю.С. Самойленко, чл.-кор. НАН України д.ф.-м.н., проф. А.Н. Кочубей).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у роботах [1–42], 7 з них опубліковано без співавторів, роботи [1–21] відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук, [22–42] – тези доповідей; роботи [1–4,7–10,12–18,20] надруковано у виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз Web of Science, Scopus.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, переліку умовних позначень, змісту, вступу, п'яти розділів, висновків, додатку та списку використаних джерел, що містить 344 найменування. Повний обсяг роботи становить 350 сторінок друкованого тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

У *вступі* визначено об'єкт і предмет дослідження та обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету і задачі дослідження, описано методи дослідження, охарактеризовано наукову новизну та теоретичне і практичне значення дослідження, прокоментовано повноту викладення матеріалу в опублікованих працях та його ступінь апробації, описано структуру дисертаційної роботи та її основний зміст.

Основна частина роботи складається з п'яти розділів. В першому підрозділі кожного розділу формулюються основні задачі дослідження, яким присвячено розділ, подається стислий огляд літератури, окреслюються питання, які залишилися відкритими, і анонсуються нові результати, які виносяться на захист.

Перший розділ дисертаційної роботи присвячено розв'язанню задачі про обчислення точного значення лінійного поперечника класів функцій однієї змінної з заданою мажорантою модуля неперервності в просторі неперервних функцій.

Нехай $N \in \mathbb{N}$, X – нормовний простір з нормою $\|\cdot\|_X$, $\mathcal{M}$ – центрально симетрична підмножина X, $\mathcal{F}_N$ – множина всіх підпросторів в X вимірності не вище за N. У 1936 р. А.М. Колмогоровим була введена наступна апроксимативна характеристика множини $\mathcal{M}$

$$d_N(\mathcal{M}; X) := \inf_{F \in \mathcal{F}_N} \sup_{x \in \mathcal{M}} \inf_{u \in F} \|x - u\|_X,$$

яка отримала назву N-поперечника за Колмогоровим. Для характеризації апроксимативних можливостей лінійних методів наближення В.М. Тихомиров (1960) ввів поняття лінійного N-поперечника

$$\lambda_N(\mathcal{M}; X) := \inf_{A \in \mathcal{L}_N} \sup_{x \in \mathcal{M}} \|x - Ax\|_X,$$

де $\mathcal{L}_N$ – множина всіх лінійних операторів $A: X \to X$ рангу не вище за N.

Нехай C – простір неперервних функцій $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ з нормою $\|\cdot\|_C$, а $\tilde{C}$ – його 1-періодичний аналог. Для модуля неперервності ω означимо класи

$$H^{\omega} := \{ f \in C \; : \; \forall x, y \in [0,1] \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \omega(|x-y|)\}$$

та його 1-періодичний аналог – клас $\widetilde{H}^{\omega}$. Відомо, що для довільного ω

$$d_N(H^{\omega}; C) = \frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{N}\right), \qquad N \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

а для опуклого вгору ω –

$$d_N\big(\widetilde{H}^{\omega}; \tilde{C}\big) = \frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{2\left[\frac{N+1}{2}\right]}\right), \qquad N \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

де $[z]$ – ціла частина числа $z \in \mathbb{R}$. Рівність (1) отримана Ю.І. Григоряном (1973), а рівність (2) – М.П. Корнєйчуком (1963) для непарних N і В.І. Рубаном (1974) для парних N.

Проте питання про точні значення лінійних поперечників $\lambda_N(H^{\omega}; C)$ і $\lambda_N\big(\widetilde{H}^{\omega}; \tilde{C}\big)$ залишається відкритим в загальному випадку, і М.П. Корнєйчук (1974, 1984, 1987, 1996) неодноразово ставив задачу про їх обчислення.

В *підрозділі 1.2* обчислено точне значення поперечників $\lambda_1(H^{\omega}; C)$ і $\lambda_1\big(\widetilde{H}^{\omega}; \tilde{C}\big)$. Нехай V_1 – множина функцій $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ обмеженої варіації, для яких $f(0) = 0$ та $f(1) = 1$. Будемо говорити, що $\sigma^* \in V_1$ породжує найкращий лінійний метод наближення множини $\mathcal{M}$ константами, якщо

$$\sup_{f \in \mathcal{M}} \left\| f - \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}\sigma^*(t) \right\|_C = \lambda_1(\mathcal{M}; X).$$

Теорема 1.2.1. *Нехай* ω *– довільний модуль неперервності та* $\sigma(t) = t$, $t \in [0,1]$. *Тоді*

$$\lambda_1\big(\widetilde{H}^{\omega}; \tilde{C}\big) = 2\int_0^{1/2} \omega(t)\, \mathrm{d}t,$$

а σ *породжує найкращий лінійний метод наближення класу* $\widetilde{H}^{\omega}$ *константами*.

На відміну від періодичного випадку, точне значення поперечника $\lambda_1(H^{\omega}; C)$ знайдено неявно – як розв'язок рівняння Фредгольма першого роду з невідомим параметром. Для класів Гельдера це рівняння вдається розв'язати точно.

Теорема 1.2.3. *Нехай* $\alpha \in (0,1)$ *та* $\omega(t) = t^{\alpha}$, $t \in [0,1]$. *Тоді*

$$\lambda_1(H^{\omega}; C) = \frac{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(1/2+\alpha/2)}{2\Gamma(3/2-\alpha/2)},$$

а найкращий лінійний метод наближення класу H^{ω} *константами породжує*

$$g(x) := \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma^2(1/2-\alpha/2)} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^{1/2+\alpha/2}(1-t)^{1/2+\alpha/2}}, \qquad x \in [0,1],$$

де $\Gamma(x)$ *– гамма-функція Ойлера.*

Отримані результати дозволяють встановити нові оцінки зверху для лінійних N-поперечників:

$$\lambda_N\left(\widetilde{H}^\omega; \tilde{C}\right) \le \lambda_N(H^\omega; C) \le \lambda_1(H^{\omega_N}; C), \tag{3}$$

де $\omega_N(t) = \omega(t/N),\ t \in [0,1]$, які покращують раніше відомі оцінки.

В *підрозділі 1.3* розглядається питання про точність оцінок (3) на широкому класі лінійних позитивних методів. Дослідження такого роду близькі до задач наближення з обмеженнями. Для вивчення апроксимативних властивостей наближень з обмеженнями були введені поняття відносних поперечників: В.М. Коновалов (1984) запропоновував означення відносних поперечників за Колмогоровим, а С.П. Сидоров (2007) – лінійних відносних поперечників. Означимо величину, яка споріднена відносним поперечникам.

Нагадаємо, що конус V в скінченновимірному лінійному просторі E називається тілесним, якщо він має хоча б одну внутрішню точку, та мініедральним, якщо для будь-якого $x \in V$ маємо $(-x) \not\in V$ та для будь-яких $x, y \in V$ існує $z \in V$, що $z + V = (x + V) \cap (y + V)$. Нехай $\mathfrak{m}_X$ – множина всіх мініедральних конусів простору X. Відносним лінійним мініедральним N-поперечником множини $\mathcal{M}$ в просторі X з обмеженням, які задано конусом $V \subset X$, називатимемо величину

$$\lambda_N^{\mathfrak{m}}(\mathcal{M}; V; X) := \inf_{A \in \mathcal{L}_N : A(V) \subset V, A(V) \in \mathfrak{m}_X} \sup_{x \in \mathcal{M}} \| x - Ax \|_X.$$

Нехай C_+ – конус невід'ємних неперервних на $[0,1]$ функцій. Для $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2N}\right)$ через $\left\{\chi_j^\varepsilon\right\}_{j=1}^N \subset C_+$ позначимо довільний набір функцій таких, що:

1. $\chi_k^\varepsilon(t) = 1,\ t \in [(k-1)/N + \varepsilon, k/N - \varepsilon]$, для всіх $k = 1, \dots, N$;
2. $\operatorname{supp} \chi_k^\varepsilon \subset [(k-1)/N - \varepsilon, k/N + \varepsilon]$ для всіх $k = 1, \dots, N$;
3. $\chi_1^\varepsilon(t) + \ldots + \chi_N^\varepsilon(t) = 1$ для всіх $t \in [0,1]$.

Для $g \in V_1$ побудуємо позитивний оператор $A_g^\varepsilon : C \to C$:

$$A_g^\varepsilon f = \sum_{k=1}^N \chi_k^\varepsilon \cdot \int_{(k-1)/N}^{k/N} f(t)\, \mathrm{d}g(Nt - k + 1), \quad f \in C.$$

Вочевидь, $A(C_+) \in \mathfrak{m}_C$. Наступна теорема є основним результатом підрозділу 1.3.

Теорема 1.3.1. *Нехай* ω *– довільний модуль неперервності,* $N \in \mathbb{N}$ *та* $\omega_N(t) = \omega\left(\frac{t}{N}\right)$, $t \in [0,1]$. *Тоді* $\lambda_N^{\mathfrak{m}}(H^\omega; C_+; C) = \lambda_1(H^{\omega_N}; C)$ *та, якщо функція*

$\sigma \in V_1$ породжує найкращий лінійний метод наближення класу H^{ω_N} константами, то

$$\lambda_N^{\mathrm{m}}(H^{\omega}; C_+; C) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{x \in H^{\omega}} \|x - A_{\sigma}^{\varepsilon} x\|_C.$$

В *другому розділі* розв'язується задача оптимізації деяких типів квадратурних формул на класах періодичних функцій та на класах функцій багатьох змінних.

Нехай $d \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – компактна множина, $C(\Omega)$ – простір неперервних функцій $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ з нормою $\|f\|_{C(\Omega)}$, $L_p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, – простори вимірних функцій $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ з відповідними нормами $\|f\|_{L_p(\Omega)}$, та $\mathcal{M} \subset C(\Omega)$ – деякий клас неперервних функцій.

Похибкою відновлення інтегралів функцій з класу $\mathcal{M}$ за допомогою множини функціоналів $\mathcal{Q} \subset (C(\Omega))^*$ називається величина

$$E(\mathcal{M}; \mathcal{Q}) := \inf_{\kappa \in \mathcal{Q}} \sup_{f \in \mathcal{M}} \left| \int_{\Omega} f(t)\, \mathrm{d}t - \kappa(f) \right|. \tag{4}$$

Формула $\kappa^* \in \mathcal{Q}$ називається $\mathcal{Q}$-оптимальною на класі $\mathcal{M}$, якщо на ній досягається $\inf$ в (4).

Нехай $n \in \mathbb{N}$ та $\mathcal{Q}_n(\Omega)$ – множина квадратурних формул – функціоналів $\kappa \in (C(\Omega))^*$ вигляду

$$\kappa(f) = \sum_{j=1}^{n} a_j f(x_j), \qquad f \in C(\Omega), \tag{5}$$

де $\{a_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}$ – коефіцієнти, а $\{x_j\}_{j=1}^n \subset \Omega$ – вузли κ. Для $\sigma \in \mathbb{R}$ через $\mathcal{Q}_{n,\sigma}(\Omega)$ позначимо підмножину формул з $\mathcal{Q}_n(\Omega)$, для яких $a_1 + \dots + a_n = 2\pi\sigma$. Нехай $\kappa_{n,\sigma}$ – формула прямокутників з вузлами $0, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{2\pi(n-1)}{n}$ та коефіцієнтами $a_1 = \ldots = a_n = \frac{2\pi\sigma}{n}$.

