Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Міністерство освіти і науки України

Інститут математики
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису

Скороходов Дмитро Сергійович

УДК 517.5

ДИСЕРТАЦІЯ

Оптимальне відновлення операторів та функціоналів і суміжні екстремальні задачі теорії наближення

01.01.01 – Математичний аналіз
111 – Математика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень.
Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело _____________ Д. С. Скороходов

Дніпро — 2018

АНОТАЦІЯ

Скороходов Д. С. Оптимальне відновлення операторів та функціоналів і суміжні екстремальні задачі теорії наближення. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – "Математичний аналіз" (111 – Математика). – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара Міністерства освіти і науки України, Дніпро, Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню класичних задач теорії наближення про обчислення поперечників функціональних класів, оптимізації квадратурних формул на класах функцій однієї та багатьох змінних, найкращого наближення функцій багатьох змінних сплайнами, найкращого відновлення операторів та функціоналів, одержання точних нерівностей типу Колмогорова для норм похідних цілого та дробового порядку.

Перший розділ роботи присвячено задачі про обчислення лінійних поперечників класів $H^\omega([0,1])$ функцій, визначених на відрізку $[0,1]$, з заданою мажорантою модуля неперервності ω в просторі неперервних функцій. Поперечники за Колмогоровим таких функціональних класів були знайдені в 1960-1970-х рр., проте точні значення відповідних лінійних поперечників дотепер залишаються невідомими. В результаті проведених досліджень одержано точні значення лінійних одновимірних поперечників класів $H^\omega([0,1])$ та їх періодичних аналогів в просторі неперервних функцій. Це дозволило встановити нові оцінки зверху лінійних поперечників класів $H^\omega([0,1])$ вищих порядків, які покращують раніше відомі оцінки. В розділі також показано, що отримані оцінки зверху є точними на широкому класі лінійних методів наближення – позитивних мініедральних методах. Для цього була означена та обчислена нова апроксимативна характеристика, яка споріднена відносним поперечникам.

Другий розділ присвячено дослідженню задачі оптимізації квадратурних формул на класах функцій однієї та багатьох змінних. В 1980-х рр. була доведена оптимальність формул прямокутників серед всеможливих точкових квадратурних формул на класах згорток $K * F$ ядер K, що не збільшують осциляцію, з переставно інваріантними множинами F періодичних функцій. Класи згорток узагальнюють багато важливих в теорії наближення функціональних класів, наприклад, класи Соболєва, а тому їх розгляд дозволив суттєво збагатити ряд функціональних класів, на яких формула прямокутників є найкращою. В даному розділі результати оптимізації точкових квадратур були поширені на випадок задачі оптимізації інтервальних квадратурних формул на класах згорток $K * F$ та, зокрема, доведена оптимальність інтервальної формули прямокутників – формули з рівними коефіцієнтами та рівновіддаленими серединами вузлових інтервалів – на таких функціональних класах. Ключову роль при отриманні цього результату мала встановлена нова властивість ядра Стєклова не збільшувати осциляцію на вузькому класі функцій, які можна зобразити у вигляді різниці несиметричних ідеальних сплайнів нульового порядку. Ця властивість дозволила також довести нові нерівності для переставлень усереднених моносплайнів та найкращих несиметричних наближень усереднених ідеальних несиметричних сплайнів константами.

Крім того, в розділі роз'язано задачу оптимізації квадратурних формул, що використовують в якості інформації про підінтегральну функцію її усереднення вздовж перетинів області визначення гіперплощинами заданої вимірності, на класах функцій багатьох змінних, заданих обмеженням на модуль неперервності або на норми частинних похідних.

Третій розділ присвячено дослідженню задачі про знаходження асимптотичної поведінки найкращих наближень функцій багатьох змінних сплайнами. Головний результат розділу полягає в одержанні точної асимптотики похибки найкращого нелінійного наближення опуклих функцій двох змінних лінійними неперервними сплайнами в термінах числа елементів тріангуляцій. Разом зі звичайними наближеннями ми розглядаємо (α, β)-несиметричні наближення, що дозволяє досліджувати широкий клас задач з єдиної точки зору, включаючи симетричні та односторонні наближення. Важливим кроком при отриманні точної асимптотики похибки найкращого нелінійного наближення опуклих функцій лінійними сплайнами виступила розв'язана екстремальна задача про найкраще несиметричне наближення канонічної додатно визначеної квадратичної форми лінійними функціями на симплексах.

Також в третьому розділі досліджується задача трансфінітної інтерполяції функцій багатьох змінних гармонічними сплайнами. Знайдено точний порядок асимптотичної поведінки похибки найкращої трансфінітної інтерполяції на класі $W^{\Delta}_{\infty}(\Omega)$ в метриці простору L_q і на класах $W^{\Delta}_{p}(\Omega)$ в метриці простору L_1 за допомогою гармонічних сплайнів та встановлено, що такий порядок не залежить від вимірності простору, в якому визначені наближувані функції.

У четвертому розділі досліджується задача найкращого відновлення операторів за точно або неточно заданою інформацією. В результаті проведених досліджень знайдено похибку відновлення тотожного оператора на класі $W^2_{\infty}(G)$ функцій багатьох змінних, визначених на опуклому тілі G, які мають рівномірно обмежені в кожному напрямку похідні другого порядку, за інформацією про значення функцій та їх градієнтів в заданій скінченній системі точок. Також розв'язана задача найкращого відновлення інтегральних операторів з невід'ємним ядром та їх сум на класах функцій, визначених на компактах метричного простору та заданих обмеженням на модуль неперервності, за неточно заданою інформацією про значення функцій в заданій скіченній системі точок. Отримані результати можна використати для побудови практичних алгоритмів для найкращого відновлення розв'язків граничних задач для рівнянь в частинних похідних, інтегральних та диференціальних рівнянь.

П'ятий розділ присвячено одержанню точних нерівностей типу Колмогорова для норм похідних та розв'язку спорідненої задачі Стєчкіна про найкраще наближення необмежених операторів лінійними обмеженими операторами. Результати розділу полягають в наступному.

Отримано нову точну мультиплікативну нерівність, що оцінює L_∞-норму дробової похідної в смислі Маршо функції, визначеної на напівосі невід'ємних чисел, через L_∞-норму самої функції та L_s-норму її похідної другого порядку. Одержані результати застосовано до розв'язання задачі про найкраще наближення оператора дробового диференціювання в смислі Маршо лінійними обмеженими операторами на класах функцій, які задаються обмеженням на похідну другого порядку. Розглянуто більш загальну ситуацію, коли друга похідна функцій належить ідеальній решітці.

Розв'язано задачу про найкраще наближення операторів диференціювання першого порядку та функціоналів диференціювання першого порядку в точці на класах функцій, визначених на скіченному відрізку, друга похідна яких належить одиничній кулі простору L_p. Ці результати поширені на простори Орліча, які узагальнюють одиничні кулі в простори L_p.

Побудовано оператори і функціонали найкращого наближення, відповідно, операторів диференціювання і функціоналів диференціювання в точці першого та другого порядків на класах функцій, визначених на скінченному відрізку, L_∞-норма третьої похідної яких обмежена одиницею.

Одержано нові точні нерівності типу Колмогорова для норм похідних абсолютно монотонних та кратно монотонних функцій, визначених на скінченному відрізку.

Ключові слова: найкраще наближення; найкраще несиметричне наближення; найкраще відновлення операторів; найкраще наближення необмежених операторів; поперечник за Колмогоровим; лінійний поперечник; відносні поперечники; трансфінітна інтерполяція; квадратурні формули; інтервальні квадратурні формули; лінійні сплайни; класи згорток; ядра, що не збільшують осциляцію;

нерівності для норм похідних; дробова похідна; класи функцій з заданою мажорантою модуля неперервності.

Skorokhodov D. S. Optimal recovery of operators and functionals and related extremal problems of Approximation Theory. – The Manuscript.

Thesis for the Doctor Degree in Physical and Mathematical Sciences in Speciality 01.01.01 – Mathematical Analysis (111 – Mathematics). – Oles Honchar Dnipro National University of Ministry of Education and Science of Ukraine, Dnipro, Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to investigation of classical problems in Approximation Theory on calculating the widths of functional classes, optimization of quadrature formulas on classes of univariate and multivariate functions, the best approximation of multivariate functions by splines, the best recovery of operators and functionals, obtaining sharp Kolmogorov type inequalities for the norms of derivatives of integral and fractional order.

In the first chapter of the thesis we consider the problem of finding linear widths of classes $H^\omega([0,1])$ of functions defined on the interval $[0,1]$ and having given majorant ω for its modulus of continuity in the space of continuous functions. Kolmogorov widths of these functional classes were found in 1960-1970's but exact values of corresponding linear widths remain unknown. As a result of conducted investigations, we find exact values of the first order linear widths of classes $H^\omega([0,1])$ and their periodic analogues in the space of continuous functions. This allowed us to establish new upper estimates for the high order linear widths of classes $H^\omega([0,1])$ that improve known estimates. Also, we show that such upper estimates are sharp on a wide class of linear methods, namely, positive minihedral methods. To this end we define and calculate a new approximative characteristic that is close to relative widths.

In the second chapter we consider the problem of finding optimal quadrature formulas on classes of univariate and multivariate functions. In 1980's it was proved that the rectangle formula is the best point quadrature formula on convolution classes $K * F$ of variation diminishing kernels K with rearrangement invariant sets F of periodic functions. Convolution classes generalize many functional classes that are important in Approximation Theory, for example, Sobolev classes. Hence, consideration of convolution classes allowed significantly enrich a series of functional classes on which rectangle formula is the optimal one. In this chapter we extend the results on optimization of point quadrature formulas onto the problem of finding the best interval quadrature formula on convolution classes $K * F$. In particular, we prove optimality of interval rectangle formula that is the formula with equal coefficients and equidistant centers of node intervals on convolution classes. The key part in establishing this result is played by the new variation diminishing property of the Steklov kernel on a narrow class of functions that can be represented as the difference of asymmetric perfect splines of zero order. This property allowed to prove new inequalities for rearrangements of averaged monosplines and the best asymmetric approximations of averaged asymmetric perfect splines by constant functions.

In addition, we solve the problem of finding the best quadrature formula that uses as information about the integrand function its averages over intersections of domain of definition with hyperplanes of given dimension on the classes of multivariate functions defined by the majorant for its modulus of continuity or the limitations on the norms of partial derivatives.

In the third chapter we study the problem of finding the asymptotic behavior of the best approximation of multivariate functions by splines. The main result of this chapter consists in establishing the sharp asymptotic behavior of the error of the best nonlinear approximation of convex bivariate functions by linear continuous splines in terms of the number of elements of triangulations. Together with the regular approximations we consider (α, β)-asymetric approximations that allows us to study a wide class of problems from a common viewpoint including symmetric and one-sided approximations. An important step in finding the sharp asymptotics of the best nonlinear approximation of convex functions by linear splines was in solving the extremal problem of the best asymmetric approximation of canonical positive definite quadratic form by linear functions on simplices.

Also, in the third chapter we consider the problem of transfinite interpolation of multivariate functions by harmonic splines. We find the sharp order of asymptotic behavior of the best transfinite interpolation on the class $W_\infty^\Delta(\Omega)$ in L_q-metric and on the classes $W_p^\Delta(\Omega)$ in L_1-metric by harmonic splines and establish that this order does not depend on the dimensionality of the space where the functions are defined.

In the fourth chapter we investigate the problem of optimal recovery of operators given exact or non-exact information. As a result of investigations we find the error of optimal recovery of identity operator on the class $W_\infty^2(G)$ of multivariate functions defined on a convex body G and having uniformly bounded second order directional derivatives given exact information on the values of functions and its gradients in a fixed system of points. Also, we solve the problem of optimal recovery of integral operators with non-negative kernel and sums of such operators on the classes of functions defined on compacts of metric spaces and having a given majorant for its modulus of continuity given non-exact information on the values of functions in a fixed finite system of points. The obtained results can be used for a construction of practical algorithms of the best recovery of solutions to boundary value problems for partial differential equations, integral and differential equations.

The fifth chapter is devoted to establishing sharp Kolmogorov type inequalities for the norms of derivatives and solving the related Stechkin problem of the best approximation of operators by linear bounded ones. We obtain the following results.

We find a new sharp multiplicative inequality that estimates L_∞-norm of the Marchaud fractional derivative of a function defined on the non-negative halfline in terms of L_∞-norm of the function itself and L_s-norm of the second order function derivative. We apply these results to solve the problem of the best approximation of the Marchaud fractional differentiation operator by linear bounded operators on the classes of functions having the L_s-norm of the second order derivative bounded by one. Also, we consider more general situation when the second order derivative belongs to the ideal lattice.

We solve the problem of the best approximation of first order differentiation operator and first order point differentiation functionals on the classes of functions defined on a finite interval and whose second order derivative belongs to the unit ball in the space L_p. We extend these results onto the Orlicz spaces that generalize the L_p spaces.

We construct operators and functionals of the best approximation of differentiation operators and point differentiation functionals, respectively, of the first and second orders on the classes of functions defined on a finite interval whose third order derivative has L_∞-norm bounded by one.

We obtain new sharp Kolmogorov type inequalities for the norms of derivatives of absolutely monotone and multiply monotone functions defined on a finite interval.

Keywords: the best approximation; the best asymmetric approximation; the best recovery of operators; the best approximation of unbounded operator; Kolmogorov width; linear width; relative widths; transfinite interpolation; quadrature formulas; interval quadrature formulas; linear splines; convolution classes; variation diminishing kernels; inequalities for the norms of derivatives; fractional derivative; the class with given majorant for the modulus of continuity.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. On one extremal property of a regular simplex / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, D. Skorokhodov // Commun. Anal. Geom. – 2009. – V. 17, №4. – P. 685–699.
2. Exact asymptotics of the optimal L_p-error of asymmetric linear spline approximation / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, D. Skorokhodov // Jaen J. Approx. – 2014. – V. 6, №1. – P. 1–36.
3. Kuzmenko D. Optimization of transfinite interpolation of functions with bounded Laplacian by harmonic splines on box partitions / D. Kuzmenko, D. Skorokhodov // J. Approx. Theory. – 2016. – V. 209, №9. – P. 44–57.
4. Babenko V. On the best interval quadrature formulae for classes of differentiable periodic functions / V. Babenko, D. Skorokhodov // J. Complexity. – 2007. – V. 23, №.4-6. – P. 890–917.
5. Бабенко В.Ф. Об оптимизации интервальных квадратурных формул / В. Ф. Бабенко, Д. С. Скороходов // Вісн. Дн-ського. ун-ту., Сер. Матем. – 2007. – Т. 8, №12. – С. 261–267.
6. Babenko V. On the best interval quadrature formulae for convolution classes / V. Babenko, D. Skorokhodov // East J. Approx. – 2008. V. 14, №3. – P. 353–376.
7. Скороходов Д.С. О существовании обобщенного несимметричного (α, β)-сплайна, усреднения которого принимают равные минимумы в заданных точках / Д. С. Скороходов // Укр. матем. журн. – 2009. – Т. 61, №2. – С 261–267.
8. Babenko V. F. Construction of optimal cubature formulas related to computer tomography / V. F. Babenko, S. V. Borodachov, D. S. Skorokhodov // Constr. Approx. – 2011. – V. 33, №3. – P. 313–330.
9. Babenko V. F. Optimal cubature formulas related to tomography for certain classes of functions defined on a cube / V. F. Babenko, S. V. Borodachov, D. S. Skorokhodov // Jaen J. Approx. – 2011. – V. 3, №2. – P. 143–160.
10. Babenko V. F. Optimal cubature formulas for tensor products of certain classes of functions / V. F. Babenko, S. V. Borodachov, D. S. Skorokhodov // J. Complexity. – 2011. – V. 27, №6. – P. 519–530.

11. Скороходов Д. С. О наилучшем приближении классов Гельдера линейными методами / Д. С. Скороходов // Доп. НАНУ. – 2014. – Т 8. – С. 41–47.
12. Скороходов Д. С. О наилучшем линейном методе приближения классов Гельдера / Д. С. Скороходов // Укр. матем. журн. – 2015. – Т. 67, №9. – С. 1265–1284.
13. Optimal recovery of integral operators and its applications / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, D. Skorokhodov // J. Complexity. – 2016. – V. 35, №8. – P. 102–123.
14. Babenko V. F. Optimal recovery of isotropic classes of twice-differentiable multivariate functions / V. F. Babenko, S. V. Borodachov, D. S. Skorokhodov // J. Complexity. – 2010. – V. 26, №6. – P. 591–607.
15. Бабенко Ю. В. Задачи Колмогорова и Стечкина для классов функций, вторая производная которых принадлежит пространству Орлича / Ю. В. Бабенко, Д. С. Скороходов // Матем. заметки. – 2012. – Т. 91, №2. – С. 172–183.
16. Babenko Yu. Stechkin's Problem for Differential Operators and Functionals of First and Second Order / Yu. Babenko, D. Skorokhodov // J. Approx. Theory. – 2013. – V. 167, №3. – P. 173–200.
17. Kolmogorov type inequalities for the Marchaud fractional derivatives on the real line and the half-line [Електронний ресурс] / V. F. Babenko, M. S. Churilova, N. V. Parfinovych, D. S. Skorokhodov // J. Ineq. Appl. – 2014. – V. 2014, №1. – P. 1–31. – Режим доступу до ресурсу: https://link.springer.com/article/10.1186/1029-242X-2014-504.
18. Skorokhodov D. On inequalities for the norms of intermediate derivatices of multiply monotone functions defined on a finite segment / D. Skorokhodov // Укр. матем. журн. – 2012. – Т. 64, №4. – С. 508–524.
19. Скороходов Д. С. О неравенствах типа Колмогорова для классов кратно монотонных на конечном отрезке фунций / Д. С. Скороходов // Вісн. Дн-ського. ун-ту., Сер. Матем. – 2010. – Т. 6, №15. – С. 156–161.
20. Скороходов Д. С. Задача Ландау-Колмогорова на отрезке для класса абсолютно-монотонных функций / Д. С. Скороходов // Укр. матем. журн. – 2011. – Т. 63, №4. – С. 531–548.

21. Skorokhodov D. The order of the best transfinite interpolation of functions with bounded laplacian with the help of harmonic splines on box partitions / D. Skorokhodov // Вісн. Дн-ського. ун-ту., Сер. Матем. – 2018. – Т. 26. – С. 82–88.

22. Babenko V. Best interval quadrature formulae for convolution classes / V. Babenko, D. Skorokhodov // Twelfth International Conference in Approximation Theory : міжнар. наук. конф., 4–8 березня 2007 р. : тези допов. – Сан Антоніо, 2007. – С. 48–49.

23. Babenko V. F. Optimal interval quadrature formulae for classes of differentiable periodic functions / V. F. Babenko, D. S. Skorokhodov // Extremal Problems in Complex and Real Analysis : міжнар. наук. конф., 22–26 травня 2007 р. : тези допов. – М., 2007. – С. 9.

24. Babenko V. On linear approximation of quadratic functions of two variables in L_p-metric and applications / V. Babenko, Yu. Babenko, D. Skorokhodov // Tenth SIAM Conference on Geometric Design and Computing : міжнар. наук. конф., 4–8 листопада 2007 р. : тези допов. – Сан Антоніо, 2007. – С. 42.

25. Бабенко В. Ф. Точная асимптотика L_p-погрешности оптимального кусочно-линейного интерполирования функций класса C^2 / В. Ф. Бабенко, Ю. В. Бабенко, Д. С. Скороходов // Современные проблемы теории функций и их приложения : міжнар. наук. конф., 28 січня – 4 лютого 2008 р. : тези допов. – Саратов, 2008. – С. 16–17.

26. Бабенко В. Ф. Асимптотически оптимальное L_p-приближение выпуклых на квадрате функций / В. Ф. Бабенко, Ю. В. Бабенко, Д. С. Скороходов // Проблеми математичного моделювання : міждерж. наук.-метод. конф., 28–30 травня 2008 р. : тези допов. – Дніпродзержинськ, 2008. – С. 13–14.

27. Бабенко В. Ф. Об интервальных квадратурных формулах на некоторых классах периодических функций / В. Ф. Бабенко, Д. С. Скороходов // Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування : міжнар. наук. конф., 16 – 21 червня 2008 р. : тези допов. – Мелітопіль, 2008. – С. 14.

28. Babenko V. On the weighted interval quadrature formulae on some classes of periodic functions / V. Babenko, D. Skorokhodov // Harmonic Analysis and

Approximations, IV : міжнар. наук. конф., 19–26 вересня 2008 р. : тези допов. – Цахкадзор, 2008. – С. 117–118.

29. To one additional extremal property of regular simplex / V. F. Babenko, Yu. V. Babenko, N. V. Parfinovych, D. S. Skorokhodov // Wavelets and Applications : міжнар. наук. конф., 14–20 червня 2009 р. : тези допов. – С.-Пб., 2009. – С. 5–6.
30. Exact asymptotics of the optimal L_p-error of asymmetric linear spline approximation / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, D. Skorokhodov // Wavelets and Applications : міжнар. наук. конф., 14–20 червня 2009 р. : тези допов. – С.-Пб., 2009. – С. 6–7.
31. Babenko V. F. Optimal cubature formulas for tensor products of certain classes of functions / V. F. Babenko, S. V. Borodachov, D. S. Skorokhodov // Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III : міжнар. наук. конф., 22–26 серпня 2009 р. : тези допов. – К., 2009. – С. 19.
32. Exact asymptotics of the best asymmetric piecewise-linear approximation of functions with positive Hessian / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, D. Skorokhodov // Thirteenth International Conference in Approximation Theory : міжнар. наук. конф., 7–10 березня 2010 р. : тези допов. – Сан Антоніо, 2010. – С. 38.
33. On one extremal property of a regular simplex and its applications to adaptive mesh generation / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, D. Skorokhodov // Optimal Configurations on the Sphere and Other Manifolds : міжнар. наук. конф., 17–20 травня 2010 р. : тези допов. – Нешвіл, 2010. – С. 2.
34. Babenko V. Optimal recovery of certain classes of smooth multivariate functions / V. Babenko, S. Borodachov, D. Skorokhodov // Optimal Configurations on the Sphere and Other Manifolds : міжнар. наук. конф., 17–20 травня 2010 р. : тези допов. – Нешвіл, 2010. – С. 5.
35. Babenko V. Optimal recovery of certain classes of multivariate functions / V. Babenko, S. Borodachov, D. Skorokhodov // Approximation Theory and Applications : міжнар. наук. конф., 14–17 червня 2010 р. : тези допов. – Дн-ськ., 2010. – С. 8–9.

36. Skorokhodov D. S. Exact values of one-dimensional linear widths of the classes of functions with given majorant for the modulus of continuity / D. S. Skorokhodov // International Conference in Modern Analysis : міжнар. наук. конф., 20–23 червня 2011 р. : тези допов. – Донецьк, 2011. – С. 102.
37. О неравенствах типа Ландау-Колмогорова для дробных производных функций, заданных на оси и полуоси / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, Д. С. Скороходов, М. С. Чурилова // Теорія наближення функцій та її застосування : міжнар. наук. конф., 28 травня – 3 червня 2012 р. : тези допов. – Київ, 2012. – С. 18.
38. Скороходов Д. С. Точные неравенства для производных функций малой гладкости, заданных на конечном отрезке / Д. С. Скороходов // Теорія наближення функцій та її застосування : міжнар. наук. конф., 28 травня – 3 червня 2012 р. : тези допов. – Київ, 2012. – С. 99–100.
39. Sharp inequalities of Kolmogorov type for the Marchaud fractional derivatives of functions of low smoothness / V. Babenko, M. Churilova, N. Parfinovych, D. Skorokhodov // International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach : міжнар. наук. конф., 17–21 вересня 2012 р. : тези допов. – Львів, 2012. – С. 67.
40. Exact asymptotics of best adaptive asymmetric approximation of bivariate convex functions by piecewise-linear splines / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, D. Skorokhodov // Fourteenth International Conference in Approximation Theory : міжнар. наук. конф., 7–10 квітня 2013 р. : тези допов. – Сан Антоніо, 2013. – С. 44.
41. Skorokhodov D. On the best approximation of functions from Hölder classes by a subset of linear finite-rank positive methods / D. Skorokhodov // Kangro-100: Methods of Analysis and Algebra : міжнар. наук. конф., 1–6 вересня 2013 р. : тези допов. – Тарту, 2013. – С. 125.
42. On the optimal recovery of solutions of PDEs based on information on initial and boundary values with error / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, D. Skorokhodov // Теорія наближень і її застосування : міжнар. наук. конф., 8–11 жовтня 2015 р. : тези допов. – Дн-ськ., 2015. – С. 5.

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень

$\forall$ – квантор загальності: “для кожного” або “для будь-якого”

$\exists$ – квантор існування “існує”

$\Rightarrow$ – операція імплікації

$:=$ – дорівнює за означенням

$x \in \Omega$ – елемент x належить множині Ω

$x \notin \Omega$ – елемент x не належить множині Ω

$A \cap B$ – перетин множин A та B

$A \cup B$ – об’єднання множин A та B

$A \subset B$ – множина A міститься в множині B

∂A – межа множини A

$\varnothing$ – порожня множина

$\#A$ – кількість елементів скінченної множини A

$\mathbb{R}$ – дійсна вісь

$\mathbb{R}_+$ – напіввісь дійсних додатних чисел

$\mathbb{R}_+^0$ – напіввісь дійсних невід’ємних чисел

$\mathbb{R}_-^0$ – напіввісь дійсних недодатних чисел

$\mathbb{T}$ – період довжини 2π

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел

$\mathbb{Z}_+$ – множина цілих невід’ємних чисел

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел

$\dim F$ – вимірність скінченновимірного лінійного простору F

$\overline{\operatorname{span} F}$ – замикання лінійної оболонки підмножини F лінійного простору

$\operatorname{rank} A$ – ранг лінійного оператора A

$\mathbb{R}^d$ – дійсний d-вимірний простір точок $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ з координатами $x_1, \ldots, x_d$

$\mu\Omega$ – міра вимірної за Лебегом множини $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$\mathbf{A}^t$ – прямокутна матриця, транспонована до матриці $\mathbf{A}$

$\det \mathbf{A}$ – визначник квадратної матриці $\mathbf{A}$

$\mathbf{A}^{-1}$ – матриця, обернена до квадратної матриці $\mathbf{A}$

$\sup\limits_{x \in \Omega} f(x)$ – точна верхня межа функції $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$\inf\limits_{x\in\Omega} f(x)$ – точна нижня межа функції $f:\Omega\to\mathbb{R}$

$\operatorname{esssup}\{f(x)\,:\,x\in\Omega\}$ – істотна верхня межа функції $f:\Omega\to\mathbb{R}$

$H(f;\cdot)$ – гесіан двічі диференційовної функції f

$\operatorname{sgn} z$ – знак числа $z\in\mathbb{R}$, тобто величина, що дорівнює 1, коли $z>0$, дорівнює -1, коли $z<0$, та дорівнює 0, коли $z=0$

$\nu(f)$ – число змін знаку функції f на періоді, якщо функція f є 2π-періодичною, або на відрізку $[0,1]$, якщо f визначена на $[0,1]$

$\omega(t)$ – модуль неперервності

$r(f,t)$ – незростаюче переставлення звуження 2π-періодичної функції f на період, або незростаюче переставлення функції $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

$f*g$ – згортка періодичних функцій f та g

∇f – градієнт функції f

$A\circ B$ – композиція операторів A та B

X^* – простір, спряжений до дійсного нормовного простору X

$C(\Omega)$ – простір неперервних функцій $f:\Omega\to\mathbb{R}$

H^ω – клас функцій, визначених на відрізку $[0,1]$, що мають заданий модуль неперервності ω

ℓ_p – простір $\mathbb{R}^d$ з метрикою $\|\cdot\|_p$

$H^\omega_p(G)$ – клас функцій, визначених на вимірній множині $G\subset\mathbb{R}^d$, заданих обмеженням ω на зростання функцій з класу відносно метрики ℓ_p

$L_p(G)$ $(1\leqslant p<\infty)$ – простір вимірних та інтегровних в степені p функцій $f:G\to\mathbb{R}$ з нормою $\|f\|_{L_p(G)}$

$L_\infty(G)$ – простір істотно обмежених функцій $f:G\to\mathbb{R}$ з нормою $\|f\|_{L_\infty(G)}$

$C^r(G)$ – множина r-кратно диференційовних функцій $f:G\to\mathbb{R}$

$L^r_p(G)$ $(G\subset\mathbb{R})$ – множина функцій $f:G\to\mathbb{R}$ таких, що $f^{(r-1)}$ є локально абсолютно неперервною на G та $f^{(r)}\in L_p(G)$

$L^r_{p,s}(G)$ $(G\subset\mathbb{R})$ – множина функцій $f\in L_p(G)\cap L^r_s(G)$

$W^r_{p,s}(G)$ $(G\subset\mathbb{R})$ – клас функцій $f\in L^r_{p,s}(G)$, для яких $\|f\|_{L_p(G)}\leqslant 1$,

$L^r_p(G)$ – множина функцій $f:G\to\mathbb{R}$ таких, що $f^{(r-1)}$ є локально абсолютно неперервною на вимірній множині $G\subset\mathbb{R}$ та $f^{(r)}\in L_p(G)$

Δ – оператор Лапласа в просторі $\mathbb{R}^d$

$L_p^{\Delta}(G)$ – множина функцій $f : G \to \mathbb{R}$ таких, що $\Delta f \in L_p(G)$

$W_p^{\Delta}(G)$ – клас функцій $f \in L_p^{\Delta}(G)$, для яких $\|\Delta f\|_{L_p(G)} \leqslant 1$

$\mathcal{T}_{2n-1}$ – простір тригонометричних поліномів степені не вище за $n-1$

$\mathcal{P}_r$ – простір алгебраїчних поліномів степені не вище за r

$\deg P$ – ступінь алгебраїчного полінома P

$E\,(f;F)_X$ – похибка найкращого наближення функції f підпростором F в метриці простору X

$E\,(\mathcal{M};F)_X$ – похибка найкращого наближення класу $\mathcal{M}$ підпростором F в метриці простору X

$d_N\,(\mathcal{M};X)$ – N-поперечник за Колмогоровим класу $\mathcal{M}$ в просторі X

$\lambda_N\,(\mathcal{M};X)$ – лінійний N-поперечник класу $\mathcal{M}$ в просторі X

$\mathcal{E}\,(\mathcal{M};\mathcal{Q})$ – похибка найкращого наближення інтегралів від функцій з класу $\mathcal{M}$ за допомогою множини лінійних функціоналів $\mathcal{Q}$

$\mathcal{E}_N\left(W_p^{\Delta}(G)\right)_s$ – похибка найкращої трансфінітної інтерполяції класу W_p^{Δ} гармонічними сплайнами на прямокутних розбиттях, що складаються не більш, ніж з N елементів, в нормі простору L_s

$\mathcal{E}_Y^*\,(A;W;I;U)$ – похибка найкращого відновлення оператора A на класі W за інформацією I, що задана з похибкою U, в метриці простору Y

$\Omega(\delta;T;W)$ – модуль неперервності оператора T на класі W

$U(T,S;W)$ – похибка наближення оператора T оператором S на множині W

$E_N(T;W)$ – похибка найкращого наближення оператора T лінійними обмеженими операторами, норма яких не перевищує N, на класі W

ВСТУП

Актуальність теми. Центральне місце в теорії апроксимації посідає задача найкращого наближення функціональних класів різноманітними наближуючими апаратами. Для оцінювання міри апроксимативних можливостей функціональних класів А. М. Колмогоров у 1936 р. запропонував дослідження поперечників та отримав перші точні результати щодо їх обчислення.

В подальшому задача про знаходження поперечників за Колмогоровим вивчалася У. Рудіним, С.Б. Стєчкіним, а також В.М. Тихомировим, який розробив потужний метод отримання точних оцінок знизу поперечників, що спирається на топологічну теорему К. Борсука. Численні узагальнення методу були застосовані В. М. Тихомировим, Ю. М. Суботіним, Ю. І. Маковозом, М. П. Корнєйчуком, В. П. Моторним, В. І. Рубаном, А. О. Лігуном, А. Пінкусом та ін. для обчислення поперечників за Колмогоровим цілого ряду класів функцій.

Певні задачі потребують більш специфічної структури наближуючих апаратів, що спонукало до запровадження й інших апроксимативних характеристик. В. М. Тихомиров запропонував дослідження лінійного поперечника. Проте, незважаючи на численні дослідження, на сьогодні не створено загальних методів отримання точних оцінок знизу лінійних поперечників, які б суттєво використовували лінійність наближуючих методів. Натомість, в більшості випадків, в яких були знайдені точні значення лінійних поперечників, вдалося побудувати лінійний метод, який виявився найкращим. Але для деяких класичних функціональних множин і, зокрема, для класів H^ω, відомо, що лінійні методи наближення не є найкращими. Тому задача про обчислення точних значень лінійних поперечників таких класів функцій залишається відкритою.

Збагачення та ускладнення області застосувань теорії наближення сприяло узагальненню постановок задач теорії апроксимації, що дозволило розглядати їх з єдиної точки зору. Одним з найбільш важливих таких узагальнень є задача найкращого відновлення операторів. Хоча близькі задачі виникають ще в середині XX ст. в роботах А. М. Колмогорова, А. Сарда, С. М. Нікольського, Дж. Кіфера та ін., задача найкращого відновлення операторів починає досліджуватися як окремий клас задач в теорії апроксимації та теорії інформаційної складності в 1970-х рр. С. А. Смоляком, М. С. Бахваловим, О. Г. Марчуком, К. Ю. Осипенком, М. Голомбом, С. А. Мічелі, Т. Дж. Рівліном, А. А. Мелкманом. Вагомий внесок в дослідження цієї задачі належить Дж. Ф. Траубу, Х. Вожняковському, Е. Новаку, А. Г. Вершульцу, Л. Пласкоті, Г. В. Васільковському, О. А. Женсикбаєву та багатьом іншим математикам. Незважаючи на отримані ними результати, задачі найкращого відновлення тотожних операторів на класах гладких функцій багатьох змінних розв'язані лише в виключних випадках.

Задача оптимізації квадратурних формул виступає важливою конкретизацією задачі найкращого відновлення операторів в чисельному аналізі. Перші її постановки в смислі відшукання квадратурних формул найвищої алгебраїчної точності були сформульовані ще в 1804 р. К. Ф. Гаусом. Виходячи з ідей теорії апроксимації, А. М. Колмогоров запропонував іншу постановку задачі оптимізації квадратур, що полягає в знаходженні квадратурних формул з найменшою можливою похибкою на функціональних класах. С. М. Нікольський, Т. Н. Бусарова, М. П. Корнєйчук, В. П. Моторний, А. О. Лігун, О. А. Женсикбаєв довели оптимальність формули з рівновіддаленими вузлами та рівними коефіцієнтами – формули прямокутників – на періодичних класах Соболєва $W_p^r(\mathbb{T})$. К. І. Осколков, М. Чахкієв, В. Ф. Бабенко, Т. А. Гранкіна та Нгуєн Тхі Т. Х. поширили ці результати на класи згорток ядер, що не збільшують осциляцію, з довільними множинами.

Важливими для наближеного обчислення інтегралів є також квадратурні формули за іншими типами інформації, наприклад, інтервальні квадратурні формули, які використовують в якості інформації про підінтегральну функцію її усереднення вздовж малих інтервалів області визначення.

Задачі оптимізації інтервальних квадратур виявилися суттєво складнішими за задачі оптимізації точкових квадратурних формул. Оптимальність інтервального аналогу формули прямокутників була встановлена лише на окремих класах періодичних функцій В. Ф. Бабенком, В П. Моторним, С. В. Бородачовим, Е. В. Дерец. Тому відкритою була гіпотеза про оптимальність інтервальної формули прямокутників на класах згорток ядер, що не збільшують осциляцію.

Сплайни є одним з найбільш важливих апаратів теорії наближення та знаходять численні застосування в різноманітних областях знань. Починаючи з роботи М. Ш. Бірмана і М. З. Соломяка, активного розвитку набувають дослідження нелінійних наближень функцій сплайнами, а на початку 1980-х рр. виокремлюється напрям, пов'язаний зі встановленням точної асимптотики нелінійних наближень. Попри чималу кількість результатів, відритим тут залишається, навіть, питання про точну асимптотичну поведінку найкращого нелінійного наближення функцій багатьох змінних лінійними сплайнами.

Серед екстремальних задач теорії наближення чільне місце посідають нерівності для норм похідних, які вперше виникають на початку XX ст. в роботах А. Кнезера, Ж. Адамара, Г. Г. Харді, Дж. І. Літлвуда, Е. Ландау. Такі нерівності називаються нерівностями типу Колмогорова завдяки видатному внеску А. М. Колмогорова в їх дослідження. Точні нерівності типу Колмогорова становлять особливий інтерес, оскільки саме вони та методи їх доведення знаходять найбільше застосувань.

Завдяки зусиллям Е. Ландау, Ч. К. Чуї, А. Пінкуса, С. Карліна, О. І. Звягінцева, М. Сато, О. Ю. Шадріна, В. Ф. Бабенка, А. О. Лігуна, В. О. Кофанова, В. І. Бурєнкова, Б. Д. Боянова, Н. Найденова, Ю. В. Бабенко та ін. відомо багато точних нерівностей типу Колмогорова як для довільних функцій, так і для спеціальних класів функцій, визначених на скінченному відрізку. Але переважна більшість таких нерівностей отримана для функцій малої гладкості. Отже, задача про знаходження точних нерівностей типу Колмогорова для функцій, визначених на скінченному відрізку, потребує подальшого вивчення. Становить інтерес і дослідження споріднених задач, зокрема, задачі про найкраще наближення операторів диференціювання лінійними обмеженими операторами.

Разом з похідними цілого порядку в ряді питань аналізу, теорії диференціальних рівнянь та їх застосуваннях виникає необхідність в дослідженні похідних дробового порядку. Це зумовлює інтерес до задачі про знаходження точних нерівностей типу Колмогорова й для дробових похідних функцій.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась згідно з загальними планами досліджень кафедри математичного аналізу та кафедри математичного аналізу і теорії функцій Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара, а також згідно з держбюджетними темами №1-147-07 "Оптимізація методів відновлення математичних об'єктів за неповною інформацією", № державної реєстрації 0107U000523; №1-221-10 "Оптимальне відновлення операторів на класах функцій однієї та багатьох змінних", № державної реєстрації 0110U001282; №1-326-17 "Екстремальні проблеми теорії наближень функцій дійсного змінного і нерівності типу Колмогорова", № державної реєстрації 0117U001208, і з науково-дослідною темою ММФ-78-13 "Нерівності для похідних і екстремальні задачі в різних нормованих просторах", № державної реєстрації 0114U000193.

Мета і завдання дослідження. Основною *метою дисертаційного дослідження* є одержання нових результатів щодо розв'язку задач найкращого відновлення операторів і функціоналів та щодо встановлення точної асимптотики найкращого нелінійного наближення функцій багатьох змінних сплайнами, знаходження точних нерівностей для норм похідних функцій, визначених на дійсній напівосі або скінченному відрізку, і розв'язання споріднених екстремальних задач теорії наближення.

Об'єктом дослідження є класи функцій однієї та багатьох дійсних змінних, серед яких класи опуклих функцій, класи функцій, заданих обмеженням на норму лапласіана, на норми похідних старшого порядку або модуль неперервності, класи згорток ядер, що не збільшують осциляцію, з переставно інваріантними множинами; лінійні функціонали та оператори, що діють в нормовних просторах, серед яких функціонали інтегрування, функціонали і оператори диференціювання, інтегральні оператори.

Предметом дослідження є лінійні та лінійні відносні поперечники класів функцій з заданою мажорантою модуля неперервності, в просторі неперервних функцій однієї змінної; найкращі інтервальні квадратурні формули на класах періодичних функцій та найкращі квадратурні формули інших типів на класах функцій багатьох змінних; лінійні сплайни найкращого нелінійного наближення опуклих функцій двох змінних і гармонічні сплайни найкращого наближення класів функцій багатьох змінних з обмеженим лапласіаном; найкращі методи відновлення класів гладких функцій багатьох змінних та інтегральних операторів на класах багатьох змінних функцій за точно або неточно заданою інформацією про елементи з класів; непокращувані нерівності для норм похідних функцій, визначених на дійсній напівосі або скінченному відрізку; задача про найкраще наближення операторів диференціювання лінійними обмеженими операторами.

Завдання дослідження:

- Встановити нові оцінки зверху лінійних поперечників класів $H^{\omega}([0,1])$ і $\widetilde{H}^{\omega}([0,1])$ в просторі неперервних функцій, які покращують відомі оцінки та є точними на широких класах лінійних методів наближення. Застосувати отримані оцінки для обчислення одновимірних лінійних поперечників вказаних функціональних класів.
- Перевірити гіпотезу про оптимальність інтервальної формули прямокутників серед всеможливих інтервальних квадратур на класі згорток ядер, що не збільшують осциляцію, з переставно інваріантними множинами періодичних функцій.
- Знайти найкращі квадратурні формули, що використовують в якості інформації про підінтегральну функцію її усереднення вздовж перетинів області визначення з гіперплощинами, на класах функцій багатьох змінних, заданих обмеженням на модуль неперервності або частинні похідні.
- Отримати точну асимптотику найкращого несиметричного нелінійного наближення опуклих двічі неперервно диференційовних функцій двох змінних в нормі простору L_p лінійними неперервними сплайнами на тріангуляціях, коли число елементів тріангуляцій прямує до нескінченності, та побудувати асимптотично оптимальні послідовності тріангуляцій і лінійних неперервних сплайнів на них.
- Знайти форму d-вимірного симплекса одиничного об'єму, на якому мінімізується похибка найкращого несиметричного наближення квадратичної форми $x_1^2+\ldots+x_d^2$ лінійними функціями в нормі простору L_p.
- Встановити точний порядок найкращого наближення класів $W_s^{\Delta}(\Pi)$ функцій, визначених на d-вимірному прямокутному паралелепіпеді Π, в метриці простору L_q за допомогою гармонічних сплайнів на прямокутних

розбиттях на Π в термінах кількості елементів розбиттів.

- Одержати точне значення похибки найкращого відновлення класу функцій багатьох змінних з обмеженою узагальненою похідною другого порядку за довільним напрямком в нормі простору L_∞ за інформацією про значення функцій з класу та їх градієнтів в заданій скінченній системі точок.
- Розв'язати задачу найкращого відновлення інтегральних операторів з невід'ємним ядром та їх сум на класах $H^\omega(M')$ функцій, визначених на компакті M' метричного простору, за неточно заданою інформацією про значення функцій з класу в заданій скінченній системі точок.
- Одержати нові точні нерівності типу Колмогорова для норм дробових похідних в смислі Маршо функцій, визначених на напівосі невід'ємних чисел. Застосувати отримані результати до розв'язання задачі Стєчкіна про найкраще наближення оператору диференціювання в смислі Маршо.
- Розв'язати задачу про найкраще наближення операторів диференціювання і функціоналів диференціювання в точці лінійними обмеженими операторами на класах $W^3_\infty([0,1])$ та $W^{2,*}_N([0,1])$.
- Встановити нові точні нерівності типу Колмогорова для норм похідних абсолютно і кратно монотонних функцій, визначених на скінченному відрізку числової прямої.

Методи дослідження. В роботі використовуються сучасні методи теорії функцій, функціонального аналізу, теорії наближення та теорії інформаційної складності, загальні методи розв'язання екстремальних задач теорії наближення, методи нелінійної апроксимації функцій багатьох змінних, методи оцінювання найкращого наближення необмежених операторів лінійними обмеженими.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у наступному.

1) Встановлено нові оцінки зверху лінійних поперечників класів $H^\omega([0,1])$ і $\widetilde{H}^\omega([0,1])$ в просторі неперервних функцій, які покращують раніше відомі оцінки. Описано широкий клас лінійних позитивних методів, на якому отримані оцінки є точними. Обчислено точне значення лінійних одновимірних поперечників вказаних функціональних класів.

2) Доведено оптимальність інтервальної формули прямокутників серед всіх можливих інтервальних квадратур на класах згорток ядер, що не збільшують осциляцію, з переставно інваріантними множинами періодичних функцій.
3) Знайдено найкращі квадратурні формули серед всеможливих квадратур, що використовують в якості інформації про підінтегральну функцію її усереднення вздовж перетинів області визначення гіперплощинами вимірності $k = d - 1$, на класах функцій, заданих обмеженнями на модуль неперервності або на частинні похідні старшого порядку. У випадку $1 \leqslant k < d - 1$ побудовано асимптотично найкращі послідовності квадратур на класах функцій з заданим модулем неперервності.
4) Встановлено точну асимптотику найкращого несиметричного нелінійного наближення опуклих двічі неперервно диференційовних функцій двох змінних в нормі простору L_p лінійними сплайнами на тріангуляціях їх області визначення в термінах числа елементів тріангуляцій. Запропоновано алгоритм побудови асимптотично оптимальної послідовності тріангуляцій і лінійних неперервних сплайнів на них.
5) Показано, що правильний d-вимірний симплекс мінімізує похибку найкращого несиметричного наближення квадратичної форми $x_1^2 + \ldots + x_d^2$ лінійними функціями в нормі простору L_p на симплексах одиничного об'єму.
6) Встановлено точний порядок величини найкращого наближення класів $W_s^{\Delta}(\Pi)$ функцій, визначених на d-вимірному паралелепіпеді Π, в нормі простору L_∞ за допомогою гармонічних сплайнів на прямокутних розбиттях на Π в термінах кількості елементів розбиттів.
7) Знайдено похибку найкращого відновлення класу функцій багатьох змінних, визначених на опуклому тілі, з обмеженою узагальненою похідною другого порядку за довільним напрямком в нормі простору L_∞ за значеннями функцій з класу та їх градієнтів в заданій скінченній системі точок.
8) Розв'язано задачу найкращого відновлення інтегральних операторів з невід'ємним ядром та їх сум на класах $H^\omega(M')$ функцій, визначених на компакті M' метричного простору, за неточно заданою інформацією про значення функцій з класу в заданій скінченній системі точок та побудова-

но найкращі методи відновлення у відповідній задачі.

9) Одержано нові точні нерівності типу Колмогорова, що оцінюють L_∞-норму дробової похідної в смислі Маршо порядку $k \in (0, 2 - 1/s) \setminus \{1\}$ функцій, визначених на напівосі невід'ємних чисел $\mathbb{R}_+^0$, в термінах L_∞-норми самої функції та L_s-норми її другої похідної, $1 \leqslant s < \infty$. Розв'язана споріднена задача Стєчкіна про найкраще наближення оператору D_-^k диференціювання в смислі Маршо на класі $W_{\infty,s}^2\left(\mathbb{R}_+^0\right)$.
10) Розв'язано задачу про найкраще наближення операторів диференціювання і функціоналів диференціювання в точці першого та другого порядків лінійними обмеженими операторами на класах $W_\infty^3([0,1])$ та $W_N^{2,*}([0,1])$.
11) Отримано нові точні нерівності типу Колмогорова для норм похідних абсолютно монотонних і кратно монотонних функцій, визначених на скінченному відрізку числової прямої.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота містить математичні дослідження, що мають теоретичний характер. Отримані результати в значній мірі доповнюють важливі розділи сучасної теорії наближення, а розроблені методи можуть знайти застосування у подальших дослідженнях екстремальних задач теорії апроксимації: задач найкращого відновлення операторів і функціоналів, задач найкращого наближення функцій сплайнами, задач обчислення точних значень апроксимативних характеристик функціональних класів, задач знаходження точних нерівностей для норм похідних і споріднених задач, тощо.

Особистий внесок здобувача. Визначення теми досліджень та її основних напрямів належить професору В. Ф. Бабенку. Результати дисертаційної роботи опубліковані в 7-ми статтях за одноосібного авторства здобувача та в 15-ти – у співавторстві. В працях, що опубліковані у співавторстві, здобувачеві належить: в [202, 34, 203] – доведення властивості ядра Стєклова не збільшувати осциляцію різниць несиметричних ідеальних сплайнів нульового порядку за певних додаткових умов і поширення методу, розробленого В. Ф. Бабенком в [185], для доведення оптимальності інтервальної формули прямокутників на класах згорток ядер, що не збільшують осциляцію, з переставно інваріантними множинами періодичних функцій; в [197] – результати щодо оптимізації квадратурних формул за усередненнями підінтегральної функції вздовж перетинів її області визначення гіперплощинами ковимірності 2, паралельними координатним гіперплощинам; в [199] – встановлення точної асимптотики похибки найкращої квадратурної формули за усередненнями підінтегральної функції вздовж перетинів її області визначення гіперплощинами ковимірності k, $1 \leqslant k \leqslant d-1$, паралельними координатним гіперплощинам; в [198] – результати щодо оптимізації на класах функцій з заданою мажорантою модуля неперервності та на класах періодичних функції, заданих обмеженням на частинні похідні, квадратурних формул за усередненнями підінтегральної функції вздовж перетинів її області визначення гіперплощинами ковимірності 1, паралельними координатним гіперплощинам; в [189] – доведення основної теореми у випадку $d \geqslant 4$; в [190] – доведення точної оцінки знизу асимптотики похибки найкращого нелінійного наближення опуклих функцій лінійними неперервними сплайнами та метод побудови асимптотично оптимальної послідовності тріангуляцій та сплайнів; в [280] – доведення оцінки зверху величини найкращого наближення функцій з обмеженим лапласіаном гармонічними сплайнами на прямокутних розбиттях та ідея доведення точності цієї оцінки в одному частинному випадку; в [196] – результати щодо найкращого відновлення функцій багатьох змінних з обмеженою в нормі простору L_∞ узагальненою похідною другого порядку у майже всіх напрямках за значеннями функцій та їх градієнтів; в [191] – результати щодо найкращого відновлення інтегральних операторів з невід'ємними ядрами та їх сум на класах функцій з заданою мажорантою модуля неперервності за неточно заданою інформацією про значення функцій з класу в заданій скінченній системі точок; в [40, 208] – доведення основних результатів робіт; в [200] – доведення точних нерівностей типу Колмогорова для норм похідних в смислі Маршо функцій, визначених на напівосі невід'ємних чисел.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на:

– Міжнародних конференціях з теорії наближення (04–08.03.2007, 07–10.03.2010, 07–10.04.2013, Сан Антоніо, США);

– Міжнародній конференції "Екстремальні проблеми в комплексному та дійсному аналізі” (22–26.05.2007, Москва, Росія);

– Міжнародній конференції з геометричного моделювання і обчислень (04–08.11.2007, Сан Антоніо, США);

– Міждержавній науково-методичній конференції “Проблеми математичного моделювання” (28–30.05.2008, Дніпродзержинськ, Україна);

– Міжнародній конференції “Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування”, присвяченій 70-річчю з дня народження академіка А. М. Самойленка (16–21.06.2008, Мелітополь, Україна);

– Міжнародній конференції з гармонічного аналізу та наближень, IV, присвяченій 80-річчю академіка А. Талаляна (19–26.09.2008, Цахкадзор, Вірменія);

– Міжнародній конференції “Вейвлети та застосування” (14–20.06.2009, Санкт-Петербург, Росія);

– Міжнародній конференції “Теорія наближень та її застосування”, присвяченій 80-річчю з дня народження М. П. Корнєйчука (14–17.06.2010, Дніпропетровськ, Україна);

– Міжнародній конференції з сучасного аналізу (20–23.06.2011, Донецьк, Україна);

– Міжнародній конференції Банах-120, присвяченій 120-річчю Стефана Банаха (17–21.09.2012, Львів, Україна);

– Міжнародній конференції Кенгро-100: Методи аналізу і алгебри, присвяченій 100-річчю з дня народження професора Гунара Кенгро (01–06.09.2013, Тарту, Естонія);

– Міжнародній конференції “Теорія наближень та її застосування”, присвяченій 75-річному ювілею В. П. Моторного (08–11.10.2015, Дніпропетровськ, Україна);

– Міжвузівському семінарі з теорії функцій при кафедрі математичного аналізу і теорії функцій ДНУ ім. Олеся Гончара (Дніпропетровськ, 2010–2014, керівники семінару: член-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., проф. В. П. Моторний і д.ф.-м.н., проф. В. Ф. Бабенко; Дніпро, 31.05.2017 та 20.04.2018, керівник семінару член-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., проф. В. П. Моторний);

– Семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (Київ, 28.04.2017 та 20.10.2017, керівник семінару д.ф.-м.н., проф. А. С. Романюк);

– Семінарі з теорії функцій при кафедрі математичного аналізу Одеського національного університету ім. І. І. Мечнікова (Одеса, 29.09.2017, керівник семінару д.ф.-м.н., проф. А. О. Кореновський);

– Семінарі "Сучасний аналіз" у Київському національному університеті ім. Тараса Шевченка (Київ, 06.12.2017, керівники семінару: д.ф.-м.н., проф. О. О. Курченко, д.ф.-м.н., проф. В. М. Радченко, д.ф.-м.н., проф. І. О. Шевчук);

– Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій у Львівському національному університеті ім. Івана Франка (Львів, 07.12.2017, керівник семінару д.ф.-м.н., проф. О. Б. Скасків);

– Київському семінарі з функціонального аналізу в Інституті математики НАН України (Київ, 11.0'4.2018, керівники семінару: академік НАН України д.ф.-м.н., проф. Ю. М. Березанський, академік НАН України д.ф.-м.н., проф. Ю. С. Самойленко, чл.-кор. НАН України д.ф.-м.н., проф. А. Н. Кочубей).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у роботах [1-42] (див. список публікацій здобувача на с. 10-14), 7 з них опубліковано без співавторів, роботи [1-21] відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук, [22-42] – тези доповідей; роботи [1–4,7–10,12–18,20] надруковано у виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, переліку умовних позначень, змісту, вступу, п'яти розділів, висновків, додатку та списку використаних джерел, що містить 344 найменування. Повний обсяг роботи становить 350 сторінок друкованого тексту.

Зміст дисертації. У *вступі* визначено об'єкт і предмет дослідження та обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету і задачі дослідження, описано методи дослідження, охарактеризовано наукову новизну та теоретичне і практичне значення дослідження, прокоментовано повноту викладення матеріалу в опублікованих працях та його ступінь апробації, описано структуру дисертаційної роботи та її основний зміст.

Основна частина роботи складається з п'яти розділів. В першому підрозділі кожного розділу формулюються основні задачі дослідження, яким присвячено розділ, подається стислий огляд літератури, окреслюються питання, які залишилися відкритими, і анонсуються нові результати, які виносяться на захист.

Перший розділ дисертаційної роботи присвячено розв'язанню задачі про обчислення точного значення лінійного поперечника класів функцій однієї змінної з заданою мажорантою модуля неперервності в просторі неперервних функцій.

Нехай $N \in \mathbb{N}$, X – нормовний простір з нормою $\|\cdot\|_X$, $\mathcal{M}$ – центрально симетрична підмножина X, $\mathcal{F}_N$ – множина всіх підпросторів в X вимірності не вище за N. У 1936 р. А. М. Колмогоровим [273] була введена наступна апроксимативна характеристика множини $\mathcal{M}$

$$d_N(\mathcal{M}; X) := \inf_{F \in \mathcal{F}_N} \sup_{x \in \mathcal{M}} \inf_{u \in F} \|x - u\|_X,$$

яка отримала назву N-поперечника за Колмогоровим. Для характеризації апроксимативних можливостей лінійних методів наближення В. М. Тихомиров [169] ввів поняття лінійного N-поперечника

$$\lambda_N(\mathcal{M}; X) := \inf_{A \in \mathcal{L}_N} \sup_{x \in \mathcal{M}} \|x - Ax\|_X,$$

де $\mathcal{L}_N$ – множина всіх лінійних операторів $A : X \to X$ рангу не вище за N.

Нехай C – простір неперервних функцій $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ з нормою $\|\cdot\|_C$, а $\widetilde{C}$ – його 1-періодичний аналог. Для модуля неперервності ω означимо класи

$$H^\omega := \{f \in C \ : \ \forall x, y \in [0,1] \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \omega(|x - y|)\}$$

та $\widetilde{H}^\omega$ – його 1-періодичний аналог. Відомо, що для довільного ω

$$d_N(H^\omega; C) = \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{1}{N}\right), \qquad N \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

а для опуклого вгору ω –

$$d_N\left(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C}\right) = \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{1}{2\left[\frac{N+1}{2}\right]}\right), \qquad N \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

де $[z]$ – ціла частина числа $z \in \mathbb{R}$. Рівність (1) отримана Ю. І. Григоряном [69], а рівність (2) – М. П. Корнєйчуком [89] для непарних N і В. І. Рубаном [145] для парних N.

Проте питання про точні значення лінійних поперечників $\lambda_N\left(H^\omega; C\right)$ і $\lambda_N\left(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C}\right)$ залишається відкритим в загальному випадку, а задачу про їх обчислення неодноразово ставив М. П. Корнєйчук [91, 94, 95, 96].

В *підрозділі 1.2* обчислено точне значення поперечників $\lambda_1\left(H^\omega; C\right)$ і $\lambda_1\left(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C}\right)$. Нехай V_1 – множина функцій $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ обмеженої варіації, для яких $f(0) = 0$ та $f(1) = 1$. Будемо говорити, що $\sigma^* \in V_1$ породжує найкращий лінійний метод наближення множини $\mathcal{M}$ константами, якщо

$$\sup_{f\in\mathcal{M}} \left\| f - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\sigma^*(t) \right\|_C = \lambda_1\left(\mathcal{M}; X\right).$$

Теорема 1.2.1. *Нехай ω – модуль неперервності та $\sigma(t) = t$, $t \in [0, 1]$. Тоді*

$$\lambda_1\left(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C}\right) = 2\int_0^{1/2} \omega(t)\,\mathrm{d}t,$$

а σ породжує найкращий лінійний метод наближення класу $\widetilde{H}^\omega$ константами.

На відміну від періодичного випадку, точне значення поперечника $\lambda_1\left(H^\omega; C\right)$ знайдено неявно – як розв'язок рівняння Фредгольма першого роду з невідомим параметром. Для класів Гельдера це рівняння вдається розв'язати точно.

Теорема 1.2.3. *Нехай $\alpha \in (0, 1)$ та $\omega(t) = t^\alpha$, $t \in [0, 1]$. Тоді*

$$\lambda_1\left(H^\omega; C\right) = \frac{\Gamma(2-\alpha)\Gamma\left(1/2 + \alpha/2\right)}{2\Gamma\left(3/2 - \alpha/2\right)},$$

а найкращий лінійний метод наближення класу H^α константами породжує

$$g(x) := \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma^2\left(1/2 - \alpha/2\right)} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^{1/2+\alpha/2}(1-t)^{1/2+\alpha/2}}, \qquad x \in [0, 1],$$

де $\Gamma(x)$ – гамма-функція Ойлера.

Отримані результати дозволяють встановити нові оцінки зверху для лінійних N-поперечників:

$$\lambda_N\left(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C}\right) \leqslant \lambda_N\left(H^\omega; C\right) \leqslant \lambda_1\left(H^{\omega_N}; C\right), \tag{3}$$

де $\omega_N(t) = \omega(t/N)$, $t \in [0, 1]$, які покращують раніше відомі оцінки (див. [96]).

В *підрозділі 1.3* розглядається питання про точність оцінок (3) на широкому класі лінійних позитивних методів. Дослідження такого роду близькі до задач наближення з обмеженнями. Для вивчення апроксимативних властивостей наближень з обмеженнями В. М. Коноваловим [88] були введені відносні поперечники за Колмогоровим, а С. П. Сидоровим [147, 148] – лінійні відносні поперечники. Означимо величину, яка споріднена відносним поперечникам.

Нагадаємо, що конус V в скінченновимірному лінійному просторі E називається тілесним, якщо він має хоча б одну внутрішню точку, та мініедральним, якщо $\forall x \in V \Rightarrow (-x) \notin V$ та $\forall x, y \in V\, \exists z \in V \Rightarrow z + V = (x+V) \cap (y+V)$. Нехай $\mathfrak{m}_X$ – множина всіх мініедральних конусів простору X. Відносним лінійним мініедральним N-поперечником множини $\mathcal{M}$ в просторі X з обмеженням, які задано конусом $V \subset X$, називатимемо величину

$$\lambda_N^{\mathfrak{m}}(\mathcal{M}; V; X) := \inf_{\substack{A \in \mathcal{L}_N: \\ A(V) \subset V, A(V) \in \mathfrak{m}_X}} \sup_{x \in \mathcal{M}} \|x - Ax\|_X.$$

Нехай C_+ – конус невід'ємних функцій. Для $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2N}\right)$ через $\left\{\chi_j^\varepsilon\right\}_{j=1}^N \subset C_+$ позначимо довільний набір функцій таких, що:

(1) $\chi_k^\varepsilon(t) = 1$, $t \in [(k-1)/N + \varepsilon, k/N - \varepsilon]$, для всіх $k = 1, \ldots, N$;

(2) $\operatorname{supp} \chi_k^\varepsilon \subset [(k-1)/N - \varepsilon, k/N + \varepsilon]$ для всіх $k = 1, \ldots, N$;

(3) $\chi_1^\varepsilon(t) + \ldots + \chi_N^\varepsilon(t) = 1$ для всіх $t \in [0,1]$.

Для $g \in V_1$ побудуємо позитивний мініедральний оператор $A_g^\varepsilon : C \to C$:

$$A_g^\varepsilon f = \sum_{k=1}^N \chi_k^\varepsilon \cdot \int_{(k-1)/N}^{k/N} f(t)\, \mathrm{d}g(Nt - k + 1).$$

Наступна теорема є основним результатом підрозділу 1.3.

Теорема 1.3.1. *Нехай ω – модуль неперервності, $N \in \mathbb{N}$ та $\omega_N(t) = \omega(t/N)$, $t \in [0,1]$. Тоді $\lambda_N^{\mathfrak{m}}(H^\omega; C_+; C) = \lambda_1(H^{\omega_N}; C)$ та якщо функція $\sigma \in V_1$ породжує найкращий лінійний метод наближення класу H^{ω_N} константами, то*

$$\lambda_N^{\mathfrak{m}}(H^\omega; C_+; C) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{x \in H^\omega} \|x - A_\sigma^\varepsilon x\|_C.$$

В *другому розділі* розв'язується задача оптимізації деяких типів квадратурних формул на класах періодичних функцій та на класах функцій багатьох змінних.

Нехай $d \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – компактна множина, $C(\Omega)$ – простір неперервних функцій $f : \Omega \to \mathbb{R}$ з нормою $\|f\|_{C(\Omega)}$, $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, – простори вимірних функцій $f : \Omega \to \mathbb{R}$ з відповідними нормами $\|f\|_{L_p(\Omega)}$, $\mathcal{M} \subset C(\Omega)$ – деякий клас.

Похибкою відновлення інтегралів функцій з класу $\mathcal{M}$ за допомогою множини функціоналів $\mathcal{Q} \subset (C(\Omega))^*$ називається величина

$$\mathcal{E}\left(\mathcal{M};\mathcal{Q}\right) := \inf_{\kappa\in\mathcal{Q}} \sup_{f\in\mathcal{M}} \left| \int_{\Omega} f(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t} - \kappa(f) \right|. \tag{4}$$

Формула $\kappa^* \in \mathcal{Q}$ називається $\mathcal{Q}$-оптимальною на класі $\mathcal{M}$, якщо на ній досягається inf в (4).

Нехай $n \in \mathbb{N}$ та $\mathcal{Q}_n(\Omega)$ – множина квадратурних формул – функціоналів $\kappa \in (C(\Omega))^*$ виду

$$\kappa(f) = \sum_{j=1}^{n} a_j f\left(\mathbf{x}_j\right), \qquad f \in C(\Omega), \tag{5}$$

де $\{a_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}$ – коефіцієнти і $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^n \subset \Omega$ – вузли κ. Нехай також $\mathcal{Q}_{n,\sigma}(\Omega)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, – підмножина формул з $\mathcal{Q}_n(\Omega)$, для яких $a_1+\ldots+a_n = 2\pi\sigma$. Нехай $\kappa_{n,\sigma}$ – формула прямокутників з вузлами $0, \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{2\pi(n-1)}{n}$ та коефіцієнтами $a_1 = \ldots = a_n = \frac{2\pi\sigma}{n}$.

Нехай $\Omega = \mathbb{T}$ та $W_p^r(\mathbb{T})$ – клас 2π-періодичних функцій $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, для яких $f^{(r-1)}$ абсолютно неперервна та $\left\|f^{(r)}\right\|_{L_p(\mathbb{T})} \leqslant 1$. Означимо класи згорток ядер, що не збільшують осциляцію, з переставно інваріантними множинами.

Для $J \subset \mathbb{Z}$ нехай L_J – замикання лінійної оболонки функцій $\left\{e^{ikx} \,:\, k \in J\right\}$ та

$$L_J^\perp := \left\{ g \in L_1(\mathbb{T}) \,:\, \forall f \in L_J \Rightarrow \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$

Нехай $K \in L_1(\mathbb{T})$ має формальний ряд Фур'є $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ і $J(K) := \{k \in \mathbb{Z} \,:\, c_k = 0\}$.

Класом згорток ядра $K \in L_1(\mathbb{T})$ з множиною $F \subset L_1(\mathbb{T})$ (відносно підмножини $J \subset J(K)$) називається множина

$$K *_J F := \left\{ f = P + K * \varphi \,:\, P \in L_J,\, \varphi \in F, \varphi \in L_J^\perp \right\}.$$

Нехай $\nu(f)$ – число змін знаку на періоді кусково-неперервної функції $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, та $J \subset J(K)$. Ядро K, яке не є тригонометричним поліномом, називається ядром, що не збільшує осциляцію, та позначається $K \in \mathcal{A}_{2n}(J)$, якщо для будь-якої кусково-неперервної функції $\varphi \in L_J^\perp \setminus \{0\}$, для якої $\nu(\varphi) \leqslant 2n$, та будь-якого $T \in L_J$ виконується нерівність $\nu\left(T + K * \varphi\right) \leqslant \nu(\varphi)$.

Для майже скрізь невід'ємної функції $f \in L_1(\mathbb{T})$ через $r(f,\cdot)$ позначимо незростаюче переставлення звуження $f|_{[0,2\pi)}$ та для $g \in L_1(\mathbb{T})$ означимо:

$$\Pi(g,t) = r(g_+,t) - r(g_-,2\pi - t), \qquad t \in [0,2\pi],$$

де $g_{\pm} := \max\{\pm g; 0\}$. Множина $F \subset L_1(\mathbb{T})$ називається переставно інваріантною, якщо з $f \in F$ і $\Pi(f) = \Pi(g)$ для $g \in L_1(\mathbb{T})$ випливає, що $g \in F$. Зазначимо, що класи $W^r_p(\mathbb{T})$ можна зобразити у вигляді згортки ядра Бернулі, яке не збільшує осциляцію, з одиничною кулею в $L_p(\mathbb{T})$, яка є переставно інваріантною множиною.

Добре відомо, що формула $\kappa_{n,1}$ є $\mathcal{Q}_n(\mathbb{T})$-оптимальною на класах Соболєва $W^r_p(\mathbb{T})$ для всіх $r \in \mathbb{N}$ і $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Відповідні результати були отримані В. П. Моторним [126] на $W^r_\infty(\mathbb{T})$, на $W^r_1(\mathbb{T})$ для парних $r \in \mathbb{N}$; А. О. Лігуном [113] на $W^r_1(\mathbb{T})$ для непарних $r \in \mathbb{N}$; О. А. Женсикбаєвим [73, 74] на $W^r_p(\mathbb{T})$ для $1 < p < \infty$. В. Ф. Бабенко [185, 18] поширив цей результат на класи згорток. Нехай F – переставно інваріантна множина. В. Ф. Бабенко показав, що у випадку $\{0\} \subset J(K)$ і $K \in \mathcal{A}_{2n}(\{0\})$ формула $\kappa_{n,1}$ є $\mathcal{Q}_n(\mathbb{T})$-оптимальною на класі $K *_{\{0\}} F$, а у випадку $J(K) = \varnothing$ і $K \in \mathcal{A}_{2n}(\varnothing)$ формула $\kappa_{n,\sigma}$ є $\mathcal{Q}_{n,\sigma}(\mathbb{T})$-найкращою на класі $K *_{\varnothing} F$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$. Деякі часткові випадки цього результату були отримані К. І. Осколковим [142, 311], М. А. Чахкієвим [173, 174], Т. А. Гранкіною [68, 21], Нгуєн Тхі Т. Х [131, 132, 133, 134, 135].

В *підрозділі 2.2* результати щодо оптимізації точкових квадратур (5) поширені на інтервальні квадратурні формули. Нехай $h > 0$ і $n \in \mathbb{N}$. Інтервальною квадратурною формулою називається функціонал $\kappa \in (C(\mathbb{T}))^*$ вигляду

$$\kappa(f) := \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{2h} \int_{x_j-h}^{x_j+h} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad f \in C(\mathbb{T}), \tag{6}$$

де $\{a_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}$ – коефіцієнти, а $\{x_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{T}$ – середини вузлових інтервалів формули κ. Позначимо через $\mathcal{Q}^h_n(\mathbb{T})$ множину функціоналів вигляду (6), а через $\mathcal{Q}^h_{n,\sigma}(\mathbb{T})$, $\sigma \in \mathbb{R}$, – підмножину функціоналів з $\mathcal{Q}^h_n(\mathbb{T})$, для яких $a_1 + \ldots + a_n = 2\pi\sigma$. Визначимо інтервальну квадратурну формулу прямокутників

$$\kappa^h_{n,\sigma}(f) := \sum_{j=1}^{n} \frac{2\pi\sigma}{n} \int_{\frac{2\pi j}{n}-h}^{\frac{2\pi j}{n}+h} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad f \in C(\mathbb{T}).$$

$\mathcal{Q}^h_n(\mathbb{T})$-оптимальність формули $\kappa^h_{n,1}$ була доведена В. Ф. Бабенком [13] на класі $W^r_1(\mathbb{T})$ та В. П. Моторним [296] на класі $W^r_\infty(\mathbb{T})$. Проте було відкритим питання про оптимальність формул $\kappa^h_{n,\sigma}$ на класах згорток ядер, що не збільшують осциляцію, з переставно інваріантними множинами, як і у випадку задачі оптимізації точкових квадратур. В підрозділі 2.2 отримано наступний результат.

Теорема 2.2.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $0 < h < \pi/n$, F – переставно інваріантна множина. Нехай також ядро K, множина J і число σ є такими, що або $J(K) = \varnothing$, $K \in \mathcal{A}_{2n}(\varnothing)$, $J = \varnothing$ і $\sigma = 1$, або $J(K) \supset \{0\}$, $K \in \mathcal{A}_{2n}(\{0\})$, $J = \{0\}$ і $\sigma \in \mathbb{R}$. Тоді формула $\kappa_{n,1}^h$ є $\mathcal{Q}_n^h(\mathbb{T})$-оптимальною на класі $K *_{\{0\}} F$, якщо $\{0\} \subset J$, і формула $\kappa_{n,\sigma}^h$ є $\mathcal{Q}_{n,\sigma}^h(\mathbb{T})$-оптимальною на класі $K *_J F$, якщо $J = \varnothing$.*

Ключову роль в доведенні теореми 2.2.1 мала встановлена властивість ядра Стєклова не збільшувати осциляцію в згортці з певним вузьким класом функцій.

Для $f \in L_1(\mathbb{T})$ через f^h позначимо усереднення функції f за Стєкловим, тобто

$$f^h(x) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{T}.$$

Для $\gamma, \delta > 0$ через $S_{n;\gamma,\delta}$ позначимо множину всіх кусково сталих функцій, які набувають майже скрізь лише двох значень γ і $-\delta$ та для яких $\nu(f) \leqslant 2n$.

Теорема 2.2.6. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $0 < h < \pi/n$, $\gamma, \delta > 0$. Нехай також сплайни $s_1, s_2 \in S_{n;\gamma,\delta}$ є такими, що $\nu(s_1^h) = \nu(s_2^h) = 2n$. Якщо $f(t) = s_1(t) - s_2(t)$, то $\nu\left(\lambda + f^h\right) \leqslant \nu(f)$ для будь-якого $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Теорема 2.2.6 дозволила застосувати апарат, розроблений В. Ф. Бабенком в [185, 18], а також встановити нові нерівності як для найкращих наближень константами усереднених несиметричних ідеальних сплайнів в несиметричних нормах, так і нові нерівності для переставлень усереднених моносплайнів.

В *підрозділі 2.3* розв'язується задача оптимізації деяких типів квадратурних формул на класах функцій багатьох змінних. Нехай $d \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – компактна вимірна за Жорданом множина, $\|\cdot\|_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, є ℓ_p-нормою в $\mathbb{R}^d$. Для модуля неперервності ω розглянемо клас

$$H_p^\omega(\Omega) := \left\{f \in C(\Omega)\,:\, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leqslant \omega\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_p\right)\right\}.$$

Точна асимптотична поведінка величини $\mathcal{E}\left(H_p^\omega(\Omega); \mathcal{Q}_n(\Omega)\right)$, коли $n \to \infty$, знайдена М. П. Корнєйчуком [90] для $d = 1$, В. Ф. Бабенком [9, 10] для $p = \infty$ і $d \geqslant 2$ та для $p = 1$ і $d = 2$, а також Е. В. Чорною [236, 177] і П. Грубером [261] в інших випадках при певних обмеженнях на модуль неперервності ω.

Для $J \subset \{1, \ldots, d\}$ та $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ означимо $L(J) := \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d\,:\, \forall j \in J \Rightarrow z_j = 0\right\}$ та $L(\mathbf{x}; J) := \mathbf{x} + L(J)$. Нехай $k \in \{1, \ldots, d\}$ і $\mathcal{Q}_n^{d,k}(\Omega)$ – множина лінійних функціоналів $\kappa \in (C(\Omega))^*$ вигляду

$$\kappa(f) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\mu\left(L(\mathbf{x}_j; J_j) \cap \Omega\right)} \int_{L(\mathbf{x}_j;J_j)\cap\Omega} f(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t}, \qquad f \in C(\Omega), \tag{7}$$

де $\{a_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}$ – коефіцієнти формули κ, $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^n \subset \Omega$ і $\{L(\mathbf{x}_j; J_j)\}_{j=1}^n$, $J_j \subset \{1, \dots, d\}$, $\# J_j = k$ і $\mathbf{x}_j \in \Omega$ для $j = 1, \dots, d$ – вузлові гіперплощини. Зрозуміло, що у випадку $k = d$, формула κ виду (7) вироджується в формулу (5).

Нехай $a_1, \dots, a_d > 0$ і $\Omega = \prod\limits_{j=1}^{d} [0, a_j]$. В. Ф. Бабенко і С. В. Бородачов в [20] знайшли найкращу квадратурну формулу виду (7) на класі монотонних і обмежених функцій, означених на кубі $[0,1]^d$. Позначимо $P := [0, a_1] \times [0, a_2]$. Нехай решітка Λ в $\mathbb{R}^2$ породжена векторами $\mathbf{v}_1 = (1,1)$ і $\mathbf{v}_2 = (1,-1)$, тобто $\Lambda := \{n_1\mathbf{v}_1 + n_2\mathbf{v}_2 \,:\, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$. Для $h > 0$ означимо $\mathcal{V}_h := h\Lambda \cap \mathrm{int} P$ і $n_h := \#\mathcal{V}_h$.

Для $\mathbf{s} \in \mathcal{V}_h$ через $W(\mathbf{s}) = \{\mathbf{t} \in P : \|\mathbf{t} - \mathbf{s}\|_1 = \inf\limits_{\mathbf{u} \in X} \|\mathbf{t} - \mathbf{u}\|_1\}$ позначимо клітину Вороного. Зафіксуємо деякий порядок $\mathbf{s}^1, \dots, \mathbf{s}^{n_h}$ точок в $\mathcal{V}_h$. Нехай $W_1 := W(\mathbf{s}^1)$,

$$W_j = W\left(\mathbf{s}^j\right) \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} W\left(\mathbf{s}^k\right), \qquad j = 2, \dots, n_h.$$

Тепер для $j = 1, \dots, n_h$ означимо $\mathbf{x}^j := \left(s_1^j, s_2^j, 0, \dots, 0\right) \in \mathbb{R}^d$ і розглянемо

$$\widetilde{\kappa}_h(f) := \sum_{j=1}^{n_h} \mu\left(W_j\right) \int_{L(\mathbf{x}^j;\{1,2\})\cap\Omega} f(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t}, \qquad f \in C(\Omega).$$

Має місце наступний результат.

Теорема 2.3.4. *Нехай $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 2$, $a_1, \dots, a_d > 0$, $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_j$, $j = 3, \dots, d$, ω – модуль неперервності. Тоді*

$$\mathcal{E}\left(H_1^\omega(\Omega); Q_n^{d,2}(\Omega)\right) = \frac{4n\mu(\Omega)}{a_1 a_2} \int_0^{\sqrt{\frac{a_1 a_2}{2n}}} t\,\omega(t)\,\mathrm{d}t \cdot \left(1 + O\left(n^{-1/2}\right)\right), \quad n \to \infty,$$

а $\{\widetilde{\kappa}_h\}_{h>0}$ – асимптотично оптимальна сім'я квадратурних формул.

Зауважимо, що теорема 2.3.4 узагальнює результат В. Ф. Бабенка [9] щодо оптимізації точкових квадратурних формул на класі $H_1^\omega(\Omega)$ у випадку $d = 2$.

В *розділі 3* досліджується асимптотична поведінка найкращого наближення лінійними та гармонічними сплайнами функцій багатьох змінних. Нехай $d \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^d$ – політоп, $C^2(D)$ – простір функцій $f \in C(D)$, двічі неперервно диференційовних всередині D. Скінченна множина $\triangle = \{T\}$ називається тріангуляцією на D, якщо елементами $\triangle$ є d-вимірні симплекси, $D = \bigcup\limits_{T\in\triangle} T$ та $\forall T, T' \in \triangle$, $T \neq T'$, перетин $T \cap T'$ є або порожньою множиною, або їх спільною гранню вимірності $j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$. Позначимо через $\mathfrak{D}_N$ множину всіх тріангуляцій на D, які складаються з щонайбільше N елементів.

Нехай $\alpha, \beta > 0$ і $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Означимо несиметричну $L_{p;\alpha,\beta}$-норму функції $f \in L_p(D)$: $\|f\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)} := \|\alpha f_+ + \beta f_-\|_{L_p(D)}$. Похибкою найкращого (α,β)-несиметричного наближення f підпростором $F \subset L_p(D)$ називається:

$$E\left(f; F\right)_{L_{p;\alpha,\beta}(D)} := \inf_{u\in F} \|f-u\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)}.$$

В [13, 14] показано, що $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} E\left(f; F\right)_{L_{p;\alpha,1}(D)}$ збігається з величиною найкращого наближення зверху функції f підпростором F. Отже, несиметричні наближення дозволяють одночасно розглядати задачі найкращого ($\|f\|_{L_{p;1,1}(D)} = \|f\|_{L_p(D)}$) та найкращих односторонніх наближень.

Позначимо через $\mathcal{P}_1$ множину лінійних поліномів d змінних, а для тріангуляції $\triangle$ на D означимо $\mathcal{S}_1(\triangle) := \{f \in C(D) : \forall T \in \triangle\, \exists p \in \mathcal{P}_1 \Rightarrow f|_T = p|_T\}$. Похибкою найкращого (α,β)-несиметричного нелінійного наближення в метриці простору L_p функції f лінійними сплайнами на тріангуляціях з $\mathfrak{D}_N$ називається величина

$$R_N\left(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\right) := \inf_{\triangle\in\mathfrak{D}_N} E\left(f; \mathcal{S}_1(\triangle)\right)_{L_{p;\alpha,\beta}(D)} = \inf_{\triangle\in\mathfrak{D}_N} \inf_{s\in\mathcal{S}_1(\triangle)} \|f-s\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)}.$$

Систематичне дослідження асимптотики величин, які споріднені величині $R_N\left(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\right)$, починається з роботи М. Ш. Бірмана та М. З. Соломяка [43]. Точна асимптотична поведінка $R_N\left(f, L_{p;1,\infty}(D)\right)$, $N \to \infty$, була знайдена К. Бороцкі [215] для $p = 1$ і довільної опуклої функції $f \in C^2(D)$ та В. Ф. Бабенком, Ю. В. Бабенко, А. О. Лігуном і О. О. Шумейком [188] для $p = \infty$, $d = 2$ та строго опуклої функції $f \in C^2(D)$.

Принципову складність в знаходженні точної асимптотики $R_N\left(f; L_{p;\alpha,\beta}(D)\right)$ має знаходження точної оцінки знизу. Ключовим кроком для її одержання (хоча б у випадку $d = 2$) є екстремальна задача про знаходження форми d-вимірного симплекса одиничного об'єма, на якому мінімізується похибка найкращого (α,β)-несиметричного наближення в метриці простору L_p квадратичної функції

$\mathfrak{q}(\mathbf{x}) = x_1^2 + \ldots + x_d^2$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, за допомогою лінійних функцій. Розв'язанню цієї екстремальної задачі присвячено *підрозділ 3.2*.

Нехай $\mathfrak{T}^d$ – множина всіх d-вимірних симплексів одиничного об'єму. Означимо

$$\sigma_{p;\alpha,\beta;d} := \inf_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}^d} E\left(\mathfrak{q}; \mathcal{P}_1\right)_{L_{p;\alpha,\beta}(\mathcal{T})}.$$

Основним результатом підрозділу 3.2 є наступна теорема.

Теорема 3.2.1. *Нехай $\alpha, \beta > 0$, $d \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ і $\mathcal{T}_0$ – правильний d-вимірний симплекс одиничного об'єму. Тоді $\sigma_{p;\alpha,\beta;d} = E\left(\mathfrak{q}; \mathcal{P}_1\right)_{L_{p;\alpha,\beta}(\mathcal{T}_0)}$.*

Раніше величина $\sigma_{2;1,1;2}$ була знайдена Е. Надлером [299, 300], а величина $\sigma_{p;\infty,1;d} := \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \sigma_{p;\alpha,1;d}$ – в роботах Е. Ф. Дазеведо і Р. Б. Сімпсона [241], В. Т. Раяна [320], М. Брєзіна [233], К. Бороцкі [231], Х. Потмана та співавторів [319], Л. Чена [235, 234], В. Ф. Бабенка, Ю. В. Бабенко і здобувача [192].

Теорема 3.2.1 дозволила в *підрозділі 3.3* знайти точну асимптотику величини $R_N\left(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\right)$, $N \to \infty$, для опуклих функцій $f \in C^2(D)$ двох змінних.

Теорема 3.3.1. *Нехай $d = 2$, $f \in C^2(D)$ є такою, що $H(f) := f''_{xx} f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2$ невід'ємна на D. Тоді для всіх $\alpha, \beta > 0$ і $1 \leqslant p \leqslant \infty$ має місце гранична рівність*

$$\lim_{N \to \infty} N \cdot R_N\left(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\right) = \frac{\sigma_{p;\alpha,\beta;2}}{2} \cdot \left(\int_D \left(H(f; x, y)\right)^{\frac{p}{2(p+1)}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1+1/p}.$$

Крім того, в підрозділі 3.3 запропоновано алгоритм побудови асимптотично оптимальних послідовності тріангуляцій $\{\triangle_N^*\}_{N=1}^{\infty}$, $\triangle_N^* \in \mathfrak{D}_N$, та сплайнів на них $\{s_N^*\}_{N=1}^{\infty}$, $s_N^* \in \mathcal{S}_1\left(\triangle_N^*\right)$, тобто

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\|f - s_N^*\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)}}{R_N\left(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\right)} = 1.$$

Підрозділ 3.4 присвячено дослідженню асимптотичної поведінки похибки найкращої трансфінітної інтерполяції класів функцій гармонічними сплайнами. Трансфінітна інтерполяція полягає в побудові функції, яка збігається з заданою функцією складної форми вздовж деяких многовидів. Такий тип інтерполяції знаходить застосування в комп'ютерній томографії, методі скінченних елементів, картографії, тощо, де інформація про наближувану функцію природним чином задається у вигляді її значень вздовж гіперплощин. Властивості трансфінітної інтерполяції досліджувалися Д. Мангероном, С. А. Коонсом, Дж. Біркгофом, У. Гордоном, Дж. Холом, К. Дикеном, М. Флоатером, О. М. Литвином, А. Беджанку, В. Т. Клименком, В. Ф. Бабенком, Ю. В. Бабенко та ін.

Як звичайно, через Δ позначимо оператор Лапласа. Нехай $b_1, \dots, b_d > 0$ та $\Pi = \prod_{j=1}^{d} [0, b_j]$. Скінченну сукупність d-вимірних прямокутних паралелепіпедів $P = \{\Omega\}$ будемо називати прямокутним розбиттям на Π, якщо $\bigcup_{\Omega \in P} \Omega = \Pi$ та $\forall \Omega, \Omega' \in P$, $\Omega \neq \Omega'$, перетин $\Omega \cap \Omega'$ має порожню внутрішність.

Для $f \in C(\Pi)$ і прямокутного розбиття P на Π побудуємо гармонічний сплайн $S_P f$ наступним чином. Для кожного $\Omega \in P$ через u позначимо гармонічне продовження функції f з $\partial\Omega$ всередину Ω. Нехай $1 \leqslant q, s \leqslant \infty$ та

$$W_q^{\Delta}(\Pi) := \left\{ f \in C^2(\Pi) \, : \, \|\Delta f\|_{L_q(\Pi)} \leqslant 1 \right\}.$$

Означимо похибку інтерполяції класу $W_q^{\Delta}(\Pi)$ гармонічними сплайнами на розбитті P:

$$\mathcal{E}_P \left(W_q^{\Delta}(\Pi) \right)_s := \sup_{f \in W_q^{\Delta}(\Pi)} \|f - S_P f\|_{L_s(\Pi)}.$$

Величина $\mathcal{E}_P \left(W_q^{\Delta}(\Pi) \right)_s$ досліджувалася В. Т. Клименком [83], В. Ф. Бабенком та Т. Ю. Лескевич [26] на спеціальному класі розбиттів P, які можна утворити з Π за рахунок його розрізання скінченною кількістю $(d-1)$-вимірних гіперплощин, ортогональних координатним осям.

Нехай $N \in \mathbb{N}$ та $\mathcal{P}_N(\Pi)$ – множина всіх прямокутних розбиттів множини Π, які складаються рівно з N елементів. Похибкою найкращої інтерполяції класу $W_q^{\Delta}(\Pi)$ гармонічними сплайнами на прямокутних розбиттях $\mathcal{P}_N$ називається величина

$$\mathcal{E}_N \left(W_q^{\Delta}(\Pi) \right)_s := \inf_{P \in \mathcal{P}_N} \mathcal{E}_P \left(W_q^{\Delta}(\Pi) \right)_s.$$

Нехай $P_N^{*,j}$, $j = 1, 2, \dots, d$, – прямокутне розбиття множини Π, що складається з N рівних d-вимірних паралелепіпедів, які отримано з Π його розбиттям за допомогою $(N-1)$-єї $(d-1)$-вимірної гіперплощини, ортогональної до осі Ox_j. Наступне твердження встановлює точний порядок асимптотичної поведінки величин $\mathcal{E}_N \left(W_\infty^{\Delta}(\Pi) \right)_s$ і $\mathcal{E}_N \left(W_s^{\Delta}(\Pi) \right)_1$, коли $N \to \infty$.

Теорема 3.4.2. *Нехай $d \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$ і $s' = s/(s-1)$. Тоді існують константи $C_1, C_2 > 0$ такі, що $C_1 \leqslant N^2 \cdot \mathcal{E}_N \left(W_\infty^{\Delta} \right)_s = N^2 \cdot \mathcal{E}_N \left(W_{s'}^{\Delta} \right)_1 \leqslant C_2$ для всіх достатньо великих $N \in \mathbb{N}$.*

Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячено розв'язанню задач найкращого відновлення операторів. Нехай X, Z – дійсні лінійні простори; Y – дійсний нормовний простір; $A : X \to Y$ – оператор з областю визначення $\mathcal{D}(A) \subset X$; $W \subset \mathcal{D}(A)$ – деякий клас; $I : \overline{\operatorname{span} W} \to Z$ – інформаційний оператор; $U \subset Z$ – підмножина, що містить нуль θ_Z простору Z.

Довільний оператор $\Phi : Z \to Y$ будемо називати методом відновлення. Похибкою найкращого відновлення оператора A на класі W за інформацією I, що задана з похибкою U, називається величина:

$$\mathcal{E}^*_Y\left(A; W; I; U\right) := \inf_{\Phi : Z \to Y} \sup_{x \in W} \sup_{z \in Ix + U} \left\|Ax - \Phi z\right\|_Y, \tag{8}$$

де inf береться за всіма методами відновлення $\Phi : Z \to Y$. Будемо опускати символ U у величині (8), якщо інформація I задана точно, тобто $U = \{\theta_Z\}$.

Задача найкращого відновлення оператора A полягає в знаходженні величини (8) та найкращих методів відновлення Φ^*, якщо такі існують, для яких досягається inf в правій частині (8). У випадку тотожного оператора $A = \mathrm{id}_X$ ця задача називається також задачею найкращого відновлення класу W за інформацією I, що задана з похибкою U.

Задача найкращого відновлення операторів має тісні взаємозв'язки з багатьма задачами теорії наближення, теорії інформаційної складності та суміжних областей математики. Вона досліджувалася С. А. Смоляком, Н. С. Бахваловим, А. Г. Марчуком, К. Ю. Осипенком, М. Голомбом, К. А. Мічеллі, Т. Дж. Рівліном, А. А. Мелкманом, Х. Вожняковським, Дж. Ф. Траубом, Г. В. Васільковським, А. С. Неміровським, Д. Б. Юдіним, М. П. Корнєйчуком, Е. Новаком, Л. Пласкотою, А. Г. Вершульцом, О. А. Женсикбаєвим та ін.

В *підрозділі 4.2* розв'язується задача найкращого відновлення деякого класу гладких функцій багатьох змінних за значеннями функцій та їх градієнтів в заданій скінченній системі точок. Нехай $d \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – опукле тіло, тобто компактна опукла множина з непорожньою внутрішністю, та $W^2_\infty(\Omega)$ – клас функцій $f \in C^1(\Omega)$ таких, що для будь-якого одиничного вектора $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$ похідна за напрямком $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{r}^2}$ існує всередині Ω хоча б в узагальненому смислі та $\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{r}^2}\right\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant 1$. Існування узагальненої похідної $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{r}^2}$ розуміється в тому сенсі, що для майже всіх паралельних вектору $\mathbf{r}$ прямих ℓ, які проходять через внутрішність Ω, звуження $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\Big|_{\ell\cap\Omega}$ є локально абсолютно неперервною функцією і $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{r}^2}$ є вимірною.

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $Q = \{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ – скінченна множина внутрішніх точок Ω і $I'_Q : C(\Omega) \to \mathbb{R}^{(d+1)n}$ – інформаційний оператор вигляду

$$I'_Q(f) = \left(f\left(\mathbf{q}_1\right), \ldots, f\left(\mathbf{q}_n\right), \nabla f\left(\mathbf{q}_1\right), \ldots, \nabla f\left(\mathbf{q}_n\right)\right), \qquad f \in C(\Omega),$$

який визначено на $\overline{\operatorname{span} W^2_\infty(\Omega)}$. Нехай також $r(A,B) := \sup\limits_{\mathbf{x}\in A}\inf\limits_{\mathbf{y}\in B}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2$ для $A, B \subset \mathbb{R}^d$. Наступне твердження становить основний результат підрозділу.

Теорема 4.2.1. *Нехай $d \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – опукле тіло і Q – скінченна множина, що міститься всередині Ω. Тоді виконується подвійна нерівність*

$$\frac{1}{4}\, r^2(\Omega, Q) \leqslant \mathcal{E}^*_{L_\infty(\Omega)}\left(\mathrm{id}_{C(\Omega)}; W^2_\infty(\Omega); I'_Q\right) \leqslant \max\left\{\frac{1}{4}\, r^2(\Omega, Q); \frac{1}{2}\, r^2(\partial\Omega, Q)\right\},$$

яка обертається в рівність у випадку, коли $r(\Omega, Q) \geqslant \sqrt{2} r(\partial\Omega, Q)$

Теорема 4.2.1 узагальнює на випадок класів гладких функцій багатьох змінних результати В. Ф. Бабенка і А. О. Лігуна [27] ($d = 2$) та В. Ф. Бабенка [11] ($d \geqslant 3$) щодо найкращого відновлення класу $H^\omega_2(\Omega)$ в нормі простору L_∞ за інформацією про значення функцій в точках множини Q. Також, результат теореми 4.2.1 близький до результатів Б. Боянова [47] щодо найкращого відновлення класів $W^r_p([0,1])$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ і $r \in \mathbb{N}$, функцій $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ з абсолютно неперервною похідною $f^{(r-1)}$, для яких $\left\|f^{(r)}\right\|_{L_p([0,1])} \leqslant 1$, в метриці простору L_∞ за інформацією про значення функцій та їх похідних до порядку $r-1$ включно в n вузлах.

Оцінювання знизу величини $\mathcal{E}^*_{L_\infty(\Omega)}\left(\mathrm{id}_{C(\Omega)}; W^2_\infty(\Omega); I'_Q\right)$ звелося до розв'язання наступної екстремальної задачі для функцій багатьох змінних: для заданого d-вимірного симплексу $\mathcal{T}$ з вершинами $B_0, \ldots, B_d$ необхідно знайти

$$\sup_{\substack{x\in W^2_\infty(\mathcal{T}):\\ x(B_j)=0,\, \nabla x(B_j)=\mathbf{0},\, j=0,\ldots,d}} \|x\|_{L_\infty(\mathcal{T})} \tag{9}$$

та екстремальні функції, якщо такі існують, на яких досягається sup в задачі (9). Взагалі кажучи, задачі такого роду є складними та їх вдається розв'язати точно лише у виключних ситуаціях. Задача (9) була розв'язана за рахунок її зведення до більш простої екстремальної задачі для функцій однієї змінної.

Підрозділ 4.3 присвячено розв'язанню задачі найкращого відновлення інтегральних операторів з невід'ємним ядром та їх сум на класах функцій з заданою мажорантою модуля неперервності за неточно заданою інформацією про значення функцій з класу в заданій скінченній системі точок.