Нехай $\Omega = \mathbb{T}$ та $W_p^r(\mathbb{T})$ – клас 2π-періодичних функцій $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, для яких $f^{(r-1)}$ абсолютно неперервна та $\left\|f^{(r)}\right\|_{L_p(\mathbb{T})} \le 1$. Означимо класи згорток ядер, що не збільшують осциляцію, з переставно інваріантними множинами.

Для $J \subset \mathbb{Z}$ нехай L_J позначає замикання лінійної оболонки функцій $\{e^{ikx}\colon k \in J\}$ та

$$L_J^{\perp} := \left\{ g \in L_1(\mathbb{T}) :\ \forall f \in L_J \Rightarrow \int_0^{2\pi} f(t) g(t)\, \mathrm{d}t = 0 \right\}.$$

Нехай $K \in L_1(\mathbb{T})$ має формальний ряд Фур'є $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$. Означимо $J(K) := \{k \in \mathbb{Z} : c_k = 0\}$.

Класом згорток ядра $K \in L_1(\mathbb{T})$ з множиною $F \subset L_1(\mathbb{T})$ (відносно підмножини $J \subset J(K)$) називається множина

$$K *_J F := \left\{ f = P + K * \varphi \ : \ P \in L_J, \varphi \in F, \varphi \in L_J^{\perp} \right\}.$$

Нехай $\nu(f)$ – число змін знаку на періоді кусково-неперервної функції $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ та $J \subset J(K)$. Ядро K, яке не є тригонометричним поліномом, називається ядром, що не збільшує осциляцію, та позначається $K \in \mathcal{A}_{2n}(J)$, якщо для будь-якої кусково-неперервної функції $\varphi \in L_J^{\perp} \setminus \{0\}$, для якої $\nu(\varphi) \leq 2n$, і будь-якого $T \in L_J$ виконується нерівність $\nu(T + K * \varphi) \leq \nu(\varphi)$.

Для майже скрізь невід'ємної функції $f \in L_1(\mathbb{T})$ через $r(f,\cdot)$ позначимо незростаюче переставлення звуження $f|_{[0,2\pi]}$, та для $g \in L_1(\mathbb{T})$ означимо:

$$\Pi(g,t) = r(g_+,t) - r(g_-,2\pi - t), \qquad t \in [0,2\pi],$$

де $g_{\pm} := \max\{\pm g; 0\}$. Множина $F \subset L_1(\mathbb{T})$ називається переставно інваріантною, якщо з умов $f \in F$ і $\Pi(f) = \Pi(g)$, $g \in L_1(\mathbb{T})$, випливає, що $g \in F$. Класами згорток є багато класичних функціональних множин. Так, $W_p^r(\mathbb{T})$ можна зобразити у вигляді згортки ядра Бернулі B_r, яке не збільшує осциляцію, з одиничною кулею F_p в $L_p(\mathbb{T})$, яка є переставно інваріантною множиною.

Добре відомо, що формула $\kappa_{n,1}$ є $\mathcal{Q}_n(\mathbb{T})$-оптимальною на класах Соболєва $W_p^r(\mathbb{T})$ для всіх $r \in \mathbb{N}$ і $1 \leq p \leq \infty$. Відповідні результати були отримані В.П. Моторним (1974) на $W_\infty^r(\mathbb{T})$ і на $W_1^r(\mathbb{T})$ для парних $r \in \mathbb{N}$; А.О. Лігуном (1976) на $W_1^r(\mathbb{T})$ для непарних $r \in \mathbb{N}$; О.А. Женсикбаєвим (1977, 1981) на $W_p^r(\mathbb{T})$ для $1 < p < \infty$. В.Ф. Бабенко (1987, 1991) поширив цей результат на класи згорток. Нехай F – переставно інваріантна множина. В.Ф. Бабенко показав, що у випадку $\{0\} \subset J(K)$ і $K \in \mathcal{A}_{2n}(\{0\})$ формула $\kappa_{n,1}$ є $\mathcal{Q}_n(\mathbb{T})$-оптимальною на класі $K *_{\{0\}} F$, а у випадку $J(K) = \emptyset$ і $K \in \mathcal{A}_{2n}(\emptyset)$ формула $\kappa_{n,\sigma}$ є $\mathcal{Q}_{n,\sigma}(\mathbb{T})$-найкращою на класі $K *_{\emptyset} F$ для кожного $\sigma \in \mathbb{R}$. Деякі часткові випадки цього результату були отримані К.І. Осколковим (1979, 1982), М.А. Чахкієвим (1983, 1984), Т.А. Гранкіною (1981, 1982), Нгуєн Тхі Т. Х. (1984, 1986, 1989). Також Нгуєн Тхі Т. Х. (1989) довела $\mathcal{Q}_n(\mathbb{T})$-оптимальність формули прямокутників $\kappa_{n,1}$ на класах $K *_{J(K)} F$, де $\{0\} \subset J(K)$ та $K \in \mathcal{A}_{2n}(J(K))$.

В *підрозділі 2.2* результати щодо оптимізації точкових квадратур (5) поширені на інтервальні квадратурні формули. Нехай $h > 0$ і $n \in \mathbb{N}$. Інтервальною квадратурною формулою називається функціонал $\kappa \in (C(\mathbb{T}))^*$ наступного вигляду

$$\kappa(f) := \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{2h} \int_{x_j - h}^{x_j + h} f(t)\, \mathrm{d}t, \qquad f \in C(\mathbb{T}), \tag{6}$$

де $\{a_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}$ – коефіцієнти, а $\{x_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{T}$ – середини вузлових інтервалів формули κ. Позначимо через $Q_n^h(\mathbb{T})$ множину функціоналів вигляду (6), а через $Q_{n,\sigma}^h(\mathbb{T})$, $\sigma \in \mathbb{R}$, – підмножину функціоналів з множини $Q_n^h(\mathbb{T})$, для яких $a_1 + \ldots + a_n = 2\pi\sigma$. Визначимо інтервальну формулу прямокутників

$$\kappa_{n,\sigma}^h(f) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\pi\sigma}{nh} \int_{\frac{2\pi j}{n}-h}^{\frac{2\pi j}{n}+h} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad f \in C(\mathbb{T}).$$

$Q_n^h(\mathbb{T})$-оптимальність формули $\kappa_{n,1}^h$ була доведена В.Ф. Бабенком (1982) на класі $W_1^r(\mathbb{T})$, В.П. Моторним (1998) на класі $W_\infty^r(\mathbb{T})$ та С.В. Бородачовим (2000) на класі W^1F, де F – переставно інваріантна. Проте залишалася відкритою гіпотеза про оптимальність формул $\kappa_{n,\sigma}^h$ на класах згорток ядер, що не збільшують осциляцію, з переставно інваріантними множинами – аналог результату щодо оптимізації точкових квадратур. В підрозділі 2.2 отримано наступний результат.

Теорема 2.2.1. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $0 < h < \pi/n$, F *– переставно інваріантна множина. Нехай також ядро* K*, множина* J *і число* σ *є такими, що або* $J(K) = \emptyset$, $K \in \mathcal{A}_{2n}(\emptyset)$, $J = \emptyset$ *і* $\sigma \in \mathbb{R}$, *або* $J(K) \supset \{0\}$, $K \in \mathcal{A}_{2n}(\{0\})$, $J = \{0\}$ *і* $\sigma = 1$. *Тоді формула* $\kappa_{n,1}^h$ *є* $Q_n^h(\mathbb{T})$*-оптимальною на класі* $K *_{\{0\}} F$*, якщо* $\{0\} \subset J$*, і формула* $\kappa_{n,\sigma}^h$ *є* $Q_{n,\sigma}^h(\mathbb{T})$*-оптимальною на класі* $K *_J F$*, якщо* $J = \emptyset$.

Ключову роль в доведенні теореми 2.2.1 мала встановлена властивість ядра Стєклова не збільшувати осциляцію в згортці з певним вузьким класом функцій. Для $f \in L_1(\mathbb{T})$ через f^h позначимо усереднення функції f за Стєкловим:

$$f^h(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{T}.$$

Для $\gamma, \delta > 0$ через $S_{n;\gamma,\delta}$ позначимо множину всіх кусково сталих функцій, які набувають майже скрізь лише двох значень γ і $-\delta$ та для яких $\nu(f) \le 2n$.

Теорема 2.2.6. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $0 < h < \pi/n$, $\gamma, \delta > 0$. *Нехай також сплайни* $s_1, s_2 \in S_{n;\gamma,\delta}$ *є такими, що* $\nu(s_1^h) = \nu(s_2^h) = 2n$. *Якщо* $f(t) = s_1(t) - s_2(t)$, *то* $\nu(\lambda + f^h) \le \nu(f)$ *для будь-якого* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.2.6 дозволила застосувати апарат, розроблений В.Ф. Бабенком (1987, 1991), для доведення оптимальності інтервальної формули прямокутників на класах згорток, а також встановити нові нерівності як для найкращих наближень константами усереднених несиметричних ідеальних сплайнів в несиметричних нормах, так і нові нерівності для переставлень усереднених моносплайнів.

В *підрозділі 2.3* розв'язується задача оптимізації деяких типів квадратурних формул на класах функцій багатьох змінних. Нехай $d \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – компактна вимірна за Жорданом множина, $\|\cdot\|_p$, $1 \le p \le \infty$, є ℓ_p-норма в $\mathbb{R}^d$. Для модуля неперервності ω розглянемо клас

$$H_p^{\omega}(\Omega) := \left\{ f \in C(\Omega) : \forall x, y \in \Omega \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \omega\left(\| x - y \|_p\right) \right\}.$$

Точна асимптотична поведінка величини $\mathcal{E}\left(H_p^{\omega}(\Omega); \mathcal{Q}_n(\Omega)\right)$, коли $n \to \infty$, знайдена М.П. Корнєйчуком (1968) для $d = 1$, В.Ф. Бабенком (1976) для $p = \infty$ і $d \geq 2$ та для $p = 1$ і $d = 2$, а також Е.В. Чорною (1995) і П. Грубером (2004) в інших випадках за певних обмежень на ω.

Для $J \subset \{1, \dots, d\}$ та $x \in \mathbb{R}^d$ означимо $L(J) := \left\{ z \in \mathbb{R}^d : \forall j \in J \Rightarrow z_j = 0 \right\}$ та $L(x; J) := x + L(J)$. Нехай $k \in \{1, \dots, d\}$ і $\mathcal{Q}_n^{d,k}(\Omega)$ – множина лінійних функціоналів $\kappa \in (C(\Omega))^*$ вигляду

$$\kappa(f) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\mu\left(L(x_j; J_j) \cap \Omega\right)} \int_{L(x_j; J_j) \cap \Omega} f(t)\, \mathrm{d}t, \qquad f \in C(\Omega), \tag{7}$$

де $\{a_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}$ – коефіцієнти формули κ, $\{x_j\}_{j=1}^n \subset \Omega$ і $\left\{L\left(x_j; J_j\right)\right\}_{j=1}^n$, $J_j \subset \{1, \dots, d\}$, $\# J_j = k$ і $x_j \in \Omega$ для $j = 1, \dots, d$ – вузлові гіперплощини. Зрозуміло, що при $k = d$, квадратурна формула κ вигляду (7) вироджується в формулу (5).

Нехай $a_1, \dots, a_d > 0$ і $\Omega = \prod_{j=1}^{d} \left[0, a_j\right]$. В.Ф. Бабенко і С.В. Бородачов (2002) знайшли найкращу квадратурну формулу виду (7) на класі монотонних і обмежених функцій, визначених на кубі $[0,1]^d$. Позначимо $P := [0, a_1] \times [0, a_2]$. Нехай решітка Λ в $\mathbb{R}^2$ породжена векторами $v_1 = (1,1)$ і $v_2 = (1, -1)$, тобто $\Lambda := \{n_1 v_1 + n_2 v_2 : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$. Для $h > 0$ означимо $\mathcal{V}_h := h\Lambda \cap intP$ і $n_h = \#\mathcal{V}_h$.

Для $s \in \mathcal{V}_h$ через $W(s) = \{t \in P : \| t - s \|_1 = \inf_{u \in X} \| t - u \|_1\}$ позначимо клітину Вороного. Зафіксуємо деякий порядок $s^1, \dots, s^{n_h}$ точок в $\mathcal{V}_h$. Нехай $W_1 := W(s^1)$,

$$W_j = W\left(s^j\right) \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} W(s^k), \qquad j = 2, \dots, n_h.$$

Тепер для $j = 1, \dots, n_h$ означимо $x^j := \left(s_1^j, s_2^j, 0, \dots, 0\right) \in \mathbb{R}^d$ і розглянемо

$$\tilde{\kappa}_h(f) := \sum_{j=1}^{n_h} \mu\left(W_j\right) \int_{L\left(x^j; \{1,2\}\right) \cap \Omega} f(t)\, \mathrm{d}t, \qquad f \in C(\Omega).$$

Має місце наступний результат.

Теорема 2.3.4. *Нехай* $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, $a_1, \dots, a_d > 0$, $a_1 \leq a_2 \leq a_j$, j=3, …, d, ω *– модуль неперервності. Тоді*

$$\mathcal{E}\big(H_1^{\omega}(\Omega); Q_n^{d,2}(\Omega)\big) = \frac{4n\mu(\Omega)}{a_1 a_2} \int_0^{\sqrt{\frac{a_1 a_2}{2n}}} t\,\omega(t)\,\mathrm{d}t \cdot \Big(1 + O\big(n^{-1/2}\big)\Big), \quad n \to \infty,$$

а $\{\tilde{\kappa}_h\}_{h>0}$ *– асимптотично оптимальна сім'я квадратурних формул.*

Зауважимо, що теорема 2.3.4 узагальнює результат В.Ф. Бабенка (1976) щодо оптимізації точкових квадратурних формул на класі $H_1^{\omega}(\Omega)$ при $d = 2$.

В *розділі 3* досліджується асимптотична поведінка найкращого наближення лінійними та гармонічними сплайнами функцій багатьох змінних. Нехай $d \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^d$ – політоп, $C^2(D)$ – простір функцій $f \in C(D)$, двічі неперервно диференційовних всередині D. Скінченна множина $\Delta = \{T\}$ називається тріангуляцією на D, якщо елементами Δ є d-вимірні симплекси, $D = \bigcup_{T\in\Delta} T$ та для всіх $T, T' \in \Delta$, $T \neq T'$, перетин $T \cap T'$ є або порожньою множиною, або їх спільною гранню вимірності $j \in \{0,1,\dots,d-1\}$. Позначимо через $\mathfrak{D}_N$ множину всіх тріангуляцій на D, які складаються з щонайбільше N елементів.

Нехай $\alpha, \beta > 0$ і $1 \le p \le \infty$. Означимо несиметричну $L_{p;\alpha,\beta}$-норму функції $f \in L_p(D)$: $\|f\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)} := \|\alpha f_+ + \beta f_-\|_{L_p(D)}$. Похибкою найкращого (α,β)-несиметричного наближення f підпростором $F \subset L_p(D)$ називається:

$$E(f;F)_{L_{p;\alpha,\beta}(D)} := \inf_{u\in F} \|f - u\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)}.$$

В.Ф. Бабенко (1982) показав, що $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} E(f;F)_{L_{p;\alpha,1}(D)}$ та $\lim\limits_{\beta\to+\infty} E(f;F)_{L_{p;1,\beta}(D)}$ збігаються, відповідно, з величинами найкращого наближення зверху та знизу функції f підпростором F. Отже, несиметричні наближення дозволяють одночасно розглядати задачі найкращого ($\|f\|_{L_{p;1,1}(D)} = \|f\|_{L_p(D)}$) та найкращих односторонніх наближень.

Позначимо через $\mathcal{P}_1$ множину лінійних поліномів від d змінних, а для тріангуляції Δ на D означимо

$$\mathcal{S}_1(\Delta) := \{f \in C(D) : \forall T \in \Delta\ \exists p \in \mathcal{P}_1 \Rightarrow f|_T = p|_T\}.$$

Найкращим (α,β)-несиметричним нелінійним наближенням в метриці простору L_p функції f лінійними сплайнами на тріангуляціях з $\mathfrak{D}_N$ називатимемо величину

$$R_N\big(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\big) := \inf_{\Delta\in\mathfrak{D}_N} E(f;\mathcal{S}_1(\Delta))_{L_{p;\alpha,\beta}(D)} = \inf_{\Delta\in\mathfrak{D}_N} \inf_{s\in\mathcal{S}_1(\Delta)} \|f - s\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)}.$$

Систематичне дослідження найкращого нелінійного наближення сплайнами і, зокрема, асимптотики величин, споріднених до $R_N\big(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\big)$, починається з роботи М.Ш. Бірмана та М.З. Соломяка (1967). Точна асимптотична поведінка $R_N\big(f, L_{p;1,\infty}(D)\big)$, $N \to \infty$, була знайдена К. Бороцкі (2000) для $p = 1$ і довільної опуклої функції $f \in C^2(D)$ та В.Ф. Бабенком, Ю.В. Бабенко, А.О. Лігуном і

О.О. Шумейком (2006) для $p = \infty$, $d = 2$ та довільної строго опуклої функції $f \in C^2(D)$.

Принципову складність в знаходженні точної асимптотики $R_N\big(f; L_{p;\alpha,\beta}(D)\big)$ має встановлення її точної оцінки знизу. Ключовим кроком для одержання такої оцінки (хоча б у випадку $d = 2$) є екстремальна задача про знаходження форми d-вимірного симплекса одиничного об'єму, на якому мінімізується похибка найкращого (α, β)-несиметричного наближення в метриці простору L_p квадратичної функції $\mathfrak{q}(x) = x_1^2 + \cdots + x_d^2$, $x \in \mathbb{R}^d$, за допомогою лінійних функцій. Розв'язанню цієї екстремальної задачі присвячено *підрозділ 3.2*.

Нехай $\mathfrak{T}^d$ – множина всіх d-вимірних симплексів одиничного об'єму. Означимо

$$\sigma_{p;\alpha,\beta;d} := \inf_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}^d} E(\mathfrak{q}; \mathcal{P}_1)_{L_{p;\alpha,\beta}(\mathcal{T})}.$$

Основним результатом підрозділу 3.2 є наступна теорема.

Теорема 3.2.1. *Нехай* $\alpha, \beta > 0$, $d \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$ *і* $\mathcal{T}_0$ *– правильний* d*-вимірний симплекс одиничного об'єму. Тоді* $\sigma_{p;\alpha,\beta;d} = E(\mathfrak{q}; \mathcal{P}_1)_{L_{p;\alpha,\beta}(\mathcal{T}_0)}$.

Раніше величина $\sigma_{2;1,1;2}$ була знайдена Е. Надлером (1985), а величина $\sigma_{p;\infty,1;d} := \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \sigma_{p;\alpha,1;d}$ – Е.Ф. Дазеведо і Р.Б. Сімпсоном (1989), В.Т. Раяном (1991), М. Брєзіним (1992), К. Бороцкі (2000), Х. Потманом та співавторами (2000), Л. Ченом (2007, 2008), В.Ф. Бабенком, Ю.В. Бабенко і здобувачем (2008).

Теорема 3.2.1 дозволила в *підрозділі 3.3* знайти точну асимптотику величини $R_N\big(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\big)$, $N \to \infty$, для опуклих функцій $f \in C^2(D)$ двох змінних.

Теорема 3.3.1. *Нехай* $d = 2$, D *– полігон на площині,* $f \in C^2(D)$ *– така, що* $H(f) = f''_{xx} f''_{yy} - \big(f''_{xy}\big)^2$ *невід'ємна на* D*. Тоді для всіх* $\alpha, \beta > 0$ *і* $1 \le p \le \infty$ *має місце гранична рівність*

$$\lim_{N \to \infty} N \cdot R_N\big(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\big) = \frac{\sigma_{p;\alpha,\beta;2}}{2} \cdot \left(\int_D \big(H(f; x, y)\big)^{\frac{p}{2(p+1)}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \right)^{1+1/p}.$$

Крім того, в підрозділі 3.3 запропоновано алгоритм побудови асимптотично оптимальних послідовності тріангуляцій $\{\Delta_N^*\}_{N=1}^\infty$, $\Delta_N^* \in \mathfrak{D}_N$, та сплайнів на них $\{s_N^*\}_{N=1}^\infty$, $s_N^* \in \mathcal{S}_1(\Delta_N^*)$, тобто

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\|f - s_N^*\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)}}{R_N\big(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\big)} = 1.$$

Підрозділ 3.4 присвячено дослідженню асимптотичної поведінки похибки найкращої трансфінітної інтерполяції класів функцій гармонічними сплайнами.

Трансфінітна інтерполяція полягає в побудові функції, яка збігається з заданою функцією, можливо, складнішої форми, вздовж многовидів. Такий тип інтерполяції знаходить застосування в комп'ютерній томографії, методі скінченних елементів, картографії, тощо, де інформація про наближувану функцію природним чином задається у вигляді її значень вздовж гіперплощин. Властивості трансфінітної інтерполяції вивчалися Д. Мангероном, С.А. Коонсом, Дж. Біркгофом, У. Гордоном, Дж. Холом, К. Дикеном, М. Флоатером, О.М. Литвином, А. Беджанку, В.Т. Клименком, В.Ф. Бабенком, Ю.В. Бабенко та ін.

Як звичайно, через Δ позначимо оператор Лапласа. Нехай $b_1, \dots, b_d > 0$ і $\Pi = \prod_{j=1}^{d} \left[0, b_j\right]$. Скінченну сукупність d-вимірних прямокутних паралелепіпедів $P = \{\Omega\}$ будемо називати прямокутним розбиттям на Π, якщо $\bigcup_{\Omega \in P} \Omega = \Pi$ та для всіх $\Omega, \Omega' \in P$, $\Omega \neq \Omega'$, перетин $\Omega \cap \Omega'$ має порожню внутрішність.

Для $f \in C(\Pi)$ і прямокутного розбиття P на Π побудуємо гармонічний сплайн $S_P f$ за правилом: для кожного $\Omega \in P$ звуження $S_P f|_\Omega$ є гармонічним продовженням функції f з $\partial\Omega$ всередину Ω. Нехай $1 \le q, s \le \infty$ та

$$W_q^\Delta(\Pi) := \left\{ f \in C^2(\Pi) : \ \|\Delta f\|_{L_q(\Pi)} \le 1 \right\}.$$

Означимо похибку інтерполяції класу $W_q^\Delta(\Pi)$ гармонічними сплайнами на розбитті P:

$$\mathcal{E}_P\left(W_q^\Delta(\Pi)\right)_s := \sup_{f \in W_q^\Delta(\Pi)} \|f - S_P f\|_{L_s(\Pi)}.$$

Величина $\mathcal{E}_P\left(W_q^\Delta(\Pi)\right)_s$ досліджувалася В.Т. Клименком (1995), В.Ф. Бабенком та Т.Ю. Лескевич (2012) на спеціальному класі розбиттів P, які можна утворити з Π за рахунок його розрізання скінченною кількістю $(d-1)$ -вимірних гіперплощин, ортогональних координатним осям.