Нехай (M,μ) і (N,ν) – простори з σ-скінченною невід'ємною мірою на деякій σ-алгебрі Σ_M підмножин M, $\mathfrak{M}\,(M,\mu)$ – простір всіх μ-вимірних μ-м.с. скінченних функцій $f : M \to \mathbb{R}$ та $E \subset \mathfrak{M}(M,\mu)$ – лінійний підпростір. Лінійний оператор $T : E \to \mathfrak{M}(N,\nu)$ називається інтегральним оператором, якщо існує $\nu\times\mu$-вимірна функція $K(s,t)$ – ядро оператора T – така, що для всіх $x \in E$

$$Tx(s) := \int_M K(s,t)\,x(t)\,\mathrm{d}\mu(t), \qquad \text{для } \nu - \text{м.в. } \ s \in N.$$

Нехай додатково $M = M_\rho$ оснащено метрикою ρ, Σ_M – борелівська σ-алгебра підмножин в M_ρ, $M' \subset M$ – компактна підмножина, $B_\mu\,(M')$ і $C_\mu\,(M')$ – простори функцій $x : M_\rho \to \mathbb{R}$, які дорівнюють нулю на $M_\rho \setminus M'$ та, відповідно, μ-суттєво обмежені і μ-м.с. неперервні на M'. Нехай також ω – модуль неперервності,

$$H^\omega_\mu(M') := \left\{x \in C_\mu(M') : |x(t') - x(t'')| \leqslant \omega\left(\rho(t',t'')\right),\ \forall t',t'' \in M'\right\},$$

$n \in \mathbb{N}$, $Q = \{q_j\}_{j=1}^n \subset M'$ – задана система точок, та $I_Q : C_\mu\,(M') \to \mathbb{R}^n$ – інформаційний оператор вигляду

$$I_Q x := \left(x\left(q_1\right),\ldots,x\left(q_n\right)\right), \qquad x \in C_\mu(M'),$$

та $U_{\mathbf{e}} = \prod\limits_{j=1}^n\,[-e_j,e_j]$, де $e_j > 0$ для всіх $j = 1,\ldots,n$.

Задача найкращого відновлення класу $H^\omega_2\,(M')$ за інформацією I_Q, яка задана з похибкою $U_{\mathbf{e}}$, розв'язана А. Г. Марчуком і К. Ю. Осипенко [124] та Л. Пласкотою [318] у випадку $M = \mathbb{R}$ і $M' = [0,1]$; В. Ф. Бабенком і А. О. Лігуном [27] та В. Ф. Бабенком [11] у випадку $M = \mathbb{R}^d$, M' – тіло і $U_{\mathbf{e}} = \mathbf{0}$.

Задача найкращого відновлення функціоналу інтегрування на класі $H^\omega_p\,(M')$ за інформацією I_Q, яка задана з похибкою $U_{\mathbf{e}}$, розв'язана М. П. Корнєйчуком [90] у випадку $M = \mathbb{R}$, $M' = [0,1]$ і $U_{\mathbf{e}} = \mathbf{0}$; В. Ф. Бабенком [9] у випадку $M = \mathbb{R}^d$, M' – тіло, $U_{\mathbf{e}} = \mathbf{0}$ і або $p = \infty$ та $d \in \mathbb{N}$, або $p = 1$ та $d = 2$; Л. Пласкотою [318] у випадку $M = \mathbb{R}$, $M' = [0,1]$ і $\omega(t) = t$, $t \in [0,1]$.

Розглянемо функцію $\tau_{\omega,Q,\mathbf{e}}(t) := \chi_{M'}(t)\cdot \min\limits_{j=1,\dots,n}\left(e_j+\omega\left(\rho\left(t,q_j\right)\right)\right)$, $t\in M$, де $\chi_{M'}$ – характеристична функція множини M'. Послідовно означимо $\Pi_0 := \varnothing$,

$$\Pi_j := \{t\in M' \,:\, \tau_{\omega,Q,\mathbf{e}}(t) = e_j+\omega(\rho\left(t,q_j\right))\}\setminus\bigcup_{s=0}^{j-1}\Pi_s, \qquad j=2,\dots,n.$$

Оператор $L_{\omega,Q,\mathbf{e}} : \mathbb{R}^n \to B_\mu\left(M'\right)$ визначимо за правилом: для всіх $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n$

$$L_{\omega,Q,\mathbf{e}}\mathbf{z}(t) := \begin{cases} z_j, & t\in\Pi_j, \quad j=1,\dots,n,\\ 0, & t\in M\setminus M'.\end{cases}$$

Теорема 4.3.2. *Нехай в позначеннях підрозділу інтегральний оператор $A : B_\mu(M')\to\mathfrak{M}\left(N,\nu\right)$ має невід'ємне ядро і $Y\subset\mathfrak{M}\left(N,\nu\right)$ – нормовна решітка така, що $A\left(B_\mu\left(M'\right)\right)\subset Y$. Тоді $\Phi = A\circ L_{\omega,Q,\mathbf{e}}$ – найкращий метод відновлення оператора A на класі $H^\omega_\mu\left(M'\right)$ за інформацією I_Q, яка задана з похибкою $U_{\mathbf{e}}$, та*

$$\mathcal{E}^*_Y\left(A; H^\omega_\mu\left(M'\right); I_Q; U_{\mathbf{e}}\right) = \left\|\int_{M'} K(\cdot,x)\,\tau_{\omega,Q,\mathbf{e}}(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right\|_Y.$$

В підрозділі 4.3 отримано також узагальнення теореми 4.3.2 на випадок найкращого відновлення сум інтегральних операторів зі знакосталими ядрами. Одержані результати дозволяють побудувати оптимальні методи розв'язку граничних задач для рівнянь в частинних похідних, гранична функція в яких має обмеження на модуль неперервності, за значеннями граничної функції в заданій системі точок.

В *п'ятому розділі* досліджується задача про знаходження точних констант в нерівностях для норм похідних та споріднена задача про найкраще наближення необмежених операторів лінійними обмеженими операторами.

Нехай G – вимірна однозв'язна підмножина $\mathbb{R}$, $k,r\in\mathbb{N}$, $k\leqslant r-1$, та $1\leqslant p,q,s\leqslant\infty$. Позначимо через $L^r_s(G)$ простір вимірних функцій $f : G\to\mathbb{R}$, для яких $f^{(k-1)}$ локально абсолютно неперервна на G і $f^{(r)}\in L_s(G)$, та означимо $L^r_{p,s}(G) := L_p(G)\cap L^r_s(G)$.

Нерівності, що оцінюють норму проміжної похідної функції $\left\|f^{(k)}\right\|_{L_q(G)}$ через норму самої функції $\|f\|_{L_p(G)}$ та норму її похідної старшого порядку $\left\|f^{(r)}\right\|_{L_s(G)}$, називаються нерівностями типу Колмогорова. Такі нерівності знаходять важливі застосування в теорії наближення, теорії некоректних задач, теорії оптимальних алгоритмів, теорії оптимального відновлення, тощо.

Особливий інтерес становлять точні нерівності типу Колмогорова. Вони вивчалися А. Кнезером, Ж. Адамаром, Г. Г. Харді, Дж. І. Літлвудом, Е. Ландау, Г. Пойа, А. М. Колмогоровим, Е. М. Стейном, Л. В. Тайковим, І. Дж. Шенбергом, А. Каваретою, Ю. І. Любічем, М. П. Купцовим, В. М. Габушиним та ін.

Сучасні прикладні задачі хімії, фізики, механіки потребують всебічного дослідження похідних не тільки цілих, але й дробових порядків. Тому природний інтерес становить задача знаходження непокращуваних нерівностей для норм похідних дробових порядків, розв'язанню якої присвячено *підрозділ 5.2*.

Для функції $f:\mathbb{R}_+^0=[0,\infty)\to\mathbb{R}$ розглянемо дробову похідну в смислі Маршо:

$$D_-^k f(x)=\frac{1}{\varkappa(k,n)}\int_0^{+\infty}\frac{\left(\Delta_{-t}^n f\right)(x)}{t^{1+k}}\,\mathrm{d}t,\qquad x\in\mathbb{R},$$

де $n\in\mathbb{N}$, $n>k$, (означення не залежить від вибору n) та

$$\left(\Delta_{-t}^n f\right)(x):=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}f(x-mt),\quad \varkappa(k,n):=\Gamma(-k)\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}m^k.$$

Нехай $1<s\leqslant\infty$, $k\in(1,2-1/s)$ і $s'=s/(s-1)$. Розглянемо множину $M:=\left\{(a,b)\in(0,1)^2\,:\,a\leqslant b\right\}$ та для кожного $(a,b)\in M$ означимо функції

$$\omega(a,b;x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ a^{-1}(1-b)^{-1}\cdot\left(1-b-\left(1-b^{1-k}\right)(1-a)\right), & x\in(0,a],\\ (1-b)^{-1}\cdot\left(1-b^{1-k}\right), & x\in(a,1),\\ (1-k)x^{-k}, & x\geqslant 1,\end{cases}$$

$$\tau(a,b;x):=x^{1-k}-\int_0^x\omega(a,b;u)\,\mathrm{d}u,\qquad x\in\mathbb{R}_+^0,$$

$$\varphi(a,b;x):=\int_0^a(-x+t/2)\cdot\tau_{(s')}(a,b;t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x(x-t)\cdot\tau_{(s')}(a,b;t)\,\mathrm{d}t,\quad x\in\mathbb{R}_+^0,$$

де $g_{(s')}:=|g|^{s'-1}\mathrm{sgn}\,g$. Основним результатом підрозділу є наступна теорема.

Теорема 5.2.7. *Нехай* $1<s\leqslant\infty$, $s'=s/(s-1)$, $k\in(1,2-1/s)$ *і* $\lambda=k/\left(2-1/s\right)$. *Тоді існує єдина пара* $(a,b)\in M$ *така, що для будь-якої функції* $f\in L_{\infty,s}^2\left(\mathbb{R}_+^0\right)$ *виконується точна нерівність*

$$\left\|D_-^k f\right\|_{L_\infty\left(\mathbb{R}_+^0\right)}\leqslant\frac{\left\|D_-^k\varphi(a,b;\cdot)\right\|_{L_\infty\left(\mathbb{R}_+^0\right)}}{\left\|\varphi(a,b;\cdot)\right\|_{L_\infty\left(\mathbb{R}_+^0\right)}^{1-\lambda}\left\|\varphi''(a,b;\cdot)\right\|_{L_s\left(\mathbb{R}_+^0\right)}^{\lambda}}\left\|f\right\|_{L_\infty\left(\mathbb{R}_+^0\right)}^{1-\lambda}\left\|f''\right\|_{L_s\left(\mathbb{R}_+^0\right)}^{\lambda}.$$

Твердження теореми 5.2.7 у випадку $s = \infty$ встановлено В. В. Арєстовим [182].

В *підрозділах 5.3* та *5.4.1* розв'язується задача найкращого наближення операторів диференціювання і функціоналів диференціювання в точці лінійними обмеженими операторами. Нехай X, Y – банахові простори; $T : X \to Y$ – оператор з областю визначення $\mathcal{D}(T) \subset X$; $W \subset \mathcal{D}(T)$ – деяка множина; $\mathcal{L}(X, Y)$ – простір всіх лінійних обмежених операторів $S : X \to Y$; $N > 0$. Похибкою наближення оператора T операторами $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ на множині W називається величина

$$U(T, S; W) := \sup_{x \in W} \|Tx - Sx\|_Y.$$

С. Б. Стєчкін [159, 160] поставив задачу найкращого наближення оператора T лінійними обмеженими операторами на класі W, яка полягає в обчисленні

$$E_N(T; W) := \inf_{S \in \mathcal{L}, \, \|S\| \leqslant N} U(T, S; W) \tag{10}$$

та знаходженні екстремальних операторів $S^* \in \mathcal{L}$, $\|S^*\| \leqslant N$, якщо такі існують, на яких досягається inf в (10).

В [8, 7] міститься широкий огляд результатів щодо розв'язку задачі Стєчкіна про найкраще наближення операторів диференціювання лінійними обмеженими операторами на класах функцій, визначених на $\mathbb{R}$ або $\mathbb{R}_+^0$. Але на класах функцій, визначених на скінченному відрізку, ця задача залишається малодослідженою.

В підрозділі 5.3 роз'язана задача про найкраще наближення оператора диференціювання $D^1 : L_\infty([0,1]) \to L_\infty([0,1])$ і функціоналу диференціювання $D_t^1 : L_\infty([0,1]) \to \mathbb{R}$ в точці $t \in [0,1]$ на класах $W_s^2([0,1])$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$. Там же розглядається більш загальний випадок – коли друга похідна функцій з класу належить одиничній кулі в просторі Орліча.

Підрозділ 5.4.1 присвячено розв'язанню задачі Стєчкіна для операторів $D^k : L_\infty([0,1]) \to L_\infty([0,1])$, $k \in \{1,2\}$, і функціоналу $D_t^k : L_\infty([0,1]) \to \mathbb{R}$, $k \in \{1,2\}$ і $t \in [0,1]$, на класах $W_\infty^3([0,1])$. Зазначимо, що на класах функцій, визначених на $\mathbb{R}$ або $\mathbb{R}_+^0$, ця задача досліджувалася в роботах С. Б. Стєчкіна, В. В. Арєстова, О. П. Буслаєва, О. А. Тімошина, В. І. Колпакова, Е. В. Колпакової.

Сформулюємо результати підрозділу 5.4.1 щодо розв'язку задачі Стєчкіна для функціоналів і операторів диференціювання другого порядку. Розпочнемо з побудови екстремальних функціоналів $F_N^{2,t} : L_\infty([0,1]) \to \mathbb{R}$ для $t \in [0,1/2]$. Нехай

$$N_t^* = \frac{18}{(1-2t^3)\,(1+4t^3)}.$$

У випадку $N \in \left[4/t^2, +\infty\right)$ для $f \in L_\infty([0,1])$ означимо

$$F_N^{2,t} f := \frac{N}{4} \cdot f\left(t - \frac{2}{\sqrt{N}}\right) - \frac{N}{2} \cdot f\,(t) + \frac{N}{4} \cdot f\left(t + \frac{2}{\sqrt{N}}\right).$$

У випадку $N \in \left(N_t^*, 4/t^2\right)$ через $c_{N,t}$ позначимо єдиний нуль на $[2t,1]$ полінома

$$Q_{N,t}(c) := c^6 - \frac{18}{N}c^4 + 2t^3c^3 - 8t^6.$$

Для $f \in L_\infty([0,1])$ означимо

$$F_N^{2,t} f := \frac{6c_{N,t}}{c_{N,t}^3 + 4t^3} \cdot f\,(0) - \frac{N}{2} \cdot f\left(\frac{c_{N,t}^3 + 4t^3}{3c_{N,t}^2}\right) + \frac{3c_{N,t}}{c_{N,t}^3 - 2t^3} \cdot f\,(c_{N,t})\,.$$

У випадку $N \in [16, N_t^*]$ означимо

$$b_{N,t} := \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{16}{N}},$$

$$F_N^{2,t} f := \frac{2}{b_{N,t}} \cdot f\,(0) - \frac{N}{2} \cdot f\,(b_{N,t}) + \frac{2}{1 - b_{N,t}} \cdot f\,(1)\,, \quad f \in L_\infty([0,1]).$$

Далі розглянемо випадок $t \in [1/2, 1]$. Через $\tilde{g}$ позначимо функцію, симетричну функції $g \in L_\infty$, тобто $\tilde{g}(u) = g(1-u)$ для $u \in [0,1]$. Для $N \geqslant 16$ означимо

$$F_N^{2,t} f := F_N^{2,1-t} \tilde{f}, \qquad \forall f \in L_\infty([0,1]).$$

Теорема 5.4.1. *Якщо* $t \in [0,1/2]$, *то*

$$E_N\left(D_t^2; W_\infty^3([0,1])\right) = \begin{cases} \dfrac{2}{3\sqrt{N}}, & N \in \left[4/t^2, +\infty\right), \\ \dfrac{4c_{N,t}}{9} + \dfrac{4t^3}{9c_{N,t}^2} + \dfrac{2t^3 c_{N,t}}{c_{N,t}^3 + 4t^3} - t, & N \in \left(N_t^*, 4/t^2\right), \\ \dfrac{b_{N,t}^2 + 2t^3}{3b_{N,t}} - t + \dfrac{1}{3}, & N \in [16, N_t^*]\,, \\ +\infty, & N \in (0, 16), \end{cases}$$

а якщо $t \in [1/2, 1]$, *то* $E_N\left(D_t^2; W_\infty^3\right) = E_N\left(D_{1-t}^2; W_\infty^3\right)$. *Більш того, для всіх* $t \in [0,1]$ *функціонал* $F_N^{2,t}$ *є екстремальним у відповідній задачі.*

Теорема 5.4.2. *Для всіх* $N > 0$

$$E_N\left(D^2; W^3_\infty([0,1])\right) = U\left(D^2; F_N^2; W^3_\infty([0,1])\right) = E_N\left(D_0^2; W^3_\infty([0,1])\right),$$

де оператор $F_N^2 : L_\infty([0,1]) \to L_\infty([0,1])$ *визначений співвідношенням:*

$$F_N^2 f(t) := F_N^{2,t} f, \qquad \forall\ t \in [0,1] \quad \text{та} \quad \forall f \in L_\infty([0,1]).$$

Решта розділу 5 присвячена одержанню точних нерівностей типу Колмогорова для функцій, визначених на скінченному відрізку. Нехай

$$W_s^r([0,1]) := \left\{ f \in L_s^r([0,1]) \ :\ \left\| f^{(r)} \right\|_{L_s([0,1])} \leqslant 1 \right\}.$$

Задача про знаходження точних констант в нерівностях типу Колмогорова для функцій, визначених на скінченному відрізку, називається задачею Ландау-Колмогорова та має дві, взагалі кажучи різні, постановки. Найбільш сильна з них полягає в знаходженні модуля неперервності $\Omega\left(\delta; D^k; W_s^r\right)$, $\delta \geqslant 0$, оператора диференціювання $D^k : L_p([0,1]) \to L_q([0,1])$ на класі $W_s^r([0,1])$:

$$\Omega\left(\delta; D^k; W_s^r([0,1])\right) := \left\{ \left\| f^{(k)} \right\|_{L_q([0,1])} \ :\ f \in W_s^r([0,1]) \ \text{ та } \ \|f\|_{L_p([0,1])} \leqslant \delta \right\}.$$

Розв'язанню задачі Ландау-Колмогорова присвячено роботи Е. Ландау [282], Ч. К. Чуі та П. У. Сміта [238], С. Карліна [269], А. Пінкуса [314], М. Сато [323], О. І. Звягінцева і А. Я. Лєпіна [79], О. І. Звягінцева [78], Н. Найденова [302, 301], Б. О. Еріксона [249], О. Ю. Шадріна [330], Ю. В. Бабенко [38, 39]), В. І. Бурєнкова та В. А. Гусакова [54], Б. Боянова і Н. Найденова [221, 222].

Проте в переважній більшості ситуацій задача Ландау-Колмогорова розв'язана лише для малих значень r. Водночас, різні застосування потребують встановлення нерівностей для похідних на спеціальних класах функцій. Зокрема, на класах періодичних функцій, майже періодичних функцій, кратно монотонних функцій, абсолютно монотонних функцій, тощо.

В підрозділі 5.5 задача Ландау-Колмогорова розв'язується на класі абсолютно монотонних функцій. Нагадаємо, що функція $f \in C([0,1])$ називається абсолютно монотонною, якщо f є нескінченно диференційовною всередині $(0,1)$ і $f^{(k)}(x) \geqslant 0$ для всіх $x \in (0,1)$ та $k \in \mathbb{Z}_+$. Множину абсолютно монотонних на $[0,1]$ функцій позначимо через AM.

Нехай $n \in \mathbb{Z}_+$ та $e_n(x) := x^n$, $x \in [0,1]$. Нехай також $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$ і $n \geqslant r$. Розглянемо множину функцій

$$\mathcal{M}_r^n := \left\{ g_{\lambda,n} = \lambda \frac{(n+1-r)!}{(n+1)!} e_{n+1} + (1-\lambda) \frac{(n-r)!}{n!} e_n \;\middle|\; \lambda \in [0,1) \right\}$$

і напівінтервали $\Delta_{n;p} := \left(\frac{(n-r+1)!}{(n+1)!} \|e_{n+1}\|_{L_p([0,1])}, \frac{(n-r)!}{n!} \|e_n\|_{L_p([0,1])} \right]$. Нехай також

$$\mathcal{M}_r^{r-1} := \left\{ g_{\rho,r-1} = \frac{1}{r!} e_r + \rho e_{r-1} \;\middle|\; \rho > 0 \right\} \quad \text{і} \quad \Delta_{r-1;p} := \left(\frac{1}{r!} \|e_r\|_{L_p([0,1])}, +\infty \right).$$

Зрозуміло, що для кожного $\delta > 0$ існує єдина функція $y_\delta \in \mathcal{M}_r$ така, що $\|y_\delta\|_{L_p([0,1])} = \delta$. Основним результатом даного підрозділу є наступна теорема.

Теорема 5.5.1. *Нехай $k, r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant r-1$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Тоді для $\delta > 0$*

$$\Omega\left(\delta; D^k; W_\infty^r([0,1]) \cap AM\right) = \left\| y_\delta^{(k)} \right\|_{L_q([0,1])}.$$

В підрозділі 5.6 отримано деякі нові результати щодо розв'язку задачі Ландау-Колмогорова на класі кратно монотонних функцій.

Висловлюю щиру подяку моєму Вчителеві професору Владиславу Федоровичу Бабенку за неоціненний вплив на формування наукового світогляду, а також всім співавторам за плідну співпрацю.

РОЗДІЛ 1

Найкращі лінійні методи наближення класів функцій з заданою мажоратною модуля неперервності

Даний розділ присвячено розв'язанню задачі про знаходження точного значення лінійного одновимірного поперечника класів функцій однієї змінної з заданою мажорантою модуля неперервності в просторі неперервних функцій, а також задачі оптимізації лінійних методів наближення на класах функцій з заданою мажорантою модуля неперервності в просторі неперервних функцій.

1.1. Вступ

Нехай X є нормовний простір з нормою $\|\cdot\|_X$, $\mathcal{M}$ – центрально симетрична підмножина X, тобто разом з довільним елементом $x\in\mathcal{M}$ елемент $(-x)$ також належить множині $\mathcal{M}$, а F є лінійний підпростір в X скінченної вимірності (будемо позначати цей факт через $F\le X$). Величина

$$E\left(\mathcal{M};F\right)_X := \sup_{x\in\mathcal{M}}\inf_{u\in F}\|x-u\|_X$$

називається *похибкою найкращого наближення* множини $\mathcal{M}$ підпростором F. В теорії наближення та її застосуваннях центральне місце посідає задача знаходження величини $E\left(\mathcal{M};F\right)_X$, яка на даний час розв'язана для цілого ряду множин $\mathcal{M}$ і підпросторів F. Звичайно, що за наявності широкого різномаїття наближуючих підпросторів, наприклад, просторів алгебраїчних і тригонометричних поліномів, поліноміальних сплайнів, вейвлет, рідж-функцій, тощо, – природно постає задача знаходження серед них найкращих. Вперше дослідження задач такого роду запропонував А. М. Колмогоров у 1936 р. В статті [273] він означив величину $d_N(\mathcal{M};X)$, яка характеризує можливість найкращого наближення множини $\mathcal{M}$ лінійними многовидами розмірності $N\in\mathbb{N}$.

Означення 1.1.1. *N-поперечником за Колмогоровим множини $\mathcal{M}$ в просторі X називається величина*

$$d_N\left(\mathcal{M};X\right) := \inf_{\substack{F\le X,\\ \dim F\leqslant N}} E\left(\mathcal{M};F\right)_X\,, \tag{1.1}$$

де inf *береться за всіма підпросторами F простору X розмірності не вище за N, множину яких будемо позначати через L_N. Підпростори $F^* \in L_N$, для яких $E(\mathcal{M}; F^*)_X = d_N(\mathcal{M}; X)$ (якщо такі існують), називаються екстремальними.*

Перші результати щодо знаходження точних значень поперечників $d_N(\mathcal{M}; X)$ отримані А. М. Колмогоровим [273] і його учнями, а вагомий поштовх для інтенсивного дослідження поперечників надала стаття В. М. Тихомирова [169], в якій запропоновано ефективний загальний метод встановлення точних оцінок знизу поперечників (1.1), що спирається на топологічну теорему К. Борсука [229].

Дослідженням поперечників за Колмогоровим займалося багато визначних математиків. Завдяки їх зусиллям у багатьох ситуаціях знайдено точні значення величин $d_N(\mathcal{M}; X)$ та встановлена їх асимптотична поведінка (як точна, так і за порядком), коли $N \to \infty$. Змістовний огляд стану досліджень поперечників можна знайти в [171, 95, 315, 336, 246] (див. також [61, 327, 60] і посилання в них).

Разом з поперечником за Колмогоровим в теорії наближення досліджувалися й інші споріднені апроксимативні характеристики множини $\mathcal{M}$. Зокрема, В. М. Тихомиров [169] ввів поняття *лінійного поперечника* для характеризації можливості найкращого наближення $\mathcal{M}$ лінійними многовидами розмірності N.

Означення 1.1.2 ([169]). *Лінійним N-поперечником множини $\mathcal{M}$ в просторі X називається величина*

$$\lambda_N(\mathcal{M}; X) := \inf_{\substack{A: X \to X, \\ \operatorname{rank} A \leqslant N}} \sup_{x \in \mathcal{M}} \|x - Ax\|_X, \tag{1.2}$$

де inf *береться за всіма лінійними неперервними операторами $A : X \to X$ рангу не вище за N.*

Поперечники (1.1) і (1.2) пов'язані між собою тривіальною нерівністю [169]:

$$d_N(\mathcal{M}; X) \leqslant \lambda_N(\mathcal{M}; X).$$

Далі розглянемо питання про точне значення поперечників за Колмогоровим і лінійних поперечників класів функцій з заданою мажорантою модуля неперервності в просторі неперервних функцій. Наведемо необхідні для цього означення. Нехай C – лінійний простір неперервних функцій $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, а $\widetilde{C}$ –

лінійний простір неперервних 1-періодичних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Норму в C і $\widetilde{C}$ визначимо стандартним чином: $\|f\|_C := \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$, де $f \in C$ або $f \in \widetilde{C}$.

Позначимо через H^α клас Гельдера порядку $\alpha \in (0,1]$:

$$H^\alpha := \{f \in C \ : \ \forall x, y \in [0,1] \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|^\alpha\},$$

а через $\widetilde{H}^\alpha$ – його 1-періодичний аналог. Узагальненням класів Гельдера є класи функцій з заданою мажорантою модуля неперервності.

Означення 1.1.3 (див. [92, §6.1]). *Функція $\omega : \mathbb{R}_+^0 \to \mathbb{R}_+^0$ називається модулем неперервності, якщо $\omega(0) = 0$ і ω є неспадною, неперервною справа в точці 0 і напівадитивною, тобто $\omega(x+y) \leqslant \omega(x) + \omega(y)$ для всіх $x, y \in \mathbb{R}_+^0$.*

Класом H^ω функцій з заданою мажорантою ω модуля неперервності називається множина

$$H^\omega := \{f \in C \ : \ \forall x, y \in [0,1] \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \omega(|x-y|)\}.$$

Через $\widetilde{H}^\omega$ позначимо 1-періодичний аналог класу H^ω.

Задача про обчислення точного значення поперечника за Колмогоровим класу H^ω в просторі C розглядалася ще в 1960 р. В. М. Тихомировим [169]. Проте запропоновані ним міркування були помилковими (див. [170]) і виконувалися лише для вузького класу лінійних модулів неперервності ω, тобто $\omega(t) = kt$, $t \in [0,a]$, з деякими константами $a, k > 0$, та всіх достатньо великих $N \in \mathbb{N}$. Остаточно поперечник $d_N\left(H^\omega; C\right)$ для довільного ω знайшов Ю. І. Григорян [69] у 1973 р.:

$$d_N\left(H^\omega; C\right) = \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{1}{N}\right), \qquad N \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

В періодичному випадку точне значення поперечника $d_N\left(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C}\right)$ для непарних $N = 2n-1$, $n \in \mathbb{N}$, було знайдено В. М. Тихомировим [169] у 1960 р. для лінійних модулів неперервності та достатньо великих $N \in \mathbb{N}$, і М. П. Корнєйчуком [89] у 1963 р. в загальному випадку, а для парних $N = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, – В. І. Рубаном [145] у 1974 р. Ними встановлено, що для довільного опуклого вгору модуля неперервності ω і $n \in \mathbb{N}$ мають місце рівності

$$d_{2n-1}\left(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C}\right) = d_{2n}\left(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C}\right) = \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{1}{2n}\right), \tag{1.4}$$

а простір $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометричних поліномів степені не вище за n є екстремальним:

$$d_{2n-1}\left(\widetilde{H}^{\omega};\widetilde{C}\right) = d_{2n}\left(\widetilde{H}^{\omega};\widetilde{C}\right) = E\left(\widetilde{H}^{\omega};\mathcal{T}_{2n-1}\right)_{\widetilde{C}}.$$

На відміну від поперечників за Колмогоровим, точні значення лінійних поперечників $\lambda_N\left(H^{\omega};C\right)$ і $\lambda_N\left(\widetilde{H}^{\omega};\widetilde{C}\right)$ невідомі в загальному випадку, тобто коли ω не є лінійним. Задача про їх обчислення неодноразово ставилася М. П. Корнєйчуком [91, 94, 95, 96] як відкрита задача, навіть, у випадку $N=1$. Також М. П. Корнєйчук (див. [95, §8.2.2]) висунув гіпотезу про те, що

$$\lambda_N\left(\widetilde{H}^{\omega};\widetilde{C}\right) = 2N\int_0^{\frac{1}{2N}}\omega(t)\,\mathrm{d}t, \tag{1.5}$$

а в статті [96] покращив оцінки зверху для $\lambda_N\left(H^{\omega};C\right)$.

Зазвичай, у випадках, коли точні значення лінійних поперечників відомі, вони збігаються зі значеннями відповідних поперечників за Колмогоровим. Але М. П. Корнєйчук [89] ще в 1963 р. продемонстрував нелінійність найкращих методів наближення тригонометричними поліномами класу $\widetilde{H}^{\omega}$ для строго опуклих вгору ω, а в 1996 р. (див. [96]) довів строгу нерівність $d_N\left(H^{\omega};C\right) < \lambda_N\left(H^{\omega};C\right)$. Отже, поперечники (1.3) і (1.4) неможливо використати для отримання точної оцінки знизу відповідних лінійних поперечників. Основна складність задачі про обчислення лінійних поперечників класів H^{ω} і $\widetilde{H}^{\omega}$ в просторі неперервних функцій зумовлена відсутністю методів встановлення точних оцінок знизу похибки лінійного наближення підмножини нормовного простору, які б суттєво використовували лінійність наближуючих методів.

В підрозділі 1.2 обчислено точне значення лінійного одновимірного поперечника $\lambda_1\left(\widetilde{H}^{\omega};\widetilde{C}\right)$ (див. теорему 1.2.1), що доводить гіпотезу М. П. Корнєйчука (1.5) у випадку $N=1$. В неперіодичному випадку встановлено взаємозв'язок між $\lambda_1\left(H^{\omega};C\right)$ і найкращим методом наближення константами класу H^{ω} в просторі C, який дається інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду з параметром (див. теорему 1.2.2). Це рівняння можна розв'язати в явному вигляді для класів Гельдера (див. теорему 1.2.3). Отримані результати дозволяють встановити нові оцінки зверху для лінійних N-поперечників:

$$\lambda_N\left(\widetilde{H}^{\omega};\widetilde{C}\right) \leqslant \lambda_N\left(H^{\omega};C\right) \leqslant \lambda_1\left(H^{\omega_N};C\right), \tag{1.6}$$

де $\omega_N(t) = \omega(t/N)$, $t \in [0,1]$, які покращують раніше відомі оцінки (див. [96]).

Для застосувань чималий інтерес становлять також дослідження методів наближення підмножини $\mathcal{M}$ нормовного простору X методами, що задовольняють певним обмеженням. Для $V \subset X$ і $F \in L_N$ означимо величину

$$E(\mathcal{M}; V; F)_X := \sup_{x \in \mathcal{M}} \inf_{u \in F \cap V} \|x - u\|_X.$$

Слідуючи В. М. Коновалову [88] введемо поняття відносного поперечника за Колмогоровим, який характеризує можливість найкращого наближення множини $\mathcal{M}$ методами, що задовольняють обмеженням V.

Означення 1.1.4. *Відносним N-поперечником за Колмогоровим множини $\mathcal{M}$ в просторі X з обмеженням V називається величина*

$$d_N\left(\mathcal{M}; V; X\right) := \inf_{\substack{F \leq X, \\ \dim F \leqslant N}} E(\mathcal{M}; V; F)_X,$$

де inf *береться за всіма лінійними підпросторами $F \in L_N$.*

Відносні поперечники $d_N(\mathcal{M}; V; X)$ досліджувалися В. М. Коноваловим, В. Ф. Бабенком, Ю. М. Субботіним, С. О. Теляковським, Д. Левіатаном, Й. Жилєвічем, Н. В. Парфінович та іншими (див. [88, 17, 162, 163, 164, 165, 274, 254, 275, 28, 143] і посилання в них).

Поняття відносних лінійних поперечників було введено С. П. Сидоровим [147, 148]. Нехай V – конус в просторі X, тобто разом з кожним елементом $x \in V$ для будь-якого $\lambda \geqslant 0$ елемент λx також належить V.

Означення 1.1.5. *Відносним лінійним N-поперечником множини $\mathcal{M}$ в просторі X з обмеженням V називається величина*

$$\lambda_N\left(\mathcal{M}; V; X\right) := \inf_{\substack{A: X \to X,\, A(V) \subset V, \\ \operatorname{rank} A \leqslant N}} \sup_{x \in \mathcal{M}} \|x - Ax\|_X,$$

де inf *береться за всіма лінійними неперервними операторами $A : X \to X$ рангу не вище за N, які відображають конус V в себе.*

Природно, що одним з найбільш досліджених класів лінійних операторів з обмеженнями є клас позитивних операторів. У випадку простору C позитивним оператором є будь-який лінійний оператор $A : C \to C$, що відображає C_+

в себе, де C_+ – множина неперервних невід'ємних на відрізку $[0,1]$ функцій. Класичні результати щодо умов збіжності послідовності позитивних операторів до тотожного оператора в просторі C, а також оцінок знизу на порядок наближення позитивними поліноміальними операторами отримані П. П. Коровкіним [100, 101]. Огляд сучасного стану досліджень щодо наближення лінійними операторами з обмеженнями можна знайти в [272, 243, 256, 298, 297, 148].

Задача дослідження найкращого лінійного наближення класів H^ω в просторі C позитивними методами має ще одну мотивацію. Відомо, що метод наближення, який реалізує поперечник $d_N\left(H^\omega;C\right)$ і метод найкращого лінійного наближення класу H^ω константами в просторі C є позитивними операторами. Тому найкращий лінійний метод наближення класу H^ω в просторі C має сенс шукати саме серед позитивних операторів. В підрозділі 1.3 знайдено точне значення відносного лінійного поперечника другого порядку $\lambda_2\left(H^\omega;C_+;C\right)$ (див. наслідок 1.3.2).

Додаткові результати можна отримати, якщо накласти на область значень лінійних операторів $A:C\to C$ додаткові обмеження.

Означення 1.1.6. [108, §2] *Конус V в скінченно-вимірному лінійному просторі E називається тілесним, якщо він має хоча б одну внутрішню точку.*

Означення 1.1.7. [108, §2] *Конус V нормовного простору X називається мініедральним конусом, якщо: (1) для будь-якого $x\in V$ маємо $(-x)\notin V$ та (2) для будь-яких $x,y\in V$ існує $z\in V$, для якого $z+V=(x+V)\cap(y+V)$.*

Для зручності множину всіх мініедральних конусів простору X позначимо через $\mathfrak{m}_X$. Має місце наступна характеризація мініедральних тілесних конусів в скінченновимірному лінійному просторі.

Лема 1.1.1. [108, теорема 2.4] *Нехай $n\in\mathbb{N}$ і E – n-вимірний лінійний простір. Підмножина V простору E є мініедральним тілесним конусом тоді і тільки тоді, коли існують n лінійно незалежні елементи $x_1,\ldots,x_n\in E$, для яких $V=\{x=\xi_1x_1+\ldots+\xi_nx_n\,:\,\xi_j\geqslant 0,\ j=1,\ldots,n\}$.*

Означення 1.1.8. *Відносним лінійним мініедральним N-поперечником множини $\mathcal{M}$ в просторі X з обмеженням V будемо називати величину*

$$\lambda_N^{\mathfrak{m}}\left(\mathcal{M};V;X\right):=\inf_{\substack{A:X\to X,\,A(V)\subset V,\\ A(V)\in\mathfrak{m}_X,\,\mathrm{rank}\,A\leqslant N}}\ \sup_{x\in\mathcal{M}}\|x-Ax\|_X,$$

де inf *береться за всіма лінійними операторами* $A : X \to X$ *рангу не вище за* N, *які відображають конус* V *в мініедральний конус, що міститься в* V.

Означення 1.1.9. *Будемо називати позитивний оператор* $A : C \to C$ *мініедральним, якщо* $A(C_+)$ *є мініедральним конусом. Множину позитивних мініедральних тілесних операторів будемо позначати через* $\mathcal{L}^{++}(C)$.

Відзначимо, що множина позитивних мініедральних операторів є доволі широкою. Так, неважко переконатися в тому, що довільний лінійний оператор $A : C \to C$ рангу N, для якого $\sup\limits_{f\in H^\omega} \|f - Af\|_C < \infty$, можна зобразити у вигляді різниці двох позитивних мініедральних операторів $A_1, A_2 \in \mathcal{L}^{++}(C)$ рангу N. В підрозділі 1.3 знайдено значення поперечника $\lambda_N^{\mathfrak{m}}(H^\omega; C_+; C)$ (див. теорему 1.3.1).

Зауважимо, що наведені в розділі результати опубліковано в роботах [154, 155].

1.2. Лінійний одновимірний поперечник класів функцій з заданою мажорантою модуля неперервності

В цьому підрозділі розв'яжемо задачу про обчислення лінійного одновимірного поперечника класів функцій з заданою мажорантою модуля неперервності в просторі неперервних функцій. Нехай ω – довільний модуль неперервності та або $\mathcal{M} = H^\omega$ і $X = C$, або $\mathcal{M} = \widetilde{H}^\omega$ і $X = \widetilde{C}$. Через $\mathcal{L}(X; F)$, $F \le X$, позначимо простір лінійних обмежених операторів $A : X \to F$. Має місце рівність

$$\lambda_1(\mathcal{M}; X) := \inf_{\substack{F\le X,\\ \dim F = 1}} \inf_{A\in\mathcal{L}(X;F)} \sup_{f\in\mathcal{M}} \|f - Af\|_C.$$

Для одновимірного замкненого підпростору F простору X означимо

$$E^\ell(\mathcal{M}; F)_X := \inf_{A\in\mathcal{L}(X;F)} \sup_{f\in\mathcal{M}} \|f - Af\|_C$$

і позначимо через K підпростір констант. Оскільки $K \subset \mathcal{M}$, то величина $E^\ell(\mathcal{M}; F)_X$ є скінченою тоді і тільки тоді, коли $F = K$. Отже,

$$\lambda_1(\mathcal{M}; X) = \inf_{A\in\mathcal{L}(X;K)} \sup_{f\in\mathcal{M}} \|f - Af\|_C. \tag{1.7}$$

Нехай V – множина функцій $\sigma : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $\sigma(0) = 0$, з обмеженою на відрізку $[0, 1]$ варіацією, і нехай V_1 – підпростір V, що складається з функцій

$\sigma \in V$, для яких $\sigma(1) = 1$. Застосовуючи теорему Ріса [86, Р. IV, §6.6] про зображення лінійного обмеженого функціонала на C і $\widetilde{C}$, рівність (1.7) перепишемо в наступному вигляді:

$$\lambda_1 (\mathcal{M}; X) = \inf_{\sigma \in V_1} \sup_{f \in \mathcal{M}} \left\| f - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\sigma(t) \right\|_C . \tag{1.8}$$

Означення 1.2.1. *Функція $\sigma^* \in V_1$ породжує найкращий лінійний метод наближення множини $\mathcal{M}$ простором констант, якщо*

$$\sup_{f \in \mathcal{M}} \left\| f - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\sigma^*(t) \right\|_C = \lambda_1 (\mathcal{M}; X) .$$

1.2.1. Лінійний одновимірний поперечник класу $\widetilde{H}^\omega$ в $\widetilde{C}$

Теорема 1.2.1. *Нехай ω – довільний модуль неперервності. Тоді*

$$\lambda_1 \left(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C} \right) = 2 \int_0^{1/2} \omega(t)\,\mathrm{d}t,$$

і найкращий лінійний метод наближення класу $\widetilde{H}^\omega$ простором констант породжується функцією $\sigma(t) = t$, $t \in [0, 1]$.

Зауваження 1.2.1. *В [154, 155] теорема 1.2.1 була встановлена для опуклого вгору модуля неперервності ω.*

Зауваження 1.2.2. *Теорема 1.2.1 підтверджує гіпотезу* (1.5) *у випадку $N = 1$.*

Для доведення теореми 1.2.1 переконаємося, що має місце подвійна рівність

$$\lambda_1 \left(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C} \right) = \sup_{f \in \widetilde{H}^\omega} \left\| f - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \right\|_C = 2 \int_0^{1/2} \omega(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.9}$$

Для $a \in [0, 1]$ і $t \in \mathbb{R}$ розглянемо функцію

$$\tilde{\varphi}_\omega(a; t) := \min_{n \in \mathbb{Z}} \{\omega(|a - t - n|)\}.$$

Вочевидь, $\tilde{\varphi}_\omega(a; \cdot) \in \widetilde{H}^\omega$ для всіх $a \in [0, 1]$. Спочатку доведемо другу рівність в (1.9).

Лема 1.2.1. *Для довільного модуля неперервності ω і $x \in [0, 1]$,*

$$\sup_{f \in \widetilde{H}^\omega} \left| f(x) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \right| = 2 \int_0^{1/2} \omega(t)\,\mathrm{d}t.$$

Доведення. Дійсно, нехай $x \in [0,1]$ та $f \in \widetilde{H}^\omega$. Тоді

$$\left|f(x) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |f(x) - f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \tilde{\varphi}_\omega(x;t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{1/2} \omega(t)\,\mathrm{d}t.$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned}\sup_{f\in\widetilde{H}^\omega}\left|f(x) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| &\geqslant \sup_{a\in[0,1]}\left|\tilde{\varphi}_\omega(a;x) - \int_0^1 \tilde{\varphi}_\omega(a;t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\geqslant \left|\tilde{\varphi}_\omega(x;x) - \int_0^1 \tilde{\varphi}_\omega(x;t)\,\mathrm{d}t\right| = 2\int_0^{1/2}\omega(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

що завершує доведення. □

Доведемо тепер першу рівність в (1.9). Для всіх $\sigma \in V_1$ і $x \in [0,1]$ означимо

$$\widetilde{M}_\sigma(x) := \sup_{f\in\widetilde{H}^\omega}\left|f(x) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\sigma(t)\right|.$$

Має місце наступне твердження.

Лема 1.2.2. *Нехай ω є довільний модуль неперервності. Тоді для будь-якої функції $\sigma \in V_1$ існує така точка $\tilde{x}_\sigma \in [0,1]$, в якій*

$$\widetilde{M}_\sigma\left(\tilde{x}_\sigma\right) \geqslant 2\int_0^{1/2}\omega(t)\,\mathrm{d}t.$$

Доведення. Припустимо супротивне, що для всіх $x \in [0,1]$

$$\widetilde{M}_\sigma\left(x\right) < 2\int_0^{1/2}\omega(t)\,\mathrm{d}t$$

і, отже,

$$\int_0^1 \widetilde{M}_\sigma\left(x\right)\,\mathrm{d}x < 2\int_0^{1/2}\omega(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.10}$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \widetilde{M}_\sigma\left(x\right)\,\mathrm{d}x &\geqslant \int_0^1 \sup_{a\in[0,1]}\left|\tilde{\varphi}_\omega(a;x) - \int_0^1 \tilde{\varphi}_\omega(a;t)\,\mathrm{d}\sigma(t)\right|\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_0^1\left|\int_0^1 \tilde{\varphi}_\omega(x;t)\,\mathrm{d}\sigma(t)\right|\,\mathrm{d}x \geqslant \left|\int_0^1\int_0^1 \tilde{\varphi}_\omega(x;t)\,\mathrm{d}\sigma(t)\,\mathrm{d}x\right|.\end{aligned}$$

Застосовуючи обернену теорему Фубіні ([176, §36]) і лему 1.2.1, отримаємо

$$\int_0^1 \widetilde{M}_\sigma\left(x\right)\,\mathrm{d}x \geqslant \left|\int_0^1\int_0^1 \tilde{\varphi}_\omega(x;t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma(t)\right| = 2\int_0^{1/2}\omega(t)\,\mathrm{d}t.$$

Остання нерівність суперечить нерівності (1.10). Лема доведена. □

Перейдемо безпосередньо до доведення теореми 1.2.1.

Доведення теореми 1.2.1. З леми 1.2.2 і формули (1.8) неважко бачити, що

$$\lambda_1\left(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C}\right) = \inf_{\sigma\in V_1} \sup_{x\in[0,1]} \widetilde{M_\sigma}(x) \geqslant \inf_{\sigma\in V_1} \widetilde{M_\sigma}\left(\tilde{x}_\sigma\right) \geqslant 2\int_0^{1/2} \omega(t)\,\mathrm{d}t.$$

Об'єднуючи останню нерівність з лемою 1.2.1, встановлюємо вірність першої рівності в (1.9). Таким чином, теорема 1.2.1 доведена. □

1.2.2. Лінійний одновимірний поперечник класу H^ω в C

Теорема 1.2.2. *Нехай ω – довільний модуль неперервності. Тоді існує така неспадна функція $g_\omega \in V_1$, що $g_\omega(t) + g_\omega(1-t) = 1$ для всіх $t \in [0,1]$ і*

$$\lambda_1\left(H^\omega; C\right) = \int_0^1 \omega(|x-t|)\,\mathrm{d}g_\omega(t) \qquad \text{для будь-якого} \quad x \in [0,1]. \tag{1.11}$$

Крім того, функція g_ω породжує найкращий лінійний метод наближення класу H^ω простором констант.

Зауваження 1.2.3. *В [154, 155] теорема 1.2.2 була доведена для опуклого вгору модуля неперервності.*

Наступне твердження є наслідком теореми 1.2.2.

Твердження 1.2.1. *Нехай ω є довільний модуль неперервності. Якщо існують функція $g \in V_1$ і число $\lambda \geqslant 0$, для яких рівність*

$$\int_0^1 \omega(|x-t|)\,\mathrm{d}g(t) = \lambda \tag{1.12}$$

виконується для всіх $x \in [0,1]$, то $\lambda = \lambda_1\left(H^\omega; C\right)$.

Зауваження 1.2.4. *Теорема 1.2.2 встановлює зв'язок між лінійним поперечником $\lambda_1\left(H^\omega; C\right)$ і функцією $g_\omega \in V_1$, що породжує найкращий лінійний метод наближення класу H^ω простором констант. Таким чином, співвідношення (1.11) можна розглядати як неявну відповідь на питання про точне значення поперечника $\lambda_1\left(H^\omega; C\right)$.*

Для доведення теореми 1.2.2 застосуємо схему доведення теореми 1.2.1 з певними змінами. Нам знадобиться наступне допоміжне твердження.

Лема 1.2.3. *Нехай ω є довільний модуль неперервності. Тоді існує така неспадна функція $g_\omega \in V_1$, що $g_\omega(t) + g_\omega(1-t) = 1$ для всіх $t \in [0,1]$, а для всіх $x \in [0,1]$ має місце рівність*

$$\int_0^1 \omega(|x-t|)\,\mathrm{d}g_\omega(t) = \int_0^1 \omega(t)\,\mathrm{d}g_\omega(t). \tag{1.13}$$

Доведення леми 1.2.3 спирається на наступне твердження.

Лема 1.2.4. *Нехай $n \in \mathbb{N}$ та ω є довільий модуль неперервності. Тоді існує така неспадна функція $g_n \in V_1$, що для будь-якого $k = 1, \ldots, n$*

$$\int_0^1 \omega\left(\left|\frac{k}{n} - t\right|\right) \mathrm{d}g_n(t) = \int_0^1 \omega(t)\,\mathrm{d}g_n(t). \tag{1.14}$$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок строго напівадитивного модуля неперервності ω, тобто $\omega(x+y) < \omega(x) + \omega(y)$ для всіх $x, y \in \mathbb{R}_+$. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$ і розглянемо стандартний симплекс

$$\mathcal{P}_n = \{\mathbf{a} = (a_0, \ldots, a_n) \,:\, a_0 + \ldots + a_n = 1 \text{ і } a_j \geqslant 0,\ j = 0, \ldots, n\}.$$

Кожній точці $\mathbf{a} \in \mathcal{P}_n$ поставимо у відповідність кусково-сталу функцію

$$z_{\mathbf{a}} := \sum_{j=0}^{n-1} a_j \chi_{\left(\frac{j}{n}, 1\right]} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{2} \chi_{\left\{\frac{j}{n}\right\}} + a_n \chi_{\{1\}},$$

де χ_E – характеристична функція множини E, тобто $\chi_E(t) = 1$ для $t \in E$ і $\chi_E(t) = 0$ для $t \notin E$. Переконаємося в існуванні такої точки $\mathbf{a} \in \mathcal{P}_n$, що для функції $g_n = z_{\mathbf{a}}$ виконуються рівності (1.14).

Зауважимо, що для всіх $\mathbf{a} \in \mathcal{P}_n$ функція $z_{\mathbf{a}}$ є неспадною на відрізку $[0,1]$. Більш того, для всіх $x \in [0,1]$ виконується співвідношення

$$\int_0^1 \omega(|x-t|)\,\mathrm{d}z_{\mathbf{a}}(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j \omega\left(\left|x - \frac{j}{n}\right|\right).$$

Отже, $z_{\mathbf{a}}$ задовольняє рівності (1.14) тоді і тільки тоді, коли для $\forall k = 1, \ldots, n$,

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \omega\left(\frac{|k-j|}{n}\right) = \sum_{j=0}^{n} a_j \omega\left(\frac{j}{n}\right). \tag{1.15}$$

Розглянемо функцію

$$\mathcal{F}(\mathbf{a}) := \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} a_j a_k \omega\left(\frac{|j-k|}{n}\right), \qquad \mathbf{a} \in \mathcal{P}_n,$$

і множину Ω_n точок $\mathbf{b} \in \mathcal{P}_n$, для яких $\mathcal{F}(\mathbf{b}) = \max\limits_{\mathbf{a}\in\mathcal{P}_n} \mathcal{F}(\mathbf{a})$. Оскільки $\mathcal{P}_n$ компактна множина, то $\Omega_n \neq \emptyset$. Доведемо, що Ω_n містить виключно точки з додатними координатами. Дійсно, оберемо довільну точку $\mathbf{b} = (b_0, \ldots, b_n) \in \Omega_n$ і припустимо супротивне: $b_0 = 0$. Через $s \in \mathbb{N}$, $s \leqslant n$, позначимо індекс, для якого $b_0 = \ldots = b_{s-1} = 0$ і $b_s > 0$. Тоді для всіх $\varepsilon \in (0, b_s)$ точка $\mathbf{b}^\varepsilon := (\varepsilon, 0, \ldots, 0, b_s - \varepsilon, b_{s+1}, \ldots, b_n)$ належить множині $\mathcal{P}_n$. Розглянемо допоміжну функцію $\mathcal{G}(\varepsilon) := \mathcal{F}\left(\mathbf{b}^\varepsilon\right)$, $\varepsilon \in (0, b_s)$. Неважко бачити, що

$$\mathcal{G}'(\varepsilon) = 2\left\{-2\varepsilon\omega\left(\frac{s}{n}\right) + \sum_{k=s}^{n} b_k\left[\omega\left(\frac{k}{n}\right) - \omega\left(\frac{|k-s|}{n}\right)\right]\right\} \geqslant 2\omega\left(\frac{s}{n}\right)(b_s - 2\varepsilon).$$

Тому $\mathcal{G}'(0) > 0$ і $\mathcal{F}\left(\mathbf{b}^\varepsilon\right) > \mathcal{F}\left(\mathbf{b}\right)$ для будь-якого достатньо малого $\varepsilon > 0$, що суперечить побудові множини Ω_n і вибору точки b. Таким чином, $b_0 > 0$. Застосовуючи аналогічні міркування можна показати, що $b_n > 0$.

Далі припустимо, що $b_s = 0$ для деякого $s \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant s \leqslant n-1$. Нехай s_1 і s_2 – точки, найближчі до s справа і зліва відповідно, для яких $b_{s_1} > 0$ і $b_{s_2} > 0$. Без зменшення загальності припустимо, що $b_{s_1} \geqslant b_{s_2}$. Для кожного $\varepsilon \in (0, b_{s_1})$ розглянемо точку $\mathbf{b}^\varepsilon := (b_0, \ldots, b_{s_1-1}, b_{s_1} - \varepsilon, 0, \ldots, 0, \varepsilon, 0, \ldots, 0, b_{s_2}, \ldots, b_n)$ з координатою ε на позиції з індексом s. Зрозуміло, що $\mathbf{b}^\varepsilon \in \mathcal{P}_n$.

Розглянемо функцію $\mathcal{G}(\varepsilon) := \mathcal{F}\left(\mathbf{b}^\varepsilon\right)$, $\varepsilon \in (0, b_{s_1})$. Зрозуміло, що

$$\mathcal{G}'(\varepsilon) = 2\sum_{j=0}^{n} b_j^\varepsilon\left(\omega\left(\frac{|s-j|}{n}\right) - \omega\left(\frac{|s_1-j|}{n}\right)\right).$$

Зі строгої напівадитивності модуля неперервності ω випливає, що

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}'(0) &= 2\left\{\sum_{j=0}^{s_1} b_j\left(\omega\left(\frac{s-j}{n}\right) - \omega\left(\frac{s_1-j}{n}\right)\right)\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{j=s_2}^{n} b_j\left(\omega\left(\frac{j-s}{n}\right) - \omega\left(\frac{j-s_1}{n}\right)\right)\right\} \\
&\geqslant 2b_{s_1}\omega\left(\frac{s-s_1}{n}\right) + 2b_{s_2}\left(\omega\left(\frac{s_2-s}{n}\right) - \omega\left(\frac{s_2-s_1}{n}\right)\right) \\
&\geqslant 2b_{s_2}\left(\omega\left(\frac{s-s_1}{n}\right) + \omega\left(\frac{s_2-s}{n}\right) - \omega\left(\frac{s_2-s_1}{n}\right)\right) > 0.
\end{aligned}$$

Отже, $\mathcal{F}\left(\mathbf{b}^\varepsilon\right) > \mathcal{F}(\mathbf{b})$ для будь-якого достатньо малого $\varepsilon > 0$, що суперечить побудові множини Ω_n і вибору точки $\mathbf{b}$.

Таким чином, множина Ω_n містить виключно точки з додатними координатами. Нехай $\mathbf{b} \in \Omega_n$ – довільна фіксована точка. Зауважимо, що функція $\mathcal{F}$ неперервно диференційовна на своїй області визначення та в точці $\mathbf{b}$ досягає свого максимуму на множині $\mathcal{P}_n$. Неважко бачити, що виконуються умови принципу множників Лагранжа ([66, §2.2.3]), згідно якого існує множник $\lambda \neq 0$ такий, що функція

$$\mathcal{L}(\mathbf{a}) := \mathcal{F}(\mathbf{a}) + \lambda \left(\sum_{j=0}^{n} a_j - 1 \right), \qquad \mathbf{a} \in \mathcal{P}_n,$$

задовольняє умовам стаціонарності в точці $\mathbf{a} = \mathbf{b}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_k}(\mathbf{b}) = 2 \sum_{j=0}^{n} b_j \omega \left(\frac{|k-j|}{n} \right) + \lambda = 0, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

З цих співвідношень випливають рівності (1.15) для точки b.

Розглянемо випадок довільного модуля неперервності ω. Для $m \in \mathbb{N}$ означимо $\omega_m(t) := \omega(t) + m^{-1}\sqrt{t}$, $t \in \mathbb{R}_+^0$. Зрозуміло, що ω_m – строго напівадитивний модуль неперервності. Вище було доведено, що існує така точка $\mathbf{b}^m \in \mathcal{P}_n$, що

$$\sum_{j=0}^{n} b_j^m \omega_m \left(\frac{|k-j|}{n} \right) = \sum_{j=0}^{n} b_j^m \omega_m \left(\frac{j}{n} \right), \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{1.16}$$

Оскільки множина $\mathcal{P}_n$ є компактною, то без зменшення загальності можна припустити, що послідовність $\{\mathbf{b}^m\}_{m=1}^{\infty}$ збігається до деякої точки $\mathbf{b} \in \mathcal{P}_n$, коли $m \to \infty$. Спрямовуючи m до нескінченності в рівностях (1.16), отримаємо

$$\sum_{j=0}^{n} b_j \omega \left(\frac{|k-j|}{n} \right) = \sum_{j=0}^{n} b_j \omega \left(\frac{j}{n} \right), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Лема доведена. □

Доведення леми 1.2.3. За лемою 1.2.4, для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує неспадна функція $g_n \in V_1$, яка задовольняє рівності (1.14). Розглянемо послідовність функцій $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$. Зауважимо, що для всіх $n \in \mathbb{N}$, $g_n \in V_1$ і g_n неспадна на відрізку $[0,1]$. Отже, за теоремою Хелі (див. [86, §6.5]), існує підпослідовність $\{g_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, яка поточково збігається до функції $g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Більше того, $g \in V_1$, g є неспадною на відрізку $[0,1]$ і для всіх $f \in C$ виконується граничне співвідношення

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}g_{n_k}(t) = \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}g(t).$$

Зокрема, для всіх $x \in [0,1]$

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \omega(|x-t|)\,\mathrm{d}g_{n_k}(t) = \int_0^1 \omega(|x-t|)\,\mathrm{d}g(t).$$

З останнього співвідношення випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $N \in \mathbb{N}$, що для всіх $k > N$ має місце нерівність

$$\left|\int_0^1 \omega(|x-t|)\,\mathrm{d}g_{n_k}(t) - \int_0^1 \omega(|x-t|)\,\mathrm{d}g(t)\right| < \varepsilon. \tag{1.17}$$

Тепер для всіх $k > N$ розглянемо функцію

$$T_k(x) := \int_0^1 \omega(|x-t|)\,\mathrm{d}g_{n_k}(t), \quad x \in [0,1].$$

Зрозуміло, що $T_k \in H^\omega$. Також, за вибором послідовності $\{g_n\}_{n=1}^\infty$, функція T_k приймає рівні значення в точках j/n_k, $j = 0, \ldots, n_k$. Застосовуючи ці зауваження до нерівності (1.17), отримаємо

$$\left|\int_0^1 \omega(t)\,\mathrm{d}g_{n_k}(t) - \int_0^1 \omega(|x-t|)\,\mathrm{d}g(t)\right| \leqslant \varepsilon + \omega\left(\frac{1}{2n_k}\right).$$

Відтак, для всіх $x \in [0,1]$

$$\int_0^1 \omega(|x-t|)\,\mathrm{d}g(t) = \lim_{k\to\infty} \int_0^1 \omega(t)\,\mathrm{d}g_{n_k}(t) = \int_0^1 \omega(t)\,\mathrm{d}g(t).$$

Нарешті помітимо, що для $\tilde{g}(t) = 1 - g(1-t)$, $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \omega(|x-t|)\,\mathrm{d}\tilde{g}(t) &= \int_0^1 \omega(|1-x-t|)\,\mathrm{d}g(t) = \int_0^1 \omega(t)\,\mathrm{d}g(t) \\ &= \int_0^1 \omega(1-t)\,\mathrm{d}g(t) = \int_0^1 \omega(t)\,\mathrm{d}\tilde{g}(t).\end{aligned}$$

Таким чином, функція

$$g_\omega(t) := \frac{g(t) + \tilde{g}(t)}{2}, \qquad t \in [0,1],$$

належить множині V_1, є неспадною на відрізку $[0,1]$ і задовольняє рівність (1.13). Крім того, рівність $g_\omega(t) + g_\omega(1-t) = 1$ виконується для всіх $t \in [0,1]$. □

Для $a, t \in [0,1]$ розглянемо функцію $\varphi_\omega(a;t) := \omega(|a-t|)$. Неважко бачити, що $\varphi_\omega(a;\cdot) \in H^\omega$ і $\varphi_\omega(a;a) = 0$ для всіх $a \in [0,1]$.

Лема 1.2.5. *Нехай ω є довільний модуль неперервності. Тоді для $x \in [0,1]$,*

$$\sup_{f\in H^\omega}\left|f(x)-\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}g_\omega(t)\right| = \int_0^1 \omega(t)\,\mathrm{d}g_\omega(t),$$

де функція g_ω означена в лемі 1.2.3.

Доведення. Дійсно, нехай $x \in [0,1]$ і $f \in H^\omega$. За означенням функції $g_\omega \in V_1$,

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}g_\omega(t)\right| &= \left|\int_0^1 [f(x)-f(t)]\,\mathrm{d}g_\omega(t)\right| \leqslant \int_0^1 \omega(|x-t|)\,\mathrm{d}g_\omega(t)\\ &= \int_0^1 \omega(t)\,\mathrm{d}g_\omega(t).\end{aligned}$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned}\sup_{f\in H^\omega}\left|f(x)-\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}g_\omega(t)\right| &\geqslant \sup_{a\in[0,1]}\left|\varphi_\omega(a;x)-\int_0^1 \varphi_\omega(a;t)\,\mathrm{d}g_\omega(t)\right|\\ &\geqslant \left|\int_0^1 \varphi_\omega(x;t)\,\mathrm{d}g_\omega(t)\right| = \int_0^1 \omega(t)\,\mathrm{d}g_\omega(t). \quad \square\end{aligned}$$

Для $\sigma \in V_1$ і $x \in [0,1]$ означимо

$$M_\sigma(x) := \sup_{f\in H^\omega}\left|f(x)-\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\sigma(t)\right|.$$

Лема 1.2.6. *Нехай ω є довільний модуль неперервності. Тоді для будь-якої $\sigma \in V_1$ існує така точка $x_\sigma \in [0,1]$, що*

$$M_\sigma(x_\sigma) \geqslant \int_0^1 \omega(t)\,\mathrm{d}g_\omega(t).$$

Доведення. Припустимо супротивне, що для всіх $x \in [0,1]$,

$$M_\sigma(x) < \int_0^1 \omega(t)\,\mathrm{d}g_\omega(t).$$

Тоді

$$\int_0^1 M_\sigma(x)\,\mathrm{d}g_\omega(x) < \int_0^1 \omega(t)\,\mathrm{d}g_\omega(t). \tag{1.18}$$

Застосовуючи обернену теорему Фубіні [176, §36] і лему 1.2.3, отримаємо

$$\begin{aligned}\int_0^1 M_\sigma(x)\,\mathrm{d}g_\omega(x) &\geqslant \int_0^1 \sup_{a\in[0,1]}\left|\varphi_\omega(a;x)-\int_0^1 \varphi_\omega(a;t)\,\mathrm{d}\sigma(t)\right|\mathrm{d}g_\omega(x)\\ &\geqslant \int_0^1 \left|\int_0^1 \varphi_\omega(x;t)\,\mathrm{d}\sigma(t)\right|\,\mathrm{d}g_\omega(x) \geqslant \left|\int_0^1\int_0^1 \varphi_\omega(x;t)\,\mathrm{d}\sigma(t)\mathrm{d}g_\omega(x)\right|\\ &= \left|\int_0^1\int_0^1 \varphi_\omega(x;t)\,\mathrm{d}g_\omega(x)\mathrm{d}\sigma(t)\right| = \int_0^1 \omega(x)\,\mathrm{d}g_\omega(x).\end{aligned}$$

Останнє суперечить нерівності (1.18), що завершує доведення леми. $\square$

Нарешті, перейдемо до доведення теореми 1.2.2.

Доведення теореми 1.2.2. Об'єднуючи лему 1.2.5 з формулою (1.8), матимемо

$$\lambda_1\left(H^\omega;C\right)=\inf_{\sigma\in V_1}\sup_{x\in[0,1]}M_\sigma(x)\geqslant\inf_{\sigma\in V_1}M_\sigma\left(x_\sigma\right)\geqslant\int_0^1\omega(t)\,\mathrm{d}g_\omega(t)=\lambda_1\left(H^\omega;C\right).$$

Теорема 1.2.2 доведена. □

Доведення твердження 1.2.1. Припустимо, що існують $g\in V_1$ і $\lambda\in\mathbb{R}$ такі, що для будь-якого $x\in[0,1]$ виконується рівність (1.12), тобто

$$\int_0^1\omega(|x-t|)\,\mathrm{d}g(t)=\lambda.$$

Тоді

$$\int_0^1\int_0^1\omega(|x-t|)\,\mathrm{d}g(t)\,\mathrm{d}g_\omega(x)=\lambda,$$

де функція g_ω означена в лемі 1.2.3. Застосовуючи обернену теорему Фубіні [176, §36] і теорему 1.2.2, отримаємо

$$\int_0^1\int_0^1\omega(|x-t|)\,\mathrm{d}g(t)\mathrm{d}g_\omega(x)=\int_0^1\int_0^1\omega(|t-x|)\,\mathrm{d}g_\omega(x)\mathrm{d}g(t)=\lambda_1\left(H^\omega;C\right).$$

Тому $\lambda=\lambda_1\left(H^\omega;C\right)$, що й потрібно було довести. □

1.2.3. Лінійний одновимірний поперечник класів Гельдера в просторі C

У випадку класів Гельдера H^α, $\alpha\in(0,1)$, застосуємо твердження 1.2.1 для обчислення поперечника $\lambda_1\left(H^\alpha;C\right)$ в явному вигляді.

Теорема 1.2.3. *Якщо $\alpha\in(0,1)$, то*

$$\lambda_1\left(H^\alpha;C\right)=\frac{\Gamma(2-\alpha)\Gamma\left(1/2+\alpha/2\right)}{2\Gamma\left(3/2-\alpha/2\right)},$$

а найкращий лінійний метод наближення класу H^α простором констант породжується функцією

$$g(x):=\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma^2\left(1/2-\alpha/2\right)}\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{t^{1/2+\alpha/2}(1-t)^{1/2+\alpha/2}},\qquad x\in[0,1],\tag{1.19}$$

де $\Gamma(x)$ – гамма-функція Ойлера.

Доведення. Покажемо, що функція g, означена в (1.19), породжує найкращий лінійний метод наближення класу H^α простором констант. Спочатку відзначимо, що $g \in V_1$ і $g(x)+g(1-x)=1$ для всіх $x\in[0,1]$. Розглянемо допоміжну функцію

$$I(x):=\int_0^1 |x-t|^\alpha \,\mathrm{d}g(t)=\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma^2\left(1/2-\alpha/2\right)}\int_0^1 \frac{|x-t|^\alpha\,\mathrm{d}t}{t^{1/2+\alpha/2}(1-t)^{1/2+\alpha/2}},\quad x\in[0,1].$$

Переконаємося, що функція I є сталою. Дійсно, для всіх $x\in(0,1)$ маємо

$$I'(x)=\frac{\alpha\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma^2\left(1/2-\alpha/2\right)}\left(\int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t}{t^{1/2+\alpha/2}(1-t)^{1/2+\alpha/2}}-\int_x^1 \frac{(t-x)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t}{t^{1/2+\alpha/2}(1-t)^{1/2+\alpha/2}}\right).$$

Підставляючи $t=\frac{x(1-u)}{1-xu}$ в перший інтеграл, а $t=\frac{x}{1-(1-x)u}$ – в другий, отримаємо

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t}{t^{1/2+\alpha/2}(1-t)^{1/2+\alpha/2}}=\sqrt{x^{\alpha-1}(1-x)^{\alpha-1}}\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{-\alpha/2-1/2}\,\mathrm{d}u,$$

$$\int_x^1 \frac{(t-x)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t}{t^{1/2+\alpha/2}(1-t)^{1/2+\alpha/2}}=\sqrt{x^{\alpha-1}(1-x)^{\alpha-1}}\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{-\alpha/2-1/2}\,\mathrm{d}u.$$

Таким чином, $I'(x)=0$. Отже, зважаючи на теорему 1.2.2, функція g породжує найкращий лінійний метод наближення класу H^α простором констант. Крім того,

$$\begin{aligned}\lambda_1\left(H^\alpha;C\right) &= \int_0^1 t^\alpha\,\mathrm{d}g(t)=\frac{\Gamma\left(1-\alpha\right)}{\Gamma^2\left(1/2-\alpha/2\right)}\int_0^1 \frac{t^{\alpha/2-1/2}\,\mathrm{d}t}{(1-t)^{1/2+\alpha/2}}\\ &= \frac{\Gamma\left(1-\alpha\right)\Gamma\left(1/2+\alpha/2\right)}{\Gamma\left(1/2-\alpha/2\right)}.\end{aligned}$$

□

1.3. Найкращі позитивні методи наближення на класі H^ω в просторі C

З теореми 1.2.2 миттєво випливають наступні рівності для відносних лінійних поперечників класу H^ω в просторі C:

$$\lambda_1\left(H^\omega;C_+;C\right)=\lambda_1^{\mathfrak{m}}\left(H^\omega;C_+;C\right)=\lambda_1\left(H^\omega;C\right).$$

У випадку $N\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ з теореми 1.2.2 нескладно отримати оцінки зверху (1.6) для лінійних поперечників $\lambda_N\left(H^\omega;C\right)$ і $\lambda_N\left(\widetilde{H}^\omega;\widetilde{C}\right)$. Зокрема, для $\alpha\in(0,1)$,

$$\lambda_N\left(H^\alpha;C\right)\leqslant\frac{\Gamma(2-\alpha)\Gamma\left(1/2+\alpha/2\right)}{2N^\alpha\Gamma\left(3/2-\alpha/2\right)}.$$

Ці оцінки стають точними, якщо замість лінійного поперечника $\lambda_N\left(H^\omega; C\right)$ розглянути відносний лінійний мініедральний поперечник $\lambda_N^{\mathfrak{m}}\left(H^\omega; C_+; C\right)$. Даний підрозділ присвячено доведенню цього твердження. Як наслідок з отриманих результатів буде обчислено відносний лінійний поперечник $\lambda_2\left(H^\omega; C_+; C\right)$.

Означення 1.3.1. *Лінійний оператор $A : C \to C$ називаєтъся додатним мініедральним (додатним N-мініедральним), якщо його можна зобразити у вигляді*

$$Af = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(f) \cdot e_j, \qquad f \in C,$$

для деяких лінійних обмежених додатних функціоналів $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ на C і невід'ємних функцій $e_1, \ldots, e_N \in C$.

1.3.1. Відносний лінійний мініедральний тілесний поперечник класу H^ω в просторі C

Нехай $N \in \mathbb{N}$. Для $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2N}\right)$ через $\chi_1^\varepsilon, \ldots, \chi_N^\varepsilon$ позначимо довільний набір невід'ємних неперервних функцій таких, що:

(A1) $\chi_k^\varepsilon(t) = 1$, $t \in [(k-1)/N + \varepsilon, k/N - \varepsilon]$, для всіх $k = 1, \ldots, N$;

(A2) $\operatorname{supp} \chi_k^\varepsilon \subset [(k-1)/N - \varepsilon, k/N + \varepsilon]$ для всіх $k = 1, \ldots, N$;

(A3) $\chi_1^\varepsilon(t) + \ldots + \chi_N^\varepsilon(t) = 1$ для всіх $t \in [0, 1]$.

Для $g \in V_1$, побудуємо оператор $A_g^\varepsilon : C \to C$:

$$A_g^\varepsilon f = \sum_{k=1}^{N} \chi_k^\varepsilon \cdot \int_{(k-1)/N}^{k/N} f(t)\, \mathrm{d}g(Nt - k + 1). \tag{1.20}$$

Неважко бачити, що A_g^ε є лінійним оператором рангу N для всіх $g \in V_1$ і, крім того, A_g^ε є позитивним мініедральним оператором для неспадних функцій $g \in V_1$. Основим результатом цього підрозділу є наступна теорема.

Теорема 1.3.1. *Нехай ω є довільний модуль неперервності, $N \in \mathbb{N}$ та $\omega_N(t) = \omega(t/N)$, $t \in [0, 1]$. Тоді*

$$\lambda_N^{\mathfrak{m}}\left(H^\omega; C_+; C\right) = \lambda_1\left(H^{\omega_N}; C\right).$$

Більш того, якщо функція $g \in V_1$ породжує найкращий лінійний метод наближення класу H^{ω_N} простором констант, то

$$\lambda_N^{\mathfrak{m}}\left(H^{\omega};C_+;C\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\sup_{f\in H^{\omega}}\left\|f - A_g^{\varepsilon}f\right\|_C.$$

Об'єднуючи теореми 1.2.3 і 1.3.1, отримаємо:

Наслідок 1.3.1. *Якщо $\alpha \in (0,1)$ і $N \in \mathbb{N}$, то*

$$\lambda_N^{\mathfrak{m}}\left(H^{\alpha};C_+;C\right) = \frac{\Gamma(2-\alpha)\Gamma\left(1/2+\alpha/2\right)}{2N^{\alpha}\Gamma\left(3/2-\alpha/2\right)}.$$

Ще одним наслідком теорем 1.2.2 і 1.3.1 є наступне твердження.

Наслідок 1.3.2. *Нехай ω є довільний модуль неперервності. Тоді*

$$\lambda_2\left(H^{\omega};C_+;C\right) = \lambda_2^{\mathfrak{m}}\left(H^{\omega};C_+;C\right).$$

Доведення сформульованих результатів розпочнемо з допоміжних лем.

Лема 1.3.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$ та $A : C \to C$ – позитивний мініедральний оператор рангу n. Тоді існують n лінійно незалежних функцій $e_1,\dots,e_n \in C$ і додатні лінійні обмежені функціонали $\varphi_1,\dots,\varphi_n \in C^*$ такі, що для всіх $f \in C$*

$$Af = \sum_{j=1}^{n}\varphi_j(f)\cdot e_j.$$

Доведення. Оскільки оператор A має ранг n, то $E = A(C)$ є n-вимірним підпростором простору C. Зважаючи на опуклість конусу невід'ємних функцій C_+ та позитивність і мініедральність оператора A, маємо, що $A\left(C_+\right)$ – мініедральний тілесний конус в лінійному просторі E та $A\left(C_+\right) \subset C_+$. Тоді за лемою 1.3.1 існують n лінійно незалежних функцій $e_1,\dots,e_n \in C_+$ такі, що

$$A\left(C_+\right) = \left\{x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n \,:\, \xi_j \geqslant 0,\ j = 1,\dots,n\right\}. \tag{1.21}$$

Далі, оскільки оператор A має додатний ранг, то існують лінійні обмежені функціонали $\varphi_1,\dots,\varphi_n \in C^*$ такі, що для всіх $f \in C$ має місце рівність

$$Af = \sum_{j=1}^{n}\varphi_j(f)\cdot e_j.$$

Переконаємося в тому, що функціонали φ_j є додатними. Припустимо супротивне: існує $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ і функція $f_0 \in C_+$ такі, що $\varphi_{j_0}(f_0) < 0$. Тоді $Af_0 = \varphi_1(f_0)\, e_1 + \ldots + \varphi_n(f_0)\, e_n$. З іншого боку, за рівністю (1.21) $Af_0 = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n$ з деякими невід'ємними числами $\xi_1, \ldots \xi_n$. Тому в силу лінійної незалежності функцій $e_1, \ldots, e_n$ має місце рівність $\varphi_{j_0}(f_0) = \xi_{j_0}$, що суперечить припущенню. Лема доведена. □

Лема 1.3.2. *Нехай ω є довільний модуль неперервності, $N \in \mathbb{N}$ і $\omega_N(t) = \omega(t/N)$, $t \in [0,1]$. Нехай також $m \in \mathbb{N}$ і $\{[\alpha_j, \beta_j]\}_{j=1}^m$ – довільна система відрізків, які не перетинаються, розташовані на відрізку $[0,1]$ і мають сукупну довжину $1/N$. Тоді існує неспадна функція $g \in V_1$, для якої*

$$\bigvee_0^1 g = \sum_{j=1}^m \bigvee_{\alpha_j}^{\beta_j} g, \tag{1.22}$$

і для будь-якого $x \in [0,1]$

$$\int_0^1 \omega(|x-t|)\,\mathrm{d}g(t) \geqslant \lambda_1\left(H^{\omega_N}; C\right). \tag{1.23}$$

Доведення. За теоремою 1.2.2 існує неспадна функція $\overline{g} \in V_1$ така, що для будь-якого $x \in [0,1]$ має місце рівність

$$\int_0^1 \omega_N(|x-t|)\,\mathrm{d}\overline{g}(t) = \lambda_1\left(H^{\omega_N}; C\right).$$

Розглянувши функцію

$$\overline{g}_N(x) := \begin{cases} \overline{g}\left(Nx\right), & x \in [0, 1/N]\,, \\ 1, & x \in [1/N, 1]\,, \end{cases}$$

можемо переписати останнє співвідношення у вигляді

$$\int_0^1 \omega(|x-t|)\,\mathrm{d}\overline{g}_N(t) = \lambda_1\left(H^{\omega_N}; C\right), \qquad x \in [0, 1/N].$$

Більш того, для всіх $x \in (1/N, 1]$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega(|x-t|)\,\mathrm{d}\overline{g}_N(t) &= \int_0^{1/N} \omega(|x-t|)\,\mathrm{d}\overline{g}_N(t) \\ &\geqslant \int_0^{1/N} \omega(|1/N-t|)\,\mathrm{d}\overline{g}_N(t) = \lambda_1\left(H^{\omega_N}; C\right). \end{aligned}$$

Означимо $\beta_0 = 0$, $\alpha_{m+1} = 1$ і нехай набір чисел $0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_m = 1/N$ є таким, що $\gamma_k - \gamma_{k-1} = \beta_k - \alpha_k$ для всіх $k = 1, \ldots, m$. Розлянемо функцію g:

$$g(x) = \begin{cases} \overline{g}_N\left(x - \alpha_k + \gamma_{k-1}\right), & x \in [\alpha_k, \beta_k], \quad k = 1, \ldots, m, \\ \overline{g}_N\left(\gamma_k\right), & x \in [\beta_k, \alpha_{k+1}], \quad k = 0, \ldots, m. \end{cases}$$

Доведемо, що функція g є шуканою. Дійсно, за побудовою, функція g неспадна, належить V_1 і задовольняє рівності (1.22). Для доведення (1.23) припустимо спочатку, що $x \in [\alpha_r, \beta_r]$ для деякого $r \in \{1, \ldots, m\}$, і розглянемо $y = x - \alpha_r + \gamma_{r-1}$. Тоді для всіх $u \in [\gamma_{k-1}, \gamma_k]$, $k = 1, \ldots, r-1$, матимемо: $y \geqslant \gamma_{r-1} \geqslant \gamma_k \geqslant u$ і

$$\alpha_r - \alpha_k \geqslant \sum_{j=k}^{r-1} (\beta_j - \alpha_j) = \gamma_{r-1} - \gamma_{k-1},$$

а, отже, $(y + \alpha_r - \gamma_{r-1}) - (u + \alpha_k - \gamma_{k-1}) \geqslant y - u \geqslant 0$. Аналогічним чином, для всіх $u \in [\gamma_{k-1}, \gamma_k]$, $k = r+1, \ldots, m$, матимемо: $y \leqslant \gamma_r \leqslant \gamma_{k-1} \leqslant u$ і

$$\alpha_r - \alpha_k \leqslant -\sum_{j=r}^{k-1} (\beta_j - \alpha_j) = \gamma_{r-1} - \gamma_{k-1},$$

і, як наслідок, $(y + \alpha_r - \gamma_{r-1}) - (u + \alpha_k - \gamma_{k-1}) \leqslant y - u \leqslant 0$. Таким чином,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega(|x-t|)\,\mathrm{d}g(t) &= \sum_{k=1}^{m} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \omega(|x-t|)\,\mathrm{d}\overline{g}_N\left(t - \alpha_k + \gamma_{k-1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k} \omega\left(|(y - \gamma_{r-1} + \alpha_r) - (u + \alpha_k - \gamma_{k-1})|\right)\,\mathrm{d}\overline{g}_N\left(u\right) \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k} \omega(|y-u|)\,\mathrm{d}\overline{g}_N(u) = \int_0^1 \omega(|y-u|)\,\mathrm{d}\overline{g}_N(u) \geqslant \lambda_1\left(H^{\omega_N}; C\right), \end{aligned}$$

що доводить вірність нерівності (1.23) для всіх $x \in [\alpha_r, \beta_r]$, $r = 1, \ldots, m$.

Для інших точок $x \in [0,1] \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} [\alpha_j, \beta_j]$, нерівність (1.23) можна довести за аналогією. Відтак, функція g задовольняє (1.22) і (1.23). $\square$

Лема 1.3.3. *Нехай ω є довільний модуль неперервності, $N \in \mathbb{N}$ і $\omega_N(t) = \omega(t/N)$, $t \in [0,1]$. Тоді для кожної неспадної функції $g \in V_1$, міра Лебега точок $x \in [0,1]$, для яких*

$$\int_0^1 \omega(|x-t|)\,\mathrm{d}g(t) < \lambda_1\left(H^{\omega_N}; C\right),$$

не перевищує $1/N$.

Доведення. Нехай функція $g \in V_1$ неспадна. Для $x \in [0,1]$ означимо

$$M_g(x) := \int_0^1 \omega(|x-t|)\,\mathrm{d}g(t).$$

Вочевидь, M_g неперервна. Отже, множина $E := \{x \in [0,1] \,:\, M_g(x) < \lambda_1 (H^{\omega_N}; C)\}$ відкрита. Припустимо супротивне: $\mu E > 1/N$. Тоді існує підмножина $U \subset E$, що складається зі скінченної кількості неперетинних відрізків $[\alpha_j, \beta_j]$, $j = 1, \dots, m$ і $m \in \mathbb{N}$, сукупної довжини $\mu U = 1/N$. За лемою 1.3.2 існує така неспадна функція $\widetilde{g} \in V_1$, що

$$\bigvee_0^1 \widetilde{g} = \sum_{j=1}^m \bigvee_{\alpha_j}^{\beta_j} \widetilde{g},$$

і для всіх $x \in [0,1]$,

$$\int_0^1 \omega(|x-t|)\,\mathrm{d}\widetilde{g}(t) \geqslant \lambda_1 (H^{\omega_N}; C).$$

Далі, за оберненою теоремою Фубіні [176, §36],

$$\begin{aligned}\int_0^1 M_g(x)\,\mathrm{d}\widetilde{g}(x) &= \int_0^1 \int_0^1 \omega(|x-t|)\,\mathrm{d}\widetilde{g}(x)\mathrm{d}g(t) \geqslant \lambda_1 (H^{\omega_N}; C) \int_0^1 \mathrm{d}g(t) \\ &= \lambda_1 (H^{\omega_N}; C).\end{aligned}$$

З іншого боку, за припущенням, $M_g(x) < \lambda_1 (H^{\omega_N}; C)$ для всіх $x \in U$. Отже,

$$\int_0^1 M_g(x)\,\mathrm{d}\widetilde{g}(x) = \int_U M_g(x)\,\mathrm{d}\widetilde{g}(x) < \lambda_1 (H^{\omega_N}; C) \int_U \mathrm{d}\widetilde{g}(x) = \lambda_1 (H^{\omega_N}; C).$$

Отримана суперечність завершує доведення леми. □

Нарешті, перейдемо до доведення теореми 1.3.1.

Доведення теореми 1.3.1. Нехай $A : C \to C$ – довільний позитивний мініедральний оператор рангу не вище за N, для якого $\sup\limits_{f \in H^\omega} \|f - Af\| < \infty$. За лемою 1.3.1 існують невід'ємні функції $e_1, \dots, e_N \in C$ і додатні лінійні обмежені функціонали $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in C^*$ такі, що для довільної функції $f \in C$,

$$Af = \sum_{k=1}^N \varphi_k(f) \cdot e_k.$$

Відомо (див. [104, §2.1]), що кожний лінійний обмежений додатний оператор $\varphi_k : C \to \mathbb{R}$ можна зобразити у вигляді

$$\varphi_k(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}g_k(t), \quad f \in C,$$

з деякою неспадною функцією $g_k \in V$. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $g_k \in V_1$ для всіх $k = 1, \ldots, m$. Відтак, для всіх $f \in C$ і $x \in [0,1]$

$$Af(x) = \sum_{k=1}^{N} e_k(x) \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}g_k(t).$$

Оскільки H^ω містить простір констант і $\sup\limits_{f \in H^\omega} \|f - Af\| < \infty$, то $e_1 + \ldots + e_N = 1$.

Тепер для всіх $x \in [0,1]$ розглянемо функцію $\varphi_\omega(x;t) := \omega(|x-t|)$, $t \in [0,1]$. Зрозуміло, що $\omega(|x - \cdot|) \in H^\omega$ та, отже,

$$\sup_{f \in H^\omega} \|f - Af\| \geqslant \sup_{x \in [0,1]} \sup_{t \in [0,1]} |\varphi_\omega(x;t) - (A\varphi_\omega(x;\cdot))(t)| \geqslant \sup_{x \in [0,1]} \left(A\varphi_\omega(x;\cdot)\right)(x).$$

Для всіх $k = 1, \ldots, N$ і $\varepsilon > 0$ за лемою 1.3.2 отримаємо, що

$$\mu\left\{x \in [0,1] \,:\, \int_0^1 \varphi_\omega(x;t)\,\mathrm{d}g_k(t) < \lambda_1\left(H^{\omega_N}; C\right) - \varepsilon\right\} < \frac{1}{N}.$$

Тому існує точка $x_\varepsilon \in [0,1]$, в якій

$$\int_0^1 \varphi_\omega(x_\varepsilon;t)\,\mathrm{d}g_k(t) \geqslant \lambda_1\left(H^{\omega_N}; C\right) - \varepsilon$$

для всіх $k = 1, \ldots, N$. Як наслідок,

$$\left(A\varphi_\omega\left(x_\varepsilon;\cdot\right)\right)\left(x_\varepsilon\right) \geqslant \left(\lambda_1\left(H^{\omega_N}; C\right) - \varepsilon\right) \sum_{k=1}^{N} e_k\left(x_\varepsilon\right) = \lambda_1\left(H^{\omega_N}; C\right) - \varepsilon.$$

Переходячи до границі $\varepsilon \to 0$, матимемо

$$\sup_{f \in H^\omega} \|f - Af\|_C \geqslant \left(A\varphi_\omega(\bar{x};\cdot)\right)(\bar{x}) \geqslant \lambda_1\left(H^{\omega_N}; C\right).$$

Таким чином,

$$\lambda_N^{\mathfrak{m}}\left(H^\omega; C_+; C\right) = \inf_{\substack{A: C \to C, A\left(C_+\right) \subset C_+, \\ A\left(C_+\right) \in \mathfrak{m}_C, \operatorname{rank} A \leqslant N}} \sup_{f \in H^\omega} \|f - Af\|_C \geqslant \lambda_1\left(H^{\omega_N}; C\right).$$

Доведемо, що $\lambda_N^{\mathfrak{m}}\left(H^\omega; C_+; C\right) \leqslant \lambda_1\left(H^{\omega_N}; C\right)$. Нехай $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2N}\right)$ і функція $g \in V_1$ породжує найкращий лінійний метод наближення класу H^{ω_N} простором констант. Нехай також набір невід'ємних неперервних функцій $\chi_1^\varepsilon, \ldots, \chi_N^\varepsilon$ задовольняє властивості (A1)–(A3). Тоді для оператора A_g^ε, визначеного рівністю (1.20),

$$\begin{aligned} \lambda_N^{\mathfrak{m}}\left(H^\omega; C_+; C\right) &\leqslant \sup_{f \in H^\omega} \left\|f - A_g^\varepsilon f\right\|_C \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{N} \sup_{x \in [0,1]} \sup_{f \in H^\omega} \chi_k^\varepsilon(x) \left| f(x) - \int_{(k-1)/N}^{k/N} f(t)\,\mathrm{d}g(Nt - k + 1)\right|. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Покажемо, що для всіх $k = 1, \dots, N$, $f \in H^\omega$ і $x \in [0,1]$, виконується нерівність

$$\chi_k^\varepsilon(x) \left| f(x) - \int_{(k-1)/N}^{k/N} f(t)\,\mathrm{d}g(Nt-k+1) \right| \leqslant \chi_k^\varepsilon(x) \left(\omega(\varepsilon) + \lambda_1 \left(H^{\omega_N}; C \right) \right). \quad (1.25)$$

Дійсно, нехай $k \in \{1, \dots, N\}$. Розглянемо відрізки $I_k = [(k-1)/N, k/N]$ і $I_k^\varepsilon = [0,1] \cap [(k-1)/N - \varepsilon, k/N + \varepsilon]$. Оскільки $\operatorname{supp} \chi_k^\varepsilon \subset I_k^\varepsilon$, то достатньо перевірити виконання нерівності (1.25) для $x \in I_k^\varepsilon$.

Для кожного $x \in I_k$ позначивши $y = Nx - k + 1$ та означивши функцію $z(y) = f(x)$, отримаємо

$$\left| f(x) - \int_{(k-1)/N}^{k/N} f(t)\,\mathrm{d}g(Nt-k+1) \right| = \left| z(y) - \int_0^1 z(u)\,\mathrm{d}g(u) \right|.$$

Зрозуміло, що $z \in H^{\omega_N}$, оскільки $f \in H^\omega$. Співставляючи дане спостереження з означенням функції g і твердженням теореми 1.2.2, маємо

$$\left| f(x) - \int_{(k-1)/N}^{k/N} f(t)\,\mathrm{d}g(Nt-k+1) \right| \leqslant \lambda_1 \left(H^{\omega_N}; C \right).$$

З останньої нерівності і невід'ємності функції χ_k^ε випливає, що (1.25) виконується для всіх $x \in I_k$. Далі, якщо $x \in (k/N, k/N + \varepsilon]$, то

$$\left| f(x) - \int_{(k-1)/N}^{k/N} f(t)\,\mathrm{d}g(Nt-k+1) \right|$$
$$\leqslant \omega(\varepsilon) + \left| f(k/N) - \int_{(k-1)/N}^{k/N} f(t)\,\mathrm{d}g(Nt-k+1) \right| \leqslant \omega(\varepsilon) + \lambda_1 \left(H^{\omega_N}; C \right).$$

Застосовуючи аналогічні міркування, встановлюємо ту ж оцінку зверху для $x \in [(k-1)/N - \varepsilon, (k-1)/N)$. Відтак, нерівність (1.25) доведена.

Нарешті, об'єднуючи нерівності (1.24) і (1.25), отримаємо

$$\lambda_N^{\mathfrak{m}} \left(H^\omega; C_+; C \right) \leqslant \left(\omega(\varepsilon) + \lambda_1 \left(H^{\omega_N}; C \right) \right) \sum_{k=1}^N \chi_k^\varepsilon = \omega(\varepsilon) + \lambda_1 \left(H^{\omega_N}; C \right).$$

Спрямовуючи $\varepsilon \to 0$ в останній нерівності, маємо: $\lambda_N^{\mathfrak{m}} \left(H^\omega; C_+; C \right) \leqslant \lambda_1 \left(H^{\omega_N}; C \right)$. Теорема 1.3.1 доведена. □

Доведення наслідку 1.3.2. Розглянемо довільний позитивний оператор $A : C \to C$ рангу 2, для якого величина $\sup\limits_{f \in H^\omega} \|f - Af\|_C$ є скінченою. Вочевидь,

$A(C)$ містить простір констант, і $Ae = e$, де $e(x) = 1$ для всіх $x \in [0,1]$. Добре відомо, що кожний конус в двовимірному просторі є мініедральним (див. [104, §6.1]). Зокрема, мініедральним є конус $A(C_+)$. Відтак, оператор A – позитивний мініедральний оператор, що завершує доведення наслідку. $\square$

Висновки до розділу 1

В цьому розділі досліджуються класична задача теорії наближення про знаходження точного значення лінійного поперечника класів функцій з заданою мажорантою модуля неперервності в просторі C та задачі про найкраще лінійне наближення класів функцій з заданою мажорантою модуля неперервності в просторі C за допомогою позитивних і позитивних мініедральних операторів. Отримані результати полягають в наступному:

1. Для довільного модуля неперервності ω в періодичному випадку знайдено точне значення одновимірного поперечника $\lambda_1\left(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C}\right)$ і найкращий метод лінійного наближення класу $\widetilde{H}^\omega$ константами в просторі $\widetilde{C}$.
2. В неперіодичному випадку встановлено, що поперечник $\lambda_1(H^\omega; C)$ і найкращий метод лінійного наближення класу H^ω константами в просторі C пов'язані між собою певним інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду, яке можна розв'язати в явному вигляді для класів Гельдера H^α, $\alpha \in (0,1)$.
3. Отримано нові оцінки зверху для лінійних поперечників $\lambda_N(H^\omega; C)$ та $\lambda_N\left(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C}\right)$, що покращують раніше відомі оцінки. Також обчислено відносний лінійний двовимірний поперечник $\lambda_2(H^\omega; C_+; C)$ і відносний лінійний мініедральний поперечник $\lambda_N^{\mathfrak{m}}(H^\omega; C_+; C)$ для всіх $N \in \mathbb{N}$.

РОЗДІЛ 2

Оптимізація деяких типів квадратурних формул

В даному розділі розв'язана задача оптимізації інтервальних квадратурних формул на класах згорток періодичних функцій та задача оптимізації квадратурних формул, що використовують в якості інформації усереднення підінтегральної функції вздовж перетинів її області визначення з гіперплощинами, паралельними координатним гіперплощинам,на класах функцій багатьох змінних.

2.1. Вступ

Нехай $d \in \mathbb{N}$ і $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – компактна множина. Точки в $\mathbb{R}^d$ будемо позначати через $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_d)$, де $t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{R}$ – координати $\mathbf{t}$. Нехай також $C(\Omega)$ – простір неперервних функцій $f : \Omega \to \mathbb{R}$ з нормою $\|f\|_{C(\Omega)} := \max\{|f(\mathbf{t})| : \mathbf{t} \in \Omega\}$, а $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, – простір вимірних та інтегровних в степені p (суттєво обмежених для $p = \infty$) функцій $f : \Omega \to \mathbb{R}$ з нормою

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} := \begin{cases} \left(\int_\Omega |f(\mathbf{t})|^p \,\mathrm{d}\mathbf{t}\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname{esssup}\{|f(\mathbf{t})| : \mathbf{t} \in \Omega\}, & p = \infty. \end{cases}$$

Центральним питанням теорії чисельного інтегрування є задача наближеного обчислення інтегралу від функції $f : \Omega \to \mathbb{R}$ за скінченною інформацією про неї. Типовою інформацією для чисельного інтегрування виступають значення функції f в скінченній кількості точок, а типовим методом наближеного обчислення інтегралу $\int_\Omega f(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t}$ за такою інформацією – *квадратурні формули* (або просто *квадратури*), тобто лінійні обмежені функціонали $\kappa \in (C(\Omega))^*$ виду

$$\kappa(f) = \sum_{j=1}^{n} a_j f(\mathbf{x}_j), \qquad f \in C(\Omega). \tag{2.1}$$

Тут $n \in \mathbb{N}$ позначає кількість вузлів κ, а $\{a_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}$ і $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^n \subset \Omega$ – її *вузли* і *коефіцієнти*, відповідно. Квадратурні формули виду (2.1) часто називають *точковими квадратурними формулами*, щоб підкреслити тип інформації, яка використовується для наближеного обчислення інтегралу.

Через $\mathcal{Q}_n = \mathcal{Q}_n(\Omega)$ позначимо множину квадратурних формул вигляду (2.1). Добре відомими прикладами квадратур на скінченному відрізку $\Omega = [a, b]$ дійсної осі є формула прямокутників, формула трапецій, формула Сімпсона, формула Ньютона-Котеса, формула Гауса, тощо. Будемо говорити, що квадратурна формула κ є точною на функції $f \in C(\Omega)$, якщо

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t} = \kappa(f).$$

Вже в 1814 р. К. Ф. Гаус [253] розглянув і розв'язав задачу оптимізації квадратурних формул на скінченному відрізку $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$, яка полягає в знаходженні формули $\kappa_n^* \in Q_n([a, b])$ найвищої алгебраїчної точності. Він встановив, що існує єдина квадратура $\kappa_n^* \in Q_n$, яка є точною на будь-якому алгебраїчному поліномі степені не вище за $2n - 1$. Широкий огляд відомих результатів щодо оптимізації квадратурних формул в смислі Гауса та споріднених задач можна знайти в [120, 81, 130, 140, 51, 227] (див. також посилання в них).

Постановка задачі Гауса оптимізації квадратурних формул відображала характерну на свій час розповсюдженість використання поліномів як апарату наближення функцій, а також класичне уявлення про те, що методи, які добре працюють на широкому класі поліномів, будуть добре працювати і в загальному випадку. Проте з розвитком обчислювальної техніки виникла можливість та необхідність розв'язувати більш складні практичні задачі, які потребували обчислення інтегралів від функцій, що задовольняють певним обмеженням. Для цих задач універсальні, точні на поліномах квадратури не завжди мали ту ж саму ефективність, що квадратури, які були побудовані з урахуванням специфіки наявних обмежень. Тому в 1940-х рр. А. М. Колмогоров, виходячи з ідей теорії наближення, запропонував іншу постановку задачі оптимізації квадратур. У формулюванні С. М. Нікольського [140] ця задача звучить наступним чином.

Задача 2.1.1 (Колмогорова-Нікольського)**.** *Нехай $\mathcal{M} \subset C(\Omega)$ – деякий клас функцій. Необхідно знайти похибку найкращого наближення інтегралів від функцій з класу $\mathcal{M}$ за допомогою квадратурних формул з n вузлами*

$$\mathcal{E}\left(\mathcal{M}; \mathcal{Q}_n\right) := \inf_{\kappa \in \mathcal{Q}_n} \sup_{f \in \mathcal{M}} \left| \int_{\Omega} f(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t} - \kappa(f) \right|,$$

та $\mathcal{Q}_n$-оптимальні квадратурні формули $\kappa^* \in \mathcal{Q}_n$, на яких досягається inf *в означенні величини $\mathcal{E}(\mathcal{M}; \mathcal{Q}_n)$ (якщо такі формули існують).*

А. Сардом [322] і С. М. Нікольським [137, 138] отримано перші розв'язки задачі 2.1.1. Зокрема, С. М. Нікольський в своїх роботах вперше звернув увагу на взаємозв'язок квадратурних формул зі сплайн-функціями (моносплайнами). На даний час завдяки зусиллям багатьох математиків точні та асимптотичні розв'язки задачі 2.1.1 відомі для широкого набору класів функцій однієї та багатьох змінних. Їх змістовний огляд можна знайти в монорафіях [140, 16, 338, 76, 307] і оглядових статтях [74, 127, 51, 246]. Детальніше зупинимося на огляді результів щодо розв'язку задачі 2.1.1 на класах періодичних функцій, де отримано найбільше точних результатів, та на класах функцій багатьох змінних, які є найбільш важливими для чисельного аналізу та його застосувань.

2.1.1. Оптимізація квадратур на класах періодичних функцій

Спочатку введемо необхідні позначення. Нехай $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$ – період довжини 2π, AC – клас абсолютно неперервних 2π-періодичних функцій, $r \in \mathbb{N}$ і $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Класом Соболєва* називається клас функцій

$$W_p^r = W_p^r(\mathbb{T}) := \left\{ f : \mathbb{T} \to \mathbb{R} \, : \, f^{(r-1)} \in AC \text{ та } \left\| f^{(r)} \right\|_{L_p(\mathbb{T})} \leqslant 1 \right\}.$$

Нехай D – диференціальний оператор і Q – алгебраїчний поліном з дійсними коефіцієнтами. Природним узагальненням класів Соболєва є класи функцій, задані обмеженням на дію диференціального оператора на функції з класу:

$$W_p^Q = W_p^Q(\mathbb{T}) := \left\{ f : \mathbb{T} \to \mathbb{R} \, : \, f^{(\deg Q - 1)} \in AC \text{ та } \|Q(D)f\|_{L_p(\mathbb{T})} \leqslant 1 \right\}.$$

Вочевидь, $W_p^Q = W_p^r$ для полінома $Q(t) = t^r$.

Означимо тепер класи згорток. Для $J \subset \mathbb{Z}$ через L_J позначимо замикання лінійної оболонки функцій $\left\{ e^{ikx} \, : \, k \in J \right\}$ та означимо

$$L_J^{\perp} := \left\{ g \in L_1(\mathbb{T}) \, : \, \forall f \in L_J \Rightarrow \int_0^{2\pi} f(t) g(t) \, \mathrm{d}t = 0 \right\}.$$

Означення 2.1.1. *Згорткою ядра $K \in L_1(\mathbb{T})$ з функцією $\varphi \in L_1(\mathbb{T})$ називається функція*

$$(K * \varphi)(x) := \int_0^{2\pi} K(x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{T}.$$

Нехай функція $K \in L_1(\mathbb{T})$ має формальний ряд Фур'є $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ і $J(K) := \{k \in \mathbb{Z} \,:\, c_k = 0\}$.

Означення 2.1.2. *Класом згорток ядра $K \in L_1(\mathbb{T})$ з множиною $F \subset L_1(\mathbb{T})$ (відносно підмножини $J \subset J(K)$) називається множина*

$$K *_J F := \left\{ f = P + K * \varphi \;:\; P \in L_J,\, \varphi \in F, \varphi \in L_J^{\perp} \right\}.$$

У випадку $J = J(K)$ будемо спрощувати позначення класу згорток до $K * F$.

Класи згорток суттєво узагальнюють класи W_p^Q. Дійсно, для довільного алгебраїчного полінома Q з дійсними коефіцієнтами клас W_p^Q є класом згорток $\Omega(Q;\cdot) * F_p$ ядра

$$\Omega(Q;x) := \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ Q(ik)\neq 0}} \frac{e^{ikx}}{Q(ik)}, \qquad x \in \mathbb{T},$$

з одиничною кулею F_p в просторі $L_p(\mathbb{T})$. Зокрема, клас Соболєва W_p^r є класом згорток $D_r * F_p$ ядра Бернулі D_r (див. [92, §3.5]) з множиною F_p.

Найбільш загальні розв'язки задачі 2.1.1 на класах періодичних функцій отримано для класів згорток з ядрами, що мають властивість не збільшувати осциляцію. Введемо необхідні поняття слідуючи [268, 285]. Для кусково-неперервної функції $f\colon\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ через $\nu(f)$ позначимо число змін знаку f на періоді.

Означення 2.1.3. *Нехай $J \subset J(K)$. Ядро K називається ядром, що не збільшує осциляцію або CVD-ядром і позначається $K \in \mathcal{A}_\infty(J)$, якщо для будь-якої кусково-неперервної функції $\varphi \in L_J^{\perp} \setminus \{0\}$ і будь-якого $T \in L_J$ виконується нерівність $\nu\left(T + K * \varphi\right) \leqslant \nu(\varphi)$.*

Означення 2.1.4. *Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $J \subset J(K)$. Ядро K називається ядром, що не збільшує осциляцію або CVD_{2n}-ядром і позначається $K \in \mathcal{A}_{2n}(J)$, якщо для будь-якої кусково-неперервної функції $\varphi \in L_J^{\perp} \setminus \{0\}$, для якої $\nu(\varphi) \leqslant 2n$, та для будь-якого $T \in L_J$ має місце нерівність $\nu\left(T + K * \varphi\right) \leqslant \nu(\varphi)$.*

Зрозуміло, що $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_{2n}(J) = \mathcal{A}_\infty(J)$. Прикладами ядер, що не збільшують осциляцію, є ядра $\Omega(Q;\cdot) \in \mathcal{A}_\infty(J(K))$ з поліномом Q, що має лише дійсні нулі, і, зокрема, ядро Бернулі $D_r \in \mathcal{A}_\infty(\{0\})$. Також в подальшому нам іноді будуть потрібні усереднення за допомогою дельтаподібної при $\varepsilon \to 0$ сім'ї ядер

$$A_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ijx}}{\operatorname{ch} \varepsilon j}, \quad \varepsilon > 0, \qquad x \in \mathbb{T}.$$

Добре відомо (див. [136, 285]), що $A_\varepsilon \in \mathcal{A}_\infty(\varnothing)$.

Нарешті, означимо клас переставно інваріантних множин. Для майже скрізь невід'ємної функції $f \in L_1(\mathbb{T})$ через $r(f,\cdot)$ позначимо *незростаюче переставлення* (див. [98, с. 92,93] і [185, §2]) звуження функції f на $[0,2\pi)$.

Означення 2.1.5. [98, с. 99] *Для функції* $g \in L_1(\mathbb{T})$ *означимо* $\Pi(g,t) = r(g_+,t) - r(g_-, 2\pi - t)$, $t \in [0,2\pi]$, *де* $g_\pm(\cdot) := \max\{\pm g(\cdot); 0\}$.

Означення 2.1.6. *Множина* $F \subset L_1(\mathbb{T})$ *називається переставно інваріантною, якщо з того, що* $f \in F$ *і* $\Pi(f) = \Pi(g)$ *для* $g \in L_1(\mathbb{T})$ *випливає, що* $g \in F$.

Прикладами переставно інваріантних множин є одиничні кулі та сфери в симетричних просторах (див. [278]) 2π-періодичних функцій, що містяться в $L_1(\mathbb{T})$, зокрема, клас F_p, одиничні кулі в просторах Орліча [105], Лоренца і Марцинкевича [278, 340]. Інші приклади переставно інваріантних множин можна знайти в [185, 202].

Дамо огляд деяких відомих результатів щодо розв'язку задачі 2.1.1 на класах періодичних функцій. В роботах С. М. Нікольського [137], М. П. Корнєйчука [90], М. Є. Лушпая [118], М. П. Корнєйчука і М. Є. Лушпая [99], Т. М. Бусарової [55] було доведено, що *формула прямокутників*

$$\kappa_n(f) := \sum_{j=1}^{n} \frac{2\pi}{n} f\left(\frac{2\pi j}{n}\right), \qquad f \in C(\mathbb{T}), \tag{2.2}$$

є $\mathcal{Q}_n$-оптимальною на класах W_∞^r і W_1^r для малих значень $r = 1,2,3$. В 1970-х рр. ці результати були суттєво узагальнені і $\mathcal{Q}_n$-оптимальність формули прямокутників була встановлена на класах Соболєва W_p^r для всіх $r \in \mathbb{N}$ і $1 \leqslant p \leqslant \infty$: в роботах В. П. Моторного [126] (для $r \in \mathbb{N}$ і $p = \infty$ та для парних $r \in \mathbb{N}$ і $p = 1$), О. О. Лігуна [113] (для непарних $r \in \mathbb{N}$ і $p = 1$) і О. А. Женсикбаєва [73, 74] (для $r \in \mathbb{N}$ і $1 < p < \infty$). Єдиність (з точністю до жорсткого зсуву вузлів) $\mathcal{Q}_n$-оптимальної квадратурної формули на класах W_p^r була встановлена К. Етер і Е. Лане [266] для $p = 2$, Р. Б. Берраром і Г. Л. Лоебом [209] для $p = \infty$, Б. Бояновим [50, 214] для $1 < p < \infty$. Питанням існування найкращих квадратурних формул присвячено статті [48, 49, 218, 219].

На класах функцій, заданих обмеженням на дію диференціального оператора на функції з класу W_p^Q, формула κ_n вже необов'язково є $\mathcal{Q}_n$-оптимальною. Так, розглядаючи поліноми Q другого порядку з уявними нулями, К. І. Осколков [142, 311] (див. також [134, 135]) встановив умови, за яких формула прямокутників (2.2) не є $\mathcal{Q}_n$-оптимальною на класі W_p^Q.

Тому в 1980-х рр. акцент досліджень задачі 2.1.1 на класах періодичних функцій змістився на відшукання найбільш загальних умов на класів $\mathcal{M} \subset C(\mathbb{T})$, які б гарантували $\mathcal{Q}_n$-оптимальність формули κ_n на них. К. І. Осколков [142, 311] (див. також [134]) встановив $\mathcal{Q}_n$-оптимальність формули прямокутників на класі W_p^Q, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, де Q – алгебраїчний поліном другого порядку з дійсними нулями. Цей результат узагальнив М. А. Чахкієв [173, 174] на випадок довільного алгебраїчного полінома з дійсними нулями. Зауважимо, що випадок $p = 1$ незалежно від М. А. Чахкієва і для більш широкого за W_1^Q класу функцій був розглянутий Т. А. Гранкіною [68]. Доведення зазначених результів суттєво спирається на зображення класу W_p^Q у вигляді класу згорток $W_p^Q = \Omega(Q;\cdot) * F_p$ і властивість ядра $\Omega(Q;\cdot)$ не збільшувати осциляцію, коли Q – алгебраїчний поліном з дійсними нулями.

Природно, що подальший напрямок узагальнень був пов'язаний з розглядом класів згорток з CVD-ядрами. Розвитку цього напрямку присвячено роботи Т. А. Гранкіної [68], В. Ф. Бабенка і Т. А. Гранкіної [21], Нгуєн Тхі Тхьєу Хоа [131, 132, 133, 134] для класів згорток $K *_J F_p$ ядер K, що не збільшують осциляцію, з множиною F_p, і В. Ф. Бабенка [185, 18] для класів згорток $K *_J F$ ядер K, що не збільшують осциляцію, з переставно інваріантними множинами F. У вказаних роботах встановлено найбільш загальні на сьогодні умови на класи $\mathcal{M} \subset C(\mathbb{T})$, які забезпечують $\mathcal{Q}_n$-оптимальність квадратурної формули прямокутників на них. Сформулюємо отримані тут результати. Для $\sigma \in \mathbb{R}$ означимо *узагальнену формулу прямокутників*:

$$\kappa_{n,\sigma}(f) := \sum_{j=1}^{n} \frac{2\pi\sigma}{n} f\left(\frac{2\pi j}{n}\right), \qquad f \in C(\mathbb{T}).$$

Вочевидь, $\kappa_{n,1} = \kappa_n$. Нехай F – довільна переставно інваріантна підмножина $L_1(\mathbb{T})$. Для ядер K таких, що $J(K) \supset \{0\}$ і $K \in \mathcal{A}_{2n}(\{0\})$, формула прямокутників κ_n є $\mathcal{Q}_n$-оптимальною на класах згорток $K *_{\{0\}} F$. Для ядер K таких, що $J(K) = \varnothing$ і $K \in \mathcal{A}_{2n}(\{0\})$, $\mathcal{Q}_n$-оптимальною на класі згорток $K * F$ є одна з узагальнених формул прямокутників $\kappa_{n,\sigma}$. Зауважимо, що хоча В. Ф. Бабенко встановив ці результати для ядер $K \in \mathcal{A}_\infty(\{0\})$ та $K \in \mathcal{A}_\infty(\varnothing)$, наведені ним міркування без суттєвих змін залишаються вірними і в більш загальному випадку $K \in \mathcal{A}_{2n}(\{0\})$ та $K \in \mathcal{A}_{2n}(\varnothing)$, відповідно. Нарешті, якщо ядро K є таким, що $J(K) \supset \{0\}$ і $K \in \mathcal{A}_{2n}(J(K))$, то формула κ_n є $\mathcal{Q}_n$-оптимальною на класах $K * F_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Відзначимо, що задача 2.1.1 оптимізації точкових квадратурних формул досліджувалася також на класах $W^r H^\omega(\mathbb{T})$, де $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ і ω – заданий модуль неперервності (див. означення 1.1.3), що складаються з функцій $f \in C(\mathbb{T})$, для яких $f^{(r-1)} \in AC$ і $f^{(r)}$ має задану опуклу вгору мажоранту ω модуля неперервності. $\mathcal{Q}_n$-оптимальність формули κ_n була доведена М. П. Корнєйчуком [90] на класі $H^\omega(\mathbb{T})$, В. П. Моторним [126] на класі $W^r H^\omega(\mathbb{T})$ для непарних r та В. П. Моторним і А. О. Кущем [129] на $W^2 H^\omega(\mathbb{T})$. Вичерпний огляд відомих результатів щодо розв'язку задачі 2.1.1 на класах періодичних функцій можна знайти в доповненні М. П. Корнєйчука книги [140] та в огляді [127].

2.1.2. Оптимізація інтервальних квадратурних формул на класах періодичних функцій

Чималий інтерес для чисельного аналізу становить також задача оптимізації квадратур, які використовують іншу інформацію про підінтегральну функцію, наприклад, її усереднення вздовж малих інтервалів області визначення. *Інтервальною квадратурною формулою* називається функціонал $\kappa \in (C(\mathbb{T}))^*$ виду

$$\kappa(f) := \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{2h} \int_{x_j-h}^{x_j+h} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad f \in C(\mathbb{T}). \tag{2.3}$$

Тут $h > 0$ – задане число, $n \in \mathbb{N}$ – кількість вузлів формули κ, $\{a_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}$ – коефіцієнти, а $\{[x_j - h, x_j + h]\}_{j=1}^n \subset \mathbb{T}$, де $\{x_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{T}$, *вузлові інтервали* κ. Через $\mathcal{Q}_n^h$ позначимо множину інтервальних квадратурних формул вигляду (2.3).

Інтервальні квадратурні формули є природним узагальненням точкових квадратур (2.1), які можна отримати з них, як граничний випадок, спрямовуючи $h \to 0$. Інтервальні квадратури знаходять застосування, наприклад, в задачах наближеного обчислення характеристик фізичних процесів (див. [309, 51]). Дійсно, припустимо, що шукані характеристики можна зобразити у вигляді інтегралів від функцій, що описують фізичний процес. Для наближеного обчислення цих характеристик проводиться ряд вимірювань фізичного процесу за допомогою приладів, які в силу своєї будови, дають середні значення функцій, що описують процес, вздовж малих інтервалів вимірювання. Результати таких вимірювань дають інформацію, яку використовують інтервальні квадратури.

Дослідження інтервальних квадратурних формул розпочалося в середині 1970-х років в роботах [309, 316, 317, 110, 179]. Існування оптимальних інтервальних квадратур в смислі Гауса було встановлено в [316, 317, 223], а їх єдиність – в [309, 223] (див. також статті [224, 225, 217] і огляд [51]).

Задача оптимізації квадратурних формул виду (2.3) в смислі Колмогорова-Нікольського розв'язана В. Ф. Бабенком [13] на класі W_1^r, В. П. Моторним [296] на класі W_∞^r, С. В. Бородачовим [44, 45, 46] на класах W^1F і на класах функцій, що задаються обмеженнями на мажоранту модуля неперервності самої функції або її похідної першого порядку, Е. В. Дерец [70] – на класах функцій, що мають задану мажоранту інтегрального модуля неперервності похідної третього порядку. В цих роботах була доведена $\mathcal{Q}_n^h$-оптимальність інтервальної формули прямокутників

$$\kappa_n^h(f) := \sum_{j=1}^n \frac{2\pi}{n} \int_{\frac{2\pi j}{n}-h}^{\frac{2\pi j}{n}+h} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad f \in C(\mathbb{T}).$$

Проте залишалося відкритим питання про оптимальність формули κ_n^h на таких же загальних класах функцій, що і у випадку задачі оптимізації точкових квадратур.

В серії спільних робіт В. Ф. Бабенка з автором [202, 34, 203] та автора [150] задача 2.1.1 оптимізації інтервальних квадратурних формул була розв'язана на класах згорток CVD-ядер з переставно інваріантними множинами та доведена $\mathcal{Q}_n^h$-оптимальність формули κ_n^h та її узагальнень на таких класах (див. теорема 2.2.1). Основна складність тут полягала у відсутності CVD-властивості у ядра усереднення за Стєкловим (див. означення 2.2.2). Тому ключову роль при отриманні цього результату мала властивість ядра Стєклова не збільшувати осциляцію в згортці з вузьким класом функцій, які можна зобразити у вигляді різниці деяких ідеальних несиметричних сплайнів нульового порядку (див. теорему 2.2.6). Це дозволило застосувати апарат, розроблений В. Ф. Бабенком в роботах [185, 18] для точкових квадратур, а також встановити нові нерівності як для найкращих несиметричних наближень константами усереднених ідеальних несиметричних сплайнів, так і нові нерівності для переставлень усереднених моносплайнів.

2.1.3. Оптимізація квадратурних формул на класах функцій багатьох змінних

Квадратурні формули для функцій двох або більшого числа змінних називаються *кубатурними формулами.* Огляд відомих результатів і стану дослідження задачі оптимізації кубатурних формул вигляду (2.1) в смислі Гауса можна знайти, наприклад, в [242, 130, 51, 227] та посиланнях в них. Відомі результати щодо розв'язку задачі 2.1.1 оптимізації кубатурних формул в смислі Колмогорова-Нікольського на класах функцій багатьох змінних та подальші посилання містяться, наприклад, в [140, 338, 76, 261, 246]. Наведемо відомі результати щодо оптимізації кубатурних формул на "ізотропних" функціональних класах, функції з яких задовольняють певним обмеженням на зростання самих функцій або їх похідних у довільному напрямку.

Нехай $d \in \mathbb{N}$ і $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Означимо ℓ_p-норму в $\mathbb{R}^d$ за правилом: для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$

$$\|\mathbf{x}\|_p := \begin{cases} \left(\sum\limits_{j=1}^d |x_j|^p\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \max\limits_{j=1,\ldots,d} |x_j|, & p = \infty. \end{cases}$$

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – компактна множина. Означимо декілька класів функцій багатьох змінних на Ω. Для модуля неперервності ω (див. означення 1.1.3) позначимо

$$H_p^\omega(\Omega) := \{f \in C(\Omega) \,:\, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leqslant \omega\left(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_p\right)\}.$$

У випадку $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, будемо називати клас $H_p^\omega(\Omega)$ *класом Гельдера* і позначати через $H_p^\alpha(\Omega)$. Для заданих модулів неперервності $\omega_1, \ldots, \omega_d$ означимо

$$H^{\overline{\omega}}(\Omega) := \left\{ f \in C(\Omega) \,:\, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leqslant \sum_{j=1}^d \omega_j\left(|x_j - y_j|\right) \right\}.$$

Для мультиіндекса $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{N}^d$ через $W_\infty^{\mathbf{r}}$ позначимо тензорний добуток одновимірних періодичних класів $W_\infty^{r_j}$, $j = 1, \ldots, d$. Тобто клас $W_\infty^{\mathbf{r}}$ складається з функцій $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$, для яких частинна похідна $\frac{\partial^{r_j-1} f}{\partial x_j^{r_j-1}}$ абсолютно неперервна відносно змінної x_j і частинна похідна $\frac{\partial^{r_j} f}{\partial x_j^{r_j}}$ майже всюди на $\mathbb{T}^d$ суттєво обмежена.

Задача оптимізації кубатурних формул на класах функцій двох або більшого числа змінних може бути розв'язана точно лише у виключних випадках для спеціальних множин Ω і чисел $n \in \mathbb{N}$. Тому розглядають варіації задачі 2.1.1.

Перший підхід полягає в звуженні множини $\mathcal{Q}_n$ всіх кубатурних формул до множини $\mathcal{Q}_{\mathbf{m}}$, $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$, кубатурних формул, проекція вузлів яких на кожну з осей Ox_j, $j = 1, \ldots, d$, складається з m_j точок. М. П. Корнєйчук [90] знайшов $\mathcal{Q}_{\mathbf{m}}$-найкращу кубатурну формулу на класах $H_2^\omega\left([0,1]^d\right)$ і $H^{\overline{\omega}}\left([0,1]^d\right)$, а В. Ф. Бабенко і С. В. Бородачов [19] знайшли найкращу кубатурну формулу в $\mathcal{Q}_{\mathbf{m}}$ на класі функцій двох змінних, заданих на прямокутному паралелепіпеді з паралельними координатним осям сторонами, обмежених і монотонних за кожною змінною. Також В. Ф. Бабенко і С. В. Бородачов в [194] розв'язали близьку задачу оптимізації аналогів кубатурних формул за інформацією про усереднення підінтегральної функції вздовж малих рівних паралелепіпедів, центри яких знаходяться в вузлах кубатур з $\mathcal{Q}_{\mathbf{m}}$, на класах $H^{\overline{\omega}}\left([0,1]^d\right)$ і $W_\infty^{\mathbf{r}}$.

Інший напрямок досліджень задачі 2.1.1 полягає у встановленні точної асимптотичної поведінки величини $\mathcal{E}\left(\mathcal{M}; \mathcal{Q}_n\right)$, коли $n \to \infty$, та побудові асимптотично оптимальної послідовності (або направленості) кубатурних формул.

Означення 2.1.7. *Нехай послідовність* $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ *зростає. Послідовність кубатурних формул* $\{\kappa_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, $\kappa_n \in \mathcal{Q}_n$, $n \in \mathbb{N}$, *називається* $\mathcal{Q}$*-асимптотично* *оптимальною (або $\mathcal{Q}$-асимптотично найкращою), якщо*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathcal{E}\left(\mathcal{M};\mathcal{Q}_{n_k}\right)}{R\left(\mathcal{M},\kappa_{n_k}\right)} = 1,$$

де для кубатурної формули $\kappa \in \mathcal{Q}_n$,

$$R\left(\mathcal{M},\kappa\right) := \sup_{f\in\mathcal{M}} \left| \int_\Omega f(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t} - \kappa(f) \right|.$$

Асимптотичному розв'язку задачі 2.1.1 присвячено роботи В. Ф. Бабенка [9, 10], Е. В. Чорної [236, 177], П. Грубера [261]. В [9, 10, 184] В. Ф. Бабенко для довільного модуля неперервності ω встановив точну асимптотичну поведінку при $n \to \infty$ величини $\mathcal{E}\left(H^\omega_\infty(\Omega);\mathcal{Q}_n\right)$ для вимірної за Жорданом компактної множини $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ і величини $\mathcal{E}\left(H^\omega_1(\Omega);\mathcal{Q}_n\right)$ для вимірної за Жорданом компактної множини $\Omega\subset\mathbb{R}^2$. Асимптотична поведінка величини $\mathcal{E}\left(H^\omega_p(\Omega);\mathcal{Q}_n\right)$, коли $n\to\infty$, для всіх $1\leqslant p\leqslant\infty$, вимірних за Жорданом множин Ω, і за певних обмежень на ω була знайдена Е. В. Чорною та П. Грубером. Ними також побудовано $\mathcal{Q}$-асимптотично оптимальну послідовність кубатурних формул у відповідних ситуаціях. Зауважимо, що П. Грубер розглядав класи з заданою мажорантою модуля неперервності відносно загальної норми в $\mathbb{R}^d$. Також всі вказані роботи розв'язували більш загальну задачу про асимптотично оптимальне відновлення вагового інтегралу з додатною вагою функцій з $H^\omega_p(\Omega)$.

Окрім точкових кубатурних формул чималий інтерес становить вивчення задач оптимізації кубатур, які використовують інші типи інформації про підінтегральну функцію. В ряді застосувань такою інформацією можуть виступати усереднення підінтегральної функції вздовж перетинів її області визначення з многовидами: гіперплощинами, гіперсферами, тощо. Зокрема, типова задача комп'ютерної томографії (див. [303, 212]) полягає у вимірюванні на множині $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ коефіцієнту ослаблення або іншої характеристики, заданої функцією $f:\Omega\to\mathbb{R}$, яка задовольняє певним апріорним умовам. Характеристика задається середнім значенням функції f на множині Ω. Для отримання інформації про функцію f можна випустити задану кількість рентгенівських променів через множину Ω, які в силу особливостей конструкції пристрою можуть випускатися в обмеженій кількості напрямків, наприклад, лише паралельно координатним осям. Інтенсивність кожного рентгенівського променю при проходженні через область

Ω зменшується на деяку величину, яку можна виміряти і яка визначається інтегралом функції f вздовж тієї частини променю, що лежить всередині області Ω. Отже інформацією для наближеного обчислення інтегралу функції f тут природно виступає скінченна кількість вимірювань таких лінійних інтегралів.

Нехай $\#X$ позначає кількість точок в скінченній множині X. Для $J \subset \{1, \ldots, d\}$ означимо гіперплощину $L(J) := \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : \forall j \in J \Rightarrow z_j = 0\right\}$ ковимірності $d - \#J$. Також для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ означимо $L(\mathbf{x}; J) := \mathbf{x} + L(J)$. Зрозуміло, що $L(\mathbf{x}; \varnothing) = \mathbb{R}^d$ і $L(\mathbf{x}; \{1, \ldots, d\}) = \{\mathbf{x}\}$. Позначимо через $\mathcal{Q}_n^{d,k}$, $k \in \{1, \ldots, d\}$ і $n \in \mathbb{N}$, множину лінійних функціоналів $\kappa : (C(\Omega))^*$ вигляду

$$\kappa(f) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\mu\left(L(\mathbf{x}_j; J_j) \cap \Omega\right)} \int_{L(\mathbf{x}_j; J_j) \cap \Omega} f(\mathbf{t})\, \mathrm{d}\mathbf{t}, \qquad f \in C(\Omega). \tag{2.4}$$

Тут $\{a_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}$ – коефіцієнти формули κ, $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^n \subset \Omega$ і $J_j \subset \{1, \ldots, d\}$, $\#J_j = k$, для всіх $j = 1, \ldots, d$, а інтегрування відбувається відносно $(d-k)$-вимірної міри Лебега на $L(\mathbf{x}_j; J_j)$. У випадку $k = d$, формула κ виду (2.4) вироджується в точкову кубатурну формулу.

Нехай Π_d – прямокутний паралелепіпед в $\mathbb{R}^d$ з паралельними координатним осям сторонами. В. Ф. Бабенко і С. В. Бородачов в [20] знайшли найкращу кубатурну формулу виду (2.4) на класі монотонних і обмежених функцій, визначених на кубі $[0,1]^d$. В серії робіт [197, 198, 199] досліджувалися $\mathcal{Q}_n^{d,k}$-оптимальні кубатурні формули на класах $H_p^\omega(\Pi_d)$, $H^{\overline{\omega}}(\Pi_d)$ і $W_\infty^{\mathbf{r}}$. Результати, отримані автором в цих статтях, полягають у встановленні точної асимптотики величин $\mathcal{E}\left(H_\infty^\omega\left([0,1]^d\right); \mathcal{Q}_n^{d,k}\right)$ і $\mathcal{E}\left(H_1^\omega\left(\Pi_d\right); \mathcal{Q}_n^{d,2}\right)$, коли $n \to \infty$, та в знаходженні $\mathcal{Q}_n^{d,1}$-найкращої кубатурної формули на класі $H^{\overline{\omega}}\left(\Pi_d\right)$. Відповідні результати наведено в підрозділі 2.3. Крім того, в [197] В. Ф. Бабенко і С. В. Бородачов розв'язали задачу оптимізації на $H_1^\omega\left(\Pi_d\right)$ більш широкої за $\mathcal{Q}_n^{d,1}$ множини кубатурних формул, інформацією для яких виступають усереднення підінтегральної функції вздовж перетинів довільно розташованих $(d-1)$-вимірних гіперплощин з Π_d.

Зауважимо, що разом з інформацією про інтеграли вздовж лінійних розрізів області визначення Ω широке застосування отримали кубатурні формули, що використовують в якості інформації про підінтегральну функцію її усереднення за сферичними розрізами. Кубатурні формули такого виду почали вивчати

Л. А. Люстернік [120], Л. В. Канторович [81] і пізніше І. П. Мисовських [130]. В. Ф. Бабенко і С. В. Бородачов [193] знайшли оптимальну формулу, що використовує такий тип інформації, на класі $H_2^{\omega}\left(B_d\right)$, де ω – довільний модуль неперервності і B_d – одинична куля в $\mathbb{R}^d$, а в [195] – на класі функцій, визначених на B_d, що мають обмежений в L_1-нормі градієнт. Відзначимо, що питання існування і єдиності гаусових кубатурних формул, що використовують в якості інформації про підінтегральну функцію її усереднення вздовж гіперплощин або гіперсфер, вивчалися в роботах Б. Боянова та його учнів [226, 215, 216, 220, 245, 312, 313].

2.2. Задача оптимізації інтервальних квадратурних формул на класах згорток

В цьому підрозділі наведено результати робіт [202, 34, 203, 150] щодо $\mathcal{Q}_n^h$-оптимальності інтервальної формули прямокутників на класах згорток ядер, що не збільшують осциляцію, з переставно інваріантними множинами.

2.2.1. Позначення та основні результати

Нехай $h > 0$ і $n \in \mathbb{N}$. Введемо позначення, необхідність яких виникає при розгляді задачі 2.1.1 на несиметричних класах $\mathcal{M}$. Для функції $f \in C(\Omega)$ і формули $\kappa \in \mathcal{Q}_n^h$ означимо

$$R(f, \kappa) := \int_{\Omega} f(\mathbf{t})\, \mathrm{d}\mathbf{t} - \kappa(f).$$

Зазначимо, що класи згорток, на яких ми будемо розв'язувати задачу оптимізації квадратурних формул, можуть бути несиметричними. Доцільно ввести деякі уточнення в означення похибки квадратурних формул на таких класах. Похибку відновлення інтегралів від функцій з несиметричного класу $\mathcal{M} \subset C(\Omega)$ за допомогою формули κ будемо характеризувати парою величин

$$R^{\pm}\left(\mathcal{M}; \kappa\right) := \sup_{f \in \mathcal{M}} \left(\pm f, \kappa\right).$$

Нехай $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}_n^h$. Означимо

$$\mathcal{E}^{\pm}\left(\mathcal{M}, Q\right) = \inf_{\kappa \in \mathcal{Q}} R^{\pm}(\mathcal{M}, \kappa).$$

Зауваження 2.2.1. *Для симетричного класу $\mathcal{M}$ мають місце рівності $R^{+}(\mathcal{M},\kappa)=R^{-}(\mathcal{M},\kappa)$ і $\mathcal{E}^{+}(\mathcal{M},\kappa)=\mathcal{E}^{-}(\mathcal{M},\kappa)$.*

Означення 2.2.1. *Формулу $\overline{\kappa}\in\mathcal{Q}$, на якій досягається* inf *в обох величинах $\mathcal{E}^{+}\left(\mathcal{M},\mathcal{Q}\right)$ і $\mathcal{E}^{-}\left(\mathcal{M},\mathcal{Q}\right)$, називають $\mathcal{Q}$-оптимальною ($\mathcal{Q}$-найкращою) на класі $\mathcal{M}$.*

Означимо оператор усереднення за Стєкловим і усереднений моносплайн.

Означення 2.2.2. *Оператор $S_h: L_1(\mathbb{T})\to C(\mathbb{T})$, що діє за правилом*

$$S_h f(\cdot)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(\cdot+t)\,\mathrm{d}t,\qquad f\in L_1(\mathbb{T}),$$

називається оператором усереднення Стєклова з кроком h. Образ функції $f\in L_1(\mathbb{T})$ відносно оператора S_h називається усередненням за Стєкловим з кроком h функції f і позначається f^h, тобто $f^h=S_h f$.

Означення 2.2.3. *Для функції $K\in L_1(\mathbb{T})$ і інтервальної квадратурної формули $\kappa\in\mathcal{Q}_n^h$ усередненим моносплайном називається функція виду*

$$M_\kappa(K;x):=\int_0^{2\pi}K(u)\,\mathrm{d}u-\sum_{j=1}^{n}a_jK^h(x_j-x),\qquad x\in\mathbb{T}. \tag{2.5}$$

Нехай $\sigma\in\mathbb{R}$. *Узагальненою інтервальною формулою прямокутників* будемо називати функціонал

$$\kappa_{n,\sigma}^h(f):=\sum_{j=1}^{n}\frac{2\pi\sigma}{n}\int_{\frac{2\pi j}{n}-h}^{\frac{2\pi j}{n}+h}f(t)\,\mathrm{d}t,\qquad f\in C(\mathbb{T}).$$

Через $M_{n,\sigma}^h(K;\cdot)$ позначимо усереднений моносплайн, що відповідає формулі $\kappa_{n,\sigma}^h$:

$$M_{n,\sigma}^h(K;\cdot)=M_{\kappa_{n,\sigma}^h}(K;\cdot)=\int_0^{2\pi}K(t)\,\mathrm{d}t-\frac{2\pi\sigma}{n}\sum_{j=1}^{n}K^h\left(\frac{2\pi j}{n}-\cdot\right).$$

Нехай $\mathcal{Q}_{n,\sigma}^h$ є множина інтервальних квадратурних формул $\kappa\in\mathcal{Q}_n^h$, сума коефіцієнтів яких дорівнює $2\pi\sigma$. Наступне твердження є наслідком поєднання результатів робіт [202, 150] і становить основний результат даного розділу.

Теорема 2.2.1. *Нехай $n\in\mathbb{N}$, $0<h<\pi/n$, F – переставно інваріантна множина. Нехай також ядро K, множина J і число σ є такими, що або*

$J(K)=\varnothing$, $K\in\mathcal{A}_{2n}(\varnothing)$, $J=\varnothing$ і $\sigma=1$, або $J(K)\supset\{0\}$, $K\in\mathcal{A}_{2n}(\{0\})$, $J=\{0\}$ і $\sigma\in\mathbb{R}$. Тоді формула $\kappa^h_{n,1}$ є $\mathcal{Q}^h_n$-оптимальною на класі $K*F$, якщо $\{0\}\subset J$, і формула $\kappa^h_{n,\sigma}$ є $\mathcal{Q}^h_{n,\sigma}$-оптимальною на класі $K*_J F$, якщо $J=\varnothing$. Більш того,

$$R^{\pm}\left(K*_J F,\kappa^h_{n,\sigma}\right)=\sup\left\{\int_0^{2\pi}\Pi(\pm M^h_{n,\sigma}(K;\cdot),t)\Pi(\varphi,t)\,\mathrm{d}t\ :\ \varphi\in F\cap L_J\right\}.$$

Відзначимо, що теорема 2.2.1 узагальнює результати робіт [296, 13, 45, 46], а також результат роботи [18], якщо спрямувати $h\to 0$. Також, в [202, 34] твердження теореми 2.2.1 було встановлено для ядра Бернулі $K=D_r$, $r\in\mathbb{N}$.

Суттєву роль в доведенні теореми 2.2.1 відіграє нерівність для первісних переставлень усереднених (γ,δ)-сплайнів та моносплайнів (див. теореми 2.2.2 і 2.2.3 нижче), які також становлять самостійний інтерес.

Означення 2.2.4. *Для пари майже скрізь невід'ємних функцій $f,g\in L_1(\mathbb{T})$ будемо казати, що g мажорує f і позначати цей факт через $f\prec g$, якщо для будь-якого $x\in[0,2\pi]$ виконується нерівність*

$$\int_0^x r(f,t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x r(g,t)\,\mathrm{d}t.$$

Для $n\in\mathbb{N}$ і $\gamma,\delta>0$ позначимо через $S_{n;\gamma,\delta}$ множину всіх функцій з $L_\infty(\mathbb{T})$, які набувають майже скрізь лише двох значень γ і $-\delta$, і мають щонайбільше $2n$ змін знаку на періоді. Також, для $\sigma\in(-\delta,\gamma)$ означимо

$$S^\sigma_{n;\gamma,\delta}:=\left\{f\in S_{n;\gamma,\delta}\ :\ \int_0^{2\pi}f(t)\,\mathrm{d}t=2\pi\sigma\right\}.$$

Означення 2.2.5. *Функції з $K*_J S_{n;\gamma,\delta}$ будемо називати $(K;\gamma,\delta)$-сплайнами, а функції з класу $K^h*_J S_{n;\gamma,\delta}$ – усередненими $(K;\gamma,\delta)$-сплайнами.*

Означення 2.2.6. *Ідеальним (γ,δ)-сплайном будемо називати функцію*

$$\varphi^\sigma_{n;\gamma,\delta}(x)=\mathrm{sgn}_{\gamma,\delta}\left(\cos nx-\cos\frac{\pi(\delta+\sigma)}{\gamma+\delta}\right),\qquad x\in\mathbb{T},$$

де $\mathrm{sgn}_{\gamma,\delta}f:=\gamma\,\mathrm{sgn}\,f_+-\delta\,\mathrm{sgn}\,f_-$.

Зрозуміло, що сплайн $\varphi^\sigma_{n;\gamma,\delta}$ є непарною $2\pi/n$-періодичною функцією, яка дорівнює γ на інтервалі $\left(0,\frac{\pi(\delta+\sigma)}{n(\gamma+\delta)}\right)$ та $-\delta$ на інтервалі $\left(\frac{\pi(\delta+\sigma)}{n(\gamma+\delta)},\frac{\pi}{n}\right)$, а також має середнє значення σ на $[0,2\pi]$. Має місце наступне твердження.

Теорема 2.2.2. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $0 < h < \pi/n$, $\gamma, \delta > 0$. Нехай також ядро K, множина J і число σ є такими, що або $J(K) = \varnothing$, $K \in \mathcal{A}_{2n}(\varnothing)$, $J = \varnothing$ і $\sigma = 1$, або $J(K) \supset \{0\}$, $K \in \mathcal{A}_{2n}(\{0\})$, $J = \{0\}$ і $\sigma \in (-\delta, \gamma)$ – довільне число. Тоді для всіх $g \in S^{\sigma}_{n;\gamma,\delta}$ і $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується співвідношення*

$$\left(K^h * \varphi^{\sigma}_{n;\gamma,\delta} - \lambda\right)_{\pm} \prec \left(K^h * g - \lambda\right)_{\pm}.$$

Теорема 2.2.2 в граничному випадку при $h \to 0$ включає багато відомих екстремальних властивостей ідеальних та ідеальних несиметричних сплайнів (див. [97, 95]).

Нехай $f \in K *_J F$, тобто $f = T + K * \varphi$, де $T \in L_J$, $\varphi \in F \cap L_J^{\perp}$. Оскільки ми розглядаємо формули $\kappa \in \mathcal{Q}^h_{n,1}$ у випадку $J = \{0\}$, а у випадку $J = \varnothing$ випливає, що $T = 0$, то для заданої інтервальної квадратурної формули $\kappa \in \mathcal{Q}^h_n$ маємо

$$R(f, \kappa) = T \cdot \left(2\pi - \sum_{j=1}^{n} a_j\right) + \int_0^{2\pi} \varphi(t) M_\kappa(K; t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \varphi(t) M_\kappa(K; t)\, \mathrm{d}t.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ і $\sigma \in \mathbb{R}$ позначимо через $\mathcal{M}^h_{n,\sigma}(K)$ множину усереднених моносплайнів (2.5), які відповідають інтервальним квадратурам $\kappa \in \mathcal{Q}^h_n$.

Теорема 2.2.3. *Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $0 < h < \pi/n$. Нехай також ядро K, множина J і число σ є такими, що або $J(K) = \varnothing$, $K \in \mathcal{A}_{2n}(\varnothing)$, $J = \varnothing$ і $\sigma = 1$, або $J(K) \supset \{0\}$, $K \in \mathcal{A}_{2n}(\{0\})$, $J = \{0\}$ і $\sigma \in \mathbb{R}$ є довільне число. Тоді для довільної формули $\kappa \in \mathcal{Q}^h_{n,\sigma}$ і $\lambda \in \mathbb{R}$ має місце співвідношення*

$$\left(M^h_{n,\sigma}(K; \cdot) - \lambda\right)_{\pm} \prec \left(M_\kappa(K; \cdot) - \lambda\right)_{\pm}.$$

Означення 2.2.7. *Для $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\alpha, \beta > 0$ і $f \in L_p(\mathbb{T})$ наступна величина називається несиметричною нормою: $\|f\|_{L_{p;\alpha,\beta}(\mathbb{T})} := \|\alpha f_+ + \beta f_-\|_{L_p(\mathbb{T})}$.*

Суттєву роль в доведенні теорем 2.2.2 і 2.2.3 відіграє наступне твердження, яке також становить самостійний інтерес.

Теорема 2.2.4. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $0 < h < \pi/n$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Нехай також ядро K, множина J і число σ є такими, що або $J(K) = \varnothing$, $K \in \mathcal{A}_{2n}(\varnothing)$, $J = \varnothing$ і $\sigma = 1$, або $J(K) \supset \{0\}$, $K \in \mathcal{A}_{2n}(\{0\})$, $J = \{0\}$ і $\sigma \in (-\delta, \gamma)$ – довільне число. Тоді для всіх $g \in S^{\sigma}_{n;\gamma,\delta}$ виконується нерівність*

$$E_0(K^h * \varphi^{\sigma}_{n;\gamma,\delta})_{1;\alpha,\beta} \leqslant E_0(K^h * g)_{1;\alpha,\beta}.$$

2.2.2. Допоміжні результати

В цьому параграфі наведемо деякі допоміжні результати, необхідні для доведення основних результатів підрозділу.

Означення 2.2.8. *Для $p<\infty$, $\alpha,\beta>0$, локально компактної множини $H\subset L_p$ і $f\in L_p(\mathbb{T})$ величина*

$$E(f;H)_{p;\alpha,\beta}=\inf_{u\in H}\|f-u\|_{L_{p;\alpha,\beta}(\mathbb{T})} \tag{2.6}$$

називається похибкою найкращого (α,β)-наближення функції f множиною H в метриці простору L_p, а елемент $u_0\in H$, який реалізує $\inf$ *в* (2.6) *називається елементом найкращого (α,β)-наближення.*

З огляду на теорему 2 в [13] будемо дозволяти параметрам α,β в (2.6) набувати значення $+\infty$, означивши $E(f;H)_{p;1,\infty}$ як величину найкращого наближення знизу $E^+(f;H)_p$, а $E(f;H)_{p;\infty,1}$ – найкращого наближення зверху $E^-(f;H)_p$. Для підпростіру H, що складається з констант, означимо $E_0(f)_{p;\alpha,\beta}:=E(f;H)_{p;\alpha,\beta}$.

Теорема 2.2.5. [13, теорема 5] *Нехай $1\leqslant p<\infty$, $p^{-1}+q^{-1}=1$ і $0<\alpha,\beta\leqslant\infty$. Для довільної функції $f\in L_1(\mathbb{T})$ і скінченновимірного підпростору $H\subset L_p(\mathbb{T})$*

$$E(f;H)_{p;\alpha,\beta}=\sup\left\{\int_0^{2\pi}f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\ :\ \|g\|_{L_{q;\alpha^{-1},\beta^{-1}}(\mathbb{T})}\leqslant 1,\ g\perp H\right\}.$$

Теорема 2.2.5 узагальнює теорему двоїстості С. М. Нікольського (див. [92, твердження 1.4.1]) на випадок найкращого (α,β)-наближення.

Для довільної функції $f\in L_1(\mathbb{T})$, що відмінна від нуля майже скрізь, і $\alpha,\beta>0$

$$\mathrm{sgn}_{\alpha,\beta}f=\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\mathrm{sgn}\,f-\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Тому має місце наступне твердження.

Лема 2.2.1 ([18, лема 1]). *Нехай $f\in L_1(\mathbb{T})$ відмінна майже скрізь від довільного елемента g зі скінченновимірного підпростору $H\subset L_1(\mathbb{T})$. Тоді для всіх $\alpha,\beta>0$*

$$E(f;H)_{1;\alpha,\beta}=\inf_{g\in H}\left[\frac{\alpha+\beta}{2}\int_0^{2\pi}|f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t-\frac{\beta-\alpha}{2}\int_0^{2\pi}(f(t)-g(t))\,\mathrm{d}t\right].$$

Лема 2.2.2 ([13, теорема 4]). *Нехай $f \in L_1(\mathbb{T})$ і $H \subset L_1(\mathbb{T})$ є скінченно-вимірний підпростір. Для того, щоб елемент $g_0 \in H$ був елементом найкращого (α,β)-наближення для функції f, необхідно, а у випадку $f-g_0 \neq 0$ майже скрізь і достатньо, щоб для всіх $g \in H$ виконувалася рівність*

$$\int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{sgn}_{\alpha,\beta}(f(t)-g_0(t))\,\mathrm{d}t = 0.$$

Якщо $f - g_0 \neq 0$ майже скрізь, останнє співвідношення набуває вигляд:

$$\int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{sgn}\,(f(t)-g_0(t))\,\mathrm{d}t = \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Оскільки $D_1(x) = \dfrac{\pi - x}{2\pi}$, $x \in (0,2\pi)$, то за лемою 3 в [18] неважко переконатися в тому, що має місце наступне твердження.

Лема 2.2.3. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\gamma,\delta > 0$, $\sigma \in (-\delta,\gamma)$, $l \leqslant n$ і $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2l} < x_1 + 2\pi$ – точки розриву сплайну $s \in S^{\sigma}_{l;\gamma,\delta}$, який приймає значення γ на (x_1,x_2). Тоді*

$$\sum_{j=1}^{2l}(-1)^j x_j = 2\pi\frac{\sigma+\delta}{\gamma+\delta}, \qquad s = (\gamma+\delta)\sum_{j=1}^{2l}(-1)^j D_1(x_j - \cdot) + \sigma.$$

Крім того, якщо $K \in L_1(\mathbb{T})$, $J \subset J(K)$, $\sigma = 0$, $J = \{0\}$, $S = T + K * s$, $T \in L_J$, то

$$S^h = T + (\gamma+\delta)\sum_{j=1}^{2l}(-1)^j \int_0^{2\pi} D_1(x_j - t)K^h(\cdot - t)\,\mathrm{d}t + \sigma\int_0^{2\pi} K(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (2.7)$$

Нехай $K \in L_1(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < h < \pi/n$, $\gamma,\delta > 0$, $\sigma \in (-\delta,\gamma)$ і $J \subset J(K)$. Зрозуміло, що множина $K *_J S^{\sigma}_{n;\gamma,\delta}$ є локально компактною в топології рівномірної збіжності. Тому має місце наступне твердження.

Лема 2.2.4 ([18, лема 4]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $K \in L_1(\mathbb{T})$, $\gamma,\delta > 0$, $0 < \alpha,\beta \leqslant \infty$, $\min\{\alpha;\beta\} < \infty$ і $\sigma \in (-\delta,\gamma)$. Тоді існує $(K;\gamma,\delta)$-сплайн в $K *_J S^{\sigma}_{n;\gamma,\delta}$, який реалізує* inf *в задачі:*

$$E_0(S^h)_{1;\alpha,\beta} \to \min, \quad S \in K *_J S^{\sigma}_{n;\gamma,\delta}.$$

Використовуючи відомі властивості переставлень (див. [98, розділ 5], [97, розділ 2]) можна встановити наступні твердження.

Лема 2.2.5 ([185, лема 2.3]). *Нехай* $f, g \in C(\mathbb{T})$, $f, g \perp 1$ *і* $(f-\lambda)_\pm \prec (g-\lambda)_\pm$ *для всіх* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Тоді для будь-якої функції* $\varphi \in L_1(\mathbb{T})$ *виконується нерівність*

$$\int_0^{2\pi} \Pi(\varphi, t)\Pi(f, t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} \Pi(\varphi, t)\Pi(g, t)\,\mathrm{d}t.$$

Лема 2.2.6 ([185, лема 2.2]). *Для всіх* $f, g \in L_1(\mathbb{T})$ *має місце рівність*

$$\sup_{\Pi(\varphi)=\Pi(f)} \int_0^{2\pi} \varphi(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \Pi(f, t)\Pi(g, t)\,\mathrm{d}t.$$

Надалі будемо вважати ядра з $\mathcal{A}_{2n}(J)$ аналітичними на $\mathbb{R}$. Це припущення не зменшуватиме загальності подальших міркувань, оскільки для довільного ядра $K \in \mathcal{A}_{2n}(J)$, $J \in \{\{0\}, \varnothing\}$, ядро $A_\varepsilon * K$ є аналітичним $\mathcal{A}_{2n}(J)$-ядром для будь-якого $\varepsilon > 0$ і $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \|K - A_\varepsilon * K\|_{L_1(\mathbb{T})} = 0$. Суттєву роль в доведенні теореми 2.2.4 відіграють наступні три леми.

Лема 2.2.7 ([18, лема 7]). *Нехай ядро* $K \in L_1(\mathbb{T})$, *що відмінне від константи, є аналітичним на* $\mathbb{R}$. *Тоді для довільної пари неперетинних інтервалів* Δ_1 *та* Δ_2, *що розташовані на одному і тому ж інтервалі монотонності ядра* K, *існують функції* $\omega_1, \omega_2 \in C(\mathbb{T})$ *з наступними властивостями:*

(1) для $j = 1, 2$ *маємо* $\omega_j(x) \neq 0$ *лише для* $x \in \bigcup\limits_{l\in\mathbb{Z}} (2\pi l + \Delta_j)$ *і* $\omega_j \perp 1$;

(2) для $j = 1, 2$ *існує* $c_j \in \Delta_j$, *для якого* $\operatorname{sgn}\omega_j(x) = (-1)^j \operatorname{sgn}(x - c_j)$, $x \in \Delta_j$;

(3) існує $\xi > 0$, *для якого одночасно*

$$\xi \int_{\Delta_1} K(t)\omega_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\Delta_2} K(t)\omega_2(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

(4) і

$$\xi \int_{\Delta_1} K'(t)\omega_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\Delta_2} K'(t)\omega_2(t)\,\mathrm{d}t \neq 0.$$

Лема 2.2.8. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $0 < h < \pi/n$, $\gamma, \delta > 0$. *Нехай також* $s \in S_{n;\gamma,\delta}$ *і* $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n}$ *– вузли сплайну* s *на періоді. Тоді функція* s^h *є неспадною на інтервалі* $(x_j - h, x_{j+1} - h)$, *якщо* $s(t) \equiv \gamma$ *на* (x_j, x_{j+1}), *і незростаючою на інтервалі* $(x_j - h, x_{j+1} - h)$, *якщо* $s(t) \equiv -\delta$ *на* (x_j, x_{j+1}).

Теорема 2.2.6. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $0 < h < \pi/n$, $\gamma, \delta > 0$. *Нехай також сплайни* $s_1, s_2 \in S_{n;\gamma,\delta}$ *є такими, що* $\nu(s_1^h) = \nu(s_2^h) = 2n$. *Якщо* $f(t) = s_1(t) - s_2(t)$, *то* $\nu\left(\lambda + f^h\right) \leqslant \nu(f)$ *для будь-якого* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Лему 2.2.8 і теорему 2.2.6 ми доведемо в параграфі 2.2.3.

Теорема 2.2.7 ([185, теорема 2.3]). *Нехай $K \in L_1(\mathbb{T})$ є аналітичною на $\mathbb{R}$, $f, g \in C(\mathbb{T})$ мають нульове середнє значення на періоді і $E_0(f)_{1;\alpha,\beta} \leqslant E_0(g)_{1;\alpha,\beta}$ для всіх $\alpha, \beta > 0$. Тоді $(f-\lambda)_\pm \prec (g-\lambda)_\pm$ для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Нарешті, наведемо наступне нескладне твердження.

Лема 2.2.9. *Для будь-якого тригонометричного полінома T існує тригонометричний поліном $\widetilde{T}$ і константа $a \in \mathbb{R}$ такі, що $T(x) = a + (K(-\cdot) * \widetilde{T})(x)$, $x \in \mathbb{T}$, де $a = 0$ у випадку $K \perp 1$.*

2.2.3. Доведення теореми 2.2.6

Цей параграф присвячено доведенню теореми 2.2.6. Спочатку ми доведемо лему 2.2.8 і встановимо декілька допоміжних тверджень.

Доведення леми 2.2.8. Нехай $s \in S_{n;\gamma,\delta}$. Розглянемо першу похідну функції s^h:

$$\left(s^h\right)'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} s(t+u)\,\mathrm{d}u\right) = \frac{1}{2h}\left(s(t+h) - s(t-h)\right).$$

Отже, $\left(s^h\right)'(t-h) = \frac{1}{2h}\left(s(t) - s(t-2h)\right)$. Неважко бачити, що $\left(s^h\right)'(t-h) \geqslant 0$ на інтервалі $t \in (x_j, x_{j+1})$, якщо $s(t) \equiv \gamma$ на цьому ж інтервалі, і $\left(s^h\right)'(t-h) \leqslant 0$ на інтервалі $t \in (x_j, x_{j+1})$, якщо $s(t) \equiv -\delta$ на цьому ж інтервалі. Тому, s^h є неспадною на $(x_j - h, x_{j+1} - h)$, якщо $s(t) \equiv \gamma$ для $t \in (x_j, x_{j+1})$. Аналогічним чином, s^h є незростаючою на $(x_j - h, x_{j+1} - h)$, якщо $s(t) \equiv -\delta$ для $t \in (x_j, x_{j+1})$. $\square$

Зауважимо, що лема 2.2.8 і наведена нижче лема 2.2.10 є узагальненнями, відповідно, леми 2 і леми 3 з [296] на випадок несиметричних ідеальних сплайнів.

Лема 2.2.10. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\gamma, \delta > 0$, $0 < h < \pi/n$, $s \in S_{n;\gamma,\delta}$, $\nu\left(s^h\right) = 2n$, і $x_1 < \ldots < x_{2n}$, $x_{2n} < x_1 + 2\pi$, – вузли сплайну s. Тоді довжина інтервалу (x_j, x_{j+1}) не менша за $\frac{2h\delta}{\gamma+\delta}$ у випадку, коли $s(t) \equiv \gamma$ на ньому, і не менша за $\frac{2h\gamma}{\gamma+\delta}$ у випадку, коли $s(t) \equiv -\delta$ на (x_j, x_{j+1}).*

Доведення. Нехай $x_{2n+1} := x_1 + 2\pi$. Оскільки $\nu\left(s^h\right) = 2n$, то за лемою 2.2.8 для всіх $j = 1, \ldots, 2n-1$ має місце нерівність $s^h(x_j - h)\, s^h(x_{j+1} - h) < 0$. Без зменшення загальності будемо вважати, що $\operatorname{sgn} s^h(x_j - h) = (-1)^j$, $j = 1, \dots, 2n$. Зокрема, $s \equiv \gamma$ на інтервалі (x_j, x_{j+1}).

Зауважимо, що сума довжин інтервалів (x_j, x_{j+1}), $j = 1, \dots, 2n$, на яких s збігається з γ дорівнює $\frac{2\pi\delta}{\gamma+\delta}$. Тоді існує $j_1 \in \{1, \dots, 2n\}$ такий, що $x_{j_1+1} - x_{j_1} \geqslant \frac{2h\delta}{\gamma+\delta}$ і $s \equiv \gamma$ на (x_{j_1}, x_{j_1+1}). За аналогією, існує $j_2 \in \{1, \dots, 2n\}$ такий, що $x_{j_2+1} - x_{j_2} \geqslant \frac{2h\gamma}{\gamma+\delta}$ і $s \equiv -\delta$ на (x_{j_2}, x_{j_2+1}).

Припустимо, що твердження леми не виконується. Тоді згідно наведених вище міркувань можливі два випадки:

(1) Існує $j \in \{2, \dots, 2n\}$ таке, що $s(t) = \gamma$ для всіх $t \in (x_{j-1}, x_j)$ і $s(t) = -\delta$ для всіх $t \in (x_j, x_{j+1})$, а також $x_j - x_{j-1} \geqslant \frac{2h\delta}{\gamma+\delta}$ і $x_{j+1} - x_j < \frac{2h\gamma}{\gamma+\delta}$;

(2) Існує $j \in \{2, \dots, 2n\}$ таке, що $s(t) = \gamma$ для всіх $t \in (x_{j-1}, x_j)$ і $s(t) = -\delta$ для всіх $t \in (x_j, x_{j+1})$, а також $x_j - x_{j-1} < \frac{2h\delta}{\gamma+\delta}$ і $x_{j+1} - x_j \geqslant \frac{2h\gamma}{\gamma+\delta}$.

Детально розглянемо лише перший випадок, оскільки другий випадок можна розглянути за аналогією. Не зменшуючи загальності припустимо, що $j = 2$. Тоді $s^h(x_3 - h) < 0$. За припущенням $x_3 - x_2 < \frac{2h\gamma}{\gamma+\delta}$, то $x_3 - 2h \leqslant x_2 - \frac{2h\delta}{\gamma+\delta}$. Отже,

$$\begin{aligned} s^h(x_3 - h) &= \frac{1}{2h}\int_{x_3-2h}^{x_3} s(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2h}\left(\int_{x_3-2h}^{x_2-\frac{2h\delta}{\gamma+\delta}} s(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_2-\frac{2h\delta}{\gamma+\delta}}^{x_2} s(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_2}^{x_3} s(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &\geqslant \frac{1}{2h}\left(-\delta\cdot\left(x_2 - \frac{2h\delta}{\gamma+\delta} - x_3 + 2h\right) + \gamma\cdot\frac{2h\delta}{\gamma+\delta} - \delta\cdot(x_3 - x_2)\right) = 0, \end{aligned}$$

що суперечить тому факту, що $s^h(x_3 - h) < 0$. □

Тривіальним наслідком леми 2.2.10 є наступне твердження.

Лема 2.2.11. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\gamma, \delta > 0$, $0 < h < \pi/n$ і сплайн $s \in S_{n;\gamma,\delta}$ є таким, що $\nu\left(s^h\right) = 2n$. Тоді для довільного $x \in \mathbb{T}$ сплайн s має щонайбільше дві зміни знаку на інтервалі $(x - h, x + h)$.*

Застосовуючи лему 2.2.11 та розглядаючи всі можливі варіанти розташування вузлів сплайнів s_1 і s_2 ми можемо отримати наступне твердження.

Лема 2.2.12. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\gamma, \delta > 0$, $0 < h < \pi/n$ і сплайни $s_1, s_2 \in S^0_{n;\gamma,\delta}$ є такими, що $\nu\left(s_1^h\right) = \nu\left(s_2^h\right) = 2n$. Тоді для будь-якого $x \in \mathbb{T}$ різниця $f = s_1 - s_2$ має щонайбільше дві зміни знаку на інтервалі $(x - h, x + h)$.*

Лема 2.2.13. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $\gamma, \delta > 0$, $0 < h < \pi/n$ *і сплайни* $s_1, s_2 \in S_{n;\gamma,\delta}$ *є такими, що* $\nu\left(s_1^h\right) = \nu\left(s_2^h\right) = 2n$. *Припустимо, що існує точка* $x \in \mathbb{T}$ *така, що різниця* $f = s_1 - s_2$ *має рівно дві зміни знаку на інтервалі* $(x-h, x+h)$. *Тоді існує* $\tilde{x} > 0$, *для якого функція* f *має рівно одну зміну знаку на інтервалі* $(x+\tilde{x}-h, x+\tilde{x}+h)$. *Більш того,* $f^h(y) = f^h(x)$ *для будь-якого* $y \in [x, x+\tilde{x}]$.

Доведення. Нехай $x \in \mathbb{T}$ задовольняє умови леми. Розглянувши всі можливі варіанти розташування вузлів сплайнів s_1 і s_2 на інтервалі $(x-h, x+h)$, можна побачити, що f має рівно дві зміни знаку на $(x-h, x+h)$ тоді і тільки тоді, коли s_1 і s_2 мають рівно два вузли на інтервалі $(x-h, x+h)$, точка $x-h$ не є їх вузлом та $s_1(x-h)\cdot s_2(x-h) < 0$. Без зменшення загальності вважатимемо, що $s_1(x-h) = \gamma$ і $s_2(x-h) = -\delta$.

Нехай $x_{1,1}$, $x_{1,2}$, $x_{1,3}$ і $x_{1,4}$ є сусідніми вузлами сплайну s_1 такими, що $x_{1,1} < x-h < x_{1,2} < x_{1,3} < x+h < x_{1,4}$, а $x_{2,1}$, $x_{2,2}$, $x_{2,3}$ і $x_{2,4}$ є сусідніми вузлами сплайну s_2 такими, що $x_{2,1} < x-h < x_{2,2} < x_{2,3} < x+h < x_{2,4}$. Тоді $s_1(t) = \gamma$ для $t \in (x_{1,1}, x_{1,2})$ або $t \in (x_{1,3}, x_{1,4})$ та $s_1(t) = -\delta$ для $t \in (x_{1,2}, x_{1,3})$. Аналогічно, $s_2(t) = -\delta$ для $t \in (x_{2,1}, x_{2,2})$ або $t \in (x_{2,3}, x_{2,4})$ та $s_2(t) = \gamma$ для $t \in (x_{2,2}, x_{2,3})$.

Оберемо $\tilde{x} := \min\{x_{1,2} - x + h; x_{2,2} - x + h\}$. Без зменшення загальності вважатимемо, що $x_{1,2} \leqslant x_{2,2}$, а тому $\tilde{x} = x_{1,2} - x + h$. З цього випливає, що $s_1(t) = \gamma$ і $s_2(t) = -\delta$ для $t \in (x-h, x_{1,2})$. Звідси $f(t) = \gamma + \delta$ для $t \in (x-h, x_{1,2})$.

В той же час сплайни s_1 і s_2 рівні, відповідно, γ і $-\delta$ на інтервалі $(x+h, x+\tilde{x}+h)$. Дійсно, за лемою 2.2.10 виконуються нерівності $x_{1,3} - x_{1,2} \geqslant \frac{2h\gamma}{\gamma+\delta}$ та $x_{1,4} - x_{1,3} \geqslant \frac{2h\delta}{\gamma+\delta}$. Тому $x_{1,4} - x_{1,2} \geqslant 2h = x + h + \tilde{x} - x_{1,2}$ і, як наслідок, $x + \tilde{x} + h \leqslant x_{1,4}$. Аналогічним чином можна переконатися в тому, що $x + \tilde{x} + h \leqslant x_{2,4}$.

Отже, для будь-якого $y \in [0, \tilde{x}]$ мають місце співвідношення

$$f(x-h+y) = f(x-h) = \gamma + \delta = f(x+h) = f(x+h+y).$$

Для всіх $z \in [0, \tilde{x}]$ зрозуміло, що $z < 2h$, а з попередніх рівностей випливає, що

$$\begin{aligned}
f^h(x+z) - f^h(x) &= \frac{1}{2h}\left(\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x+z-h}^{x+z+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2h}\left(\int_{x-h}^{x+z-h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x+h}^{x+z+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2h}\left(\int_{0}^{z} f(x-h+\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_{0}^{z} f(x+h+\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) = 0.
\end{aligned}$$

Нарешті, оскільки s_1 має лише один вузол на інтервалі $(x+\tilde{x}-h, x+\tilde{x}+h)$, то і функція f має рівно одну зміну знаку на цьому ж інтервалі. $\square$

Тепер ми маємо все необхідне для доведення теореми 2.2.6.

Доведення теореми 2.2.6. Нехай $\nu\left(\lambda+f^h\right) = 2b$ для деякого $b \in \mathbb{N}$. Це означає, що існують точки $x_1 < \ldots < x_{2b} < x_1+2\pi$, в яких $\operatorname{sgn} f^h(x_j) = (-1)^j$, $j = 1, \ldots, 2b$. За лемами 2.2.12 і 2.2.13 існують точки $\tilde{x}_1 < \ldots < \tilde{x}_{2b} < \tilde{x}_1 + 2\pi$ такі, що функція f має щонайбільше одну зміну знаку на кожному з інтервалів $(\tilde{x}_j - h, \tilde{x}_j + h)$, $j = 1, \ldots, 2b$. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $\tilde{x}_j = x_j$, $j = 1, \ldots, 2b$. Зрозуміло, що існує непорожній інтервал $\Delta_j \subset (x_j - h, x_j + h)$ такий, що $\operatorname{sgn} f(t) = (-1)^j$ для $t \in \Delta_j$, оскільки в іншому випадку $(-1)^j f(x_j) \leqslant 0$. Через y_j, y_j^* і y_j^{**} позначимо, відповідно, середину, лівий та правий кінці Δ_j. Зрозуміло, що $x_j - h < y_j < x_j + h$ для всіх $j = 1, \ldots, 2b$.

Покажемо, що $\{y_j\}_{j=1}^{2b}$ зростає і $\operatorname{sgn} f(y_j) = (-1)^j$, $j = 1, \ldots, 2b$.

Друге твердження виконується за побудовою точок y_j. Припустимо тепер, що існує індекс $j_0 \in \{1, \ldots, 2b-1\}$ такий, що $y_{j_0} > y_{j_0+1}$. Без зменшення загальності вважатимемо, що $j_0 = 1$ і, отже, $y_1 > y_2$. Вочевидь, $y_2 \in (x_2 - h, x_2 + h)$, і з припущення та нерівності $x_1 - h < x_2 - h$ випливає, що $y_1 \in (x_2 - h, x_2 + h)$ та $y_2 \in (x_1 - h, x_1 + h)$. Неважко бачити, що

$$x_1 - h < x_2 - h \leqslant y_2^* < y_2^{**} \leqslant y_1^* < y_1^{**} \leqslant x_1 + h < x_2 + h.$$

Тому $f(t) \geqslant 0$ для $t \in (x_1 - h, x_2 - h)$, адже в протилежному випадку існувало б три точки на інтервалі $(x_1 - h, x_1 + h)$, в яких функція f змінювала б свій знак. За аналогією, $f(t) \leqslant 0$ для $t \in (x_1 + h, x_2 + h)$. Таким чином,

$$0 < \left(\lambda + f^h(x_2)\right) - \left(\lambda + f^h(x_1)\right) = -\int_{x_1-h}^{x_2-h} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_1+h}^{x_2+h} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0,$$

що неможливо. Отже, $y_1 < y_2 < \ldots < y_{2b} < y_1 + 2\pi$ і $\operatorname{sgn} f(y_j) = (-1)^j$, $j = 1, \ldots, 2b$. Це означає, що $\nu(f) \geqslant 2b = \nu\left(\lambda + f^h\right)$. Доведення завершено. $\square$

2.2.4. Доведення теореми 2.2.4

В цьому параграфі ми доведемо теорему 2.2.4. Нехай числа $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ та $0 < h < \pi/n$ є заданими. Нехай також ядро K, множина J і число σ є такими, що або $J(K) = \varnothing$, $K \in \mathcal{A}_{2n}(\varnothing)$, $J = \varnothing$ і $\sigma \in (-\delta, \gamma)$, або $J(K) \supset \{0\}$, $K \in \mathcal{A}_{2n}(\{0\})$, $J = \{0\}$ і $\sigma = 0$. Без зменшення загальності будемо вважати ядро K аналітичним на $\mathbb{R}$. Розглянемо екстремальну задачу

$$E_0(S^h)_{1;\alpha,\beta} \to \inf, \quad S \in K *_J S^{\sigma}_{n;\gamma,\delta}. \tag{2.8}$$

За лемою 2.2.4 існує функція $\overline{S} \in K *_J S^{\sigma}_{n;\gamma,\delta}$, яка реалізує інфімум в (2.8). Нехай $\overline{S} = K * \overline{s}$, $\overline{s} \in S^{\sigma}_{n;\gamma,\delta}$, і $\overline{s}$ має $2l \leqslant 2n$ точок розриву на періоді $\overline{x}_1 < \ldots < \overline{x}_{2l} < 2\pi + \overline{x}_1$. Вочевидь, ми можемо вважати, що $\overline{s}(x) = \gamma$ для $x \in (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$. Тоді за лемою 2.2.3 отримаємо

$$\overline{S}^h(x) = (\gamma+\delta)\sum_{j=1}^{2l}(-1)^j \int_0^{2\pi} D_1(\overline{x}_j - t)K^h(x-t)\,\mathrm{d}t + \sigma\int_0^{2\pi} K(t)\,\mathrm{d}t.$$

За лемами 2.2.1 і 2.2.3 числа $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{2l}$ і константа $\overline{c}$ найкращого (α,β)-наближення функції $\overline{S}^h$ реалізують inf в наступній задачі:

$$F(x_1,\ldots,x_{2l};c) \to \inf, \qquad c \in \mathbb{R} \text{ і } \sum_{j=1}^{2l}(-1)^j x_j = 2\pi\cdot\frac{\sigma+\delta}{\gamma+\delta}, \tag{2.9}$$

$$x_1 < \ldots < x_{2l} < 2\pi + x_1,$$

де

$$\begin{aligned} F(x_1,\ldots,x_{2l};c) \;&=\; \frac{\alpha+\beta}{2}\int_0^{2\pi}\Big|(\gamma+\delta)\sum_{j=1}^{2l}(-1)^j\int_0^{2\pi} D_1(x_j-t)K^h(x-t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad+\;\sigma\int_0^{2\pi}K(t)\,\mathrm{d}t - c\Big|\,\mathrm{d}x - \pi(\beta-\alpha)\left(\sigma\int_0^{2\pi}K(t)\,\mathrm{d}t - c\right). \end{aligned}$$

Функція F є неперервно диференційовною в деякому околі точки $(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_{2l},\overline{c})$ в тому сенсі, що існують і є неперервними частинні похідні $\frac{\partial F}{\partial x_k}$, $k = 1,\ldots,2l$, і $\frac{\partial F}{\partial c}$. Більш того,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_k} \;&=\; (-1)^k\frac{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}{2}\int_0^{2\pi}\operatorname{sgn}\Bigg((\gamma+\delta)\sum_{j=1}^{2l}(-1)^j \\ &\quad\times\int_0^{2\pi}D_1(x_j-t)K^h(x-t)\,\mathrm{d}t + \sigma\int_0^{2\pi}K(t)\,\mathrm{d}t - c\Bigg) \\ &\quad\times\left(K^h(x-x_k) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial c} \;=\; &-\frac{(\alpha+\beta)}{2}\int_0^{2\pi}\operatorname{sgn}\Bigl((\gamma+\delta)\sum_{j=1}^{2l}(-1)^j\int_0^{2\pi}D_1(x_j-t)K^h(x-t)\,\mathrm{d}t\\ &+\sigma\int_0^{2\pi}K(t)\,\mathrm{d}t-c\Bigr)\mathrm{d}x+\pi(\beta-\alpha).\end{aligned}\tag{2.11}$$

Застосуємо метод множників Лагранжа (див. [97, §§1.3, 3.2]) для розв'язання задачі (2.9). З (2.10), (2.11), (2.8) і (2.7) отримаємо, що згортка $K^h(-\cdot)*\operatorname{sgn}_{\alpha,\beta}\left(\overline{S}^h-\overline{c}\right)$ приймає в точках $\overline{x}_k$ – точках розриву функції $\overline{s}$ – рівні значення.

Нехай $g=\operatorname{sgn}_{\alpha,\beta}\left(\overline{S}^h-\overline{c}\right)$ і $\eta=\left(K^h(-\cdot)*g\right)(\overline{x}_1)$. Розглянемо функцію $G=K^h(-\cdot)*g-\eta$, для якої $G(\overline{x}_k)=0$ при всіх $k=1,\ldots,2l$.

Лема 2.2.14. *Функція G має рівно $2l$ змін знаку і рівно $2l$ нулів на періоді $\mathbb{T}$.*

Доведення. Спочатку розглянемо випадок $J(K)\supset\{0\}$, $J=\{0\}$ і $\sigma=0$. Позначимо через λ середнє значення функції g^h на періоді. За лемою 2.2.8 і властивістю ядра K не збільшувати осциляцію функцій з не більш ніж $2l\leqslant 2n$ змінами знаку отримаємо

$$\nu(G)=\nu\left(-\eta+K(-\cdot)*g^h\right)\leqslant\nu(-\lambda+g^h)\leqslant\nu(g)=\nu(\overline{S}^h-\overline{c})\leqslant\nu\left(\overline{s}^h\right)\leqslant\nu(\overline{s})=2l.\tag{2.12}$$

Доведемо, що $\nu\left(g^h-\lambda\right)=2l$. Припустимо супротивне, що $\nu\left(g^h-\lambda\right)=2b<2l$. Тоді за першою нерівністю в (2.12) неважко бачити, що $\nu(G)\leqslant 2b$. За означенням функція G має щонайменше $2l$ нулів на періоді. Нехай b_1 є кількістю точок серед $\{\overline{x}_k\}_{k=1}^{2l}$, в яких G приймає свої локальні мінімуми, а b_2 – локальні максимуми. Тоді $\nu(G)+b_1+b_2\geqslant 2l$. Без зменшення загальності будемо вважати, що $b_1\geqslant b_2$. Для достатньо малого числа $\xi>0$ виконуються нерівності

$$2b=\nu\left(-\lambda+g^h\right)\geqslant\nu(G-\xi)=\nu(G)+2b_1\geqslant\nu(G)+b_1+b_2\geqslant 2l,$$

що призводить до суперечності. Отже, $\nu\left(-\lambda+g^h\right)=2l$ і за лемою 2.2.8 функція g^h не має інтервалів, на яких вона співпадає з нулем. Також, відзначимо, що похідна функції g^h дорівнює або 0, або $\pm(\alpha+\beta)/2h$.

За лемою 2.2.9 для довільного тригонометричного полінома T існує тригонометричний поліном $\widetilde{T}$ і константа $a\in\mathbb{R}$ такі, що $T=a+K(-\cdot)*\widetilde{T}$ і $\widetilde{T}\perp 1$. Тоді для будь-якого достатньо малого за абсолютною величиною $\rho\in\mathbb{R}$ мають місце нерівності

$$\nu(G-\rho\cdot T)=\nu\left(K(-\cdot)*g^h-\rho\cdot a-\rho\cdot K(-\cdot)*\widetilde{T}\right)\leqslant\nu\left(-\lambda+g^h-\rho\cdot\widetilde{T}\right)\leqslant 2l.\tag{2.13}$$

Остання нерівність в (2.13) виконується завдяки нерівності Бернштейна для тригонометричних поліномів (див [42, с. 26]) і структурі функції g^h.

Припустимо тепер, що функція G має кратні нулі в деяких точках з $\{\overline{x}_k\}_{k=1}^{2l}$. Розглянемо тригонометричний поліном

$$V(x) := \prod_{k=1}^{2l} \sin\left(\frac{x - \overline{x}_k}{2}\right), \qquad x \in \mathbb{T}. \tag{2.14}$$

Для достатньо малого за абсолютною величиною числа $\rho \in \mathbb{R}$ матимемо $\nu(G - \rho \cdot V) \geqslant 2l + 2$, що суперечить нерівності (2.13).

Тепер перейдемо до розгляду випадку $J(K) = J = \varnothing$ і $\sigma \in (-\delta, \gamma)$. Нехай b_1 і b_2 є кількостями точок серед $\{\overline{x}_j\}_{j=1}^{2l}$, в яких G обертається в нуль і досягає своїх локальних мінімумів та локальних максимумів відповідно. Застосовуючи CVD-властивість ядра K і лему 2.2.8 неважко переконатися в тому, що $b_1 = b_2$. Більш того, оскільки $K \in \mathcal{A}_{2n}(\varnothing)$, то для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ можна встановити наступний ланцюжок співвідношень

$$\begin{aligned} \nu(G + a) &= \nu(K^h(-\cdot) * g - \eta + a) \leqslant \nu(g^h - \eta' + a') \leqslant \nu(g) \\ &= \nu(\overline{S}^h - \overline{c}) \leqslant \nu(\overline{s}^h - \overline{c}') \leqslant \nu(\overline{s}) = 2l, \end{aligned}$$

де $\eta' \cdot \int_0^{2\pi} K(t)\, dt = \eta$, $a' \cdot \int_0^{2\pi} K(t)\, dt = a$ і $\overline{c}' \cdot \int_0^{2\pi} K(t)\, dt = \overline{c}$.

Для довільного тригонометричного полінома T існують достатньо малі за абсолютною величиною числа ρ і ξ, для яких $\nu(G - \rho \cdot T) \leqslant \nu(G + \xi - \rho \cdot T)$ і функція $g^h - \eta' + \xi'$ не має нульових інтервалів на періоді, де $\xi' \cdot \int_0^{2\pi} K(t)\, \mathrm{d}t = \xi$. При цьому, для таких ρ і ξ матимемо

$$\nu(G - \rho \cdot T) \leqslant \nu(G + \xi - \rho \cdot T) \leqslant \nu\left(g^h - \eta' + \xi' - \rho \cdot \widetilde{T}\right), \tag{2.15}$$

де тригонометричний поліном $\widetilde{T}$ є таким же, як і в лемі 2.2.9.

За нерівністю Бернштейна для тригонометричних поліномів та структурою функції $g^h - \eta' + \xi'$ ми отримаємо з нерівності (2.15), що $\nu(G - \kappa \cdot T) \leqslant 2l$. В той же час, розглянувши функцію V, означену рівністю (2.14), отримаємо, що для достатньо малого за абсолютною величиною $\kappa \in \mathbb{R}$

$$2l \geqslant \nu(G - \rho \cdot V) \geqslant \nu(G) + 2b_1 + 2b_2 \geqslant 2l + b_1 + b_2.$$

З останньої нерівності випливає, що $b_1 = b_2 = 0$ і функція G не має кратних нулів на періоді, що завершує доведення леми. $\square$

В силу леми 2.2.14 має місце рівність

$$\operatorname{sgn} G = \pm \operatorname{sgn} \overline{s}. \tag{2.16}$$

Покажемо, що рівність (2.16) виконується лише, коли $\overline{s} = \varphi^{\sigma}_{l;\gamma,\delta}$ з точністю до зсуву аргумента.

Для $y \in \mathbb{R}$ означимо $T_{y,0}(\cdot) := \overline{s}(\cdot) - \overline{s}(\cdot + y)$, $T_y(\cdot) := \overline{S}^h(\cdot) - \overline{S}^h(\cdot + y)$, $U_{y,0}(\cdot) := g(\cdot) - g(\cdot + y)$, $U_y(\cdot) := G(\cdot) - G(\cdot + y)$.

Лема 2.2.15. *Для довільного $y \in \mathbb{R}$ мають місце нерівності*

$$\nu(T_{y,0}) \leqslant \nu(U_y), \qquad \nu(U_{y,0}) \leqslant \nu(T_y). \tag{2.17}$$

Доведення. Дійсно, припустимо, що існує $2d$ точок $t_1 < t_2 < \ldots < t_{2d}$, в яких функція $T_{y,0}$ є неперервною і $\operatorname{sgn} T_{y,0}(t_j) = \pm(-1)^j$, $j = 1, \ldots, 2d$. За рівністю (2.16), в цих точках функція U_y приймає ненульові значення зі зміною знаку, а, отже, $\nu(U_y) \geqslant \nu(T_{y,0})$. Використовуючи означення функції g, можна встановити за аналогією нерівність $\nu(U_{y,0}) \leqslant \nu(T_y)$. $\square$

Лема 2.2.16. *Для будь-якого $y \in \mathbb{R}$ функція U_y або є нульовою, або має лише прості ізольовані нулі.*

Доведення. Нехай $U_y \not\equiv 0$. В силу теореми 2.2.6 і властивості ядра K не збільшувати осциляцію функцій з щонайбільше $2n$ змінами знаку ми отримаємо, що $\nu(T_{y,0}) \geqslant \nu(T^h_{y,0}) \geqslant \nu(T_y)$, оскільки $\nu\left(T_{y,0}\right) \leqslant 2l$ і $T_{y,0} \perp 1$. Зі встановленної подвійної нерівності і першої нерівності в (2.17) випливає, що $\nu(U_y) \geqslant \nu(T_y)$.

З іншого боку, за властивістю ядра K не збільшувати осциляцію функцій з щонайбільше $2n$ змінами знаку, теоремою 2.2.6 і другою нерівністю в (2.17) маємо $\nu(U_y) \leqslant \nu\left(U^h_{y,0}\right) \leqslant \nu(U_{y,0}) \leqslant \nu(T_y)$, оскільки

$$\nu\left(U_{y,0}\right) \leqslant \nu\left(\overline{S}^h - \overline{c}\right) \leqslant \nu\left(\overline{s}^h\right) \leqslant \nu\left(\overline{s}\right) = 2l$$

і $U_{y,0} \perp 1$. Як наслідок,

$$\nu(U_y) = \nu(U^h_{y,0}). \tag{2.18}$$

Припустимо, що U_y має кратний нуль в точці x_0, тобто $U_y(x_0) = 0$ і $U'_y(x_0) = 0$. Оберемо інтервал Δ монотонності функції $K(x-x_0)$ такий, що функція $U^h_{y,0}(x-x_0)$ приймає значення одного знаку для $x \in \Delta$. Далі, на інтервалі Δ оберемо два неперетинні інтервали Δ_1 і Δ_2. За лемою 2.2.7 існують неперервні функції ω_1 і ω_2, і додатне число ξ, які задовольняють умови (1)–(4) леми 2.2.7. Припустимо, що $\omega_b = b(\xi\omega_1 + \omega_2)$. Тоді $(K(-\cdot) * \omega_b)(x_0) = 0$ та $(K(-\cdot) * \omega_b)'(x_0) \neq 0$. Оберемо $b \in \mathbb{R}$ настільки малим за абсолютною величиною, що фукнкція $U_y + K(-\cdot) * \omega_b$ має зміну знаку в точці x_0 та змінює свій знак в малих околах тих точок, де функція U_y також змінює свій знак. Більш того, ми можемо припустити, що $\nu(U^h_{y,0} + \omega_b) = \nu(U^h_{y,0})$. Для такого b з рівності (2.18) отримаємо

$$\begin{aligned} \nu(K(-\cdot) * (U^h_{y,0} + \omega_b)) &= \nu(U_y + K(-\cdot) * \omega_b) \\ &\geqslant \nu(U_y) + 2 = \nu(U^h_{y,0}) + 2 = \nu(U^h_{y,0} + \omega_b) + 2, \end{aligned}$$

що суперечить властивості ядра K не збільшувати осциляцію функцій з щонайбільше $2n$ змінами знаку і тому факту, що $\nu\left(U^h_{y,0} + \omega_b\right) \leqslant 2l$. $\square$

Переконаємося в тому, що функція $\overline{s}$ є $2\pi/n$-періодичною. Нехай $T > 0$ є мінімальним періодом функції G, a_1 є точкою найменшого локального максимума функції G. Доведемо, що G має рівно два нулі на напівінтервалі $[a_1, a_1 + T)$. Для цього припустимо супротивне, що G має хоча б чотири нулі на $[a_1, a_1+T)$. Але тоді існує хоча б один локальний максимум функції G на цьому напівінтервалі. Нехай a_2 є точкою локального максимуму функції G, який є найближчим до a_1 праворуч, і нехай a_3 є точкою локального максимуму функції G, який є найближчим до $a_1 + T$ ліворуч. Також, нехай b_1 є точкою локального мінімуму функції G, який є найближчим до a_1 праворуч, та b_2 – найближчим до $a_1 + T$ ліворуч. Покажемо, що існує $y \in (0, T)$, для якого U_y має кратний нуль в деякій точці на періоді $\mathbb{T}$. Це означатиме, що функція G має період $y < T$, що суперечить вибору T.

Якщо $G(a_1) = G(a_2)$, то оберемо $y := a_2 - a_1 < T$. Як наслідок, $U_y(a_1) = G(a_1) - G(a_1 + a_2 - a_1) = 0$ і $U'_y(a_1) = 0$. Звідси випливає, що a_1 є кратним нулем функції U_y. Припустимо тепер, що $G(a_2) > G(a_1)$ і $G(a_3) > G(a_1)$. Розглянемо значення $G(b_1)$ і $G(b_2)$. Якщо вони збігаються, то оберемо $y := b_2 - b_1$. Без зменшення загальності припустимо, що $G(b_2) > G(b_1)$. Отже, існують точки $c_1 \in (a_1, b_1)$ і $c_2 \in (a_3, b_2)$, для яких $G(c_1) = G(b_2)$ і $G(c_2) = G(a_1)$.

Покажемо тепер, що існують $\xi \in [a_1, c_1]$ і $\eta \in [c_2, b_2]$ такі, що $G(\xi) = G(\eta)$ і $G'(\xi) = G'(\eta)$. Неважко бачити, що функція G є спадною на відрізках $[a_1, c_1]$ та $[c_2, b_2]$. Більш того, $G(t)$ приймає всі значення з відрізку $[G(b_2), G(a_1)]$, коли $t \in [a_1, c_1]$. Аналогічним чином, $G(t)$ приймає всі значення з відрізку $[G(b_2), G(a_1)]$, коли $t \in [c_2, b_2]$. Тому існують неперервно диференційовні функції $\psi_1 = (G|_{[a_1,c_1]})^{-1}$ і $\psi_2 = (G|_{[c_2,b_2]})^{-1}$, означені на відрізку $[G(b_2), G(a_1)]$. Тоді границя $\lim\limits_{x\to x_0} \psi_1'(x)$ є нескінченною, коли $x_0 = G(a_1)$, і скінченною, коли $x_0 = G(b_2)$. Також, границя $\lim\limits_{x\to x_0} \psi_2'(x)$ є нескінченною, коли $x_0 = G(b_2)$, і скінченною, коли $x_0 = G(a_1)$. Отже, існує точка $w \in [G(b_2), G(a_1)]$, в якій $\psi_1'(w) = \psi_2'(w)$. Як наслідок, існують $\xi \in (a_1, c_1)$ і $\eta \in (c_2, b_2)$, для яких $G(\xi) = G(\eta) = w$ та

$$G'(\xi) = \frac{1}{\psi_1'(w)} = \frac{1}{\psi_2'(w)} = G'(\eta).$$

Це означає, що $y = \eta - \xi < T$ є періодом функції G, що неможливо. Таким чином, функція G має рівно два нулі на напівінтервалі $[a_1, a_1 + T)$. Оскільки G має $2l$ нулів на періоді $\mathbb{T}$, з останнього зауваження ми встановлюємо, що $T = 2\pi l^{-1}$. А отже, $\overline{s}$ є $2\pi l^{-1}$-періодичною. Тому, $\overline{s} = \varphi^{\sigma}_{l;\gamma,\delta}$ з точністю до зсуву агрумента.

Залишається зауважити, що для всіх $l < n$

$$E_0(K^h * \varphi^{\sigma}_{n;\gamma,\delta})_{1;\alpha,\beta} < E_0(K^h * \varphi^{\sigma}_{l;\gamma,\delta})_{1;\alpha,\beta}.$$

Таким чином, теорема 2.2.4 доведена. Зауважимо також, що теорема 2.2.2 є безпосереднім наслідком з теорем 2.2.4 і 2.2.7.

2.2.5. Існування усередненого сплайну, що досягає свого мінімуму в заданих точках

В цьому підрозділі ми доведемо ще одне допоміжне твердження, отримане в [150], про існування усередненого $(K; \alpha, \beta)$-сплайну, що приймає своє мінімальне значення в заданих точках.

Теорема 2.2.8. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta > 0$ і $0 < h < \pi/n$. Нехай також аналітичне на $\mathbb{R}$ ядро K і множина J є такими, що або $J(K) = \varnothing$, $K \in \mathcal{A}_{2n}(\varnothing)$ і $J = \varnothing$, або $J(K) \supset \{0\}$, $K \in \mathcal{A}_{2n}(\{0\})$ і $J = \{0\}$. Тоді для довільного набору чисел*

$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_1 + 2\pi$ існує функція $s \in S^0_{n;\alpha,\beta}$ така, що усереднений $(K;\alpha,\beta)$-сплайн $K^h * s$ приймає в точках $x_1, \ldots, x_n$ свої мінімальні значення $\min\limits_{t\in\mathbb{T}} \left(K^h * s\right)(t)$.

Для доведення теореми 2.2.8 застосуємо метод, запропонований в [126]. Зауважимо, що для доведення тверджень, подібних до теореми 2.2.8, існують й інші методи. Зокрема, методи, що спираються на застосування теореми Борсука ([158]), а також методи, в яких шукана функція $s \in S^0_{n;\alpha,\beta}$ є розв'язком деякої екстремальної задачі (див. [185]). Проте використовуючи ці два методи, твердження теореми 2.2.8 можна довести лише для набору точок $x_1, \ldots, x_n$, який задовольняє додатковим обмеженням:

$$x_1 < x_2 - 2h < \ldots < x_n - (n-1)h < x_1 + 2\pi - 2nh.$$

В свою чергу, реалізація метода з роботи [126] зіштовхується з певними труднощами, які пов'язані з тим, що оператор усереднення за Стєкловим не є оператором, що не збільшує осциляцію. Проте має місце деяке послаблення цієї властивості для операторів S_h, яке дається теоремою 2.2.6.

Перейдемо безпосередньо до доведення теореми 2.2.8. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $0 < h < \pi/n$ і $\alpha, \beta > 0$. Позначимо через KN_n множину функцій $f \in K^h *_J S^0_{n;\alpha,\beta}$ і f має рівно $2n$ екстремумів на періоді $\mathbb{T}$. Множина KN_n є непорожньою, оскільки за властивістю не збільшувати осциляцію ядра K функція $K * \varphi^h_{n;\alpha,\beta}$ належить класу KN_n.

Для сплайна $s \in S_{n;\alpha,\beta}$ через $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{2n} < \xi_1 + 2\pi$ позначимо його вузли, пронумеровані таким чином, що $s(t) \equiv \alpha$, $t \in (\xi_1, \xi_2)$. Оскільки $s \perp 1$, то

$$\sum_{j=1}^{2n} (-1)^j \xi_j = \frac{2\pi\beta}{\alpha+\beta}.$$

Отже, довільна система точок $\xi_1 < \xi_2 < \ldots \xi_{2n-1} < \xi_1 + 2\pi$, для якої

$$\frac{2\pi\beta}{\alpha+\beta} - \sum_{j=1}^{2n-1} (-1)^j \xi_j < \xi_1 + 2\pi,$$

однозначно задає деякий сплайн $s \in S^0_{n;\alpha,\beta}$. Позначимо таку систему точок через $\xi = \{\xi_j\}_{j=1}^{2n-1}$ і назвемо її *визначальною* системою для сплайна s. Сплайн, який відповідає системі точок ξ, будемо позначати s_ξ. Для заданої визначальної системи ξ означимо:

$$\xi_{2n} := \frac{2\pi\beta}{\alpha+\beta} - \sum_{j=1}^{2n-1} (-1)^j \xi_j \qquad \text{і} \qquad \xi_{2n+1} := \xi_1 + 2\pi.$$

Нехай $U_\rho(\xi)$ – замкнена куля простору $\mathbb{R}^{2n-1}$ з центром в точці $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{2n-1})$ і радіусом $\rho > 0$.

Лема 2.2.17. *Нехай $\xi \in \mathbb{R}^{2n-1}$ – визначальна система для сплайна $s_\xi \in S^0_{n;\alpha,\beta}$. Тоді існує $\rho > 0$ таке, що довільна точка $\eta \in U_\rho(\xi)$ є визначальною системою деякого сплайна $s_\eta \in S^0_{n;\alpha,\beta}$.*

Доведення леми 2.2.17 проводиться за аналогією з доведенням леми 3.2 з [126].