Нехай $N \in \mathbb{N}$ та $\mathcal{P}_N(\Pi)$ – множина всіх прямокутних розбиттів множини Π , які складаються рівно з N елементів. Означимо похибку найкращої інтерполяції класу $W_q^\Delta(\Pi)$ гармонічними сплайнами на прямокутних розбиттях $\mathcal{P}_N$

$$\mathcal{E}_N\left(W_q^\Delta(\Pi)\right)_s := \inf_{P \in \mathcal{P}_N} \mathcal{E}_P\left(W_q^\Delta(\Pi)\right)_s.$$

Нехай $P_N^{*,j}$, $j = 1,2,\dots,d,$ – прямокутне розбиття множини Π, що складається з N рівних d -вимірних паралелепіпедів, які отримано з Π його розбиттям за допомогою $(N-1)$ -єї $(d-1)$ -вимірної гіперплощини, ортогональної до осі Ox_j. Наступне твердження встановлює точний порядок асимптотичної поведінки величин $\mathcal{E}_N\left(W_\infty^\Delta(\Pi)\right)_s$ і $\mathcal{E}_N\left(W_s^\Delta(\Pi)\right)_1$, коли $N \to \infty$.

Теорема 3.4.2. *Нехай* $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq s \leq \infty$ *і* $s' = s/(s-1)$. *Тоді існують константи* $C_1, C_2 > 0$ *такі, що* $C_1 \leq N^2 \cdot \mathcal{E}_N(W_\infty^\Delta)_s = N^2 \cdot \mathcal{E}_N\left(W_{s'}^\Delta\right)_1 \leq C_2$ *для всіх достатньо великих* $N \in \mathbb{N}$.

Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячено розв'язанню задач найкращого відновлення операторів. Нехай X, Z – дійсні лінійні простори; Y – дійсний нормовний простір; $A: X \to Y$ – оператор з областю визначення $\mathcal{D}(A) \subset X$; $W \subset \mathcal{D}(A)$ – деякий клас; $I: \overline{\operatorname{span} W} \to Z$ – інформаційний оператор; $U \subset Z$ – підмножина, що містить нуль θ_Z простору Z.

Довільний оператор $\Phi: Z \to Y$ будемо називати методом відновлення. Похибкою найкращого відновлення оператора A на класі W за інформацією I, що задана з похибкою U, називається величина:

$$\mathcal{E}_Y^*(A; W; I; U) := \inf_{\Phi: Z \to Y} \sup_{x \in W} \sup_{z \in Ix+U} \|Ax - \Phi z\|_Y, \tag{8}$$

де $\inf$ береться за всіма методами відновлення $\Phi: Z \to Y$. Будемо опускати символ U в означенні величини (8), якщо інформація задана точно, тобто $U = \{\theta_Z\}$.

Задача найкращого відновлення оператора A полягає в знаходженні величини (8) та найкращих методів відновлення Φ^*, якщо такі існують, для яких досягається $\inf$ в правій частині (8). У випадку тотожного оператора $A = \mathrm{i}d_X$ ця задача називається також задачею найкращого відновлення класу W за інформацією I, що задана з похибкою U.

Задача найкращого відновлення операторів має тісні взаємозв'язки з багатьма задачами теорії наближення, теорії інформаційної складності та суміжних областей математики. Вона досліджувалася С.А. Смоляком, Н.С. Бахваловим, А.Г. Марчуком, К.Ю. Осипенком, М. Голомбом, К.А. Мічеллі, Т.Дж. Рівліном, А.А. Мелкманом, Х. Вожняковським, Дж.Ф. Траубом, Г.В. Васільковським, А.С. Неміровським, Д.Б. Юдіним, М.П. Корнєйчуком, Е. Новаком, Л. Пласкотою, А.Г. Вершульцом, О.А. Женсикбаєвим та ін.

В *підрозділі 4.2* розв'язується задача найкращого відновлення деякого класу гладких функцій багатьох змінних за значеннями функцій та їх градієнтів в заданій скінченній системі точок. Нехай $d \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – опукле тіло, тобто компактна опукла множина з непорожньою внутрішністю, та $W_\infty^2(\Omega)$ – клас функцій $f \in C^1(\Omega)$ таких, що для будь-якого одиничного вектора $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$ похідна за напрямком $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{r}^2}$ існує всередині Ω хоча б в узагальненому смислі та $\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{r}^2}\right\|_{L_\infty(\Omega)} \leq 1$. Існування узагальненої похідної $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{r}^2}$ розуміється в тому сенсі, що для майже всіх паралельних вектору $\mathbf{r}$ прямих ℓ, які проходять через внутрішність Ω, звуження $\left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\right|_{\ell \cap \Omega}$ є локально абсолютно неперервною функцією і $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{r}^2}$ є вимірною.

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ – скінченна множина внутрішніх точок Ω і $I'_Q: C(\Omega) \to \mathbb{R}^{(d+1)n}$ – інформаційний оператор вигляду

$$I'_Q(f) = \big(f(q_1), \dots, f(q_n), \nabla f(q_1), \dots, \nabla f(q_n)\big), \qquad f \in C(\Omega),$$

який визначено на $\overline{\operatorname{span} W^2_\infty(\Omega)}$. Нехай також $r(A, B) := \sup\limits_{x\in A} \inf\limits_{y\in B} \|x - y\|_2$ для $A, B \subset \mathbb{R}^d$. Наступне твердження становить основний результат підрозділу.

Теорема 4.2.1. *Нехай* $d \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *– опукле тіло і* Q *– скінченна множина, що міститься всередині* Ω. *Тоді виконується подвійна нерівність*

$$\frac{1}{4}\, r^2(\Omega, Q) \le \mathcal{E}^*_{L_\infty(\Omega)}\big(\mathrm{id}_{C(\Omega)}; W^2_\infty(\Omega); I'_Q\big) \le \max\left\{\frac{1}{4}\, r^2(\Omega, Q); \frac{1}{2}\, r^2(\partial\Omega, Q)\right\},$$

яка обертається в рівність у випадку, коли $r(\Omega, Q) \le \sqrt{2} r(\partial\Omega, Q)$.

Теорема 4.2.1 узагальнює на випадок класів гладких функцій багатьох змінних результати В.Ф. Бабенка і А.О. Лігуна (1975) ($d = 2$) та В.Ф. Бабенка (1978) ($d \ge 3$) щодо найкращого відновлення класу $H^\omega_2(\Omega)$ в нормі простору L_∞ за інформацією про значення функцій в точках множини Q. Також, результат теореми 4.2.1 близький до результатів Б. Боянова (1975) щодо найкращого відновлення класів $W^r_p([0,1])$, $1 \le p \le \infty$ і $r \in \mathbb{N}$, функцій $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ з абсолютно неперервною похідною $f^{(r-1)}$, для яких $\left\|f^{(r)}\right\|_{L_p([0,1])} \le 1$, в метриці простору L_∞ за інформацією про значення функцій та їх похідних до порядку r-1 включно в n вузлах.

Оцінювання знизу величини $\mathcal{E}^*_{L_\infty(\Omega)}\big(id_{C(\Omega)}; W^2_\infty(\Omega); I'_Q\big)$ зводиться до розв'язання наступної екстремальної задачі для функцій багатьох змінних: для заданого d-вимірного симплексу $\mathcal{T}$ з вершинами $B_0, \dots, B_d$ необхідно знайти

$$\sup_{\substack{x\in W^2_\infty(\mathcal{T}):\\ x(B_j)=0, \nabla x(B_j)=0, j=0,\dots,d}} \|x\|_{L_\infty(\mathcal{T})} \tag{9}$$

та екстремальні функції, якщо такі існують, на яких досягається $\sup$ в задачі (9). Взагалі кажучи, задачі такого роду є складними та їх вдається розв'язати точно лише у виключних ситуаціях. Задача (9) була розв'язана за рахунок її зведення до більш простої екстремальної задачі для функцій однієї змінної.

Підрозділ 4.3 присвячено розв'язанню задачі найкращого відновлення інтегральних операторів з невід'ємним ядром та їх сум на класах функцій з заданою мажорантою модуля неперервності за неточною інформацією про значення функцій з класу в заданій скінченній системі точок.

Нехай (M, μ) і (N, ν) – простори з σ-скінченною невід'ємною мірою на деякій σ-алгебрі Σ_M підмножин M, $\mathfrak{M}(M, \mu)$ – простір всіх μ-вимірних μ-м.с.

скінченних функцій $f: M \to \mathbb{R}$ та $E \subset \mathfrak{M}(M, \mu)$ – лінійний підпростір. Лінійний оператор $T: E \to \mathfrak{M}(N, \nu)$ називається інтегральним оператором, якщо існує $\nu \times \mu$-вимірна функція $K(s,t)$ – ядро оператора T – така, що для всіх $x \in E$

$$Tx(s) := \int_M K(s,t)x(t)\mathrm{d}\mu(t), \qquad \text{для } \nu - \text{м. в. } s \in N.$$

Нехай додатково $M = M_\rho$ оснащено метрикою ρ, Σ_M – борелівська σ-алгебра підмножин в M_ρ, $M' \subset M$ – компактна підмножина, $B_\mu(M')$ і $C_\mu(M')$ – простори функцій $x: M_\rho \to \mathbb{R}$, які дорівнюють нулю на $M_\rho \backslash M'$ та, відповідно, μ-суттєво обмежені і μ-м.с. неперервні на M'. Нехай також ω – модуль неперервності,

$$H_\mu^\omega(M') := \left\{x \in C_\mu(M') : |x(t') - x(t'')| \le \omega(\rho(t', t'')),\ \forall t', t'' \in M'\right\},$$

$n \in \mathbb{N}$, $Q = \left\{q_j\right\}_{j=1}^n \subset M'$ – задана система точок, та $I_Q: C_\mu(M') \to \mathbb{R}^n$ – інформаційний оператор вигляду

$$I_Q x := \big(x(q_1), \dots, x(q_n)\big), \qquad x \in C_\mu(M'),$$

та $U_e = \prod_{j=1}^n \left[-e_j, e_j\right]$, де $e_j > 0$ для всіх $j = 1, \dots, n$.

Задача найкращого відновлення класу $H_2^\omega(M')$ за інформацією I_Q, яка задана з похибкою U_e, розв'язана А.Г. Марчуком і К.Ю. Осипенко (1975) та Л. Пласкотою (1996) у випадку $M = \mathbb{R}$ і $M' = [0,1]$; В.Ф. Бабенком і А.О. Лігуном (1975) та В.Ф. Бабенком (1978) у випадку $M = \mathbb{R}^d$, M' – опукле тіло і $U_e = \emptyset$.

Задача найкращого відновлення функціоналу інтегрування на класі $H_p^\omega(M')$ за інформацією I_Q, яка задана з похибкою U_e, розв'язана М.П. Корнєйчуком (1968) у випадку $M = \mathbb{R}$, $M' = [0,1]$ і $U_e = \emptyset$; В.Ф. Бабенком (1976) у випадку $M = \mathbb{R}^d$, M' – опукле тіло, $U_e = \emptyset$ і або $p = \infty$ та $d \in \mathbb{N}$, або $p = 1$ та $d = 2$; Л. Пласкотою (1996) у випадку $M = \mathbb{R}$, $M' = [0,1]$ і $\omega(t) = t$, $t \in [0,1]$.