Нехай сплайн $s \in S^0_{n;\alpha,\beta}$ є таким, що $K * s^h \in KN_n$, і через ξ позначимо його визначальну систему. Через ${}_1\xi, \ldots, {}_n\xi$, ${}_1\xi < {}_2\xi < \ldots < {}_n\xi < {}_1\xi + 2\pi$, позначимо ті точки, в яких функція $K * s^h$ досягає своїх локальних мінімумів. Оскільки ядро K є аналітичним на $\mathbb{R}$, то існує достатньо мале число $\rho > 0$, для якого $K * s^h_\eta \in KN_n$ для всіх $\eta \in U_\rho(\xi)$. Розглянемо довільний інтервал $(a, a + 2\pi)$, $a \in \mathbb{T}$, який містить точки ${}_1\xi, \ldots, {}_n\xi$. Зрозуміло, що число ρ можна обрати таким чином, що для будь-якого $\eta \in U_\rho(\xi)$ точки ${}_1\eta, \ldots, {}_n\eta$, в яких $K * s^h_\eta$ досягає свого локального мінімуму, також належать інтервалу $(a, a + 2\pi)$.

Означимо відображення $\tau : U_\rho(\xi) \to \mathbb{R}^{2n-1}$ наступним чином. Для кожної точки $\eta \in U_\rho(\xi)$ означимо

$$\tau(\eta) := \left\{ {}_1\eta, \ldots, {}_n\eta, \left(K * s^h_\eta\right)({}_2\eta) - \left(K * s^h_\eta\right)({}_1\eta), \ldots, \left(K * s^h_\eta\right)({}_n\eta) - \left(K * s^h_\eta\right)({}_1\eta) \right\}.$$

Нескладно бачити, що τ є неперервним відображенням відносно ℓ_∞-метрики в $\mathbb{R}^{2n-1}$, що породжується нормою $\|\zeta\|_\infty := \max\limits_{j=1,\ldots,2n-1} |\zeta_j|$, $\zeta \in \mathbb{R}^{2n-1}$.

Лема 2.2.18. *Існує $\rho' \in (0, \rho)$ таке, що звуження відображення τ на кулю $U_{\rho'}(\xi)$ є ін'єктивним відображенням.*

Доведення. Нехай $t_1, \ldots, t_{2n}$, $a < t_1 < \ldots < t_{2n} < a + 2\pi$, – точки, в яких функція $K * s^h_\xi$ досягає своїх локальних екстремумів. Для $j = 1, \ldots, 2n$ нехай $m_j := \left(K * s^h_\xi\right)(t_j)$. Через w_0 позначимо найменше з чисел $w > 0$, які задовольняють рівність

$$\omega\left(K * s_\xi^h; w\right) = \frac{1}{2} \cdot \min_{j=1,\ldots,2n} |m_{j+1} - m_j|\,,$$

де $m_{2n+1} = m_1$ і $\omega(g;t)$ є модуль неперервності функції $g \in C(\mathbb{T})$.

Нехай $\theta := \frac{1}{4n} \cdot \min\limits_{j=1,\ldots,2n} |\xi_{j+1} - \xi_j|$. Для кожного $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{8} \cdot \min\limits_{j=1,\ldots,2n} |m_{j+1} - m_j|\right)$ число $\rho' > 0$ оберемо таким чином, що $\rho' < \min\left\{\rho; \frac{w_0}{2}; \frac{\theta}{2}\right\}$ і для будь-якого $\eta \in U_{\rho'}(\xi)$ відстань між функціями $K * s_\xi^h$ і $K * s_\eta^h$ в L_∞-метриці не перевищує ε. За вибором чисел ε і w_0 відстань між точками, в яких функція $K * s_\eta^h$, $\eta \in U_{\rho'}(\xi)$, досягає своїх локальних екстремумів, не менша за w_0.

Покажемо, що звуження відображення τ на $U_{\rho'}(\xi)$ буде ін'єктивним відображенням. Припустимо супротивне, що існують дві точки $\eta, \zeta \in U_{\rho'}(\xi)$, $\eta \neq \zeta$, такі, що $\tau(\zeta) = \tau(\eta)$. Оскільки s_η і s_ζ належать множині KN_n, то

$$\nu\left(s_\eta^h\right) = \nu\left(s_\zeta^h\right) = 2n. \tag{2.19}$$

Нехай ${}_1\eta, \ldots, {}_n\eta$ та ${}_1\zeta, \ldots, {}_n\zeta$, де $a < {}_1\eta < \ldots < {}_n\eta < a + 2\pi$ та $a < {}_1\zeta < \ldots < {}_n\zeta < a + 2\pi$, – точки, в яких функції $K * s_\eta^h$ і $K * s_\zeta^h$, відповідно, досягають своїх локальних мінімумів. За припущенням, ${}_j\eta = {}_j\zeta$ для всіх $j = 1, \ldots, n$ та

$$\left(K * s_\eta^h\right)\left({}_j\eta\right) - \left(K * s_\eta^h\right)\left({}_1\eta\right) = \left(K * s_\eta^h\right)\left({}_j\zeta\right) - \left(K * s_\eta^h\right)\left({}_1\zeta\right).$$

Без зменшення загальності вважатимемо, що $|\eta_1 - \zeta_1| = \|\eta - \zeta\|_\infty$. Позначимо $u := \zeta_1 - \eta_1$ і розглянемо функцію $s_\eta(\cdot - u)$. Подальші міркування проведемо для випадку $u > 0$. Випадок $u < 0$ є аналогічним.

Вочевидь, система $\xi_1, \eta_2+u, \ldots, \eta_{2n-1}+u$ є визначальною системою для сплайна $s_\eta(\cdot - u)$. Оскільки $|u| \leqslant 2\rho' < 2\theta$, то виконуються нерівності:

$$\zeta_1 < \zeta_2 \leqslant \eta_2 + u < \zeta_3 \leqslant \eta_3 + u < \ldots < \zeta_{2n-1} \leqslant \eta_{2n-1} + u < \eta_{2n} + u \leqslant \zeta_{2n}.$$

Зі встановленого ланцюжка нерівностей випливає, що функція $s_\eta(\cdot - u) - s_\zeta(\cdot)$ має не більше, ніж $2n - 1$ зміну знаку на періоді $\mathbb{T}$, та всі її екстремуми не є нульовими. Розглянемо дві функції:

$$g_1(t) := \left(K * s_\eta^h\right)(t - u) - \left(K * s_\eta^h\right)\left({}_1\eta\right), \qquad t \in \mathbb{T},$$

$$g_2(t) := \left(K * s^h_\zeta\right)(t) - \left(K * s^h_\zeta\right)({}_1\eta), \qquad t \in \mathbb{T}.$$

Покажемо, що їх різниця $g_1 - g_2$ має не менше двох змін знаку на кожному з відрізків $\left[{}_j\eta, {}_{j+1}\eta\right]$, $j = 1, \ldots, n$. Дійсно, оскільки $|u| \leqslant 2\rho' < 2w_0$, то для всіх $j = 1, \ldots, n$ виконуються нерівності: $g_1\left({}_j\eta\right) - g_2\left({}_j\eta\right) > 0$ і $g_1\left({}_j\eta + u\right) - g_2\left({}_j\eta + u\right) < 0$. Таким чином

$$\nu\left(g_1 - g_2\right) \geqslant 2n. \tag{2.20}$$

У випадку $J(K) \supset \{0\}$, $J = \{0\}$ і $K \in \mathcal{A}_{2n}(\{0\})$ отримаємо

$$\begin{aligned} \nu\left(g_1 - g_2\right) &= \nu\left(\left(K * s^h_\zeta\right)({}_1\eta) - \left(K * s^h_\eta\right)({}_1\eta) + \left(K * s^h_\eta\right)(\cdot - u) - \left(K * s^h_\zeta\right)(\cdot)\right) \\ &\leqslant \nu\left(s^h_\eta(\cdot - u) - s^h_\zeta(\cdot)\right). \end{aligned}$$

В силу рівності (2.19), умови теореми 2.2.6 виконуються для функцій $s_\eta(\cdot - u)$ і $s_\zeta(\cdot)$. Отже,

$$\nu\left(g_1 - g_2\right) \leqslant \nu\left(s^h_\eta(\cdot - u) - s^h_\zeta(\cdot)\right) \leqslant \nu\left(s_\eta(\cdot - u) - s_\zeta(\cdot)\right) \leqslant 2n - 2,$$

що суперечить нерівності (2.20).

Розглянемо тепер випадок, коли $J(K) = \varnothing$, $J = \varnothing$ і $K \in \mathcal{A}_{2n}(\varnothing)$. Нехай $\lambda \in \mathbb{R}$ є таким, що

$$\lambda \cdot \int_0^{2\pi} K(t)\,\mathrm{d}t = \left(K * s^h_\zeta\right)({}_1\eta) - \left(K * s^h_\eta\right)({}_1\eta).$$

Тоді зважаючи на теорему 2.2.6 і враховуючи, що різниця $s_\eta(\cdot - u) - s_\zeta(\cdot)$ має не більш ніж $2n - 2$ локальних екстремумів, отримаємо

$$\nu\left(g_1 - g_2\right) \leqslant \nu\left(\lambda + s^h_\eta(\cdot - u) - s^h_\zeta(\cdot)\right) \leqslant \nu\left(s_\eta(\cdot - u) - s_\zeta(\cdot)\right) \leqslant 2n - 2,$$

що суперечить нерівності (2.20). Таким чином, звуження відображення τ на $U_{\rho'}(\xi)$ є ін'єктивним, що завершує доведення леми. □

З леми 2.2.18 та неперервності відображення τ ми бачимо, що τ є гомеоморфізм з $U_{\rho'}(\xi)$ в $\mathbb{R}^{2n-1}$.

Нехай E – множина точок $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ таких, що $0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < 2\pi$. Зрозуміло, що E зв'язна множина. Нехай E_0 є така підмножина E, що для кожної точки $\mathbf{x} \in E_0$ існує сплайн $s \in S^0_{n;\alpha,\beta}$, для якого $K * s^h \in KN_n$ та $K * s^h$ досягає свої локальні мінімуми в точках $0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Множина E_0 непорожня, оскільки містить точку $\left(\frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$. Дійсно, для довільної $\frac{2\pi}{n}$-періодичної функції $K * s^h \in KN_n$ ми можемо обрати таке число $b \in \mathbb{R}$, що функція $\left(K * s^h\right)(\cdot + b)$ досягає свої локальні мінімуми в точках $0, \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$.

Лема 2.2.19. *Множина E_0 є відкритою підмножиною множини E.*

Доведення. За означенням множини E_0, для будь-якої точки $\mathbf{x} \in E_0$ існує такий сплайн $s \in S^0_{n;\alpha,\beta}$, що $K * s^h$ має локальні мінімуми в точках $0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Нехай ξ є визначальною системою сплайна s. За лемою 2.2.18 існує замкнена куля $U_{\rho'}(\xi)$ така, що відображення $\tau : U_{\rho'} \to \mathbb{R}^{2n-1}$ буде гомеоморфізмом. Тоді з теореми про інваріантність відкритої множини (див. [2]) випливає, що точка $\tau(\xi) = (0, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, \ldots, 0)$ є внутрішньою точкою множини E_0. Отже, існує такий окіл $U(\mathbf{x})$ точки $\mathbf{x}$, що для будь-якої точки $\mathbf{y} \in U(\mathbf{x})$ точка $(0, y_1, \ldots, y_{n-1}, 0, \ldots, 0)$ належить множині $\tau\left(U_{\rho'}(\xi)\right)$. Таким чином, існує така точка $\eta \in U_{\rho'}(\xi)$, що $\tau(\eta) = (0, y_1, \ldots, y_{n-1}, 0, \ldots, 0)$. Це завершує доведення. $\square$

Лема 2.2.20. *Множина E_0 є замкненою підмножиною множини E.*

Доведення. Нехай $\mathbf{x} \in E$ і послідовність $\{\mathbf{x}^m\}_{m=1}^{\infty} \subset E_0$ збігається до елемента $\mathbf{x}$, коли $m \to \infty$. За означенням множини E_0, для кожного $m \in \mathbb{N}$ існує сплайн $s_m \in S^0_{n;\alpha,\beta}$ з визначальною системою $\xi^m \in \mathbb{R}^{2n-1}$ такий, що

$$\left(K * s_m^h\right)(0) = \left(K * s_m^h\right)\left(x_j^m\right), \qquad j = 1, \ldots, n-1,$$

$$\left(K * s_m^h\right)'(0) = \left(K * s_m^h\right)'\left(x_j^m\right), \qquad j = 1, \ldots, n-1.$$

Неважко бачити, що існує підпослідовність $\{\xi^{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$, яка збігається до деякої точки $\xi \in \mathbb{R}^{2n-1}$, коли $k \to \infty$. Вочевидь, ξ є визначальною системою деякого сплайна $s \in S^0_{n;\alpha,\beta}$. Отже, $\|s_{m_k} - s\|_{L_1(\mathbb{T})} \to 0$, коли $k \to \infty$. Таким чином, послідовність $\left\{K * s_{m_k}^h\right\}_{k=1}^{\infty}$ збігається рівномірно до $K * s^h$, а послідовність $\left\{\left(K * s_{m_k}^h\right)'\right\}_{k=1}^{\infty}$ – до $\left(K * s^h\right)'$, коли $k \to \infty$. Звідси для всіх $j = 1, \ldots, n-1$

$$\left(K * s_{m_k}^h\right)\left(x_j^{m_k}\right) \to \left(K * s^h\right)(x_j) \quad \text{і} \quad \left(K * s_{m_k}^h\right)'\left(x_j^{m_k}\right) \to \left(K * s^h\right)'(x_j),$$

$$\left(K * s_{m_k}^h\right)(0) \to \left(K * s^h\right)(0) \quad \text{і} \quad \left(K * s_{m_k}^h\right)'(0) \to \left(K * s^h\right)'(0),$$

коли $k \to \infty$. Як наслідок, для всіх $j = 1, \ldots, n-1$

$$\left(K * s^h\right)(x_j) = \left(K * s^h\right)(0) \quad \text{і} \quad \left(K * s^h\right)'(x_j) = \left(K * s^h\right)'(0),$$

та функція $K * s^h$ досягає рівних локальних мінімумів в точках $0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Це завершує доведення леми. □

Таким чином ми довели, що E_0 є непорожньою, відритою та замкненою підмножиною зв'язної множини E. Тому $E_0 = E$ і теорема 2.2.8 доведена.

2.2.6. Доведення основних результатів підрозділу 2.2

Перейдемо до доведення теорем 2.2.3 і 2.2.1.

Доведення теореми 2.2.3. Нехай або $J(K) = \varnothing$, $J = \varnothing$, $K \in \mathcal{A}_{2n}(\varnothing)$ і $\sigma \in \mathbb{R}$, або $J(K) \supset \{0\}$, $J = \{0\}$, $K \in \mathcal{A}_{2n}(\{0\})$ і $\sigma = 1$. За теоремою 2.2.7 для доведення теореми 2.2.3 достатньо показати, що для всіх $\alpha, \beta > 0$ і довільної формули $\kappa \in \mathcal{Q}^h_{n,\sigma}$ має місце нерівність

$$E_0\left(M_\kappa(K;\cdot)\right)_{1;\alpha,\beta} \geqslant E_0\left(M^h_{n,\sigma}(K;\cdot)\right)_{1;\alpha,\beta}. \tag{2.21}$$

Нехай $x_1, \ldots, x_n$ є вузли усередненого моносплайну $M_\kappa(K;\cdot)$ виду (2.5) і нехай сплайн $s \in S^0_{n;\alpha,\beta}$ є таким, що функція $K^h * s$ приймає в точках $x_1, \ldots, x_n$ свої мінімальні значення $\min\limits_{t\in\mathbb{T}} \left(K^h * s\right)(t)$. Для функції $K^h * s$ має місце рівність

$$E_0^+(K^h * s)_1 = -2\pi \min_t (K^h * s)(t). \tag{2.22}$$

За теоремою 2.2.5,

$$E_0\left(M_\kappa(K;\cdot)\right)_{1;\alpha,\beta} = \sup\left\{\int_0^{2\pi} M_\kappa(K;t) g(t)\,\mathrm{d}t \;:\; \|g\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} \leqslant 1,\ g \perp 1\right\},$$

і, як наслідок,

$$\begin{aligned} E_0\left(M_\kappa(K;\cdot)\right)_{1;\alpha,\beta} &\geqslant \int_0^{2\pi} M_\kappa(K;t) s(t)\,\mathrm{d}t = -\sum_{j=1}^n a_j \int_0^{2\pi} K^h(x_j - t) s(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -2\pi\sigma \min_{t\in\mathbb{T}} (K^h * s)(t) = \sigma \cdot E_0^+(K^h * s)_1. \end{aligned}$$

Тому $E_0\left(M_\kappa(K;\cdot)\right)_{1;\alpha,\beta} \geqslant \sigma E_0^+(K^h * s)_1$. З іншого боку

$$E_0\left(M^h_{n,\sigma}(K;\cdot)\right)_{1;\alpha,\beta} = -\frac{2\pi\sigma}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^{2\pi} K^h\left(\frac{2j\pi}{n} - u\right)\operatorname{sgn}_{\alpha,\beta}\left(M^h_{n,\sigma}(K;u) - \lambda\right)\mathrm{d}u, \quad (2.23)$$

де λ – константа найкращого (α,β)-наближення monosплайна $M^h_{n,\sigma}(K;\cdot)$ в L_1-метриці. Зрозуміло, що функція

$$F(t) := \int_0^{2\pi} K^h(t-u)\operatorname{sgn}_{\alpha,\beta}\left(M^h_{n,\sigma}(K;u) - \lambda\right)\mathrm{d}u$$

є зсувом функції $K^h * \varphi^0_{n;\alpha,\beta}$. З (2.23) ми отримаємо

$$\begin{aligned} E_0\left(M^h_{n,\sigma}(K;\cdot)\right)_{1;\alpha,\beta} &= -\frac{2\pi\sigma}{n}\sum_{j=1}^{n} F\left(\frac{2j\pi}{n}\right) = -2\pi\sigma F\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ &\leqslant -2\pi\sigma\min_{t\in\mathbb{T}}\left(K^h * \varphi^0_{n;\alpha,\beta}\right)(t) = \sigma\cdot E_0^+\left(K^h * \varphi^0_{n;\alpha,\beta}\right)_1, \end{aligned} \quad (2.24)$$

а за теоремою 2.2.2,

$$E_0^+\left(K^h * s\right)_1 \geqslant E_0^+\left(K^h * \varphi^0_{n;\alpha,\beta}\right)_1. \quad (2.25)$$

Співставляючи (2.22), (2.24), (2.25), ми завершуємо доведення нерівності (2.21) і теореми. □

Доведення теореми 2.2.1. Нехай $n\in\mathbb{N}$, $0<h<\pi/n$ та або $J(K)=\varnothing$, $J=\varnothing$, $K\in\mathcal{A}_{2n}(\varnothing)$ і $\sigma\in\mathbb{R}$, або $J(K)\supset\{0\}$, $J=\{0\}$, $K\in\mathcal{A}_{2n}(\{0\})$ і $\sigma=1$. Також, нехай $\kappa\in\mathcal{Q}^h_{n,\sigma}$ і усереднений моносплайн $M\in\mathcal{M}_\kappa(K;\cdot)$ пов'язаний з формулою κ співвідношенням (2.5). Застосовуючи лему 2.2.6, теорему 2.2.7 і лему 2.2.5 ми отримаємо, що

$$\begin{aligned} R^+\left(K *_J F, \kappa\right) &= \sup_{\varphi\in F,\,\varphi\perp\mu}\int_0^{2\pi} M_\kappa(K;t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{\varphi\in F,\,\varphi\perp\mu}\int_0^{2\pi}\Pi\left(M_\kappa(K;\cdot),t\right)\Pi(\varphi,t)\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant \sup_{\varphi\in F,\,\varphi\perp\mu}\int_0^{2\pi}\Pi(M^h_{n,\sigma}(K;\cdot),t)\Pi(\varphi,t)\,\mathrm{d}t = R^+\left(K *_J F, \kappa^h_{n,\sigma}\right). \end{aligned}$$

Аналогічним чином можна показати, що $R^-\left(K *_J F,\kappa\right) \geqslant R^-\left(K *_J F, \kappa^h_{n,\sigma}\right)$. Отже, формула $\kappa^h_{n,\sigma}$ є $\mathcal{Q}^h_{n,\sigma}$-оптимальною на класі $K *_J F$. □

2.3. Оптимізація квадратурних формул, що використовують в якості інформації інтеграли вздовж гіперплощин

В цьому підрозділі досліджується задача оптимізації кубатурних формул з $\mathcal{Q}_n^{d,k}$ на класах функцій $H_p^\omega(\Omega)$, $H^{\overline{\omega}}(\Omega)$ і $W^{\mathbf{r}}$, означених в параграфі 2.1.3. В параграфі 2.3.2 розв'язана задача 2.1.1 оптимізації кубатурних формул з $\mathcal{Q}_n^{d,1}$ на класах $W^{\mathbf{r}}$ і $H^{\overline{\omega}}(\Pi_d)$, де Π_d – паралелепіпед в $\mathbb{R}^d$, сторони якого паралельні координатним осям. Задача 2.1.7 асимптотично найкращого наближеного інтегрування за допомогою кубатурних формул з $\mathcal{Q}_n^{d,k}$ на класах $H_\infty^\omega\left([0,1]^d\right)$ розв'язана в параграфі 2.3.1, а за допомогою кубатурних формул з множини $\mathcal{Q}_n^{d,2}$ на класах $H_1^\omega\left([0,1]^d\right)$ – в підрозділі 2.3.3.

2.3.1. Точна асимптотика $\mathcal{Q}_n^{d,k}$-найкращої кубатурної формули на класах $H_\infty^\omega\left([0,1]^d\right)$

Нехай $d \in \mathbb{N}$ і $\Omega = [0,1]^d$. Для встановлення точної асимптотичної поведінки величини $\mathcal{E}\left(H_\infty^\omega(\Omega), \mathcal{Q}_n^{d,k}\right)$, коли $n \to \infty$, застосуємо наступний результат роботи [199], отриманий С. В. Бородачовим.

Твердження 2.3.1 ([199, теорема 2.1])**.** *Нехай $k \in \{1,\ldots,d\}$, $n = N^k$, $N \in \mathbb{N}$, ω – модуль неперервності і $\Omega = [0,1]^d$. Тоді*

$$\mathcal{E}\left(H_\infty^\omega(\Omega), \mathcal{Q}_n^{d,k}\right) = (2N)^k\, k \int_0^{\frac{1}{2N}} t^{k-1}\omega(t)\,\mathrm{d}t,$$

а $\mathcal{Q}_n^{d,k}$-найкращою кубатурною формулою на класі $H_\infty^\omega(\Omega)$ є, наприклад, формула

$$\widetilde{\kappa}_{n,k}(f) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{L_j\cap\Omega} f(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t}, \qquad f \in C(\Omega),$$

де гіперплощини $L_j := L\left(\mathbf{x}^j; \{1,\ldots,k\}\right)$, $j = 1,\ldots,N^k$, а множина точок $\left\{\mathbf{x}^j\right\}_{j=1}^n$ збігається з множиною

$$\left\{\left(\frac{2j_1-1}{2N},\ldots,\frac{2j_k-1}{2N},0,\ldots,0\right)\right\}_{j_1,\ldots,j_k=1}^{N}.$$

Головним результатом параграфу є наступна теорема, отримана автором в [199].

Теорема 2.3.1. *Нехай* $d \in \mathbb{N}$, $d > 1$, $k \in \{1, \ldots, d\}$, ω *– модуль неперервності і* $\Omega = [0,1]^d$. *Тоді*

$$\mathcal{E}\left(H_\infty^\omega(\Omega), \mathcal{Q}_n^{d,k}\right) = 2^k \cdot k \cdot \left(1 + O\left(n^{-1/k}\right)\right)\, n \int_0^{\frac{1}{2n^{1/k}}} t^{k-1}\omega(t)\,\mathrm{d}t, \quad n \to \infty.$$

Більш того, послідовність кубатурних формул $\left\{\widetilde{\kappa}_{N^k,k}\right\}_{N=1}^\infty$ *є* $\mathcal{Q}^{d,k}$*-асимптотично найкращою на класі* $H_\infty^\omega(\Omega)$.

Зауважимо, що у випадку $k = d$ результат теореми 2.3.1 був встановлений В. Ф. Бабенком [9]. Для класів Гельдера з теореми 2.3.1 можна отримати наслідок.

Наслідок 2.3.1. *Нехай* $d \in \mathbb{N}$, $d > 1$, $k \in \{1, \ldots, d\}$, $\alpha \in (0,1]$ *і* $\Omega = [0,1]^d$. *Тоді*

$$\mathcal{E}\left(H_\infty^\alpha(\Omega), \mathcal{Q}_n^{d,k}\right) = \frac{k \cdot \left(1 + O\left(n^{-1/2}\right)\right)}{2^\alpha (k+\alpha) n^{\alpha/k}}, \qquad n \to \infty.$$

Доведення теореми 2.3.1. Нехай $N \in \mathbb{N}$ є таким, що $N^k \leqslant n < (N+1)^k$. Розглянемо функцію $\beta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$:

$$\beta(h) := \int_0^{\frac{1}{2h}} t^{k-1}\omega(t)\,\mathrm{d}t, \qquad h > 0.$$

За твердженням 2.3.1 мають місце рівності: $\mathcal{E}\left(H_\infty^\omega(\Omega), \mathcal{Q}_{N^k}^{d,k}\right) = (2N)^k k \cdot \beta(N)$ і $\mathcal{E}\left(H_\infty^\omega(\Omega), \mathcal{Q}_{(N+1)^k}^{d,k}\right) = (2N+2)^k k \cdot \beta(N+1)$. Оскільки послідовність $\left\{\mathcal{E}\left(H_\infty^\omega(\Omega), \mathcal{Q}_n^{d,k}\right)\right\}_{n=1}^\infty$ і функція β є незростаючими, то

$$\begin{aligned} \frac{\beta(N+1)}{\beta(N)} &\leqslant \frac{(2N+2)^k k}{2^k k \cdot n} \cdot \frac{\beta(N+1)}{\beta(N)} \leqslant \frac{1}{2^k k \cdot n} \cdot \frac{\mathcal{E}\left(H_\infty^\omega(\Omega), \mathcal{Q}_n^{d,k}\right)}{\beta\left(N\right)} \\ &\leqslant \frac{(2N)^k k}{2^k k \cdot n} \cdot \frac{\beta(N)}{\beta\left(N\right)} \leqslant \frac{\beta(N)}{\beta(N+1)}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Переконаємося в тому, що

$$\beta(N) = \left(1 + O\left(n^{-1/k}\right)\right)\beta(N+1), \qquad n \to \infty. \tag{2.27}$$

Для цього покажемо, що існує константа $C > 0$, для якої

$$\beta(N+1) \leqslant \beta(N) \leqslant \left(1 + \frac{C}{N+1}\right)\beta(N+1). \tag{2.28}$$

Дійсно, неважко бачити, що

$$(N+1)\left(\beta(N) - \beta(N+1)\right) = (N+1)\int_{\frac{1}{2N+2}}^{\frac{1}{2N}} t^{k-1}\omega(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(2N)^k} \cdot \omega\left(\frac{1}{2N}\right). \tag{2.29}$$

Нехай $a, t \in \mathbb{R}_+$ і $m \in \mathbb{N}$ є такими, що $t \leqslant a$ та $2^{m-1} \leqslant \frac{a}{t} < 2^m$. Тоді за напівадитивністю ω, $t\omega(a) \leqslant t\omega(2^m t) \leqslant 2^m t\omega(t) \leqslant 2a\omega(t)$, звідки

$$\frac{t}{2a}\,\omega(a) \leqslant \omega(t), \qquad 0 < t \leqslant a.$$

Застосовуючи цю нерівність при $a = \frac{1}{2N}$ і приймаючи до уваги (2.29), матимемо

$$\beta(N+1) = \int_0^{\frac{1}{2N+2}} t^{k-1}\omega(t)\,\mathrm{d}t \geqslant N\,\omega\left(\frac{1}{2N}\right)\int_0^{\frac{1}{2N+2}} t^k\,\mathrm{d}t = \frac{N\,\omega\left(\frac{1}{2N}\right)}{(k+1)(2N+2)^{k+1}}$$
$$\geqslant \frac{1}{C(2N)^k}\,\omega\left(\frac{1}{2N}\right) \geqslant \frac{N+1}{C}\left(\beta(N) - \beta(N+1)\right),$$

де $C > 0$ є константа, що не залежить від N. За отриманою нерівністю і незростанням послідовності $\{\beta(N)\}_{N=1}^{\infty}$ ми встановлюємо (2.28), а, отже, і (2.27). Тоді з (2.26) і (2.27) випливає твердження теореми 2.3.1. $\square$

2.3.2. $\mathcal{Q}_n^{d,1}$-найкращі кубатурні формули на класах $W_\infty^{\mathbf{r}}$ і $H^{\overline{\omega}}(\Omega)$

Нехай $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}_+$ – задані числа, $\Omega = [0, a_1] \times \ldots \times [0, a_d]$ – паралелепіпед в $\mathbb{R}^d$, і для $j = 1, \ldots, d$ позначимо $b_j := \frac{\mu(\Omega)}{a_j}$. Для модулів неперервності $\omega_1, \ldots, \omega_d$ через $\widetilde{H}^{\overline{\omega}}(\Omega)$ позначимо підмножину класу $H^{\overline{\omega}}(\Omega)$, яка складається з функцій, що є a_j-періодичними за j-ою змінною, $j = 1, \ldots, d$. Наступні два результати отримано автором в [198].

Теорема 2.3.2. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\omega_1, \ldots, \omega_d$ – довільні модулі неперервності і $j_0 \in \{1, \ldots, d\}$ – такий індекс, що*

$$\frac{1}{a_{j_0}}\int_0^{\frac{a_{j_0}}{2n}} \omega_{j_0}(t)\,\mathrm{d}t = \min_{j=1,\ldots,d} \frac{1}{a_j}\int_0^{\frac{a_j}{2n}} \omega_j(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.30}$$

Нехай для $k = 1, \ldots, n$ точка $\mathbf{x}^k := \left(0, \ldots, 0, \frac{2k-1}{2n} \cdot a_{j_0}, 0, \ldots, 0\right)$ має ненульову координату на позиції з індексом j_0. Тоді кубатурна формула

$$\widetilde{\kappa}_n(f) := \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(\Omega)}{n} \cdot \int_{L(\mathbf{x}^k;\{j_0\})\cap\Omega} f(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t}, \qquad f \in C(\Omega),$$

є $\mathcal{Q}_n^{d,1}$-найкращою на класах $H^{\overline{\omega}}(\Omega)$ і $\widetilde{H}^{\overline{\omega}}(\Omega)$. Більш того,

$$\mathcal{E}\left(H^{\overline{\omega}}(\Omega), \mathcal{Q}_n^{d,1}\right) = \mathcal{E}\left(\widetilde{H}^{\overline{\omega}}(\Omega), \mathcal{Q}_n^{d,1}\right) = 2nb_{j_0}\int_0^{\frac{a_{j_0}}{2n}} \omega_{j_0}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.31}$$

Теорема 2.3.3. *Нехай* $r_1, \ldots, r_d \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, *і* $j_0 \in \{1, \ldots, d\}$ *– такий індекс, що* $r_{j_0} = \max\limits_{j=1,\ldots,d} r_j$. *Нехай також для* $k = 1, \ldots, n$ *точка* $\mathbf{x}^k := \left(0, \ldots, 0, \frac{\pi(2k-1)}{n}, 0, \ldots, 0\right)$ *має ненульову координату на позиції з індексом* j_0. *Тоді кубатурна формула*

$$\widetilde{\kappa}_n(f) := \sum_{k=1}^{n} \frac{(2\pi)^d}{n} \int_{L(\mathbf{x}^k;\{j_0\})\cap\mathbb{T}^d} f(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t}, \qquad f \in C\left(\mathbb{T}^d\right),$$

є $\mathcal{Q}_n^{d,1}$*-найкращою на класі* $W_\infty^{\mathbf{r}}$. *Більш того,*

$$\mathcal{E}\left(W_\infty^{\mathbf{r}}, \mathcal{Q}_n^{d,1}\right) = \frac{(2\pi)^d K_{r_{j_0}}}{n^{r_{j_0}}}, \tag{2.32}$$

де K_r *є константою Фавара (див. [92, §3.5])*

$$K_r := \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}.$$

Для доведення теорем 2.3.2 і 2.3.3 нам знадобиться одне допоміжне твердження, отримане в статті [198] автором спільно з В. Ф. Бабенком і С. В. Бородачовим. Нагадаємо, що підножина K лінійного простору називається *опуклою*, якщо для будь-яких функцій $g, h \in K$ і будь-якого $\lambda \in [0, 1]$ елемент $\lambda g + (1 - \lambda)h$ також належить множині K, та *центрально-симетричною*, якщо разом з довільним елементом g множина K також містить елемент $(-g)$.

Нехай для кожного $j = 1, \ldots, d$ множина $Y_j \subset C([0, a_j])$ є опуклою, центрально-симетричною і такою, що містить константи, та позначимо

$$P_j := [0, a_1] \times \ldots \times [0, a_{j-1}] \times [0, a_{j+1}] \times \ldots \times [0, a_d].$$

Позначимо через $Y_1 \times \ldots \times Y_d$ множину функцій $f \in C(\Omega)$ таких, що для будь-якого $j = 1, \ldots, d$ множина точок $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_d) \in P_j$, для яких функція однієї змінної $\psi(\cdot) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \ldots, x_d)$ належить класу Y_j, є всюди щільною в P_j. Нехай також $Y_1 + \ldots + Y_d$ є класом всіх функцій $f : \Omega \to \mathbb{R}$ виду $f(\mathbf{t}) = \varphi_1(t_1) + \ldots + \varphi_d(t_d)$, $\mathbf{t} \in \Omega$, де $\varphi_1 \in Y_1, \ldots, \varphi_d \in Y_d$. Нарешті, через $\overline{B}$ позначимо замикання множини $B \subset C[0, a]$, $a > 0$, в рівномірній нормі. Має місце наступний загальний результат.

Твердження 2.3.2. *Нехай $d, n \in \mathbb{N}$ і для $j = 1, \ldots, d$ множина $Y_j \subset C[0, a_j]$ є опуклою і центрально-симетричною множиною функцій, кожна з яких містить константи. Позначимо через $j_0 \in \{1, \ldots, d\}$ такий індекс, що*

$$\frac{1}{a_{j_0}} \mathcal{E}\left(Y_{j_0}, \mathcal{Q}_n\right) = \min_{i=j,\ldots,d} \frac{1}{a_j} \mathcal{E}\left(Y_j, \mathcal{Q}_n\right), \tag{2.33}$$

і нехай точкова квадратурна формула κ_n^* є $\mathcal{Q}_n$-найкращою на класі Y_{j_0}. Нехай $\{c_k^*\}_{k=1}^n$ – коефіцієнти формули κ_n^*, а $\{x_k^*\}_{k=1}^n$ – її вузли. Нехай також для $k = 1, \ldots, n$ точка $\mathbf{x}^k := (0, \ldots, 0, x_k^*, 0, \ldots, 0)$ має ненульову координату на позиції з індексом j_0. Тоді кубатурна формула

$$\widetilde{\kappa}_n(f) = \sum_{k=1}^{n} b_{j_0} c_k^* \cdot \int_{L(\mathbf{x}^k;\{j_0\})\cap\Omega} f(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t}, \qquad f \in C(\Omega),$$

є $\mathcal{Q}_n^{d,1}$-найкращою квадратурною формулою на будь-якому класі $Y \subset C(\Omega)$, для якого $Y_1 + \ldots + Y_d \subset Y \subset \overline{Y}_1 \times \ldots \times \overline{Y}_d$. Більш того,

$$\mathcal{E}\left(Y, \mathcal{Q}_n^{d,1}\right) = b_{j_0} \mathcal{E}\left(Y_{j_0}, \mathcal{Q}_n\right). \tag{2.34}$$

Зауваження 2.3.1. *Оскільки за припущеннями твердження 2.3.2 замикання класів $Y_1, \ldots, Y_d$ є інваріантними відносно додавання константи, має місце вкладення $Y_1 + \ldots + Y_d \subset \overline{Y}_1 \times \ldots \times \overline{Y}_d$, а, отже, існує хоча б один клас $Y \subset C(\Omega)$, який задовольняє умови теореми.*

Для повноти викладення наведемо доведення твердження 2.3.2.

Доведення твердження 2.3.2. Доведемо, що ліва частина в рівності (2.34) більша за її праву частину. Позначимо $\mathbf{u} = (t_1, \ldots, t_{j_0-1})$, $\mathbf{v} = (t_{j_0+1}, \ldots, t_d)$, $\mathrm{d}\mathbf{u} = \mathrm{d}t_{j_0-1} \ldots \mathrm{d}t_1$, $\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathrm{d}t_d \ldots \mathrm{d}t_{j_0+1}$ і нагадаємо, що

$$P_j = [0, a_1] \times \ldots \times [0, a_{j-1}] \times [0, a_{j+1}] \times \ldots \times [0, a_d], \qquad j = 1, \ldots, d.$$

Для функції $f \in Y$ і функціоналу $\kappa \in (C(\Omega))^*$ позначимо

$$R(f, \kappa) := \left| \int_{\Omega} f(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t} - \kappa(f) \right|.$$

Тоді для будь-якої функції $f \in Y$ маємо

$$
\begin{aligned}
|R(f,\widetilde{\kappa}_n)| &:= \left|\int_{\Omega} f(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t} - \sum_{k=1}^{n} b_{j_0} c_k^* \cdot \int_{L(\mathbf{x}^k;\{j_0\})\cap\Omega} f(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t}\right| \\
&= \left|\int_{P_{j_0}} \int_0^{a_{j_0}} f(\mathbf{u},t,\mathbf{v})\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\mathbf{v}\mathrm{d}\mathbf{u} - \sum_{k=1}^{n} c_k^* \int_{P_{j_0}} f(\mathbf{u},x_k^*,\mathbf{v})\,\mathrm{d}\mathbf{v}\mathrm{d}\mathbf{u}\right| \\
&= \left|\int_{P_{j_0}} \left(\int_0^{a_{j_0}} f(\mathbf{u},t,\mathbf{v})\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} c_k^* f(\mathbf{u},x_k^*,\mathbf{v})\right)\mathrm{d}\mathbf{v}\mathrm{d}\mathbf{u}\right| \\
&\leqslant \int_{P_{j_0}} \left|\int_0^{a_{j_0}} f(\mathbf{u},t,\mathbf{v})dt - \sum_{k=1}^{n} c_k^* f(\mathbf{u},x_k^*,\mathbf{v})\right|\mathrm{d}\mathbf{v}\mathrm{d}\mathbf{u}.
\end{aligned}
$$

Множина D_0 векторів $(\mathbf{u},\mathbf{v})$, для яких функція $\psi(\cdot) = f(\mathbf{u},\cdot,\mathbf{v})$ належить класу $\overline{Y}_{j_0}$, є всюди щільною в P_{j_0}, функція f є рівномірно неперервна на Ω, а формула κ_n^* є $\mathcal{Q}_n$-найкращою на класі Y_{j_0}. Тоді для будь-якого $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in P_{j_0}$ існує послідовність $\{(\mathbf{u}_m,\mathbf{v}_m)\}_{m=1}^{\infty} \subset D_0$, яка збігається до $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ і для якої

$$
R\left(\overline{Y}_{j_0},\kappa_n^*\right) \geqslant \lim_{m\to\infty} |R(f(\mathbf{u}_m,\cdot,\mathbf{v}_m),\kappa_n^*)| = |R(f(\mathbf{u},\cdot,\mathbf{v}),\kappa_n)|\,.
$$

Отже,

$$
\begin{aligned}
|R(f,\widetilde{\kappa}_n)| &\leqslant \int_{P_{j_0}} |R(f(\mathbf{u},\cdot,\mathbf{v}),\kappa_n^*)|\,\mathrm{d}\mathbf{v}\mathrm{d}\mathbf{u} \leqslant \int_{P_{j_0}} R\left(\overline{Y}_{j_0},\kappa_n^*\right)\mathrm{d}\mathbf{v}\mathrm{d}\mathbf{u} \\
&= b_{j_0} R(Y_{j_0},\kappa_n^*) = b_{j_0}\mathcal{E}\left(Y_{j_0},\mathcal{Q}_n^{\mathrm{p}}\right).
\end{aligned}
$$

В силу довільності функції $f \in Y$ ми отримаємо подвійну нерівність

$$
\mathcal{E}\left(Y,\mathcal{Q}_n^{d,1}\right) \leqslant R(Y,\widetilde{\kappa}_n) \leqslant b_{j_0}\mathcal{E}(Y_{j_0},\mathcal{Q}_n)\,. \tag{2.35}
$$

Перейдемо до встановлення оцінки знизу. С. А. Смоляк [156] (доведення також цитується в статті [41]) показав, що для довільного опуклого центрально-симетричного класу функцій $K \subset C[0,a]$, $a > 0$, і для будь-якого заданого набору вузлів $X = \{x_1,\ldots,x_n\} \subset [0,a]$ справджується рівність

$$
\rho(K,X) := \inf_{c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{R}} \sup_{g\in K} \left|\int_0^a g(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} c_k g(x_k)\right| = \sup_{\substack{g\in K:\\ g(x_k)=0,\ k=1,\ldots,n}} \int_0^a g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.36}
$$

Розглянемо довільну квадратурну формулу $\kappa \in \mathcal{Q}_n^{d,1}$:

$$
\kappa(f) = \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{n_i} c_{j,k} \int_{L(\mathbf{x}^{j,k};\{j\})\cap\Omega} f(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t}, \qquad f \in C(\Omega), \tag{2.37}
$$

де $n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n_1 + \ldots + n_d = n$, $\{c_{j,k}\}_{\substack{j=1,\ldots,d \\ k=1,\ldots,n_j}} \subset \mathbb{R}$ і $\{\mathbf{x}_{j,k}\}_{\substack{j=1,\ldots,d \\ k=1,\ldots,n_j}} \subset \Omega$. Без зменшення загальності будемо вважати, що для всіх $j = 1, \ldots, d$ точки $\mathbf{x}^{j,1}, \ldots, \mathbf{x}^{j,n_j}$ можуть мати ненульову координату лише на позиції з індексом j, тобто $x_r^{j,k} = 0$ для всіх $r \in \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, d\}$ і $k = 1, \ldots, n_j$. Припустимо спочатку, що $\sum\limits_{j=1}^{d} \sum\limits_{k=1}^{n_j} c_{j,k} \neq \mu\left(\Omega\right)$. Оскільки клас Y_j містить константи, то функція $h_c(\cdot) = c = c + 0 + \ldots + 0$ належить класу $Y_1 + \ldots + Y_d$, а, отже, і класу Y. Тоді

$$\begin{aligned} R(Y,\kappa) &\geqslant \sup_{c\in\mathbb{R}} |R(h_c,\kappa)| \\ &= \sup_{c\in\mathbb{R}} \left| \int_\Omega c \,\mathrm{d}\mathbf{t} - \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{n_j} c_{j,k}\cdot c \right| \sup_{c\in\mathbb{R}} |c| \cdot \left| \mu\left(\Omega\right) - \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{n_j} c_{j,k} \right| = \infty. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Залишається порівняти оцінку (2.35) з похибкою κ виду (2.37), для яких

$$\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{n_j} c_{j,k} = \mu\left(\Omega\right). \tag{2.39}$$

Зрозуміло, що хоча б для одного індексу $j \in \{1, \ldots, d\}$ має місце нерівність $\sum\limits_{k=1}^{n_j} c_{j,k} > 0$. Оберемо $\varepsilon > 0$ і для довільного $j \in \{1, \ldots, d\}$ такого, що $\sum\limits_{k=1}^{n_j} c_{j,k} > 0$, через $\varphi_j^\varepsilon \in Y_j$ позначимо функцію, для якої $\varphi_j^\varepsilon\left(x_j^{j,k}\right) = 0$, $k = 1, \ldots, n_j$, та

$$\int_0^{a_j} \varphi_j^\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t > \rho\left(Y_j, \left\{x_j^{j,1}, \ldots, x_j^{j,n_j}\right\}\right) - \varepsilon, \tag{2.40}$$

де величина $\rho(K,X)$ була означена в (2.36). В свою чергу, для будь-якого $j \in \{1, \ldots, d\}$ такого, що $\sum\limits_{k=1}^{n_j} c_{j,k} \leqslant 0$, означимо $\varphi_j^\varepsilon \equiv 0$. Тоді функція

$f_\varepsilon(\mathbf{t}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_k^\varepsilon(t_k)$, $\mathbf{t} \in \Omega$, належить класу Y, а тому, за рівністю (2.39), отримаємо

$$
\begin{aligned}
R(Y,\kappa) \;\geqslant\; & R\left(f_\varepsilon,\kappa\right) = \int_\Omega f_\varepsilon(\mathbf{t})\,\mathrm{d}t_d\ldots\mathrm{d}t_1 - \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{n_j} c_{j,k}\int_{L(\mathbf{x}^{j,k};\{j\})\cap\Omega} f_\varepsilon(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t} \\
&= \sum_{j=1}^{d} b_j \int_0^{a_j} \varphi_j^\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \\
&\qquad -\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{n_j} \frac{c_{j,k}}{b_j}\int_{P_j}\left(\varphi_j^\varepsilon\left(x_j^{j,k}\right) + \sum_{\substack{r=1,\\ r\neq j}}^{d} \varphi_r^\varepsilon(t_r)\right)\mathrm{d}t_d\ldots\mathrm{d}t_{j+1}\mathrm{d}t_{j-1}\ldots\mathrm{d}t_1 \\
&= \sum_{r=1}^{d} b_r \int_0^{a_r} \varphi_r^\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{n_j} \frac{c_{j,k}\cdot a_j}{\mu\left(\Omega\right)}\left(\sum_{\substack{r=1,\\ r\neq j}}^{d} \frac{b_r}{a_j}\int_0^{a_r}\varphi_r^\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \left(1 - \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{n_j} \frac{c_{j,k}}{\mu\left(\Omega\right)}\right)\left(\sum_{r=1}^{d} b_r\int_0^{a_r}\varphi_r^\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t\right) + \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{n_j}\frac{b_j c_{j,k}}{\mu\left(\Omega\right)}\int_0^{a_j}\varphi_j^\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=1}^{d}{}'\left(\sum_{k=1}^{n_j} c_{j,k}\right)\frac{1}{a_j}\int_0^{a_j}\varphi_j^\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

де символ $\sum'$ вказує, що підсумовуються лише ті індекси $j \in \{1,\ldots,d\}$, для яких $\sum\limits_{k=1}^{n_j} c_{j,k} > 0$ (рівність має місце, оскільки φ_j^ε тотожньо дорівнює нулю для інших індексів j). Тоді за (2.40) ми отримаємо

$$
\begin{aligned}
R(Y,\kappa) \;&\geqslant\; \sum_{j=1}^{d}{}'\left(\sum_{k=1}^{n_j} c_{j,k}\right)\frac{1}{a_j}\left(\rho\left(Y_j,\left\{x_j^{j,1},\ldots,x_j^{j,n_j}\right\}\right) - \varepsilon\right) \\
&\geqslant\; \sum_{j=1}^{d}{}'\left(\sum_{k=1}^{n_j} c_{j,k}\right)\frac{1}{a_j}\left(\mathcal{E}\left(Y_j,\mathcal{Q}_{n_j}\right) - \varepsilon\right).
\end{aligned}
$$

За довільністю ε і приймаючи до уваги співвідношення (2.33) і (2.39), матимемо

$$
\begin{aligned}
R(Y,\kappa) &\geqslant \sum_{j=1}^{d}{}'\left(\sum_{k=1}^{n_j} c_{j,k}\right)\frac{1}{a_j}\mathcal{E}\left(Y_j,\mathcal{Q}_{n_j}\right) \geqslant \sum_{j=1}^{d}{}'\left(\sum_{k=1}^{n_j} c_{j,k}\right)\frac{1}{a_j}\mathcal{E}\left(Y_j,\mathcal{Q}_{n}\right) \\
&\geqslant \frac{1}{a_{j_0}}\,\mathcal{E}(Y_{j_0},\mathcal{Q}_n)\sum_{j=1}^{d}{}'\left(\sum_{k=1}^{n_j} c_{j,k}\right) \geqslant \frac{\mu\left(\Omega\right)}{a_{j_0}}\,\mathcal{E}(Y_{j_0},\mathcal{Q}_n) = b_{j_0}\mathcal{E}(Y_{j_0},\mathcal{Q}_n)\,.
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

Поєднуючи (2.35), (2.38) і (2.41), переконуємося в $\mathcal{Q}_n^{d,1}$-оптимальності квадратурної формули $\widetilde{\kappa}_n$ на класі Y. Оскільки співвідношення (2.41) виконується і для формули $\widetilde{\kappa}_n$, то ми також отримуємо рівність (2.34). □

Доведення основні результати параграфу – теореми 2.3.2 та 2.3.3.

Доведення теореми 2.3.2. Нагадаємо, що для будь-якого $a > 0$ і модуля неперервності ω квадратурна формула прямокутників

$$\kappa_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n} f\left(\frac{a(2k-1)}{n}\right), \qquad f \in C([0,a]),$$

є $\mathcal{Q}_n$-найкращою на класі $H^\omega([0,a])$ (див. [90]). Більш того, формула κ_n є $\mathcal{Q}_n$-найкращою і на періодичному аналозі класу $H^\omega([0,a])$ – класі $\widetilde{H}^\omega([0,a])$, причому виконуються співвідношення

$$\mathcal{E}\left(H^\omega\left([0,a]\right), \mathcal{Q}_n\right) = \mathcal{E}\left(\widetilde{H}^\omega\left([0,a]\right), \mathcal{Q}_n\right) = 2n \int_0^{\frac{a}{2n}} \omega(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (2.42)$$

За (2.30) і (2.42) для $j = 1, \ldots, d$ матимемо

$$\frac{1}{a_{j_0}} \mathcal{E}\left(H^{\omega_{j_0}}\left([0,a_{j_0}]\right), \mathcal{Q}_n\right) \leqslant \frac{1}{a_j} \mathcal{E}\left(H^{\omega_j}\left([0,a_j]\right), \mathcal{Q}_n\right).$$

Неважко бачити, що $H^{\overline{\omega}}(\Omega) \subset H^{\omega_1}([0,a_1]) \times \ldots \times H^{\omega_d}([0,a_d])$, і для будь-яких $\varphi_1 \in H^{\omega_1}([0,a_1]), \ldots, \varphi_d \in H^{\omega_d}([0,a_d])$ і точок $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ виконуються нерівності

$$\left|\sum_{j=1}^{d} \varphi_j(x_j) - \sum_{j=1}^{d} \varphi_j(y_j)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{d} |\varphi_j(x_j) - \varphi_j(y_j)| \leqslant \sum_{j=1}^{d} \omega_j(|x_j - y_j|).$$

Тоді за теоремою 2.3.2 квадратурна формула $\widetilde{\kappa}_n$ є $\mathcal{Q}_n^{d,1}$-найкращою на класі $H^{\overline{\omega}}(\Omega)$. А зі співвідношень (2.34) і 2.42 для $a = a_{j_0}$ ми також встановлюємо вірність (2.31). Твердження теореми 2.3.2 для періодичних класів $\widetilde{H}^{\overline{\omega}}(\Omega)$ встановлюється за аналогією. $\square$

Доведення теореми 2.3.3. Нагадаємо (див. [126]), що для $r \in \mathbb{N}$ квадратурна формула прямокутників

$$\kappa_n^*(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\pi}{n} f\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \qquad f \in C(\mathbb{T}),$$

є $\mathcal{Q}_n$-найкращою на класі W_∞^r періодичних функцій і, крім того,

$$\mathcal{E}\left(W_\infty^r, \mathcal{Q}_n\right) = \frac{2\pi K_r}{n^r}. \qquad (2.43)$$

Оскільки $1 \leqslant K_r \leqslant \frac{\pi}{2}$, $r \in \mathbb{N}$ (див., наприклад, [95, с. 105]), то для будь-якого $j \in \{1, \ldots, d\}$ такого, що $r_j < r_{j_0}$ і $n \geqslant 2$, матимемо

$$\frac{1}{2\pi}\,\mathcal{E}\left(W_\infty^{r_{j_0}}, \mathcal{Q}_n\right) = \frac{K_{r_{j_0}}}{n^{r_{j_0}}} \leqslant \frac{\pi K_{r_j}}{2n \cdot n^{r_{j_0}-1}} \leqslant \frac{K_{r_j}}{n^{r_j}} = \frac{1}{2\pi}\,\mathcal{E}\left(W_\infty^{r_j}, \mathcal{Q}_n\right).$$

Неважко переконатися в тому, що $W_\infty^{r_1} \times \ldots \times W_\infty^{r_d} \supset W_\infty^{\mathbf{r}} \supset W_\infty^{r_1} + \ldots + W_\infty^{r_d}$. Тоді за теоремою 2.3.2 отримаємо, що формула $\widetilde{\kappa}_n$, $n \geqslant 2$, є $\mathcal{Q}_n^{d,1}$-найкращою на класі $W^{\mathbf{r}}$, а зі співвідношень (2.34) і (2.43) для $r = r_{j_0}$ отримаємо (2.32). □

2.3.3. Асимптотично оптимальні кубатурні формули з множини $\mathcal{Q}^{d,2}$ на класах функцій $H_1^\omega(\Omega)$

Нехай $a_1, \ldots, a_d > 0$ і $\Omega = [0, a_1] \times \ldots \times [0, a_d]$. В цьому параграфі знайдено точну асимптотичну поведінку величини $\mathcal{E}\left(H_1^\omega(\Omega); \mathcal{Q}_n^{d,2}\right)$, коли $n \to \infty$, та знайдено $\mathcal{Q}^{d,2}$-асимптотично оптимальну послідовність кубатурних формул.

Без зменшення загальності будемо вважати, що $a_1 \leqslant a_j$ і $a_2 \leqslant a_j$ для всіх $j = 3, \ldots, d$, і позначимо $P := [0, a_1] \times [0, a_2]$. Нехай решітка Λ в $\mathbb{R}^2$ породжена векторами $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ і $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$, тобто $\Lambda := \{n_1\mathbf{v}_1 + n_2\mathbf{v}_2 \,:\, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$. Для $h > 0$ означимо $\mathcal{V}_h := h\Lambda \cap \operatorname{int} P$ і через n_h позначимо кількість точок в $\mathcal{V}_h$. Неважко бачити, що n_h є неспадною функцією змінної h і $n_h = a_1a_2h^{-2}/2 + O\left(h^{-1}\right)$, $h \to 0$. Для $\mathbf{s} \in \mathcal{V}_h$ означимо клітину Вороного (див., наприклад, [271]) $W(\mathbf{s})$ елемента $\mathbf{s} \in \mathcal{V}_h$ в множині P за правилом: $W(\mathbf{s}) = \{\mathbf{t} \in P \,:\, \|\mathbf{t} - \mathbf{s}\|_1 = \operatorname{dist}(\mathbf{t}, \mathcal{V}_h)\}$, де $\operatorname{dist}(\mathbf{t}, X) := \inf\limits_{\mathbf{u} \in X} \|\mathbf{t} - \mathbf{u}\|_1$ позначає відстань від точки $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$ до множини $X \subset \mathbb{R}^2$. Зафіксуємо деякий порядок $\mathbf{s}^1, \ldots, \mathbf{s}^{n_h}$ точок в $\mathcal{V}_h$. Нехай $W_1 := W(\mathbf{s}^1)$ і

$$W_j = W\left(\mathbf{s}^j\right) \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} W\left(\mathbf{s}^k\right), \qquad j = 2, \ldots, n_h.$$

Нехай $\mu\left(W_j\right)$ є двовимірною мірою Лебега множини W_j, $j = 1, \ldots, n_h$, і нехай $\beta = a_3 \cdot \ldots \cdot a_d$, якщо $d > 2$, і $\beta = 1$, якщо $d = 2$. Тепер для $h > 0$ та $j = 1, \ldots, n_h$ означимо $\mathbf{x}^j := \left(s_1^j, s_2^j, 0, \ldots, 0\right) \in \mathbb{R}^d$ і розглянемо кубатурну формулу

$$\widetilde{\kappa}_h(f) := \sum_{j=1}^{n_h} \mu\left(W_j\right) \int_{L(\mathbf{x}^j; \{1,2\}) \cap \Omega} f(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t}, \qquad f \in C(\Omega). \tag{2.44}$$

В [197] автором встановлено наступний результат.

Теорема 2.3.4. *Нехай $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 2$, $a_1, \dots, a_d > 0$, $a_1 \leqslant a_2$, і $a_2 \leqslant a_j$, $j = 3, \dots, d$. Для довільного модуля неперервності ω виконується співвідношення*

$$\mathcal{E}\left(H_1^\omega(\Omega); Q_n^{d,2}\right) = 4\beta n \int_0^{\sqrt{\frac{a_1 a_2}{2n}}} t\,\omega(t)\,\mathrm{d}t \cdot \left(1 + O\left(n^{-1/2}\right)\right), \quad n \to \infty. \tag{2.45}$$

Сукупність формул $\{\widetilde{\kappa}_h\}_{h>0}$ означена в (2.44) є $\mathcal{Q}^{d,2}$-асимптотично оптимальною на класі $H_1^\omega(\Omega)$, коли $h \to 0$, і задовольняє співвідношення

$$\mathcal{E}\left(H_1^\omega(\Omega), Q_{n_h}^{d,2}\right) = R\left(H_1^\omega(\Omega), \kappa_h\right)\left(1 + O\left(n_h^{-1/2}\right)\right), \quad h \to 0. \tag{2.46}$$

Зауваження 2.3.2. *Теорема 2.3.4 узагальнює результат В. Ф. Бабенка [9] щодо оптимізації точкових квадратурних формул на класі $H_1^\omega(\Omega)$.*

Доведення теореми 2.3.4. По-перше, оцінимо зверху похибку формули (2.44). Неважко бачити, що для всіх $f \in H_1^\omega(\Omega)$, функція $g(\mathbf{s}) = \beta^{-1}\int_{L(\mathbf{s};\{1,2\})\cap\Omega} f(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t}$, $\mathbf{s} \in P$, належить класу $H_1^\omega(P)$. Також, мають місце наступні співвідношення

$$\begin{aligned}
|R(f, \kappa_h)| &= \left|\beta \int_P g(\mathbf{s})\,\mathrm{d}\mathbf{s} - \sum_{j=1}^{n_h} \beta \cdot \mu(W_j) \cdot g\left(\mathbf{s}^j\right)\right| \\
&= \beta \left|\sum_{j=1}^{n_h} \int_{W_j} g(\mathbf{s})\,\mathrm{d}\mathbf{s} - \sum_{j=1}^{n_h} \int_{W_j} g\left(\mathbf{s}^j\right)\,\mathrm{d}\mathbf{s}\right| \\
&\leqslant \beta \sum_{j=1}^{n_h} \int_{W_j} \left|g(\mathbf{s}) - g\left(\mathbf{s}^j\right)\right|\,\mathrm{d}\mathbf{s} \leqslant \beta \sum_{j=1}^{n_h} \int_{W_j} \omega\left(\left\|\mathbf{s} - \mathbf{s}^j\right\|_1\right)\mathrm{d}\mathbf{s} \\
&= \beta \int_P \omega\left(\operatorname{dist}(\mathbf{s}, \mathcal{V}_h)\right)\mathrm{d}\mathbf{s}.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Нехай $\mathcal{V}_h' := h\Lambda \cap [h, a_1 - h) \times [h, a_2 - h)$, $U_h := \bigcup\limits_{\mathbf{s}\in\mathcal{V}_h'} B(\mathbf{s}, h)$, де $B(\mathbf{x}, h)$ – куля з центром в точці $\mathbf{x}$ і радіусом h в метриці $\|\cdot\|_1$ простору $\mathbb{R}^2$, а m_h позначає кількість точок в множині $\mathcal{V}_h'$. Неважко бачити, що

$$m_h = a_1 a_2 h^{-2}/2 + O\left(h^{-1}\right), \quad h \to 0, \tag{2.48}$$

і $B(\mathbf{s}, h) \subset W(\mathbf{s})$ для будь-якого $\mathbf{s} \in \mathcal{V}_h'$. Розглянемо функцію

$$\alpha_\omega(h) := \int_0^h t\omega(t)\,\mathrm{d}t, \qquad h > 0.$$

З (2.47) для достатньо малих $h > 0$ отримаємо

$$\begin{aligned} R\left(H_1^\omega(\Omega), \kappa_h\right) &= \sup_{f \in H_1^\omega(\Omega)} |R(f, \kappa_h)| \leqslant \beta \int_P \omega\left(\mathrm{dist}(\mathbf{t}, \mathcal{V}_h)\right) \mathrm{d}\mathbf{t} \\ &= \beta \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{V}_h'} \int_{B(\mathbf{s},h)} \omega\left(\|\mathbf{t}-\mathbf{s}\|_1\right) \mathrm{d}\mathbf{t} + \beta \int_{P \setminus U_h} \omega\left(\mathrm{dist}(\mathbf{t}, \mathcal{V}_h)\right) \mathrm{d}\mathbf{t} \\ &\leqslant \beta \cdot m_h \int_{B(\mathbf{0},h)} \omega\left(\|\mathbf{t}\|_1\right) \mathrm{d}\mathbf{t} + \beta \int_{P \setminus U_h} \omega(5h)\, \mathrm{d}\mathbf{t} \\ &= 4\beta m_h \alpha_\omega(h) + \beta\omega(5h)\left(a_1 a_2 - 2m_h h^2\right) \\ &= 4\beta m_h \alpha_\omega(h) + \omega(5h) O(h). \end{aligned} \tag{2.49}$$

Для оцінювання знизу (2.45), розглянемо функцію

$$F_h(\mathbf{t}) := \min\{\omega\left(\mathrm{dist}((t_1, t_2), \mathcal{V}_h')\right), \omega(h)\}, \quad \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \Omega.$$

Вочевидь, $F_h \in H_1^\omega(\Omega)$. Зрозуміло, що кубатурна формула $\kappa \in \mathcal{Q}_{n_h}^{d,2}$ має вигляд

$$\kappa(f) = \sum_{k=1}^{n_h} c_k \int_{L_k \cap \Omega} f(\mathbf{t})\, \mathrm{d}\mathbf{t}, \qquad f \in C(\Omega),$$

де $L_k = L\left(\mathbf{x}^k; \{r_k', r_k''\}\right)$ і $\left\{\mathbf{x}^k\right\}_{k=1}^{n_h} \subset \Omega$, $\{(r_k', r_k'')\} \subset \mathbb{N}^2$. Покажемо, що для κ виконується нерівність

$$R\left(H_1^\omega\left(\Omega\right), \kappa\right) \geqslant \frac{n_h}{m_h} \int_\Omega F_h(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} + \omega(h) O(h).$$

Для цього розглянемо функцію $f_\kappa(\mathbf{x}) := \omega\left(\min\limits_{k=1,\ldots,n_h} \mathrm{dist}\left(\mathbf{x}, L_k\right)\right)$, $\mathbf{x} \in \Omega$. Оскільки $f_\kappa \in H_1^\omega\left(\Omega\right)$ та $\kappa(f_\kappa) = 0$, матимемо

$$R\left(H_1^\omega\left(\Omega\right), \kappa\right) \geqslant R\left(f_\kappa, \kappa\right) = \int_\Omega f_\kappa(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{2.50}$$

Порівняємо розподіли функцій f_κ і F_h. Припустимо, що $t \in (0, \omega(h)]$, і нехай

$p(t) := \min\{s \in [0,\infty) : \omega(s) \geqslant t\}$. Тоді

$$
\begin{aligned}
\mu\left(\{\mathbf{z}\in\Omega : f_\kappa(\mathbf{z}) < t\}\right) &= \mu\left(\left\{\mathbf{z}\in\Omega : \omega\left(\min_{k=1,\dots,n_h} \operatorname{dist}(\mathbf{z}, L_k)\right) < t\right\}\right)\\
&= \mu\left(\left\{\mathbf{z}\in\Omega : \min_{k=1,\dots,n_h} \operatorname{dist}(\mathbf{z}, L_k) < p(t)\right\}\right)\\
&= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n_h} \{\mathbf{z}\in\Omega : \operatorname{dist}(\mathbf{z}, L_k) < p(t)\}\right) \qquad (2.51)\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n_h} \mu\left(\left\{\mathbf{z}\in\Omega : \left|z_{j'_k} - x^k_{j'_k}\right| + \left|z_{j'_k} - x^k_{j''_k}\right| < p(t)\right\}\right)\\
&= 2n_h p^2(t)\cdot \max_{k=1,\dots,n_h} \frac{\mu(\Omega)}{a_{j'_k} a_{j''_k}} \leqslant 2\beta n_h p^2(t).
\end{aligned}
$$

З ішого боку, оскільки $p(t) \leqslant h$ і $\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_1 \geqslant 2h$ ми отримаємо, що для всіх $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathcal{V}'_h$, $\mathbf{z}_1 \neq \mathbf{z}_2$, мають місце рівності

$$
\begin{aligned}
&\mu\left(\{\mathbf{z}\in\Omega : F_h(\mathbf{z}) < t\}\right)\\
&\quad = \mu\left(\{\mathbf{z}\in U_h \times [0,a_3]\times\ldots\times[0,a_d] : \omega\left(\operatorname{dist}((z_1,z_2),\mathcal{V}'_h)\right) < t\}\right)\\
&\quad = \beta\cdot\mu\left(\{(z_1,z_2)\in U_h : \operatorname{dist}((z_1,z_2),\mathcal{V}'_h) < p(t)\}\right)\\
&\quad = \beta\cdot\mu\left(\bigcup_{\mathbf{s}\in\mathcal{V}'_h} B(\mathbf{s},p(t))\right) = \beta\sum_{\mathbf{s}\in\mathcal{V}'_h}\mu\left(B(\mathbf{s},p(t))\right) = 2\beta m_h p^2(t).
\end{aligned}
$$

Співставляючи останні рівності з (2.51) ми отримаємо, що для $t \in (0, \omega(h)]$,

$$
\frac{n_h}{m_h}\cdot\mu\left(\{\mathbf{z}\in\Omega : F_h(\mathbf{z}) < t\}\right) \geqslant \mu\left(\{\mathbf{z}\in\Omega : f_\kappa(\mathbf{z}) < t\}\right).
$$

Звідси

$$
\begin{aligned}
\nu\left(\{\mathbf{z}\in\Omega : f_\kappa(\mathbf{z}) \geqslant t\}\right) &\geqslant |\Omega| - \frac{n_h}{m_h}\cdot\mu\left(\{\mathbf{z}\in\Omega : F_h(\mathbf{z}) < t\}\right)\\
&= \left(1 - \frac{n_h}{m_h}\right)|\Omega| + \frac{n_h}{m_h}\cdot\mu\left(\{\mathbf{z}\in\Omega : F_h(\mathbf{z}) \geqslant t\}\right)
\end{aligned}
$$

і, нарешті,

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_\kappa(\mathbf{z})\,\mathrm{d}\mathbf{z} &= \int_0^\infty \mu\left(\{\mathbf{z}\in\Omega : f_\kappa(\mathbf{z})\geqslant t\}\right)\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant \int_0^{\omega(h)} \mu\left(\{\mathbf{z}\in\Omega : f_\kappa(\mathbf{z})\geqslant t\}\right)\mathrm{d}t \\ &\geqslant \omega(h)\left(1-\frac{n_h}{m_h}\right)|\Omega| + \frac{n_h}{m_h}\int_0^{\omega(h)} \mu\left(\{\mathbf{z}\in\Omega : F_h(\mathbf{z})\geqslant t\}\right)\mathrm{d}t \\ &= \omega(h)O(h) + \frac{n_h}{m_h}\int_\Omega F_h(\mathbf{z})\,\mathrm{d}\mathbf{z},\end{aligned} \tag{2.52}$$

де множник $O(h)$ не залежить від формули κ. Обчислюючи інтеграл від функції F_h, отримаємо

$$\begin{aligned}\int_\Omega F_h(\mathbf{z})\,\mathrm{d}\mathbf{z} &= \beta\int_{U_h}\omega\left(\mathrm{dist}((z_1,z_2),\mathcal{V}'_h)\right)\,\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2 + \beta\int_{P\setminus U_h}\omega(h)\,\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2 \\ &= \beta m_h\cdot\int_{B(\mathbf{0},h)}\omega\left(\|(z_1,z_2)\|_1\right)\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2 + \beta\omega(h)(a_1a_2-2h^2m_h) \\ &= 4\beta m_h\alpha_\omega(h) + \omega(h)O(h).\end{aligned}$$

Тоді за (2.52) матимемо

$$\int_\Omega f_q(\mathbf{z})\,\mathrm{d}\mathbf{z} \geqslant 4\beta n_h\alpha_\omega(h) + \omega(h)O(h), \tag{2.53}$$

де множник $O(h)$ не залежить від κ. Покажемо, що

$$\omega(h) = \alpha_\omega(h)O\left(h^{-2}\right). \tag{2.54}$$

Дійсно, з напівадитивності ω для всіх $m\in\mathbb{N}$ та $t>0$ випливає нерівність $\omega(mt)\leqslant m\omega(t)$. Отже, для всіх $t\in(0,h]$ матимемо

$$\omega(h)\leqslant\omega\left(\left(\left[\frac{h}{t}\right]+1\right)t\right)\leqslant\left(\left[\frac{h}{t}\right]+1\right)\omega(t)\leqslant\frac{2h}{t}\omega(t),$$

а також мають місце співвідношення

$$\alpha_\omega(h) = \int_0^h t\omega(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\omega(h)}{2h}\int_0^h t^2\,\mathrm{d}t = \omega(h)\frac{h^2}{6}. \tag{2.55}$$

З іншого боку

$$\alpha_\omega(h)\leqslant\int_0^h t\omega(h)\,\mathrm{d}t = \omega(h)\frac{h^2}{2},$$

звідки випливає (2.54). Приймаючи до уваги (2.50), (2.53) і (2.54), отримаємо

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\left(H_1^\omega(\Omega);\mathcal{Q}_{n_h}^{d,2}\right) &= \inf_{\kappa\in\mathcal{Q}_{n_h}^{d,2}} R\left(H_1^\omega(\Omega),\kappa\right) \geqslant \inf_{\kappa\in\mathcal{Q}_{n_h}^{d,2}} \int_\Omega f_\kappa(\mathbf{z})\,\mathrm{d}\mathbf{z}\\ &\geqslant 4\beta n_h\alpha_\omega(h)+\omega(h)O(h) = 4\beta n_h\alpha_\omega(h)+\alpha_\omega(h)O\left(h^{-1}\right) \qquad (2.56)\\ &= 4\beta n_h\alpha_\omega(h)\left(1+O\left(n_h^{-1/2}\right)\right), \qquad h\to 0.\end{aligned}$$

Оскільки $\omega(h)\leqslant\omega(5h)\leqslant 5\omega(h)$, $h>0$, ми також матимемо $\omega(5h)=\alpha_\omega(h)O\left(h^{-2}\right)$, $h\to 0$. Тоді з (2.49) і (2.48) отримаємо

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\left(H_1^\omega(\Omega);\mathcal{Q}_{n_h}^{d,2}\right) &\leqslant R\left(H_1^\omega(\Omega),\kappa_h\right)\leqslant 4\beta m_h\alpha_\omega(h)+\alpha_\omega(h)O\left(h^{-1}\right)\\ &= 4\beta n_h\alpha_\omega(h)\left(1+O\left(n_h^{-1/2}\right)\right), \qquad h\to 0.\end{aligned}$$

Разом з (2.56) остання нерівність дозволяє встановити співвідношення

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\left(H_1^\omega(\Omega);\mathcal{Q}_{n_h}^{d,2}\right) &= R\left(H_1^\omega(\Omega),\kappa_h\right)\left(1+O\left(n_h^{-1/2}\right)\right)\\ &= 4\beta n_h\alpha_\omega(h)\left(1+O\left(n_h^{-1/2}\right)\right), \qquad h\to 0,\end{aligned} \qquad (2.57)$$

і співвідношення (2.46) має місце. Для доведення (2.45) помітимо, що

$$\alpha_\omega(h+O(h^2))=\alpha_\omega(h)\left(1+O(h)\right), \qquad h\to 0. \qquad (2.58)$$

Дійсно, нехай $C>0$ є така константа, що $0\leqslant h-Ch^2\leqslant h+O(h^2)\leqslant h+Ch^2$, $h\to 0$. Тоді в силу співвідношень (2.54)–(2.55), матимемо

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_\omega(h+O(h^2))}{\alpha_\omega(h)} &\leqslant \frac{\alpha_\omega(h+Ch^2)}{\alpha_\omega(h)} = 1+\frac{1}{\alpha_\omega(h)}\int_h^{h+Ch^2} t\omega(t)\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant 1+\frac{C(h^3+Ch^4)\omega(h+Ch^2)}{\alpha_\omega(h)}\leqslant 1+\frac{2Ch^3\omega(2h)}{\alpha_\omega(h)}\\ &\leqslant 1+\frac{4Ch^3\omega(h)}{\alpha_\omega(h)} = 1+O(h), \qquad h\to 0.\end{aligned}$$

Аналогічним чином, можна встановити нерівність $\alpha_\omega(h+O(h^2))\geqslant\alpha_\omega(h)\left(1+O(h)\right)$, $h\to 0$, звідки випливає (2.58). Тепер нехай $m\in\mathbb{N}$ є достатньо великим і $h=h(m)>0$ є таким, що $n_h\leqslant m\leqslant n_{h-h^2}$. Оскільки $\sqrt{\frac{a_1a_2}{2m}}=h+O(h^2)$, то за (2.57) та (2.58), неважко переконатися в тому, що при $h\to 0$

$$\frac{\mathcal{E}\left(H_1^\omega(\Omega);\mathcal{Q}_m^{d,2}\right)}{4\beta m\cdot\alpha_\omega\left(\sqrt{\frac{a_1a_2}{2m}}\right)}\leqslant\frac{\mathcal{E}\left(H_1^\omega(\Omega);\mathcal{Q}_{n_h}^{d,2}\right)}{4\beta n_h\cdot\alpha_\omega(h+O(h^2))}=\frac{\alpha_\omega(h)\left(1+O\left(n_h^{-1/2}\right)\right)}{\alpha_\omega(h+O(h^2))}=1+O(h),$$

$$\frac{\mathcal{E}\left(H_1^\omega(\Omega);\mathcal{Q}_m^{d,2}\right)}{4\beta m\alpha_\omega\left(\sqrt{\frac{a_1a_2}{2m}}\right)}\geqslant\frac{\mathcal{E}\left(H_1^\omega(\Omega);\mathcal{Q}_{n_{h-h^2}}^{d,2}\right)}{4\beta n_{h-h^2}\alpha_\omega\left(h+O(h^2)\right)}=\frac{\alpha_\omega(h-h^2)\Big(1+O\left(n_{h-h^2}^{-1/2}\right)\Big)}{\alpha_\omega\left(h+O(h^2)\right)}=1+O(h).$$

Отже,

$$\frac{\mathcal{E}\left(H_1^\omega(\Omega);\mathcal{Q}_m^{d,2}\right)}{4\beta m\cdot\alpha_\omega\left(\sqrt{\frac{a_1a_2}{2m}}\right)}=1+O(h)=1+O\left(m^{-1/2}\right),\qquad m\to\infty.\qquad\square$$

Висновки до розділу 2

В цьому розділі отримано нові результати щодо оптимізації інтервальних квадратурних формул на класах згорток періодичних функцій та оптимізації кубатурних формул, що використовують в якості інформації про підінтегральну функцію її усереднення вздовж перетинів області визначення з гіперплощинами заданої вимірності, на класах функцій багатьох змінних. Отримано результати:

1. Встановлено, що інтервальна квадратурна формула з рівновіддаленими серединами вузлових інтервалів і рівними коефіцієнтами є найкращою серед всіх інтервальних квадратурних формул з заданою кількістю вузлових інтервалів на класах згорток ядер, що не збільшують осциляцію, з переставно інваріантними множинами.
2. Розв'язано задачу оптимізації кубатурних формул, що використовують в якості інформації про підінтегральну функцію її усереднення вздовж перетинів області визначення з гіперплощинами ковимірності 1, які паралельні координатним гіперплощинам, на класах функцій, означених на паралелепіпеді, з заданим обмеженням на модуль неперервності, та на класах функцій, означених на багатовимірному торі, з заданною гладкістю частинних похідних.
3. Знайдено точну асимптотичну поведінку похибки найкращого наближеного обчислення інтегралів функцій з заданою мажорантою модуля неперервності за допомогою кубатурних формул, інформацією для яких виступають усереднення підінтегральної функції вздовж перетинів її області визначення з гіперплощинами заданої ковимірності, які паралельні координатним гіперплощинам. Побудовано асимптотично оптимальні послідовності кубатур в цій задачі.

РОЗДІЛ 3

Найкраще наближення функцій багатьох змінних кусково-лінійними і гармонічними сплайнами

Третій розділ дисертаційної роботи присвячено дослідженню задачі про найкраще нелінійне наближення двічі неперервно диференційовних функцій двох змінних лінійними сплайнами, розв'язанню екстремальної задачі мінімізації похибки несиметричного наближення додатно визначеної квадратичної форми лінійними функціями на симплексах, а також встановленню точного порядку асимптотики найкращого наближення функцій багатьох змінних з обмеженим лапласіаном гармонічними сплайнами на прямокутних розбиттях, коли кількість їх елементів прямує до нескінченності.

3.1. Вступ

Нехай $d \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^d$ – компактна однозв'язна множина з непорожньою внутрішністю, та μ – d-вимірна міра Лебега на $\mathbb{R}^d$. Точки простору $\mathbb{R}^d$ будемо позначати через $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d)$, де $t_1, \dots, t_d$ – координати $\mathbf{t}$. Ключовою в теорії апроксимації є задача наближення функцій, форма яких в загальному випадку може бути складною, більш простими функціями – *наближуючими апаратами*, – які легше піддаються побудові та чисельним обчисленням. Добре відомими прикладами наближуючих апаратів є алгебраїчні та тригонометричні поліноми, цілі функції експоненційного типу, вейвлети, рідж-функції, та інші.

Особливе місце в теорії наближення та ряді її застосувань: чисельний розв'язок задач математичної фізики, квадратурні формули, спрощення поверхонь, стиснення зображень, обробка даних місцевості, кодування та передача інформації, зниження шуму, тощо – посідає задача наближення функцій однієї та багатьох змінних в різних метриках кусково-поліноміальними функціями – *сплайнами*, – які утворені за допомогою розбиттів області визначення – *сіток*. Сплайни застосовувалися як методи проміжного наближення та виникали як розв'язки екстремальних задач ще в роботах Л. Ойлера, Г. Лебега, Д. Джексона, А. М. Колмогорова, С. М. Нікольського, М. П. Корнєйчука, В. М. Тихомирова, Ю. М. Субботіна. Проте систематичне вивчення апроксимативних властивостей сплайнів розпочинається в середині XX сторіччя в роботах І. Дж. Шонберга та його учнів. Окрім вже названих вчених, значний внесок у розвиток теорії сплайнів пов'язаний з іменами Дж. Альберга, Е. Нільсона, Дж. Уолша, С. Б. Стєчкіна, М. Ш. Бірмана, М. З. Соломяка, К. де Бора, Л. Шумейкера, Ю. А. Брудного, А. Пінкуса, А. О. Лігуна, В. Ф. Бабенка, В. Попова, Р. Девора, П. Петрушева, та багатьох інших математиків. Широкий огляд відомих апроксимативних і екстремальних властивостей сплайнів та їх застосувань, а також подальші посилання, можна знайти в книгах [181, 326, 94, 97, 244].

Нехай $C(D)$ – простір неперервних на D функцій. Для $1 \leqslant p \leqslant \infty$ через $L_p = L_p(D)$ позначимо простір вимірних за Лебегом функцій $f : D \to \mathbb{R}$, які інтегровні в степені p (суттєво обмежені для $p = \infty$) зі стандартною нормою

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(D)} := \begin{cases} \left(\int_D |f(\mathbf{t})|^p \mathrm{d}\mathbf{t}\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname{esssup}\left\{|f(\mathbf{t}) \,:\, \mathbf{t} \in D\right\}, & p = \infty. \end{cases}$$

Означення 3.1.1. *Сукупність $\triangle$, яка складається з компактних однозв'язних підмножин D, будемо називати розбиттям (або сіткою) на D, якщо $\bigcup\limits_{T\in\triangle} T = D$, $\mu(T) > 0$ для всіх $T \in \triangle$ і $\mu\left(T' \cap T''\right) = 0$ для всіх $T', T'' \in \triangle$, $T' \neq T''$.*

Для $r \in \mathbb{N}$ і розбиття $\triangle$ на D через $\widetilde{\mathcal{S}}_r(\triangle)$ позначимо множину всіх функцій $s : D \to \mathbb{R}$ таких, що звуження $s|_T$ є алгебраїчним поліномом, степені мономів якого не перевищують r. Функції з множини $\widetilde{\mathcal{S}}_r(\triangle)$ будемо називати *сплайнами* (*поліноміальними сплайнами*) відносно розбиття $\triangle$. Означимо похибку найкращого наближення функції $f \in X$ сплайнами з $\widetilde{\mathcal{S}}_r(\triangle)$ в метриці простору L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$:

$$E\left(f; \widetilde{\mathcal{S}}_r(\triangle)\right)_p := \inf_{s\in\widetilde{\mathcal{S}}_r(\triangle)} \|f - s\|_{L_p(D)},$$

а також класу $\mathcal{M} \subset X$:

$$E\left(\mathcal{M}; \widetilde{\mathcal{S}}_r(\triangle)\right)_p := \sup_{f\in\mathcal{M}} E\left(f; \widetilde{\mathcal{S}}_r(\triangle)\right)_p.$$

Позначимо через $\mathfrak{D}$ деяку множину розбиттів на D. Прикладами множини $\mathfrak{D}$ є множина всіх розбиттів D на задану кількість опуклих підмножин, або множина всіх розбиттів D на d-вимірні симплекси з заданою кількістю вершин.

В теорії апроксимації застосовують два типи методів для розв'язання задачі наближення функцій сплайнами. *Лінійні* (або *рівномірні*) методи полягають в наближенні функцій $f : D \to \mathbb{R}$ з деякого класу $\mathcal{M}$ сплайнами, які побудовано на одному і тому ж розбитті $\triangle \in \mathfrak{D}$ на D. При цьому природно виникає задача знаходження найкращого розбиття $\triangle^* \in \mathfrak{D}$, для якого

$$E\left(\mathcal{M}; \widetilde{\mathcal{S}}_r\left(\triangle^*\right)\right)_p = \inf_{\triangle \in \mathfrak{D}} E\left(\mathcal{M}; \widetilde{\mathcal{S}}_r(\triangle)\right)_p,$$

якщо таке розбиття існує. Проте ще в 1960-х роках стало зрозуміло, що певного покращення в швидкості наближення функцій сплайнами можна досягти, якщо обирати розбиття $\triangle$ на D в залежності від наближуваної функції f. Такі *нелінійні* (або *адаптивні*) методи наближення спрямовані на знаходження розбиттів $\triangle^* \in \mathfrak{D}$ і сплайнів $s^* \in \widetilde{\mathcal{S}}_r\left(\triangle^*\right)$ на них, для яких

$$\|f - s^*\|_{L_p(D)} = \inf_{\triangle \in \mathfrak{D}} E\left(f; \widetilde{\mathcal{S}}_r(\triangle)\right)_p.$$

Сплайни s^*, утворені в такий спосіб, "пристосовуються" до локальних особливостей наближуваної функції. Зрозуміло, що адаптивність методів наближення впливає на конструкцію сіток $\triangle^*$ і геометрію їх елементів (їх розмір і форму), які можуть бути сильно *анізотропними*.

З точки зору застосувань важливою перевагою нелінійних методів наближення над лінійними є можливість побудуви сплайну візуально схожого на наближувану функцію. Ця властивість має неабияке значення в задачах геометричного моделювання, обробки ландшафтів, дискретної математики, чисельного аналізу, методу скінченних елементів, та інших. Стаття М. Ш. Бірмана і М. З. Соломяка [43] містить перші систематичні дослідження нелінійних методів наближення сплайнами. Огляд сучасного стану досліджень нелінійних методів можна знайти в [244, 246], а посилання на обчислювальну складність лінійних та нелінійних методів наближення можна знайти в [338, 306].

Особливий інтерес в задачах нелінійного наближення функцій сплайнами належить асимптотично оптимальним методам наближення. Задача асимптотично оптимального наближення функцій однієї змінної сплайнами вивчалася у 1970–1980-х роках у роботах А. О. Лігуна, В. Ф. Сторчая, В. С. Азаріна, В. І. Барміна, А. І. Гребеннікова, О. О. Шумейка, В. Г. Дороніна (див., наприклад, [1, 77, 114] та посилання в них), і на сьогодні це питання майже повністю закрите. Натомість, випадок функцій багатьох змінних є суттєво більш складним і, незважаючи на численні дослідження (див. [300, 241, 248, 265, 188, 204, 235, 192, 239, 205, 293, 294, 207] та посилання в них), на сьогодні відомо мало розв'язків цієї задачі.

Зупинимося детальніше на задачі асимптотично оптимального наближення функцій за допомогою лінійних сплайнів (див. параграф 3.1.1). В параграфі 3.1.2 ми розглянемо екстремальну задачу геометрії, яка виникає при побудові асимптотично оптимальних методів наближення, а в параграфі 3.1.3 розглянемо питання про порядок похибки трансфінітної інтерполяції функцій на спеціальному класі двічі неперервно диференційовних функцій.

3.1.1. Задача асимптотично оптимального нелінійного наближення функцій лінійними сплайнами

Задача нелінійного наближення функцій багатьох змінних лінійними сплайнами є важливою для застосувань, оскільки саме лінійні сплайни завдяки простій структурі і нескладності побудови найчастіше використовуються, наприклад, в методі скінченних елементів. Нехай D є опуклий політоп в $\mathbb{R}^d$.

Означення 3.1.2. *Розбиття $\triangle$ на D називається тріангуляцією множини D, якщо елементами $\triangle$ є d-вимірні симплекси, причому перетин будь-якої пари d-вимірних симплексів з $\triangle$ є або порожньою множиною, або їх спільною гранню вимірності $j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$.*

Для $N \in \mathbb{N}$ через $\mathfrak{D}_N$ позначимо множину всіх тріангуляцій множини D, які складаються з не більш ніж N елементів. Нехай $\mathcal{P}_1$ – множина лінійних поліномів від d змінних. Для тріангуляції $\triangle$ множини D означимо простір лінійних неперервних сплайнів:

$$\mathcal{S}_1(\triangle) := \{f \in C(D) : \forall T \in \triangle \;\; \exists p \in \mathcal{P}_1, \text{ для якого } f|_T = p|_T\}.$$

В теорії апроксимації досліджують різні аспекти наближення функції. Зокрема, розрізняють задачі інтерполяції, задачі найкращих і найкращих односторонніх наближень. Означимо величини, які характеризують похибку наближення в цих задачах. Нехай $\triangle$ – тріангуляція множини D, $f : D \to \mathbb{R}$ – задана функція і $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Через $s_\triangle[f]$ позначимо лінійний сплайн з $\mathcal{S}_1(\triangle)$, який інтерполює функцію f у вершинах d-вимірних симплексів $T \in \triangle$. *Похибкою інтерполяції* функції f сплайнами з $\mathcal{S}_1(\triangle)$ називається величина:

$$E^0\left(f; \mathcal{S}_1(\triangle)\right)_p := \|f - s_\triangle[f]\|_{L_p(D)},$$

похибкою найкращого наближення функції f сплайнами з $\mathcal{S}_1(\triangle)$ –

$$E\left(f; \mathcal{S}_1(\triangle)\right)_p := \inf_{s \in \mathcal{S}_1(\triangle)} \|f - s\|_{L_p(D)},$$

а *похибкою найкращого одностороннього наближення* f сплайнами з $\mathcal{S}_1(\triangle)$ –

$$E^\pm\left(f; \mathcal{S}_1(\triangle)\right)_p := \inf_{\substack{s \in \mathcal{S}_1(\triangle): \\ \pm f \leqslant \pm s}} \|f - s\|_{L_p(D)}.$$

Зауважимо, що величина E_N^+ характеризує похибку наближення зверху, а величина E_N^- – похибку наближення знизу.

Сформулюємо задачі асимптотично оптимального нелінійного наближення функції f лінійними сплайнами.

Задача 3.1.1. *Необхідно знайти точну асимптотичну поведінку похибки найкращої інтерполяції функції f лінійними сплайнами на тріангуляціях з $\mathfrak{D}_N$ в метриці простору L_p*

$$R_N^0\left(f, L_p(D)\right) := \inf_{\triangle \in \mathfrak{D}_N} E^0\left(f; \mathcal{S}_1(\triangle)\right)_p = \inf_{\triangle \in \mathfrak{D}_N} \|f - s_\triangle[f]\|_{L_p(D)},$$

коли $N \to \infty$. Також необхідно знайти асимптотично оптимальну послідовність тріангуляцій $\{\triangle_N^*\}_{N=1}^\infty$, $\triangle_N^* \in \mathfrak{D}_N$ для $N \in \mathbb{N}$, для якої

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\left\|f - s_{\triangle_N^*}[f]\right\|_{L_p(D)}}{R_N^0\left(f, L_p(D)\right)} = 1.$$

Задача 3.1.2. *Необхідно знайти точну асимптотичну поведінку похибки найкращого наближення функції f лінійними сплайнами на тріангуляціях з $\mathfrak{D}_N$ в метриці простору L_p*

$$R_N\left(f, L_p(D)\right) := \inf_{\triangle \in \mathfrak{D}_N} E\left(f; \mathcal{S}_1(\triangle)\right)_p = \inf_{\triangle \in \mathfrak{D}_N} \inf_{s \in \mathcal{S}_1(\triangle)} \|f - s\|_{L_p(D)},$$

коли $N \to \infty$. *Також необхідно знайти асимптотично оптимальні послідовності тріангуляцій* $\{\triangle_N^*\}_{N=1}^{\infty}$, $\triangle_N^* \in \mathfrak{D}_N$ *для* $N \in \mathbb{N}$, *і сплайнів* $\{s_N^*\}_{N=1}^{\infty}$, $s_N^* \in \mathcal{S}_1(\triangle_N^*)$ *для* $N \in \mathbb{N}$, *для яких*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\|f - s_N^*\|_{L_p(D)}}{R_N(f, L_p(D))} = 1.$$

Задача 3.1.3. *Знайти точну асимптотичну поведінку похибки найкращого одностороннього наближення функції f лінійними сплайнами на тріангуляціях з $\mathfrak{D}_N$ в метриці простору L_p*

$$R_N^{\pm}(f, L_p(D)) := \inf_{\triangle\in\mathfrak{D}_N} E^{\pm}(f; \mathcal{S}_1(\triangle))_p = \inf_{\triangle\in\mathfrak{D}_N} \inf_{\substack{s\in\mathcal{S}_1(\triangle):\\ \pm f\leqslant \pm s}} \|f - s\|_{L_p(D)},$$

коли $N \to \infty$. *Також необхідно знайти асимтотично оптимальні послідовності тріангуляцій* $\{\triangle_N^*\}_{N=1}^{\infty}$, $\triangle_N^* \in \mathfrak{D}_N$ *для* $N \in \mathbb{N}$, *і сплайнів* $\{s_N^*\}_{N=1}^{\infty}$, $s_N^* \in \mathcal{S}_1(\triangle_N^*)$ *для* $N \in \mathbb{N}$, *для яких*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\|f - s_N^*\|_{L_p(D)}}{R_N^{\pm}(f, L_p(D))} = 1.$$

Нехай $f \in C^2(D)$ – неперервна на D і двічі неперервно диференційовна всередині D функція. Через $H(f;\mathbf{x})$ позначимо визначник матриці Гессе функції f в точці $\mathbf{x} \in D$, тобто

$$H(f;\mathbf{x}) = \det\left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x})\right)_{1\leqslant j,k\leqslant d}\right).$$

Вже в роботі М. Ш. Бірмана та М. З. Соломяка [43] було показано, що величини $R_N^0(f; L_p(D))$, $R_N(f; L_p(D))$ та $R_N^{\pm}(f; L_p(D))$ мають порядок не вище за $N^{-2/d}$, коли $N \to \infty$. Проте, незважаючи на численні дослідження (див. [300, 241, 264, 188, 235, 192, 190]), точна асимптотична поведінка цих величин встановлена лише для опуклих функцій f. Найбільш технічно складною частиною тут є одержання точної оцінки знизу величин $\liminf\limits_{N\to\infty} N^{2/d} E^0(f; \mathcal{S}_1(\triangle_N))_p$, $\liminf\limits_{N\to\infty} N^{2/d} E(f; \mathcal{S}_1(\triangle_N))_p$, а також $\liminf\limits_{N\to\infty} N^{2/d} E^{\pm}(f; \mathcal{S}_1(\triangle_N))_p$ для довільної послідовності тріангуляцій $\{\triangle_N\}_{N=1}^{\infty}$, де $\triangle_N \in \mathfrak{D}_N$ для $N \in \mathbb{N}$. Тому більшість проведених досліджень обмежувалися розглядом послідовностей тріангуляцій, для яких $\limsup\limits_{N\to\infty} N^{1/d} \cdot \operatorname{diam} \triangle_N < \infty$, де $\operatorname{diam} \triangle$ позначає довжину найдовшої зі сторін d-вимірних симплексів, з яких складається тріангуляція $\triangle$. Лише в роботах [188, 192, 190] для опуклих функцій двох змінних оцінка знизу була отримана без обмежень на послідовності тріангуляцій $\{\triangle_N\}_{N=1}^{\infty}$.

Значно менш дослідженим є випадок, коли функція f не є опуклою хоча б в одній точці на D. Єдиний точний результат тут отримано в статті [188] щодо асимптотичної поведінки похибки $R_N^0\left(f; L_\infty(D)\right)$ найкращої інтерполяції функції двох змінних f, яка має від'ємний на D гесіан, в метриці простору L_∞.

Задача нелінійного наближення функцій багатьох змінних лінійними сплайнами близька до важливої задачі геометрії про найкраще наближення гладких опуклих тіл політопами. Після декількох окремих результатів в цьому напрямку, книга Л. Ф. Тота [337] стала першою збіркою багатьох задач, ідей та результатів щодо наближення політопами в дво- та тривимірному просторах. Зокрема, Л. Ф. Тотом було показано, що для тіла $B \subset \mathbb{R}^3$ з C^2 межею і додатною гаусовою кривизною κ, хаусдорфова відстань від B до його вписаного політопа найкращого наближення з щонайбільше N вершинами має точну асимптотичну поведінку

$$\frac{1}{3\sqrt{3}\,N} \int_{\partial B} \left(\kappa(x,y)\right)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}\sigma(x,y), \qquad N \to \infty,$$

де σ – поверхнева міра на ∂B. Результати Л. Ф. Тота ініціювали створення цілого розділу дискретної геометрії, присвяченого дослідженням задач найкращого наближення опуклих тіл політопами (див. [259, 232, 231, 260, 257] та посилання в них). Відзначимо, що в [231] К. Бороцкі розв'язав це нетривіальне питання для опуклих тіл в метриці простору L_1, що дає точну асимптотичну поведінку величини $R_N^0\left(f, L_1(D)\right)$, коли $N \to \infty$, для опуклих функцій f.