Розглянемо функцію $\tau_{\omega,Q,e}(t) := \chi_{M'}(t) \cdot \min\limits_{j=1,\dots,n}\left(e_j + \omega\left(\rho\left(t, q_j\right)\right)\right)$, $t \in M$, де $\chi_{M'}$ – характеристична функція множини M'. Послідовно означимо $\Pi_0 := \emptyset$,

$$\Pi_j := \left\{t \in M' : \ \tau_{\omega,Q,e}(t) = e_j + \omega(\rho\big(t, q_j\big))\right\} \backslash \bigcup_{s=0}^{j-1} \Pi_s, \quad j = 1, \dots, n.$$

Оператор $L_{\omega,Q,e}: \mathbb{R}^n \to B_\mu(M')$ визначимо за правилом: для всіх $z \in \mathbb{R}^n$

$$L_{\omega,Q,e} z(t) := \begin{cases} z_j, & t \in \Pi_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ 0, & t \in M \backslash M'. \end{cases}$$

Теорема 4.3.2. *Нехай в позначеннях підрозділу інтегральний оператор* $A: B_\mu(M') \to \mathfrak{M}(N, \nu)$ *має невід'ємне ядро* K *і* $Y \subset \mathfrak{M}(N, \nu)$ *– нормовна решітка* *така, що* $A\left(B_\mu(M')\right) \subset Y$. *Тоді* $\Phi = A \circ L_{\omega,Q,e}$ *– найкращий метод відновлення оператора* A *на класі* $H_\mu^\omega(M')$ *за інформацією* I_Q*, яка задана з похибкою* U_e*, та*

$$\mathcal{E}_Y^*\big(A; H_\mu^\omega(M'); I_Q; U_e\big) = \left\| \int_{M'} K(\cdot, x)\, \tau_{\omega,Q,e}(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \right\|_Y .$$

В підрозділі 4.3 отримано також узагальнення теореми 4.3.2 на випадок найкращого відновлення сум інтегральних операторів зі знакосталими ядрами. Одержані результати дозволяють побудувати оптимальні методи розв'язку граничних задач для рівнянь в частинних похідних, гранична функція в яких має обмеження на модуль неперервності, за значеннями граничної функції в заданій системі точок.

В *п'ятому розділі* досліджується задача про знаходження точних констант в нерівностях для норм похідних та споріднена задача про найкраще наближення необмежених операторів лінійними обмеженими операторами.

Нехай G – вимірна однозв'язна підмножина $\mathbb{R}$, $k, r \in \mathbb{N}$, $k \le r - 1$, та $1 \le p, q, s \le \infty$. Позначимо через $L_s^r(G)$ простір вимірних функцій $f\colon G \to \mathbb{R}$, для яких $f^{(k-1)}$ локально абсолютно неперервна на G і $f^{(r)} \in L_s(G)$, та означимо $L_{p,s}^r(G) := L_p(G) \cap L_s^r(G)$.

Нерівності, що оцінюють норму $\left\|f^{(k)}\right\|_{L_q(G)}$ проміжної похідної функції через норму $\|f\|_{L_p(G)}$ самої функції та норму $\left\|f^{(r)}\right\|_{L_s(G)}$ її похідної старшого порядку, називають нерівностями типу Колмогорова. Такі нерівності знаходять важливі застосування в теорії наближення, теорії некоректних задач, теорії оптимальних алгоритмів, теорії оптимального відновлення, тощо.

Особливий інтерес становлять нерівності типу Колмогорова з точними константами. Вони вивчалися А. Кнезером, Ж. Адамаром, Г.Г. Харді, Дж.І. Літлвудом, Е. Ландау, Г. Пойа, А.М. Колмогоровим, Е.М. Стейном, Л.В. Тайковим, І.Дж. Шенбергом, А. Каваретою, Ю.І. Любічем, М.П. Купцовим, В.М. Габушиним та ін.

Сучасні прикладні задачі хімії, фізики, механіки потребують всебічного дослідження похідних не тільки цілих, але й дробових порядків. Тому природний інтерес становить задача знаходження непокращуваних нерівностей для норм похідних дробових порядків, розв'язанню якої присвячено *підрозділ 5.2*.

Дробова похідна в смислі Маршо функції $f\colon \mathbb{R}_+^0 = [0, \infty) \to \mathbb{R}$ задається наступним чином:

$$D_-^k f(x) = \frac{1}{\kappa(k,n)} \int_0^{+\infty} \frac{(\Delta_{-t}^n f)(x)}{t^{1+k}}\, \mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R},$$

де $n \in \mathbb{N}$, $n > k$, та

$$(\Delta_{-t}^{n} f)(x) := \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} f(x - mt), \quad \kappa(k,n) := \Gamma(-k) \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} m^k.$$

Нехай $1 < s \leq \infty$, $k \in (1{,}2 - 1/s)$ і $s' = s/(s-1)$. Введемо до розгляду множину $M := \{(a,b) \in (0{,}1)^2 : a \leq b\}$ та для $(a,b) \in M$ означимо функції

$$\omega(a,b;x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ a^{-1}(1-b)^{-1} \cdot (1 - b - (1 - b^{1-k})(1-a)), & x \in (0,a], \\ (1-b)^{-1} \cdot (1 - b^{1-k}), & x \in (a,1), \\ (1-k)x^{-k}, & x \geq 1, \end{cases}$$

$$\tau(a,b;x) := x^{1-k} - \int_0^x \omega(a,b;u)\mathrm{d}u, \qquad x \in \mathbb{R}_+^0,$$

$$\varphi(a,b;x) := \int_0^a \left(-x + \frac{t}{2}\right) \tau_{(s')}(a,b;t)\mathrm{d}t + \int_0^x (x-t)\tau_{(s')}(a,b;t)\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}_+^0,$$

де $g_{(s')} := |g|^{s'-1}\mathrm{sgn}\, g$. Основним результатом підрозділу є наступна теорема.

Теорема 5.2.7. *Нехай* $1 < s \leq \infty$, $s' = s/(s-1)$, $k \in (1{,}2 - 1/s)$ *і* $\lambda = k/(2 - 1/s)$. *Тоді існує єдина пара* $(a,b) \in M$ *така, що для будь-якої функції* $f \in L_{\infty,s}^2(\mathbb{R}_+^0)$ *виконується точна нерівність*

$$\left\| D_-^k f \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+^0)} \leq \frac{\left\| D_-^k \varphi(a,b;\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+^0)}}{\|\varphi(a,b;\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+^0)}^{1-\lambda} \|\varphi''(a,b;\cdot)\|_{L_s(\mathbb{R}_+^0)}^{\lambda}} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+^0)}^{1-\lambda} \|f''\|_{L_s(\mathbb{R}_+^0)}^{\lambda}.$$

Твердження теореми 5.2.7 у випадку $s = \infty$ встановлено В.В. Арєстовим (1979).

В *підрозділах 5.3* та *5.4* розв’язується задача найкращого наближення операторів диференціювання і функціоналів диференціювання в точці за допомогою лінійних обмежених операторів. Нехай X, Y – банахові простори; $T: X \to Y$ – оператор з областю визначення $\mathcal{D}(T) \subset X$; $W \subset \mathcal{D}(T)$ – деяка множина; $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X,Y)$ – простір лінійних обмежених операторів $S: X \to Y$; $N > 0$. Похибкою наближення оператора T операторами $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ на множині W називається величина

$$U(T,S;W) := \sup_{x \in W} \|Tx - Sx\|_Y.$$

С.Б. Стєчкін (1965, 1967) поставив задачу найкращого наближення оператора T лінійними обмеженими операторами на класі W, яка полягає в обчисленні

$$E_N(T;W) := \inf_{S \in \mathcal{L}:\ \|S\| \leq N} U(T,S;W) \tag{10}$$

та знаходженні екстремальних операторів $S^* \in \mathcal{L}$, $\|S^*\| \leq N$, якщо такі існують, на яких досягається $\inf$ в (10).

В оглядах В.В. Арєстова та В.М. Габушина (1995) і В.В. Арєстова (1996) міститься широкий огляд результатів щодо розв'язку задачі Стєчкіна про найкраще наближення операторів диференціювання лінійними обмеженими операторами на класах функцій, визначених на $\mathbb{R}$ або $\mathbb{R}_+^0$. Але на класах функцій, визначених на скінченному відрізку, ця задача залишається малодослідженою.

В підрозділі 5.3 розв'язана задача про найкраще наближення оператора диференціювання $D^1\colon L_\infty([0,1]) \to L_\infty([0,1])$ і функціоналу диференціювання $D_t^1\colon L_\infty([0,1]) \to \mathbb{R}$ в точці $t \in [0,1]$ на класах $W_s^2([0,1])$, $1 \le s \le \infty$. Там же розглядається більш загальний випадок – коли друга похідна функцій з класу належить одиничній кулі в просторі Орліча.

Підрозділ 5.4 присвячено розв'язанню задачі Стєчкіна для операторів $D^k\colon L_\infty([0,1]) \to L_\infty([0,1])$, $k \in \{1,2\}$, і функціоналу $D_t^k\colon L_\infty([0,1]) \to \mathbb{R}$, $k \in \{1,2\}$ і $t \in [0,1]$, на класах $W_\infty^3([0,1])$. Зазначимо, що на класах функцій, визначених на $\mathbb{R}$ або $\mathbb{R}_+^0$, ця задача досліджувалася в роботах С.Б. Стєчкіна, В.В. Арєстова, О.П. Буслаєва, О.А. Тімошина, В.І. Колпакова, Е.В. Колпакової.