В теорії наближення існує підхід, що дозволяє розглядати задачі найкращого наближення з обмеженнями та задачу найкращого наближення під одним кутом. Цей підхід називається наближенням в просторах з несиметричною нормою (або (α, β)-наближенням) (див., наприклад, [13, 14, 95]), та полягає в різному "зважуванні" додатної та від'ємної частин різниці між функцією та її апроксимантом. Несиметричні норми розглядалися у зв'язку з різними задачами теорії наближення в роботах [13, 185, 106, 71, 72] і книгах [98, 95, 107]. Введемо необхідні для подальшого позначення.

Нехай $\alpha, \beta > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ та $\triangle$ – довільна тріангуляція множини D. Для функції $f \in L_p(D)$ позначимо $|f(\mathbf{x})|_{\alpha,\beta} := \alpha f_+(\mathbf{x}) + \beta f_-(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D$, де

$g_{\pm}(\mathbf{x}) := \max\{\pm g(\mathbf{x}); 0\}$. Означимо несиметричну L_p-норму функції $f \in L_p(D)$:

$$\|f\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)} := \|\alpha f_+ + \beta f_-\|_{L_p(D)} = \begin{cases} \left(\int_D |f(\mathbf{x})|^p_{\alpha,\beta}\, \mathrm{d}\mathbf{x}\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname{esssup}\{|f(\mathbf{x})|_{\alpha,\beta} : \mathbf{x} \in D\}, & p = \infty. \end{cases}$$

Нехай H – замкнений підпростір простору $L_p(D)$. Означимо похибку найкращого (α, β)-несиметричного наближення (див. [13, 95]) функції f підпростором H в метриці простору L_p:

$$E\,(f; H)_{L_{p;\alpha,\beta}(D)} = \inf\left\{\|f - s\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)} :\ s \in H\right\}.$$

Вочевидь, $E\,(f; H)_{L_{p;1,1}(D)} = E\,(f; H)_{L_p(D)}$. В. Ф. Бабенко [13] встановив граничні рівності:

$$\begin{aligned} \lim_{\beta\to+\infty} E\,(f; H)_{L_{p;1,\beta}(D)} &= E^+\,(f; H)_{L_p(D)}\,, \\ \lim_{\alpha\to+\infty} E\,(f; H)_{L_{p;\alpha,1}(D)} &= E^-\,(f; H)_{L_p(D)}\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Співвідношення (3.1) дозволяють включити задачу найкращого наближення без обмежень і задачу найкращого одностороннього наближення в сім'ю задач одного типу і вивчати їх з загальної точки зору (див. [14, 15]). З огляду на тотожність

$$\|f - u\|^p_{L_{p;1,\beta}(D)} = \|f - u\|^p_{L_p(D)} + (\beta^p - 1)\|(f - u)_-\|^p_{L_p(D)}, \qquad \beta > 1,$$

задачу найкращого $(1, \beta)$-наближення можна розглядати як задачу найкращого наближення з нестрогим обмеженням $f \leqslant u$. Це обмеження дозволяється порушувати, але штраф $(\beta^p - 1)\|(f - u)_-\|^p_{L_p(D)}$ за його порушення включається в міру похибки. В подальшому ми дозволятимемо параметрам α або β набувати значення $+\infty$, ототожнюючи в такому випадку величину $E\,(f; H)_{L_{p;\alpha,\beta}(D)}$ з похибкою відповідного одностороннього наближення.

Означення 3.1.3. *Похибкою найкращого (α, β)-несиметричного наближення в метриці простору L_p функції f лінійними сплайнами на тріангуляціях з $\mathfrak{D}_N$ будемо називати величину*

$$R_N\,(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)) := \inf_{\triangle\in\mathfrak{D}_N} E\,(f; \mathcal{S}_1(\triangle))_{L_{p;\alpha,\beta}(D)} = \inf_{\triangle\in\mathfrak{D}_N}\ \inf_{s\in\mathcal{S}_1(\triangle)} \|f - s\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)}.$$

Зауважимо, що $R_N\,(f, L_{p;1,1}(D)) = R_N\,(f; L_p(D))$. Також, з граничних рівностей (3.1) неважко переконатися в тому, що у випадку $\alpha = 1$ і $\beta \to \infty$ ($\beta = 1$ і $\alpha \to \infty$) величина $R_N\,(f, L_{p;\alpha,\beta}(D))$ збігається до $R^+_N\,(f; L_p(D))$ $(R^-_N\,(f; L_p(D)))$.

Задача найкращого нелінійного несиметричного наближення функції f лінійними сплайнами полягає в наступному.

Задача 3.1.4. *Необхідно знайти точну асимптотичну поведінку величини* $R_N\left(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\right)$*, коли* $N \to \infty$*, а також побудувати асимптотично оптимальні послідовності тріангуляцій* $\{\triangle_N^*\}_{N=1}^{\infty}$ *і сплайнів* $\{s_N^*\}_{N=1}^{\infty}$ *на них, де* $\triangle_N^* \in \mathfrak{D}_N$ *та* $s_N^* \in \mathcal{S}_1\left(\triangle_N^*\right)$ *для* $N \in \mathbb{N}$*, для яких*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\|f - s_N^*\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)}}{R_N\left(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\right)} = 1.$$

Зрозуміло, що задача 3.1.4 узагальнює задачі 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3. В підрозділі 3.3 ми наведемо результати роботи [190], в якій знайдено точну асимптотичну поведінку величини $R_N\left(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\right)$, коли $N \to \infty$, для опуклих функцій.

3.1.2. Задача мінімізації похибки найкращого наближення додатно визначених квадратичних форм лінійними функціями

Надалі для зручності кожну точку $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ будемо ототожнювати з вектор-рядком $(x_1, \ldots, x_d)$, що складається з координат точки $\mathbf{x}$. Для вектор-рядка $\mathbf{x}$ будемо позначати через $\mathbf{x}^{\mathrm{t}}$ вектор-стовпчик, транспонований до $\mathbf{x}$.

Один з методів побудови асимптотично оптимальної послідовності тріангуляцій $\{\triangle_N^*\}_{N=1}^{\infty}$ в задачі (3.1.4) полягає в наступному. Для кожного $N \in \mathbb{N}$ на першому кроці будується розбиття $\triangle'$ на D, яке складається з невеликої відносно N кількості елементів, та будується проміжне наближення функції квадратичною функцією на кожному з елементів $\triangle'$. Потім на кожному з побудованих елементів квадратична функція наближається лінійним сплайном найкращого наближення, який утворює розбиття цього елементу. Для цього потрібно (хоча б в $\mathbb{R}^2$) розв'язати задачу про знаходження форми d-вимірного симплекса одиничного об'єма, на якому мінімізується похибка найкращого (α, β)-несиметричного наближення в метриці простору L_p квадратичної функції $\mathfrak{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{x}^t$ за допомогою лінійних функцій.

Формалізуємо постановку цієї задачі. Для симплекса $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^d$, означимо

$$\sigma_{p;\alpha,\beta;d}(\mathcal{T}) := \frac{E(\mathfrak{q}; \mathcal{P}_1)_{L_{p;\alpha,\beta}(\mathcal{T})}}{|\mathcal{T}|^{1+1/p}},$$

де $|\mathcal{T}|$ позначає об'єм d-вимірного симплекса $\mathcal{T}$.

Задача 3.1.5. *Необхідно знайти величину*

$$\sigma_{p;\alpha,\beta;d} := \inf_{\mathcal{T}} \sigma_{p;\alpha,\beta;d}(\mathcal{T}) \tag{3.2}$$

і вказати симплекси $\mathcal{T}$, *для яких досягається* inf *в правій частині* (3.2).

Задача 3.1.5 узагальнює наступні споріднені задачі.

Задача 3.1.6. *Необхідно знайти величину*

$$\sigma_{p;d} := \inf_{\mathcal{T}} \frac{E(\mathfrak{q};\mathcal{P}_1)_{L_p(\mathcal{T})}}{|\mathcal{T}|^{1+1/p}} \tag{3.3}$$

і вказати симплекси $\mathcal{T}$, *для яких досягається* inf *в правій частині* (3.3).

Задача 3.1.7. *Необхідно знайти величину*

$$\sigma^{\pm}_{p;d} := \inf_{\mathcal{T}} \frac{E^{\pm}(\mathfrak{q};\mathcal{P}_1)_{L_p(\mathcal{T})}}{|\mathcal{T}|^{1+1/p}} \tag{3.4}$$

і вказати симплекси $\mathcal{T}$, *для яких досягається* inf *в правій частині* (3.4).

Задачі 3.1.5, 3.1.6 та 3.1.7 відіграють важливу роль в багатьох питаннях геометрії та теорії апроксимації, зокрема дозволяють отримувати оцінки щільностей найтонших покриттів [321]. Перші розв'язки задачі 3.1.7 належать Е. Ф. Дазеведо і Р. Б. Сімпсону [241], які обчислили величину $\sigma^{+}_{\infty;2}$. На даний час задача 3.1.7 розв'язана в наступних випадках:

1. $d = 2$ і $= \infty$ – Е. Ф. Дазеведо і Р. Б. Сімпсон [241];
2. $d \geqslant 2$ і $p = \infty$ – В. Т. Раян [320];
3. $d = 3$ і $p = 2$ – М. Брєзін [233];
4. $d = 2$ і $p = 1$ – К. Бороцкі [231];
5. $d = 2$ і $p = 2$ – Х. Потман та співавтори [319];
6. $d \geqslant 2$ і $p \in \mathbb{N}$ – Л. Чен [235];
7. $d = 2$ і $p \in (1,\infty)$ – В. Ф. Бабенко, Ю. В. Бабенко і Д. С. Скороходов [192];
8. $d \geqslant 2$ і $p \in (1,\infty)$ – Л. Чен [234].

В свою чергу, задача 3.1.6 була розв'язана лише у випадку $d = 2$ і $p = 2$ Е. Надлером [299, 300].

Зауваження 3.1.1. *В [192] величина* $\sigma^+_{p;2}$ *була обчислена також у випадку* $p \in (0,1)$*, де під величиною* $E\left(f;\mathcal{P}_1\right)_{L_p(\mathcal{T})}$ *ми розуміємо наступний вираз:*

$$E\left(f;\mathcal{P}_1\right)_{L_p(\mathcal{T})} := \inf\left\{\left(\int_{\mathcal{T}} |f(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})|^p \,\mathrm{d}\mathbf{x}\right)^{1/p} \;:\; u \in \mathcal{P}_1\right\}.$$

В підрозділі 3.2 показано, що inf в задачі 3.2 досягається на правильному симплексі (див. теорему 3.2.1). Цей результат опубліковано в [189].

3.1.3. Задача трансфінітної інтерполяції функцій багатьох змінних

В залежності від наявної інформації про наближувану функцію в теорії апроксимації розглядають різні типи інтерполяційних схем, наприклад, схеми для інтерполяції функції в заданій системі вузлів або для інтерполяції функції та її частинних похідних в заданій системі вузлів. *Трансфінітна інтерполяція* є спеціальним типом інтерполяційних схем, що полягає в побудові функції, яка збігається з заданою функцією складної форми вздовж деяких многовидів. Такий тип інтерполяції знаходить застосування в комп'ютерній томографії, методі скінченних елементів, геометричному моделюванні, картографії, тощо (див. [303, 277, 206]), де інформація про наближувану функцію природним чином задається у вигляді її значень вздовж гіперплощин заданої вимірності. Трансфінітна інтерполяція вперше досліджувалася Д. Мангероном [287] в 1932 р., і в подальшому вивчалася С. А. Коонсом, Дж. Біркгофом, У. Гордоном, Дж. Холом, К. Дикеном, М. Флоатером, О. М. Литвином, А. Беджанку, В. Т. Клименком, В. Ф. Бабенком, Ю. В. Бабенко та іншими (див. роботи [240, 213, 3, 258, 247, 252, 115, 83, 211, 83, 26, 206] та огляди [181, 116, 117] і посилання в них).

Зауважимо, що в багатьох практичних ситуаціях многовиди, вздовж яких відомі значення наближуваної функції, утворюють розбиття на області визначення функцій, елементи якого мають ліпшицеву границю. Природним апаратом наближення в такій ситуації виступають *гармонічні сплайни*, які збігаються на кожному елементі розбиття з гармонічним продовженням функції з межі елемента в його середину. Властивості трансфінітної інтерполяції за допомогою гармонічних сплайнів вивчалися в [115, 83, 26, 206]. У цих роботах розглядалася задача найкращої трансфінітної інтерполяції функцій багатьох змінних за допомогою гармонічних сплайнів на прямокутних розбиттях. Введемо необхідні позначення. Як зазвичай, через Δ будемо позначати оператор Лапласа:

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}.$$

Нехай $b_1, \ldots, b_d \in \mathbb{R}_+$ – задані числа та $\Pi = \prod_{j=1}^{d} [0, b_j]$. Для зручності, розбиття на Π позначатимемо через P.

Означення 3.1.4. *Розбиття P на Π будемо називати прямокутним розбиттям, якщо його елементами є d-вимірні прямокутні паралелепіпеди.*

Для функції $f \in C(\Pi)$ і прямокутного розбиття P множини Π побудуємо гармонічний сплайн $S_P f$ наступним чином. Для кожного $\Omega \in P$ через $u = S_P f|_\Omega$ позначимо розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \operatorname{int} \Omega, \\ u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases}$$

За побудовою, сплайн $S_P f$ є неперервним на Π і збігається з f на множині $\bigcup_{\Omega \in P} \partial\Omega$. Далі, для $1 \leqslant q \leqslant \infty$ розглянемо клас функцій з обмеженим в L_q лапласіаном:

$$W_q^\Delta = W_q^\Delta(\Pi) := \left\{ f \in C^2(\Pi) \,:\, \|\Delta f\|_{L_q(\Pi)} \leqslant 1 \right\},$$

та для кожного розбиття P множини Π означимо *похибку наближення* функцій $f \in W_q^\Delta$ за допомогою гармонічних сплайнів на прямокутних розбиттях:

$$\mathcal{E}_P \left(W_q^\Delta \right)_s := \sup_{f \in W_q^\Delta} \|f - S_P f\|_{L_s(\Pi)}.$$

Величина $\mathcal{E}_P \left(W_q^\Delta \right)_s$ досліджувалася в роботах [83, 26] на спеціальному класі розбиттів P, які можна утворити з Π за рахунок його розрізання скінченною кількістю $(d-1)$-вимірних гіперплощин, ортогональних координатним осям. Повторюючи доведення теорем 1 і 2 з [26] ми можемо встановити справедливість наступного зображення для величини $\mathcal{E}_P \left(W_q^\Delta \right)_s$ в термінах норм функцій Гріна.

Твердження 3.1.1. *Нехай P – довільне прямокутне розбиття на Π, $1 \leqslant s < \infty$, $s' = s/(s-1)$. Тоді*

$$\mathcal{E}_P \left(W_\infty^\Delta\right)_s = \mathcal{E}_P \left(W_{s'}^\Delta\right)_1 = \left(\sum_{\Omega \in P} \left\| \int_\Omega G_\Omega(\cdot, \mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y} \right\|_{L_s(\Omega)}^s \right)^{1/s}$$

де G_Ω – функція Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа на Ω. Крім того,

$$\mathcal{E}_P \left(W_\infty^\Delta\right)_\infty = \mathcal{E}_P \left(W_1^\Delta\right)_1 = \max_{\Omega \in P} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_\Omega G_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}.$$

Для $N \in \mathbb{N}$ через $\mathcal{P}_N := \mathcal{P}_N(\Pi)$ позначимо множину всіх прямокутних розбиттів множини Π, які складаються рівно з N елементів. Сформулюємо задачу найкращого наближення функцій з класу W_q^Δ гармонічними сплайнами на розбиттях $P \in \mathcal{P}_N$.

Задача 3.1.8. *Необхідно обчислити величину*

$$\mathcal{E}_N \left(W_q^\Delta\right)_s := \inf_{P \in \mathcal{P}_N} \mathcal{E}_P \left(W_q^\Delta\right)_s, \tag{3.5}$$

а також знайти оптимальні розбиття $P^* \in \mathcal{P}_N$, для яких

$$\mathcal{E}_N \left(W_q^\Delta\right)_s = \mathcal{E}_{P^*} \left(W_q^\Delta\right)_s,$$

якщо такі розбиття існують.

В. Ф. Бабенко і Т. Ю. Лескевич [26] розв'язали задачу 3.1.8 для спеціального класу розбиттів. Для $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$ означимо $|\mathbf{m}| := m_1 m_2 \dots m_d$. Нехай $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ – множина розбиттів на Π, що складаються з $|\mathbf{m}|$ d-вимірних прямокутних паралелепіпедів, які отримані з Π за рахунок його розрізання $(m_1 - 1)$-єю $(d-1)$-вимірною гіперплощиною, ортогональною до осі Ox_1, $(m_2 - 1)$-єю $(d-1)$-вимірною гіперплощиною, ортогональною до осі Ox_2, тощо. За означенням, $\mathcal{P}_{\mathbf{m}} \subset \mathcal{P}_{|\mathbf{m}|}$. Також означимо регулярне розбиття $P_{\mathbf{m}}^*$, що належить $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$, і складається з $|\mathbf{m}|$ рівних d-вимірних паралелепіпедів. Наступне твердження було встановлено в [26] (див. аргументи, наведені одразу перед наслідками 2 і 4 в [26]).

Твердження 3.1.2. *Нехай $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$. Тоді*

$$\mathcal{E}_{\mathbf{m}} \left(W_\infty^\Delta\right)_\infty := \inf_{P \in \mathcal{P}_{\mathbf{m}}} \mathcal{E}_P \left(W_\infty^\Delta\right)_\infty = \mathcal{E}_{P_{\mathbf{m}}^*} \left(W_\infty^\Delta\right)_\infty.$$

Крім того, якщо $d = 2$, то

$$\mathcal{E}_{\mathbf{m}}\big(W^{\Delta}_{\infty}\big)_1 = \mathcal{E}_{P^*_{\mathbf{m}}}\big(W^{\Delta}_{\infty}\big)_1 = \frac{16b_1^4m_2}{\pi^5m_1^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^5}\left(\frac{(2k+1)\pi m_1b_2}{2m_2b_1} - \operatorname{th}\left(\frac{(2k+1)\pi m_1b_2}{2m_2b_1}\right)\right).$$

Підрозділ 3.4 містить результати робіт [280, 332] щодо розв'язку задачі 3.1.8. Встановлено (див. теорему 3.4.2), що величини $\mathcal{E}_N\left(W^{\Delta}_{\infty}\right)_s$ та $\mathcal{E}_N\left(W^{\Delta}_{s'}\right)_1$ мають порядок N^{-2}, коли $N \to \infty$, та не залежать від вимірності простору. Також показано (див. теорему 3.4.1), що цей порядок досягається при наближенні гармонічними сплайнами на розбиттях $P_N^{*,j}$, $j = 1, \dots, d$, які утворені за рахунок розрізання Π $(d-1)$-єю гіперплощиною, ортогональною до осі Ox_j. Більш того, показано (див. теорему 3.4.3), що у випадку $d = 2$ і $s = 1$ одне з розбиттів $P_N^{*,1}$ або $P_N^{*,2}$ розв'язує задачу 3.1.8.

Відзначимо, що Ю. В. Бабенко та Т. Ю. Лескевич [206] досліджували нелінійні методи трансфінітної інтерполяції гармонічними сплайнами. Наведемо необхідні позначення з їх роботи. Нехай $N \in \mathbb{N}$ і $1 \leqslant s \leqslant \infty$. Для функції $f \in C(\Pi)$ означимо *похибку найкращого нелінійного наближення* f трансфінітними інтерполяційними гармонічними сплайнами на розбиттях $P \in \mathcal{P}_N$:

$$R_N^t(f)_s := \inf_{P\in\mathcal{P}_N} \|f - S_Pf\|_{L_s(\Pi)}. \tag{3.6}$$

Слідуючи [206] будемо називати послідовність розбиттів $\{P_N\}_{N=1}^{\infty}$ *допустимою*, якщо $P_N \in \mathcal{P}_N$ для всіх $N \in \mathbb{N}$, та

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\left(\sqrt{N}\max_{\Omega\in P_N}\operatorname{diam}\Omega\right) < \infty. \tag{3.7}$$

Також позначимо

$$C_s := \left\|\int_{\Pi} G_{\Pi}(\cdot,\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}\right\|_{L_s(\Pi)}.$$

В [206, теоремі 2.1] було встановлено наступний результат щодо найкращого наближення гармонічними сплайнами на допустимих розбиттях.

Твердження 3.1.3. *Нехай $\Pi = [0,1]\times[0,1]$ є одиничний квадрат і $f \in C^2(\Pi)$ є довільна функція. Тоді існує допустиме розбиття $\left\{P_N^0\right\}_{N=1}^{\infty}$, для якого*

$$\limsup_{N\to\infty} N\cdot\left\|f - S_{P_N^0}f\right\|_{L_s(\Pi)} \leqslant C_s\left(\int_{\Pi}|\Delta f(\mathbf{x})|^{\frac{s}{s+1}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right)^{1+1/s}.$$

Більш того, для довільної послідовності допустимих розбиттів $\{P_N\}_{N=1}^{\infty}$*,*

$$\liminf_{N\to\infty} N\cdot \|f-S_{P_N}f\|_{L_s(\Pi)} \geqslant C_s\left(\int_{\Pi}|\Delta f(\mathbf{x})|^{\frac{s}{s+1}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right)^{1+1/s}.$$

Як наслідок, встановлено наступну оцінку зверху асимптотичної поведінки похибки найкращого нелінійного наближення функції $f\in C^2(\Pi)$ гармонічними сплайнами на прямокутних розбиттях:

$$\limsup_{N\to\infty} N\cdot R_N^t(f)_s \leqslant C_s\left(\int_{\Pi}|\Delta f(\mathbf{x})|^{\frac{s}{s+1}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right)^{1+1/s}. \tag{3.8}$$

В підрозділі 3.4 ми встановимо (див. наслідок 3.4.1) значно сильніше твердження, а саме, що $R_N^t(f)$ має порядок не вище за N^{-2}, коли $N\to\infty$.

3.2. Найкраще наближення додатно визначених квадратичних форм лінійними функціями на симплексах

В цьому підрозділі розв'язана екстремальна геометрична задача про знаходження форми симплекса одиничного об'єму, на якому мінімізується похибка несиметричного наближення додатно визначеної квадратичної форми лінійними функціями. Результати підрозділу опубліковано в статті [189].

Означимо евклідову відстань між точками $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^d$ стандартним чином:

$$\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|_2 := \left(\sum_{j=1}^{d}(a_j-b_j)^2\right)^{1/2}.$$

Для квадратної матриці $\mathbf{J}$ через $\mathbf{J}^{\mathrm{t}}$ позначимо транспоновану до неї матрицю, а через $\mathcal{T}_0$ позначимо правильний симплекс одиничного об'єму в $\mathbb{R}^d$.

Теорема 3.2.1. *Нехай* $\alpha,\beta>0$*,* $d\in\mathbb{N}$ *і* $1\leqslant p\leqslant\infty$*. Тоді* $\sigma_{p;\alpha,\beta;d}=\sigma_{p;\alpha,\beta;d}(\mathcal{T}_0)$*.*

Приймаючи до уваги (3.1) з теореми 3.2.1 можна отримати наступні наслідки.

Наслідок 3.2.1. *Нехай* $d\in\mathbb{N}$ *і* $1\leqslant p\leqslant\infty$*. Тоді* $\sigma_{p;d}=E(\mathfrak{q};\mathcal{S}_1(\mathcal{T}_0))_{L_p(\mathcal{T}_0)}$*.*

Наслідок 3.2.2. *Нехай* $d\in\mathbb{N}$ *і* $1\leqslant p\leqslant\infty$*. Тоді* $\sigma_{p;d}^{\pm}=E^{\pm}(\mathfrak{q};\mathcal{S}_1(\mathcal{T}_0))_{L_p(\mathcal{T}_0)}$*.*

Використовуючи властивості лінійних перетворень, отримаємо ще один наслідок з теореми 3.2.1.

Наслідок 3.2.3. *Нехай $d \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\alpha, \beta > 0$ і $\mathfrak{f}$ – додатно визначена квадратична форма. Тоді*

$$\inf_{\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^d} \frac{E\left(\mathfrak{f}; \mathcal{S}_1\left(\mathcal{T}\right)\right)_{L_{p;\alpha,\beta}(\mathcal{T})}}{|\mathcal{T}|^{1+1/p}} = \sigma_{p;\alpha,\beta;d} \cdot \det \mathfrak{f}^2,$$

де $\inf$ *береться за всіма d-вимірними симплексами, а* $\det \mathfrak{f}$ *– визначник квадратної матриці, що відповідає квадратичній формі $\mathfrak{f}$.*

Зауважимо, що в роботі [192] величина $\sigma_{p;2}^{+}$ знайдена і у випадку $p \in (0,1)$, а також показано, що правильний трикутник одиничної площі є екстремальним у відповідній задачі 3.1.7.

Перейдемо до доведення результатів цього підрозділу. Нехай $d \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\alpha, \beta > 0$ і $\mathcal{T}$ – довільний d-вимірний симплекс. Зауважимо, що значення величини $E\left(\mathfrak{q}; \mathcal{S}_1(\mathcal{T})\right)_{L_{p;\alpha,\beta}(\mathcal{T})}$ не залежить від рухів симплекса $\mathcal{T}$. Тому для симплексів $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \subset \mathbb{R}^d$, будемо писати $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, якщо існує рух F простору $\mathbb{R}^d$ такий, що $F(\mathcal{T}) = \mathcal{T}'$, і будемо писати $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}'$ в протилежному випадку.

Для доведення теореми 3.2.1 встановимо дві допоміжні леми.

Лема 3.2.1. *Нехай $d \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\alpha, \beta > 0$ і $\mathcal{T}$ – довільний d-вимірний симплекс одиничного об'єму. Тоді існує константа $C > 0$, яка не залежить від $\mathcal{T}$, така, що $\sigma_{p;\alpha,\beta;d}(\mathcal{T}) \geqslant C \cdot (\operatorname{diam} \mathcal{T})^2$.*

Доведення. Нехай $\mathcal{T}_d := \mathcal{T} = \{\mathbf{t}^1, \mathbf{t}^2, \ldots, \mathbf{t}^{d+1}\}$ – симплекс одиничного об'єму. Без зменшення загальності будемо вважати, що $\left\|\mathbf{t}^1 - \mathbf{t}^2\right\|_2 = \operatorname{diam} \mathcal{T}_d$. Для $j = 1, \ldots, d-1$ позначимо $\mathcal{T}_j = \{\mathbf{t}^1, \mathbf{t}^2, \ldots, \mathbf{t}^{j+1}\}$, який є j-вимірним симплексом.

Спочатку розглянемо випадок $1 \leqslant p < \infty$. Для $j = 2, \ldots, d$ через h_j позначимо довжину висоти симплекса $\mathcal{T}_j$, опущену з вершини $\mathbf{t}^{j+1}$ на симплекс $\mathcal{T}_{j-1}$. Для будь-якого $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ позначимо $\mathbf{a}' = (a_1, \ldots, a_{d-1})$. Тоді

$$\begin{aligned}
\sigma_{p;\alpha,\beta;d}^p(\mathcal{T}_d) &= \inf_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d,\, c \in \mathbb{R}} \int_{\mathcal{T}_d} |\mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathrm{t}} - \mathbf{a}\mathbf{x}^{\mathrm{t}} - c|_{\alpha,\beta}^p \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \inf_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d,\, c \in \mathbb{R}} \int_0^{h_d} \int_{\frac{u}{h_d}\mathcal{T}_{d-1}} |u^2 + \mathbf{y}\mathbf{y}^{\mathrm{t}} - a_d u - \mathbf{a}'\mathbf{y}^{\mathrm{t}} - c|_{\alpha,\beta}^p \, \mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}u \\
&\geqslant \int_0^{h_d} \left(\frac{u}{h_d}\right)^{2p+(d-1)} \sigma_{p;\alpha,\beta;d-1}^p(\mathcal{T}_{d-1}) \, \mathrm{d}u = \frac{h_d}{2p+d} \, \sigma_{p;\alpha,\beta;d-1}^p(\mathcal{T}_{d-1}).
\end{aligned}$$

За індукцією неважко переконатися в тому, що

$$\begin{aligned}\sigma^p_{p;\alpha,\beta;d}(\mathcal{T}_d) &\geqslant \frac{h_2\dots h_d}{(2p+2)\cdots(2p+d)}\,\sigma^p_{p;\alpha,\beta;1}(\mathcal{T}_1)\\ &\geqslant C^p\cdot\frac{h_2\dots h_d}{d!}\cdot(\operatorname{diam}\mathcal{T}_d)^{2p+1}=C^p(\operatorname{diam}\mathcal{T}_d)^{2p},\end{aligned}$$

де $C>0$ є деякою константою, що не залежить від вибору симплекса $\mathcal{T}_d$.

У випадку $p=\infty$ отримаємо

$$\sigma_{\infty;\alpha,\beta;d}(\mathcal{T}_d)\geqslant\sigma_{\infty;\alpha,\beta;1}(\mathcal{T}_1)=\inf_{k\in\mathbb{R},c\in\mathbb{R}}\ \sup_{u\in[0,\operatorname{diam}\mathcal{T}_d]}|u^2-ku-c|_{\alpha,\beta}\geqslant C(\operatorname{diam}\mathcal{T}_d)^2.\quad\square$$

Лема 3.2.2. *Нехай $d\in\mathbb{N}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\alpha,\beta>0$. Якщо $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}\neq\mathcal{T}_0$, є d-вимірний симплекс одиничного об'єму, то існує симплекс $\mathcal{T}^*\subset\mathbb{R}^d$ одиничного об'єму, для якого $\sigma_{p;\alpha,\beta;d}(\mathcal{T})>\sigma_{p;\alpha,\beta;d}(\mathcal{T}^*)$.*

Доведення леми 3.2.2. Нехай $\mathcal{T}=\{\mathbf{w}^1,\mathbf{w}^2,\mathbf{t}^1,\dots,\mathbf{t}^{d-1}\}\neq\mathcal{T}_0$ – d-вимірний симплекс одиничного об'єму. Без зменшення загальності будемо вважати, що $\|\mathbf{w}^1-\mathbf{t}^1\|_2\neq\|\mathbf{w}^2-\mathbf{t}^1\|_2$. Задамо прямокутну систему координат в просторі $\mathbb{R}^d$ таким чином, що вершини симплекса $\mathcal{T}$ мають координати: $\mathbf{w}^1=(-\delta,0,0,\dots,0)$ і $\mathbf{w}^2=(\delta,0,0,\dots,0)$, де $\delta:=\frac{1}{2}\|\mathbf{w}^1-\mathbf{w}^2\|_2$, і

$$\begin{array}{lllllllllll}\mathbf{t}^1 & = & (& b_1 & a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 &),\\ \mathbf{t}^2 & = & (& b_2 & a_{1,2} & a_{2,2} & 0 & \dots & 0 & 0 &),\\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \mathbf{t}^{d-1} & = & (& b_{d-1} & a_{1,d-1} & a_{2,d-1} & a_{3,d-1} & \dots & a_{d-2,d-1} & a_{d-1,d-1} &),\end{array}$$

де $\{b_j\}_{j=1}^{d-1}$ і $\{a_{j,k}\}_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant d-1}$ є деякі дійсні числа. Зазначимо, що за припущенням, $b_1\neq0$. Також в силу невиродженості симплекса $\mathcal{T}$ неважко бачити, що $a_{j,j}\neq0$ для всіх $j=1,\dots,d-1$.

Введемо наступні позначення: $\mathbf{b}:=(b_1,\dots,b_{d-1})$ і

$$\mathbf{A}:=\begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,d-2} & a_{1,d-1}\\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,d-2} & a_{2,d-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{d-1,d-1}\end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця $\mathbf{A}$ невироджена, то означимо

$$\mathbf{y}=(y_1,\dots,y_{d-1}):=\mathbf{b}A^{-1}.\tag{3.9}$$

Нехай $\mathbf{I}$ – одинична матриця розміру $(d-1)\times(d-1)$, а $\mathbf{R} := \mathbf{y}^{\mathrm{t}}\mathbf{y}+\mathbf{I}$. Неважко бачити, що матриця $\mathbf{R}$ симетрична та додатно визначена. Отже (див. [263]), існує верхньотрикутна матриця $\mathbf{U} = (u_{k,j})_{1\leqslant k,j\leqslant d-1}$, для якої $\mathbf{R} = \mathbf{U}^{\mathrm{t}}\mathbf{U}$. Більш того, для будь-якого $j = 1,\dots,d-1$ можна вважати, що $u_{j,j} = \sqrt{\frac{D_j}{D_{j-1}}}$, де $D_0 := 1$ і для $k = 1,\dots,d-1$

$$D_k := \det\begin{pmatrix} 1+y_1^2 & y_1y_2 & \dots & y_1y_{k-1} & y_1y_k \\ y_1y_2 & 1+y_2^2 & \dots & y_2y_{k-1} & y_2y_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1y_k & y_2y_k & \dots & y_{k-1}y_k & 1+y_k^2 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Як наслідок, $u_{j,j} > 0$ для будь-якого $j = 1,\dots,d-1$.

Нехай $\mathbf{Q} = (q_{k,j})_{1\leqslant k,j\leqslant d-1}$ – діагональна матриця така, що $q_{j,j} = u_{j,j}$, $j = 1,\dots,d-1$. Означимо $\overline{\mathbf{U}} := \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{U}$. Зрозуміло, що $\overline{\mathbf{U}}$ – верхньотрикутна матриця з одиничним визначником, а також $\mathbf{R} = \overline{\mathbf{U}}^{\mathrm{t}}\mathbf{Q}^2\overline{\mathbf{U}}$. Далі, означимо $\mathbf{M} := \overline{\mathbf{U}}\mathbf{A}$ і позначимо елементи матриці $\mathbf{M}$ через $m_{k,j}$, тобто $\mathbf{M} = (m_{k,j})_{1\leqslant k,j\leqslant d-1}$. Зауважимо, що $m_{j,j} = a_{j,j}$ для всіх $j = 1,\dots,d-1$.

Розглянемо симплекс $\widetilde{\mathcal{T}} = \{\mathbf{w}^1,\mathbf{w}^2,\widetilde{\mathbf{t}}^1,\dots,\widetilde{\mathbf{t}}^{d-1}\}$ з вершинами

$$\begin{array}{lcllllllll} \widetilde{\mathbf{t}}^1 & := & (& 0 & a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 &), \\ \widetilde{\mathbf{t}}^2 & := & (& 0 & m_{1,2} & a_{2,2} & 0 & \dots & 0 & 0 &), \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \widetilde{\mathbf{t}}^{d-1} & := & (& 0 & m_{1,d-1} & m_{2,d-1} & m_{3,d-1} & \dots & m_{d-2,d-1} & a_{d-1,d-1} &). \end{array}$$

Вочевидь, об'єми симплексів $\mathcal{T}$ і $\widetilde{\mathcal{T}}$ збігаються.

Побудуємо лінійне перетворення $S:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$, для якого $S(\widetilde{\mathcal{T}}) = \mathcal{T}$. Для цього візьмемо $\mathbf{h} := \mathbf{b}\mathbf{M}^{-1}\in\mathbb{R}^{d-1}$ і означимо лінійне перетворення S за допомогою матриці

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{h} \\ 0 & \\ \vdots & (\overline{\mathbf{U}})^{-1} \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що $\det\mathbf{S} = 1$. Тому для будь-якого $\mathbf{a} = (a_1,a_2,\dots,a_d)\in\mathbb{R}^d$ і $c\in\mathbb{R}$

$$L := \left\|\mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathrm{t}} - \mathbf{a}\mathbf{x}^{\mathrm{t}} - c\right\|_{L_{p;\alpha,\beta}(\mathcal{T})} = \left\|\mathbf{v}\mathbf{S}^{\mathrm{t}}\mathbf{S}\mathbf{v}^{\mathrm{t}} - \mathbf{a}\mathbf{S}\mathbf{v}^{\mathrm{t}} - c\right\|_{L_{p;\alpha,\beta}(\widetilde{\mathcal{T}})}. \tag{3.11}$$

Розглянемо симплекс $\widehat{\mathcal{T}} = \{\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \widehat{\mathbf{t}}^1, \ldots, \widehat{\mathbf{t}}^{d-1}\}$ такий, що

$$
\begin{array}{lclcccccccc}
\widehat{\mathbf{t}}^1 & := & (& -b_1 & a_{1,1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 &), \\
\widehat{\mathbf{t}}^2 & := & (& -b_2 & a_{1,2} & a_{2,2} & 0 & \ldots & 0 & 0 &), \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
\widehat{\mathbf{t}}^{d-1} & := & (& -b_{d-1} & a_{1,d-1} & a_{2,d-1} & a_{3,d-1} & \ldots & a_{d-2,d-1} & a_{d-1,d-1} &).
\end{array}
$$

Неважко переконатися в тому, що лінійне перетворення $\widehat{S} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, означене за допомогою матриці

$$
\widehat{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{h} \\ 0 & \\ \vdots & (\overline{\mathbf{U}})^{-1} \\ 0 & \end{pmatrix}
$$

перетворює симплекс $\widetilde{\mathcal{T}}$ в симплекс $\widehat{\mathcal{T}}$. Отже, для $\widehat{\mathbf{a}} := (-a_1, a_2, \ldots, a_d)$ отримаємо

$$
\widehat{L} := \left\| \mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathrm{t}} - \widehat{\mathbf{a}}\mathbf{x}^{\mathrm{t}} - c \right\|_{L_{p;\alpha,\beta}(\widehat{\mathcal{T}})} = \left\| \mathbf{v}\widehat{\mathbf{S}}^{\mathrm{t}}\widehat{\mathbf{S}}\mathbf{v}^{\mathrm{t}} - \widehat{\mathbf{a}}\widehat{\mathbf{S}}\mathbf{v}^{\mathrm{t}} - c \right\|_{L_{p;\alpha,\beta}(\widetilde{\mathcal{T}})} . \tag{3.12}
$$

В силу симетричності симплексів $\mathcal{T}$ і $\widehat{\mathcal{T}}$ маємо, що $L = \widehat{L}$. Використовуючи (3.11) і (3.12), можемо встановити, що

$$
L = \frac{1}{2}\left(L + \widehat{L}\right) \geqslant \left\| \frac{1}{2}\left[\mathbf{v}(\mathbf{S}^{\mathrm{t}}\mathbf{S} + \widehat{\mathbf{S}}^{\mathrm{t}}\widehat{\mathbf{S}})\mathbf{v}^{\mathrm{t}} - (\mathbf{a}\mathbf{S} + \widehat{\mathbf{a}}\widehat{\mathbf{S}})\mathbf{v}^{\mathrm{t}} - 2c \right] \right\|_{L_{p;\alpha,\beta}(\widetilde{\mathcal{T}})} . \tag{3.13}
$$

Зауважимо, що

$$
2\mathbf{D} := \mathbf{S}^{\mathrm{t}}\mathbf{S} + \widehat{\mathbf{S}}^{\mathrm{t}}\widehat{\mathbf{S}} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \ \ldots \ 0 \\ 0 & \\ \vdots & \mathbf{h}^{\mathrm{t}}\mathbf{h} + [(\overline{\mathbf{U}})^{-1}]^{\mathrm{t}}(\overline{\mathbf{U}})^{-1} \\ 0 & \end{pmatrix} .
$$

Оскільки $\mathbf{h} = \mathbf{b}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{b}\mathbf{A}^{-1}(\overline{\mathbf{U}})^{-1}$, то

$$
\begin{aligned}
\mathbf{h}^{\mathrm{t}}\mathbf{h} + \left((\overline{\mathbf{U}})^{-1} \right)^{\mathrm{t}} (\overline{\mathbf{U}})^{-1} &= ((\overline{\mathbf{U}})^{-1})^{\mathrm{t}} \left(\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{t}} \mathbf{b}^{\mathrm{t}}\mathbf{b}\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{I} \right) (\overline{\mathbf{U}})^{-1} \\
&= \left((\overline{\mathbf{U}})^{-1} \right)^{\mathrm{t}} \mathbf{R} \, (\overline{\mathbf{U}})^{-1} = \mathbf{Q}^2.
\end{aligned}
$$

Таким чином

$$
\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ \ldots \ 0 \\ 0 & \\ \vdots & \mathbf{Q}^2 \\ 0 & \end{pmatrix} ,
$$

і $\mathbf{D}$ є діагональною матрицею з елементами $1, D_1, \frac{D_2}{D_1}, \ldots, \frac{D_{d-1}}{D_{d-2}}$ на головній діагоналі (числа D_j, $j = 1, \ldots, d-1$, визначені рівностями (3.10)). Нехай F – лінійне перетворення, визначене за допомогою діагональної матриці $\mathbf{F}$ з елементами $D_{d-1}^{\frac{1}{2d}}, D_{d-1}^{\frac{1}{2d}} \cdot \sqrt{\frac{1}{D_1}}, D_{d-1}^{\frac{1}{2d}} \cdot \sqrt{\frac{D_1}{D_2}}, \ldots, D_{d-1}^{\frac{1}{2d}} \cdot \sqrt{\frac{D_{d-2}}{D_{d-1}}}$ на головній діагоналі. Вочевидь, $\det \mathbf{F} = 1$. Нехай $\mathcal{T}^* = F^{-1}(\widetilde{\mathcal{T}})$. Тоді з огляду на (3.13) матимемо

$$L \geqslant D_{d-1}^{\frac{1}{d}} \|\mathbf{z}\mathbf{z}^{\mathrm{t}} - \mathbf{g}\mathbf{z}^{\mathrm{t}} - c'\|_{L_{p;\alpha,\beta}(\mathcal{T}^*)},$$

де $\mathbf{g} = \frac{1}{2D_{d-1}^{\frac{1}{2d}}}(\mathbf{aS} + \widehat{\mathbf{a}}\widehat{\mathbf{S}})\mathbf{F}$ і $c' = \frac{c}{D_{d-1}^{\frac{1}{2d}}}$. Як наслідок,

$$\sigma_{p;\alpha,\beta;d}(\mathcal{T}) \geqslant D_{d-1}^{1/d} \sigma_{p;\alpha,\beta;d}(\mathcal{T}^*).$$

Покажемо, що з припущення $\left\|\mathbf{w}^1 - \mathbf{t}^1\right\|_2 \neq \left\|\mathbf{w}^2 - \mathbf{t}^1\right\|_2$ випливає нерівність $D_{d-1} > 1$. Дійсно, оскільки матриця $\mathbf{R}$ є додатно визначеною, то

$$D_{d-1} = \det\left(\mathbf{y}^{\mathrm{t}}\mathbf{y} + I\right) = (1 + \lambda_1) \cdots (1 + \lambda_{d-1}) \geqslant 1,$$

де $\lambda_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, d-1$, – власні числа матриці $\mathbf{y}^{\mathrm{t}}\mathbf{y}$ (існування невід'ємних власних чисел випливає з додатної напіввизначеності (див. [263]) і симетричності матриці $\mathbf{y}^{\mathrm{t}}\mathbf{y}$). Остання нерівність обертається в рівність тоді і тільки тоді, коли $\lambda_j = 0$ для всіх $j = 1, \ldots, d-1$, або, що те ж саме, коли $y_j = 0$ для всіх $j = 1, \ldots, d-1$. За (3.9) і невиродженістю матриці $\mathbf{A}$ з останніх співвідношень випливає, що $b_j = 0$ для всіх $j = 1, \ldots, d-1$. Проте це суперечить нерівності $b_1 \neq 0$, яка випливає з припущення $\left\|\mathbf{w}^1 - \mathbf{t}^1\right\|_2 \neq \left\|\mathbf{w}^2 - \mathbf{t}^1\right\|_2$. □

Доведення теореми 3.2.1. За лемою 3.2.1, існує d-вимірний симплекс $\mathcal{T}'$ одиничного об'єму такий, що $\sigma_{p;\alpha,\beta;d} = \sigma_{p;\alpha,\beta;d}(\mathcal{T}')$. Тоді за лемою 3.2.2, $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_0$. □

3.3. Нелінійне наближення двічі неперервно диференційовних опуклих функцій лінійними сплайнами

В цьому підрозділі розв'язується задача знаходження точної асимптотичної поведінки величини найкращого несиметричного адаптивного наближення в метриці простору L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, двічі неперервно диференційовних опуклих функцій двох змінних лінійними сплайнами, коли кількість трикутників в тріангуляції прямує до нескінченності. Також побудовано асимптотично оптимальну послідовність тріангуляцій і лінійних сплайнів на них. Результати підрозділу опубліковано в [190].

Надалі нам іноді будуть потрібні лінійні простори $L_p(\Omega)$, $p \in (0,1)$, вимірних за Лебегом функцій $f : \Omega \to \mathbb{R}$, для яких скінченною є величина

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} := \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(\mathbf{x})|^p \mathrm{d}\mathbf{x}\right)^{1/p} < \infty.$$

3.3.1. Основні результати підрозділу та ідеї їх доведення

Нехай D – багатокутник на площині. Надалі для зручності і без зменшення загальності міркувань будемо вважати, що $D := [0,1]^2$. Наступна теорема є основним результатом цього підрозділу.

Теорема 3.3.1. *Нехай $f \in C^2(D)$ є такою, що $H(f;x,y) \geqslant 0$ для всіх $(x,y) \in D$. Тоді для всіх $\alpha, \beta > 0$ і $1 \leqslant p \leqslant \infty$ має місце гранична рівність*

$$\lim_{N\to\infty} N \cdot R_N\left(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\right) = \frac{\sigma_{p;\alpha,\beta;2}}{2} \cdot \left\|\sqrt{H}\right\|_{L_{\frac{p}{p+1}}(D)},$$

де константа $\sigma_{p;\alpha,\beta;2}$ була означена в (3.2).

Для звичайних (без обмежень) найкращих і найкращих односторонніх L_p-наближень можна отримати наступні наслідки з теореми 3.3.1.

Наслідок 3.3.1. *Нехай $f \in C^2(D)$, $H(f;x,y) \geqslant 0$ для всіх $(x,y) \in D$. Тоді для всіх $1 \leqslant p \leqslant \infty$,*

$$\lim_{N\to\infty} N \cdot R_N(f, L_p(D)) = \frac{\sigma_{p;2}}{2} \cdot \left\|\sqrt{H}\right\|_{L_{\frac{p}{p+1}}(D)},$$

$$\lim_{N\to\infty} N \cdot \inf_{\triangle_N} E^\pm(f;\mathcal{S}(\triangle_N))_p = \frac{\sigma^\pm_{p;2}}{2} \cdot \left\|\sqrt{H}\right\|_{L_{\frac{p}{p+1}}(D)},$$

де константа $\sigma_{p;2}$ означена рівністю (3.3), а константа $\sigma^\pm_{p;2}$ – рівністю (3.4).

Зауваження 3.3.1. *Теорема 2 в [192] встановлює точну асимптотичну поведінку величини $\inf\limits_{\triangle_N} E^+\left(f;\mathcal{S}\left(\triangle_N\right)\right)_p$, коли $N \to \infty$, у випадку $p \in (0,1)$ та строго опуклої функції f.*

Зауваження 3.3.2. *Твердження теореми 3.3.1 залишається вірним, якщо множину $\mathcal{S}(\triangle)$ неперервних лінійних сплайнів на тріангуляціях $\triangle$ замінити більш широким класом $\overline{\mathcal{S}}(\triangle)$ довільних лінійних сплайнів на тріангуляціях $\triangle$, які необов'язково є неперервними.*

Доведення теореми 3.3.1, якому присвячено подальшу частину даного підрозділу, є доволі технічним та громіздким. Тому для спрощення його сприйняття введемо основні ідеї доведення. Зауважимо, що близькі ідеї у випадку інтерполяції функцій з додатним гесіаном використовувалися раніше в [188, 192].

Нехай $f \in C^2(D)$ є такою, що $H(f; x, y) \geqslant 0$ для всіх $(x, y) \in D$. Для доведення теореми 3.3.1 ми покажемо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконуються нерівності

$$\limsup_{N\to\infty} N \cdot R_N\left(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\right) \leqslant \frac{\sigma_{p;\alpha,\beta;2}}{2} \cdot \left\|\sqrt{H}\right\|_{L_{\frac{p}{p+1}}(D)} (1+\varepsilon), \tag{3.14}$$

і

$$\liminf_{N\to\infty} N \cdot R_N\left(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\right) \geqslant \frac{\sigma_{p;\alpha,\beta;2}}{2} \cdot \left\|\sqrt{H}\right\|_{L_{\frac{p}{p+1}}(D)} (1-\varepsilon). \tag{3.15}$$

Надалі ми будемо посилатися на доведення нерівності (3.14) як на "оцінку зверху", а нерівності (3.15) – як на "оцінку знизу".

Для доведення (3.14) оберемо довільне $\varepsilon > 0$ та побудуємо послідовність тріангуляцій $\{\triangle_N(\varepsilon)\}_{N=1}^{\infty}$, $\triangle_N(\varepsilon) \in \mathfrak{D}_N$, і відповідних лінійних сплайнів $\{s_N(\varepsilon)\}_{N=1}^{\infty}$, $s_N(\varepsilon) \in S\left(\triangle_N(\varepsilon)\right)$, на них такі, що

$$\limsup_{N\to\infty} N \cdot \|f - s_N(\varepsilon)\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)} \leqslant \frac{\sigma_{p;\alpha,\beta;2}}{2} \cdot \left\|\sqrt{H}\right\|_{L_{\frac{p}{p+1}}(D)} \cdot (1+\varepsilon). \tag{3.16}$$

Для цього для кожного $N \in \mathbb{N}$ побудуємо тріангуляцію $\triangle_N(\varepsilon)$ ґрунтуючись на ідеї проміжного наближення функцій з класу $C^2(D)$ кусково квадратичними функціями. Спочатку, для $\delta > 0$ позначимо *модуль неперервності* функції $g \in C(D)$:

$$\omega\left(g, \delta\right) := \sup\left\{|g(x') - g(x'')| \,:\, (x', y') \in D,\, |x' - x''| \leqslant \delta,\, |y' - y''| \leqslant \delta\right\},$$

і для $(x, y) \in D$ розглянемо функцію

$$\lambda_{\min}(x, y) := \frac{f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)}{4} - \frac{\sqrt{\left(f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)\right)^2 - 4H(f; x, y)}}{4},$$

значення якої в точці (x, y) збігається зі значенням найменшого власного значення матриці Гессе функції f.

Розіб'ємо множину D на m_N^2 підмножин, де $m_N = o(N)$ і $m_N^2 \to \infty$, коли $N \to \infty$. У випадку $D = [0, 1]^2$ для зручності оберемо квадрати в якості таких підмножин, і позначимо їх через D_j^N, $j = 1, \ldots, m_N^2$. На кожному D_j^N розглянемо проміжне наближення функції f її поліномом Тейлора другого порядку $f_{N,j}$, який побудовано в деякій точці всередині D_j^N (для визначеності оберемо центр D_j^N). Відзначимо, що порядок цього наближення перевищує порядок похибки $R_N\left(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\right)$ і, отже, не впливає на головний член асимптотики $R_N\left(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\right)$. Зауважимо, що похибка наближення квадратичної функції $f_{N,j}$ лінійними сплайнами збігається з похибкою наближення її квадратичної частини, яку надалі позначатимемо через $Q_{N,j}$, лінійними сплайнами. Тому замість функції $f \in C^2(D)$ ми будемо наближати квадратичну форму $Q_{N,j}$ за допомогою лінійних сплайнів на кожному з D_j^N. Перехід до проміжного наближення є однією з основних ідей побудови асимптотично оптимальних послідовностей тріангуляцій і сплайнів на них і встановлення точної асимптотичної поведінки величини $R_N\left(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\right)$, коли $N \to \infty$.

Коефіцієнти квадратичної форми $Q_{N,j}$, які, вочевидь, залежать від функції f, визначають геометрію оптимального елемента тріангуляції – трикутника – на підмножині D_j^N наступним чином. Спочатку знайдемо власні числа $\lambda_{\min}^{N,j}$ та $\lambda_{\max}^{N,j}$ квадратичної форми $Q_{N,j}$, $j = 1, \ldots, m_N^2$. В залежності від величини власних чисел, поділимо підмножини D_j^N на чотири групи.

1. Перша група містить ті з них, для яких $\lambda_{\max}^{N,j} \geqslant \lambda_{\min}^{N,j} > \varepsilon$. В цьому випадку проміжним наближенням $Q_{N,j}$ функції f на D_j^N є еліптичний параболоїд. Знайдемо оптимальний трикутник (його форму і розташування на площині) за рахунок розв'язання локальної задачі мінімізації (α, β)-несиметричної похибки наближення в метриці простору L_p квадратичної форми $Q_{N,j}$ лінійними функціями. Деталі можна знайти в параграфі 3.3.2. Потім оберемо розмір трикутників в кожному з квадратів D_j^N таким чином, що їх сукупна кількість приблизно дорівнює N і загальна похибка наближення на трикутниках в квадратах цієї групи є мінімальною. Зауважимо, що похибка

на квадратах з першої групи буде давати основний внесок в глобальну похибку і тому є основним фокусом нашої уваги.

Нехай T_j^N – оптимальний трикутник, який розв'язує цю задачу мінімізації на квадраті D_j^N. Використаємо T_j^N разом з його симетричними відображеннями і паралельними переносами для побудови тріангуляції кожного квадрата D_j^N, яка складається з малої кількості ($o\left(m_N^{-2}N\right)$, $N \to \infty$) інших трикутників (утвореними за рахунок виправлення тріангуляції вздовж межі D_j^N).

2. Друга група складається з квадратів, для яких $\omega\left(\lambda_{\min}, m_N^{-1}\right) < \lambda_{\min}^{N,j} \leqslant \varepsilon$. Кількість квадратів з цієї групи є малою, а тому внесок похибки наближення функції f лінійними сплайнами на їх об'єднанні матиме незначний внесок в глобальну похибку. Квадрати з цієї групи розіб'ємо на рівні прямокутні рівнобедрені трикутники в кількості $o\left(m_N^{-2}N\right)$.
3. Третя група містить квадрати, для яких $\lambda_{\min}^{N,j} \leqslant \omega\left(\lambda_{\min}, m_N^{-1}\right)$ та $\lambda_{\max}^{N,j} \geqslant \varepsilon$. В цьому випадку проміжне наближення $Q_{N,j}$ на D_j^N є близьким до параболічного циліндра. Квадрати D_j^N з цієї групи розіб'ємо на $\varepsilon \cdot o\left(m_N^{-2}N\right)$ прямокутних трикутників, найдовша сторона яких розташована вздовж напрямку власного вектора, що відповідає власному значенню $\lambda_{\min}^{N,j}$.
4. Четверта група складається з квадратів, для яких $\lambda_{\min}^{N,j} \leqslant \omega\left(\lambda_{\min}, m_N^{-1}\right)$ та $\lambda_{\max}^{N,j} \leqslant \varepsilon$. Проміжне наближення в цьому випадку є майже плоскими. Квадрати з цієї групи поділимо на рівні прямокутні рівнобедрені трикутники в кількості $\varepsilon \cdot o\left(m_N^{-2}N\right)$.

"Склеюючи" (без додавання нових вершин) тріангуляції всіх D_j^N ми отримаємо шукану тріангуляцію $\triangle_N(\varepsilon) \in \mathfrak{D}_N$ множини D.

Тепер ми означимо сплайн $s_N(\varepsilon; x, y) \in S\left(\Delta_N(\varepsilon)\right)$, який буде достатньо добре наближати функцію f. Спочатку, на об'єднанні U_N трикутників, кожний з яких розташований всередині відповідного квадрата D_j^N з першої групи, ми означимо $s_N(\varepsilon; x, y) := \tilde{s}_N(\varepsilon; x, y)$, де $\tilde{s}_N$ – сплайн найкращого (α, β)-несиметричного наближення в метриці простору L_p на U_N відповідної квадратичної форми $Q_{N,j}$. На трикутниках, які містяться в $D \setminus \operatorname{int}\,(U_N)$, означимо $s_N(\varepsilon; x, y)$ як лінійний сплайн, що інтерполює f в вершинах $\Delta_N(\varepsilon)$, які розташовані на $D \setminus U_N$, і інтерполює $\tilde{s}_N$ в вершинах на межі U_N. Відзначимо, що сплайн, означений таким чином, є неперервним на множині D.

Побудовані послідовності тріангуляцій $\{\Delta_N(\varepsilon)\}_{N=1}^{\infty}$ і відповідних сплайнів $\{s_N(\varepsilon)\}_{N=1}^{\infty}$ дозволяють нам довести оцінку зверху (3.16).

Наведемо тепер ідеї, на яких ґрунтується доведення оцінки (3.15). Для цього ми покажемо, що для будь-якого достатньо малого числа $\varepsilon > 0$ і довільної послідовності тріангуляцій $\{\triangle_N\}_{N=1}^{\infty}$ з властивістю

$$\liminf_{N\to\infty} N \cdot \inf_{s\in\mathcal{S}(\triangle_N)} \|f-s\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)} < \infty,$$

виконується наступна нерівність

$$\liminf_{N\to\infty} N \cdot \inf_{s\in\mathcal{S}(\triangle_N)} \|f-s\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)} \geqslant \frac{C_p}{2} \cdot \left\|\sqrt{H}\right\|_{L_{\frac{p}{p+1}}(D)} (1-\varepsilon). \qquad (3.17)$$

Загальна ідея доведення нерівності (3.17) полягає в розбитті трикутників в тріангуляції $\triangle_N$ на дві категорії: “хороші” трикутники та “погані” трикутники. Спочатку ми покажемо, що похибками $\inf\limits_{P\in\mathcal{P}_1} \|f-P\|_{L_{p;\alpha,\beta}(T)}$ на кожному з “поганих” трикутників T можна знехтувати. А тому ми можемо досліджувати лише похибки $\inf\limits_{P\in\mathcal{P}_1} \|f-P\|_{L_{p;\alpha,\beta}(T)}$ на “хороших” трикутниках $T\in\triangle_N$. Для таких трикутників T ми застосуємо ідею проміжного наближення і замінимо функцію f на її поліном Тейлора другого порядку $f_{N;T}$, побудованого в довільній точці всередині трикутника T. Тоді використаємо допоміжні результати з параграфу 3.3.2, а також застосуємо нерівність Йєнсена (див., наприклад [262, Розділ III]) для отримання необхідної нерівності (3.17).

Пояснимо класифікацію трикутників $T\in\triangle_N$ на “хороші” та “погані”. Для цього ми поділимо трикутники в кожній з тріангуляцій $\triangle_N$, $N\in\mathbb{N}$, на п’ять груп наступним чином. Припустимо, що $T\in\triangle_N$. Тоді:

1. $T\in A_1^N$ тоді і тільки тоді, коли $H(f;x,y) < 2\varepsilon$ в кожній точці $(x,y)\in T$;
2. $T\in A_2^N$ тоді і тільки тоді, коли $T\notin A_1^N$, $H(f;x,y)\geqslant\varepsilon$ в кожній точці $(x,y)\in T$ і $\|f-f_{N;T}\|_{L_{p;\alpha,\beta}(T)}$ істотно менша за $\inf\limits_{P\in\mathcal{P}_1}\|f-P\|_{L_{p;\alpha,\beta}(T)}$;
3. $T\in A_3^N$ тоді і тільки тоді, коли $T\notin A_1^N$, $H(f;x,y)>\varepsilon$ в кожній точці $(x,y)\in T$ і $\operatorname{diam} T$ є дуже великим;
4. $T\in A_4^N$ тоді і тільки тоді, коли $T\notin A_1^N\cup A_2^N\cup A_3^N$ і $H(f;x,y)>\varepsilon$ в кожній точці $(x,y)\in T$;

5. $T \in A_5^N$ тоді і тільки тоді, коли існують точки $(x', y') \in T$ і $(x'', y'') \in T$, в яких $H(f; x', y') < \varepsilon$ і $H(f; x'', y'') \geqslant 2\varepsilon$.

В лемах 3.3.6 і 3.3.4 ми покажемо, що сукупна площа трикутників, які належать множинам A_3^N, A_4^N і A_5^N не перевищує ε. Разом з визначенням групи A_1^N це дозволяє нам класифікувати трикутники $T \in A_1^N \cup A_3^N \cup A_4^N \cup A_5^N$ як "погані", а трикутники $T \in A_2^N$ – як "хороші".

3.3.2. Допоміжні результати для доведення теореми 3.3.1

В цьому параграфі ми наведемо деякі допоміжні результати, які знадобляться при доведенні основних результатів підрозділу. Надалі через T_0 позначимо рівносторонній трикутник одиничної площі.

Зауваження 3.3.3. *Нехай P є лінійний поліном найкращого наближення квадратичної форми $\mathfrak{q}$ на рівносторонньому трикутнику T_0. За допомогою міркувань симетричності та інваріантності відносно поворотів переконуємося в тому, що різниця $\mathfrak{q} - P$ набуває однакових значень у вершинах T_0.*

Іноді константу $\sigma_{p;\alpha,\beta;2}$ можна знайти в явному вигляді. Наприклад,

$$\sigma_{\infty;\alpha,\beta;2} = \frac{4\alpha\beta}{3\sqrt{3}(\alpha+\beta)},$$

а у випадку $3\sqrt{3}\alpha \leqslant \pi(\alpha+\beta)$,

$$\sigma_{1;\alpha,\beta;2} = \frac{\alpha}{3\sqrt{3}} - \frac{\alpha^2}{2\pi(\alpha+\beta)}.$$

Розглянемо тепер довільну додатно визначену квадратичну форму Q виду $Q(x,y) = Ax^2 + By^2 + 2Cxy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, де $AB > C^2$, і знайдемо трикутник одиничної площі T, який є розв'язком задачі мінімізації

$$E\left(Q; \mathcal{P}_1\right)_{L_{p;\alpha,\beta}(T)} \to \inf, \qquad |T| = 1. \tag{3.18}$$

Нехай λ_1, λ_2 є власними числами матриці $S = \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix}$ і через U позначимо матрицю 2×2, складену з власних векторів матриці S одиничної довжини. Тоді лінійне перетворення

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

перетворює квадратичну форму $Q(x,y)$ в квадратичну форму $\mathfrak{q}(u,v)$. Отже, оптимальний трикутник T в задачі (3.18) можна отримати з рівностороннього трикутника, застосувуючи до нього обернене перетворення до (3.19). Таким чином ми встановлюємо наступне твердження.

Наслідок 3.3.2. *Нехай $Q(x,y) = Ax^2 + By^2 + 2Cxy$ є додатно визначена квадратична форма, тобто $AB - C^2 > 0$. Тоді для всіх $\alpha, \beta > 0$ і $1 \leqslant p \leqslant \infty$, мають місце рівності*

$$\inf_T \frac{E(Q;\mathcal{P}_1)_{L_{p;\alpha,\beta}(T)}}{|T|^{1+1/p}} = \sigma_{p;\alpha,\beta;2}\sqrt{AB-C^2} = E(q;\mathcal{P}_1)_{L_{p;\alpha,\beta}(T_0)}\sqrt{AB-C^2},$$

де T_0 – правильний трикутник одиничної площі.

Зауваження 3.3.4. *Нехай трикутник T реалізує* inf *в задачі 3.18 для додатно визначеної квадратичної форми Q. Якщо P є лінійний поліном найкращого несиметричного наближення форми Q на T, то різниця $Q - P$ приймає рівні значення в вершинах T.*

Разом з наслідком 3.3.1 нам знадобляться наступні дві леми.

Лема 3.3.1. *Розглянемо сім'ю квадратичних форм $Ax^2 + By^2 + 2Cxy$, які задовольняють умовам $0 < A \leqslant A^+$, $0 < B \leqslant B^+$ і $H = AB - C^2 \geqslant K$, де A^+, B^+ і K є деякі задані додатні числа. Тоді для довільної такої квадратичної форми $\lambda_{\min} \geqslant \sqrt{K} > 0$.*

Ця лема є тривіальним наслідком того, що функція $g(u,v) = u - \sqrt{u^2 - v}$, $u > 0$ і $0 < v \leqslant 1$, є спадною за змінною u і зростаючою за змінною v. Твердження наступної леми в свою чергу випливає з леми 3.3.1.

Лема 3.3.2. *Для сім'ї квадратичних форм, які задовольняють припущенням леми 3.3.1, частка діаметра оптимального трикутника цієї форми до квадратного кореня площі трикутника обмежена зверху константою, яка не залежить від A^+, B^+ і K.*

Для доведення оцінки знизу нам будуть потрібні дві допоміжні леми.

Лема 3.3.3. *Нехай $f \in C^2(D)$, $H(f;x,y) \geqslant K > 0$ для всіх $(x,y) \in D$. Якщо $\bar{n}$ – довільний одиничний вектор на площині, то*

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{n}^2}\right| \geqslant \frac{K}{2} \min\left\{\frac{1}{\|f_{xx}\|_\infty}; \frac{1}{\|f_{yy}\|_\infty}\right\}. \tag{3.20}$$

Доведення. Нехай $\bar{n} = (u,v)$ – довільний вектор одиничної довжини. Для будь-якої точки $(x,y) \in D$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{n}^2}(x,y) = f_{xx}(x,y)u^2 + 2f_{xy}(x,y)uv + f_{yy}(x,y)v^2.$$

Зауважимо, що похідні f_{xx} і f_{yy} мають один і той же знак на D. Без зменшення загальності будемо вважати, що $f_{xx}(x,y) > 0$ для всіх $(x,y) \in D$. Оскільки $u^2 + v^2 = 1$, то або $u^2 \geqslant 1/2$, або $v^2 \geqslant 1/2$. Якщо $u^2 > 1/2$, то

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{n}^2}(x,y) &= \left(\frac{f_{xy}^2(x,y)}{f_{yy}(x,y)}u^2 + 2f_{xy}(x,y)uv + f_{yy}(x,y)v^2\right) + \left(f_{xx}(x,y) - \frac{f_{xy}^2(x,y)}{f_{yy}(x,y)}\right)u^2 \\ &\geqslant \left(f_{xx}(x,y) - \frac{f_{xy}^2(x,y)}{f_{yy}(x,y)}\right)u^2 \geqslant \frac{K}{2\|f_{yy}\|_\infty}.\end{aligned}$$

Аналогічним чином, якщо $v^2 \geqslant 1/2$, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{n}^2}(x,y) \geqslant \frac{K}{2\|f_{xx}\|_\infty}.$$

Останні дві нерівності доводять (3.20). □

Наступна лема легко встановлюється за допомогою елементарних геометричних міркувань.

Лема 3.3.4. *Нехай T є довільний трикутник на площині, для якого $diam T \leqslant \sqrt{2}$. Нехай також O – довільна точка всередині T, $\delta > 0$ є задане число і $K_\delta := \min\left\{1; \delta^2/2\right\}$. Тоді існує трикутник T', який повністю міститься в перетині трикутника T з диском B, що має центр в точці O і радіус δ, причому*

$$|T'| \geqslant K_\delta^2 \cdot |T| \qquad \text{та} \qquad diam T' \geqslant K_\delta \cdot diam T.$$

3.3.3. Доведення оцінки зверху для точної асимптотичної поведінки величини $R_N\left(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\right)$

В даному параграфі ми доведемо оцінку зверху в теоремі 3.3.1. Нехай функція $f : D \to \mathbb{R}$ має невід'ємний на D гесіан. Для визначенності вважатимемо, що функція f є *опуклою*. Нехай також $1 \leqslant p < \infty$ і $\alpha, \beta > 0$. Нагадаємо, що оцінка зверху в теоремі 3.3.1 полягає у встановленні наступної нерівності

$$\limsup_{N\to\infty} N \cdot R_N\left(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\right) \leqslant \frac{\sigma_{p;\alpha,\beta;2}}{2} \cdot \left\|\sqrt{H}\right\|_{L_{\frac{p}{p+1}}(D)}. \tag{3.21}$$

Зауважимо, що спрямовуючи $p \to \infty$ ми також доведемо оцінку зверху (3.21) у випадку $p = \infty$. Для того, щоб довести (3.21), ми для кожного достатньо малого $\varepsilon > 0$ побудуємо спеціальну сім'ю тріангуляцій $\{\triangle_N^\varepsilon\}_{N=1}^\infty$, $\triangle_N^\varepsilon \in \mathfrak{D}_N$ для $N \in \mathbb{N}$, а також сім'ю відповідних лініних сплайнів $\{s_N^\varepsilon\}_{N=1}^\infty$, $s_N^\varepsilon \in S\left(\triangle_N^\varepsilon\right)$ для $N \in \mathbb{N}$. Далі ми покажемо, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\limsup_{N\to\infty} N \cdot \|f - s_N^\varepsilon\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)}\right) \leqslant \frac{\sigma_{p;\alpha,\beta;2}}{2} \cdot \left\|\sqrt{H}\right\|_{L_{\frac{p}{p+1}}(D)}.$$

З останньої нерівності випливає оцінка (3.21).

Надалі ми зафіксуємо число $1 \leqslant p < \infty$. Введемо декілька важливих позначень, які будемо використовувати в цьому параграфі.

Для $\delta > 0$ означимо модуль неперервності функції $g \in C(D)$ наступним чином

$$\omega(g, \delta) := \sup\{|g(x, y) - g(x', y')| \,:\, |x - x'| \leqslant \delta,\, |y - y'| \leqslant \delta,\, (x, y), (x', y') \in D\},$$

а для функції $f \in C^2(D)$ означимо

$$\omega_2(f, \delta) := \max\{\omega(f_{xx}, \delta),\, \omega\left(f_{yy}, \delta\right),\, \omega(f_{xy}, \delta)\}.$$

Лема 3.3.5. *Нехай $f \in C^2(D)$. Якщо $P_2 = P_2(f; x, y; x_0, y_0)$ позначає поліном Тейлора другого порядку функції f в точці (x_0, y_0), що розташована всередині квадрата $D_h \subset D$ зі стороною h, то виконується оцінка $\|f - P_2\|_{L_\infty(D_h)} \leqslant 2h^2\, \omega_2(f, h)$.*

Ця лема є тривіальною, а тому ми не будемо наводити її доведення. Тепер розглянемо функції

$$\lambda_{\min}(x, y) := \frac{f_{xx} + f_{yy}}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{\left(f_{xx} + f_{yy}\right)^2 - 4\left(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right)},$$

$$\lambda_{\max}(x,y) := \frac{f_{xx}+f_{yy}}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{(f_{xx}+f_{yy})^2 - 4\left(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right)}.$$

Для будь-якого $\varepsilon > 0$ означимо множину

$$G_{0;2\varepsilon} := \{(x,y) \in D \ : \ 0 < \lambda_{\min}(x,y) < \varepsilon\}.$$

Відзначимо, що $\mu\left(G_{0;2\varepsilon}\right) \to 0$, коли $\varepsilon \to 0$.

Також, для заданого $\varepsilon \in (0,1)$ і кожного $N \in \mathbb{N}$ означимо

$$m_N = m_N(\varepsilon) := \min\left\{m > 0 : \ 2m^{-2}\max\{\alpha,\beta\}\,\omega_2\left(f, m^{-1}\right) \leqslant \varepsilon N^{-1}\right\}. \tag{3.22}$$

Неважко бачити, що $m_N \to \infty$, коли $N \to \infty$, а також

$$\frac{N}{m_N^2} \to \infty, \qquad N \to \infty, \tag{3.23}$$

тобто $m_N = o\left(\sqrt{N}\right)$, коли $N \to \infty$. В подальшому ми будемо також припускати, що число N є достатньо великим для того, щоб виконувалася нерівність $\omega\left(\lambda_{\min}, m_N^{-1}\right) \leqslant \varepsilon$.

Розділимо квадрат D на менші квадрати розміру $m_N^{-1} \times m_N^{-1}$ зі сторонами, паралельними сторонам D. Через $D_j^N := D_j^N(\varepsilon)$, $j = 1,\ldots,m_N^2$, позначимо отримані квадрати, пронумеровані в довільному порядку.

Для $j \in \left\{1,\ldots,m_N^2\right\}$ позначимо через $\left(x_j^N, y_j^N\right)$ центр квадрата D_i^N. Нехай

$$A_j^N := \frac{1}{2} f_{xx}\left(x_j^N, y_j^N\right), \quad B_j^N := \frac{1}{2} f_{yy}\left(x_j^N, y_j^N\right), \quad C_j^N := \frac{1}{2} f_{xy}\left(x_j^N, y_j^N\right),$$

$$\lambda_{\min;j}^N := \frac{A_j^N + B_j^N}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(A_j^N + B_j^N\right)^2 - 4\left(A_j^N B_j^N - (C_j^N)^2\right)},$$
$$\lambda_{\max;j}^N := \frac{A_j^N + B_j^N}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(A_j^N + B_j^N\right)^2 - 4\left(A_j^N B_j^N - (C_j^N)^2\right)}.$$

Зауважимо, що

$$H\left(f; x_j^N, y_j^N\right) = 4\left(A_j^N B_j^N - \left(C_j^N\right)^2\right) = 4\lambda_{\min;j}^N \lambda_{\max;j}^N.$$

Нарешті, нехай $f_{N;j}$ є поліномом Тейлора другого порядку функції f, який побудовано в точці $\left(x_j^N, y_j^N\right)$, і позначимо його квадратичну частину через

$$Q_{N,i} = Q_{N,i}(x,y) := A_i^N x^2 + 2C_i^N xy + B_i^N y^2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Надалі в цьому пункті оберемо $\varepsilon > 0$ так, що має місце нерівність $23\varepsilon + 2\mu\left(G_{0;2\varepsilon}\right) < 1$. Перейдемо до побудови "майже" оптимальної послідовності тріангуляцій $\triangle_{N;j} = \triangle_{N;j}(\varepsilon)$ на квадраті D_j^N для кожного $j = 1, \ldots, m_N^2$. Потім ми "склеїмо" побудовані тріангуляції в одну тріангуляцію $\triangle_N^\varepsilon \in \mathfrak{D}_N$ квадрата D. Маючи тріангуляцію $\triangle_N^\varepsilon$, ми побудуємо "майже" оптимальний лінійний сплайн $s_N^\varepsilon \in \mathcal{S}\left(\triangle_N^\varepsilon\right)$.

Поділимо множину індексів $j = 1, \ldots, m_N^2$ на чотири групи:

$$\begin{aligned}
I_1(\varepsilon; N) &:= \left\{j \in \left\{1, \ldots, m_N^2\right\} \ : \ \lambda_{\min;j}^N \geqslant \varepsilon\right\}, \\
I_2(\varepsilon; N) &:= \left\{j \in \left\{1, \ldots, m_N^2\right\} \ : \ \omega\left(\lambda_{\min}, m_N^{-1}\right) < \lambda_{\min;j}^N < \varepsilon\right\}, \\
I_3(\varepsilon; N) &:= \left\{j \in \left\{1, \ldots, m_N^2\right\} \ : \ \lambda_{\min;j}^N \leqslant \omega\left(\lambda_{\min}, m_N^{-1}\right),\ \lambda_{\max;j}^N \geqslant \varepsilon^2\right\}, \\
I_4(\varepsilon; N) &:= \left\{j \in \left\{1, \ldots, m_N^2\right\} \ : \ \lambda_{\min;j}^N < \omega\left(\lambda_{\min}, m_N^{-1}\right),\ \lambda_{\max;j}^N < \varepsilon^2\right\}.
\end{aligned}$$

Вочевидь, множини $I_1(\varepsilon; N)$, $I_2(\varepsilon; N)$, $I_3(\varepsilon; N)$ і $I_4(\varepsilon; N)$ попарно не перетинаються для всіх N.

Побудова тріангуляції $\triangle_{N;j}^\varepsilon$ на D_j^N залежить від того, якій з груп, побудованих вище, належить індекс j.

(**a**) Для $j \in I_1(\varepsilon; N)$ означимо

$$n_j^N = n_j^N(\varepsilon) := \left[\frac{N(1 - 23\varepsilon - 2\mu\left(G_{0;2\varepsilon}\right)) H^{\frac{p}{2(p+1)}}\left(f; x_j^N, y_j^N\right)}{\sum\limits_{k \in I_1(\varepsilon;N)} H^{\frac{p}{2(p+1)}}\left(f; x_k^N, y_k^N\right)}\right] + 1,$$

де $[a]$ позначає цілу частину дійсного числа a. Величина n_j^N є числом трикутників тріангуляції квадрата D_j^N (до їх підрозбиття вздовж межі D_j^N) і отримана за рахунок мінімізації глобальної похибки наближення за умови $\sum\limits_{j \in I_1(\varepsilon;N)} n_j^N \approx N$.

В силу нерівності

$$n_j^N > \left(1 - 23\varepsilon - 2\mu\left(G_{0;2\varepsilon}\right)\right)\left(4\varepsilon^2\right)^{\frac{p}{2(p+1)}} \|H\|_{L_\infty(D)}^{-\frac{p}{2(p+1)}} \cdot \frac{N}{m_N^2}$$

та зі співвідношення (3.23) неважко бачити, що n_j^N прямує до нескінченності, коли $N \to \infty$.

Для формалізації подальших побудов, для довільного трикутника T на площині через $\mathrm{Til}(T)$ позначимо замощення площини за допомогою T, яке отримано наступним чином: ми будуємо трикутник $\widetilde{T}$, який є симетричним до T відносно середини однієї з його сторін, і замощуємо площину $\mathbb{R}^2$ фігурами, що отримані за допомогою паралельних переносів $T \cup \widetilde{T}$. Алгоритм побудови тріангуляції $\triangle_{N;j}$ полягає в наступному:

1. Нехай T^* є довільний трикутник, який розв'язує задачу (3.18).
2. Через T_j^N позначимо подібний до T^* трикутник такий, що $\left|T_j^N\right| = \frac{1}{m_N^2 n_j^N}$.
3. За допомогою трикутника T_j^N утворюємо замощення $\operatorname{Til}\left(T_j^N\right)$ площини.
4. Кожний трикутник з $\operatorname{Til}\left(T_j^N\right)$, який міститься всередині квадрата D_j^N включимо в тріангуляцію $\triangle_{N;j}$.
5. Для довільного трикутника $T \in \operatorname{Til}\left(T_j^N\right)$, що має спільні точки з межею квадрата D_j^N, розглянемо перетин $T \cap D_j^N$. Зрозуміло, що цей перетин є багатокутником з щонайбільше сімома вершинами. Розіб'ємо такий багатокутник на щонайбільше п'ять трикутників без додавання нових вершин і включимо їх в тріангуляцію $\triangle_{N;j}$.

Оцінимо кількість трикутників в тріангуляції $\triangle_{N;j}$. Оскільки квадратична форма $Q_{N,j}$ задовольняє умови леми 3.3.2, то існує константа $c_1 = c_1(\varepsilon)$, яка не залежить від N, така, що

$$\operatorname{diam} T_j^N \leqslant \frac{c_1}{m_N \sqrt{n_j^N}}. \tag{3.24}$$

Як наслідок, кількість трикутників $T \in \operatorname{Til}\left(T_j^N\right)$, які мають непорожній перетин з межею квадрата D_j^N, становить $O\left(\sqrt{n_j^N}\right)$, коли $N \to \infty$. Таким чином, загальна кількість трикутників в тріангуляції $\triangle_{N;j}$ є

$$n_j^N + O\left(\sqrt{n_j^N}\right) = n_j^N + o\left(m_N^{-2} N\right), \qquad N \to \infty.$$

(**b**) Нехай $j \in I_2(\varepsilon; N)$. Оскільки $m_N^{-2} N \to \infty$, коли $N \to \infty$, то для кожного достатньо великого N існує натуральне число $r_1 = r_1(N) \in \mathbb{N}$, для якого

$$\frac{N}{2m_N^2} \leqslant r_1^2 \leqslant \frac{N}{m_N^2}.$$

Розіб'ємо квадрат D_j^N на квадрати розміру $\frac{1}{m_N r_1} \times \frac{1}{m_N r_1}$ і сторонами, які паралельні сторонам D_j^N. Всередині кожного з отриманих квадратів проведемо довільну діагональ. Таким чином утворимо тріангуляцію $\triangle_{N;j}$ квадрата D_j^N, яка складається з $2r_1^2$ рівних прямокутних рівнобедрених трикутників. Оберемо довільний з отриманих трикутників і позначимо його через T_j^N.

(**c**) Нехай $j \in I_3(\varepsilon; N)$. Позначимо через $\overline{\xi}_j$ і $\overline{\eta}_j$ власні вектори квадратичної форми $Q_{N,j}$, що відповідають власним числам $\lambda^N_{\min;j}$ і $\lambda^N_{\max;j}$. Для $\varepsilon > 0$ і для кожного достатньо великого N існує таке число $r_2 \in \mathbb{N}$, що

$$\frac{\varepsilon N}{2m_N^2} \leqslant r_2^2 \leqslant \frac{\varepsilon N}{m_N^2}.$$

Позначимо через Π_j^N прямокутник розміру $\dfrac{1}{m_N} \times \dfrac{1}{m_N r_2^2}$, сторони якого паралельні відповідно векторам $\overline{\xi}_j$ і $\overline{\eta}_j$. Проведемо всередині цього прямокутника довільну діагональ і позначимо довільний з отриманих трикутників через T_j^N. Нехай T – довільний трикутник з $\mathrm{Til}\left(T_j^N\right)$. Якщо T повністю міститься всередині квадрата D_j^N, то включимо його в тріангуляцію $\triangle_{N;j}$. В іншому випадку поділимо багатокутник $D_j^N \cap T$ на щонайбільше п'ять трикутників без додавання нових вершин і включимо кожний з них в тріангуляцію $\triangle_{N;j}$. Зауважимо, що кількість трикутників в $\triangle_{N;j}$ не перевищує $10r_2^2$.

(**d**) Нарешті, нехай $j \in I_4(\varepsilon; N)$. Подібно до випадку (b) поділимо квадрат D_j^N на квадрати розміру $\dfrac{1}{m_N r_2} \times \dfrac{1}{m_N r_2}$ зі сторонами, паралельними сторонам квадрата D_j^N. Всередині кожного малого квадрата проведемо одну з його діагоналей. Тоді ми отримаємо тріангуляцію $\triangle_{N;j}$ квадрата D_j^N, яка складається з $2r_2^2$ рівних прямокутних рівнобедрених трикутників, і один з них позначимо через T_j^N.

Оцінимо сукупну кількість $\widetilde{N}$ трикутників в побудованих вище тріангуляціях $\triangle_{N;j}$. З огляду на вибір чисел r_1 і r_2 отримаємо

$$\begin{aligned}
\widetilde{N} &\leqslant \sum_{j\in I_1(\varepsilon;N)} \left(n_j^N + o\left(m_N^{-2}N\right)\right) + \sum_{j\in I_2(\varepsilon;N)} 2r_1^2 + \sum_{j\in I_3(\varepsilon;N)} 10r_2^2 + \sum_{j\in I_4(\varepsilon;N)} 2r_2^2 \\
&\leqslant (1 - 23\varepsilon - 2\mu\left(G_{0;2\varepsilon}\right))N + o(N) + 2\mu\left(G_{0;2\varepsilon}\right)N + 12m_N^2 r_2^2 \\
&\leqslant (1-23\varepsilon)\,N + o\,(N) + 12\varepsilon N = (1-11\varepsilon)\,N + o(N), \quad \text{коли} \quad N \to \infty.
\end{aligned}$$

Тепер "склеїмо" тріангуляції $\triangle_{N;j}$ керуючись наступними правилами:

1. Включимо в тріангуляцію $\triangle_N^{\varepsilon}$ всі трикутники $T \in \triangle_{N;j}$, $j = 1, \ldots, m_N^2$, які не перетинаються з межами квадратів D_j^N.
2. Для $j = 1, \ldots, m_N^2$ позначимо через W_j^N множину вершин тріангуляції $\triangle_{N;j}$,

які знаходяться на межі D_j^N, а для будь-яких $j,k = 1,\ldots,m_N^2$, $j \neq k$, позначимо $S_{j,k} = D_j^N \cap D_k^N$.

3. Розіб'ємо кожний трикутник $T \in \triangle_{N;j}$, що має непорожній перетин з $S_{j,k}$, за рахунок з'єднання вершин трикутника T з точками з множини $W_k^N \cap T$. Отримані трикутники включимо в тріангуляцію $\triangle_N^\varepsilon$.

Оцінимо кількість $\widehat{N}$ трикутників в тріангуляції $\triangle_N^\varepsilon$. Через $\#A$ позначимо кількість точок в скінченній множині A. Тоді

$$\widehat{N} \leqslant \widetilde{N} + \sum_{j=1}^{m_N^2} \#\left(W_j^N\right).$$

Відзначимо, що $\#\left(W_j^N\right) \leqslant 10r_2^2$ для всіх $j \in I_3(\varepsilon;N)$, та $\#\left(W_j^N\right) = o\left(m_N^{-2}N\right)$ в іншому випадку. Отже, при $N \to \infty$,

$$\widehat{N} \leqslant (1-11\varepsilon)N + o(N) + m_N^2 \cdot \left(10r_2^2 + o\left(m_N^{-2}N\right)\right) \leqslant (1-\varepsilon)N + o\left(N\right).$$

Таким чином, $\widehat{N} \leqslant N$ для всіх достатньо великих N.

Тепер ми можемо перейти до побудови "майже" оптимального лінійного сплайну s_N^ε на тріангуляції $\triangle_N^\varepsilon$. Для $j \in I_1(\varepsilon;N)$ та $T \in \triangle_N^\varepsilon \cap \operatorname{int} D_j^N$ позначимо через s_N^ε суму двох лінійних поліномів: $f_{N,j} - Q_{N,j}$ і лінійного полінома найкращого наближення квадратичної форми $Q_{N,i}$ на трикутнику T. За зауваженням 3.3.4 неважко бачити, що сплайн s_N^ε є неперервним на об'єднанні внутрішніх частин трикутників з $\Delta_N^\varepsilon \cap \operatorname{int} D_j^N$.

Нарешті, нехай s_N^ε інтерполює функцію f у вершинах тріангуляції $\triangle_N^\varepsilon$, які залишилися, тобто в вершинах, що знаходяться всередині квадратів D_j^N з $j \in I_2(\varepsilon;N) \cup I_3(\varepsilon;N) \cup I_4(\varepsilon;N)$, а також у вершинах, що розташовані вздовж меж квадратів D_j^N, $j = 1,\ldots,m_N^2$. Це автоматично "склеює" сплайн s_N^ε і робить його неперервним на D.

Таким чином для довільного достатньо малого $\varepsilon > 0$ існує таке $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, що для всіх $N > N(\varepsilon)$ ми побудували тріангуляцію Δ_N^ε, яка складається з щонайбільше N трикутників, та відповідний неперервний лінійний сплайн $s_N^\varepsilon \in \mathcal{S}\left(\Delta_N^\varepsilon\right)$.

Тепер перейдемо до доведення оцінки зверху. Для цього покажемо, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\liminf_{N\to\infty} N \cdot \|f - s_N^\varepsilon\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)}\right) \leqslant \frac{\sigma_{p;\alpha,\beta;2}}{2} \left\|\sqrt{H}\right\|_{L_{\frac{p}{p+1}}(D)}. \tag{3.25}$$

Нам знадобиться декілька допоміжних оцінок похибки наближення функції f за допомогою сплайна s_N^ε на квадратах D_j^N, $j=1,\ldots,m_N^2$. Для зручності, через $\triangle_j^N$ і $\widetilde{\triangle}_j^N$, $j=1,\ldots,m_N^2$, ми позначимо множину трикутників $T\in\triangle_N^\varepsilon$, які містяться в квадраті D_j^N і всередині квадрата D_j^N, відповідно. Нехай також

$$\Omega_j^N := \Big\{(x,y)\ :\ \exists T\in\widetilde{\triangle}_j^N \text{ такий, що } (x,y)\in T\Big\}.$$

Встановимо оцінку зверху величини $\|f-s_N^\varepsilon\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D_j^N)}$ окремо в двох випадках: 1) $j\in\{1,\ldots,m_N^2\}\setminus I_3(\varepsilon;N)$ і 2) $j\in I_3(\varepsilon;N)$.

1) Розглянемо довільний індекс $j\in\{1,\ldots,m_N^2\}\setminus I_3(\varepsilon;N)$. Зауважимо, що

$$\|f-s_N^\varepsilon\|^p_{L_{p;\alpha,\beta}(D_j^N)} = \|f-s_N^\varepsilon\|^p_{L_{p;\alpha,\beta}(\Omega_j^N)} + \sum_{T\in\triangle_j^N\setminus\widetilde{\triangle}_i^N}\|f-s_N^\varepsilon\|^p_{L_{p;\alpha,\beta}(T)}. \tag{3.26}$$

За нерівністю трикутника має місце нерівність

$$\|f-s_N^\varepsilon\|_{L_{p;\alpha,\beta}(\Omega_j^N)} \leqslant \|f-f_{N;j}\|_{L_{p;\alpha,\beta}(\Omega_j^N)} + \|f_{N;j}-s_N^\varepsilon\|_{L_{p;\alpha,\beta}(\Omega_j^N)}. \tag{3.27}$$

Оцінимо перший доданок в правій частині (3.27) за допомогою леми 3.3.5:

$$\begin{aligned}\|f-f_{N;j}\|_{L_{p;\alpha,\beta}(\Omega_j^N)} &\leqslant \max\{\alpha;\beta\}\,\|f-f_{N;j}\|_{L_\infty(D_j^N)}\left|D_j^N\right|^{1/p}\\ &\leqslant \max\{\alpha;\beta\}m_N^{-2-2/p}\,\omega_2\left(f,m_N^{-1}\right)\leqslant \varepsilon m_N^{-2/p}N.\end{aligned}\tag{3.28}$$

Для оцінювання другого доданку в правій частині (3.27) помітимо, що

$$\begin{aligned}\|f_{N;j}-s_N^\varepsilon\|^p_{L_{p;\alpha,\beta}(\Omega_j^N)} &= \sum_{T\in\widetilde{\triangle}_j^N}\|f_{N;j}-s_N^\varepsilon\|^p_{L_{p;\alpha,\beta}(T)}\\ &= \left(\#\widetilde{\triangle}_j^N\right)\cdot\|f_{N;j}-s_N^\varepsilon\|^p_{L_{p;\alpha,\beta}(T_j^N)}.\end{aligned}\tag{3.29}$$

Для встановлення оцінки зверху величини $\|f_{N;j}-s_N^\varepsilon\|_{L_{p;\alpha,\beta}(T_j^N)}$ необхідно розглянути три випадки: *a*) $j\in I_1(\varepsilon;N)$, *b*) $j\in I_2(\varepsilon;N)$ та *c*) $j\in I_4(\varepsilon;N)$.

a) По-перше, припустимо, що $j\in I_1(\varepsilon;N)$. Згідно з алгоритмом побудови тріангуляції $\triangle_N(\varepsilon)$ і наслідком 3.3.1 ми матимемо, що $\#\widetilde{\triangle}_j^N\leqslant n_j^N$ і

$$\|f_{N;j}-s_N^\varepsilon\|_{L_{p;\alpha,\beta}(T_j^N)} = \frac{\sigma_{p;\alpha,\beta;2}}{2}H^{1/2}(f;x_j^N,y_j^N)\left|T_j^N\right|^{1+1/p} = \frac{\sigma_{p;\alpha,\beta;2}H^{1/2}(f;x_j^N,y_j^N)}{2m_N^{2+2/p}\left(n_j^N\right)^{1+1/p}}.$$

З цієї рівності і з (3.29) ми отримаємо

$$\|f_{N;j}-s_N^\varepsilon\|^p_{L_{p;\alpha,\beta}(\Omega_j^N)} \leqslant \frac{\sigma^p_{p;\alpha,\beta;2}}{2^p}\cdot H^{p/2}\left(f;x_j^N,y_j^N\right)\cdot m_N^{-2(p+1)}\left(n_j^N\right)^{-p}. \tag{3.30}$$

b) Далі припустимо, що $j \in I_2(\varepsilon;N)$. В цьому випадку $\#\widetilde{\triangle}_j^N \leqslant 2r_1^2$. Для кожного трикутника T і неперервної на T функції g, через $s_{g,T}$ позначимо лінійну функцію, що інтерполює g в вершинах T. Оскільки $\left|\dfrac{\partial^2 f_{N;j}}{\partial \overline{n}^2}\right| \leqslant \lambda_{\max;j}^N$ для кожного одиничного вектора $\overline{n}$, то після заміни змінних (див. [161, 82]) ми отримаємо

$$\begin{aligned}\|f_{N;j} - s_N^\varepsilon\|_{L_{p;\alpha,\beta}\left(T_j^N\right)} &\leqslant \frac{\max\{\alpha;\beta\}\lambda_{\max;j}^N}{2}\left(\int_{T_j^N}\left|\mathfrak{q}(x,y) - s_{q,T_j^N}(x,y)\right|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/p} \\ &\leqslant 2^{-1}k_1\left(m_N^2 r_1^2\right)^{-1-1/p} \leqslant k_1\left(m_N^2 r_1^2\right)^{-1-1/p}.\end{aligned}$$

Далі позначатимемо через $k_1, k_2, \ldots$ константи, які не залежить від N і ε. Отже,

$$\|f_{N;j} - s_N^\varepsilon\|^p_{L_{p;\alpha,\beta}\left(\Omega_j^N\right)} \leqslant 2k_1^p m_N^{-2} N^p. \tag{3.31}$$

c) Нарешті, нехай $j \in I_4(\varepsilon;N)$. За аналогією з попередніми випадками неважко бачити, що $\#\widetilde{\triangle}_j^N \leqslant 2r_2^2$ і

$$\|f_{N;j} - s_N^\varepsilon\|^p_{L_{p;\alpha,\beta}\left(\Omega_j^N\right)} \leqslant 2k_1^p \varepsilon^p m_N^{-2} N^p. \tag{3.32}$$

Ця нерівність завершує аналіз трьох випадків, наведених вище. Далі ми оцінимо похибку відхилення сплайна $s_N(\varepsilon)$ від функції f на довільному трикутнику $T \in \triangle_j^N \setminus \widetilde{\triangle}_j^N$. Для кожного такого трикутника

$$\|f - s_N^\varepsilon\|_{L_{p;\alpha,\beta}(T)} \leqslant \max\{\alpha;\beta\}\left(\|f - s_{f,T}\|_{L_p(T)} + \|s_{f,T} - s_N^\varepsilon\|_{L_p(T)}\right).$$

За нерівністю трикутника маємо

$$\|f - s_{f,T}\|_{L_p(T)} \leqslant \left\|f_{N;j} - s_{f_{N;j},T}\right\|_{L_p(T)} + \|f - f_{N;j}\|_{L_p(T)} + \left\|s_{f,T} - s_{f_{N;j},T}\right\|_{L_p(T)}.$$

В силу леми 3.3.5 отримаємо

$$\|f - f_{N;j}\|_{L_p(T)} \leqslant \|f - f_{N;j}\|_{L_\infty(T)}|T|^{1/p} \leqslant m_N^{-2}\,\omega_2\left(f, m_N^{-1}\right)|T|^{1/p} = O\left(N^{-1-1/p}\right),$$

$$\left\|s_{f,T} - s_{f_{N;j},T}\right\|_{L_p(T)} \leqslant \|f - f_{N;j}\|_{L_\infty(T)}|T|^{1/p} = O\left(N^{-1-1/p}\right),$$

$$\|s_{f,T} - s_N^\varepsilon\|_{L_p(T)} \leqslant \|f - f_{N;j}\|_{L_\infty(T)}|T|^{1/p} = O\left(N^{-1-1/p}\right),$$

коли $N \to \infty$. Також за наслідком 3.3.2,

$$\left\|f_{N;j} - s_{f_{N;j},T}\right\|_{L_p(T)} \leqslant \left\|f_{N;j} - s_{f_{N;j},T_j^N}\right\|_{L_p\left(T_j^N\right)} \leqslant \frac{\lambda_{\max;j}^N}{2}\cdot\left\|q - s_{q,T_i^N}\right\|_{L_p\left(T_j^N\right)}.$$

За нерівністю (3.24) у випадку $j \in I_1(\varepsilon; N)$ матимемо

$$\left\| q - s_{q,T_j^N} \right\|_{L_p\left(T_j^N\right)} \leqslant O\left(N^{-1-1/p}\right),$$

а у випадку $j \in I_2(\varepsilon; N) \cup I_4(\varepsilon; N)$ –

$$\left\| q - s_{q,T_j^N} \right\|_{L_p\left(T_j^N\right)} = k_2 m_N^{-2-2/p} r_1^{-2-2/p} = O\left(N^{-1-1/p}\right).$$

Отже,

$$\|f - s_N^\varepsilon\|_{L_{p;\alpha,\beta}(T)} = O\left(N^{-1-1/p}\right), \qquad N \to \infty.$$

Нагадаємо, що ми розглядаємо випадок $j \in \left\{1, \ldots, m_N^2\right\} \setminus I_3(\varepsilon; N)$. За алгоритмом побудови тріангуляції $\triangle_N(\varepsilon)$, кількість трикутників в $\triangle_j^N \setminus \widetilde{\triangle}_j^N$ є $o\left(m_N^{-2} N\right)$, коли $N \to \infty$. Тому,

$$\sum_{T \in \triangle_j^N \setminus \widetilde{\triangle}_j^N} \|f - s_N^\varepsilon\|_{L_{p;\alpha,\beta}(T)}^p = o\left(m_N^{-2} N^{-p}\right). \tag{3.33}$$

2) Тепер ми розглянемо випадок $j \in I_3(\varepsilon; N)$. Неважко бачити, що

$$\|f - s_N^\varepsilon\|_{L_{p;\alpha,\beta}\left(D_j^N\right)}^p \leqslant (\max\{\alpha, \beta\})^p \sum_{T \in \triangle_j^N} \|f - s_N^\varepsilon\|_{L_p(T)}^p. \tag{3.34}$$

Нехай T – довільний трикутник в тріангуляції $\triangle_j^N$. Тоді

$$\|f - s_N^\varepsilon\|_{L_p(T)} \leqslant \|f - f_{N;j}\|_{L_p(T)} + \left\|f_{N;j} - s_{f_{N;j},T}\right\|_{L_p(T)} + \left\|s_N^\varepsilon - s_{f_{N;j},T}\right\|_{L_p(T)}.$$

За допомогою леми 3.3.5 отримаємо наступні оцінки зверху

$$\|f - f_{N;j}\|_{L_p(T)} \leqslant \|f - f_{N;j}\|_{L_\infty(T)} |T|^{1/p} \leqslant \varepsilon N^{-1} \cdot \left(2 m_N^2 r_2^2\right)^{-1/p},$$

$$\left\|s_N^\varepsilon - s_{f_{N;j},T}\right\|_{L_p(T)} \leqslant \varepsilon N^{-1} \cdot \left(2 m_N^2 r_2^2\right)^{-1/p}.$$

Також, позначимо $\tilde{\mathfrak{q}}(x,y) := \lambda_{\min;j}^N\, x^2 + \lambda_{\max;j}^N\, y^2$ і помітимо, що

$$\begin{aligned}
&\left\|f_{N;j} - s_{f_{N;j},T}\right\|_{L_p(T)}^p \\
&\quad \leqslant \int_0^{m_N^{-1}} \int_0^{m_N^{-1} r_2^{-2}} \left| \tilde{\mathfrak{q}}(x,y) - s_{\tilde{\mathfrak{q}},T_j^N}(x,y) \right|^p \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
&\quad \leqslant \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\omega\left(\lambda_{\min}, m_N^{-1}\right)}{m_N^2} u^2 + \frac{\|\lambda_{\max}\|_\infty}{m_N^2 r_2^4} v^2 - s_{\tilde{\mathfrak{q}},T_j^N}\left(\frac{u}{m_N}, \frac{v}{m_N r_2^2}\right) \right|^p \frac{\mathrm{d}u \mathrm{d}v}{m_N^2 r_2^2} \\
&\quad \leqslant \frac{\omega^p\left(\lambda_{\min}, m_N^{-1}\right)}{m_N^{2(p+1)} r_2^{2(p+1)}} \cdot \int_0^1 \left|u^2 - u\right|^p \mathrm{d}u + \frac{\|\lambda_{\max}\|_\infty^p}{m_N^{2(p+1)} r_2^{4p+2}} \cdot \int_0^1 \left|v^2 - v\right|^p \mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

Тому за визначенням (3.22) отримаємо

$$\begin{aligned}\left\|f_{N;j}-s_{f_{N;j},T_j^N}\right\|_{L_p(T)} &\leqslant \frac{k_3}{\left(m_N^2 r_2^2\right)^{1/p}}\left(m_N^{-2}\omega\left(\lambda_{\min},m_N^{-1}\right)+\frac{2\left\|\lambda_{\max}\right\|_\infty}{\varepsilon N r_2^2}\right)\\ &\leqslant \frac{k_3(\varepsilon+o(1))}{N\cdot\left(m_N^2 r_2^2\right)^{1/p}},\end{aligned}\tag{3.35}$$

коли $N\to\infty$.

Таким чином ми встановили наступну оцінку у випадку $j\in I_3(\varepsilon;N)$

$$\|f-s_N^\varepsilon\|_{L_p(T)}\leqslant\frac{2\varepsilon}{N}\cdot\frac{1}{2^{1/p}\left(m_N^2r_2^2\right)^{1/p}}+\frac{k_3(\varepsilon+o(1))}{N\cdot\left(m_N^2r_2^2\right)^{1/p}}\leqslant\frac{(k_3+2)\left(\varepsilon+o(1)\right)}{N(m_N^2r_2^2)^{1/p}}.$$

Тепер ми готові довести нерівність (3.25). Дійсно,

$$\|f-s_N^\varepsilon\|^p_{L_{p;\alpha,\beta}(D)}=\sum_{j=1}^{m_N^2}\|f-s_N^\varepsilon\|^p_{L_{p;\alpha,\beta}\left(D_j^N\right)}=\sum_{k=1}^{4}\sum_{j\in I_k(\varepsilon;N)}\|f-s_N^\varepsilon\|^p_{L_{p;\alpha,\beta}\left(D_j^N\right)}.\tag{3.36}$$

Оцінимо окремо кожен з чотирьох доданків в (3.36).

1) Поєднуючи нерівності (3.26), (3.27), (3.28), (3.30) і (3.33) ми бачимо, що для $j\in I_1(\varepsilon;N)$,

$$\begin{aligned}\|f-s_N^\varepsilon\|^p_{L_{p;\alpha,\beta}\left(D_j^N\right)} &\leqslant \left(\frac{\sigma_{p;\alpha,\beta;2}}{2}\cdot\frac{H^{1/2}\left(f;x_j^N,y_j^N\right)}{m_N^{2+2/p}n_j^N}+\frac{\varepsilon}{Nm_N^{2/p}}\right)^p+o\left(\frac{1}{m_N^2N^p}\right)\\ &\leqslant \left(\frac{\sigma_{p;\alpha,\beta;2}}{2}\right)^p\cdot\frac{H^{p/2}\left(f;x_j^N,y_j^N\right)}{m_N^{2(p+1)}\left(n_j^N\right)^p}+\frac{k_4\varepsilon}{N^pm_N^2}+o\left(\frac{1}{N^pm_N^2}\right),\end{aligned}$$

коли $N\to\infty$. З останньої нерівності, визначення числа n_j^N та інтегровності за Ріманом функції $\sqrt{H(f;x,y)}$, отримаємо

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I_1(\varepsilon;N)}\|f-s_N^\varepsilon\|^p_{L_{p;\alpha,\beta}\left(D_j^N\right)} &\leqslant\frac{\sigma^p_{p;\alpha,\beta;2}}{2^pm_N^{2(p+1)}}\sum_{j\in I_1(\varepsilon;N)}\frac{H^{p/2}\left(f;x_j^N,y_j^N\right)}{\left(n_j^N\right)^p}+\frac{k_4\varepsilon+o(1)}{N^p}\\ &\leqslant\frac{\sigma^p_{p;\alpha,\beta;2}m_N^{-2(p+1)}}{2^p\left(1-23\varepsilon-2\mu\left(G_{0;2\varepsilon}\right)\right)^pN^p}\left(\sum_{j\in I_1(\varepsilon;N)}H^{\frac{p}{2(p+1)}}\left(x_j^N,y_j^N\right)\right)^{p+1}+\frac{k_4\varepsilon+o(1)}{N^p}\\ &\leqslant\frac{\sigma^p_{p;\alpha,\beta;2}}{2^p\left(1-23\varepsilon-2\mu\left(G_{0;2\varepsilon}\right)\right)^pN^p}\left(\left\|\sqrt{H}\right\|^p_{L_{\frac{p}{p+1}}(D)}+o(1)\right)+\frac{k_4\varepsilon}{N^p},\end{aligned}\tag{3.37}$$

коли $N\to\infty$.

2) Нехай $j\in I_2(\varepsilon;N)$. За (3.26), (3.27), (3.28), (3.31), і (3.33) маємо

$$\|f-s_N^\varepsilon\|^p_{L_{p;\alpha,\beta}\left(D_j^N\right)}\leqslant\left(\left(2^{1/p}k_1+\varepsilon\right)^p+o(1)\right)m_N^{-2}N^{-p},\qquad N\to\infty.$$

Тому

$$\sum_{j\in I_2(\varepsilon;N)} \|f-s_N^{\varepsilon}\|^p_{L_{p;\alpha,\beta}\left(D_j^N\right)} \leqslant \frac{\mu\left(G_{0;2\varepsilon}\right)}{N^p}\cdot\left(\left(2^{1/p}k_1+\varepsilon\right)^p+o(1)\right), \quad N\to\infty. \tag{3.38}$$

3) Поєднуючи нерівності (3.34) і (3.35), ми можемо встановити наступний ланцюжок співвідношень

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in I_3(\varepsilon;N)} \|f-s_N^{\varepsilon}\|^p_{L_{p;\alpha,\beta}\left(D_j^N\right)}\\
&\qquad\leqslant (\max\{\alpha,\beta\})^p \sum_{j\in I_3(\varepsilon;N)}\sum_{T\in\triangle_j^N}\|f-s_N^{\varepsilon}\|^p_{L_p(T)}\\
&\qquad\leqslant (\max\{\alpha,\beta\})^p \sum_{j\in I_3(\varepsilon;N)}\sum_{T\in\triangle_j^N}\frac{(k_3+2)^p\,(\varepsilon+o(1))^p}{N^p m_N^2 r_2^2}\\
&\qquad= (\max\{\alpha,\beta\})^p\cdot 10 r_2^2 m_N^2\frac{(k_3+2)^p\,(\varepsilon+o(1))^p}{N^p m_N^2 r_2^2}\\
&\qquad= 10\frac{(\max\{\alpha,\beta\}\,(k_3+2)\,\varepsilon)^p+o(1)}{N^p}, \qquad \text{коли} \quad N\to\infty.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

4) Нарешті, в силу нерівностей (3.26), (3.27), (3.28), (3.32) і (3.33) ми маємо

$$\sum_{j\in I_4(\varepsilon;N)} \|f-s_N^{\varepsilon}\|^p_{L_{p;\alpha,\beta}\left(D_j^N\right)} \leqslant \left((2k_1^p+1)\varepsilon^p+o(1)\right)N^{-p}, \qquad N\to\infty.$$

Поєднуючи оцінки (3.36), (3.37), (3.38), (3.39) з останньою нерівністю, отримаємо

$$\begin{aligned}
&\|f-s_N^{\varepsilon}\|^p_{L_{p;\alpha,\beta}(D)}\\
&\quad\leqslant \frac{\sigma^p_{p;\alpha,\beta;2}}{2^p\left(1-23\varepsilon-2\mu\left(G_{0;2\varepsilon}\right)\right)^p N^p}\left\|\sqrt{H}\right\|^p_{L_{\frac{p}{p+1}}(D)}+\frac{k_4\varepsilon+\mu\left(G_{0;2\varepsilon}\right)\cdot(2k_1+\varepsilon)^p}{N^p}\\
&\quad+\frac{10\left(\max\{\alpha;\beta\}\right)^p(k_3+2)^p\,\varepsilon^p+(2k_1+1)^p\varepsilon^p+o(1)}{N^p}, \qquad N\to\infty.
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{N\to\infty} N^p\cdot\|f-s_N^{\varepsilon}\|^p_{L_{p;\alpha,\beta}(D)}\\
&\qquad\leqslant \frac{\sigma_{p;\alpha,\beta;2}}{2\left(1-23\varepsilon-2\mu\left(G_{0;2\varepsilon}\right)\right)}\left\|\sqrt{H}\right\|_{L_{\frac{p}{p+1}}(D)}+k_4\varepsilon+\mu\left(G_{0;2\varepsilon}\right)\cdot(2k_1+\varepsilon)^p\\
&\qquad\quad+10\left(\max\{\alpha;\beta\}\right)^p(k_3+2)^p\,\varepsilon^p+(2k_1+1)^p\varepsilon^p.
\end{aligned}$$

З останньої нерівності випливає шукана нерівність (3.36).

3.3.4. Доведення оцінки знизу для асимптотичної поведінки величини $R_N\left(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\right)$

Для доведення оцінки знизу в теоремі 3.3.1 нам знадобиться наступна лема, яка є миттєвим наслідком леми 3.3.3.

Лема 3.3.6. *Нехай T – довільний трикутник. Тоді для будь-якої функції $f \in C^2(T)$, $H(f;x,y) \geqslant K > 0$ на T, існує константа $\Upsilon_f > 0$, яка не залежить від T, і така, що*

$$E(f, P_1)_{L_{p;\alpha,\beta}(T)} \geqslant K\Upsilon_f (diam\, T)^2 |T|^{1/p}.$$

Нехай $1 \leqslant p < \infty$ і $\alpha, \beta > 0$ є заданими числами. Доведемо, що для довільної функції $f \in C^2(D)$ з невід'ємним гесіаном виконується нерівність

$$\liminf_{N\to\infty} N \cdot R_N\left(f, L_{p;\alpha,\beta}(D)\right) \geqslant \frac{\sigma_{p;\alpha,\beta;2}}{2} \left\|\sqrt{H}\right\|_{L_{\frac{p}{p+1}}(D)}. \tag{3.40}$$

Для $\varepsilon > 0$ означимо множини A_ε і F_ε наступним чином

$$A_\varepsilon := \{(x,y) \in D \ : \ H(f;x,y) < \varepsilon\}$$

$$F_\varepsilon := D \setminus A_\varepsilon = \{(x,y) \in D \ : \ H(f;x,y) \geqslant \varepsilon\}.$$

Для трикутника T на площині позначимо через $\operatorname{diam} T$ довжину його найдовшої сторони, а через $|T|$ – його площу. Також, через U_T позначимо довільну точку всередині T.

Нехай $N \in \mathbb{N}$ і $\triangle = \{T_j\}_{j=1}^N \in \mathfrak{D}_N$ – довільна тріангуляція квадрата D. Будемо розрізняти в тріангуляції $\triangle$ декілька типів трикутників: "звичайні", "вузькі", "дуже довгі", а також трикутники, де гесіан функції f є достатньо малим. Для $N \in \mathbb{N}$ позначимо $I_N := \{1, \ldots, N\}$ і означимо п'ять підмножин множини I_N:

- $M_1(\triangle;\varepsilon) := \{j \in I_N \ : \ T_j \subset A_{2\varepsilon}\}$;
- $M_2(\triangle;\varepsilon) := \left\{j \in I_N \ : \ T_j \subset F_\varepsilon, \ \dfrac{(\operatorname{diam} T_j)^2 \omega_2(f, \operatorname{diam} T_j)}{\sqrt{H(f; U_{T_j})}|T_j|} \leqslant \dfrac{\varepsilon \sigma_{p;\alpha,\beta;2}}{4\max\{\alpha;\beta\}}\right\}$;
- $M_3(\triangle;\varepsilon) := \left\{j \in I_N \ : \ T_j \subset F_\varepsilon, \ j \notin M_2(\triangle;\varepsilon), \ \operatorname{diam} T_j \leqslant \varepsilon N^{-1/4}\right\}$;
- $M_4(\triangle;\varepsilon) := \left\{j \in I_N \ : \ T_j \subset F_\varepsilon, \ \operatorname{diam} T_j > \varepsilon N^{-1/4}\right\}$;
- $M_5(\triangle;\varepsilon) := \{j \in I_N \ : \ T_j \cap A_\varepsilon \neq \emptyset, \ T_j \cap F_{2\varepsilon} \neq \emptyset\}$.

За означенням, кожен індекс $j \in I_N$ належить рівно одній множині $M_k(\triangle;\varepsilon)$, $k = 1, \ldots, 5$.

Зауважимо, що множина $M_3(\triangle;\varepsilon)$ складається з "вузьких" трикутників, а множини $M_4(\triangle;\varepsilon)$ і $M_5(\triangle;\varepsilon)$ – з "дуже довгих" трикутників. В наступних трьох твердженнях ми покажемо, що сукупна площа таких "поганих" трикутників в "майже" оптимальній тріангуляції $\triangle$ є відносно малою.

Лема 3.3.7. *Нехай* $\{\triangle_N\}_{N=1}^{\infty}$ *– послідовність тріангуляцій* $\triangle_N = \left\{T_j^N\right\}_{i=1}^{N} \in \mathfrak{D}_N$ *квадрата* D *і* $\varepsilon > 0$. *Якщо*

$$\liminf_{N\to\infty}\left(N \cdot \inf_{s\in\mathcal{S}(\triangle_N)} \|f - s\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)}\right) < \infty, \tag{3.41}$$

тоді для всіх достатньо великих N

$$\sum_{j\in M_3(\triangle_N;\varepsilon)} \left|T_j^N\right| < \varepsilon. \tag{3.42}$$

Доведення. Припустимо, що існує підпослідовність $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральних чисел така, що $N_k \to \infty$, коли $k \to \infty$, і

$$\sum_{j\in M_3(\triangle_{N_k};\varepsilon)} \left|T_j^{N_k}\right| \geqslant \varepsilon. \tag{3.43}$$

Без зменшення загальності будемо вважати, що $N_k = k$ для $k \in \mathbb{N}$. Застосовуючи лему 3.3.6 і визначення множини $M_3(\triangle_N;\varepsilon)$, для $N \in \mathbb{N}$ і $j \in M_3(\triangle_N;\varepsilon)$, ми отримаємо

$$\begin{aligned} E(f,\mathcal{P}_1)_{L_{p;\alpha,\beta}\left(T_j^N\right)} &\geqslant \varepsilon\Upsilon_f \left(\operatorname{diam} T_j^N\right)^2 \left|T_j^N\right|^{1/p} \\ &> \varepsilon\Upsilon_f \cdot \frac{\varepsilon\sigma_{p;\alpha,\beta;2}}{4\max\{\alpha;\beta\}} \cdot \frac{H^{1/2}\left(f;U_{T_j^N}\right)\left|T_j^N\right|^{1+1/p}}{\omega_2\left(f,\operatorname{diam} T_j^N\right)} \\ &=: \frac{c_2 H^{1/2}\left(f;U_{T_j^N}\right)\left|T_j^N\right|^{1+1/p}}{\omega_2\left(f,\operatorname{diam} T_j^N\right)}. \end{aligned}$$

Тут $c_2 = c_2(\varepsilon)$ є константою, яка не залежить від N. Тоді

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(\triangle_N) &:= \inf_{s\in\mathcal{S}(\triangle_N)} \|f-s\|^p_{L_{p;\alpha,\beta}(D)} \geqslant \sum_{j=1}^{N} E^p\left(f,\mathcal{P}_1\right)_{L_{p;\alpha,\beta}\left(T_j^N\right)} \\
&\geqslant \sum_{j\in M_3(\triangle_N;\varepsilon)} E^p(f,\mathcal{P}_1)_{L_{p;\alpha,\beta}\left(T_j^N\right)} > c_2^p \sum_{j\in M_3(\triangle_N;\varepsilon)} \frac{H^{p/2}\left(f;U_{T_j^N}\right)\left|T_j^N\right|^{1+1/p}}{\omega_2\left(f,\operatorname{diam} T_j^N\right)} \\
&\geqslant \frac{c_2^p\varepsilon^{p/2}}{\omega_2^p\left(f,\varepsilon N^{-1/4}\right)} \sum_{j\in M_3(\triangle_N;\varepsilon)} \left|T_j^N\right|^{p+1}.
\end{aligned}
$$

Використовуючи опуклість функції t^{p+1} і припущення (3.43), ми матимемо

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(\triangle_N) &> \frac{c_2^p\varepsilon^{p/2}}{\omega_2^p\left(f,\varepsilon N^{-1/4}\right)} \sum_{j\in M_3(\triangle_N;\varepsilon)} \left|T_j^N\right|^{p+1} \geqslant \frac{c_2^p\varepsilon^{1+3p/2}\left(\#M_3(\triangle_N;\varepsilon)\right)^{-p}}{\omega_2^p\left(f,\varepsilon N^{-1/4}\right)} \\
&\geqslant \frac{c_2^p\varepsilon^{1+3p/2}}{N^p\omega_2^p\left(f,\varepsilon N^{-1/4}\right)}.
\end{aligned}
$$

Отже,

$$
\liminf_{N\to\infty} N\cdot \inf_{s\in\mathcal{S}(\triangle_N)} \|f-s\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)} \geqslant c_2\varepsilon^{3/2+1/p}\cdot \lim_{N\to\infty}\omega_2^{-1}\left(f,\varepsilon N^{-1/4}\right) = +\infty.
$$

Остання нерівність суперечить припущенню (3.41). Лема доведена. □

Лема 3.3.8. *Нехай* $\{\triangle_N\}_{N=1}^{\infty}$ *– послідовність тріангуляцій* $\triangle_N=\left\{T_j^N\right\}_{j=1}^{N}\in\mathfrak{D}_N$ *квадрата* D *і* $\varepsilon>0$. *Якщо виконується нерівність* (3.41), *то для всіх достатньо великих* $N\in\mathbb{N}$ *також має місце нерівність* (3.42).

Доведення. Припустимо, що існує підпослідовність $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральних чисел така, що $N_k\to\infty$, коли $k\to\infty$, і виконується нерівність (3.43). Без зменшення загальності будемо вважати, що $N_k=k$, $k\in\mathbb{N}$. За лемою 3.3.4 і визначенням множини $M_4(\triangle_N;\varepsilon)$ для всіх $N\in\mathbb{N}$ маємо

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(\triangle_N) &:= \inf_{s\in\mathcal{S}(\triangle_N)} \|f-s\|^p_{L_{p;\alpha,\beta}(D)} \geqslant \sum_{j\in M_4(\triangle_N;\varepsilon)} E^p(f,\mathcal{P}_1)_{L_{p;\alpha,\beta}\left(T_j^N\right)} \\
&\geqslant \sum_{j\in M_4(\triangle_N;\varepsilon)} \varepsilon^p\Upsilon_f^p\left(\operatorname{diam} T_j^N\right)^{2p}\left|T_j^N\right| \\
&\geqslant \varepsilon^{3p}\Upsilon_f^p N^{-p/2} \sum_{j\in M_4(\triangle_N;\varepsilon)} \left|T_j^N\right| \geqslant \varepsilon^{3p+1}\Upsilon_f^p N^{-p/2}.
\end{aligned}
$$

Тому

$$
\liminf_{N\to\infty} N\cdot \inf_{s\in\mathcal{S}(\triangle_N)} \|f-s\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)} \geqslant \varepsilon^{3+1/p}\Upsilon_f \lim_{N\to\infty}\sqrt{N} = +\infty,
$$

що суперечить припущенню (3.41). Лема доведена. □

Лема 3.3.9. *Нехай* $\{\triangle_N\}_{N=1}^{\infty}$ *є послідовністю тріангуляцій* $\triangle_N = \left\{T_j^N\right\}_{j=1}^{N} \in \mathfrak{D}_N$ *квадрата* D *і* $\varepsilon > 0$. *Якщо виконується нерівність* (3.41), *то для всіх достатньо великих* N *має місце нерівність* (3.42).

Доведення. Нехай δ_0 є мінімальне додатне число таке, що $\omega(H, \delta_0) = \varepsilon/6$. Припустимо, що існує підпослідовність $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральних чисел така, що $N_k \to \infty$, коли $k \to \infty$, і виконується нерівність (3.43). Без зменшення загальності вважатимемо, що $N_k = k$ для $k \in \mathbb{N}$.

За означенням множини $M_5(\triangle_N; \varepsilon)$ для всіх $j \in M_5(\triangle_N; \varepsilon)$ існують точки $L_1, L_2 \in T_j^N$ такі, що $H(f; L_1) < \varepsilon$ і $H(f; L_2) \geqslant 2\varepsilon$. Через L позначимо точку на відрізку L_1L_2, в якій $H(f; L) = 3\varepsilon/2$. Через B ми також позначимо диск з центром в точці L і радіусом δ_0. Вочевидь, $D \cap B \subset A_{2\varepsilon} \cap F_{\varepsilon}$, а тому $H(f; x, y) \geqslant \varepsilon$ в кожній точці $(x, y) \in D \cap B$. За лемою 3.3.4 існує трикутник $\widetilde{T}_j^N \subset B \cap T_j^N$ такий, що $\left|\widetilde{T}_j^N\right| \geqslant K_{\delta_0}^2 \left|T_j^N\right|$ і $\operatorname{diam} \widetilde{T}_j^N \geqslant K_{\delta_0} \operatorname{diam} T_j^N$, де константа K_{δ_0} була означена в лемі 3.3.4. Крім того, $\operatorname{diam} T_j^N \geqslant 2\delta_0$. Тоді за лемою 3.3.6,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(\triangle_N) \; &:= \inf_{s \in \mathcal{S}(\triangle_N)} \|f - s\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)}^p \geqslant \sum_{j \in M_5(\triangle_N;\varepsilon)} E^p(f, \mathcal{P}_1)_{L_{p;\alpha,\beta}\left(T_j^N\right)} \\
&\geqslant \sum_{j \in M_5(\triangle_N;\varepsilon)} E^p(f, \mathcal{P}_1)_{L_{p;\alpha,\beta}\left(T_j^N\right)} \\
&\geqslant \sum_{j \in M_5(\triangle_N;\varepsilon)} E^p(f, \mathcal{P}_1)_{L_{p;\alpha,\beta}\left(\widetilde{T}_j^N\right)} \geqslant \sum_{j \in M_5(\triangle_N;\varepsilon)} \varepsilon^p \Upsilon_f^p \left(\operatorname{diam} \widetilde{T}_j^N\right)^{2p} \left|\widetilde{T}_j^N\right| \\
&\geqslant \varepsilon^p \Upsilon_f^p K_{\delta_0}^{2p+2} \sum_{j \in M_5(\triangle_N;\varepsilon)} \left(\operatorname{diam} T_j^N\right)^{2p} \left|T_j^N\right| \\
&\geqslant \varepsilon^p \Upsilon_f^p K_{\delta_0}^{2p+2} (2\delta_0)^{2p} \sum_{j \in M_5(\triangle_N;\varepsilon)} \left|T_j^N\right| \geqslant \varepsilon^{p+1} \Upsilon_f^p K_{\delta_0}^{2p+2} (2\delta_0)^{2p}.
\end{aligned}
$$

Тому

$$
\liminf_{N \to \infty} N \cdot \inf_{s \in \mathcal{S}(\triangle_N)} \|f - s\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)} = +\infty,
$$

що суперечить припущенню (3.41). Лема доведена. □

Тепер ми маємо всі необхідні елементи для доведення оцінки знизу (3.40). Для цього нам необхідно показати, що для будь-якої послідовності $\{\triangle_N\}_{N=1}^{\infty}$ тріангуляцій $\triangle_N = \left\{T_j^N\right\}_{j=1}^{N}$ квадрата D має місце нерівність

$$
\liminf_{N \to \infty} N \cdot \inf_{s \in \mathcal{S}(\triangle_N)} \|f - s\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)} \geqslant \frac{\sigma_{p;\alpha,\beta;2}}{2} \left\|\sqrt{H}\right\|_{L_{\frac{p}{p+1}}(D)}.
$$

Не зменшуючи загальності, будемо розглядати лише ті послідовності тріангуляцій $\{\triangle_N\}_{N=1}^{\infty}$, для яких

$$\liminf_{N\to\infty} N \cdot \inf_{s\in\mathcal{S}(\triangle_N)} \|f-s\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)} < \infty.$$

Для кожного $j \in M_2(\triangle_N;\varepsilon)$ замінимо функцію f на трикутнику T_j^N її поліномом Тейлора другого порядку $f_{N,j}$, побудованому в точці $U_{T_j^N}$. В силу леми 3.3.5 маємо

$$\begin{aligned}\|f-f_{N,j}\|_{L_{p;\alpha,\beta}(T_j^N)} &\leqslant \max\{\alpha;\beta\}\|f-f_{N,i}\|_{L_\infty\left(T_j^N\right)} \left|T_j^N\right|^{1/p} \\ &\leqslant 2\max\{\alpha;\beta\} \left(\operatorname{diam} T_j^N\right)^2 \omega_2\left(f, \operatorname{diam} T_j^N\right) \left|T_j^N\right|^{1/p}.\end{aligned}$$

За визначенням множини $M_2(\triangle_N;\varepsilon)$,

$$\|f-f_{N,j}\|_{L_{p;\alpha,\beta}\left(T_j^N\right)} \leqslant \frac{\varepsilon\,\sigma_{p;\alpha,\beta;2}}{2} \cdot H^{1/2}\left(f;U_{T_j^N}\right) \left|T_j^N\right|^{1+1/p}.$$

Застосовуючи нерівність трикутника і наслідок 3.3.2, ми отримаємо

$$\begin{aligned}E(f,\mathcal{P}_1)_{L_{p;\alpha,\beta}\left(T_j^N\right)} &\geqslant E(f_{N;j},\mathcal{P}_1)_{L_{p;\alpha,\beta}\left(T_j^N\right)} - \|f-f_{N;j}\|_{L_{p;\alpha,\beta}\left(T_j^N\right)} \\ &\geqslant \frac{(1-\varepsilon)\sigma_{p;\alpha,\beta;2}}{2} \cdot H^{1/2}\left(f;U_{T_j^N}\right)\left|T_j^N\right|^{1+1/p}.\end{aligned}$$

Тепер

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\triangle_N) &:= \inf_{s\in\mathcal{S}(\triangle_N)} \|f-s\|^p_{L_{p;\alpha,\beta}(D)} \geqslant \sum_{j\in M_2(\triangle_N;\varepsilon)} E^p(f,\mathcal{P}_1)_{L_{p;\alpha,\beta}\left(T_j^N\right)} \\ &\geqslant \frac{(1-\varepsilon)^p\sigma^p_{p;\alpha,\beta;2}}{2^p} \sum_{j\in M_2(\triangle_N;\varepsilon)} H^{p/2}\left(f;U_{T_j^N}\right)\left|T_j^N\right|^{p+1}.\end{aligned}$$

Застосовуючи нерівності Йєнсена для функції t^{p+1}, отримаємо

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\triangle_N) &\geqslant \frac{(1-\varepsilon)^p\sigma^p_{p;\alpha,\beta;2}}{2^p\left(\#M_2(\triangle_N;\varepsilon)\right)^p} \left(\sum_{j\in M_2(\triangle_N;\varepsilon)} H^{\frac{p}{2(p+1)}}\left(f;U_{T_j^N}\right)\left|T_j^N\right|\right)^{p+1} \\ &\geqslant \frac{(1-\varepsilon)^p\sigma^p_{p;\alpha,\beta;2}}{2^pN^p} \left(\sum_{j\in M_2(\triangle_N;\varepsilon)} H^{\frac{p}{2(p+1)}}\left(f;U_{T_j^N}\right)\left|T_j^N\right|\right)^{p+1}.\end{aligned}$$

Поділимо кожен з трикутників T_j^N, $j \in I_N \setminus M_2(\triangle_N;\varepsilon)$, на n_j^N менших трикутників $T_{j,k}^N$, $k=1,\ldots,n_j^N$, пронумерованих в довільному порядку і таких, що $\operatorname{diam} T_{j,k}^N \to 0$, коли $N\to\infty$, для всіх $k=1,\ldots,n_j^N$. Для кожного $j \in M_2(\triangle_N;\varepsilon)$

позначимо $n_j^N := 1$ і $T_{j,1}^N := T_j^N$. Відзначимо, що $\bigcup\limits_{j=1}^{N}\bigcup\limits_{k=1}^{n_j^N} T_{j,k}^N = D$ і для всіх можливих пар j і k випливає, що $\operatorname{diam} T_{j,k}^N \to 0$, коли $N\to\infty$. Тоді

$$\sum_{j\in M_1(\triangle_N;\varepsilon)}\sum_{k=1}^{n_j^N} H^{\frac{p}{2(p+1)}}\left(f;U_{T_{j,k}^N}\right)\left|T_{j,k}^N\right| \leqslant (2\varepsilon)^p \sum_{j\in M_1(\triangle_N;\varepsilon)}\left|T_j^N\right| \leqslant (2\varepsilon)^p\cdot 1 = (2\varepsilon)^p.$$

Також в силу лем 3.3.7, 3.3.8 і 3.3.9 для всіх достатньо великих $N\in\mathbb{N}$ ми отримаємо, що для $r=3,4,5$

$$\sum_{j\in M_r(\triangle_N;\varepsilon)}\sum_{k=1}^{n_j^N} H^{\frac{p}{2(p+1)}}\left(f;U_{T_{j,k}^N}\right)\left|T_{j,k}^N\right| \leqslant \|H\|_{L_\infty(D)}^{\frac{p}{2(p+1)}} \sum_{j\in M_r(\triangle_N;\varepsilon)}\left|T_j^N\right| \leqslant \varepsilon\|H\|_{L_\infty(D)}^{\frac{p}{2(p+1)}}.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\triangle_N) &\geqslant \left(\frac{(1-\varepsilon)\sigma_{p;\alpha,\beta;2}}{2N}\right)^p\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n_j^N} H^{\frac{p}{2(p+1)}}\left(f;U_{T_{j,k}^N}\right)\left|T_{j,k}^N\right| - 3\varepsilon\|H\|_{L_\infty(D)}^{\frac{p}{2(p+1)}} - (2\varepsilon)^p\right)^{p+1}\\ &= \left(\frac{\sigma_{p;\alpha,\beta;2}}{2N}\right)^p\left(\int_D H^{\frac{p}{2(p+1)}}(f;x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + o(1) - 3\varepsilon\|H\|_{L_\infty(D)}^{\frac{p}{2(p+1)}} - (2\varepsilon)^p\right)^{p+1},\end{aligned}$$

коли $N\to\infty$. Отже,

$$\liminf_{N\to\infty} N^p\cdot\inf_{s\in S(\triangle_N)}\|f-s\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)}^p \geqslant \frac{\sigma_{p;\alpha,\beta;2}^p}{2^p}\left(\int_D H^{\frac{p}{2(p+1)}}(f;x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 3\varepsilon\|H\|_{L_\infty(D)}^{\frac{p}{2(p+1)}} - (2\varepsilon)^p\right)^{p+1}.$$

Оскільки ε є довільним, то ми отримуємо шукану нерівність (3.40).

3.4. Задача трансфінітної інтерполяції за допомогою гармонічних сплайнів

В цьому підрозділі ми дослідимо похибку найкращого наближення гармонічними сплайнами на прямокутних розбиттях області визначення функцій з обмеженим лапласіаном. Результати роботи опубліковано в [280, 332].

Нехай $d\in\mathbb{N}$, $b_1,\ldots,b_d$ – задані додатні числа, $\Pi = [0,b_1]\times\ldots\times[0,b_d]$. Для $N\in\mathbb{N}$ і $j=1,2,\ldots,d$ через $P_N^{*,j}$ позначимо розбиття множини Π, що складається з N рівних d-вимірних паралелепіпедів, які отримано з Π його розбиттям за допомогою $(N-1)$-єї $(d-1)$-вимірної гіперплощини, ортогональної до осі Ox_j.

Вочевидь, $P_N^{*,j} = P_{\mathbf{m}_j}^*$, де $\mathbf{m}_j := (1,\ldots,1,N,1,\ldots,1)$ і число N розташовано на позиції з індексом j. Наступний результат встановлює точну асимптотичну поведінку похибки наближення функцій з класу W_∞^Δ за допомогою гармонічних сплайнів на розбиттях $P_N^{*,j}$.

Теорема 3.4.1. *Нехай $d \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$ і $s' = s/(s-1)$. Тоді для кожного $j = 1,\ldots,d$ виконується гранична рівність*

$$\lim_{N\to\infty} N^2 \cdot \mathcal{E}_{P_N^{*,j}}\left(W_\infty^\Delta\right)_s = \lim_{N\to\infty} N^2 \cdot \mathcal{E}_{P_N^{*,j}}\left(W_{s'}^\Delta\right)_1 = \|\sigma_j\|_{L_s(\Pi)},$$

де $\sigma_j(\mathbf{x}) = x_j\left(b_j - x_j\right)/2$, $\mathbf{x} \in \Pi$.

Наступне твердження встановлює порядок точної асимптотики величин $\mathcal{E}_N\left(W_\infty^\Delta\right)_s$ і $\mathcal{E}_N\left(W_{s'}^\Delta\right)_1$, коли $N \to \infty$.

Теорема 3.4.2. *Нехай $d \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$ і $s' = s/(s-1)$. Тоді існують константи $C_1, C_2 > 0$ такі, що $C_1 \leqslant N^2 \cdot \mathcal{E}_N\left(W_\infty^\Delta\right)_s \leqslant C_2$ для всіх достатньо великих $N \in \mathbb{N}$.*

Цей результат вказує на те, що асимптотична поведінка величин $\mathcal{E}_{P_N^{*,j}}\left(W_\infty^\Delta\right)_s$ та $\mathcal{E}_{P_N^{*,j}}\left(W_{s'}^\Delta\right)_1$ є $O\left(N^{-2}\right)$, коли $N \to \infty$, а, отже, не залежить від розмірності простору. Даний результат цікаво порівняти з асимптотичною поведінкою величин $\mathcal{E}_{P_N^*}\left(W_\infty^\Delta\right)_s$ та $\mathcal{E}_{P_N^*}\left(W_{s'}^\Delta\right)_1$, де $P_N^* \in \mathcal{P}_N$ є прямокутним розбиттям, що складається з $N = M^d$, $M \in \mathbb{N}$, рівних d-вимірних паралелепіпедів, подібних до Π, яка залежить від вимірності простору. Дійсно, з огляду на [26, наслідки 5, 6]:

$$\mathcal{E}_{P_N^*}\left(W_\infty^\Delta\right)_s = \mathcal{E}_{P_N^*}\left(W_{s'}^\Delta\right)_1 = O\left(N^{-2/d}\right), \qquad \text{коли} \quad N \to \infty.$$

Це зауваження наводить на думку про справедливість гіпотези про оптимальність розбиттів $P_N^{*,j}$ в задачі (3.5). Більш строго, *якщо $d \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, $s' = s/(s-1)$, то*

$$\mathcal{E}_N\left(W_\infty^\Delta\right)_s = \mathcal{E}_N\left(W_{s'}^\Delta\right)_1 = \min_{j=1,2,\ldots,d} \mathcal{E}_{P_N^{*,j}}\left(W_\infty^\Delta\right)_s. \tag{3.44}$$

Гіпотеза (3.44) справджується для $d = 1$ (див., наприклад, [94, §4,7]). В цьому випадку Δ є оператором диференціювання другого порядку, а $P_N^{*,1}$ є розбиттям відрізку $[0, b_1]$ за допомогою $(N+1)$-еї рівновіддаленої точки $0, \frac{b_1}{N}, \ldots, \frac{(N-1)b_1}{N}, b_1$.

Ми доведемо цю гіпотезу в наступному частинному випадку.

Теорема 3.4.3. *Нехай $d = 2$. Тоді для всіх $N \in \mathbb{N}$ має місце рівність*

$$\mathcal{E}_N \left(W^{\Delta}_{\infty}\right)_1 = \min \left\{ \mathcal{E}_{P_N^{*,1}} \left(W^{\Delta}_{\infty}\right)_1 ; \mathcal{E}_{P_N^{*,2}} \left(W^{\Delta}_{\infty}\right)_1 \right\}.$$

Перейдемо до розгляду найкращого нелінійного наближення трансфінітними інтерполяційними гармонічними сплайнами. Застосовуючи теорему 3.4.1, ми можемо покращити оцінку (3.8) за рахунок розгляду розбиттів $P_N^{*,j}$, які не є допустимими в сенсі означення 3.7. Наступне твердження показує, що величина $R_N^t(f)_s$ (див. означення 3.6) прямує до нуля не повільніше за N^{-2}, коли $N \to \infty$.

Наслідок 3.4.1. *Нехай $1 \leqslant s \leqslant \infty$. Тоді для всіх функцій $f \in C^2(\Pi)$*

$$\limsup_{N \to \infty} N^2 \cdot R_N^t(f)_s \leqslant \|\Delta f\|_{L_\infty(\Pi)} \cdot \min_{j=1,2,\dots,d} \|\sigma_j\|_{L_s(\Pi)},$$

де функція σ_j була означена в теоремі 3.4.1.

Перейдемо до доведення основних результатів цього підрозділу.

Доведення теореми 3.4.1. Спочатку розглянемо випадок $s < \infty$. Нехай $N \in \mathbb{N}$ і додатні числа $b_1, \dots, b_d$ є заданими. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $j = 1$. Розглянемо d-вимірний паралелепіпед $\Pi_1 := \left[0, N^{-1} b_1\right] \times \dots \times [0, b_d]$. З твердження 3.1.1 випливає, що

$$\mathcal{E}_{P_N^{*,1}} \left(W^{\Delta}_{\infty}\right)_s = N^{1/s} \cdot \|f_{N,d}\|_{L_s(\Pi_1)},$$

де функція

$$f_{N,d}(\mathbf{x}) := \int_{\Pi_1} G_{\Pi_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, \mathrm{d}\mathbf{y}, \qquad \mathbf{x} \in \Pi_1,$$

є єдиним розв'язком однорідної задачі Діріхле для рівняння Пуасона:

$$\begin{cases} \Delta f_{N,d}(\mathbf{x}) = 1, & \mathbf{x} \in \operatorname{int} \Pi_1, \\ f_{N,d}(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \partial \Pi_1. \end{cases}$$

Використовуючи добре відомий метод розділення змінних (див., наприклад, [250, §4.1]), ми можемо зобразити розв'язок цієї задачі у вигляді кратного ряда Фур'є: для $\mathbf{x} \in \operatorname{int} \Pi_1$

$$\begin{aligned} f_{N,d}(\mathbf{x}) = -\frac{4^d}{\pi^{d+2}} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_d=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2n_1+1)\pi x_1}{N^{-1} b_1}\right)}{2n_1+1} \prod_{j=2}^{d} \frac{\sin\left(\frac{(2n_j+1)\pi x_j}{b_j}\right)}{2n_j+1} \\ \times \left(\left(\frac{2n_1+1}{N^{-1} b_1}\right)^2 + \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{2n_j+1}{b_j}\right)^2 \right)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Оскільки $f_{N,d} \in L_2(\Pi)$ (див. [250, §6.2]), то за теоремою 4.1 в [341] можемо зробити висновок, що кратний ряд в правій частині (3.45) збігається до $f_{N,d}$ в смислі Прингсгейма (див. [341]) в метриці простору L_2. Нагадаємо, що базою для збіжності в смислі Прингсгейма є $\min\{n_1; n_2; \ldots; n_d\} \to \infty$. З іншого боку, цей ряд збігається абсолютно. Дійсно, застосовуючи нерівність між середнім геометричним і середнім арифметичним, отримаємо

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_d=0}^{\infty}\frac{\left|\sin\left(\frac{(2n_1+1)\pi x_1}{N^{-1}b_1}\right)\right|}{2n_1+1}\prod_{j=2}^{d}\frac{\left|\sin\left(\frac{(2n_j+1)\pi x_j}{b_j}\right)\right|}{2n_j+1}$$
$$\times\left(\left(\frac{2n_1+1}{N^{-1}b_1}\right)^2+\sum_{j=2}^{d}\left(\frac{2n_j+1}{b_j}\right)^2\right)^{-1}$$
$$\leqslant \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_d=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{d}\frac{1}{2n_j+1}\times\left(\left(\frac{2n_1+1}{N^{-1}b_1}\right)^2+\sum_{j=2}^{d}\left(\frac{2n_j+1}{b_j}\right)^2\right)^{-1}$$
$$\leqslant \frac{1}{d}\left(\frac{b_1\ldots b_d}{N}\right)^{2/d}\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_d=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{d}\frac{1}{(2n_j+1)^{1+2/d}}$$
$$= \frac{1}{d}\left(\frac{b_1\ldots b_d}{N}\right)^{2/d}\prod_{j=1}^{d}\sum_{n_j=0}^{\infty}\frac{1}{(2n_j+1)^{1+2/d}} < \infty.$$

Тому за [109, §34.1] ми можемо розглядати кратний ряд (3.45) як ряд повторний.

Спростимо вираз (3.45) для функції $f_{N,d}$. Для цього розглянемо функцію

$$g(x_d) = \sum_{n_d=0}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{(2n_d+1)\pi x_d}{b_d}\right)}{(2n_d+1)\left(A^2+\left(\frac{2n_d+1}{b_d}\right)^2\right)},\qquad x_d\in(0,b_d),$$

де $A^2 = \left(\frac{2n_1+1}{N^{-1}b_1}\right)^2 + \left(\frac{2n_2+1}{b_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2n_{d-1}+1}{b_{d-1}}\right)^2$. Вочевидь, функція g є двічі диференційовною за кожною змінною і

$$g''(x_d) - \pi^2A^2g(x_d) = -\pi^2\sum_{n_d=0}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{(2n_d+1)\pi x_d}{b_d}\right)}{2n_d+1}.$$

Зауважимо, що для кожного $x_d \in (0, b_d)$ справджується рівність

$$\sum_{n_d=0}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{(2n_d+1)\pi x_d}{b_d}\right)}{2n_d+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Ряд в лівій частині останньої рівності є рядом Фур'є сталої функції $\pi/4$ на інтервалі $(0, b_d)$ за системою функцій $\left\{\sin\left(\frac{n\pi x_d}{b_d}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$. А отже функція g задовольняє диференціальному рівнянню другого порядку

$$g''(x_d) - \pi^2 A^2 g(x_d) = -\frac{\pi^3}{4}, \qquad x_d \in (0, b_d),$$

з граничними умовами $g(0) = g(b_d) = 0$. Це рівняння має єдиний розв'язок

$$g(x_d) = \frac{\pi}{4A^2}\left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{\pi A(b_d - 2x_d)}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi A b_d}{2}\right)}\right], \qquad x_d \in (0, b_d).$$

Таким чином, для будь-якого $\mathbf{x} \in \Pi_1$, має місце зображення

$$\begin{aligned} & f_{N,d}(\mathbf{x}) \\ & = -\frac{4^{d-1}}{\pi^{d+1}} \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_{d-1}=0}^{\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{(2n_1+1)\pi x_1}{N^{-1}b_1}\right)}{2n_1+1}\prod_{j=2}^{d-1}\frac{\sin\left(\frac{(2n_j+1)\pi x_j}{b_j}\right)}{2n_j+1}\right) \\ & \quad \times\left(\left(\frac{2n_1+1}{N^{-1}b_1}\right)^2 + \sum_{j=2}^{d-1}\left(\frac{2n_j+1}{b_j}\right)^2\right)^{-1} \\ & \quad \times\left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{\pi(b_d-2x_d)}{2}\sqrt{\left(\frac{2n_1+1}{N^{-1}b_1}\right)^2 + \sum\limits_{j=2}^{d-1}\left(\frac{2n_j+1}{b_j}\right)^2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi b_d}{2}\sqrt{\left(\frac{2n_1+1}{N^{-1}b_1}\right)^2 + \sum\limits_{j=2}^{d-1}\left(\frac{2n_j+1}{b_j}\right)^2}\right)}\right]. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Розглянемо функцію $\widehat{f}_N(\mathbf{x}) = 2^{-1}x_1\left(x_1 - N^{-1}b_1\right)$, $\mathbf{x} \in \Pi_1$. Вочевидь, $\left\|\widehat{f}_N\right\|_{L_s(\Pi_1)} = N^{-2-1/s}\left\|\sigma_1\right\|_{L_s(\Pi)}$. Доведемо, що

$$\left\|f_{N,d} - \widehat{f}_N\right\|_{L_s(\Pi_1)} = o\left(N^{-2-1/s}\right), \qquad \text{коли} \quad N \to \infty. \tag{3.47}$$

Це означатиме, що величина $\left\|\widehat{f}_N\right\|_{L_s(\Pi_1)}$ має таку ж асимптотичну поведінку, що і величина $\|f_{N,d}\|_{L_s(\Pi_1)}$, коли $N \to \infty$.

По-перше, зазначимо, що різниця $g_N = f_{N,d} - \widehat{f}_N$ є розв'язком задачі Діріхле для рівняння Лапласа

$$\begin{cases} \Delta g_N(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \operatorname{int}\Pi_1, \\ g_N(\mathbf{x}) = -\widehat{f}_N(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial\Pi_1. \end{cases}$$

Отже, за принципом максимума (див. [250, §2.2]), маємо

$$\|g_N\|_{L_\infty(\Pi_1)} = \left\|\widehat{f}_N\right\|_{L_\infty(\partial\Pi_1)} = \frac{b_1^2}{8N^2}. \tag{3.48}$$

Далі, для всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$ розглянемо d-вимірний паралелепіпед

$$\Pi_{1,\varepsilon} := \left[0, N^{-1}b_1\right] \times [b_2\varepsilon, b_2(1-\varepsilon)] \times \ldots \times [b_d\varepsilon, b_d(1-\varepsilon)]\,.$$

Приймаючи до уваги тотожність $f_{N,1} \equiv \widehat{f}_N$, зображення (3.45) функції $f_{N,j-1}$, і спрощене зображення (3.46) функції $f_{N,j}$, $j = 2, \ldots, d$, отримаємо, що для $\mathbf{x} \in \Pi_{1,\varepsilon}$

$$\begin{aligned}
&|g_N(\mathbf{x})| \\
&\quad \leqslant \sum_{j=2}^{d} |f_{N,j}(\mathbf{x}) - f_{N,j-1}(\mathbf{x})| \\
&\quad = \sum_{j=2}^{d} \frac{4^{j-1}}{\pi^{j+1}} \left| \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_{j-1}=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2n_1+1)\pi x_1}{N^{-1}b_1}\right)}{2n_1+1} \prod_{k=2}^{j-1} \frac{\sin\left(\frac{(2n_k+1)\pi x_k}{b_k}\right)}{2n_k+1} \right. \\
&\qquad\qquad \times \left(\left(\frac{2n_1+1}{N^{-1}b_1}\right)^2 + \sum_{k=2}^{j-1} \left(\frac{2n_k+1}{b_k}\right)^2 \right)^{-1} \\
&\qquad\qquad \left. \times \frac{\cosh\left(\frac{\pi(b_j-2x_j)}{2}\sqrt{\left(\frac{2n_1+1}{N^{-1}b_1}\right)^2 + \sum_{k=2}^{j-1}\left(\frac{2n_k+1}{b_k}\right)^2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi b_j}{2}\sqrt{\left(\frac{2n_1+1}{N^{-1}b_1}\right)^2 + \sum_{k=2}^{j-1}\left(\frac{2n_k+1}{b_k}\right)^2}\right)} \right|
\end{aligned}$$

Застосовуючи нерівності $|\sin a| \leqslant 1$ і $\frac{\cosh a}{\cosh b} \leqslant 2e^{(|a|-|b|)}$, $a, b \in \mathbb{R}$, позначаючи $B := \min\{b_2, \ldots, b_d\}$ та використовуючи нерівність $|b_j - 2x_j| - b_j \leqslant -2\varepsilon B$, де $j = 2, \ldots, d$, ми бачимо з останньої нерівності, що для $\mathbf{x} \in \Pi_{1,\varepsilon}$,

$$\begin{aligned}
|g_N(\mathbf{x})| \leqslant \sum_{j=2}^{d} \frac{2^{2j-1}}{\pi^{j+1}} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_{j-1}=0}^{\infty} &\frac{\left(\left(\frac{2n_1+1}{N^{-1}b_1}\right)^2 + \sum_{k=2}^{j-1}\left(\frac{2n_k+1}{b_k}\right)^2\right)^{-1}}{(2n_1+1)(2n_2+1)\ldots(2n_{j-1}+1)} \\
&\times \exp\left(-\varepsilon\pi B\sqrt{\left(\frac{2n_1+1}{N^{-1}b_1}\right)^2 + \sum_{k=2}^{j-1}\left(\frac{2n_k+1}{b_k}\right)^2}\right).
\end{aligned}$$

Далі, за нерівністю Шварца і нерівностями $j \leqslant d$ і $\sqrt{d} \leqslant d$, маємо

$$\sqrt{\left(\frac{2n_1+1}{N^{-1}b_1}\right)^2 + \sum_{k=2}^{j-1}\left(\frac{2n_k+1}{b_k}\right)^2} \geqslant \frac{1}{d}\left(\frac{2n_1+1}{N^{-1}b_1} + \sum_{k=2}^{j-1}\frac{2n_k+1}{b_k}\right).$$

Поєднуючи останню нерівність з грубою оцінкою

$$\left(\frac{2n_1+1}{N^{-1}b_1}\right)^2+\sum_{k=2}^{j-1}\left(\frac{2n_k+1}{b_k}\right)^2>\left(\frac{2n_1+1}{N^{-1}b_1}\right)^2,$$

для $\mathbf{x}\in\Pi_{1,\varepsilon}$ отримаємо, що

$$|g_N(\mathbf{x})|<\sum_{j=2}^{d}\frac{2^{2j-1}b_1^2}{\pi^{j+1}N^2}\sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon\pi B(2n_1+1)}{dN^{-1}b_1}\right)}{(2n_1+1)^3}\cdot\prod_{k=2}^{j-1}\left(\sum_{n_k=0}^{\infty}\frac{\exp\left(\frac{-\varepsilon\pi B(2n_k+1)}{db_k}\right)}{2n_k+1}\right).$$

Нехай $\mu_{\varepsilon,1}:=1$ і для $k=2,\ldots,d-1$

$$\mu_{\varepsilon,k}:=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\exp\left(\frac{-\varepsilon\pi B(2l+1)}{db_k}\right)}{2l+1}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\exp\left(-\frac{\varepsilon\pi B}{db_k}\right)}{1-\exp\left(-\frac{\varepsilon\pi B}{db_k}\right)}\right),$$

(останнє співвідношення є наслідком з [144, формула 5.2.4.8]). Тоді для $\mathbf{x}\in\Pi_{1,\varepsilon}$,

$$|g_N(\mathbf{x})|<\sum_{j=2}^{d}\frac{2^{2j-1}b_1^2}{\pi^{j+1}N^2}\cdot\zeta(3)\cdot\exp\left(-\frac{\varepsilon\pi B}{dN^{-1}b_1}\right)\cdot\prod_{k=1}^{j-1}\mu_{\varepsilon,k}, \tag{3.49}$$

де $\zeta(z)$ є дзета-функцією від змінної z. Об'єднуючи нерівності (3.48) і (3.49), а також помічаючи, що

$$|\Pi_1\setminus\Pi_{1,\varepsilon}|=\frac{b_1\ldots b_d}{N}\cdot(1-(1-2\varepsilon)^{d-1})\leqslant\frac{2(d-1)b_1\ldots b_d}{N}\cdot\varepsilon,$$

матимемо

$$\begin{aligned}\|g_N\|_{L_s(\Pi_1)}^s &= \|g_N\|_{L_s(\Pi_1\setminus\Pi_{1,\varepsilon})}^s+\|g_N\|_{L_s(\Pi_{1,\varepsilon})}^s\\ &\leqslant \|g_N\|_{L_\infty(\Pi_1)}^s\cdot|\Pi_1\setminus\Pi_{1,\varepsilon}|+\left(\sup_{\mathbf{x}\in\Pi_{1,\varepsilon}}|g_N(\mathbf{x})|\right)^s\cdot|\Pi_{1,\varepsilon}|\\ &< \frac{b_1^{2s+1}b_2\ldots b_d}{N^{2s+1}}\left(\frac{2(d-1)\varepsilon}{8^s}+\frac{\zeta^s(3)}{\exp\left(\frac{\varepsilon\pi Bs}{dN^{-1}b_1}\right)}\left(\sum_{j=2}^{d}\frac{2^{2j-1}}{\pi^{j+1}}\prod_{k=1}^{j-1}\mu_{\varepsilon,k}\right)^s\right).\end{aligned}$$

Обравши $\varepsilon:=\frac{\ln N}{N}$, зауважимо, що $\mu_{\frac{\ln N}{N},k}=\frac{1+o(1)}{2}\cdot\ln N$, коли $N\to\infty$, для $k=2,\ldots,d-1$, що можна перевірити за рахунок подвійного застосування правила Лопіталя (див., наприклад, [210, §6.3]):

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\frac{2\mu_{\frac{\ln N}{N},k}}{\ln N} &= \lim_{N\to\infty}\frac{\ln\left(1-\exp\left(-\frac{\ln N\pi B}{db_kN}\right)\right)}{\ln\left(\frac{\ln N\pi B}{db_kN}\right)}=\lim_{z\to0}\frac{\ln\left(1-e^{-z}\right)}{\ln z}\\ &= \lim_{z\to0}\frac{ze^{-z}}{1-e^{-z}}=\lim_{z\to0}\frac{z}{1-e^{-z}}=1.\end{aligned}$$

Як наслідок,

$$\|g_N\|^s_{L_s(\Pi_1)} < \frac{b_1^{2s+1}b_2\dots b_d}{N^{2s+1}}\left[\frac{2(d-1)\ln N}{8^s N} + \frac{\zeta^s(3)}{N^{\frac{\pi B s}{d b_1}}}\left(\sum_{j=2}^{d}\frac{2^{2j-1}}{\pi^{j+1}}\prod_{k=1}^{j-1}\mu_{\frac{\ln N}{N},k}\right)^s\right]$$
$$= o\left(N^{-2s-1}\right), \qquad \text{коли} \quad N\to\infty.$$

Таким чином, співвідношення (3.47) дійсно має місце, а тому

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} N^2\cdot\mathcal{E}_{P_N^{*,1}}\left(W_\infty^\Delta\right)_s &= \lim_{N\to\infty} N^{2+1/s}\cdot\|f_{N,d}\|_{L_s(\Pi_1)}\\ &= \lim_{N\to\infty} N^{2+1/s}\cdot\left\|\widehat{f}_N\right\|_{L_s(\Pi_1)} = \|\sigma_1\|_{L_s(\Pi)}\,.\end{aligned}$$

Зауважимо, що випадок $s=\infty$ розглядається за аналогією з випадком $s<\infty$ з необхідними змінами. Доведення завершено. $\square$

Для доведення теореми 3.4.3 встановимо дві допоміжні леми.

Лема 3.4.1. *Для кожного* $z\in[\pi/2,2]$ *функції* $f_1(z):=4z^2-\cosh^2 z$ *і* $f_2(z):=2\cosh^2 z-3z^3$ *додатні.*

Доведення. Спочатку зазначимо, що $e^\pi = 23.14\ldots > 23$ і $2.5<e<2.8$. Оскільки $f_1(z)=(2z-\cosh z)(2z+\cosh z)$, то для доведення додатності функції f_1 на відрізку $[\pi/2,2]$ достатньо довести, що функція $g_1(z):=2z-\cosh z$ є додатною на тому ж відрізку. Останнє твердження виконується, оскільки $g_1'(z)=2-\sinh z\leqslant 2-\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4e^{\pi/2}+1-e^\pi}{2e^{\pi/2}}=\frac{\left(e^{\pi/2}-2+\sqrt5\right)\left(2+\sqrt5-e^{\pi/2}\right)}{2e^{\pi/2}}<0$ для всіх $z\in[\pi/2,2]$, бо $e^{\pi/2}>\sqrt{23}>2+\sqrt5$. Отже, g_1 спадає на відрізку $[\pi/2,2]$ і $g_1(z)\geqslant g_1(2)=4-\cosh 2=\frac{8-e^2-e^{-2}}{2}>\frac{8-2.8^2-2.5^{-2}}{2}=0$ для всіх $z\in[\pi/2,2]$.

Далі доведемо, що функція f_2 додатна на відрізку $[\pi/2,2]$. Зазначимо, що $f_2'''(z)=8\sinh 2z-18\geqslant 8\sinh\pi-18>4e^\pi-4-18>4\cdot 23-22>0$ для всіх $z\in[\pi/2,2]$. Отже, f_2'' зростає на $[\pi/2,2]$ і

$$f_2''(z)\geqslant f_2''(\pi/2)=4\cosh\pi-9\pi>2e^\pi-9\pi>2\cdot 23-9\cdot 4>0$$

для $z\in[\pi/2,2]$. З останніх співвідношень ми бачимо, що функція f_2' зростає на $[\pi/2,2]$ і $f_2'(z)\geqslant f_2'(\pi/2)=2\sinh\pi-\frac{9\pi^2}{4}>e^\pi-e^{-\pi}-\frac{9\cdot 10}{4}>23-0.5-22.5=0$ для $z\in[\pi/2,2]$. Як наслідок, f_2 зростає на $[\pi/2,2]$ і для $z\in[\pi/2,2]$ ми матимемо $f_2(z)\geqslant f_2(\pi/2)=2\cosh^2(\pi/2)-\frac{3\pi^3}{8}>\frac{4e^\pi+8-3\pi^3}{8}>\frac{4\cdot 23+8-3\cdot 3.2^3}{8}=0.212>0.$ $\square$

Тепер для $a > 0$ позначимо через Ω_a прямокутник одиничної площі зі сторонами a і $1/a$, і означимо функцію

$$F(a) := \int_{\Omega_a}\int_{\Omega_a} G_{\Omega_a}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y},$$

де G_Ω є функцією Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа на області Ω. Доведення теореми 3.4.3 суттєво ґрунтується на наступній лемі.

Лема 3.4.2. *Функція F зростає на $(0,1]$ і спадає на $[1,+\infty)$.*

Доведення. Добре відомо (див., наприклад, [26, третя формула в §4]), що для будь-якого $a > 0$

$$F(a) = \frac{16}{\pi^5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^4}{(2k+1)^5}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2a^2} - \tanh\left(\frac{(2k+1)\pi}{2a^2}\right)\right),$$

а також, за визначенням, $F(a) = F(1/a)$. Отже, достатньо довести, що функція F зростає на $(0,1]$. Далі, для змінної $t > 0$ розглянемо дві функції

$$\rho(t) := \frac{\pi t - 2\tanh(\pi t/2)}{2t^2} \qquad \text{і} \qquad \varphi(t) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho((2k+1)t)}{(2k+1)^3},$$

а також зауважимо, що $\varphi(t) = \pi^5 \cdot F\left(1/\sqrt{t}\right)/16$. Як наслідок, достатньо довести, що функція φ спадає на $[1,+\infty)$. Це випливає з властивостей функції ρ:

(i) $\rho(t) = \dfrac{\pi + o(1)}{2t}$, $\rho'(t) = \dfrac{-\pi + o(1)}{2t^2}$, $\rho''(t) = \dfrac{\pi + o(1)}{t^3}$, коли $t \to +\infty$;

(ii) $|\rho''(t)| \leqslant \dfrac{3\pi}{2t^3}$ для всіх $t \geqslant 1$;

(iii) $\rho''(t) + \dfrac{3\pi}{2t^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} < 0$ на $[1, 4/\pi]$;

(iv) $\rho'(t) < 0$ на $[4/\pi, \infty)$.

Дійсно, властивість (i) гарантує, що ряд в означенні функції φ є поелементно двічі неперервно диференційовним. За властивостями (ii) та (iii) для всіх $t \in [1, 4/\pi]$ має місце нерівність

$$\varphi''(t) = \rho''(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho''((2k+1)t)}{2k+1} \leqslant \rho''(t) + \frac{3\pi}{2t^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} < 0.$$

Тоді за неперервністю функції φ'' на $(0,+\infty)$ існує достатньо мале $\varepsilon > 0$ таке, що $\varphi''(t) < 0$ для кожного $t \in (1-\varepsilon, 4/\pi]$. Як наслідок, функція φ є опуклою вгору на $(1-\varepsilon, 4/\pi]$. Оскільки додатково $\varphi(t) = \varphi(1/t)$, $t \geqslant 1$, то $\varphi'(1) = 0$ і, отже, φ спадає на $[1, 4/\pi]$. Далі, за властивістю (iv), для кожного $t \in [4/\pi, \infty)$,

$$\varphi'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho'((2k+1)t)}{(2k+1)^2} < 0,$$

звідки випливає, що функція φ також спадає на $[4/\pi, \infty)$. Таким чином, функція φ є спадною на $[1, \infty)$.

Доведемо властивості (ii), (iii), (iv). Властивість (i) перевіряється безпосередньо.

1. Розпочнемо з доведення властивості (ii). Дійсно, для $t \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} \frac{t^3 \rho''(t)}{\pi} &= 3 - 2\tanh^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{\pi t \cdot \tanh(\pi t/2)}{2\cosh^2(\pi t/2)} - \frac{6 \cdot \tanh(\pi t/2)}{\pi t} \\ &\leqslant 3 - 2\tanh^2(\pi/2) - \frac{4 \cdot \tanh(\pi t/2)}{\pi t} \\ &< 3 - 2\tanh^2(\pi/2) = 1.32\ldots < \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

коли $z < \cosh z$, $z > 0$, і $\tanh z$ зростає на $(0, +\infty)$. З іншого боку, функція $z^{-1} \cdot \tanh z$ спадає на $(0, +\infty)$, а отже,

$$\frac{t^3 \rho''(t)}{\pi} > 1 - \frac{6 \cdot \tanh(\pi t/2)}{\pi t} \geqslant 1 - \frac{6 \cdot \tanh(\pi/2)}{\pi} = -0.75\ldots > -\frac{3}{2}.$$

2. Далі ми доведемо властивість (iii). Для $t > 0$ розглянемо функцію

$$I(t) := \frac{t^3 \rho''(t)}{\pi} + \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Для всіх $t \geqslant 1$ згідно з [144, формула 5.1.4.1] ми матимемо

$$I(t) = \frac{3}{2} - 2\tanh^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{\pi t \cdot \tanh(\pi t/2)}{2\cosh^2(\pi t/2)} - \frac{6 \cdot \tanh(\pi t/2)}{\pi t} + \frac{\pi^4}{64}.$$

Для змінної $z \in [\pi/2, 2]$ розглянемо дві допоміжні функції

$$p_1(z) = 2\tanh^2 z + \frac{\tanh z}{z} \quad \text{і} \quad p_2(z) = \frac{z \cdot \tanh z}{\cosh^2 z} - \frac{2\tanh z}{z}$$

За лемою 3.4.1, для кожного $z \in [\pi/2, 2]$,

$$p_1'(z) = \frac{z + \tanh z\left(4z^2 - \cosh^2 z\right)}{z^2 \cosh^2 z} > 0,$$

і

$$p_2'(z) = \frac{z^2\tanh z - 3z^3\tanh^2 z + z^3 - 2z + 2\sinh z\cosh z}{z^2\cosh^2 z} > \frac{\tanh z\left(2\cosh^2 z - 3z^3\right)}{z^2\cosh^2 z} > 0.$$

Отже, функції p_1 і p_2 зростають на $[\pi/2, 2]$. Як наслідок, для $t \in [1, 4/\pi]$,

$$I(t) < \frac{3}{2} + \frac{\pi^4}{64} - p_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + p_2(2) = -0.07\ldots < 0.$$

3. Нарешті, перейдемо до доведення властивості (iv). Для всіх $t \in [4/\pi, \infty)$,

$$\rho'(t) = \frac{-2\pi t + \pi t\cdot\tanh^2(\pi t/2) + 4\tanh(\pi t/2)}{2t^3} < \frac{-\pi t + 4}{2t^3} \leqslant 0.$$

Доведення завершено. □

Тепер ми готові перейти до доведення теореми 3.4.3.

Доведення теореми 3.4.3. Для зручності припустимо, що $b_1 \leqslant b_2$. Нехай $P \in \mathcal{P}_N$ є довільне прямокутне розбиття множини Π і нехай $\Omega \in P$ є довільний прямокутник. Позначимо через a довжину найкоротшої сторони прямокутника Ω, а через $|\Omega|$ – площу Ω. Вочевидь, $|\Omega| \leqslant ab_2$, оскільки $\Omega \subset \Pi$. Через Ω' позначимо прямокутник розміру $\frac{|\Omega|}{b_2} \times b_2$. Тоді, приймаючи до уваги властивості функції Гріна відносно гомотетії (див., наприклад, формулу (30) в [26]), лему 3.4.2 і нерівність $1 \geqslant \frac{a}{\sqrt{|\Omega|}} \geqslant \frac{\sqrt{|\Omega|}}{b_2}$, ми отримаємо

$$\int_\Omega\int_\Omega G_\Omega(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{y} = |\Omega|^2 F\left(\frac{a}{\sqrt{|\Omega|}}\right) \geqslant |\Omega|^2 F\left(\frac{\sqrt{|\Omega|}}{b_2}\right) = \int_{\Omega'}\int_{\Omega'} G_{\Omega'}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{y}.$$

Розглянемо розбиття $P' \in \mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ з мультиіндексом $\mathbf{m} = (N, 1)$ таке, що існує взаємно-однозначне відображення між прямокутниками $\Omega' \in P'$ і прямокутниками $\Omega \in P$ тієї самої площі. В силу вищенаведеного та за твердженням 3.1.1,

$$\mathcal{E}_P\left(W_\infty^\Delta\right)_1 = \sum_{\Omega\in P}\int_\Omega\int_\Omega G_\Omega(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{y} \geqslant \sum_{\Omega'\in P'}\int_{\Omega'}\int_{\Omega'} G_{\Omega'}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \mathcal{E}_{P'}\left(W_\infty^\Delta\right)_1.$$

Нарешті, за визначенням величини $\mathcal{E}_N\left(W_\infty^\Delta\right)_1$ (див. (3.5)) і твердженням 3.1.2 ми встановлюємо, що

$$\mathcal{E}_N\left(W_\infty^\Delta\right)_1 = \inf_{P\in\mathcal{P}_N}\mathcal{E}_P\left(W_\infty^\Delta\right)_1 \geqslant \inf_{P'\in\mathcal{P}_{\mathbf{m}}}\mathcal{E}_{P'}\left(W_\infty^\Delta\right)_1 = \mathcal{E}_{P_N^{*,1}}\left(W_\infty^\Delta\right)_1.$$

З іншого боку, $P_N^{*,1} \in \mathcal{P}_N$, а отже, $\mathcal{E}_{P_N^{*,1}} \left(W_\infty^\Delta\right)_1 \geqslant \mathcal{E}_N \left(W_\infty^\Delta\right)_1$. $\square$

Доведення наслідку 3.4.1. Дійсно, для будь-якої функції $f \in C^2(\Pi)$ функція Δf є обмеженою. Отже,

$$\begin{aligned} R_N^t(f)_s &\leqslant \left\| f - S_{P_N^{*,j}} f \right\|_{L_s(\Pi)} \leqslant \|\Delta f\|_{L_\infty(\Pi)} \sup_{g \in W_\infty^\Delta} \left\| g - S_{P_N^{*,j}} g \right\|_{L_s(\Pi)} \\ &= \|\Delta f\|_{L_\infty(\Pi)} \cdot \mathcal{E}_{P_N^{*,j}} \left(W_\infty^\Delta\right)_s . \end{aligned}$$

Поєднуючи останню оцінку з теоремою 3.4.1, завершуємо доведення наслідку. $\square$

Доведення теореми 3.4.2. За теоремою 3.4.1,

$$\begin{aligned} \limsup_{N\to\infty} N^2 \cdot \mathcal{E}_N \left(W_\infty^\Delta\right)_s &= \limsup_{N\to\infty} N^2 \cdot \mathcal{E}_N \left(W_{s'}^\Delta\right)_1 \\ &\leqslant \min_{j=1,\dots,d} \left(\lim_{N\to\infty} N^2 \cdot \mathcal{E}_{P_j^*} \left(W_\infty^\Delta\right)_s \right) = \min_{j=1,\dots,d} \|\sigma_j\|_{L_s(\Pi)} . \end{aligned} \tag{3.50}$$

Отримаємо оцінку знизу на величину $\liminf_{N\to\infty} N^2 \cdot \mathcal{E}_N \left(W_\infty^\Delta\right)_s$. Розглянемо спочатку випадок $s = \infty$. Нехай $P \in \mathcal{P}_N$ – довільне розбиття на Π. Покажемо, що існує прямокутний паралелепіпед $\Omega \in P$, який містить прямокутний паралелепіпед, отриманий паралельним переносом з $\frac{1}{N} \cdot \Pi$. Припустимо супротивне, що для кожного $\Omega \in P$ існує індекс $j_\Omega \in \{1, \dots, d\}$ такий, що довжина сторони Ω, яка паралельна осі Ox_j, менша за $\frac{b_{j_\Omega}}{N}$. Тоді ми можемо оцінити зверху об'єм кожного паралелепіпеда $\Omega \in P$:

$$\mu\Omega < \frac{b_1 \cdot \ldots \cdot b_d}{b_{j_\Omega}} \cdot \frac{b_{j_\Omega}}{N} = \frac{\mu\Pi}{N}.$$

Але тоді за означенням розбиття $P \in \mathcal{P}_N$ на Π матимемо

$$\mu\Pi = \mu \left(\bigcup_{\Omega \in P} \Omega \right) < \sum_{\Omega \in P} \mu\Omega \leqslant \frac{\mu\Pi}{N} \cdot \#P \leqslant \mu\Pi.$$

Отримали суперечність. Отже, існує прямокутний паралелепіпед $\Omega^* \in P$, який містить прямокутний паралелепіпед Π^*, отриманий паралельним переносом з $\frac{1}{N}\Pi$.

Тепер, не зменшуючи загальності, припустимо, що $b_1 = \min_{j=1,\dots,d} b_j$, через $\mathbf{s}$ позначимо центр паралелепіпеда Π^*, через B – кулю з центром в точці $\mathbf{s}$ і радіусом

$\frac{b_1}{N}$, та означимо функцію $\tau : \mathbb{R}^0_+ \to \mathbb{R}$:

$$\tau(t) := \begin{cases} \dfrac{b_1^2}{16dN^2} - \dfrac{t^2}{2d}, & t \in \left[0, \dfrac{b_1}{4N}\right], \\ \dfrac{1}{2d}\left(\dfrac{b_1}{2N} - t\right)^2, & t \in \left[\dfrac{b_1}{4N}, \dfrac{b_1}{2N}\right], \\ 0, & t \geqslant \dfrac{b_1}{2N}. \end{cases}$$

Розглянемо функцію $\varphi_P : \Pi \to \mathbb{R}$, що задана рівністю

$$\varphi_P(\mathbf{x}) := \tau(\|\mathbf{x}\|), \qquad \mathbf{x} \in \Pi.$$

Неважко переконатися в тому, що $\varphi_P \in W^{\Delta}_{\infty}$ та φ_P обертається в нуль на межах кожного прямокутника $\Omega \in P$. Тому $S_P\varphi_P \equiv 0$. Отже,

$$\mathcal{E}_N\left(W^{\Delta}_{\infty}\right)_{\infty} = \inf_{P \in \mathcal{P}_N} \mathcal{E}_P\left(W^{\Delta}_{\infty}\right)_{\infty} \geqslant \inf_{P \in \mathcal{P}_N} \|\varphi_P\|_{L_\infty(B)} = \frac{b_1^2}{4dN^2}.$$

Отже, ми довели, що

$$\liminf_{N\to\infty} N^2 \cdot \mathcal{E}_N\left(W^{\Delta}_{\infty}\right)_{\infty} \geqslant \frac{1}{4d} \cdot \left(\min_{j=1,\dots,d} b_j\right)^2. \tag{3.51}$$

Розглянемо тепер випадок, коли $s \in [1, \infty)$. Нехай $P \in \mathcal{P}_N$ є довільне прямокутне розбиття на Π. Для кожного прямокутного паралелепіпеда $\Omega \in P$ через a_Ω позначимо його найменшу сторону, а через Ω^* – множину точок, розташованих на відстані $\frac{1}{2}\,a_\Omega$ від $\partial\Omega$, тобто

$$\Omega^* = \left\{\mathbf{x} \in \Omega \,:\, \inf_{\mathbf{t} \in \partial\Omega} \|\mathbf{x} - \mathbf{t}\| = \frac{1}{4}\,a_\Omega\right\}.$$

Оцінимо знизу міру Лебега множини Ω^*. Для цього помітимо, що Ω^* – прямокутний паралелепіпед, сторони якого паралельні сторонам Ω. Нехай b – довжина деякої сторони прямокутного паралелепіпеда Ω. Тоді довжина паралельної їй сторони паралелепіпеда Ω^* дорівнює $b - \frac{1}{2}\,a_\Omega$. Оскільки a_Ω – довжина найменшої зі сторін Ω, то $b - \frac{1}{2}\,a_\Omega \geqslant \frac{b}{2}$. Тому

$$\mu\Omega^* \geqslant \frac{\mu\Omega}{2^d}. \tag{3.52}$$

Нехай $P \in \mathcal{P}_N$ – довільне розбиття на Π. Не зменшуючи загальності, припустимо, що $b_1 = \min\limits_{j=1,\dots,d} b_j$. Нехай множина $I = I(P)$ складається з тих прямокутних паралелепіпедів $\Omega \in P$, для яких $\mu\Omega \geqslant \frac{\mu\Pi}{2N}$. Нескладно бачити, що

$$\sum_{\Omega\in I}\mu\Omega = \mu\Pi - \sum_{\Omega\in P\setminus I}\mu\Omega \geqslant \mu\Pi - \frac{\mu\Pi}{2N}\cdot\#\left(P\setminus I\right) \geqslant \frac{\mu\Pi}{2}. \tag{3.53}$$

Також неважко переконатися в тому, що $a_\Omega \geqslant \frac{b_1}{2N}$ для всіх $\Omega \in I$.

Нехай $a > 0$. Означимо функцію $\tau_a : \mathbb{R}_+^0 \to \mathbb{R}$:

$$\tau_a(t) := \begin{cases} \dfrac{a^2}{64d} - \dfrac{t^2}{8d}, & t \in \left[0, \dfrac{a}{8}\right], \\ \dfrac{1}{2d}\left(\dfrac{a}{4} - t\right)^2, & t \in \left[\dfrac{a}{8}, \dfrac{a}{4}\right], \\ 0, & t \geqslant \dfrac{a}{4}. \end{cases}$$

Означимо функцію $\psi_P : \Pi \to \mathbb{R}$ наступним чином

$$\psi_P(\mathbf{x}) := \tau_{a_\Omega}\left(\mathrm{dist}\,(\mathbf{x};\Omega^*)\right), \qquad \mathbf{x}\in\Omega, \quad \Omega\in P,$$

де $\mathrm{dist}\,(\mathbf{x}; A) := \inf\limits_{\mathbf{t}\in A}\|\mathbf{x}-\mathbf{t}\|$ – відстань від точки $\mathbf{x}$ до множини $A \subset \mathbb{R}^d$. Неважко бачити, що $\psi_P \in W_\infty^\Delta$ та $S_P\psi_P \equiv 0$. Також зрозуміло, що для кожного $\Omega \in P$ в будь-якій точці $\mathbf{x} \in \Omega^*$ виконується нерівність $\psi_P(\mathbf{x}) \geqslant \frac{1}{64d}\,a_\Omega^2$. За (3.52), маємо

$$\|\psi_P\|_{L_s(\Omega)}^s \geqslant \|\psi_P\|_{L_s(\Omega^*)}^s \geqslant \left(\frac{a_\Omega^2}{64d}\right)^s\frac{\mu\Omega}{2^d}$$

Як наслідок, за означенням множини $I(P)$ та нерівністю (3.53), отримаємо

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N^s\left(W_\infty^\Delta\right)_s &= \inf_{P\in\mathcal{P}_N}\mathcal{E}_P^s\left(W_\infty^\Delta\right)_s \geqslant \inf_{P\in\mathcal{P}_N}\|\psi_P\|_{L_s(\Pi)}^s = \inf_{P\in\mathcal{P}_N}\sum_{\Omega\in P}\|\psi_P\|_{L_s(\Omega)}^s \\ &\geqslant \frac{1}{2^d\left(64d\right)^s}\inf_{P\in\mathcal{P}_N}\sum_{\Omega\in P}a_\Omega^{2s}\mu\Omega \geqslant \frac{1}{2^d\left(64d\right)^s}\inf_{P\in\mathcal{P}_N}\sum_{\Omega\in I(P)}a_\Omega^{2s}\mu\Omega \\ &\geqslant \frac{1}{2^d\left(64d\right)^s}\cdot\frac{b_1^{2s}}{(2N)^s}\inf_{P\in\mathcal{P}_N}\sum_{\Omega\in I(P)}\mu\Omega \geqslant \frac{1}{2^d\left(64d\right)^s}\cdot\frac{b_1^{2s}}{(2N)^{2s}}\cdot\frac{\mu\Pi}{2}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\liminf_{N\to\infty} N^2\cdot\mathcal{E}_N\left(W_\infty^\Delta\right)_s \geqslant \frac{b_1^2\left(\mu\Pi\right)^{\frac{1}{s}}}{2^{\frac{d+1}{s}}\cdot 256d}. \tag{3.54}$$

Об’єднуючи (3.50), (3.51) та (3.54), завершуємо доведення теореми. □

Висновки до розділу 3

Цей розділ присвячено дослідженню задачі найкращого наближення функцій двох змінних лінійними сплайнами та задачі про найкраще наближення функцій багатьох змінних з обмеженим лапласіаном трансфінітними інтерполяційними гармонічними сплайнами. Отримані тут результати полягають в наступному:

1. Встановлено точну асимптотичну поведінку величини $R_N(f)_{p;\alpha,\beta}$, коли $N \to \infty$, що характеризує похибку найкращого нелінійного несиметричного наближення в метриці простору L_p двічі неперервно диференційовних функцій f двох змінних, означених на багатокутнику, за допомогою лінійних сплайнів на тріангуляціях їх області визначення, які складаються з не більше, ніж N трикутників. Також побудовано асимптотично оптимальні послідовності тріангуляцій та лінійних сплайнів на них.
2. Розв'язано екстремальну задачу про знаходження форми d-вимірного симплекса одиничного об'єму, на якому досягається мінімум похибки найкращого несиметричного наближення в метриці простору L_p додатно визначеної квадратичної форми за допомогою лінійних функцій.
3. Знайдено порядок величин $\mathcal{E}_N \left(W^{\Delta}_{\infty}\right)_p$ та $\mathcal{E}_N \left(W^{\Delta}_{p}\right)_1$, коли $N \to \infty$, і показано, що він не залежить від вимірності простору та досягається на розбиттях, які утворені за рахунок розбиття області визначення рівновіддаленими гіперплощинами.

РОЗДІЛ 4

Задача найкращого відновлення операторів

В даному розділі ми розглянемо задачу найкращого відновлення інтегральних операторів з невід'ємними ядрами на класах функцій, що мають задану мажоранту модуля неперервності, та задачу про найкраще відновлення класів функцій багатьох змінних, що мають рівномірно обмежену похідну другого порядку за довільним напрямком.

4.1. Постановки основних задач дослідження

Нехай X, Z – лінійні простори над полем $\mathbb{R}$; Y – нормовний простір над полем $\mathbb{R}$; $A : X \to Y$ – оператор, не обов'язково лінійний, з областю визначення $\mathcal{D}(A) \subset X$; $W \subset \mathcal{D}(A)$ – деякий клас. Припустимо, що нам необхідно відновити значення Ax оператора A на елементах $x \in W$, які невідомі нам повністю, але про які ми можемо отримати інформацію, часто числову, у вигляді значень Ix деякого *інформаційного оператора* $I : \overline{\operatorname{span} W} \to Z$, де $\overline{\operatorname{span} W}$ позначає замикання лінійної оболонки класу W. Природно вважати, що інформацію Ix ми отримуємо неточно, наприклад, в результаті вимірювань, та замість Ix знаємо деякий інший елемент $z \in Ix + U$, де U – задана підмножина в Z, яка містить нуль θ_Z простору Z та характеризує похибку вимірювання.

Довільний оператор $\Phi : Z \to Y$ будемо називати *методом відновлення.* Похибкою відновлення оператора A за допомогою метода Φ на класі W за інформацією I, що задана з похибкою U, називається величина:

$$\mathcal{E}_Y\left(A; W; I; U; \Phi\right) := \sup_{x \in W} \sup_{z \in Ix + U} \|Ax - \Phi z\|_Y .$$

Означимо величину похибки найкращого відновлення оператора A на класі W за інформацією I, що задана з похибкою U:

$$\mathcal{E}^*_Y\left(A; W; I; U\right) := \inf_{\Phi : Z \to Y} \mathcal{E}_Y\left(A; W; I; U; \Phi\right), \tag{4.1}$$

де inf береться за всіма методами відновлення $\Phi : Z \to Y$. Далі опускатимемо символ U у введених позначеннях, якщо інформація I задана точно, тобто $U = \{\theta_Z\}$.

Задача 4.1.1. *Необхідно знайти величину $\mathcal{E}^*_Y(A;W;I;U)$, а також оптимальні (найкращі) методи відновлення Φ^*, якщо такі існують, для яких досягається* inf *в правій частині* (4.1).

Якщо $\mathcal{I}$ – деякий клас інформаційних операторів $I : \overline{\operatorname{span} W} \to Z$, а інформація задана точно, то похибкою найкращого відновлення оператора A на класі W за інформацією типу $\mathcal{I}$ називається величина:

$$\mathfrak{E}^*_Y\left(A;W;\mathcal{I}\right) := \inf_{I\in\mathcal{I}} \mathcal{E}_Y\left(A;W;I\right). \tag{4.2}$$

Задача 4.1.2. *Необхідно знайти величину $\mathfrak{E}^*_Y\left(A;W;\mathcal{I}\right)$ та оптимальні пари інформаційних операторів $I^* \in \mathcal{I}$ і методів відновлення $\Phi^* : Z \to Y$, якщо такі існують, для яких $\mathcal{E}_Y\left(A;W;I^*;\Phi^*\right) = \mathfrak{E}^*_Y\left(A;W;\mathcal{I}\right)$.*

Задачі найкращого відновлення операторів вперше виникають в працях А. М. Колмогорова, А. Сарда, С. М. Нікольського, Дж. Кіфера в середині XX сторіччя, а їх дослідження як окремого класу задач починається в 1970-х роках в теорії апроксимації та теорії інформаційної складності в роботах С. А. Смоляка [156], Н. С. Бахвалова [41], А. Г. Марчука і К. Ю. Осипенка [124], М. Голомба [255], К. А. Мічеллі і Т. Дж. Рівліна [290], А. А. Мелкмана і К. А. Мічеллі [289]. Систематичне викладення результатів щодо задач найкращого відновлення операторів можна знайти, наприклад, в монографіях [339, 304, 291, 276, 95, 338, 305, 342, 318, 310, 76] та оглядових статтях [75, 121] (див. також [59]). Споріднена постановка задачі найкращого відновлення операторів була запропонована С. Б. Стєчкіним [159, 160] в середині 1960-х років, а огляд отриманих в цьому напрямку результатів можна знайти в статтях [8, 7].

Задачі оптимального відновлення операторів мають тісні взаємозв'язки з багатьма задачами теорії апроксимації та суміжних областей математики. Вкажемо на деякі з них:

1. Нехай $d \in \mathbb{N}$ і $\Omega \in \mathbb{R}^d$ – компактна однозв'язна множина з непорожньою внутрішністю, $X = C(\Omega)$ – простір неперервних на Ω функцій, $W \subset X$ – центрально симетричний клас, $Y = \mathbb{R}$, $A : C(\Omega) \to \mathbb{R}$ – задано правилом

$$Ax := \int_\Omega x(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t}, \qquad f \in C(\Omega),$$

$Z = \mathbb{R}^n$, де $n \in \mathbb{N}$, $U = \{\theta_Z\}$, $Q = \{\mathbf{q}_j\}_{j=1}^n$ – задана система точок в Ω, та $I = I_Q : C(\Omega) \to \mathbb{R}^n$ – інформаційний оператор вигляду

$$I_Q x = (x(\mathbf{q}_1), \ldots, x(\mathbf{q}_n)), \qquad x \in C(\Omega).$$

Тоді величина $\mathcal{E}^*_{\mathbb{R}}(A; W; I_Q)$ характеризує похибку найкращого відновлення інтегралу від функцій $x \in W$ за значеннями підінтегральних функцій в заданій системі точок Q. Добре відомо (див. [136, 156]), що найкращі методи відновлення у відповідній задачі 4.1.1 достатньо шукати серед лінійних методів відновлення – квадратурних формул.

Природним чином тут також постає задача оптимізації вузлів квадратур. Нехай $\mathcal{I}_n := \{I = I_Q \,:\, Q \subset \Omega,\, \#Q \leqslant n\}$, де $\#M$ – кількість елементів скінченної множини M. З огляду на наявність квадратурних формул серед найкращих методів відновлення, задачу найкращого відновлення функціоналу A на класі W за інформацією типу $\mathcal{I}_n$ можна інтерпретувати як задачу оптимізації в смислі Колмогорова-Нікольського квадратурних формул з щонайбільше n вузлами на класі W. Більше інформації щодо задачі Колмогорова-Нікольського можна знайти в розділі 2.

2. Нехай $d \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, Ω – вимірна однозв'язна компактна підмножина $\mathbb{R}^d$, яка має непорожню внутрішність. Як зазвичай, через $L_p(\Omega)$ позначимо простір вимірних функцій $x : \Omega \to \mathbb{R}$, інтегровних в степені p (суттєво обмежених при $p = \infty$), оснащений стандартною нормою:

$$\|x\|_{L_p(\Omega)} = \|x\|_p := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_\Omega |x(\mathbf{t})|^p \mathrm{d}\mathbf{t} \right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname{esssup} \{|x(\mathbf{t})| \,:\, \mathbf{t} \in \Omega\}, & p = \infty. \end{cases}$$

Нехай також $X = Y = L_p(\Omega)$, $A = \mathrm{id}_X$ – тотожний оператор, тобто $Ax = \mathrm{id}_X(x) = x$ для всіх $x \in X$, $W \subset C(\Omega)$ – центрально симетричний клас функцій, $Z = \mathbb{R}^n$, де $n \in \mathbb{N}$, $Q = \{q_j\}_{j=1}^n$ – задана система точок в Ω, та $U = U_\varepsilon := [-\varepsilon, \varepsilon]^n$ – n-вимірний куб зі стороною 2ε, $\varepsilon \geqslant 0$. Тоді величина $\mathcal{E}^*_X(\mathrm{id}_X; W; I_Q; U_\varepsilon)$ характеризує похибку найкращого відновлення класу W за інформацією $\{z_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}^n$ про значення функцій $x \in W$ в системі точок Q, які відомі з похибкою ε, тобто $|z_j - x(q_j)| \leqslant \varepsilon$ для всіх $j = 1, \ldots, n$. Відповідна задача 4.1.2 також близька до задач оптимального кодування функцій з класу W та найкращої інтерполяції функцій з класу W (див. [338, 94, 95, 318, 76]). Для отримання точних нижніх оцінок величини $\mathcal{E}_Y(\mathrm{id}_X; W; \mathcal{I})$ широко використовується апарат поперечників (див. [290, 338, 315, 94]). Іншими типами інформації в цій задачі можуть виступати, наприклад, значення функції та її декількох послідовних похідних в точках Q.

3. Нехай $d \in \mathbb{N}$ і $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – однозв'язна компактна множина з непорожньою внутрішністю, яка для зручності має гладку межу. Нехай також X – лінійний простір вимірних функцій, визначених на $\partial\Omega$, а Y – нормовний простір вимірних на Ω функцій. Розв'язок багатьох граничних задач для рівнянь в частинних похідних можна зобразити у вигляді деякого оператора $A : X \to Y$, часто інтегрального оператора, який ставить у відповідність граничній функції $\varphi \in X$ розв'язок граничної задачі $x = A\varphi \in Y$. Наприклад, розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta x(\mathbf{t}) = 0, & \mathbf{t} \in \operatorname{int}\Omega, \\ x(\mathbf{t}) = \varphi(\mathbf{t}), & \mathbf{t} \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.3}$$

можна зобразити у вигляді значення інтегрального оператора A

$$x(\mathbf{t}) = A\varphi(\mathbf{t}) := \int_{\partial\Omega} \left(-\frac{\partial G}{\partial \bar{n}}(\mathbf{t}, \mathbf{u}) \right) \varphi(\mathbf{u})\, \mathrm{d}\sigma(\mathbf{u}), \qquad \mathbf{t} \in \Omega,$$

з ядром $\left(-\frac{\partial G}{\partial \bar{n}}(\mathbf{t}, \mathbf{u})\right)$, де G – функція Гріна (див. [250]) відповідної граничної задачі, а σ – поверхнева міра на $\partial\Omega$, узгоджена з евклідовою метрикою на $\mathbb{R}^d$.

Нехай тепер $X = C(\partial\Omega)$, $Y \supset C(\Omega)$ – нормовний простір, $Z = \mathbb{R}^n$, де $n \in \mathbb{N}$, $Q = \{q_j\}_{j=1}^n \subset \partial G$ – задана система точок, $I = I_Q$, та $U = U_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon]^n$ – n-вимірний куб в $\mathbb{R}^n$ зі стороною 2ε, $\varepsilon \geqslant 0$. Тоді найкращий метод відновлення $\Phi^* : \mathbb{R}^n \to C(\Omega)$, що реалізує inf в означенні величини $\mathcal{E}_Y^*(A; W; I_Q; U_\varepsilon)$, дозволяє побудувати наближені розв'язки граничної задачі (4.3) за інформацією про значення граничної функції в системі точок Q, які мають найменше можливе відхилення за нормою простору Y на класі граничних функцій $\varphi \in W$. Зрозуміло, що таке застосування задачі найкращого відновлення операторів не обмежується задачею (4.3), але може бути використано й до цілого ряду інших граничних задач для рівнянь в частинних похідних та задач з початковими умовами для рівнянь в частинних похідних, інтегральних та диференціальних рівнянь. В [122, 62, 123, 343, 191] (див. також посилання в них) розглядаються застосування такого роду задач найкращого відновлення операторів.