Сформулюємо результати підрозділу 5.4 щодо розв'язку задачі Стєчкіна для функціоналів і операторів диференціювання другого порядку. Розпочнемо з побудови екстремальних функціоналів $F_N^{2,t}\colon L_\infty([0,1]) \to \mathbb{R}$ для $t \in [0,1/2]$. Нехай

$$N_t^* = \frac{18}{(1-2t^3)(1+4t^3)}.$$

У випадку $N \in [4/t^2, +\infty)$ для $f \in L_\infty([0,1])$ означимо

$$F_N^{2,t} f := \frac{N}{4} \cdot f\left(t - \frac{2}{\sqrt{N}}\right) - \frac{N}{2} \cdot f(t) + \frac{N}{4} \cdot f\left(t + \frac{2}{\sqrt{N}}\right).$$

У випадку $N \in (N_t^*, 4/t^2)$ через $c_{N,t}$ позначимо єдиний нуль на $[2t, 1]$ полінома

$$Q_{N,t}(c) := c^6 - \frac{18}{N} c^4 + 2t^3 c^3 - 8t^6$$

і для $f \in L_\infty([0,1])$ означимо

$$F_N^{2,t} f := \frac{6c_{N,t}}{c_{N,t}^3 + 4t^3} \cdot f(0) - \frac{N}{2} \cdot f\left(\frac{c_{N,t}^3 + 4t^3}{3c_{N,t}^2}\right) + \frac{3c_{N,t}}{c_{N,t}^3 - 2t^3} \cdot f\left(c_{N,t}\right).$$

У випадку $N \in [16, N_t^*]$ означимо

$$b_{N,t} := \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{16}{N}},$$

$$F_N^{2,t} f := \frac{2}{b_{N,t}} \cdot f(0) - \frac{N}{2} \cdot f\big(b_{N,t}\big) + \frac{2}{1 - b_{N,t}} \cdot f(1), \quad f \in L_\infty([0,1]).$$

У випадку $t \in [1/2,1]$ для функції $g \in L_\infty([0,1])$ через $\tilde{g}$ позначимо симетричну їй функцію, тобто $\tilde{g}(u) = g(1-u)$ для $u \in [0,1]$, та для $N \geq 16$ означимо

$$F_N^{2,t} f := F_N^{2,1-t} \tilde{f}, \qquad \forall f \in L_\infty([0,1]).$$

Теорема 5.4.1. *Якщо* $t \in [0,1/2]$, *то*

$$E_N(D_t^2; W_\infty^3([0,1])) = \begin{cases} \dfrac{2}{3\sqrt{N}}, & N \in [4/t^2, +\infty), \\ \dfrac{4c_{N,t}}{9} + \dfrac{4t^3}{9c_{N,t}^2} + \dfrac{2t^3 c_{N,t}}{c_{N,t}^3 + 4t^3} - t, & N \in (N_t^*, 4/t^2), \\ \dfrac{b_{N,t}^2 + 2t^3}{3b_{N,t}} - t + \dfrac{1}{3}, & N \in [16, N_t^*], \\ +\infty, & N \in (0,16), \end{cases}$$

а якщо $t \in [1/2,1]$, *то* $E_N(D_t^2; W_\infty^3([0,1])) = E_N(D_{1-t}^2; W_\infty^3([0,1]))$. *Більш того, для всіх* $t \in [0,1]$ *функціонал* $F_N^{2,t}$ *є екстремальним в задачі (10).*

Теорема 5.4.2. *Для всіх* $N > 0$

$$E_N(D^2; W_\infty^3([0,1])) = U(D^2; F_N^2; W_\infty^3([0,1])) = E_N(D_0^2; W_\infty^3([0,1])),$$

де оператор $F_N^2 : L_\infty([0,1]) \to L_\infty([0,1])$ *визначений співвідношенням:*

$$F_N^2 f(t) := F_N^{2,t} f, \qquad \forall t \in [0,1] \text{ та } \forall f \in L_\infty([0,1]).$$

Решта п'ятого розділу присвячена одержанню точних нерівностей типу Колмогорова для функцій, визначених на скінченному відрізку. Нехай

$$W_s^r([0,1]) := \left\{ f \in L_s^r([0,1]) : \left\| f^{(r)} \right\|_{L_s([0,1])} \leq 1 \right\}.$$

Задача про знаходження точних констант в нерівностях типу Колмогорова для функцій, визначених на скінченному відрізку, називається задачею Ландау-Колмогорова та має дві, взагалі кажучи різні, постановки. Найбільш сильна з них полягає в знаходженні модуля неперервності $\Omega(\delta; D^k; W_s^r)$, $\delta \geq 0$, оператора диференціювання $D^k : L_p([0,1]) \to L_q([0,1])$ на класі $W_s^r([0,1])$:

$$\Omega(\delta; D^k; W_s^r([0,1])) := \left\{ \left\| f^{(k)} \right\|_{L_q([0,1])} : \ f \in W_s^r([0,1]) \text{ та } \|f\|_{L_p([0,1])} \leq \delta \right\}.$$

Розв'язанню задачі Ландау-Колмогорова присвячено роботи Е. Ландау (1913), Ч.К. Чуі та П.У. Сміта (1975), С. Карліна (1976), А. Пінкуса (1978), М. Сато

(1982), О.І. Звягінцева і А.Я. Лєпіна (1982), О.І. Звягінцева (1982), Н. Найденова (2003), Б.О. Еріксона (1998), О.Ю. Шадріна (2014), Ю.В. Бабенко (2000, 2001), В.І. Бурєнкова та В.А. Гусакова (2003), Б. Боянова і Н. Найденова (1999, 2002).

Проте в переважній більшості ситуацій задача Ландау-Колмогорова розв'язана лише для малих значень r. Водночас, різні застосування потребують встановлення нерівностей для похідних на спеціальних класах функцій. Зокрема, на класах періодичних функцій, майже періодичних функцій, кратно монотонних функцій, абсолютно монотонних функцій, тощо.

В підрозділі 5.5 задача Ландау-Колмогорова розв'язується на класі абсолютно монотонних функцій. Нагадаємо, що функція $f \in C([0,1])$ називається абсолютно монотонною, якщо f є нескінченно диференційовною всередині $(0,1)$ і $f^{(k)}(x) \geq 0$ для всіх $x \in (0,1)$ та $k \in \mathbb{Z}_+$. Множину абсолютно монотонних на $[0,1]$ функцій позначимо через AM.

Нехай $n \in \mathbb{Z}_+$ та $e_n(x) := x^n$, $x \in [0,1]$. Для $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ і $n \geq r$, розглянемо множину функцій

$$\mathcal{M}_r^n := \left\{ g_{\lambda,n} = \lambda \frac{(n+1-r)!}{(n+1)!} e_{n+1} + (1-\lambda) \frac{(n-r)!}{n!} e_n \;\middle|\; \lambda \in [0,1) \right\}$$

і напівінтервали $\Delta_{n;p} := \left(\frac{(n-r+1)!}{(n+1)!} \|e_{n+1}\|_{L_p([0,1])}, \frac{(n-r)!}{n!} \|e_n\|_{L_p([0,1])} \right]$. Нехай також

$$\mathcal{M}_r^{r-1} := \left\{ g_{\rho,r-1} = \frac{1}{r!} e_r + \rho e_{r-1} \;\middle|\; \rho > 0 \right\} \text{ і } \Delta_{r-1;p} := \left(\frac{1}{r!} \|e_r\|_{L_p([0,1])}, +\infty \right).$$

Зрозуміло, що для кожного $\delta > 0$ існує єдина функція $y_\delta \in \mathcal{M}_r$ така, що $\|y_\delta\|_{L_p([0,1])} = \delta$. Головним результатом підрозділу 5.5 є наступне твердження.

Теорема 5.5.1. *Нехай $k, r \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq r-1$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Тоді для будь-якого $\delta > 0$*

$$\Omega(\delta; D^k; W_\infty^r([0,1]) \cap AM) = \left\| y_\delta^{(k)} \right\|_{L_q([0,1])}.$$

В підрозділі 5.6 отримано деякі нові результати щодо розв'язку задачі Ландау-Колмогорова на класі кратно монотонних функцій.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню класичних задач теорії апроксимації про обчислення лінійних поперечників функціональних класів, оптимізацію квадратурних формул на класах функцій, найкраще нелінійне наближення функцій багатьох змінних сплайнами, найкраще відновлення операторів, встановлення точних нерівностей типу Колмогорова для норм похідних цілого і дробового порядків функцій однієї змінної та їх застосуванням. Основні результати роботи викладено в таких пунктах.

1. Обчислено точне значення одновимірного лінійного поперечника класу $\widetilde{H}^\omega = \widetilde{H}^\omega([0,1])$ періодичних функцій з заданою мажорантою ω модуля неперервності в просторі $\tilde{C}$ неперервних періодичних функцій і побудовано найкращий лінійний метод наближення класу $\widetilde{H}^\omega$ константами в $\tilde{C}$.

Показано, що точне значення одновимірного лінійного поперечника класу $H^\omega = H^\omega([0,1])$ в просторі C та найкращий лінійний метод наближення цього класу константами пов'язані між собою певним інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду з параметром. Це рівняння розв'язане в явному вигляді для класів Гельдера, заданих модулем неперервності $\omega(t) = t^\alpha,\ \alpha \in (0,1)$.

Отримано нові оцінки зверху для N-вимірних лінійних поперечників класів $\widetilde{H}^\omega$ та H^ω в просторі неперервних функцій, що покращують раніше відомі оцінки, та означено і обчислено відносний лінійний мініедральний поперечник $\lambda_N^{\mathfrak{m}}(H^\omega; C_+; C)$.

2. Доведено, що інтервальна квадратурна формула з рівновіддаленими серединами вузлових інтервалів і рівними коефіцієнтами є найкращою серед всіх інтервальних квадратурних формул з заданою кількістю вузлових інтервалів однакової довжини, які можуть перетинатися, на класах згорток ядер, що не збільшують осциляцію, з переставно інваріантними множинами. Цей результат суттєво поширює відомі результати щодо оптимізації інтервальних квадратур. Ключову роль у доведенні цього результату мала встановлена властивість про не збільшення осциляції в згортці з ядром Стєклова вузького класу функцій, які можна зобразити у вигляді різниці деяких двох ідеальних несиметричних сплайнів нульового порядку.

Розв'язано задачу оптимізації кубатурних формул, що використовують в якості інформації про підінтегральну функцію її усереднення вздовж перетинів області визначення з гіперплощинами заданої ковимірності, паралельних координатним гіперплощинам, на класах функцій, які задані обмеженнями на модуль неперервності або на гладкість частинних похідних.

3. Знайдено точну асимптотику при $N \to \infty$ величини $R_N\left(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\right)$ найкращого нелінійного (α,β)-несиметричного наближення в метриці простору L_p двічі неперервно диференційовних функцій f двох змінних за допомогою лінійних неперервних сплайнів на тріангуляціях, які складаються з не більше, ніж N трикутників, а також побудовано асимптотично оптимальні послідовності тріангуляцій та лінійних сплайнів на них.

Розв'язано екстремальну задачу про знаходження форми d-вимірного симплекса, $d \in \mathbb{N}$, одиничного об'єму, на якому досягається мінімум похибки найкращого (α,β)-несиметричного наближення в метриці простору L_p додатно визначеної квадратичної канонічної форми за допомогою лінійних функцій.

Знайдено точний порядок величин $\mathcal{E}_N(W_\infty^\Delta)_s$ і $\mathcal{E}_N(W_s^\Delta)_1$, коли $N \to \infty$, що характеризують похибку наближення в метриці простору L_p функцій з обмеженим лапласіаном за допомогою трансфінітних інтерполяційних гармонічних сплайнів на прямокутних розбиттях, які складаються з не більше, ніж N паралелепіпедів. Показано, що такий порядок не залежить від вимірності простору визначення функцій та досягається на розбиттях, утворених розбиттям області визначення функції рівновіддаленими паралельними гіперплощинами.

4. Отримано точні оцінки величини похибки найкращого відновлення класу $W_\infty^2(\Omega)$ функцій багатьох змінних, визначених на опуклому тілі Ω, що мають рівномірно обмежені похідні другого порядку за довільним напрямком, за інформацією про значення функцій та їх градієнтів в заданій скінченній системі вузлів, та наведено загальні умови, за яких оцінки зверху та знизу збігаються. Подібні результати встановлено й для періодичного аналогу класу $W_\infty^2(\Omega)$ – класу $W_\infty^2(\mathcal{L})$, де $\mathcal{L}$ – повновимірна решітка. Ці результати поширюють результати Б.Д. Боянова на випадок функцій багатьох змінних та В.Ф. Бабенка та А.О. Лігуна на випадок класів функцій вищої гладкості.

Розв'язано задачу про найкраще відновлення інтегральних операторів з невід'ємними ядрами та їх сум на класах функцій, які визначені на компакті метричного простору та мають задану мажоранту модуля неперервності, за значеннями функцій з класу в заданій скінченній системі вузлів, які відомі з похибкою.