Добре відомий (див. [339, 318]) метод знаходження точного значення величини $\mathcal{E}^*_Y(A;W;I;U)$ полягає в наступному. Означимо множину $Z_0 := I(W) + U$ всіх можливих значень, які може приймати інформація про елементи класу W, та для довільного $z \in Z_0$ означимо множину $A_z := \{Ax \,:\, x \in W,\ z \in Ix + U\}$ та її радіус

$$r(A_z) := \inf_{g \in Y} \sup_{s \in A_z} \|s - g\|_Y.$$

Твердження 4.1.1 (див. [318, теорема 2.3.1])**.** *Нехай простори X, Y, Z, оператор A, клас W, інформаційний оператор I та множина U означені раніше. Тоді*

$$\mathcal{E}^*_Y(A;W;I;U) = \sup_{z \in Z_0} r(A_z).$$

Більш того, якщо для кожного $z \in Z_0$ існує центр $g_z \in Y$ множини A_z, тобто точка, в якій $r(A_z) = \sup\limits_{s \in A_z} \|s - g_z\|_Y$, то центральний алгоритм

$$\Phi_{\mathrm{ctr}}(z) := g_z$$

є найкращим методом відновлення оператора A на класі W за інформацією I, яка задана з похибкою U.

Розглянемо деякі конкретні результати щодо точного розв'язку задач найкращого відновлення тотожного оператора на класах функцій, заданих обмеженням на модуль неперервності самої функції або її похідної, або обмеженням на норму похідної функції деякого порядку, за точно заданою інформацією. Нехай ω – модуль неперервності (див. означення 1.1.3), $d \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|_2$ – евклідова норма в $\mathbb{R}^d$, а Ω – компактна однозв'язна підмножина $\mathbb{R}^d$ з непорожньою внутрішністю. Через $H^\omega(\Omega)$ позначимо клас функцій $f \in C(\Omega)$ таких, що $|f(\mathbf{t}') - f(\mathbf{t}'')| \leqslant \omega(\|\mathbf{t}' - \mathbf{t}''\|_2)$ для всіх $\mathbf{t}', \mathbf{t}'' \in \Omega$. Для $r \in \mathbb{N}$ через $W^r_p([0,1])$ та $W^r H^\omega([0,1])$ позначимо класи функцій $f \in C([0,1])$, для яких $f^{(r-1)}$ абсолютно неперервна на $[0,1]$ і, відповідно, $\left\|f^{(r)}\right\|_{L_p(G)} \leqslant 1$ та $f^{(r)} \in H^\omega([0,1])$.

М. П. Корнєйчук [93] розглядав задачу найкращого відновлення класів $H^\omega([0,1])$ та 1-періодичного аналогу класу $W^1 H^\omega([0,1])$ за довільною числовою інформацією. Б. Боянов [47] довів оптимальність рівновіддалених вузлів в задачі найкращого відновлення класів $W^r_p([0,1])$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, в метриці простору L_∞ за значеннями функцій з класу та їх похідних до порядку $r-1$ включно в n вузлах.

У випадку класів функцій багатьох змінних, задача найкращого відновлення класу $H^\omega(\Omega)$ в метриці простору L_∞ за значеннями функцій в заданій скінченній системі точок на Ω досліджувалася В. Ф. Бабенком та А. О. Лігуном [27] на опуклих багатокутниках Ω в $\mathbb{R}^2$ та В. Ф. Бабенком [11] на опуклих поліедрах Ω в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 3$. Ними (див. [27, 12]) також розглядалося питання про встановлення точної асимптотичної поведінки величини $\mathfrak{E}^*_{L_\infty(\Omega)}\left(\mathrm{id}_{C(\Omega)}; H^\omega(\Omega); \mathcal{I}_n\right)$, $n \to \infty$, де $\mathcal{I}_n := \{I_Q : Q \subset \Omega, \#Q \leqslant n\}$, та вибір асимптотично оптимальної послідовності вузлів. Крім того, В. Ф. Бабенко в [11] розглянув задачу оптимізації вибору решіткових конфігурацій в $\mathbb{R}^d$.

В підрозділі 4.2 наведено результати роботи [196] щодо розв'язку задачі 4.1.1 про найкраще відновлення класу $W^2_\infty(\Omega)$ функцій багатьох змінних, означених на опуклій області Ω та які мають рівномірно обмежену похідну другого порядку за довільним напрямком, за інформацією I'_Q про значення функцій та їх градієнтів в заданій скінченній системі точок $Q \subset \Omega$. Зауважимо, що в [196] В. Ф. Бабенко та С. В. Бородачов знайшли асимптотично оптимальну послідовність вузлів в задачі про найкраще відновлення класу $W^2_\infty(\Omega)$, а С. В. Бородачов і Т. Сорокіна в [228] побудували метод найкращого відновлення, який ставить у відповідність інформацію про функцію $x \in W^2_\infty(\Omega)$ кусково-квадратичний сплайн $s \in W^2_\infty(\Omega)$, що має ту саму інформацію. Ці результати в подальшому узагальнювалися в роботах Б. Лінга та Ю. Ліу [283].

Відзначимо, що при знаходженні величини $\mathcal{E}^*_{L_\infty(\Omega)}\left(\mathrm{id}_{C(\Omega)}; W^2_\infty(\Omega); I'_Q\right)$ важливим кроком було зведення її обчислення до розв'язання наступної екстремальної задачі для функцій багатьох змінних. Нехай $\mathcal{T}$ – симплекс в $\mathbb{R}^d$ з вершинами $B_0, \ldots, B_d$. Необхідно знайти величину

$$\sup_{\substack{x \in W^2_\infty(\mathcal{T}): \\ x(B_j)=0,\, \nabla x(B_j)=\mathbf{0},\, j=0,\ldots,d}} \|x\|_{L_\infty(\mathcal{T})} \tag{4.4}$$

та вказати екстремальні функції, якщо такі існують, на яких досягається sup в задачі (4.4). Взагалі кажучи, екстремальні задачі такого роду є складними та їх вдається розв'язати точно лише у виключних ситуаціях. Задачу (4.4) вдалося розв'язати за рахунок її зведення до більш простої екстремальної задачі для функцій однієї змінної.

Розглянемо тепер деякі випадки точного розв'язку задачі про найкраще відновлення операторів на класах функцій з заданою мажорантою модуля неперервності за неточною інформацією. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $Q = \{\mathbf{q}_j\}_{j=1}^n \subset \Omega$ – скінченна підмножина, $I_Q : C(\Omega) \to \mathbb{R}^n$ – інформаційний оператор вигляду $I_Q x = (x(\mathbf{q}_1), \ldots, x(\mathbf{q}_n))$, $x \in C(\Omega)$, а ω – заданий модуль неперервності.

А. Г. Марчук і К. Ю. Осипенко [124] та Л. Пласкота [318, § 2.8.2] розв'язували задачу про найкраще відновлення тотожного оператора на класі $H^\omega([0,1])$ за неточно заданою інформацією про значення оператора I_Q на функціях з класу. Л. Пласкота також розглядав задачу про найкраще відновлення функціоналу інтегрування на класі $H^\omega([0,1])$ з $\omega(t) = t$, $t \in [0,1]$, за неточно заданою інформацією I_Q, а М. П. Корнєйчук [90] ще в 1968 році розв'язав задачу оптимального вибору вузлів для найкращого відновлення функціоналу інтегрування на $H^\omega([0,1])$ для довільного ω за точно заданою інформацією I_Q.

У випадку класів функцій багатьох змінних відзначимо роботи В. Ф. Бабенка і А. О. Лігуна [27] та В. Ф. Бабенка [11] про найкраще відновлення тотожного оператора на класах функцій $H^\omega(\Omega)$, визначених на поліедрах $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, за інформацією I_Q, а також роботу В. Ф. Бабенка щодо оптимізації кубатурних формул на класах $H^\omega(\Omega)$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – компактна однозв'язна область з непорожньою внутрішністю, заданих обмеженням ω на зростання модуля неперервності відносно метрик ℓ_1 та ℓ_∞ простору $\mathbb{R}^d$.

Спорідненість методів встановлення вищезазначених результатів дозволяє припустити можливість успішного розв'язання задачі найкращого відновлення більш загальних операторів на класах функцій з заданим модулем неперервності за значеннями функцій в заданій скінченній системі точок, які можуть бути відомі неточно. Результати такого роду щодо найкращого відновлення інтегральних операторів з невід'ємним ядром та їх сум на класах функцій, які визначені на компактній підмножині метричного простору та мають задану мажоранту модуля неперервності, встановлено в роботі [191] та наведено в підрозділі 4.3.

Відзначимо, що результати підрозділу 4.3 дозволяють побудувати оптимальні методи розв'язку граничних задач для рівнянь в частинних похідних, гранична функція в яких має обмеження на модуль неперервності, за значеннями граничної функції в заданій системі точок на межі множини Ω. Раніше Г. Е. Магаріл-Ільяєв, К. Ю. Осипенко та їх учні (див., наприклад, [122, 62, 123]), а також А. Г. Вершульц [343] розглядали задачу найкращого відновлення розв'язків граничних задач для класичних рівнянь математичної фізики за умови, що гранична функція належить класу $W_2^r(\partial\Omega)$, тобто має обмежену в $L_2(\partial\Omega)$ похідну порядку $r \in \mathbb{N}$, а інформацією виступають значення декількох послідовних коефіцієнтів Фур'є граничної функції, які відомі з похибкою. Проте інформація про значення граничної функції в точках видається більш природною, аніж інформація про значення її коефіцієнтів Фур'є, а умова належності граничної функції класу $W_2^r(\partial\Omega)$ також може виявитися фактором, що обмежує застосування цих результатів, оскільки граничні функції, взагалі кажучи, можуть бути недиференційовними.

4.2. Найкраще відновлення класів функцій за значеннями функцій та їх градієнтів в заданій системі точок

Даний підрозділ присвячено дослідженню задачі найкращого відновлення тотожного оператора на класі функцій багатьох змінних, що мають рівномірно обмежену похідну другого порядку в кожному напрямку, за значеннями функцій та їх градієнтів в заданій скінченній системі точок. Наведені в підрозділі результати опубліковано в роботі [196]. Спочатку введемо необхідні позначення.

Нехай $d \in \mathbb{N}$ і $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – опукле тіло, тобто компактна опукла множина з непорожньою внутрішністю. Позначимо через $W^2_\infty(\Omega)$ клас неперервно-диференційовних функцій $f : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, що для будь-якого одиничного вектора $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$ похідна $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{r}^2}$ існує всередині Ω хоча б в узагальненому смислі та

$$\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{r}^2}\right\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant 1.$$

Нехай $\mathcal{L}$ – повновимірна решітка в $\mathbb{R}^d$, тобто решітка, яка утворена за допомогою d лінійно-незалежних векторів. Для повновимірної решітки $\mathcal{L}$ оберемо утворюючу її систему векторів $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ і позначимо через

$$\Pi(\mathcal{L}) := \{\alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_d\mathbf{v}_d \ : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_d \in [0, 1)\}$$

фундаментальний паралелепіпед решітки $\mathcal{L}$. Будемо казати, що функція $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ є $\mathcal{L}$-*періодичною*, якщо $f(\mathbf{x}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{x})$ для будь-яких $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ і $\mathbf{v} \in \mathcal{L}$.

Позначимо через $\widetilde{W}^2_\infty(\mathcal{L})$ клас $\mathcal{L}$-періодичних неперервно диференційовних функцій $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ таких, що для довільного одиничного вектора $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$ похідна за напрямком $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{r}^2}$ існує хоча б в узагальненому смислі в $\mathbb{R}^d$ і

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{r}^2} \right\|_{L_\infty(\Pi(\mathcal{L}))} \leqslant 1.$$

Зауваження 4.2.1. *Клас $W^2_\infty(\Omega)$ можна розглядати як багатовимірний аналог класу $W^2_\infty([0,1])$, а $\widetilde{W}^2_\infty(\mathcal{L})$ – як багатовимірний аналог* 1*-періодичної версії класу $W^2_\infty([0,a])$.*

Зауваження 4.2.2. *Існування узагальненої похідної $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{r}^2}$ розуміється в тому сенсі, що для майже всіх прямих ℓ, паралельних вектору $\mathbf{r}$ і які проходять через внутрішність області визначення функції f, звуження $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}$ на перетин ℓ з областю визначення f є локально абсолютно неперервною функцією, а $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{r}^2}$ є вимірною. Інші еквівалентні способи означення узагальненої похідної $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{r}^2}$ можна знайти, наприклад, в [139, 333].*

Для зручності позначимо $W = W^2_\infty(\Omega)$, $D = \Omega$ і $X = C(\Omega)$, або $W = \widetilde{W}^2_\infty(\mathcal{L})$, $D = \Pi(\mathcal{L})$ і $X = C_\mathcal{L}$, де $C_\mathcal{L}$ – простір неперервних $\mathcal{L}$-періодичних функцій $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $Q = \{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n\} \subset D$ – довільна скінченна множина точок і $I'_Q : X \to \mathbb{R}^{(d+1)n}$ – інформаційний оператор вигляду

$$I'_Q(f) = \left(f(\mathbf{q}_1), \dots, f(\mathbf{q}_n), \nabla f(\mathbf{q}_1), \dots, \nabla f(\mathbf{q}_n)\right), \qquad f \in X,$$

який означено на множині всіх функцій, область визначення яких містить Q і кожна точка з Q є граничною точкою множини визначення, а градієнт ∇f визначений в кожній точці множини Q.

Побудуємо центральний алгоритм $\Phi : \mathbb{R}^{(d+1)n} \to X$, який є найкращим методом відновлення в задачі 4.1.1 про найкраще відновлення тотожного оператора id_X на класі W за точною інформацією I'_Q. Розглянемо відображення $\overline{\varphi}_Q, \underline{\varphi}_Q : \mathbb{R}^{(d+1)n} \to X$, означені наступним чином: для кожного $\mathbf{w} \in I'_Q(W)$ нехай

$$\overline{\varphi}_Q[\mathbf{w}](\mathbf{x}) := \sup_{f \in \mathcal{F},\ I'_Q(f) = w} f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D,$$

$$\underline{\varphi}_Q[\mathbf{w}](\mathbf{x}) := \inf_{f\in\mathcal{F},\ I'_Q(f)=w} f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in D,$$

та нехай функції $\overline{\varphi}_Q[\mathbf{w}]$ та $\underline{\varphi}_Q[\mathbf{w}]$ є тотожні нулі, якщо $\mathbf{w}\notin I'_Q(W)$. Означимо метод відновлення $\Phi_{Q,W} : \mathbb{R}^{(d+1)n} \to X$:

$$\Phi_{Q,W}[\cdot] := \frac{1}{2}\left(\overline{\varphi}_Q[\cdot] + \underline{\varphi}_Q[\cdot]\right). \tag{4.5}$$

За твердженням 4.1.1,

$$\mathcal{E}^*_{L_\infty(D)}\left(\mathrm{id}_X; W; I'_Q\right) = \sup_{\mathbf{w}\in I'_Q(W)} \mathrm{rad}\left(\left(I'_Q\right)^{-1}[\mathbf{w}]\right), \tag{4.6}$$

де $\mathrm{rad}(M)$ позначає радіус множини $M\subset X$ відносно норми $\|\cdot\|_{L_\infty(D)}$. Більш того, для будь-якого вектора $\mathbf{w}\in I'_Q(W)$ має місце рівність

$$\begin{aligned} \sup_{f\in\left(I'_Q\right)^{-1}[\mathbf{w}]} \|f-\Phi_{Q,W}(\mathbf{w})\|_{L_\infty(D)} &= \mathrm{rad}\left(\left(I'_Q\right)^{-1}[\mathbf{w}]\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\|\overline{\varphi}_Q[\mathbf{w}] - \underline{\varphi}_Q[\mathbf{w}]\right\|_{L_\infty(D)}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Нарешті, через $r(A,B) := \sup_{\mathbf{x}\in A}\inf_{\mathbf{y}\in B}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2$ позначимо відстань між множинами $A,B\in\mathbb{R}^d$. Наступні два твердження становлять основні результати підрозділу.

Теорема 4.2.1. *Нехай $d\in\mathbb{N}$, $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ – опукле тіло і $Q\subset\Omega$ – скінченна множина вузлів. Тоді оператор $\Phi_{Q,W^2_\infty(\Omega)}$ є найкращим методом відновлення тотожного оператора $\mathrm{id}_{C(\Omega)}$ на класі $W^2_\infty(\Omega)$ за інформацією I'_Q. Також, у випадку $r(\Omega,Q)\geqslant\sqrt{2}r(\partial\Omega,Q)$ має місце рівність*

$$\mathcal{E}^*_{L_\infty(\Omega)}\left(\mathrm{id}_{C(\Omega)}; W^2_\infty(\Omega); I'_Q\right) = \frac{1}{4}r^2(\Omega,Q). \tag{4.8}$$

Для заданої решітки $\mathcal{L}\subset\mathbb{R}^d$ позначимо $J(\mathcal{L}) := \min_{\mathbf{v}\in\mathcal{L},\ \mathbf{v}\neq\mathbf{0}}|\mathbf{v}|$.

Теорема 4.2.2. *Нехай $d\in\mathbb{N}$, $\mathcal{L}$ – повновимірна решітка в $\mathbb{R}^d$ і $Q\subset\Pi(\mathcal{L})$ – скінченна множина вузлів. Тоді оператор $\Phi_{Q,\widetilde{W}^2_\infty(\mathcal{L})}$ є найкращим методом відновлення оператора $\mathrm{id}_{\widetilde{C}_\mathcal{L}}$ на класі $\widetilde{W}^2_\infty(\mathcal{L})$ за інформацією I'_Q. Також, якщо*

$$r\left(\mathbb{R}^d, Q+\mathcal{L}\right) < \frac{1}{2}J(\mathcal{L}),$$

то виконується рівність

$$\mathcal{E}^*_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\left(\mathrm{id}_{\widetilde{C}_\mathcal{L}}; \widetilde{W}^2_\infty(\mathcal{L}); I'_Q\right) = \frac{1}{4}r^2\left(\mathbb{R}^d, Q+\mathcal{L}\right). \tag{4.9}$$

Зауваження 4.2.3. *В теоремі 4.2.1 в загальному випадку виконується нерівність*

$$\mathcal{E}^*_{L_\infty(\Omega)}\left(\mathrm{id}_{C(\Omega)}; W^2_\infty(\Omega); I'_Q\right) \leqslant \max\left\{\frac{1}{4}\, r^2(\Omega, Q); \frac{1}{2}\, r^2(\partial\Omega, Q)\right\}. \tag{4.10}$$

Вочевидь, максимум в правій частині (4.10) *досягається на другій з величин, які в нього входять, якщо* $r(\Omega, Q) < \sqrt{2}\, r(\partial\Omega, Q)$. *Розглянемо випадок, коли ця нерівність виконується. Нехай* $\mathbf{y}_0$ *– найвіддаленіша точка на* $\partial\Omega$ *від множини* Q *і* $\mathbf{z}$ *– найближча точка в* Q *до точки* $\mathbf{y}_0$. *Розглянемо кулю, радіус якої вдвічі перевищує відстань між* $\mathbf{z}$ *і* $\mathbf{y}_0$, *а центр розташовано в точці* $\mathbf{t}$, *яка лежить на прямій, що проходить через точки* $\mathbf{z}$ *і* $\mathbf{y}_0$ *і симетрична точці* $\mathbf{z}$ *відносно* $\mathbf{y}_0$. *Якщо внутрішність цієї кулі не містить точок з множини* Q, *то*

$$\mathcal{E}^*_{L_\infty(\Omega)}\left(\mathrm{id}_{C(\Omega)}; W^2_\infty(\Omega); I'_Q\right) = \frac{r^2(\partial\Omega, X)}{2}.$$

Зауваження 4.2.4. *Апроксимант, побудований за допомогою алгоритму* $\Phi_{Q;W^2_\infty(\Omega)}$, *необов'язково належить класу* $W^2_\infty(\Omega)$ *і може, взагалі кажучи, бути як недиференційовним, так і не збігатися з відновлюваною функцією в точках системи* Q. *В [228] побудовано метод відновлення* Φ, *який має ці властивості, тобто* $\Phi\left(I'_Q x\right) \in W^2_\infty(\Omega)$ *для всіх* $x \in W^2_\infty(\Omega)$.

Для доведення теорем 4.2.1 та 4.2.2 встановимо декілька допоміжних тверджень. Для $a > 0$, позначимо

$$\varphi_a(t) := \begin{cases} \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{t^2}{2}, & t \in \left[0, \dfrac{a}{2}\right), \\ \dfrac{(a-t)^2_+}{2}, & t \geqslant \dfrac{a}{2}. \end{cases} \tag{4.11}$$

Неважко бачити, що $\varphi_a \in W^2_\infty([0,a])$ та $\varphi'_a(0) = \varphi'_a(a) = \varphi_a(a) = 0$.

Лема 4.2.1. *Нехай* $a > 0$. *Тоді*

$$\sup_{\substack{g \in W^2_\infty([0,a]): \\ g'(0) = g(a) = g'(a) = 0}} |g(0)| = \frac{a^2}{4},$$

а супремум досягається на функції φ_a.

Доведення. Нехай $g \in W^2_\infty([0,a])$ є такою, що $g'(0) = g(a) = g'(a) = 0$. Тоді для будь-якого $t \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$ маємо

$$|g'(t)| = |g'(t) - g'(0)| = \left|\int_0^t g''(u)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_0^t |g''(u)|\;\mathrm{d}u \leqslant \int_0^t \mathrm{d}u = t.$$

Для $t \in \left[\frac{a}{2}, a\right]$ ми також отримаємо

$$|g'(t)| = |g'(a) - g'(t)| = \left|\int_t^a g''(u)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_t^a |g''(u)|\;\mathrm{d}u \leqslant \int_t^a \mathrm{d}u = a - t.$$

Тому

$$|g(0)| = |g(a) - g(0)| \leqslant \int_0^a |g'(t)|\;\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{a/2} t\,\mathrm{d}t + \int_{a/2}^a (a-t)\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{4}.$$

Оскільки $\varphi_a \in W^2_\infty([0,a])$, $\varphi'_a(0) = \varphi_a(a) = \varphi'_a(a) = 0$, і $\varphi_a(0) = \frac{a^2}{4}$, ми отримаємо твердження леми 4.2.1. □

Для $a > 0$ означимо функцію $\psi_a(t) := \frac{(a-t)_+^2}{2}$, $t \in \mathbb{R}^0_+$, де $g_+ := \max\{g; 0\}$. Неважко бачити, що $\psi_a \in W^2_\infty([0,a])$ та $\psi_a(a) = \psi'_a(a) = 0$.

Лема 4.2.2. *Нехай $a > 0$. Тоді*

$$\sup_{\substack{g \in W^2_\infty[0,a] \\ g(a) = g'(a) = 0}} |g(0)| = \frac{a^2}{2},$$

а супремум в лівій частині досягається на функції ψ_a.

Доведення. Нехай $g \in W^2_\infty([0,a])$ – довільна функція така, що $g(a) = g'(a) = 0$. Для кожного $t \in [0,a]$ маємо

$$|g(0)| = \left|\int_0^a g''(u) \cdot u\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_0^a |g''(u)| \cdot u\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^a u\,\mathrm{d}u = \frac{a^2}{2}.$$

Оскільки $\psi_a \in W^2_\infty([0,a])$, $\psi_a(a) = \psi'_a(a) = 0$ і $\psi_a(0) = \frac{a^2}{2}$, то ми отримаємо справедливість твердження леми 4.2.2. □

Встановимо границю на зростання функцій з класу $W^2_\infty(\Omega)$, де Ω – тіло в $\mathbb{R}^d$.

Лема 4.2.3. *Нехай $d \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^d$ – опукле тіло і $f \in W^2_\infty(U)$. Тоді для довільних різних точок $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ функція*

$$g(t) = f\left(\mathbf{x} + \frac{t}{\alpha}(\mathbf{y} - \mathbf{x})\right), \qquad t \in [0, \alpha],$$

де $\alpha = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2$, належить класу $W^2_\infty([0,\alpha])$.

Доведення. Позначимо $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|_2}$. Тоді для $t \in (0, \alpha)$

$$g'(t) = \langle \nabla f\left(\mathbf{x} + t\mathbf{u}\right), \mathbf{u}\rangle = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x} + t\mathbf{u}),$$

де $< \cdot, \cdot >$ позначає стандартний скалярний добуток в $\mathbb{R}^d$. Нехай $t_1, t_2 \in [0, \alpha]$, $t_1 < t_2$, – довільні точки. Оберемо будь-яке $\varepsilon > 0$. Оскільки похідна $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}$ неперервна всередині U, то існує $\delta \in (0, \varepsilon)$ таке, що для всіх $\mathbf{y}$ та $\mathbf{z}$, для яких $\|\mathbf{y} - (\mathbf{x} + t_1\mathbf{u})\|_2 < \delta$ і $\|\mathbf{z} - (\mathbf{x} + t_2\mathbf{u})\|_2 < \delta$, мають місце нерівності:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\left(\mathbf{y} - (\mathbf{x} + t_1\mathbf{u})\right) - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\left(\mathbf{x} + t_1\mathbf{u}\right)\right| < \varepsilon$$

та

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\left(\mathbf{z} - (\mathbf{x} + t_2\mathbf{u})\right) - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\left(\mathbf{x} + t_2\mathbf{u}\right)\right| < \varepsilon.$$

Нехай $\mathbf{x}_\delta^1, \mathbf{x}_\delta^2 \in \operatorname{int} U$ задовольняють наступні умови:

1. $\left\|\mathbf{x} + t_j\mathbf{u} - \mathbf{x}_\delta^j\right\|_2 < \delta$ для будь-якого $j = 1, 2$;
2. існує $t^* \in \mathbb{R}$ таке, що $\mathbf{x}_\delta^2 = \mathbf{x}_\delta^1 + t^*\mathbf{u}$;
3. функція $h(t) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\left(\mathbf{x}_\delta^1 + t\mathbf{u}\right)$, $t \in [0, \alpha]$, локально абсолютно неперервна всередині області визначення і $|h'(t)| \leqslant 1$ для майже всіх t.

Такі точки $\mathbf{x}_\delta^1$ і $\mathbf{x}_\delta^2$ існують за означенням узагальненої похідної і того факту, що $\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{u}^2}\right\|_{L_\infty(U)} \leqslant 1$. Тоді

$$\begin{aligned}
|g'(t_1) - g'(t_2)| &= \left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\left(\mathbf{x} + t_1\mathbf{u}\right) - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\left(\mathbf{x} + t_2\mathbf{u}\right)\right| \\
&\leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\left(\mathbf{x}_\delta^1\right) - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\left(\mathbf{x}_\delta^2\right)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\left(\mathbf{x} + t_1\mathbf{u}\right) - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\left(\mathbf{x}_\delta^1\right)\right| + \\
&\quad + \left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\left(\mathbf{x}_\delta^2\right) - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\left(\mathbf{x} + t_2\mathbf{u}\right)\right| \leqslant |h(0) - h\left(t^*\right)| + 2\epsilon \leqslant |t^*| + 2\epsilon \\
&\leqslant |t_1 - t_2| + 2\delta + 2\epsilon \leqslant |t_1 - t_2| + 4\epsilon.
\end{aligned}$$

Спрямовуючи $\epsilon \to 0$, маємо нерівність $|g'(t_1) - g'(t_2)| \leqslant |t_1 - t_2|$ для всіх $t_1, t_2 \in [0, \alpha]$. Отже, g' абсолютно неперервна на $[0, \alpha]$ і $|g''(t)| \leqslant 1$ для майже всіх $t \in [0, \alpha]$. Лема 4.2.3 доведена. □

Лема 4.2.4. *Нехай $U \subset \mathbb{R}^d$ – опукле тіло і $f \in W_\infty^2(U)$. Якщо точка $\mathbf{y} \in U$ є такою, що $f(\mathbf{y}) = 0$ та $\nabla f(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, то для всіх $\mathbf{x} \in U$ виконується нерівність*

$$|f(\mathbf{x})| \leqslant \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2}{2}. \tag{4.12}$$

Доведення. Якщо $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, то рівність (4.12) тривіальна. Припустимо, що $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ і позначимо $\gamma = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2$. За лемою 4.2.3 функція

$$g(t) = f\left(\mathbf{x} + \frac{t}{\gamma}(\mathbf{y} - \mathbf{x})\right), \qquad t \in [0, \gamma],$$

належить класу $W^2_\infty([0,\gamma])$ та $g(\gamma) = g'(\gamma) = 0$. Тоді за лемою 4.2.2,

$$|f(\mathbf{x})| = |g(0)| \leqslant \frac{\gamma^2}{2} = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2}{2}.$$ □

Перейдемо до доведення основних результатів підрозділу.

Доведення теореми 4.2.1. Оптимальність метода $\Phi_{Q,W^2_\infty(\Omega)}$ випливає з (4.6) та (4.7). Переконаємося в справедливості співвідношення (4.8). Нехай $f \in W^2_\infty(\Omega)$ – довільна функція така, що $I'_Q(f) = \mathbf{0}$, а $\mathbf{x}_0 \in G$ є точкою максимуму функції $|f(\mathbf{x})|$ на Ω. Нехай також $\mathbf{z}$ – найближча точка в Q до точки $\mathbf{x}_0$. Позначимо $\beta := \|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\|_2$.

Спочатку розглянемо випадок, коли $\mathbf{x}_0$ міститься всередині Ω. Тоді $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. За лемою 4.2.3 функція

$$g(t) = f\left(\mathbf{x}_0 + \frac{t}{\beta}(\mathbf{z} - \mathbf{x}_0)\right), \qquad t \in [0, \beta],$$

належить класу $W^2_\infty([0,\beta])$. Оскільки $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, то $g'(0) = 0$, а оскільки $\mathbf{z}$ є точкою, в якій одночасно обертаються в нуль f та ∇f, то $g(\beta) = g'(\beta) = 0$. Тому за лемою 4.2.1

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = |f(\mathbf{x}_0)| = |g(0)| \leqslant \frac{\beta^2}{4} = \frac{\|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\|_2^2}{4} = \frac{(\operatorname{dist}(\mathbf{x}_0, Q))^2}{4} \leqslant \frac{r^2(\Omega, Q)}{4}. \quad (4.13)$$

Далі розглянемо випадок, коли $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$. Оскільки $f(\mathbf{z}) = 0$ і $\nabla f(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$, то за лемою 4.2.4 ми отримаємо

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = |f(\mathbf{x}_0)| \leqslant \frac{\|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\|_2{}^2}{2} = \frac{(\operatorname{dist}(\mathbf{x}_0, Q))^2}{2} \leqslant \frac{r^2(\partial\Omega, Q)}{2}. \quad (4.14)$$

Зі співвідношень (4.13), (4.14), (4.6), (4.7), маємо

$$\mathcal{E}^*_{L_\infty(\Omega)}\big(\mathrm{id}_{C(\Omega)}; W^2_\infty(\Omega); I'_Q\big) = \sup_{\substack{f \in W^2_\infty(\Omega):\\ I'_Q(f) = \mathbf{0}}} \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \max\left\{\frac{r^2(\Omega, Q)}{4}, \frac{r^2(\partial\Omega, Q)}{2}\right\}, \quad (4.15)$$

що доводить співвідношення (4.10) в зауваженні 4.2.3. Нехай $\mathbf{y}$ – довільна точка в $\Omega \setminus Q$. Позначимо $a := \operatorname{dist}(\mathbf{y}, Q)$ і $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) := \varphi_a(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)$, $\mathbf{x} \in \Omega$. Неважко бачити, що $f_{\mathbf{y}} \in W^2_\infty(\Omega)$ і $I'_Q(f_{\mathbf{y}}) = \mathbf{0}$. Тоді

$$\|f_{\mathbf{y}}\|_{L_\infty(\Omega)} = |\varphi_a(0)| = \frac{a^2}{4} = \frac{1}{4}\left(\operatorname{dist}(\mathbf{y}, Q)\right)^2,$$

і, отже, зі співвідношень (4.6), (4.7),

$$\mathcal{E}^*_{L_\infty(\Omega)}\big(\mathrm{id}_{C(\Omega)}; W^2_\infty(\Omega); I'_Q\big) = \sup_{\substack{f \in W^2_\infty(\Omega):\\ I'_Q(f)=\mathbf{0}}} \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \geqslant \sup_{\mathbf{y} \in G \setminus Q} \|f_{\mathbf{y}}\|_{L_\infty(\Omega)} = \frac{1}{4} r^2(\Omega, Q). \quad (4.16)$$

Якщо $r(\Omega, Q) \geqslant \sqrt{2}\, r(\partial\Omega, Q)$, то зі співвідношень (4.15) і (4.16) матимемо

$$\mathcal{E}^*_{L_\infty(\Omega)}\big(\mathrm{id}_{C(\Omega)}; W^2_\infty(\Omega); I'_Q\big) = \frac{1}{4} r^2(\Omega, Q),$$

що завершує доведення теореми 4.2.1. □

Для доведення теореми 4.2.2 нам знадобиться наступне твердження.

Лема 4.2.5. *Нехай $\mathcal{L}$ – повновимірна решітка в $\mathbb{R}^d$ і $0 < a < \frac{J(\mathcal{L})}{2}$. Тоді функція*

$$f_a(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{L}} \varphi_a\left(\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|_2\right), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

де φ_a означена в (4.11), належить класу $\widetilde{W}^2_\infty(\mathcal{L})$, обертається в нуль разом зі своїм градієнтом в кожній точці $\mathbf{x}$, в якій $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{L}) \geqslant a$, і $\|f_a\|_{L_\infty(\Pi(\mathcal{L}))} = \frac{a^2}{4}$.

Доведення. Позначимо

$$P := \bigcup_{\mathbf{v} \in \mathcal{L}} B(\mathbf{v}; a),$$

де $B(\mathbf{v}; a)$ – куля в просторі $\mathbb{R}^d$ з центром в точці $\mathbf{v}$ і радіусом a. Кулі з об'єднання в означенні множини P попарно не перетинаються, а сама P є замкненою. Отже, для кожного $\mathbf{x} \in P$ сума в означенні f_a містить щонайбільше один ненульовий елемент і f_a обертається в нуль разом зі своїм градієнтом в кожній точці $\mathbf{x}$, в якій $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{L}) \geqslant a$. Неважко бачити, що f_a є $\mathcal{L}$-періодичною. В силу властивостей функції $\varphi_a(|\mathbf{x}|)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, маємо, що $f_a \in \widetilde{W}^2_\infty(\mathcal{L})$. Тоді

$$\|f_a\|_{L_\infty(\Pi(\mathcal{L}))} = \varphi_a(\mathbf{0}) = \frac{a^2}{4}.$$

□

Доведення зауваження 4.2.3. Співвідношення (4.10) було встановлено при доведенні теореми 4.2.1. Припустимо, що $r(\Omega, Q) < \sqrt{2}\, r(\partial\Omega, Q)$. Нехай точка $\mathbf{y}_0 \in \partial\Omega$ є такою, що $\operatorname{dist}(\mathbf{y}_0, Q) = r(\partial\Omega, Q)$, $\mathbf{z}$ є найближчою до $\mathbf{y}_0$ точкою в Q, та $\mathbf{t} = 2\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}$. Припустимо, що $\operatorname{dist}(\mathbf{t}, Q) \geqslant 2\left\|\mathbf{z} - \mathbf{y}_0\right\|_2$. Оскільки $\operatorname{dist}(\mathbf{t}, \mathbf{z}) = 2\left\|\mathbf{z} - \mathbf{y}_0\right\|_2$, то, насправді, ми маємо $\operatorname{dist}(\mathbf{t}, X) = 2\left\|\mathbf{z} - \mathbf{y}_0\right\|_2$. Нехай $b = 2\left\|\mathbf{z} - \mathbf{y}_0\right\|_2$ і $f_*(\mathbf{x}) := \varphi_b\left(\left\|\mathbf{x} - \mathbf{t}\right\|_2\right)$. Так як $f_* \in W^2_\infty(\Omega)$ і $I'_Q\left(f_*\right) = \mathbf{0}$, то

$$\mathcal{E}^*_{L_\infty(\Omega)}\big(\mathrm{id}_{C(\Omega)}; W^2_\infty(\Omega); I'_Q\big) = \sup_{\substack{f\in W^2_\infty(\Omega):\\ I'_Q(f)=\mathbf{0}}} \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \geqslant \|f_*\|_{L_\infty(\Omega)} \geqslant |f_*(\mathbf{y}_0)| = \varphi_b\left(\left\|\mathbf{z} - \mathbf{y}_0\right\|_2\right)$$
$$= \varphi_b\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{b^2}{8} = \frac{\left\|\mathbf{z} - \mathbf{y}_0\right\|_2^2}{2} = \frac{\left(\operatorname{dist}\left(\mathbf{y}_0, Q\right)\right)^2}{2} = \frac{r^2(\partial\Omega, Q)}{2}.$$

Враховуючи співвідношення (4.10), отримаємо

$$\mathcal{E}^*_{L_\infty(G)}\big(\mathrm{id}_{C(\Omega)}; W^2_\infty(\Omega); I'_Q\big) = \frac{1}{2}\, r^2(\partial\Omega; Q),$$

що завершує доведення зауваження 4.2.3. □

Доведення теореми 4.2.2. Оптимальність метода відновлення $\Phi_{Q, \widetilde{W}^2_\infty(\mathcal{L})}$ є наслідком зі співвідношень (4.6) та (4.7). Доведемо співвідношення (4.9). Нехай $f \in \widetilde{W}^2_\infty(\mathcal{L})$ – довільна функція, для якої $I'_Q(f) = \mathbf{0}$, і нехай $\mathbf{y}_0 \in \Pi(\mathcal{L})$ є такою, що $\|f\|_{L_\infty(\Pi(\mathcal{L}))} = |f(\mathbf{y}_0)|$. Позначимо через $\mathbf{z}$ точку множини $Q + \mathcal{L}$, в якій $\left\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}\right\|_2 = \operatorname{dist}\left(\mathbf{y}_0, Q + \mathcal{L}\right)$, і нехай $\beta = \left\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}\right\|_2$ та $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{z} - \mathbf{y}_0}{\beta}$. За лемою 4.2.3, функція

$$g(t) = f\left(\mathbf{y}_0 + t\mathbf{u}\right), \qquad t \in [0, \beta],$$

належить класу $W^2_\infty([0, \beta])$. За вибором точки $\mathbf{y}_0$, маємо $g'(0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\left(\mathbf{y}_0\right) = 0$. Зрозуміло, що $g(\beta) = f\left(\mathbf{y}_0 + \beta\mathbf{u}\right) = f(\mathbf{z}) = 0$, $g'(\beta) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\left(\mathbf{y}_0 + \beta\mathbf{u}\right) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{z}) = 0$. Отже, за лемою 4.2.1 ми отримаємо

$$\|f\|_{L_\infty(\Pi(\mathcal{L}))} = |f\left(\mathbf{y}_0\right)| = |g(0)| \leqslant \frac{\beta^2}{4} = \frac{\left\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}\right\|_2^2}{4} = \frac{\operatorname{dist}^2\left(\mathbf{y}_0, Q + \mathcal{L}\right)}{4} \leqslant \frac{r^2\left(\mathbb{R}^d, Q + \mathcal{L}\right)}{4}.$$

Тому в силу співвідношень (4.6) та (4.7), мають місце співвідношення

$$\mathcal{E}^*_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\left(\mathrm{id}_{\widetilde{C}_{\mathcal{L}}}; \widetilde{W}^2_\infty(\mathcal{L}); I'_Q\right) = \sup_{\substack{f\in \widetilde{W}^2_\infty(\mathcal{L}):\\ I'_Q(f)=\mathbf{0}}} \|f\|_{L_\infty(\Pi(\mathcal{L}))} \leqslant \frac{r^2\left(\mathbb{R}^d, Q + \mathcal{L}\right)}{4}. \tag{4.17}$$

Нехай $\mathbf{z}_0 \in \Pi(\mathcal{L})$ є такою, що $b := \operatorname{dist}(\mathbf{z}_0, Q+\mathcal{L}) = r\left(\mathbb{R}^d, Q+\mathcal{L}\right)$. Оскільки за означенням $b < \frac{J(\mathcal{L})}{2}$, а інформаційний оператор I'_Q обертається в нуль на функції $f_b(\mathbf{x}-\mathbf{z}_0)$, то за лемою 4.2.5 і співвідношеннями (4.6) та (4.7), маємо

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^*_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\left(\mathrm{id}_{\widetilde{C}_{\mathcal{L}}}; \widetilde{W}^2_\infty(\mathcal{L}); I'_Q\right) &= \sup_{\substack{f\in\widetilde{W}^2_\infty(\mathcal{L}):\\ I'_Q(f)=\mathbf{0}}} \|f\|_{L_\infty(\Pi(\mathcal{L}))} \geqslant \|f_b(\cdot-\mathbf{z}_0)\|_{L_\infty(\Pi(\mathcal{L}))} = \frac{b^2}{4}\\ &= \frac{1}{4} r^2\left(\mathbb{R}^d, Q+\mathcal{L}\right),\end{aligned}$$

що разом з (4.17) дає (4.9). Теорема 4.2.2 доведена. □

4.3. Найкраще відновлення інтегральних операторів з невід'ємним ядром та їх сум

В цьому підрозділі наведено результати роботи [191] щодо найкращого відновлення позитивних інтегральних операторів на класах функцій з заданою мажорантою модуля неперервності за інформацією про значення функцій в скінченній системі точок, які відомі з похибкою. Ми також сформулюємо розв'язок задачі про найкраще відновлення сум інтегральних операторів, який можна безпосередньо застосовувати для розв'язання задач найкращого відновлення розв'язків граничних задач для рівнянь в частинних похідних (див. [191]).

Розпочнемо з позначень, які нам будуть необхідні для наведення загальних міркувань щодо розв'язання задачі про найкраще відновлення позитивних операторів та сум позитивних операторів.

Для $l, m \in \mathbb{N}$ нехай $\{X_j\}_{j=1}^m$ та $\{Z_j\}_{j=1}^m$ – набори дійсних лінійних просторів, $\{Y_i\}_{i=1}^l$ – набір дійсних нормовних просторів. Означимо

$$\overline{X} := X_1 \times \ldots \times X_m, \qquad \overline{Y} := Y_1 \times \ldots \times Y_l, \qquad \overline{Z} := Z_1 \times \ldots \times Z_m.$$

Будемо записувати елементи просторів $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ як вектор-стовпці. Наприклад, $\overline{x} \in \overline{X}$ – вектор-стовпець, який складається з елементів $x_1, x_2, \ldots, x_m$, де $x_j \in X_j$, $j = 1, \ldots, m$. Це дозволяє нам ввести в просторах $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ природну покоординатну лінійну структуру. Також в просторі $\overline{Y}$ введемо норму

$$\|\overline{y}\|_{\overline{Y}} = \|\overline{y}\|_\psi := \psi\left(\|y_1\|_{Y_1}, \ldots, \|y_l\|_{Y_l}\right), \tag{4.18}$$

де ψ – довільна норма в $\mathbb{R}^l$, монотонна відносно покоординатного часткового порядку в $\mathbb{R}^l$. Через θ_X будемо позначати нуль лінійного простору X. Оскільки з контексту буде зрозуміло, про які простори йде мова, ми будемо опускати символ простору в позначенні.

Для набору лінійних операторів $A_{i,j} : X_j \to Y_i$, $i = 1,\ldots,l$ і $j = 1,\ldots,m$, з областями визначення $D\left(A_{i,j}\right)$, розглянемо операторну матрицю

$$\overline{A} := \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{l,1} & A_{l,2} & \cdots & A_{l,m} \end{pmatrix}.$$

Матриця $\overline{A}$ означає оператор $\overline{A} : \overline{X} \to \overline{Y}$, який відображає елемент $\overline{x} \in \overline{X}$ в елемент $\overline{y} = \overline{A}\overline{x}$, що є результатом формального множення матриці $\overline{A}$ на вектор-стовпець $\overline{x}$, тобто для всіх $i = 1,\ldots,l$ елемент y_i означено наступним чином:

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} A_{i,j} x_j.$$

Для заданого набору чисел $\sigma_j \in \{-1, 1\}$, $j = 1,\ldots,m$, через σ позначимо діагональну матрицю $\sigma = \operatorname{diag}\left(\sigma_1,\ldots,\sigma_m\right)$. Означимо добуток операторної матриці $\overline{A}$ на матрицю σ як результат формального множення відповідних матриць, тобто $\overline{A}\sigma$ є операторна матриця:

$$\overline{A}\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 A_{1,1} & \sigma_2 A_{1,2} & \cdots & \sigma_m A_{1,m} \\ \sigma_1 A_{2,1} & \sigma_2 A_{2,2} & \cdots & \sigma_m A_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1 A_{l,1} & \sigma_2 A_{l,2} & \cdots & \sigma_m A_{l,m} \end{pmatrix}.$$

В кожному з просторів X_j, $j = 1,\ldots,m$, оберемо клас елементів $W_j \subset \bigcap\limits_{i=1}^{l} D(A_{i,j})$, і розглянемо декартів добуток класів W_j і їх лінійних оболонок:

$$\overline{W} := W_1 \times \ldots \times W_m \subset \overline{X} \quad \text{та} \quad \overline{\operatorname{span} W} := \operatorname{span} W_1 \times \ldots \times \operatorname{span} W_m.$$

Припустимо, що задано набір інформаційних операторів $I_j : \operatorname{span} W_j \to Z_j$, $j = 1,\ldots,m$, та означимо операторну матрицю $\overline{I} = \operatorname{diag}\left(I_1,\ldots,I_m\right) : \overline{\operatorname{span} W} \to \overline{Z}$.

Для набору операторів $L_j : Z_j \to X_j$, $j = 1, \dots, m$, через $\overline{A}\,\overline{L}$ позначимо операторну матрицю, яка є результатом множення операторних матриць $\overline{A}$ та $\overline{L} = \mathrm{diag}\,(L_1, \dots, L_m)$, де під $A_{i,j}L_j$ ми розуміємо композицію операторів $A_{i,j}$ і L_j.

Нарешті, для непорожніх множин $U_1, \dots U_m$ в просторах $Z_1, \dots, Z_m$, відповідно, означимо $\overline{U} = U_1 \times \dots \times U_m$.

Встановимо нижню оцінку величини $\mathcal{E}^*_{\overline{Y}}\left(\overline{A}; \overline{W}; \overline{I}; \overline{U}\right)$. Для цього означимо клас:

$$\overline{W}(\overline{U}) := \left\{\overline{x} \in \overline{W}\ :\ \left(\overline{I}\overline{x} + \overline{U}\right) \cap \left(\overline{I}(-\overline{x}) + \overline{U}\right) \neq \emptyset\right\}$$

Наступне твердження було отримано в статті [191].

Твердження 4.3.1. *Якщо для кожного $i = 1, \dots, l$ та $j = 1, \dots, m$ оператор $A_{i,j}$ є непарним, $\overline{W}(\overline{U}) \neq \varnothing$ та клас W_j – центрально симетричний для кожного $j = 1, \dots, m$, то*

$$\mathcal{E}^*_{\overline{Y}}\left(\overline{A}; \overline{W}; \overline{I}; \overline{U}\right) \geqslant \sup_{\overline{x} \in \overline{W}(\overline{U})} \left\|\overline{A}\overline{x}\right\|_\psi .$$

Доведення. Для будь-якого метода відновлення $\Phi : \overline{Z} \to \overline{Y}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\overline{Y}}\left(\overline{A}; \overline{W}; \overline{I}; \overline{U}; \Phi\right) &= \sup_{\left\{\overline{x} \in \overline{W} \,:\, \overline{z} \in \overline{I}\overline{x} + \overline{U}\right\}} \|\overline{A}\overline{x} - \Phi\overline{z}\|_\psi \\
&\geqslant \max\left\{\sup_{\left\{\overline{x} \in \overline{W} \,:\, \overline{z} \in \overline{I}\overline{x} + \overline{U}\right\}} \|\overline{A}\overline{x} - \Phi\overline{z}\|_\psi,\ \sup_{\left\{-\overline{x} \in \overline{W} \,:\, \overline{z} \in \overline{I}(-\overline{x}) + \overline{U}\right\}} \|-\overline{A}\overline{x} - \Phi\overline{z}\|_\psi\right\} \\
&\geqslant \frac{1}{2} \sup_{\overline{x} \in \overline{W}(\overline{U})} \left\{\left\|\overline{A}\overline{x} - \Phi\overline{z}\right\|_\psi + \left\|\overline{A}\overline{x} + \Phi\overline{z}\right\|_\psi\right\} \geqslant \sup_{\overline{x} \in \overline{W}(\overline{U})} \left\|\overline{A}\overline{x}\right\|_\psi . \qquad \square
\end{aligned}$$

Зокрема, якщо $\overline{I}$ – парний оператор, то умова $\left(\overline{I}\overline{x} + \overline{U}\right) \cap \left(\overline{I}(-\overline{x}) + \overline{U}\right) \neq \varnothing$ виконується для будь-якого $\overline{x} \in \overline{W}$. Також, неважко переконатися в тому, що справджується наступний наслідок з твердження 4.3.1.

Твердження 4.3.2. *Нехай виконуються припущення твердження 4.3.1. Також нехай для всіх $j = 1, \dots, m$ оператор I_j є непарним, множина U_j є центрально симетричною, та $\overline{I}\,\overline{W} \cap \overline{U} \neq \varnothing$. Тоді*

$$\mathcal{E}^*_{\overline{Y}}\left(\overline{A}; \overline{W}; \overline{I}; \overline{U}\right) \geqslant \sup_{\left\{\overline{x} \in \overline{W} \,:\, \overline{I}\overline{x} \in \overline{U}\right\}} \left\|\overline{A}\overline{x}\right\|_\psi . \tag{4.19}$$

Зазначимо, що твердження 4.3.2 для індивідуального оператора наведено в твердженні леми 1 статті [122].

4.3.1. Найкраще відновлення позитивних операторів

Оцінка знизу, яку дає твердження 4.3.2, не завжди є точною. Тому становить інтерес знаходження достатніх умов, за яких нерівність (4.19) обертається в рівність. Слідуючи [324] введемо поняття впорядкованого векторного простору, нормовної решітки та позитивного оператора.

Означення 4.3.1. *Для заданого дійсного лінійного простору X і часткового порядку "$\prec_X$" на X будемо називати пару $(X, \prec_X)$ впорядкованим векторним простором, якщо:*

1. *з $x \prec_X y$ випливає, що $x + z \prec_X y + z$ для всіх $x, y, z \in X$;*
2. *з $x \prec_X y$ випливає, що $\lambda x \prec_X \lambda y$ для всіх $x, y \in X$ та $\lambda \in \mathbb{R}_+$.*

В подальшому для спрощення (коли це не призводитиме до неоднозначностей), ми будемо опускати символ часткового порядку "$\prec_X$" в позначенні впорядкованого векторного простору $(X, \prec_X)$.

Означення 4.3.2. *Впорядкований векторний простір X називається векторною решіткою (або просторомРіса), якщо кожні два елементи $x, y \in X$ мають супремум $x \vee y := \sup\{x; y\}$ та інфімум $x \wedge y := \inf\{x; y\}$.*

Для векторної решітки X через $|x| := x \vee (-x)$ позначимо абсолютне значення $x \in X$. Будемо називати норму на векторній решітці X *решітковою нормою*, якщо з $|x| \prec_X |y|$ випливає, що $\|x\| \leqslant \|y\|$, для всіх $x, y \in X$.

Означення 4.3.3. *Нормовною решіткою називається дійсний нормовний простір X з частковим порядком "$\prec_X$" на ньому, для якого $(X, \prec_X)$ є векторною решіткою, а норма на X є решітковою нормою.*

Зазначимо, що для заданого набору впорядкованих векторних просторів X_j, $j = 1, \ldots, m$, їх декартів добуток $\overline{X}$ також є впорядкованим векторним простором відносно природного часткового порядку "$\prec_{\overline{X}}$":

$$(\overline{x}' \prec_{\overline{X}} \overline{x}'') \Leftrightarrow (\forall j = 1, \ldots, m,\ x_j' \prec_{X_j} x_j'').$$

Аналогічним чином, для набору нормовних решіток Y_i, $i = 1, \ldots, l$, їх декартів добуток $\overline{Y}$ також є нормовною решіткою відносно норми $\| \cdot \|_\psi$, що означена рівністю (4.18) і частковим порядком "$\prec_{\overline{Y}}$".

Нарешті, означимо позитивний оператор між впорядкованими векторними просторами.

Означення 4.3.4. *Нехай X і Y – впорядковані векторні простори. Лінійний оператор $T : X \to Y$ називається позитивним, якщо $\theta \prec_Y Tx$, як тільки $\theta \prec_X x$.*

Наведемо тепер результати щодо розв'язку задачі найкращого відновлення позитивних операторів і, зокрема, тотожного оператора. Ці результати стосуються встановлення достатніх умов, за яких, знаючи метод найкращого відновлення тотожного оператора на кожному з класів W_j за інформацією I_j, яка відома з похибкою U_j, ми можемо найкращим чином відновити довільну операторну матрицю $\overline{A}$, яка складається з позитивних операторів (та, навіть, операторну матрицю $\overline{A}\sigma$) на класі $\overline{W}$ за інформацією $\overline{I}$ з похибкою $\overline{U}$.

Нехай X – нормовна решітка. Нагадаємо, що id_X є тотожним оператором на просторі X, тобто $\mathrm{id}_X(x) = x$ для всіх $x \in X$. Розглянемо спочатку задачу найкращого відновлення тотожного оператора. Нехай Z – дійсний лінійний простір, $W \subset X$ – центрально симетричний клас, $I : X \to Z$ – непарний інформаційний оператор, а $U \subset Z$ – непорожня центрально симетрична множина.

Твердження 4.3.3. *Якщо існує оператор $L : Z \to X$ і елемент $\varphi \in W$, $I\varphi \in U$, такі, що для всіх $x \in W$*

$$(z \in Ix + U) \;\Rightarrow\; (-\varphi \prec_X x - Lz \prec_X \varphi), \tag{4.20}$$

то L є найкращим методом відновлення оператора id_X на класі W за інформацією I з U-похибкою та

$$\mathcal{E}^*_Y(\mathrm{id}_X; W; I; U) = \mathcal{E}_Y(\mathrm{id}_X; W; I; U; L) = \|\varphi\|_X .$$

Доведення. За припущенням, $-\varphi \prec_X x - Lz \prec_X \varphi$ для всіх $x \in W$ і $z \in Ix + U$. Оскільки X – нормовна решітка, то з останніх нерівностей отримаємо

$$\|x - Lz\|_X \leqslant \|\varphi\|_X.$$

Отже,

$$\mathcal{E}^*_Y(\mathrm{id}_X; W; I; U) \leqslant \mathcal{E}_Y(\mathrm{id}_X; W; I; U; L) = \sup_{x \in W} \sup_{z \in Ix+U} \|x - Lz\|_X \leqslant \|\varphi\|_X.$$

З іншого боку, $I\varphi \in U$. Тому за твердженням 4.3.2 матимемо

$$\mathcal{E}_Y^* (\mathrm{id}_X; W; I; U) \geqslant \sup_{\{x \in W \,:\, Ix \in U\}} \|x\|_X \geqslant \|\varphi\|_X. \qquad \square$$

Тепер наведемо результат щодо найкращого відновлення позитивних операторів, який є наслідком твердження 4.3.3.

Твердження 4.3.4. *В умовах твердження 4.3.3 припустимо, що Y – нормовна решітка і $A : X \to Y$ – позитивний оператор з областю визначення $\mathcal{D}(A)$, $W \subset \mathcal{D}(A)$. Тоді $\Phi = AL$ є найкращим методом відновлення оператора A на класі W за інформацією I з U-похибкою та*

$$\mathcal{E}_Y^* (A; W; I; U) = \mathcal{E}_Y (A; W; I; U; \Phi) = \|A\varphi\|_Y .$$

Доведення. Дійсно, нехай $x \in W$ і $z \in Ix + U$ є довільними. Згідно з (4.20) ми маємо $-\varphi \prec_X x - Lz \prec_X \varphi$. Отже, в силу позитивності оператора A ми отримаємо

$$-A\varphi \prec_Y Ax - ALz \prec_Y A\varphi.$$

Приймаючи до уваги, що $\|\cdot\|_Y$ – решіткова норма, отримаємо

$$\|Ax - ALz\|_Y \leqslant \|A\varphi\|_Y ,$$

а тому

$$\mathcal{E}_Y^* (A; W; I; U) \leqslant \mathcal{E}_Y (A; W; I; U; AL) \leqslant \|A\varphi\|_Y.$$

Нерівність з протилежним знаком випливає з твердження 4.3.2. $\square$

Зауваження 4.3.1. *В твердженні 4.3.4 умову про те, що X є нормовною решіткою, можна послабити до наступного: X є впорядкованим векторним простором.*

Розглянемо узагальнення тверджень 4.3.4 на випадок задачі найкращого відновлення операторних матриць. Для формулювання відповідних результатів введемо наступні позначення: нехай $X_1, \ldots, X_m$ – впорядковані векторні простори, $Z_1, \ldots, Z_m$ – дійсні лінійні простори і $Y_1, \ldots, Y_l$ – нормовні решітки, де $m, l \in \mathbb{N}$. Також нехай $A_{i,j} : X_j \to Y_i$, $j = 1, \ldots, m$ і $i = 1, \ldots, l$, – позитивні оператори з областями визначення $\mathcal{D}(A_{i,j})$, та $I_j : X_j \to Z_j$, $j = 1, \ldots, m$, –

непарні інформаційні оператори. Нехай також $W_j \subset \bigcap_{i=1}^{l} \mathcal{D}(A_{i,j})$, $j = 1, \ldots, m$, – центрально симетричні класи і $U_j \subset Z_j$, $j = 1, \ldots, m$, – центрально симетричні множини. Нарешті, нехай $\psi : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ – довільна норма, монотонна відносно природного часткового порядку в $\mathbb{R}^l$.

Теорема 4.3.1. *Якщо для кожного $j = 1, \ldots, m$ існують оператор $L_j : Z_j \to X_j$ і функція $\varphi_j \in W_j$, $I_j\varphi_j \in U_j$, є такою, що для всіх $\overline{x} \in \overline{W}$ і $\overline{z} \in \overline{Z}$*

$$\left(\overline{z} \in \overline{I}\overline{x} + \overline{U}\right) \;\Rightarrow\; \left(\forall j = 1, \ldots, m,\; -\varphi_j \prec_{X_j} x_j - L_j z_j \prec_{X_j} \varphi_j\right),$$

то для всіх $\sigma = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$, $\sigma_j \in \{-1, 1\}$, $j = 1, \ldots, m$, оператор $\Phi = \overline{A}\sigma\overline{L}$ є найкращим методом відновлення оператора $\overline{A}\sigma$ на класі $\overline{W}$ за інформацією $\overline{I}$ з $\overline{U}$-похибкою. Крім того,

$$\mathcal{E}^*_{\overline{Y}}\left(\overline{A}\sigma; \overline{W}; \overline{I}; \overline{U}\right) = \mathcal{E}_{\overline{Y}}\left(\overline{A}\sigma; \overline{W}; \overline{I}; \overline{U}; \Phi\right) = \left\|\overline{A}\overline{\varphi}\right\|_{\psi}.$$

Доведення. Нехай $\overline{x} \in \overline{W}$ та $\overline{z} \in \overline{I}\overline{x} + \overline{U}$. Тоді для всіх $j = 1, \ldots, m$ маємо

$$-\varphi_j \prec_{X_j} x_j - L_j z_j \prec_{X_j} \varphi_j.$$

Оскільки оператори A_{ij} лінійні та позитивні, ми отримаємо

$$-A_{i,j}\varphi_j \prec_{Y_i} A_{i,j}(x_j - L_j z_j) = A_{i,j}x_j - A_{i,j}L_j z_j \prec_{Y_i} A_{i,j}\varphi_j.$$

З останніх співвідношень можемо зробити висновок, що для всіх $\sigma_j \in \{-1, 1\}$ справджуються нерівності

$$-A_{i,j}\varphi_j \prec_{Y_i} \sigma_j A_{i,j}x_j - \sigma_j A_{i,j}L_j z_j \prec_{Y_i} A_{i,j}\varphi_j,$$

підсумовуючи які за індексом j, неважко бачити, що

$$-\sum_{j=1}^{m} A_{i,j}\varphi_j \prec_{Y_i} \sum_{j=1}^{m} \sigma_j A_{i,j}x_j - \sum_{j=1}^{m} \sigma_j A_{i,j}L_j z_j \prec_{Y_i} \sum_{j=1}^{m} A_{i,j}\varphi_j.$$

Таким чином,

$$\left|\sum_{j=1}^{m} \sigma_j A_{i,j}x_j - \sum_{j=1}^{m} \sigma_j A_{i,j}L_j z_j\right| \prec_{Y_i} \sum_{j=1}^{m} A_{i,j}\varphi_j.$$

Оскільки $\|\cdot\|_{Y_i}$ решіткова норма, з останньої нерівності отримаємо

$$\left\|\sum_{j=1}^{m} \sigma_j A_{i,j}x_j - \sum_{j=1}^{m} \sigma_j A_{i,j}L_j z_j\right\|_{Y_i} \leqslant \left\|\sum_{j=1}^{m} A_{i,j}\varphi_j\right\|_{Y_i},$$

а оскільки $\Phi = \overline{A}\sigma\overline{L}$, то $\left\|\overline{A}\sigma\overline{x} - \overline{A}\sigma\overline{L}\overline{z}\right\|_\psi = \left\|\overline{A}\sigma\overline{x} - \Phi\overline{z}\right\|_\psi \leqslant \left\|\overline{A}\overline{\varphi}\right\|_\psi$. Отже,

$$\mathcal{E}_{\overline{Y}}\left(\overline{A}\sigma;\overline{W};\overline{I};\overline{U};\Phi\right) \leqslant \mathcal{E}^*_\psi\left(\overline{A}\sigma;\overline{W};\overline{I};\overline{U}\right) \leqslant \left\|\overline{A}\overline{\varphi}\right\|_\psi.$$

Для доведення оцінки знизу помітимо, що $\sigma\overline{\varphi} \in \overline{W}$ та $\overline{I}(\sigma\overline{\varphi}) \in \overline{U}$. Тому за твердженням 4.3.2 отримаємо

$$\mathcal{E}^*_{\overline{Y}}\left(\overline{A}\sigma;\overline{W};\overline{I};\overline{U}\right) \geqslant \sup_{\left\{\overline{x}\in\overline{W}\,:\,\overline{I}\overline{x}\in\overline{U}\right\}} \left\|\overline{A}\sigma\overline{x}\right\|_\psi \geqslant \left\|\overline{A}\sigma(\sigma\overline{\varphi})\right\|_\psi = \left\|\overline{A}\overline{\varphi}\right\|_\psi,$$

адже $\sigma\sigma = \mathrm{diag}\,(1,\ldots,1)$ є одиничною матрицею. □

4.3.2. Найкраще відновлення інтегральних операторів з невід'ємним ядром та їх сум на класах функцій з заданою мажорантою модуля неперервності

Застосуємо теорему 4.3.1 для розв'язання задачі найкращого відновлення інтегральних операторів та сум інтегральних операторів з невід'ємними ядрами на класах функцій з заданою мажорантою модуля неперервності за значеннями цих функцій в заданій скінченній системі точок, які відомі з похибкою.

Слідуючи [183] (див. також [102]), введемо поняття інтегрального оператора в метричному просторі. Спочатку, нехай (M,μ) – простір з σ-скінченною мірою, тобто M – деяка множина, а μ – σ-скінченна міра на σ-алгебрі Σ_M підмножин M. Через $\mathfrak{M}\,(M,\mu)$ позначимо простір всіх μ-вимірних та μ-м.с. скінченних функцій, означених на M, зі звичайним ототожненням μ-еквівалентних функцій. Зрозуміло, що простір $\mathfrak{M}\,(M,\mu)$ можна оснастити природним частковим порядком "$\prec$": для всіх $x', x'' \in \mathfrak{M}\,(M,\mu)$,

$$(x' \prec x'') \;\Leftrightarrow\; (|x'(t)| \leqslant |x''(t)| \text{ для } \mu - \text{м.в. } t \in M).$$

Отже, ми простір $\mathfrak{M}\,(M,\mu)$ є впорядкованим векторним простором.

Означення 4.3.5 (див. [183], [102, Розділ 1, §2]). *Нехай (M,μ) і (N,ν) – простори зі σ-скінченними додатними мірами, E – лінійний підпростір в $\mathfrak{M}(M,\mu)$. Лінійний оператор $T : E \to \mathfrak{M}(N,\nu)$ називається інтегральним оператором, якщо існує $\nu\times\mu$-вимірна функція $K(s,t)$ така, що для всіх $x \in E$*

$$Tx(s) := \int_M K(s,t)\,x(t)\,\mathrm{d}\mu(t), \qquad \textit{для } \nu - \textit{м.в. } s \in N.$$

Інтеграл вище розуміється в смислі Лебега, а функція $K(s,t)$ називається ядром оператора T.

Зауваження 4.3.2. *Зрозуміло, що інтегральний оператор є позитивним, якщо його ядро є $\nu \times \mu$-м.с. невід'ємним.*

Розглянемо спеціальні множини M, які є метричними просторами. Нехай $M = M_\rho$ є метричний простір з метрикою ρ. Через Σ_ρ позначимо борелівську σ-алгебру підмножин в M_ρ, тобто мінімальну σ-алгебру, породжену відкритими множинами в M_ρ. Нехай $\mu : \Sigma_\rho \to \mathbb{R}_+$ – довільна невід'ємна σ-скінченна міра. Для зручності, якщо клас еквівалентності в $\mathfrak{M}(M_\rho, \mu)$ містить неперервну функцію, ми будемо ототожнювати цю функцію зі всім класом еквівалентності.

Нехай B_μ та C_μ є множинами μ-суттєво обмежених і μ-м.с. неперервних функцій $x : M_\rho \to \mathbb{R}$, відповідно. Для компактної множини $M' \subset M_\rho$ через $\chi_{M'}$ позначимо *характеристичну* (або *індикаторну*) функцію множини M', тобто

$$\chi_{M'}(t) = \begin{cases} 1, & t \in M', \\ 0, & t \in M \setminus M'. \end{cases}$$

Також розглянемо множини

$$\begin{aligned} B_\mu(M') &:= \{x \in B_\mu \,:\, \operatorname{supp} x \subset M'\}\,, \\ C_\mu(M') &:= \{x = y \cdot \chi_{M'} \,:\, y \in C_\mu\}\,, \\ \tilde{C}_\mu(M') &:= \{x \in C_\mu \,:\, \operatorname{supp} x \subset M'\}\,. \end{aligned}$$

З означення випливає подвійне вкладення $\tilde{C}_\mu(M') \subset C_\mu(M') \subset B_\mu(M')$.

Перейдемо до означення класів функцій, визначених на компакті метричного простору, які мають заданий модуль неперервності. Для довільного модуля неперервності ω (див. означення 1.1.3) означимо:

$$H^\omega_\mu(M') := \{x \in C_\mu(M') : |x(t') - x(t'')| \leqslant \omega\left(\rho(t', t'')\right),\ \forall t', t'' \in M'\}\,,$$

$$\tilde{H}^\omega_\mu(M') := H^\omega_\mu(M') \cap \tilde{C}_\mu(M').$$

Будемо також вважати, що інформація про функції $x \in H^\omega_\mu\left(M'\right)$ або $x \in \tilde{H}^\omega_\mu\left(M'\right)$ задана інформаційними операторами $I : C_\mu\left(M'\right) \to \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, виду

$$Ix = I_Q x := \left(x\left(q_1\right), \ldots, x\left(q_n\right)\right), \qquad x \in C_\mu(M'),$$

де $Q = \{q_j\}_{j=1}^n$ – задана система точок в M'. Більш того, припустимо, що інформація Ix відома з U_e-похибкою, $e_j \in \mathbb{R}_+$, $j = 1, \dots, n$, де

$$U_e = [-e_1, e_1] \times \ldots \times [-e_n, e_n].$$

Побудуємо оператор L, який задовольнятиме умови твердження 4.3.3. Для цього розглянемо дві функції:

$$\tau(t) = \tau_{\omega,Q,e}(t) := \begin{cases} \min\limits_{j=1,\ldots,n} \left(e_j + \omega(\rho(t, q_j))\right), & t \in M', \\ 0, & t \in M \setminus M', \end{cases}$$

і

$$\tilde{\tau}(t) = \tilde{\tau}_{\omega,Q,e}(t) := \min\left\{\tau_{\omega,Q,e}(t),\, \omega(\rho(t, \partial M'))\right\}, \qquad t \in M,$$

де $\rho(t, \partial M') := \inf\limits_{s \in \partial M'} \rho(t, s)$ позначає відстань між точкою $t \in M$ і межею $\partial M'$ множини M'. Неважко бачити, що $\tau \in H_\mu^\omega(M')$, $\tilde{\tau} \in \tilde{H}_\mu^\omega(M')$ та $I_Q\tau = I_Q\tilde{\tau} \in U_e$.

Означимо *узагальнені клітини Вороного* (див., наприклад, [271]). Для цього ми спочатку позначимо

$$\tilde{\Pi}_0 = \tilde{\Pi}_0(\omega, Q, e) := \{t \in M' \,:\, \omega(\rho(t, \partial M')) \leqslant \tau_{\omega,Q,e}(t)\}$$

і для $j = 1, \dots, n$ розглянемо

$$\Pi'_j = \Pi'_j(\omega, Q, e) := \{t \in M' \,:\, \tau_{\omega,Q,e}(t) = e_j + \omega(\rho\,(t, q_j))\}\,.$$

Узагальнені клітини Вороного (рис. 4.1) визначаються послідовно:

$$\Pi_1 := \Pi'_1, \qquad \Pi_j := \Pi'_j \setminus \bigcup_{s=1}^{j-1} \Pi_s, \qquad j = 2, \dots, n,$$

та $\tilde{\Pi}_j = \tilde{\Pi}_j \setminus \tilde{\Pi}_0$, $j = 1, \dots, n$.

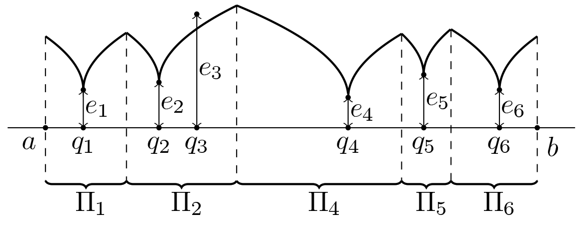

Рис. 4.1: Узагальнені клітини Вороного на відрізку $[a, b]$

Оскільки довільна функція $x \in C_\mu(M')$ є μ-вимірною на M відносно борелівської σ-алгебри Σ_ρ, то множини $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ та $\tilde{\Pi}_0, \tilde{\Pi}_1, \ldots, \tilde{\Pi}_n$ є μ-вимірними. Більш того, за побудовою, обидва набори множин попарно не перетинаються, та $M' = \Pi_1 \cup \ldots \cup \Pi_n = \tilde{\Pi}_0 \cup \tilde{\Pi}_1 \cup \ldots \cup \tilde{\Pi}_n$.

Означимо оператори $L = L_{\omega,Q,e} : \mathbb{R}^n \to B_\mu\left(M'\right)$ та $\tilde{L} = \tilde{L}_{\omega,Q,e} : \mathbb{R}^n \to B_\mu\left(M'\right)$ (рис. 4.2) наступним чином: для всіх $z \in \mathbb{R}^n$

$$Lz(t) := \begin{cases} z_j, & t \in \Pi_j, \quad j = 1, \ldots, n, \\ 0, & t \in M \setminus M', \end{cases}$$

та

$$\tilde{L}z(t) := \begin{cases} z_j, & t \in \tilde{\Pi}_j, \quad j = 1, \ldots, n, \\ 0, & t \in \tilde{\Pi}_0 \cup \left(M \setminus M'\right). \end{cases}$$

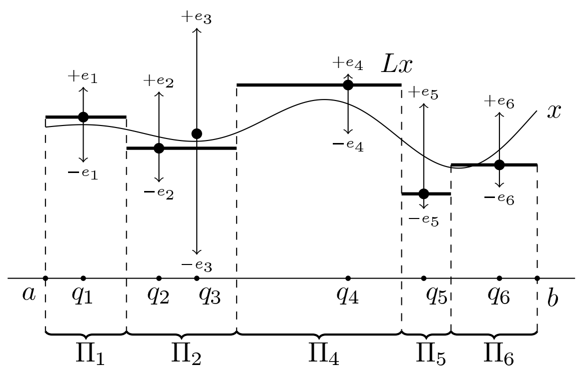

Рис. 4.2: Метод відновлення функцій за неточною інформацією

Зауважимо, що у випадку, коли деякі з e_j є достатньо великими, відповідні множини Π_j і $\tilde{\Pi}_j$ можуть виявитися порожніми. Це означає, що інформація в відповідних точках q_j “ігнорується” операторами L і $\tilde{L}$.

Перейдемо безпосередньо до формулювання наслідків з теореми 4.3.1 щодо задачі оптимального відновлення позитивних інтегральних операторів та їх сум на класах функцій з заданою мажорантою модуля неперервності за значеннями функції з класу в заданій системі точок, які відомі з похибкою.

Для простору (M, μ) з σ-скінченною мірою через $L_1\left(M, \mu\right)$ позначимо простір сумовних функцій $x : M \to \mathbb{R}$, який оснащено стандартною нормою

$$\|x\|_1 = \int_M |x(t)| \, \mathrm{d}\mu(t).$$

Спочатку наведемо наслідок з твердження 4.3.4 для позитивних інтегральних операторів. Для цього введемо необхідні позначення. Нехай $n \in \mathbb{N}$, ω –

модуль неперервності, $e \in \mathbb{R}^n_+$, M_ρ – метричний простір, μ – σ-скінченна міра на Σ_ρ, M' – компактна підмножина M_ρ, (N,ν) – простір зі σ-скінченною мірою, $A : B_\mu(M') \to \mathfrak{M}\,(N,\nu)$ – інтегральний оператор з невід'ємним ядром K, $Y \subset \mathfrak{M}\,(N,\nu)$ – нормовна решітка така, що $A\left(B_\mu\left(M'\right)\right) \subset Y$, $Q = \{q_j\}_{j=1}^n \subset M'$ – задана система точок.

Теорема 4.3.2. *Нехай або $W = H^\omega_\mu(M')$, $\varphi = \tau_{\omega,Q,e}$, $L = L_{\omega,Q,e}$, або $W = \tilde{H}^\omega_\mu(M')$, $\varphi = \tilde{\tau}_{\omega,Q,e}$, $L = \tilde{L}_{\omega,Q,e}$. Тоді метод $\Phi = A\,L$ є найкращим методом відновлення оператора A на класі W за інформацією I_Q, яка задана з U_e-похибкою, та*

$$\mathcal{E}^*_Y\left(A; W; I_Q; U_e\right) = \mathcal{E}_Y\left(A; W; I_Q; U_e; \Phi\right) = \left\| \int_{M'} K(\cdot, x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \right\|_Y.$$

Доведення. Розглянемо лише перший випадок, коли $W = H^\omega_\mu(M')$, $\varphi = \tau_{\omega,Q,e}$, $L = L_{\omega,Q,e}$, оскільки доведення другого випадку можна провести за аналогією.

Нехай $x \in H^\omega_\mu(M')$ і $z \in Ix + U$ є заданими, та нехай $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ – узагальнені клітини Вороного на множині M'. Помітимо, що для всіх $j = 1, \ldots, n$ та $t \in \Pi_j$

$$\begin{aligned} |x(t) - Lz(t)| &= |x(t) - z_j| \leqslant |x(t) - x(q_j)| + |x(q_j) - z_j| \\ &\leqslant \omega(\rho(t, q_j)) + e_j = \tau_{\omega,Q,e}(t) = \varphi(t). \end{aligned}$$

Отже, $-\varphi \prec x - Lz \prec \varphi$, де "$\prec$" – природний частковий порядок в $\mathfrak{M}\,(M_\rho, \mu)$. Оскільки A – лінійний позитивний оператор, умови теореми 4.3.1 задовольняються, а тому, застосовуючи її, ми завершуємо доведення теореми. □

Зауваження 4.3.3. *В умовах теореми 4.3.2 розглянемо метод відновлення $\Lambda : \mathbb{R}^n \to B_\mu\left(M'\right)$, означений рівністю*

$$\Lambda z(t) = \frac{S_z(t) + s_z(t)}{2}, \quad z \in \mathbb{R}^n,\ t \in M',$$

де $S_z(t) := \min\limits_{j=1,2,\ldots,n} \left\{z_j + e_j + \omega\left(\rho\left(t, q_j\right)\right)\right\}$, $s_z(t) := \max\limits_{j=1,2,\ldots,n} \left\{z_j - e_j - \omega\left(\rho\left(t, q_j\right)\right)\right\}$. Метод Λ є центральним алгоритмом згідно означення [318, § 2.3], а також є найкращим в задачі найкращого відновлення оператора A на класі $W = H^\omega_\mu(M')$ за інформацією I_Q, заданою з U_e-похибкою.

Дійсно, нехай $W = H^\omega_\mu(M')$. Нагадаємо, що метод відновлення Φ називається центральним (див. [318, § 2.3]), якщо для всіх $z \in I_Q(W) + U_e$, $\Phi z = g_z$, де $g_z \in Y$ є центром множини $\{Ax : x \in W,\ I_Q x \in z + U_e\}$, тобто

$$\sup_{x \in W\,:\, I_Q x \in z + U_e} \|Ax - g_z\|_Y = \inf_{g \in Y} \sup_{x \in W\,:\, I_Q x \in z + U_e} \|Ax - g\|_Y.$$

Неважко бачити, що для всіх $z \in U_e + \bigcup_{x\in W} I_Q x$, $I_Q S_z \in z + U_e$, $I_Q s_z \in z + U_e$, $I_Q \Lambda z \in z + U_e$, *та* $s_z \prec x \prec S_z$, *для кожного* $x \in W$, *де "*$\prec$*" є природним частковим порядком в* $\mathfrak{M}(M_\rho, \mu)$. *Оскільки оператор* A *є позитивним, то* $As_z \prec_Y Ax \prec_Y AS_z$, *а оскільки* Y *є нормовною решіткою, то*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\|A(S_z - s_z)\right\|_Y &= \sup_{\substack{x\in W\\ I_Q x\in z+U_e}} \|Ax - A\Lambda z\|_Y \geqslant \inf_{g\in Y} \sup_{\substack{x\in W\\ I_Q x\in z+U_e}} \|Ax - g\|_Y \\ &\geqslant \frac{1}{2}\inf_{g\in Y}\left(\|AS_z - g\|_Y + \|As_z - g\|_Y\right) \geqslant \frac{1}{2}\left\|A\left(S_z - s_z\right)\right\|_Y,\end{aligned}$$

звідки випливає, що алгоритм $A\Lambda$ *є центральним та найкращим методом відновлення оператора* A *на класі* W *за інформацією* I_Q, *заданою з* U_e*-похибкою.*

У випадку $Y = L_1(N, \nu)$ отримаємо наступний наслідок з теореми 4.3.2.

Наслідок 4.3.1. *В умовах теореми 4.3.2, нехай ядро* K *є* $\nu \times \mu$*-інтегровним та* $Y = L_1(N, \nu)$. *Тоді*

$$\mathcal{E}_Y^*\left(A; W; I_Q; U_e\right) = \int_{M'} \varphi(x) \int_N K(y, x)\, \mathrm{d}\nu(y)\, \mathrm{d}\mu(x). \tag{4.21}$$

Зокрема, якщо внутрішній інтеграл в (4.21) *не залежить від* x *і позначаєтьcя через* C_K, *то*

$$\mathcal{E}_Y^*\left(A; W; I_Q; U_e\right) = C_K \int_{M'} \varphi(x)\, \mathrm{d}\mu(x).$$

Сформулюємо тепер наслідок з теореми 4.3.1 щодо розв'язку задачі найкращого відновлення суми позитивних інтегральних операторів на класах функцій з заданою мажорантою модуля неперервності. Нам будуть необхідні наступні позначення. Нехай $m, l \in \mathbb{N}$ і $\psi : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ – норма, монотонна відносно природного часткового порядку в $\mathbb{R}^l$. Для всіх $j = 1, \dots, m$, нехай $n_j \in \mathbb{N}$; ω_j – модуль неперервності; $e_j \in \mathbb{R}_+^{n_j}$ та $U_j = U_{e_j}$; $M_j = M_{\rho_j}$ – метричний простір, μ_j – σ-скінченна міра на Σ_{ρ_j}; M_j' – компактна підмножина M_j; $Q_j \subset M_j'$ – задана система з n_j точок, і $I_j := I_{Q_j}$. Для всіх $i = 1, \dots, l$, позначимо через (N_i, ν_i) простір з σ-скінченною мірою. Для всіх $i = 1, \dots, l$ та $j = 1, \dots, m$ нехай $A_{i,j} : B_{\mu_j}\left(M_j'\right) \to \mathfrak{M}\left(N_i, \nu_i\right)$ – інтегральний оператор з невід'ємним ядром $K_{i,j}$ і $Y_i \subset \mathfrak{M}\left(N_i, \nu_i\right)$ – нормовна решітка така, що $\bigcup_{j=1}^{m} A_{i,j}\left(B_{\mu_j}\left(M_j'\right)\right) \subset Y_i$.

Теорема 4.3.3. *Нехай для всіх* $j = 1, \ldots, m$ *або* $W_j = H_{\mu_j}^{\omega_j}\left(M_j'\right)$, $\varphi_j = \tau_{\omega_j, Q_j, e_j}$, $L_j = L_{\omega_j, Q_j, e_j}$, *або* $W_j = \tilde{H}_{\mu_j}^{\omega_j}\left(M_j'\right)$, $\varphi_j = \tilde{\tau}_{\omega_j, Q_j, e_j}$, $L_j = \tilde{L}_{\omega_j, Q_j, e_j}$. *Тоді для всіх* $\sigma = diag\,(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$, *де* $\sigma_j \in \{-1, 1\}$, $j = 1, \ldots, m$, *метод* $\Phi = \overline{A}\sigma\overline{L}$, *де* $\overline{L} = diag\,(L_1, \ldots, L_m)$, *є найкращим методом відновлення оператора* $\overline{A}\sigma$ *на класі* $\overline{W}$ *за інформацією* $\overline{I}$, *заданою з* $\overline{U}$*-похибкою, та*

$$\mathcal{E}_{\overline{Y}}^*\left(\overline{A}\sigma; \overline{W}; \overline{I}; \overline{U}\right) = \mathcal{E}_{\overline{Y}}\left(\overline{A}\sigma; \overline{W}; \overline{I}; \overline{U}; \Phi\right) = \left\|\overline{A}\overline{\varphi}\right\|_{\psi}.$$

Наступне твердження випливає з теореми 4.3.3 та стосується задачі найкращого відновлення суми інтегральних операторів в просторі $L_1(N, \nu)$.

Наслідок 4.3.2. *Нехай виконуються припущення теореми 4.3.3. Також, припустимо, що ядра* $K_{i,j}$ *є* $\nu_i \times \mu_j$*-інтегровними* ($i = 1, \ldots, l$ *та* $j = 1, \ldots, m$), $Y_i = L_1\left(N_i, \nu_i\right)$, *і* ψ *є* ℓ_1*-нормою в* $\mathbb{R}^l$. *Тоді*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\overline{Y}}^*\left(\overline{A}\sigma; \overline{W}; \overline{I}; \overline{U}\right) &= \mathcal{E}_{\overline{Y}}\left(\overline{A}\sigma; \overline{W}; \overline{I}; \overline{U}; \Phi\right) \\ &= \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\int_{N_i}\int_{M_j'} K_{i,j}\left(y, x\right)\varphi_j\left(x\right)\,\mathrm{d}\mu_j(x)\,\mathrm{d}\nu_i(y). \end{aligned}$$

Висновки до розділу 4

В даному розділі розв'язується задача найкращого відновлення операторів за неповно та неточно заданою інформацією. Отримано наступні результати:

1. Знайдено похибку найкращого відновлення тотожного оператора на класі $W_\infty^2(\Omega)$ функцій багатьох змінних, визначених на опуклому тілі Ω, що мають рівномірно обмежені похідні другого порядку за довільним напрямком, за інформацією про значення функцій та їх градієнтів в заданій системі вузлів. Також встановлено відповідні результати й для періодичного аналогу класу $W_\infty^2(\Omega)$ – класу $W_\infty^2(\mathcal{L})$, де $\mathcal{L}$ – повновимірна решітка;
2. Розв'язано задачу про найкраще відновлення довільних інтегральних операторів з невід'ємними ядрами та їх сум на класах функцій, визначених на компакті метричного простору та заданих обмеженням на мажоранту модуля неперервності, за значеннями функцій з класу в заданій системі вузлів, які відомі з похибкою.

РОЗДІЛ 5

Нерівності типу Колмогорова для норм похідних функцій однієї змінної

Даний розділ присвячено розв'язанню задачі про знаходження нерівностей типу Колмогорова для норм похідних функцій однієї змінної, означених на напівосі дійсних невід'ємних чисел або на скінченному відрізку дійсної осі, а також розв'язанню спорідненої задачі Стєчкіна про найкраще наближення операторів лінійними обмеженими операторами.

5.1. Нерівності типу Колмогорова та постановки споріднених задач

Нехай G – вимірна однозв'язна підмножина $\mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \leqslant r-1$, та $1 \leqslant p, q, s \leqslant \infty$. Позначимо через $L_p(G)$ нормовний простір вимірних функцій $f : G \to \mathbb{R}$ зі стандартною нормою

$$\|f\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\int_G |f(t)|^p \, \mathrm{d}t\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname{esssup}\left\{|f(t)| \,:\, t \in G\right\}, & p = \infty. \end{cases}$$

Через $L_s^r(G)$ позначимо простір вимірних функцій $f : G \to \mathbb{R}$, для яких похідна $f^{(k-1)}$ локально абсолютно неперервна на G та $f^{(r)} \in L_s(G)$, а також означимо $L_{p,s}^r(G) := L_p(G) \cap L_s^r(G)$. Надалі, коли множина G буде зрозумілою з контексту, будемо опускати її в позначеннях просторів $L_p(G)$, $L_p^r(G)$, $L_{p,s}^r(G)$ і норми $\|\cdot\|_{L_p(G)}$.

Нерівності, що оцінюють норму проміжної похідної функції $\left\|f^{(k)}\right\|_{L_q(G)}$ через норму самої функції $\|f\|_{L_p(G)}$ та норму її похідної старшого порядку $\left\|f^{(r)}\right\|_{L_s(G)}$, називаються *нерівностями типу Колмогорова* (*нерівностями типу Колмогорова-Надя* у випадку $k = 0$).

Нерівності типу Колмогорова знаходять важливі застосування в багатьох областях математичного аналізу: теорії апроксимації, теорії некоректних задач, теоремах вкладення, теорії оптимальних алгоритмів, теорії оптимального відновлення, теорії інформаційної складності, та інших. Природно, що найбільший інтерес становлять непокращувані нерівності такого типу. Саме вони знайшли найбільше застосувань, а методи, які були розроблені при їх доведенні, суттєво збагатили математичну науку та були використані для розв'язання чималої кількості екстремальних задач математичного аналізу.

Дослідження нерівностей для похідних розпочалося на початку XX сторіччя в роботах А. Кнезера, Ж. Адамара, Г. Г. Харді, Дж. І. Літлвуда, Е. Ландау. Один з найвизначніших результатів у цьому напрямку був отриманий в 1937 р. А. М. Колмогоровим [84] (див. також [85]). Він встановив, що для будь-яких $k, r \in \mathbb{N}$, $k \leqslant r-1$, та будь-якої функції $f \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$ має місце точна нерівність:

$$\left\|f^{(k)}\right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant \frac{\left\|\varphi_r^{(k)}\right\|_{L_\infty(\mathbb{R})}}{\|\varphi_r\|^{1-k/r}_{L_\infty(\mathbb{R})}} \cdot \|f\|^{1-k/r}_{L_\infty(\mathbb{R})} \left\|f^{(r)}\right\|^{k/r}_{L_\infty(\mathbb{R})}, \tag{5.1}$$

де φ_r – ідеальний ойлерів сплайн порядку r, тобто первісна функції $\varphi_0(t) := \operatorname{sgn}(\sin rt)$, $t \in \mathbb{R}$, порядку r з нульовим середнім значенням. Ця нерівність обертається в рівність на довільній функції $f(\cdot) = c\,\varphi_r(h(\cdot))$, де $c, h > 0$. Відзначимо, що випадок $k = 1$ та $r = 2$ був розглянутий Е. Ландау [282], а випадки $r = 3, 4$, $1 \leqslant k \leqslant r-1$ і $r = 5$, $k = 2$ – Г. Є. Шиловим [180].

Для доведення нерівності (5.1) А. М. Колмогоров розробив потужний метод порівняння функцій, численні модифікації якого були використані для розв'язання цілого ряду задач теорії наближення, теорії квадратур, теорії оптимального відновлення операторів, і для встановлення багатьох екстремальних властивостей тригонометричних поліномів та періодичних функцій. Саме тому нерівності вигляду (5.1) називають також *нерівностями типу Колмогорова.*

Детальний огляд результатів щодо нерівностей типу Колмогорова для функцій однієї змінної можна знайти в монографіях [295, 281, 22] та статтях [172, 328, 8, 7], а для функцій багатьох змінних – в [22, 143].

Далі окремо розглянемо випадок дійсної осі $G = \mathbb{R}$ і напівосі $G = \mathbb{R}^0_+$ та випадок скінченного відрізку числової прямої $G = [0, 1]$. Також, сформулюємо задачу Стєчкіна про найкраще наближення операторів лінійними обмеженими операторами, задачу найкращого відновлення операторів за елементами з класу, які відомі з похибкою.

5.1.1. Нерівності типу Колмогорова для функцій, означених на дійсній осі або напівосі

Нехай в цьому параграфі G позначає дійсну вісь $G = \mathbb{R}$ або напіввісь невід'ємних чисел $G = \mathbb{R}_+^0$. Нерівності типу Колмогорова в такому випадку зазвичай записують у мультиплікативній формі:

$$\left\|f^{(k)}\right\|_{L_q(G)} \leqslant K \left\|f\right\|_{L_p(G)}^{\mu} \left\|f^{(r)}\right\|_{L_s(G)}^{\lambda}, \tag{5.2}$$

з константою $K > 0$ і показниками $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, які не залежать від вибору функції $f \in L_{p,s}^r(G)$. Нерівності (5.2) називають також *мультиплікативними нерівностями типу Колмогорова.*

У випадку $G = \mathbb{R}$ точна константа K знайдена для всіх $k, r \in \mathbb{N}$, $k \leqslant r-1$, при наступних значеннях параметрів p, q, s:

1. $p = q = s = \infty$ – Е. Ландау [282] ($r = 2$), Г. Є. Шилов [180] ($r = 3, 4$; $r = 5$ і $k = 2$), А. М. Колмогоров [84] ($r \geqslant 4$);
2. $p = q = s = 2$ – Г. Г. Харді, Дж. І. Літлвуд, Г. Пойа [262];
3. $p = q = s = 1$ – Е. М. Стейн [334];
4. $q = \infty$ та $p = s = 2$ – Л. В. Тайков [167].

У випадку $G = \mathbb{R}_+^0$ точна константа K знайдена для всіх $k, r \in \mathbb{N}$, $k \leqslant r-1$, при наступних значеннях параметрів p, q, s:

1. $p = q = s = \infty$ – Е. Ландау [282] ($r = 2$), А. П. Маторін [125] ($r = 3$), І. Дж. Шенберг та А. Каварета [325] ($r \geqslant 4$);
2. $p = q = s = 2$ – Ю. І. Любіч [119], М. П. Купцов [111];
3. $q = \infty$ та $p = s = 2$ – В. М. Габушин [64], М. П. Купцов [112], Г. А. Калябін [80].

Огляд інших часткових випадків, в яких знайдено точні нерівності для похідних вигляду (5.2), та подальші посилання можна знайти в статтях [172, 7] та монографії [22].

Відзначимо, що необхідні та достатні умови існування скінченної константи K в нерівностях (5.2) отримані В. М. Габушиним [63] та полягають в наступному:

$$\lambda = \frac{k - 1/q + 1/p}{r - 1/s + 1/p} \in [0, 1], \qquad \mu = 1 - \lambda, \tag{5.3}$$

$$\frac{r}{q} \leqslant \frac{r-k}{p} + \frac{k}{s}. \tag{5.4}$$

Сучасні прикладні задачі хімії, фізики, механіки (див., наприклад, [308, 284, 335]) потребують всебічного дослідження похідних не тільки цілих, але й дробових порядків. Ідеї похідних нецілого порядку виникають від самого зародження диференціального числення. Їх можна знайти, зокрема, у Г. Лейбніца, Л. Ойлера, П. Лапласа, С. Лякруа, Ж. Фур'є. Власне, розвиток дробового числення розпочинається з робіт Н. Абеля та Ж. Ліувілля, а вагомий внесок в становлення дробового інтегродиференціювання пов'язаний з іменами А. Грюнвальда, А. Лєтнікова, Х. Хольмгрена, Б. Рімана, Н. Я. Соніна, Ж. Адамара, Г. Вейля та багатьох інших відомих математиків. Змістовний огляд історії питання, означень похідних дробових порядків та їх властивостей, а також застосувань дробових похідних можна знайти в монографії [146].

Природний інтерес становить задача знаходження непокращуваних нерівностей для норм похідних дробових порядків. Проте її розв'язання зіштовхується з труднощами, які невластиві задачі встановлення точних нерівностей типу Колмогорова для похідних цілого порядку. По-перше, це залежність значення дробової похідної від значень функції на нескінченному інтервалі числової прямої та, по-друге, це несиметричність конструкції похідної дробового порядку. Саме наявністю названих особливостей можна пояснити незначну кількість випадків, в яких знайдено точні нерівності типу Колмогорова для похідних нецілих порядків.