5. Одержано непокращувану нерівність типу Колмогорова, що оцінює рівномірну норму дробової похідної в смислі Маршо порядку $k \in (0,2-1/s) \setminus \{1\}$ функції $f \in L_{\infty,s}^2(\mathbb{R}_+^0)$, $1 \le s < \infty$, через рівномірну норму самої функції та норму її другої похідної в метриці простору L_s, та розв'язано задачу Стєчкіна про найкраще наближення оператора D_-^k дробового диференціювання в смислі Маршо лінійними обмеженими операторами на класі $W_{\infty,s}^2(\mathbb{R}_+^0)$. У випадку $k \in (0,1)$ розглянуто узагальнення цих результатів на ситуацію, коли друга похідна функції f належить ідеальній решітці.

Розв'язано задачу Стєчкіна для операторів диференціювання та функціоналів диференціювання в точці на класах $W_N^3([0,1])$ та $W_N^{2,*}([0,1])$, де N – це N-функція, що має неперервну справа похідну.

Для абсолютно монотонних та кратно монотонних функцій $x: [0,1] \to \mathbb{R}$ та для широкого діапазону значень параметрів $1 \le p,q,s \le \infty$ та $k,r \in \mathbb{N}$, $k \le r-1$, отримано розв'язок задачі Ландау-Колмогорова про точні константи в нерівностях, що оцінюють норму проміжної похідної $\left\|x^{(k)}\right\|_{L_q([0,1])}$ через норму самої функції $\|x\|_{L_p([0,1])}$ та норму її похідної старшого порядку $\left\|x^{(r)}\right\|_{L_s([0,1])}$.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Babenko V.* On one extremal property of a regular simplex / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, D. Skorokhodov // Commun. Anal. Geom. – 2009. – V. 17, №4. – P. 685–699.

2. *Babenko V.* Exact asymptotics of the optimal L_p-error of asymmetric linear spline approximation / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, D. Skorokhodov // Jaen J. Approx. – 2014. – V. 6, №1. – P. 1–36.
3. *Kuzmenko D.* Optimization of transfinite interpolation of functions with bounded Laplacian by harmonic splines on box partitions / D. Kuzmenko, D. Skorokhodov // J. Approx. Theory. – 2016. – V. 209, №9. – P. 44–57.
4. *Babenko V.* On the best interval quadrature formulae for classes of differentiable periodic functions / V. Babenko, D. Skorokhodov // J. Complexity. – 2007. – V. 23, №4-6. – P. 890–917.
5. *Бабенко В.Ф.* Об оптимизации интервальных квадратурных формул / В.Ф. Бабенко, Д.С. Скороходов // Вісн. Дніпропетровського ун-ту., Сер. Матем. – 2007. – Т. 8, №12. – С. 261–267.
6. *Babenko V.* On the best interval quadrature formulae for convolution classes / V. Babenko, D. Skorokhodov // East J. Approx. – 2008. V. 14, №3. – P. 353–376.
7. *Скороходов Д.С.* О существовании обобщенного несимметричного (α,β) -сплайна, усреднения которого принимают равные минимумы в заданных точках / Д.С. Скороходов // Укр. матем. журн. – 2009. – Т. 61, №2. – С 261–267. (Skorokhodov D.S. On the existence of a generalized asymmetric (α,β) -spline whose average values have equal minima at given points / D.S. Skorokhodov // Ukrainian Mathematical Journal. – 2009. – V. 61, №2. – P. 312–319.)
8. *Babenko V.F.* Construction of optimal cubature formulas related to computer tomography / V.F. Babenko, S.V. Borodachov, D.S. Skorokhodov // Constr. Approx. – 2011. – V. 33, №3. – P. 313–330.
9. *Babenko V.F.* Optimal cubature formulas related to tomography for certain classes of functions defined on a cube / V.F. Babenko, S.V. Borodachov, D.S. Skorokhodov // Jaen J. Approx. – 2011. – V. 3, №2. – P. 143–160.
10. *Babenko V.F.* Optimal cubature formulas for tensor products of certain classes of functions / V.F. Babenko, S.V. Borodachov, D.S. Skorokhodov // J. Complexity. – 2011. – V. 27, №6. – P. 519–530.
11. *Скороходов Д.С.* О наилучшем приближении классов Гельдера линейными методами / Д.С. Скороходов // Доп. НАНУ. – 2014. – Т 8. – С. 41–47.
12. *Скороходов Д.С.* О наилучшем линейном методе приближения классов Гельдера / Д.С. Скороходов // Укр. матем. журн. – 2015. – Т. 67, №9. – С. 1265–1284. (Skorokhodov D.S. On the Best Linear Approximation Method for Hölder Classes / D.S. Skorokhodov // Ukrainian Mathematical Journal. – 2015. – V. 67, №9. – P. 1425–1446.)
13. *Babenko V.* Optimal recovery of integral operators and its applications / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, D. Skorokhodov // J. Complexity. – 2016. – V. 35, №8. – P. 102–123.

14.*Babenko V.F.* Optimal recovery of isotropic classes of twice-differentiable multivariate functions / V.F. Babenko, S.V. Borodachov, D.S. Skorokhodov // J. Complexity. – 2010. – V. 26, №6. – P. 591–607.
15.*Бабенко Ю.В.* Задачи Колмогорова и Стечкина для классов функций, вторая производная которых принадлежит пространству Орлича / Ю.В. Бабенко, Д.С. Скороходов // Матем. заметки. – 2012. – Т. 91, №2. – С. 172–183. (Babenko Yu.V. The Kolmogorov and Stechkin problems for classes of functions whose second derivative belongs to the Orlicz space / Yu.V. Babenko, D.S. Skorokhodov // Mathematical Notes. – 2012. – V. 91, №1-2. – P. 161–171.)
16.*Babenko Yu.* Stechkin's Problem for Differential Operators and Functionals of First and Second Order / Yu. Babenko, D. Skorokhodov // J. Approx. Theory. – 2013. – V. 167, №3. – P. 173–200.
17.*Babenko V.F.* Kolmogorov type inequalities for the Marchaud fractional derivatives on the real line and the half-line [Електронний ресурс] / V.F. Babenko, M.S. Churilova, N.V. Parfinovych, D.S. Skorokhodov // J. Ineq. Appl. – 2014. – V. 2014, №1. – P. 1–31. – Режим доступу до ресурсу: https://link.springer.com/article/10.1186/1029-242X-2014-504.
18.*Skorokhodov D.* On inequalities for the norms of intermediate derivatices of multiply monotone functions defined on a finite segment / D. Skorokhodov // Укр. матем. журн. – 2012. – Т. 64, №4. – С. 508–524. (Skorokhodov D.S. On inequalities for the norms of intermediate derivatives of multiply monotone functions defined on a finite segment / D.S. Skorokhodov // Ukrainian Mathematical Journal. – 2012. – V. 64, №4. – P. 575–593.)
19.*Скороходов Д.С.* О неравенствах типа Колмогорова для классов кратно монотонных на конечном отрезке фунций / Д.С. Скороходов // Вісн. Дніпропетровського ун-ту., Сер. Матем. – 2010. – Т. 6, №15. – С. 156–161.
20.*Скороходов Д.С.* Задача Ландау-Колмогорова на отрезке для класса абсолютно-монотонных функций / Д.С. Скороходов // Укр. матем. журн. – 2011. – Т. 63, №4. – С. 531–548. (Skorokhodov D.S. Landau–Kolmogorov problem for a class of functions absolutely monotone on a finite interval / D.S. Skorokhodov // Ukrainian Mathematical Journal. – 2011. – V. 63, №4. – P. 617–637.)
21.*Skorokhodov D.* The order of the best transfinite interpolation of functions with bounded laplacian with the help of harmonic splines on box partitions / D. Skorokhodov // Вісн. Дніпровського ун-ту., Сер. Матем. – 2018. – Т. 26. – С. 82–88.
22.*Babenko V.* Best interval quadrature formulae for convolution classes / V. Babenko, D. Skorokhodov // Twelfth International Conference in Approximation Theory : міжнар. наук. конф., 4–8 березня 2007 р. : тези допов. – Сан Антоніо, 2007. – С. 48–49.
23.*Babenko V.F.* Optimal interval quadrature formulae for classes of differentiable periodic functions / V.F. Babenko, D.S. Skorokhodov // Extremal Problems in Complex and Real Analysis : міжнар. наук. конф., 22–26 травня 2007 р. : тези допов. – М., 2007. – С. 9.

24. *Babenko V.* On linear approximation of quadratic functions of two variables in L_p-metric and applications / V. Babenko, Yu. Babenko, D. Skorokhodov // Tenth SIAM Conference on Geometric Design and Computing : міжнар. наук. конф., 4–8 листопада 2007 р. : тези допов. – Сан Антоніо, 2007. – С. 42.
25. *Бабенко В.Ф.* Точная асимптотика L_p-погрешности оптимального кусочно-линейного интерполирования функций класса C^2 / В.Ф. Бабенко, Ю.В. Бабенко, Д.С. Скороходов // Современные проблемы теории функций и их приложения : міжнар. наук. конф., 28 січня – 4 лютого 2008 р. : тези допов. – Саратов, 2008. – С. 16–17.
26. *Бабенко В.Ф.* Асимптотически оптимальное L_p-приближение выпуклых на квадрате функций / В.Ф. Бабенко, Ю.В. Бабенко, Д.С. Скороходов // Проблеми математичного моделювання : міждерж. наук.-метод. конф., 28–30 травня 2008 р. : тези допов. – Дніпродзержинськ, 2008. – С. 13–14.
27. *Бабенко В.Ф.* Об интервальных квадратурных формулах на некоторых классах периодических функций / В.Ф. Бабенко, Д.С. Скороходов // Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування : міжнар. наук. конф., 16–21 червня 2008 р. : тези допов. – Мелітопіль, 2008. – С. 14.
28. *Babenko V.* On the weighted interval quadrature formulae on some classes of periodic functions / V. Babenko, D. Skorokhodov // Harmonic Analysis and Approximations, IV : міжнар. наук. конф., 19–26 вересня 2008 р. : тези допов. – Цахкадзор, 2008. – С. 117–118.
29. *Babenko V.F.* To one additional extremal property of regular simplex / V.F. Babenko, Yu.V. Babenko, N.V. Parfinovych, D.S. Skorokhodov // Wavelets and Applications : міжнар. наук. конф., 14–20 червня 2009 р. : тези допов. – С.-Пб., 2009. – С. 5–6.
30. *Babenko V.* Exact asymptotics of the optimal L_p-error of asymmetric linear spline approximation / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, D. Skorokhodov // Wavelets and Applications : міжнар. наук. конф., 14–20 червня 2009 р. : тези допов. – С.-Пб., 2009. – С. 6–7.
31. *Babenko V.F.* Optimal cubature formulas for tensor products of certain classes of functions / V.F. Babenko, S.V. Borodachov, D.S. Skorokhodov // Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III : міжнар. наук. конф., 22–26 серпня 2009 р. : тези допов. – К., 2009. – С. 19.
32. *Babenko V.* Exact asymptotics of the best asymmetric piecewise-linear approximation of functions with positive Hessian / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, D. Skorokhodov // Thirteenth International Conference in Approximation Theory : міжнар. наук. конф., 7–10 березня 2010 р. : тези допов. – Сан Антоніо, 2010. – С. 38.
33. *Babenko V.* On one extremal property of a regular simplex and its applications to adaptive mesh generation / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, D. Skorokhodov // Optimal Configurations on the Sphere and Other Manifolds :

міжнар. наук. конф., 17–20 травня 2010 р. : тези допов. – Нешвіл, 2010. – С. 2.
34. *Babenko V.* Optimal recovery of certain classes of smooth multivariate functions / V. Babenko, S. Borodachov, D. Skorokhodov // Optimal Configurations on the Sphere and Other Manifolds : міжнар. наук. конф., 17–20 травня 2010 р. : тези допов. – Нешвіл, 2010. – С. 5.
35. *Babenko V.* Optimal recovery of certain classes of multivariate functions / V. Babenko, S. Borodachov, D. Skorokhodov // Approximation Theory and Applications : міжнар. наук. конф., 14–17 червня 2010 р.: тези допов. – Дніпропетровськ, 2010.– С. 8–9.
36. *Skorokhodov D.S.* Exact values of one-dimensional linear widths of the classes of functions with given majorant for the modulus of continuity / D.S. Skorokhodov // International Conference in Modern Analysis : міжнар. наук. конф., 20–23 червня 2011 р. : тези допов. – Донецьк, 2011. – С. 102.
37. *Бабенко В.Ф.* О неравенствах типа Ландау-Колмогорова для дробных производных функций, заданных на оси и полуоси / В.Ф. Бабенко, Н.В. Парфинович, Д.С. Скороходов, М.С. Чурилова // Теорія наближення функцій та її застосування : міжнар. наук. конф., 28 травня – 3 червня 2012 р. : тези допов. – Київ, 2012. – С. 18.
38. *Скороходов Д.С.* Точные неравенства для производных функций малой гладкости, заданных на конечном отрезке / Д.С. Скороходов // Теорія наближення функцій та її застосування : міжнар. наук. конф., 28 травня – 3 червня 2012 р. : тези допов. – Київ, 2012. – С. 99–100.
39. *Babenko V.* Sharp inequalities of Kolmogorov type for the Marchaud fractional derivatives of functions of low smoothness / V. Babenko, M. Churilova, N. Parfinovych, D. Skorokhodov // International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach : міжнар. наук. конф., 17–21 вересня 2012 р. : тези допов. – Львів, 2012. – С. 67.
40. *Babenko V.* Exact asymptotics of best adaptive asymmetric approximation of bivariate convex functions by piecewise-linear splines / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, D. Skorokhodov // Fourteenth International Conference in Approximation Theory : міжнар. наук. конф., 7–10 квітня 2013 р. : тези допов. – Сан Антоніо, 2013. – С. 44.
41. *Skorokhodov D.* On the best approximation of functions from Hölder classes by a subset of linear finite-rank positive methods / D. Skorokhodov // Kangro-100: Methods of Analysis and Algebra : міжнар. наук. конф., 1–6 вересня 2013 р. : тези допов. – Тарту, 2013. – С. 125.
42. *Babenko V.* On the optimal recovery of solutions of PDEs based on information on initial and boundary values with error / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, D. Skorokhodov // Теорія наближень і її застосування : міжнар. наук. конф., 8–11 жовтня 2015 р. : тези допов. – Дніпропетровськ., 2015. – С. 5.

АНОТАЦІЇ

Скороходов Д.С. Оптимальне відновлення операторів та функціоналів і суміжні екстремальні задачі теорії наближення. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – "Математичний аналіз" (111 – Математика). – Інститут математики НАН України, Київ, 2019.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню класичних екстремальних задач теорії апроксимації. Отримано нові результати щодо найкращих лінійних методів наближення класів функцій з заданою мажорантою модуля неперервності в просторі неперервних функцій; найкращого відновлення операторів, зокрема, тотожних операторів та інтегральних операторів з невід'ємним ядром і їх сум на класах функцій з заданою мажорантою модуля неперервності за неповною інформацією про функції з класу; оптимізації інтервальних квадратурних формул на класах згорток ядер, що не збільшують осциляцію, з переставно інваріантними множинами та деяких типів квадратурних формул на класах функцій багатьох змінних. Знайдено точну асимптотику найкращого нелінійного наближення функцій двох змінних лінійними сплайнами. Одержано нові непокращувані нерівності типу Колмогорова для норм похідних цілого і дробового порядків функцій, визначених на напівосі невід'ємних чисел або на скінченному відрізку.

Ключові слова: найкраще наближення; найкраще несиметричне наближення; найкраще відновлення операторів; найкраще наближення необмежених операторів; поперечник за Колмогоровим; лінійний поперечник; відносні поперечники; трансфінітна інтерполяція; квадратурні формули; інтервальні квадратурні формули; лінійні сплайни; класи згорток; ядра, що не збільшують осциляцію; нерівності для норм похідних; дробова похідна; класи функцій з заданою мажорантою модуля неперервності.

Скороходов Д.С. Оптимальное восстановление операторов и функционалов и смежные экстремальные задачи теории приближения. – Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание научной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – "Математический анализ" (111 – Математика). – Институт математики НАН Украины, Киев, 2019.

Диссертационная работа посвящена исследованию классических экстремальных задач теории аппроксимации. Получены новые результаты о наилучших линейных методах приближения классов функций с заданной мажорантой модуля непрерывности в пространстве непрерывных функций; наилучшего восстановления операторов, в частности, тождественных операторов и интегральных операторов с неотрицательным ядром и их сумм на классах функций с заданной мажорантой модуля непрерывности по неполной информации о функциях из класса; оптимизации интервальных квадратурных формул на классах сверток ядер, не увеличивающих осцилляцию, с перестановочно инвариантными множествами и некоторых типов квадратурных формул на классах функций многих переменных. Найдена точная асимптотика наилучшего нелинейного приближения функций двух переменных линейными сплайнами. Получены новые неулучшаемые неравенства типа Колмогорова для норм производных целого и дробного порядков функций, определенных на неотрицательной полуоси или на конечном отрезке.

Ключевые слова: наилучшее приближение; наилучшее несимметрическое приближение; наилучшее восстановление операторов; наилучшее приближение неограниченных операторов; поперечник по Колмогорову; линейный поперечник; относительные поперечники; трансфинитная интерполяция; квадратурные формулы; интервальные квадратурные формулы; линейные сплайны; классы сверток; ядра, не увеличивающие осцилляцию; неравенства для норм производных; дробная производная; классы функций с заданной мажорантой модуля непрерывности.

Skorokhodov D.S. Optimal recovery of operators and functionals and related extremal problems of Approximation Theory. – The Manuscript.

Thesis for the Doctor Degree in Physical and Mathematical Sciences in Speciality 01.01.01 – Mathematical Analysis (111 – Mathematics). – Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2019.

The thesis is devoted to investigation of classical problems in Approximation Theory on calculating the widths of functional classes, optimization of quadrature formulas on classes of univariate and multivariate functions, the best approximation of multivariate functions by splines, the best recovery of operators and functionals, obtaining sharp Kolmogorov type inequalities for the norms of derivatives.

In the first chapter we consider the problem of finding linear widths of classes H^ω of functions defined on the interval $[0,1]$ and having given majorant ω for its modulus of continuity in the space of continuous functions. Kolmogorov widths of these functional classes were found in 1960-1970’s but exact values of their linear widths remain unknown. We find exact values of the first order linear widths of classes H^ω and its periodic analogues in the space of continuous functions. This allows establishing new upper estimates for higher order linear widths of classes H^ω that improve known estimates. Also, we show that these estimates are sharp on a wide class of linear methods – positive minihedral methods. To this end we define and calculate new approximative characteristics that is close to relative widths.

In the second chapter we consider the problem of optimization of quadrature formulas. In 1980’s it was proved that the rectangle formula is the best quadrature formula on convolution classes $K * F$ of variation diminishing kernels K with rearrangement invariant sets F of periodic univariate functions. Convolution classes generalize many important functional classes, *e.g.* Sobolev classes. Hence,

consideration of classes $K * F$ allows significantly enrich a series of functional classes on which rectangle formula is the optimal one. We extend this result onto the problem of optimization of interval quadrature formulas and prove optimality of interval rectangle formula – the formula with equal coefficients and equidistant centers of node intervals – on classes $K * F$. The key part in establishing our result is played by new variation diminishing property of the Steklov kernel on a narrow class of functions that can be represented as the difference of asymmetric perfect splines of zero order. This property allows to prove new inequalities for rearrangements of averaged monosplines and the best asymmetric approximations of averaged asymmetric perfect splines by constants.

Also, we solve the problem of optimization of quadrature formulas that use as information about the integrand functions the averages over intersections of its domain with hyperplanes of given dimension on the classes of multivariate functions defined by either the majorant for its modulus of continuity or the limitations on the norms of partial derivatives.

In the third chapter we study the problem of finding the asymptotic behavior of the best approximation of multivariate functions by splines. We establish sharp asymptotics of the error of the best nonlinear (α, β) −asymmetric approximation of convex bivariate functions by linear continuous splines in terms of the number of elements of triangulations. Study of asymmetric approximations allows us to consider regular and one-sided approximations under one perspective. Important step in proving this result was to solve extremal problem of the best asymmetric approximation of a positive definite quadratic form by linear functions on simplices. Also, we consider the problem of transfinite interpolation of multivariate functions by harmonic splines. We find exact order of asymptotic behavior of the best interpolation of the class $W_\infty^\Delta(\Omega)$ in L_q-metric by harmonic splines and prove that this order does not depend on the dimensionality of the space where the functions are defined.

In the fourth chapter we investigate the problem of optimal recovery of operators given exact or non-exact information. We find the error of optimal recovery of class $W_\infty^2(G)$ of multivariate functions defined on a convex body $G \subset \mathbb{R}^d$ and having uniformly bounded second order directional derivatives given the values of functions and its gradients in a fixed finite system of points. Also, we solve the problem of optimal recovery of integral operators with non-negative kernels and sums of such operators on classes of functions defined on compacts of metric spaces and having a given majorant for its modulus of continuity given non-exact information on the values of functions in a fixed finite system of points. The later result can be used to construct practical algorithms of the best recovery of solutions to boundary value problems for partial differential equations, integral and differential equations.

We devote the fifth chapter to Kolmogorov type inequalities and related problem of the best approximation of operators by linear bounded ones. We find a new sharp Kolmogorov type inequality estimating L_∞-norm of the Marchaud fractional derivative

of a function defined on non-negative half-line in terms of L_∞-norm of the function itself and L_s-norm of the second order function derivative. Also, we obtain new sharp Kolmogorov type inequalities for the norms of derivatives of absolutely monotone and multiply monotone functions defined on a finite interval. In addition, we solve the problem of the best approximation of first and second order differentiation operators on the classes of functions defined on a finite interval and having either second order derivative bounded in the space L_p or the Orlicz space or third order derivative bounded in the space L_∞.

Keywords: best approximation; best asymmetric approximation; best recovery of operators; best approximation of unbounded operator; Kolmogorov width; linear width; relative widths; transfinite interpolation; quadrature formulas; interval quadrature formulas; linear splines; convolution classes; variation diminishing kernels; inequalities for the norms of derivatives; fractional derivative; classes with given majorant for the modulus of continuity.

Підписано до друку 23.01.2019 р.
Формат 60×84/16 Папір друкарський. Ум. др.арк. 2
Друк різограф. Наклад — 100 прим. Надруковано в ТОВ “ДСГ-ПРІНТ”
49101 м. Дніпро, пр. Пушкіна, 37/15, Україна
Свідоцтво про реєстрацію №406824404659 від 01.09.2016