Перед тим, як перейти до огляду відомих результатів, зауважимо, що завдяки різноманітності прикладних задач, розв'язання яких потребує застосування дробового інтегродиференціювання, існує багато способів надати зміст поняттю дробової похідної порядку $k \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$. Одним із перших та найбільш вживаних означень дробової похідної є дробова похідна $\mathcal{D}^k_\pm$ в смислі *Рімана-Ліувілля* (див. [146, §5.1]), яка означається для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ наступним чином:

$$\mathcal{D}^k_\pm f(x) := \frac{(\pm 1)^n}{\Gamma(n-k)} \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \int_0^{+\infty} t^{n-k-1} f(x \mp t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{5.5}$$

де $\Gamma(z)$ – гама-функція Ойлера, $n = [k] + 1$ і $[z]$ позначає цілу частину числа z. Надалі нам буде зручніше розглядати дробову похідну $D^k_\pm$ в смислі *Маршо* [288] (див. також [146, §5.6]), яка означається для функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ наступним чином:

$$D^k_{\pm} f(x) = \frac{1}{\varkappa(k,n)} \int_0^{+\infty} \frac{\left(\Delta^n_{\pm t} f\right)(x)}{t^{1+k}}\, \mathrm{d}t, \qquad x\in\mathbb{R}, \tag{5.6}$$

де $n\in\mathbb{N}$, $n>k$, (означення не залежить від вибору n) та

$$\left(\Delta^n_{\pm t} f\right)(x) := \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} f(x\mp mt), \quad \varkappa(k,n) := \Gamma(-k)\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m} m^k.$$

Для функції $f:\mathbb{R}^0_+\to\mathbb{R}$ правосторонні похідні $\mathcal{D}^k_- f$ та $D^k_- f$ означаються за допомогою формул (5.5) та (5.6) відповідно. Лівосторонні похідні $\mathcal{D}^k_+ f$ та $D^k_+ f$ означаються за допомогою дещо інших конструкцій (див. [146, §5.5]), які ми не будемо розглядати в цій роботі.

Добре відомо (див. [146]), що $\mathcal{D}^k_{\pm} f = D^k_{\pm} f$ для "гарних" функцій $f:G\to\mathbb{R}$. Проте конструкція (5.6) дробової похідної в смислі Маршо дозволяє надати зміст похідній дробового порядку на більш широкому класі функцій, наприклад, для констант або функцій, які зростають повільніше за x^k, коли $x\to\infty$.

Для зручності позначимо через $\mathfrak{D}^k$ оператор дробового диференціювання порядку $k\in\mathbb{R}_+\setminus\mathbb{N}$. Будемо розглядати нерівності типу Колмогорова виду (5.2), що оцінюють норму проміжної похідної $\mathfrak{D}^k f$ дробового порядку в смислі Маршо через норми самої функції f та її похідної $f^{(r)}$ старшого порядку $r\in\mathbb{N}$, $r>k$:

$$\left\|\mathfrak{D}^k f\right\|_{L_q(G)} \leqslant K \left\|f\right\|^{\mu}_{L_p(G)} \left\|f^{(r)}\right\|^{\lambda}_{L_s(G)}, \tag{5.7}$$

в яких константа $K>0$ та показники μ,λ не залежать від вибору функції $f\in L^r_{p,s}(G)$. Як і у випадку нерівностей типу Колмогорова (5.2) для похідних цілих порядків необхідною умовою існування скінченної константи K в нерівності (5.7) є виконання співвідношень (5.3). Деякі достатні умови існування скінченної константи можна знайти в [200].

Окрім дробових похідних в смислі Рімана-Ліувілля та в смислі Маршо, нерівності виду (5.7) досліджувалися (див. [58, 29, 30]) і для дробових похідних в інших смислах, зокрема, для дробових похідних в смислі Ріса (див. означення в [146, §25.4]), в смислі Вейля (див. означення в [146, §19]), тощо. На сьогодні непокращувані нерівності типу Колмогорова для дробових похідних відомі в наступних випадках:

1. $G=\mathbb{R}$, $p=q=s=\infty$, $r=2$, $k\in(0,1)$ та $\mathfrak{D}^k=D^k_-$ – С. П. Гейзберг [67];
2. $G=\mathbb{R}^0_+$, $p=q=s=\infty$, $r=2$, $k\in(0,2)\setminus\{1\}$ та $\mathfrak{D}^k=\mathcal{D}^k_-$ – В. В. Арєстов [182];
3. $G=\mathbb{R}^0_+, p=q=s=\infty, k\in(0,1], k<r\leqslant 2$ та $\mathfrak{D}^k=\mathcal{D}^k_-$ – В. В. Арєстов [182];
4. $G=\mathbb{R}$ або $G=\mathbb{R}^0_+$, $p=s=2$, $q=\infty$, $0<k<r$, $\mathfrak{D}^k$ є оператор дробового диференціювання в смислі Вейля – О. П. Буслаєв та В. М. Тихомиров [58];
5. $G=\mathbb{R}^0_+$, $p=s=2$, $q=\infty$, $k\in\left(-\frac{1}{2},r-\frac{1}{2}\right)$, $r\in\mathbb{N}$, $\mathfrak{D}^k=\mathcal{D}^k_-$ – Г. Г. Магаріл-Ільяєв та В. М. Тихомиров [286];
6. $G=\mathbb{R}$ або $G=\mathbb{R}^0_+$, $p=q=\infty$, $1\leqslant s\leqslant\infty$, $r=1$, $k\in\left(0,1-\frac{1}{s}\right)$, $\mathfrak{D}^k=D^k_-$ – В. Ф. Бабенко та М. С. Чурілова [36, 175];
7. $G=\mathbb{R}$ або $G=\mathbb{R}^0_+, p=q=s=\infty, r=2, k\in(0,1), \mathfrak{D}^k=D^k_-$ – В. Ф. Бабенко та М. С. Чурілова [175, 37];
8. $G=\mathbb{R}$ або $G=\mathbb{R}^0_+, p=q=s=\infty, r=2, k\in(0,1)$, $\mathfrak{D}^k$ є оператор дробового диференціювання в смислі Ріса – В. Ф. Бабенко та М. С. Чурілова [175, 37];
9. $G=\mathbb{R}, p=q=\infty, 1\leqslant s\leqslant\infty, r=1, k\in\left(0,1-\frac{1}{s}\right)$, $\mathfrak{D}^k$ є оператор дробового диференціювання в смислі Ріса – В. Ф. Бабенко та Н. В. Парфінович [29];
10. $G=\mathbb{R}$, $p=q=\infty$, $1\leqslant s\leqslant\infty$, $r=2$, $k\in\left(0,2-\frac{1}{s}\right)\setminus\{1\}$, $\mathfrak{D}^k$ є оператор дробового диференціювання в смислі Ріса – В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфінович та С. О. Пічугов [30].

Зауважимо також, що В. Ф. Бабенком та М. С. Чуріловою [175, 128] встановлено непокращувані адитивні нерівності, що оцінюють рівномірну норму дробової похідної D^k_-f через рівномірну норму зрізаної дробової похідної функції та норми її похідної порядку r в метриці простору $L_s(G)$.

Огляд інших результатів щодо точних нерівностей типу Колмогорова для норм дробових похідних можна знайти в [175, 143] та монографії [128, розділ 1].

У підрозділі 5.2 встановлено нові точні нерівності виду (5.7) у випадку $G=\mathbb{R}^0_+$, $p=q=\infty$, $1\leqslant s\leqslant\infty$, $k\in(0,2-1/s)\setminus\{1\}$, $r=2$ для оператора $\mathfrak{D}^k=D^k_-$ (див. теореми 5.2.6 та 5.2.7). Також отримано узагальнення цих нерівностей у випадку $k\in(0,1)$, коли норма старшої похідної береться в ідеальній решітці (див. теорему 5.2.5). Відповідні нерівності вже мають адитивну форму. Ці результати опубліковано в статті [200].

5.1.2. Нерівності типу Колмогорова для функцій, означених на скінченному відрізку

Нехай G є скінченний відрізок числової прямої. Для зручності та без зменшення загальності подальших міркувань в цьому параграфі будемо вважати, що $G = [0,1]$, та будемо опускати позначення відрізку $[0,1]$ в символах просторів $L_p([0,1])$, $L_p^r([0,1])$, $L_{p,s}^r([0,1])$ та норми $\|\cdot\|_{L_p([0,1])}$. Нехай $1 \leqslant p, q, s \leqslant \infty$, $k, r \in \mathbb{N}$, $k \leqslant r-1$, та $t_0 \in [0,1]$. Зауважимо також, що $L_{p,s}^r = L_s^r$.

Для функцій, означених на скінченному відрізку, разом з нерівностями для похідних розглядають також їх точкові аналоги. Для зручності введемо спільні позначення. Через Y та T позначимо або, відповідно, простір L_q та оператор диференціювання $D^k : L_p \to L_q$, або, відповідно, простір $\mathbb{R}$ та функціонал диференціювання $D_{t_0}^k : L_p \to \mathbb{R}$ в точці t_0.

Нерівності для норм похідних функцій $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ зазвичай записують в адитивній формі:

$$\|Tf\|_Y \leqslant A\|f\|_p + B\left\|f^{(r)}\right\|_s, \tag{5.8}$$

в яких константи $A, B \geqslant 0$ не залежать від вибору функції $f \in L_s^r$. Нерівності виду (5.8) називають *адитивними нерівностями типу Колмогорова* (див. [328]).

Задача про знаходження точних нерівностей для норм похідних функцій, визначених на скінченному відрізку, називається *задачею Ландау-Колмогорова* та має дві, взагалі кажучи, різні постановки.

Задача 5.1.1. *Знайти множину $\Gamma(T; L_s^r)$ всіх пар (A, B) невід'ємних чисел, де $B = B(A)$, що задовольняють умовам:*

(1) нерівність (5.8) виконується для будь-якої $f \in L_s^r$;

(2) для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує функція $f_\varepsilon \in L_s^r$, для якої

$$\|Tf_\varepsilon\|_Y > A\|f_\varepsilon\|_p + (B-\varepsilon)\left\|f_\varepsilon^{(r)}\right\|_s.$$

Нехай $W_s^r := \left\{f \in L_s^r : \left\|f^{(r)}\right\|_s \leqslant 1\right\}$.

Задача 5.1.2. *Знайти модуль неперервності $\Omega(\delta; T; W_s^r)$, $\delta \geqslant 0$, оператора диференціювання T на класі W_s^r:*

$$\Omega(\delta; T; W_s^r) := \{\|Tf\|_Y : f \in W_s^r \ \text{ та } \ \|f\|_p \leqslant \delta\}.$$

Пояснимо, як співвідносяться між собою наведені постановки 5.1.1 та 5.1.2 задачі Ландау-Колмогорова. Якщо ми розв'язали задачу 5.1.2, то розв'язок задачі 5.1.1 можна зобразити у вигляді:

$$\Gamma\left(T;L_s^r\right)=\left\{(A,B)\,:\,A\geqslant 0,\ B=\sup_{\delta>0}\left(\Omega\left(\delta;T;W_s^r\right)-A\delta\right)<\infty\right\}.$$

Отже, розв'язання задачі 5.1.1 зводиться до обчислення при кожному $A\geqslant 0$ величини

$$\sup_{\delta>0}\left(\Omega\left(\delta;T;W_s^r\right)-A\delta\right).$$

Якщо ж ми розв'язали задачу 5.1.1, то множина

$$\mathcal{O}:=\left\{\ell_{A,B}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,y=Ax+B\}\,:\,(A,B)\in\Gamma\left(T;L_s^r\right)\right\}$$

є множиною опорних прямих до графіка функції $\Omega\left(\delta;T;W_s^r\right)$. Зокрема, для всіх $\delta\geqslant 0$ виконується нерівність

$$\Omega\left(\delta;T;W_s^r\right)\leqslant\inf_{(A,B)\in\Gamma(T;L_s^r)}\left(A\delta+B\right),\tag{5.9}$$

яка обертається в рівність в спільних точках графіка модуля неперервності $\Omega\left(\delta;T;W_s^r\right)$ та опорних прямих з $\mathcal{O}$. Зважаючи на вищезазначене, постановка задачі 5.1.2 є більш загальною за задачу 5.1.1.

Зауваження 5.1.1. *Добре відомо, що нерівність* (5.9) *обертається в рівність у випадку $Y=\mathbb{R}$ для будь-якого $t_0\in[0,1]$ та у випадку $Y=L_\infty$. Це вказує на еквівалентність задач 5.1.1 і 5.1.2 в цих випадках.*

Спорідненою до задачі Ландау-Колмогорова є задача про знаходження точних констант в нерівностях типу Маркова-Нікольського. Для $n\in\mathbb{Z}_+$ через $\mathcal{P}_n$ позначимо множину алгебраїчних поліномів з дійсними коефіцієнтами степені не вище за n. Нерівність виду

$$\|TQ\|_Y\leqslant M\|Q\|_p,\tag{5.10}$$

яка виконується з деякою константою $M>0$ для всіх поліномів $Q\in\mathcal{P}_n$, називається *нерівністю типу Маркова-Нікольського.* Найменша можлива константа в нерівності (5.10) називається *константою Маркова-Нікольського* та позначається через $M_n(T)$. Огляд відомих вигляду (5.10), їх узагальнень та застосувань можна знайти в монографіях [97, 292, 230].

Зрозуміло, що $A \geqslant M_{r-1}(T)$ для будь-якої пари $(A,B) \in \Gamma(T; L^r_s)$. Разом з тим, в [23] (див. також [22, §4.6]) показано, що для довільного $A \geqslant M_{r-1}(T)$ існує $B = B(A) \geqslant 0$, для якого $(A,B) \in \Gamma(T; L^r_s)$.

Задача Ландау-Колмогорова розв'язана в небагатьох випадках, що можна пояснити відсутністю групових або напівгрупових властивостей класу W^r_s відносно операції зсуву. Нехай $\delta_n = \frac{1}{2^{n-1}n!}$, $n \in \mathbb{N}$. Розглянемо деякі випадки, в яких розв'язано задачу 5.1.2:

1. $p = s = \infty$, $t_0 \in [0,1]$, $k,r \in \mathbb{N}$, $k \leqslant r-1$, $Y = \mathbb{R}$ та $T = D^k_{t_0}$ – С. Карлін [269] (для $t_0 \in \{0,1\}$), А. Пінкус [314] (для $t_0 \in (0,1)$);
2. $p = q = s = \infty$, $r = 2$, $k = 1$, $Y = L_\infty$, $T = D^1$ – Е. Ландау [282] (для $\delta < \delta_2$), Ч. К. Чуі та П. У. Сміт [238] (для $\delta \geqslant \delta_2$);
3. $p = q = s = \infty$, $r = 3$, $k \in \{1,2\}$, $Y = L_\infty$, $T = D^k$ – незалежно в роботах М. Сато [323] та О. І. Звягінцева і А. Я. Лєпіна [79];
4. $p = q = s = \infty$, $r = 4$, $k \in \{1,2,3\}$, $Y = L_\infty$, $T = D^k$ – О. І. Звягінцев [78] (для $\delta \geqslant \delta_4$), Н. Найденов [302] (для $\delta < \delta_4$);
5. $p = q = s = \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant r-1$, $Y = L_\infty$, $T = D^k$ – Б. О. Еріксон [249] ($\delta = \delta_r$), О. Ю. Шадрін [330] ($\delta \geqslant \delta_r$);
6. $p = q = \infty$, $1 \leqslant s < \infty$, $r = 2$, $k = 1$, $Y = L_\infty$, $T = D^1$ – Ю. В. Бабенко [38] (див. також [39]), В. І. Бурєнков та В. А. Гусаков [54];
7. $p = s = \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $r = 2$, $k = 1$, $Y = L_q$, $T = D^1$ – Б. Боянов та Н. Найденов [222] (для зліченої кількості значень δ), Н. Найденов [301] (для $\delta \geqslant 0$);
8. $p = s = \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $r = 3$, $k \in \{1,2\}$, $Y = L_q$, $T = D^1$ – Б. Боянов та Н. Найденов [222] (для зліченої кількості значень δ).

Огляд інших випадків, в яких знайдено точні нерівності типу 5.8 можна знайти, наприклад, в роботах [52, 53, 267, 178, 23, 24, 25, 35]. Обговорення узагальнень задач 5.1.1 та 5.1.2, а також суміжних питань, можна знайти в книгах [281, 22] та посиланнях в них.

Різні застосування потребують також встановлення нерівностей для норм похідних на спеціальних класах функцій. Одним з найбільш важливих класів є клас періодичних функцій. Дослідженням точних констант в нерівностях для похідних періодичних функцій займалися А. О. Лігун, В. Ф. Бабенко, В. О. Кофанов, С. О. Пічугов, О. Ю. Шадрін та інші математики. Широкий огляд отриманих тут результатів можна знайти в монографії [22, розділ 6 та §9.4].

Нерівності для норм похідних досліджувалися і на інших спеціальних класах, зокрема:

1. на класах майже періодичних функцій, визначених на $\mathbb{R}$ (див. [33]);
2. на класах кратно монотонних функцій, визначених на $\mathbb{R}^0_-$ (див. [141], [166], [186], [152]);
3. на класах абсолютно монотонних функцій, визначених на $\mathbb{R}^0_-$ (див. [187]);
4. на класах функцій, визначених на відрізку, які можна продовжити на $\mathbb{R}$ зі збереженням норми (див. [221]);
5. на класах абсолютно монотонних функцій, визначених на $[0, 1]$, які можна продовжити на $\mathbb{R}^0_-$ зі збереженням абсолютної монотонності (див. [251]);
6. на класах абсолютно монотонних фунцій, визначених на відрізку (див. [152]).

Більше результатів у цьому напрямку, подальші посилання та близькі нерівності можна знайти в [201, 22, 103].

Сформулюємо аналоги задач 5.1.1 та 5.1.2 на спеціальних класах функцій. Нехай $C \subset L_p$ є деякий опуклий конус.

Задача 5.1.3. *Знайти множину* $\Gamma_C\left(T; L^r_s\right)$ *всіх пар* (A, B) *невід'ємних чисел, де* $B = B(A)$, *що задовольняють умовам:*

(1) нерівність (5.8) *виконується для будь-якої функції* $f \in C$*;*

(2) для будь-якого $\varepsilon > 0$ *існує функція* $f_\varepsilon \in C$, *для якої*

$$\|Tf_\varepsilon\|_Y > A\|f_\varepsilon\|_p + (B - \varepsilon)\left\|f^{(r)}\right\|_s.$$

Задача 5.1.4. *Знайти модуль неперервності* $\Omega\left(\delta; T; C \cap W^r_s\right)$, $\delta \geqslant 0$, *оператора диференціювання* $T : L_p \to LY$ *на класі* $C \cap W^r_s$*:*

$$\Omega\left(\delta; T; C \cap W^r_s\right) := \left\{\|Tf\|_Y \;:\; f \in C \cap W^r_s \text{ та } \|f\|_p \leqslant \delta\right\}.$$

В підрозділах 5.5 і 5.6 дисертаційної роботі наведено результати робіт [151, 153, 331] щодо розв'язку задач 5.1.1 та 5.1.2 для класів абсолютно монотонних (див. підрозділ 5.5) та кратно монотонних (див. підрозділ 5.6) функцій, визначених на відрізку, для широкого діапазону параметрів p, q, s.

5.1.3. Задача Стєчкіна про найкраще наближення необмеженого оператора лінійними обмеженими операторами

Розглянемо тепер задачу про найкраще наближення необмеженого оператора лінійними обмеженими операторами, яка споріднена до задачі про отримання точних нерівностей для норм похідних та становить чималий незалежний інтерес. Для постановки цієї задачі будемо слідувати роботі [160] (див. також [8, 7]).

Нехай X, Y – банахові простори; $T : X \to Y$ – оператор (не обов'язково лінійний) з областю визначення $\mathcal{D}(T) \subset X$; $W \subset \mathcal{D}(T)$ – деяка множина.

Означення 5.1.1. *Модулем неперервності оператора T на множині W називаєтьcя величина:*

$$\Omega(\delta) = \Omega(\delta; T; W) := \sup\left\{\|Tx\|_Y \,:\, x \in W,\ \|x\|_X \leqslant \delta\right\}, \quad \delta \geqslant 0. \tag{5.11}$$

Задачу про знаходження модуля неперервності $\Omega(\delta)$ можна розглядати як абстрактну версію задачі про встановлення точних нерівностей типу Колмогорова для норм похідних. Проілюструємо це на декількох прикладах.

1. Нехай параметри $k, r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant r-1$, і $1 \leqslant p, q, s \leqslant \infty$ задовольняють умову (5.4). Якщо $G = \mathbb{R}$ або $G = \mathbb{R}_+^0$, $X = L_p(G)$, $Y = L_q(G)$, $T = D^k$ та
$$W = W_{p,s}^r(G) := \left\{f \in L_{p,s}^r(G) \,:\, \left\|f^{(r)}\right\|_{L_s(G)} \leqslant 1\right\},$$
то (див., наприклад, [7]) для всіх $\delta \geqslant 0$ має місце рівність
$$\Omega\left(\delta; D^k; W_{p,s}^r(G)\right) = \Omega\left(1; D^k; W_{p,s}^r(G)\right) \cdot \delta^{1-\lambda}, \qquad \lambda = \frac{k - 1/q + 1/p}{r - 1/s + 1/p},$$
де $\Omega\left(1; D^k; W_{p,s}^r(G)\right)$ збігається з найменшою можливою константою K в нерівності (5.2).

2. Нехай $G = \mathbb{R}$ або $G = \mathbb{R}_+^0$, а параметри $r \in \mathbb{N}$, $k \in (0, r) \setminus \mathbb{N}$ та $1 \leqslant p, q, s \leqslant \infty$ є такими, що константа K в нерівності (5.7) скінченна. Якщо $X = L_p(G)$, $Y = L_q(G)$, $T = \mathfrak{D}^k$ – оператор дробового диференціювання, $W = W_{p,s}^r(G)$, то для всіх $\delta \geqslant 0$ виконується рівність
$$\Omega\left(\delta; \mathfrak{D}^k; W_{p,s}^r(G)\right) = \Omega\left(1; \mathfrak{D}^k; W_{p,s}^r(G)\right) \cdot \delta^{1-\lambda}, \quad \lambda = \frac{k - 1/q + 1/p}{r - 1/s + 1/p},$$

де $\Omega\left(1;\mathfrak{D}_{-}^{k};W_{p,s}^{r}(G)\right)$ збігається з найменшою можливою константою K в нерівності (5.7).

3. Нехай $G=[0,1]$, параметри $k,r\in\mathbb{N}$, $1\leqslant k\leqslant r-1$, та $1\leqslant p,q,s\leqslant\infty$. Нехай також $X=L_p([0,1])$, $Y=L_q([0,1])$, $T=D^k$ та $W=W_s^r([0,1])$. Тоді $\Omega\left(\delta;D^k;W_s^r([0,1])\right)$ є модулем неперервності оператора диференціювання D^k на класі $W_s^r([0,1])$, в знаходженні якого полягає 5.1.2.

Через $\mathcal{L}=\mathcal{L}(X,Y)$ позначимо простір всіх лінійних обмежених операторів $S:X\to Y$. *Похибку наближення* оператора T операторами $S\in\mathcal{L}$ на множині W означимо наступним чином:

$$U(T,S;W):=\sup_{x\in W}\|Tx-Sx\|_Y.$$

Для $N>0$ означимо

$$E_N(T;W):=\inf_{S\in\mathcal{L},\,\|S\|\leqslant N}U(T,S;W),\tag{5.12}$$

де inf береться за всіма операторами $S\in\mathcal{L}$, норма яких не перевищує N.

Задача 5.1.5 (Задача Стєчкіна). *Необхідно знайти величину $E_N(T;W)$ та екстремальні оператори $S^*\in\mathcal{L}$, $\|S^*\|\leqslant N$, на яких досягається* inf *в* (5.12), *якщо такі оператори існують.*

Вперше задача 5.1.5 виникає в роботах С. Б. Стєчкіна [159] 1965 р. В [160] наведено перші її розв'язки для диференціальних операторів малого порядку та встановлено загальну ефективну оцінку знизу для величини $E_N(T;W)$ в термінах модуля неперервності $\Omega(\delta;T;W)$ оператора T. Наведемо відповідний результат. Нехай для $\delta\geqslant 0$

$$\ell(\delta;T;W):=\inf_{N\geqslant 0}\left(E_N(T;W)+N\delta\right).$$

Теорема 5.1.1. *Якщо оператор T є однорідний (зокрема, лінійний), $W\subset\mathcal{D}(T)$ – центрально-симетрична опукла множина, то для всіх $N\geqslant 0$ та $\delta\geqslant 0$:*

$$E_N(T;W)\geqslant\sup_{\delta\geqslant 0}\left(\Omega(\delta;T;W)-N\delta\right)=\sup_{x\in W}\left(\|Tx\|_Y-N\|x\|_X\right),\tag{5.13}$$

$$\Omega(\delta;T;W)\leqslant\ell(\delta;T;W).$$

Більш того, якщо існують елемент $x_0\in W$ та оператор $S_0\in\mathcal{L}$ такі, що

$$\|Tx_0\|_Y=U\left(T,S_0;W\right)+\|S_0\|\cdot\|x_0\|_X,\tag{5.14}$$

то тоді $\Omega\left(\|x_0\|_X; T; W\right) = \|Tx_0\|$ *та*

$$E_{\|S_0\|}(T; W) = U(T, S_0; W) = \|Tx_0\|_Y - \|S_0\| \cdot \|x_0\|_X .$$

Як наслідок, оператор S_0 *є екстремальним в задачі 5.1.5 для* $N = \|S_0\|$, *а елемент* x_0 *– в задачі* (5.11) *для* $\delta = \|x_0\|_X$.

В. М. Габушин [65, лема 1] показав, що оцінка (5.13) є точною у випадку, коли $Y = \mathbb{R}$, а T – лінійний функціонал. З його результату нескладно переконатися в тому, що нерівність (5.13) є точною і у випадку $Y = L_\infty(G)$.

В [8, 7] можна знайти широкий огляд випадків, в яких розв'язана задача Стєчкіна. Розглянемо випадок, коли $G = \mathbb{R}$ або $G = \mathbb{R}_+^0$, $t \in G$, $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant r-1$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, $X = L_\infty(G)$, $Y = L_\infty(G)$, $W = W_{\infty,s}^r(G)$, а T – оператор диференціювання або функціонал диференціювання в точці. Задача 5.1.5 про найкраще наближення операторів T лінійними обмеженими операторами на класах $W_{\infty,s}^r(G)$ розв'язана в наступних випадках:

1. $G = \mathbb{R}$ або $G = \mathbb{R}_+^0$, $s = \infty$, $r = 2, 3$, $1 \leqslant k \leqslant r-1$, $A = D^k$ – С. Б. Стєчкін [160];
2. $G = \mathbb{R}$, $s = \infty$, $r = 4, 5$, $1 \leqslant k \leqslant r-1$, $A = D^k$ – В. В. Арєстов [4];
3. $G = \mathbb{R}$, $s = \infty$, $r \geqslant 6$, $1 \leqslant k \leqslant r-1$, $A = D^k$ – О. П. Буслаєв [56];
4. $G = \mathbb{R}$ або $G = \mathbb{R}_+^0$, $1 \leqslant s < \infty$, $r = 2, 3$, $1 \leqslant k \leqslant r-1$, $A = D^k$ – В. В. Арєстов [6];
5. $G = \mathbb{R}_+^0$, $s = \infty$, $r = 2$, $k = 1$, $A = D_{t_0}^k$ – Е. В. Колпакова та В. І. Колпаков [87];
6. $G = \mathbb{R}_+^0$, $s = \infty$, $r = 3$, $k = 1, 2$, $A = D_{t_0}^k$ – О. О. Тімошин [168].

Проте задача Стєчкіна для операторів та функціоналів диференціювання на класах $W = W_s^r([0,1])$ залишається малодослідженою. Основні складнощі, що виникають при її розв'язанні, пов'язані зі збуренням, які вносить в конструкцію наближуючих операторів наявність двох граничних умов.

В підрозділі 5.3 наведено результати роботи [40] щодо розв'язку задачі про найкраще наближення оператора диференціювання D^1 та функціоналів диференціювання в точці $D_{t_0}^1$, $t_0 \in [0,1]$, лінійними обмеженими операторами на класах функцій, що мають обмежену в нормі простору Орліча похідну другого порядку. В підрозділі 5.4 містяться результати роботи [208] щодо розв'язку задачі

Стєчкіна про найкраще наближення операторів D^k, $k = 1, 2$, та функціоналів $D^k_{t_0}$, $k = 1, 2$ та $t_0 \in [0, 1]$, лінійними обмеженими операторами на класі $W^3_\infty([0, 1])$.

5.1.4. Задача про найкраще відновлення операторів на елементах, які відомі з похибкою

Багато задач чисельного аналізу, теорії функцій та інших розділів математики є некоректними задачами відновленя оператора $T : X \to Y$ на елементах класу $W \subset \mathcal{D}(T)$ у припущенні, що елементи класу W задані з відомою похибкою $\delta \geqslant 0$. Відновлення здійснюється за допомогою деякої множини відображень $\mathcal{R} = \mathcal{R}(X, Y) \subset \mathcal{O}(X, Y)$, де $\mathcal{O} = \mathcal{O}(X, Y)$ – сукупність всіх відображень, що діють із X в Y. Для $\delta \geqslant 0$ і оператора $S \in \mathcal{R}(X, Y)$ означимо

$$\mathcal{E}_\delta\left(\mathcal{R}; T; W\right) := \inf_{S\in\mathcal{R}} \sup_{\substack{f\in W,\, g\in X: \\ \|f-g\|_X \leqslant \delta}} \|Tf - Sg\|_Y . \tag{5.15}$$

Сформулюємо задачу найкращого відновлення оператора T за допомогою множини відображень $\mathcal{R}$ на елементах класу W, які задано з похибкою δ.

Задача 5.1.6. *Необхідно знайти величину $\mathcal{E}_\delta\left(\mathcal{R}; T; W\right)$ та найкращі методи відновлення S^*, які реалізують* inf *в правій частині* (5.15)*, якщо вони існують.*

Зв'язок задачі 5.1.6 з задачею про знаходження модуля неперервності (5.11) міститься в наступному твердженні (див. [22, теорема 7.1.2]).

Теорема 5.1.2. *Якщо W – врівноважена множина (тобто $\gamma W \subset W$ для будь-якого $\gamma \in [-1, 1]$), а T – однорідний оператор, то*

$$\Omega(\delta; T; W) \leqslant \mathcal{E}_\delta\left(\mathcal{O}; T; W\right) \leqslant \mathcal{E}_\delta\left(\mathcal{L}; T; W\right) \leqslant \ell\left(\delta; T; W\right).$$

Більш того, якщо існує елемент $x_0 \in W$ та оператор $S_0 \in \mathcal{L}(X, Y)$, для яких виконується властивість (5.14)*, то*

$$\|Tx_0\|_Y = \Omega\left(\delta; T; W\right) = \mathcal{E}_\delta\left(\mathcal{O}; T; W\right) = \mathcal{E}_\delta\left(\mathcal{L}; T; W\right),$$

де $\delta = \|x_0\|_X$, а оператор S_0 є найкращим методом відновлення.

Відомі результати та взаємозв'язок задачі 5.1.6 і задачі Стєчкіна з іншими екстремальними задачами теорії наближення, а також подальші посилання можна знайти в монографіях [22] та оглядових статтях [65, 8, 7].

В підрозділах 5.2, 5.3, 5.4) будуть побудовані елементи, для яких виконуються рівності (5.14). Тому, за теоремою 5.1.2 у відповідних ситуаціях буде розв'язана задача про найкраще відновлення операторів на елементах, які відомі з похибкою.

5.2. Нерівності для норм дробових похідних в смислі Маршо

В цьому підрозділі ми встановимо точні нерівності типу Колмогорова для функцій, означених на дійсній напівосі, що оцінюють рівномірну норму дробової похідної в смислі Маршо функції через рівномірну норму самої функції та норму її похідної другого порядку в ідеальній решітці або в метриці простору L_s. Наведені тут результати отримано в роботі [200].

5.2.1. Існування і інтегральне зображення дробової похідної Маршо

Спочатку сформулюємо допоміжні результати щодо існування і неперервності дробової похідної в смислі Маршо та її інтегрального зображення в термінах похідної вищого порядку. Ці та близькі питання досліджувалися багатьма математиками. Огляд відомих результатів і посилання можна знайти в [146, 270].

Надалі ми розглядатимемо класи диференційовних функцій, означених на $\mathbb{R}_+^0$, а тому будемо опускати символ області визначення в позначеннях просторів $L_p\left(\mathbb{R}_+^0\right)$, $L_{p,s}^r\left(\mathbb{R}_+^0\right)$, класів $W_{p,s}^r\left(\mathbb{R}_+^0\right)$ та норми $\|\cdot\|_{L_p\left(\mathbb{R}_+^0\right)}$. Нехай $\mathfrak{S}$ є простір вимірних функцій $f:\mathbb{R}_+^0\to\mathbb{R}$. Слідуючи [278] введемо поняття ідеальної решітки.

Означення 5.2.1. [278, розділ 2, §2] *Лінійний простір $E\subset\mathfrak{S}$ з нормою $\|\cdot\|_E$ називається ідеальною решіткою на $\mathbb{R}_+^0$, якщо для всіх $f\in E$ і $g\in\mathfrak{S}$ з того, що нерівність $|g(x)|\leqslant|f(x)|$ виконується майже скрізь на $\mathbb{R}_+^0$, випливає, що $g\in E$ і $\|g\|_E\leqslant\|f\|_E$.*

Множина $A(E)\subset\mathbb{R}_+^0$ називається *носієм* ідеальної решітки E, якщо $f(x)=0$ для будь-яких $f\in E$ і $x\notin A(E)$.

Означення 5.2.2. [278, розділ 2, §3] *Через* E^1 *позначимо асоційований простір до* E*, тобто простір функцій* $g \in \mathfrak{S}$*, для яких* $\operatorname{supp} g \subset A(E)$ *та*

$$\|g\|_{E^1} := \sup_{\substack{f\in E,\\ \|f\|_E\leqslant 1}} \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

З означення неважко бачити, що E^1 є ідеальною решіткою на $\mathbb{R}_+^0$ і є підпростором в спряженому просторі до E. Прикладами ідеальних решіток є простори L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, простори Орліча [105], простори Лоренца [278], простори Марцинкевича [278], симетричні простори [278], тощо.

Надалі будемо називати ідеальну решітку E *переставно напівінваріантною*, якщо для будь-яких $f \in E$ і $x \in \mathbb{R}_+^0$ маємо $f(\cdot + x) \in E$ та $\|f(\cdot + x)\|_E \leqslant \|f\|_E$.

Нехай $r \in \mathbb{N}$ і $k \in (0, r) \setminus \mathbb{N}$. Через $L^r_{\infty,E}$ позначимо простір функцій $f \in L_\infty$, для яких $f^{(r-1)}$ є локально абсолютно неперервною на $\mathbb{R}_+^0$ та $f^{(r)} \in E$. Крім того, через χ_B позначимо *характеристичну* (*індикаторну*) функцію вимірної множини $B \subset \mathbb{R}_+^0$. Мають місце наступні твердження.

Твердження 5.2.1. *Нехай* $r \in \mathbb{N}$*,* $k \in (0, r) \setminus \mathbb{N}$*,* E *– переставно напівінваріантна ідеальна решітка на* $\mathbb{R}_+^0$ *така, що*

$$(\cdot)^{r-k-1}\chi_{(0,1)}(\cdot) \in E^1 \tag{5.16}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \left\|(\cdot)^{r-1-k}\chi_{(0,h)}(\cdot)\right\|_{E^1} = 0, \tag{5.17}$$

де E^1 *– асоційований простір до* E*. Тоді* $D_-^k f$ *існує і є неперервною на* $\mathbb{R}_+^0$ *для всіх функцій* $f \in L^r_{\infty,E}$*.*

Твердження 5.2.2. *Нехай* $r \in \mathbb{N}$*,* $k \in (0, r)\setminus\mathbb{N}$*,* E *– переставно напівінваріантна ідеальна решітка на* $\mathbb{R}_+^0$*, що задовольняє* (5.16)*. Тоді для всіх* $f \in L^r_{\infty,E}$*,*

$$D_-^k f(\cdot) = \frac{(-1)^r}{\Gamma(r-k)} \int_0^{+\infty} t^{r-1-k} f^{(r)}(\cdot + t)\,\mathrm{d}u. \tag{5.18}$$

Зокрема, для $E = L_s$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, обидві умови (5.16) і (5.17) еквівалентні нерівності $k < r - 1/s$. А тому справджується наступний наслідок.

Твердження 5.2.3. *Нехай* $r \in \mathbb{N}$*,* $1 \leqslant s \leqslant \infty$ *і* $k \in (0, r - 1/s) \setminus \mathbb{N}$*. Тоді для всіх* $f \in L^r_{\infty,s}$*,* $D_-^k f$ *існує і є неперервною на* $\mathbb{R}_+^0$*, та має місце* (5.18)*.*

Для замкненості викладення, наведемо доведення тверджень 5.2.1 та 5.2.2. Для цього нагадаємо означення B-сплайнів та деякі їх добре відомі властивості (див., наприклад, [237, §4.2]). B-сплайном першого порядку N_1 є функція $\chi_{(0,1)}$. B-сплайн N_r порядку $r \geqslant 2$ означається рівністю

$$N_r(x) := \int_{\mathbb{R}} N_{r-1}(x-t)N_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 N_{r-1}(x-t)\,\mathrm{d}t, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

Добре відомо, що N_r є неперервною і додатною на $(0,r)$ функцією, компактним носієм якої є відрізок $[0,r]$. Більш того (див. [237, теорема 4.3]), для r-кратно диференційовної функції $f:\mathbb{R}_+^0\to\mathbb{R}$ і будь-якого $t>0$

$$\left(\Delta_{-t}^r f\right)(x) = (-1)^r\, t^r \int_0^r N_r\left(u\right) f^{(r)}\left(x+ut\right)\,\mathrm{d}u, \qquad x\in\mathbb{R}_+^0. \tag{5.19}$$

Доведення твердження 5.2.1. Нехай $f\in L_{\infty,E}^r$ і $x\in\mathbb{R}_+^0$. Неважко бачити, що $\left|\left(\Delta_{-t}^r f\right)(x)\right| \leqslant 2^r\|f\|_\infty$ для всіх $t>0$. За означенням (5.6) для всіх $h>0$ маємо

$$\begin{aligned}
\varkappa(k,r)\left|D_-^k f(x)\right| &= \left|\int_0^{+\infty} \frac{\left(\Delta_{-t}^r f\right)(x)}{t^{1+k}}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \left|\int_0^{h} \frac{\left(\Delta_{-t}^r f\right)(x)}{t^{1+k}}\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_h^{+\infty} \frac{\left(\Delta_{-t}^r f\right)(x)}{t^{1+k}}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \left|\int_0^{h} \frac{\left(\Delta_{-t}^r f\right)(x)}{t^{1+k}}\,\mathrm{d}t\right| + \frac{2^r\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+^0)}}{k\,h^k}.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Застосовуючи формулу (5.19), виконуючи заміну змінної, змінюючи порядок інтегрування і застосовуючи нерівність Гельдера, маємо

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{h} \frac{\left(\Delta_{-t}^r f\right)(x)}{t^{1+k}}\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^h\int_0^r \frac{N_r\left(u\right) f^{(r)}(x+ut)}{t^{k+1-r}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^h\int_0^{rt} \frac{N_r\left(v/t\right) f^{(r)}(x+v)}{t^{k+2-r}}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^{rh} f^{(r)}(x+v)\int_{v/r}^h \frac{N_r\left(v/t\right)}{t^{k+2-r}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v\right| \\
&\leqslant \left\|f^{(r)}\right\|_E\cdot\left\|\chi_{(0,rh)}(\cdot)\int_{(\cdot)/r}^h \frac{N_r\left((\cdot)/t\right)}{t^{k+2-r}}\,\mathrm{d}t\right\|_{E^1}.
\end{aligned}$$

Неважко перевірити, що $N_r(x)\leqslant x^{r-1}$ для всіх $x\in[0,r]$. Тому для всіх $v\in(0,rh)$,

$$\int_{v/r}^h \frac{N_r(v/t)}{t^{k+2-r}}\,\mathrm{d}t \leqslant v^{r-1}\int_{v/r}^h \frac{\mathrm{d}t}{t^{k+1}} \leqslant \frac{v^{r-k-1}}{kr^k}.$$

З останніх нерівностей і оцінки (5.20) отримаємо

$$\varkappa(k,r)\left|D^k_- f(x)\right| \leqslant \frac{2^r\|f\|_\infty}{k\cdot h^k} + \frac{\left\|(\cdot)^{r-1-k}\chi_{(0,rh)}(\cdot)\right\|_{E^1}\cdot\left\|f^{(r)}\right\|_E}{k\cdot r^k},$$

що доводить існування і рівномірну обмеженість $D^k_- f(x)$ в довільній $x\in\mathbb{R}^0_+$.

Тепер доведемо неперервність $D^k_- f$ на $\mathbb{R}^0_+$. Нехай $x\in\mathbb{R}^0_+$ – довільна точка. Для будь-якого $\varepsilon>0$ існують числа $h>0$ і $H>0$, для яких

$$\frac{\left\|(\cdot)^{r-k-1}\chi_{(0,rh)}(\cdot)\right\|_{E^1}\cdot\left\|f^{(r)}\right\|_E}{kr^k\varkappa(k,r)} < \frac{\varepsilon}{6} \qquad \text{та} \qquad \frac{2^{r+1}\|f\|_\infty}{kH^k\varkappa(k,r)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Функція f неперервна на $\mathbb{R}^0_+$ і рівномірно неперервна на відрізку $[h/2, rH+rh/2]$. Отже, існує $\delta\in(0,h/2)$, що для всіх $y',y''\in[h/2,rH+rh/2]$, $|y'-y''|<\delta$, має місце нерівність $|f(y')-f(y'')|<2^{-r}kh^k|\varkappa(k,r)|\,\varepsilon$. Застосовуючи міркування, подібні до тих, що були застосовані при доведенні існування дробової похідної $D^k_- f$, ми отримаємо, що для будь-яких $x,y\in\mathbb{R}^0_+$, $|x-y|<\delta$, для функції $g(\cdot)=f(x+\cdot)-f(y+\cdot)$ виконується нерівність

$$\begin{aligned}
\left|D^k_- f(x)-D^k_- f(y)\right| &\leqslant \frac{1}{\varkappa(k,r)}\left|\int_0^{+\infty}\frac{\left(\Delta^r_{-t}g\right)(0)}{t^{1+k}}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\varkappa(k,r)}\left(\left|\int_0^h\frac{\left(\Delta^r_{-t}g\right)(0)}{t^{1+k}}\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_h^H\frac{\left(\Delta^r_{-t}g\right)(0)}{t^{1+k}}\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_H^{+\infty}\frac{\left(\Delta^r_{-t}g\right)(0)}{t^{1+k}}\,\mathrm{d}t\right|\right) \\
&\leqslant \frac{\left\|g^{(r)}\right\|_E\cdot\left\|(\cdot)^{r-k-1}\chi_{(0,rh)}(\cdot)\right\|_{E^1}}{kr^k\varkappa(k,r)} + \frac{2^r\,\|g\|_{L_\infty([h,rH])}}{kh^k\varkappa(k,r)} + \frac{2^r\|g\|_\infty}{kH^k\varkappa(k,r)} \\
&\leqslant \frac{2\left\|f^{(r)}\right\|_E\cdot\left\|(\cdot)^{r-k-1}\chi_{(0,rh)}(\cdot)\right\|_{E^1}}{kr^k\varkappa(k,r)} + \frac{2^r\,\|f(x+\cdot)-f(y+\cdot)\|_{L_\infty([h,rH])}}{kh^k\varkappa(k,r)} \\
&\quad + \frac{2^{r+1}\|f\|_\infty}{kH^k\varkappa(k,r)} < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

Таким чином, $D^k_- f$ неперервна на $\mathbb{R}^0_+$, що завершує доведення твердження. $\square$

Зауваження 5.2.1. *При доведенні твердження 5.2.1 була отримана наступна, можливо, неточна, нерівність типу Колмогорова:*

$$\left\|D^k_- f\right\|_\infty \leqslant \frac{2^r\|f\|_\infty}{k\,h^k\varkappa(k,r)} + \left\|\chi_{(0,rh)}(\cdot)\int_{(\cdot)/r}^h\frac{N_r\left((\cdot)/t\right)}{t^{k+2-r}}\,\mathrm{d}t\right\|_{E^1}\cdot\left\|f^{(r)}\right\|_E.$$

Доведення твердження 5.2.2. Спочатку відзначимо, що

$$\begin{aligned}
\int_0^r\frac{N_r(u)}{u^{r-k}}\,\mathrm{d}u &= \frac{(-1)^r\left(\Delta^r_{-1}(\cdot)^k\right)(0)}{k(k-1)\dots(k-r+1)} = \frac{(-1)^r}{k(k-1)\dots(k-r+1)}\sum_{m=0}^r(-1)^m\binom{r}{m}m^k \\
&= \frac{\varkappa(k,r)}{\Gamma(-k)(-k)(-k+1)\dots(-k+r-1)} = \frac{\varkappa(k,r)}{\Gamma(r-k)}.
\end{aligned}$$

Нехай $f \in L^r_{\infty,E}$ і $x \in \mathbb{R}^0_+$. Похідна $D^k_- f(x)$ існує в силу твердження 5.2.1. Змінюючи порядок інтегрування і застосовуючи теорему Тонелі ([176, §36]), маємо

$$\begin{aligned} D^k_- f(x) &= \frac{(-1)^r}{\varkappa(k,r)} \int_0^{+\infty}\int_0^r t^{r-1-k} N_r(u)\, f^{(r)}(x+ut)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(-1)^r}{\varkappa(k,r)} \int_0^{+\infty} w^{r-k-1} f^{(r)}(x+w) \left(\int_0^r \frac{N_r(u)}{u^{r-k}}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}w \\ &= \frac{(-1)^r}{\Gamma(r-k)} \int_0^{+\infty} w^{r-1-k} f^{(r)}(x+w)\,\mathrm{d}w. \qquad \square \end{aligned}$$

5.2.2. Достатні умови для встановлення точних нерівностей типу Колмогорова для дробових похідних в смислі Маршо

Наведемо деякі загальні результати, отримані в [200], які дають достатні умови для знаходження точних констант в нерівностях типу Колмогорова (5.7).

Через V_0^∞ позначимо простір функцій $f \in L_1$, що мають обмежену на $\mathbb{R}^0_+$ варіацію. Також, позначимо $x_+ := \max\{x;0\}$ для $x \in \mathbb{R}^0_+$, а для $f \in L_1$ і $m \in \mathbb{N}$ позначимо через $f^{[m]}$ наступну первісну порядку m функції f:

$$f^{[m]}(x) := \frac{1}{(m-1)!}\int_0^{+\infty} (x-t)_+^{m-1} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}^0_+.$$

Також для $\tau > 0$ означимо функцію $\varrho_\tau : \mathbb{R}^0_+ \to \mathbb{R}$:

$$\varrho_\tau(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

Розглянемо спочатку випадок рівномірних норм. Мають місце твердження.

Теорема 5.2.1. *Нехай $r \in \mathbb{N}$, $k \in (0,r) \setminus \mathbb{N}$, а функція $\Omega \in V_0^\infty$ є такою, що $\left(\varrho_{r-k} - \Omega^{[r-1]}\right) \in L_1$ і для будь-якої функції $f \in L^r_{\infty,\infty}$ має місце рівність*

$$D^k_- f(0) - \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\Omega(x) = (-1)^r \int_0^{+\infty} \left(\varrho_{r-k}(x) - \Omega^{[r-1]}(x)\right) f^{(r)}(x)\,\mathrm{d}x. \quad (5.21)$$

Тоді для будь-яких $f \in L^r_{\infty,\infty}$ і $h > 0$ виконується нерівність

$$\left\|D^k_- f\right\|_\infty \leqslant h^{-k} \bigvee_0^{+\infty} \Omega \cdot \|f\|_\infty + h^{r-k} \left\|\varrho_{r-k} - \Omega^{[r-1]}\right\|_1 \cdot \left\|f^{(r)}\right\|_\infty. \quad (5.22)$$

Крім того, якщо функція $\Phi \in W^r_{\infty,\infty}$ задовольняє рівності

$$\int_0^{+\infty} \Phi(t)\,\mathrm{d}\Omega(t) = \bigvee_0^{+\infty} \Omega \cdot \|\Phi\|_\infty \tag{5.23}$$

$$(-1)^r \int_0^{+\infty} \left(\varrho_{r-k}(x) - \Omega^{[r-1]}(x)\right) \Phi^{(r)}(x)\,\mathrm{d}x = \left\|\varrho_{r-k} - \Omega^{[r-1]}\right\|_1, \tag{5.24}$$

то нерівність (5.22) *є точною, а функція* $\Phi_h(\cdot) := \Phi\left((\cdot)/h\right)$ *обертає її в рівність.*

Мінімізуючи праву частину (5.22) за змінною h, отримаємо наступний наслідок.

Наслідок 5.2.1. *Нехай $r \in \mathbb{N}$, $k \in (0,r) \setminus \mathbb{N}$ і припустимо, що функції Ω та Φ задовольняють умови теореми 5.2.1. Тоді для будь-якої $f \in L^r_{\infty,\infty}$ має місце точна нерівність*

$$\left\|D^k_- f\right\|_\infty \leqslant \frac{\left\|D^k_-\Phi\right\|_\infty}{\|\Phi\|_\infty^{1-k/r}} \|f\|_\infty^{1-k/r} \left\|f^{(r)}\right\|_\infty^{k/r}. \tag{5.25}$$

Зауважимо, що наступні результати конкретизують наслідок 5.2.1:

1. для $r = 2$ і $k \in (0,1)$ екстремальні функції Φ і Ω, що задовольняють умови наслідку 5.2.1 були знайдені В. В. Арєстовим [182, теорема 3]:

$$\Omega(x) := \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \dfrac{1}{\Gamma(2-k)}, & x \in (0,1), \\ \dfrac{x^{-k}}{\Gamma(1-k)}, & x \geqslant 1, \end{cases} \qquad \Phi(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{4} - x + \dfrac{x^2}{2}, & x \in [0,1], \\ -\dfrac{1}{4}, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

2. для $r = 2$ і $k \in (1,2)$ екстремальні функції Φ та Ω, що задовольняють умови наслідку 5.2.1 були побудовані В. В. Арєстовим [182, с. 32]:

$$\Omega(x) := \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \dfrac{3 - 2^{(k+1)/2}}{\Gamma(2-k)}, & x \in (0, \sqrt{2}-1], \\ \dfrac{2^{k/2} - \sqrt{2}}{\Gamma(2-k)\left(\sqrt{2}-1\right)}, & x \in (\sqrt{2}-1, 1), \\ \dfrac{x^{-k}}{\Gamma(1-k)}, & x \geqslant 1, \end{cases}$$

$$\Phi(x) := \begin{cases} \dfrac{3 - 2\sqrt{2} - 4\left(\sqrt{2}-1\right)x + 2x^2}{4}, & x \in \left[0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right], \\ \dfrac{1 - 2\sqrt{2} + 4x - 2x^2}{4}, & x \in \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right), \\ \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{4}, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

В [8, 7, 22] можна знайти більш детальні посилання та історію питання, а також огляд випадків, коли функція Φ в нерівності (5.25) є відомою. Відзначимо, що для цілих значень k функція Ω, для якої нерівність (5.22) є точною, була побудована в явному вигляді С. Б. Стєчкіним [160] у випадку $r = 2, 3$.

Доведення теореми 5.2.1. Розглянемо спочатку випадок $h = 1$ і означимо лінійний оператор $T : L_\infty \to L_\infty$ наступним чином:

$$Tg(\cdot) := \int_0^{+\infty} g(\cdot + t)\,\mathrm{d}\Omega(t), \qquad g \in L_\infty.$$

Вочевидь, оператор T є обмеженим і $\|T\| = \bigvee\limits_0^{+\infty} \Omega$. Далі, нехай функція $f \in L^r_{\infty,\infty}$ і точка $x \in \mathbb{R}^0_+$ є довільними. Тоді за твердженням 5.2.2 і співвідношенням (5.21),

$$\begin{aligned}
\left|D^k_- f(x)\right| &= \left|Tf(x) + \left((-1)^r \int_0^{+\infty} \varrho_{r-k}(t) f^{(r)}(x+t)\,\mathrm{d}t - Tf(x)\right)\right| \\
&\leqslant |Tf(x)| + \left|(-1)^r \int_0^{+\infty} \left(\varrho_{r-k}(t) - \Omega^{[r-1]}(t)\right) f^{(r)}(x+t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \bigvee_0^{+\infty} \Omega \cdot \|f\|_\infty + \left\|\varrho_{r-k} - \Omega^{[r-1]}\right\|_1 \cdot \left\|f^{(r)}\right\|_\infty,
\end{aligned}$$

звідки випливає шукана нерівність (5.22) для $h = 1$:

$$\left\|D^k_- f\right\|_\infty \leqslant \bigvee_0^{+\infty} \Omega \cdot \|f\|_\infty + \left\|\varrho_{r-k} - \Omega^{[r-1]}\right\|_1 \cdot \left\|f^{(r)}\right\|_\infty. \tag{5.26}$$

Припустимо, що існує функція $\Phi \in W^r_{\infty,\infty}$, яка задовольняє рівності (5.23) і (5.24). За твердженням 5.2.1 дробова похідна $D^k_-\Phi$ є неперервною на $\mathbb{R}^0_+$. Отже, в силу рівностей (5.23) та (5.24) отримаємо

$$\begin{aligned}
\left\|D^k_-\Phi\right\|_\infty &\geqslant \left|D^k_-\Phi(0)\right| \\
&= \left|\int_0^{+\infty} \Phi(x)\,\mathrm{d}\Omega(x) + (-1)^r \int_0^{+\infty} \left(\varrho_{r-k}(x) - \Omega^{[r-1]}(x)\right) \Phi^{(r)}(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\geqslant \bigvee_0^{+\infty} \Omega \cdot \|\Phi\|_\infty + \left\|\varrho_{r-k} - \Omega^{[r-1]}\right\|_1 \cdot \left\|\Phi^{(r)}\right\|_\infty.
\end{aligned}$$

Таким чином, твердження теореми доведено у випадку $h = 1$.

Нехай тепер $h > 0$ і функція $f \in L^r_{\infty,\infty}$ є довільними, та розглянемо функцію $f_h(x) := f(x/h)$, $x \in \mathbb{R}^0_+$. Зрозуміло, що $f_h \in L^r_{\infty,\infty}$. Підставивши f_h в (5.26), отримаємо нерівність (5.22). Неважко бачити, що Φ_h обертає (5.22) в рівність. $\square$

Тепер ми узагальнимо теорему 5.2.1 на випадок, коли норма похідної старшого порядку береться в ідеальній решітці. Спочатку наведемо результати у випадку, коли екстремальна функція в нерівності типу Колмогорова існує, а потім – коли не існує. Для похідних цілих порядків існування екстремальної функції в нерівності типу Колмогорова (5.2) було встановлено (див. [5, 65, 57]) у випадку, коли $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $1 < s \leqslant \infty$ і нерівність (5.4) є строгою.

Для ідеальної решітки E на $\mathbb{R}_+^0$ і $r \in \mathbb{N}$ означимо

$$W_{\infty,E}^r = \left\{ f \in L_{\infty,E}^r : \left\| f^{(r)} \right\|_E \leqslant 1 \right\}.$$

Теорема 5.2.2. *Нехай $r \in \mathbb{N}$, $k \in (0, r) \setminus \mathbb{N}$, E є ідеальна переставно напів-інваріантна решітка на $\mathbb{R}_+^0$, що задовольняє умови (5.16) і (5.17), E^1 є асоційований простір до E. Також, нехай функція $\Omega \in V_0^\infty$ є такою, що $\left(\varrho_{r-k} - \Omega^{[r-1]}\right) \in E^1$ і рівність (5.21) виконується для всіх $f \in L_{\infty,E}^r$. Тоді для будь-якої $f \in L_{\infty,E}^r$,*

$$\left\| D_-^k f \right\|_\infty \leqslant \bigvee_0^{+\infty} \Omega \cdot \|f\|_\infty + \left\| \varrho_{r-k} - \Omega^{[r-1]} \right\|_{E^1} \cdot \left\| f^{(r)} \right\|_E . \tag{5.27}$$

Крім того, якщо функція $\Phi \in W_{\infty,E}^r$ задовольняє рівності (5.23) та

$$(-1)^r \int_0^{+\infty} \left(\varrho_{r-k}(x) - \Omega^{[r-1]}(x) \right) \Phi^{(r)}(x)\,\mathrm{d}x = \left\| \varrho_{r-k} - \Omega^{[r-1]} \right\|_{E^1}, \tag{5.28}$$

то нерівність (5.27) є точною, а функція Φ обертає (5.27) в рівність.

Для просторів L_s, $1 < s \leqslant \infty$, має місце наступний наслідок.

Наслідок 5.2.2. *Нехай $1 < s \leqslant \infty$, $s' = s/(s-1)$, $r \in \mathbb{N}$ і $k \in (0, r - 1/s) \setminus \mathbb{N}$. Нехай також функція $\Omega \in V_0^\infty$ є такою, що $\left(\varrho_{r-k} - \Omega^{[r-1]}\right) \in L_{s'}$ і рівність (5.21) виконується для всіх $f \in L_{\infty,s}^r$. Якщо функція $\Phi \in W_{\infty,s}^r$ задовольняє рівність (5.23) і співвідношення*

$$(-1)^r \int_0^{+\infty} \left(\varrho_{r-k}(x) - \Omega^{[r-1]}(x) \right) \Phi^{(r)}(x)\,\mathrm{d}x = \left\| \varrho_{r-k} - \Omega^{[r-1]} \right\|_{s'},$$

то для будь-яких $f \in L_{\infty,s}^r$ і $h > 0$ мають місце точні нерівності

$$\left\| D_-^k f \right\|_\infty \leqslant h^{-k} \bigvee_0^{+\infty} \Omega \cdot \|f\|_\infty + h^{r-k-1/s} \left\| \varrho_{r-k} - \Omega^{[r-1]} \right\|_{s'} \cdot \left\| f^{(r)} \right\|_s \tag{5.29}$$

і

$$\left\|D_-^k f\right\|_\infty \leqslant \frac{\left\|D_-^k \Phi\right\|_\infty}{\|\Phi\|_\infty^{1-\lambda}} \|f\|_\infty^{1-\lambda} \left\|f^{(r)}\right\|_s^\lambda, \qquad \lambda = \frac{k}{r-1/s}. \tag{5.30}$$

Більш того, функція $\Phi_h(\cdot) := h^{r-1/s}\Phi\left((\cdot)/h\right)$ обертає (5.29) і (5.30) в рівності.

Відзначимо, що теореми 3.1.2 і 3.2.2 в [128] є конкретизаціями наслідку 5.2.2. Також для цілих k, для $r = 2, 3$ і $1 < s < \infty$, функції Φ та Ω, що задовольняють умови наслідку 5.29 були побудовані в явному вигляді В. В. Арєстовим в [6].

Доведення теореми 5.2.2. Доведення є цілком аналогічним до доведення теореми 5.2.1 у випадку $h = 1$. Відмінність полягає в тому, що для функції $f \in L_{\infty,E}^r$ і $x \in \mathbb{R}_+^0$ нам необхідно застосувати нерівність

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^{+\infty} \left(\varrho_{r-k}(t) - \Omega^{[r-1]}(t)\right) f^{(r)}(x+t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\qquad \leqslant \left\|\varrho_{r-k} - \Omega^{[r-1]}\right\|_{E^1} \cdot \left\|f^{(r)}(x+\cdot)\right\|_E \leqslant \left\|\varrho_{r-k} - \Omega^{[r-1]}\right\|_{E^1} \cdot \left\|f^{(r)}\right\|_E. \end{aligned}$$

Екстремальність функції Φ можна довести за аналогією до теореми 5.2.1. $\square$

Доведення наслідку 5.2.2. Нехай $h > 0$. Помітимо, що $\Omega_h(x) := h^{-k}\Omega\left(x/h\right)$, $x \in \mathbb{R}_+^0$, і Φ_h задовольняють умови (5.21), (5.23) і (5.28). Більш того,

$$\bigvee_0^{+\infty} \Omega_h = h^{-k} \bigvee_0^{+\infty} \Omega, \qquad \left\|\varrho_{r-k} - \Omega_h^{[r-1]}\right\|_{s'} = h^{r-k-1/s} \left\|\varrho_{r-k} - \Omega^{[r-1]}\right\|_{s'}.$$

Отже за теоремою 5.2.2 виконується нерівність (5.29) і функція Φ_h обертає (5.29) в рівність. Мінімізуючи праву частину (5.29) за змінною h, ми отримаємо нерівність (5.30). Доведення завершено. $\square$

Розглянемо випадок, коли екстремальна функція в нерівності типу Колмогорова не існує. Наведемо два результати щодо послаблення умов (5.23) та (5.28).

Теорема 5.2.3. *Нехай числа k, r, ідеальна переставно напівінваріантна решітка E на $\mathbb{R}_+^0$ та функція $\Omega \in V_0^\infty$ задовольняють припущенням теореми 5.2.2. Також припустимо, що існує сім'я функцій $\{\Phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset W_{\infty,E}^r$, для якої виконується рівність (5.23) і для $\varepsilon > 0$ – нерівність*

$$(-1)^r \int_0^{+\infty} \left(\varrho_{r-k}(x) - \Omega^{[r-1]}(x)\right) \Phi_\varepsilon^{(r)}(x)\,\mathrm{d}x > \left\|\varrho_{r-k} - \Omega^{[r-1]}\right\|_{E^1} - \varepsilon. \tag{5.31}$$

Тоді має місце нерівність (5.27), *яка є точною в тому сенсі, що для довільного достатньо малого* $\varepsilon > 0$ *існує функція* $f_\varepsilon \in L^r_{\infty,E}$, *для якої*

$$\left\|D^k_- f_\varepsilon\right\|_\infty > \bigvee_0^{+\infty}\Omega \cdot \|f_\varepsilon\|_\infty + \left(\left\|\varrho_{r-k} - \Omega^{[r-1]}\right\|_{E^1} - \varepsilon\right) \cdot \left\|f_\varepsilon^{(r)}\right\|_E.$$

Теорема 5.2.4. *Нехай* $r \in \mathbb{N}$, $k \in (0, r-1) \setminus \mathbb{N}$, E *є ідеальна переставно напівінваріантна решітка на* $\mathbb{R}^0_+$, *для якої* $\liminf\limits_{h\to 0^+}\left(h^{-1}\left\|\chi_{(0,h)}\right\|_E\right) =: \mu \in (0, +\infty)$. *Також нехай функція* $\Omega \in V_0^\infty$ *є такою, що* $\left(\varrho_{r-k} - \Omega^{[r-1]}\right) \in E^1$ *та співвідношення* (5.21) *має місце для всіх* $f \in L^r_{\infty,E}$. *Припустимо, що існує функція* $\Phi \in L_\infty$ *така, що її похідна* $\Phi^{(r-1)}$ *є кусково-сталою на* $\mathbb{R}^0_+$, $\bigvee\limits_0^\infty \Phi^{(r-1)} = \mu^{-1}$, *існує* $h_0 > 0$, *для якого відстань між точками розриву* $\Phi^{(r-1)}$ *обмежена знизу числом* h_0, *а також мають місце рівності* (5.23) *та*

$$(-1)^r \int_0^{+\infty}\left(\varrho_{r-k}(x) - \Omega^{[r-1]}(x)\right) \mathrm{d}\Phi^{(r-1)}(x) = \left\|\varrho_{r-k} - \Omega^{[r-1]}\right\|_{E^1}.$$

Тоді нерівність (5.27) *виконується та є точною.*

У випадку $E = L_1$ отримаємо наступний наслідок.

Наслідок 5.2.3. *Нехай* $r \in \mathbb{N}$ *і* $k \in (0, r-1) \setminus \mathbb{N}$. *Нехай також функція* $\Omega \in V_0^\infty$ *є такою, що* $\left(\varrho_{r-k} - \Omega^{[r-1]}\right) \in L_\infty$ *і рівність* (5.21) *має місце для будь-якої* $f \in L^r_{\infty,1}$. *Якщо* $(r-1)$*-кратно диференційовна функція* Φ *з кусково-сталою похідною* $\Phi^{(r-1)}$ *задовольняє рівності* (5.23), $\bigvee\limits_0^\infty \Phi^{(r-1)} = 1$, *існує* $h_0 > 0$, *для якого відстань між точками розриву* $\Phi^{(r-1)}$ *обмежена знизу числом* h_0, *і*

$$(-1)^r \int_0^{+\infty}\left(\varrho_{r-k}(x) - \Omega^{[r-1]}(x)\right) \mathrm{d}\Phi^{(r-1)}(x) = \left\|\varrho_{r-k} - \Omega^{[r-1]}\right\|_\infty,$$

то для всіх $f \in L^r_{\infty,1}$ *і* $h > 0$ *мають місце точні нерівності*

$$\left\|D^k_- f\right\|_\infty \leqslant h^{-k}\bigvee_0^\infty \Omega \cdot \|f\|_\infty + h^{r-k-1}\left\|\varrho_{r-k} - \Omega^{[r-1]}\right\|_\infty \cdot \left\|f^{(r)}\right\|_1$$

$$\left\|D^k_- f\right\|_\infty \leqslant \frac{\left\|D^k_-\Phi\right\|_\infty}{\|\Phi\|_\infty^{1-\lambda}}\|f\|_\infty^{1-\lambda}\left\|f^{(r)}\right\|_1^\lambda, \qquad \lambda = \frac{k}{r-1}.$$

Доведення теореми 5.2.3. Помітимо, що нерівність (5.27) виконується для всіх $f \in L^r_{\infty,E}$. Доведемо її точність. Нехай $\varepsilon > 0$ є достатньо малим. За твердженням 5.2.1, $D^k_-\Phi_\varepsilon$ є неперервною на $\mathbb{R}^0_+$. Отже, в силу (5.23) і (5.31),

$$\begin{aligned}
\left\|D^k_-\Phi_\varepsilon\right\|_\infty &\geqslant \left|D^k_-\Phi_\varepsilon(0)\right| \\
&= \left|\int_0^{+\infty}\Phi_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}\Omega(x) + (-1)^r\int_0^{+\infty}\left(\varrho_{r-k}(x)-\Omega^{[r-1]}(x)\right)\Phi_\varepsilon^{(r)}(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\geqslant \bigvee_0^\infty\Omega\cdot\|\Phi_\varepsilon\|_\infty + \left\|\varrho_{r-k}-\Omega^{[r-1]}\right\|_{E^1} - \varepsilon \\
&\geqslant \bigvee_0^\infty\Omega\cdot\|\Phi_\varepsilon\|_\infty + \left(\left\|\varrho_{r-k}-\Omega^{[r-1]}\right\|_{E^1} - \varepsilon\right)\cdot\left\|\Phi_\varepsilon^{(r)}\right\|_E. \qquad \square
\end{aligned}$$

Доведення теореми 5.2.4. Оскільки $k < r-1$, то $(\cdot)^{r-k-1}\chi_{(0,1)}(\cdot)\in E^1$ і умова (5.17) також виконується. Отже, за теоремою 5.2.2 має місце нерівність (5.27). Доведемо її точність. Для цього через $B = \{\beta_j\}_{j\in J}$, де J – скінченна або злічена множина індексів, позначимо точки розриву функції $\Phi^{(r-1)}$ та означимо $\alpha_j := \Phi\left(\beta_j^+\right) - \Phi\left(\beta_j^-\right)$, $j\in J$. В силу припущення, існує $h_0>0$, для якого $|\beta_j-\beta_i|\geqslant h_0$ для всіх $i,j\in J$, $i\neq j$. Для $h\in(0,h_0)$ розглянемо функцію

$$\Phi_h(x) := \frac{1}{h}\int_0^h \Phi(x+t)\,\mathrm{d}t, \qquad x\in\mathbb{R}^0_+.$$

Неважко бачити, що при $h\to 0^+$ маємо

$$\int_0^{+\infty}\Phi_h(x)\,\mathrm{d}\Omega(x) \to \int_0^{+\infty}\Phi(x)\,\mathrm{d}\Omega(x) = \bigvee_0^\infty\Omega\cdot\|\Phi\|_\infty,$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\left(\varrho_{r-k}(x)-\Omega^{[r-1]}(x)\right)\Phi_h^{(r)}(x)\,\mathrm{d}x \to \int_0^{+\infty}\left(\varrho_{r-k}(x)-\Omega^{[r-1]}(x)\right)\mathrm{d}\Phi^{(r-1)}(x) \\
= (-1)^r\left\|\varrho_{r-k}-\Omega^{[r-1]}\right\|_{E^1},
\end{aligned}$$

$$\liminf_{h\to0^+}\left\|\Phi_h^{(r)}\right\|_E \leqslant \liminf_{h\to0^+}\sum_{j\in J}\frac{|\alpha_j|}{h}\cdot\left\|\chi_{(0,h)}\right\|_E = \frac{1}{\mu}\cdot\liminf_{h\to0^+}\frac{\left\|\chi_{(0,h)}\right\|_E}{h} = 1.$$

Тому за неперервністю $D^k_-\Phi_h$, для всіх ε і достатньо малих $h>0$ матимемо

$$\begin{aligned}
\left\|D^k_-\Phi_h\right\|_\infty &\geqslant D^k_-\Phi_h(0) > \bigvee_0^\infty\Omega\cdot\|\Phi_h\|_\infty + \left\|\varrho_{r-k}-\Omega^{[r-1]}\right\|_{E^1} - \varepsilon \\
&\geqslant \bigvee_0^\infty\Omega\cdot\|\Phi_h\|_\infty + \left(\left\|\varrho_{r-k}-\Omega^{[r-1]}\right\|_{E^1} - \varepsilon\right)\left\|\Phi_h^{(r)}\right\|_E. \qquad \square
\end{aligned}$$

5.2.3. Точні нерівності типу Колмогорова для похідних в смислі Маршо функцій малої гладкості

Перейдемо до викладення основних результатів цього підрозділу. Розглянемо спочатку випадок $r=2$ та $k\in(0,1)$. Для $k\in(0,1)$ і $h>0$ розглянемо функцію

$$\tau_h(x):=\left(x^{1-k}-h^{-k}x\right)_+,\qquad x\in\mathbb{R}_+^0.$$

Теорема 5.2.5. *Нехай $k\in(0,1)$, E є ідеальна переставно напівінваріантна решітка на $\mathbb{R}_+^0$, що задовольняє умови (5.16) і (5.17), E^1 є асоційований простір до E. Тоді для будь-яких $f\in L^2_{\infty,E}$ та $h>0$ справджується точна нерівність*

$$\left\|D_-^kf\right\|_\infty\leqslant\frac{2h^{-k}}{\Gamma(2-k)}\left\|f\right\|_\infty+\frac{\left\|\tau_h\right\|_{E^1}}{\Gamma(2-k)}\left\|f''\right\|_E\,. \tag{5.32}$$

Доведення. Для $h>0$ означимо

$$\Omega(x)=\Omega_h(x):=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{h^{-k}}{\Gamma(2-k)}, & x\in(0,h),\\ \dfrac{x^{-k}}{\Gamma(1-k)}, & x\geqslant h.\end{cases}$$

Зрозуміло, що $\bigvee\limits_0^\infty\Omega=\frac{2h^{-k}}{\Gamma(2-k)}$ та $\varrho_{2-k}-\Omega^{[1]}=\frac{\tau_h}{\Gamma(2-k)}\in E^1$. Крім того, для будь-якої $f\in L^2_{\infty,E}$ має місце співвідношення (5.21). Дійсно,

$$\begin{aligned}
&D_-^kf(0)-\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}\Omega(x)\\
&\quad=D_-^kf(0)-\frac{h^{-k}f(0)}{\Gamma(2-k)}+\frac{kh^{-k}f(h)}{\Gamma(2-k)}+\frac{k}{\Gamma(1-k)}\int_h^{+\infty}\frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{x^{1+k}}\\
&\quad=\frac{k}{\Gamma(1-k)}\int_0^h\frac{f(0)-f(x)}{x^{1+k}}\,\mathrm{d}x+\frac{kh^{-k}f(h)}{\Gamma(2-k)}\\
&\quad=-\frac{k}{\Gamma(1-k)}\int_0^h\int_0^x\frac{(x-t)f''(t)}{x^{1+k}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x+\frac{kh^{-k}}{\Gamma(2-k)}\int_0^h(h-t)f''(t)\,\mathrm{d}t\\
&\quad=\int_0^{+\infty}\left(\varrho_{2-k}(t)-\Omega^{[1]}(t)\right)f''(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Побудуємо сім'ю функцій $\{\Phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}\subset W^2_{\infty,E}$, яка задовольняє умови (5.23) і (5.31). Для $\varepsilon>0$ існує функція $g_\varepsilon\in E$, $\|g_\varepsilon\|_E\leqslant1$, така, що

$$\int_0^h\left(\varrho_{2-k}(x)-\Omega^{[1]}(x)\right)g_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x>\left\|\varrho_{2-k}-\Omega^{[1]}\right\|_{E^1}-\varepsilon=\frac{\left\|\tau_h\right\|_{E^1}}{\Gamma(2-k)}-\varepsilon.$$

Без зменшення загальності припустимо, що g_ε невід'ємна на $\mathbb{R}^0_+$ і $\operatorname{supp} g_\varepsilon = [0,h]$. Означимо функцію Φ_ε як первісну другого порядку від g_ε:

$$\Phi_\varepsilon(x) := \int_0^h (-x + t/2)\, g_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x (x-t) g_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}^0_+.$$

Вочевидь, $\Phi_\varepsilon \in W^2_{\infty,E}$, $\Phi_\varepsilon(x) = -\Phi_\varepsilon(0) = -\|\Phi_\varepsilon\|_\infty$, $x \geqslant h$. Як наслідок,

$$\int_0^{+\infty} \Phi_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}\Omega(x) = \frac{\Phi_\varepsilon(0) - k\Phi_\varepsilon(h)}{\Gamma(2-k)\cdot h^k} - \frac{k(1-k)}{\Gamma(2-k)} \int_h^{+\infty} \frac{\Phi_\varepsilon(x)}{x^{1+k}}\,\mathrm{d}x = \bigvee_0^\infty \Omega \cdot \|\Phi_\varepsilon\|_\infty$$

та

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(\varrho_{2-k}(x) - \Omega^{[1]}(x)\right) \Phi_\varepsilon''(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^h \left(\varrho_{2-k}(x) - \Omega^{[1]}(x)\right) g_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \\ &> \left\|\varrho_{2-k} - \Omega^{[1]}\right\|_{E^1} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким чином, функція Ω та сім'я функцій $\{\Phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ задовольняє припущення теореми 5.2.3. Тому нерівність (5.32) справджується і є точною. $\square$

Сформулюємо точні нерівності типу Колмогорова у випадку $E = L_s$, які випливають з наслідків 5.2.2, 5.2.3 та 5.2.5. Для $s > 1$ означимо функцію

$$\varphi_{k,s}(x) := \int_0^h (-x + t/2)\, \tau_1^{s'-1}(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x (x-t)\tau_1^{s'-1}(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}^0_+,$$

і $\Phi_{k,s} := \|\varphi_{k,s}\|_s^{-1} \cdot \varphi_{k,s}$. Також нехай

$$\Phi_{k,1}(x) = \frac{1}{2}\cdot \max\left\{(1-k)^{1/k} - 2x;\, -(1-k)^{1/k}\right\}, \qquad x \in \mathbb{R}^0_+.$$

Теорема 5.2.6. *Нехай $k \in (0,1)$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$ і $s' = s/(s-1)$. Тоді для $f \in L^2_{\infty,s}$ справджується точна нерівність*

$$\left\|D^k_- f\right\|_\infty \leqslant \frac{\left\|D^k_- \Phi_{k,s}\right\|_\infty}{\|\Phi_{k,s}\|_\infty^{1-\lambda}} \|f\|_\infty^{1-\lambda} \|f''\|_s^\lambda, \quad \lambda = \frac{k}{2-1/s}.$$

Зауваження 5.2.2. *Нехай $N > 0$ і $h > 0$ є такими, що $N = \frac{2h^{-k}}{\Gamma(2-k)}$. Нехай також оператор $T_N : L_\infty \to L_\infty$ означено за правилом*

$$T_N f(\cdot) := \int_0^{+\infty} f(\cdot + t)\,\mathrm{d}\Omega_h(t), \qquad f \in L_\infty.$$

Тоді в умовах теореми (5.32)

$$E_N\left(D^k_-; W^2_{\infty,E}\right) = U\left(D^k_-, T_N; W^2_{\infty,E}\right) = \frac{\|\tau_h\|_{E^1}}{\Gamma(2-k)}.$$

Перейдемо тепер до розгляду випадку $r = 2$, $1 < s \leqslant \infty$ та $k \in (1, 2 - 1/s)$. Нехай $s' = s/(s-1)$. Розглянемо множину $M := \left\{(a,b) \in (0,1)^2 \,:\, a \leqslant b\right\}$ та для кожного $(a,b) \in M$ означимо функцію

$$\omega(a,b;x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ a^{-1}(1-b)^{-1} \cdot \left(1 - b - \left(1 - b^{1-k}\right)(1-a)\right), & x \in (0,a], \\ (1-b)^{-1} \cdot \left(1 - b^{1-k}\right), & x \in (a,1), \\ (1-k)x^{-k}, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Для $x \in \mathbb{R}_+^0$ розглянемо функції $\tau(a,b;x) := \Gamma(2-k) \cdot \varrho(x) - \omega^{[1]}(a,b;x)$ і

$$\varphi(a,b;x) := \int_0^a (-x + t/2) \cdot \tau_{(s')}(a,b;t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x (x-t) \cdot \tau_{(s')}(a,b;t)\,\mathrm{d}t,$$

де $g_{(s')} := |g|^{s'-1}\operatorname{sgn} g$. Нижче в лемі 5.2.1 ми покажемо, що система рівнянь (5.33) має єдиний розв'язок $(a_{k,s}, b_{k,s})$ на M. Для зручності позначимо функції $\omega\left(a_{k,s}, b_{k,s}; \cdot\right)$, $\tau\left(a_{k,s}, b_{k,s}; \cdot\right)$, $\varphi\left(a_{k,s}, b_{k,s}; \cdot\right)$ через $\omega_{k,s}$, $\tau_{k,s}$, $\varphi_{k,s}$ відповідно. Графік функцій $\omega^{[1]}(a,b;\cdot)$, $\tau(a,b;\cdot)$ і $\varphi_{k,s}$ зображено на рис. 5.1.

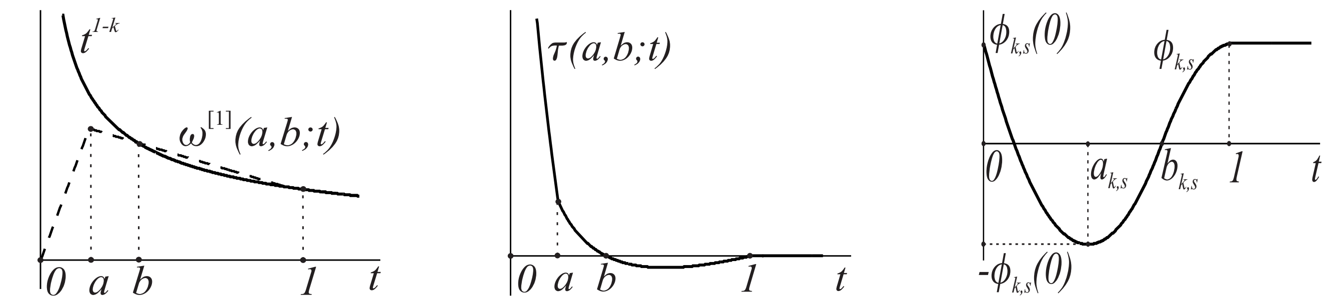

Рис. 5.1: Графіки функцій: $\Gamma(2-k) \cdot \varrho_{2-k}$ та $\omega^{[1]}(a,b;\cdot)$; $\tau(a,b;\cdot)$; $\varphi_{k,s}$

Наступне твердження випливає з наслідку 5.2.2.

Теорема 5.2.7. *Нехай $1 < s \leqslant \infty$, $s' = s/(s-1)$, $k \in (1, 2-1/s)$ і $\Phi_{k,s} := \|\varphi_{k,s}\|_s^{-1} \cdot \varphi_{k,s}$. Тоді для будь-якої $f \in L^2_{\infty,s}$,*

$$\left\|D_-^k f\right\|_\infty \leqslant \frac{\left\|D_-^k \Phi_{k,s}\right\|_\infty}{\|\Phi_{k,s}\|_\infty^{1-\lambda}} \|f\|_\infty^{1-\lambda} \|f''\|_s^\lambda, \quad \lambda = \frac{k}{2-1/s},$$

Спочатку доведемо допоміжне твердження.

Лема 5.2.1. *Наступна система рівнянь має єдиний розв'язок на M:*

$$\begin{cases} F_1(a,b) := \displaystyle\int_a^1 \tau_{(s')}(a,b;t)\,\mathrm{d}t = 0, \\ F_2(a,b) := \displaystyle\int_0^1 t \cdot \tau_{(s')}(a,b;t)\,\mathrm{d}t = 0. \end{cases} \tag{5.33}$$

Зазначимо, що в деяких випадках пару $(a_{k,s}, b_{k,s})$ можна знайти в явному вигляді, тобто $a_{k,\infty} = \sqrt{2} - 1$ та $b_{k,\infty} = 1/\sqrt{2}$.

Доведення. Для всіх $(a,b) \in M$ функція $\tau(a,b;\cdot)$ є додатною на $(0,b)$, від'ємною на $(b,1)$ та $\operatorname{supp}\tau(a,b;\cdot) = [0,1]$. Також функції F_1 і F_2 є неперервні на M і можуть бути визначені за неперервністю на множині $\widetilde{M} := \big\{(a,b) \in [0,1)^2 \,:\, b > 0,\ a \leqslant b\big\}$. Доведемо, що система рівнянь (5.33) має єдиний розв'язок на $\widetilde{M}$. Функція F_2 строго зростає за змінними a та b, а функція F_1 строго зростає за змінною b і строго спадає за змінною a. Отже система рівнянь (5.33) може мати лише один розв'язок. Далі неважко переконатися, що

$$
\begin{aligned}
\lim_{b\to 0^+} F_2(b,b) &\leqslant \lim_{b\to 0^+} \left\{\int_0^b t^{(1-k)(s'-1)+1}\,\mathrm{d}t - \int_b^1 t\cdot\tau_{(s')}(b,b;t)\,\mathrm{d}t\right\} = -\infty,\\
\lim_{b\to 1^-} F_2(b,b) &= \int_0^1 t\left(t^{1-k} - t\right)^{s'-1}\,\mathrm{d}t > 0,\\
\lim_{b\to 1^-} F_2(0,b) &= \int_0^1 t\left(t^{1-k} - 1 + (1-k)(1-t)\right)^{s'-1}\,\mathrm{d}t > 0.
\end{aligned}
$$

Тому існують точки $a^*, b^* \in (0,1)$ такі, що $F_2\,(0,b^*) = F_2\,(a^*,a^*) = 0$. Приймаючи до уваги неперервність функції F_2 та її монотонність за кожною змінною ми бачимо, що для будь-якого $a \in [0,a^*]$ існує $b = b(a) \in [a^*,b^*]$, для якого $F_2\,(a,b) = 0$. Крім того, функція $b(a)$ є неперервною і спадною на відрізку $[0,a^*]$, оскільки вона має обернену. Нарешті зауважимо, що

$$
\begin{aligned}
F_1\,(0,b^*) &= \frac{1}{b^*}\left\{b^*\int_0^1 \tau_{(s')}\,(0,b^*;t)\;\mathrm{d}t\right\}\\
&> \frac{1}{b^*}\left\{\int_0^{b^*} t\cdot\tau_{(s')}\,(0,b^*;t)\;\mathrm{d}t\right\} = \frac{F_2\,(0,b^*)}{b^*} = 0
\end{aligned}
$$

та

$$
F_1\,(a^*,a^*) = \int_{a^*}^1 \tau_{(s')}\,(a^*,a^*;t)\;\mathrm{d}t < 0.
$$

Отже, існує $a_0 \in (0,a^*)$, для якого $F_1\,(a_0, b\,(a_0)) = 0$. Тому точка $(a_0, b\,(a_0)) \in M$ і задовольняє (5.33). □

Доведення наслідку 5.2.7. Означимо $\Omega := \frac{\omega_{k,s}}{\Gamma(2-k)}$. Нескладно переконатися в тому, що для будь-якої $f \in L^2_{\infty,s}$,

$$
D^k_- f(0) - \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\Omega(t) = \int_0^{+\infty}\Big(\varrho_{2-k}(t) - \Omega^{[1]}(t)\Big)\,f''(t)\,\mathrm{d}t.
$$

Більш того, $\Phi_{k,s}\in W^2_{\infty,s}$, $\Phi_{k,s}(0)=-\Phi_{k,s}\left(a_{k,s}\right)=\|\Phi_{k,s}\|_\infty$, $\Phi_{k,s}(x)=\Phi_{k,s}(0)$ для будь-якого $x\geqslant h$, $\Phi_{k,s}$ спадає на $[0,a_{k,s}]$ і зростає на $[a_{k,s},+\infty)$. Отже функції Ω та $\Phi_{k,s}$ задовольняють припущення наслідку 5.2.2. $\square$

Зауваження 5.2.3. *Нехай $N>0$ і $h>0$ є такими, що $N=\frac{h^{-k}}{\Gamma(2-k)}\bigvee\limits_0^\infty\omega_{k,s}$. Нехай також оператор $T_N: L_\infty\to L_\infty$ означено за правилом*

$$T_Nf(\cdot):=\frac{h^{-k}}{\Gamma(2-k)}\int_0^{+\infty}f(\cdot+t)\,\mathrm{d}\omega_{k,s}\left(\frac{t}{h}\right),\qquad f\in L_\infty.$$

Тоді в умовах теореми (5.32)

$$E_N\left(D^k_-;W^2_{\infty,s}\right)=U\left(D^k_-,T_N;W^2_{\infty,s}\right)=\frac{h^{2-k-1/s}\,\|\tau_{k,s}\|_{s'}}{\Gamma(2-k)}.$$

5.3. Нерівності типу Колмогорова для функцій, друга похідна яких належить простору Орліча

В цьому підрозділі розв'язана задача 5.1.2 для оператора диференціювання першого порядку та функціонала диференціювання першого порядку в точці на класі функцій, означених на скінченному відрізку, друга похідна яких має обмежену норму Люксембурга. Також у відповідних ситуаціях розв'язана задача Стєчкіна 5.1.5. Результати підрозділу опубліковано в [40].

Надалі ми будемо розглядати функції, означені на відрізку $[0,1]$, а тому для зручності будемо опускати позначення області визначення в символах просторів $L_p([0,1])$, класів $W^r_p([0,1])$ та норми $\|\cdot\|_{L_p([0,1])}$.

Розглянемо спеціальний клас ідеальних решіток – простори Орліча (див. [105]). Нехай $\mathfrak{p},\mathfrak{q}:\mathbb{R}^0_+\to\mathbb{R}$ є неперервні справа неспадні функції такі, що

$$\mathfrak{q}(\rho):=\sup_{\mathfrak{p}(\tau)\leqslant\rho}\tau,\qquad \mathfrak{p}(\tau):=\sup_{\mathfrak{q}(\rho)\leqslant\tau}\rho$$

та $\mathfrak{p}(0)=\mathfrak{q}(0)=0$, $\mathfrak{p}(+\infty)=\mathfrak{q}(+\infty)=\infty$.

Означення 5.3.1. *Опуклі функції $M,N:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, означені рівностями*

$$M(u)=\int_0^{|u|}\mathfrak{p}(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\qquad N(v)=\int_0^{|v|}\mathfrak{q}(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

називаються доповнюючими одна до одної N-функціями.

Нехай M і N є доповнюючі одна до одної N-функції. Через L_M позначимо *клас Орліча*, що відповідає N-функції M, тобто клас функцій $x\,:\,[0,1]\to\mathbb{R}$, для яких

$$\rho(x,M):=\int_0^1 M(|x(\tau)|)\,\mathrm{d}\tau<\infty.$$

Через L_M^* позначимо клас функцій $x\,:\,[0,1]\to\mathbb{R}$, для яких

$$\int_0^1 x(\tau)y(\tau)\,\mathrm{d}\tau<\infty,\qquad \text{для будь-якого}\quad y\in L_N.$$

Слідуючи книзі [105, §9], введемо на класі L_M^* *норму Орліча*

$$\|x\|_M:=\sup_{\rho(y,N)\leqslant 1}\left|\int_0^1 x(\tau)y(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right|,$$

та *норму Люксембурга*

$$\|x\|_{(M)}:=\inf\left\{k>0\,:\,\rho\left(\frac{x}{k},M\right)\leqslant 1\right\}.$$

Зазначимо, що L_M є ідеальною решіткою, а L_M^* з нормою Орліча є асоційованим простором до L_M. Також для $M(u)=u^s$, $1<s<\infty$, клас L_M^* збігається з простором L_s, а норма Люксембурга $\|\cdot\|_{(M)}$ збігається з нормою $\|\cdot\|_s$.

Через $L_M^{*,r}$, $r\in\mathbb{N}$, позначимо простір функцій $x\,:\,[0,1]\to\mathbb{R}$, для яких $x^{(r-1)}$ є абсолютно неперервною на $[0,1]$ і $x\in L_M^*$.

Розглянемо наступну сім'ю функцій. Для $t\in\left[0,\frac12\right]$ та $h\in[0,1]$ означимо

$$g_{t,h}(\tau):=\begin{cases}-\dfrac1h\left(t-\dfrac h2-\tau\right)_+, & \tau\in[0,t],\\ \dfrac1h\left(t+\dfrac h2-\tau\right)_+, & \tau\in[t,1],\end{cases}\tag{5.34}$$

якщо $0<h\leqslant 2t$, і

$$g_{t,h}(\tau):=\begin{cases}-\dfrac{\tau}{h}, & \tau\in[0,t],\\ \left(1-\dfrac{\tau}{h}\right)_+, & \tau\in[t,1],\end{cases}\tag{5.35}$$

якщо $2t\leqslant h\leqslant 1$.

Ю. В. Бабенко в [38] отримала наступне твердження.

Твердження 5.3.1. *Нехай $t\in\left[0,\frac12\right]$ та $h\in(0,1]$. Нехай також M і N – доповнюючі одна до одної N-функції. Тоді для будь-якої функції $x\in L_N^{*,2}$,*

$$|x'(t)|\leqslant\frac2h\|x\|_\infty+\|g_{t,h}\|_M\,\|x''\|_{(N)}.\tag{5.36}$$

Зауваження 5.3.1. *Для класів L_s^2, $1 \leqslant s < \infty$, твердження 5.3.1 було незалежно встановлено в [54].*

Зазначимо, що нерівність (5.36) є непокращуваною, якщо права похідна $\mathfrak{p}$ функції M є неперервною. Дійсно, побудуємо екстремальні функції для такого випадку. Нехай $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ та $h \in (0,1]$. З огляду на [105, с. 108], неперервність функції $\mathfrak{p}(u)$ забезпечує існування такого числа $\alpha_h > 0$, що

$$\int_0^1 N\left(\mathfrak{p}\left(\alpha_h \left|g_{t,h}(\tau)\right|\right)\right) \mathrm{d}\tau = 1. \tag{5.37}$$

Означимо

$$x''_{t,h}(\nu) := \mathfrak{p}\left(\alpha_h \left|g_{t,h}(\nu)\right|\right) \operatorname{sgn} g_{t,h}(\nu), \qquad \nu \in [0,1],$$
$$x'_{t,h}(u) := \int_h^u x''_{t,h}(\nu)\,\mathrm{d}\nu, \qquad u \in [0,1].$$

Вочевидь, $x'_{t,h}$ є недодатною на $[0,1]$. Для $h \in (0,2t]$ оберемо $t_h^* := t$, а для $h \in [2t,1]$ оберемо $t_h^* \in (0,h)$ таким чином, що

$$\int_0^{t_h^*} x'_{t,h}(u)\,\mathrm{d}u = \int_{t_h^*}^h x'_{t,h}(u)\,\mathrm{d}u.$$

Нарешті, означимо функцію $x_{t,h}$:

$$x_{t,h}(\tau) := \int_{t_h^*}^{\tau} x'_{t,h}(u)\,\mathrm{d}u, \qquad \tau \in [0,1]. \tag{5.38}$$

Щоб переконатися в екстремальності $x_{t,h}$, достатньо поєднати наступні факти.

Лема 5.3.1. [105, с. 106] *Нехай $x \in L_M^*$ та існує таке k, що*

$$\int_0^1 N\left(\mathfrak{p}(k|x(\tau)|)\right) d\tau = 1,$$

де $\mathfrak{p}$ – права похідна функції M. Тоді

$$\|x\|_M = \int_0^1 \mathfrak{p}(k|x(\tau)|)|x(\tau)|\,\mathrm{d}\tau.$$

Лема 5.3.2. [105, с. 96] *Нехай $x \in L_N^*$ та $\int_0^1 N\left[\frac{x(\tau)}{k_0}\right] \mathrm{d}\tau = 1$. Тоді $\|x\|_{(N)} = k_0$.*

Як наслідок з твердження 5.3.1 отримаємо наступне

Твердження 5.3.2. *Для будь-яких $x \in L_N^{*,2}$ і $h \in (0,1]$ має місце нерівність*

$$\|x'\|_\infty \leqslant \frac{2}{h}\|x\|_\infty + \|g_{0,h}\|_M \|x''\|_{(N)}.$$

Доведення твердження 5.3.2. Нагадаємо поняття переставлення функції (див. [97, розділ 1]). Для сумовної на відрізку $[0,1]$ функції x і для $y \geqslant 0$ співставимо число

$$m(x,y) := \mu\left\{u \in [0,1] \,:\, |x(u)| > y\right\},$$

де $\mu(E)$ є міра Лебега множини $E \subset [0,1]$. Ця рівність задає незростаючу на $\mathbb{R}_+^0$ неперервну справа функцію $m(x,y)$, яка називається *функцією розподілу* для x.

Незростаюче переставлення функції $f(u)$ задається рівністю

$$r(x,u) := \inf\left\{y \in \mathbb{R}_+ : 0 \,:\, m(x,y) \leqslant u\right\}.$$

Детальний огляд властивостей переставлень наведено, наприклад, в [97, розділ 1]. Тут нам також знадобиться той факт, що для будь-якої N-функції Φ,

$$\int_0^1 \Phi(|x(u)|)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \Phi(r(x,u))\,\mathrm{d}u. \tag{5.39}$$

Для застосування властивості (5.39) помітимо спочатку, що для $0 < h \leqslant 2t$

$$r\left(g_{t,h},\cdot\right) = \left(\frac{h-\cdot}{2h}\right)_+.$$

а для $2t \leqslant h \leqslant 1$,

$$r\left(g_{t,h},\tau\right) = \begin{cases} \dfrac{h-t-\tau}{h}, & \tau \in [0,h-2t], \\ \left(\dfrac{h-\tau}{2h}\right)_+, & \tau \in [h-2t,1]. \end{cases}$$

Тому $r\left(g_{t,h},\tau\right) \leqslant r\left(g_{0,h},\tau\right)$ для довільного $\tau \in [0,1]$. За монотонністю норми Орліча, $\left\|r\left(g_{t,h},\cdot\right)\right\|_M \leqslant \left\|r\left(g_{0,h},\cdot\right)\right\|_M$. А за властивістю (5.39) це означає, що

$$\left\|g_{t,h}\right\|_M \leqslant \left\|g_{0,h}\right\|_M. \tag{5.40}$$

Отже,

$$\|x'\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |x'(t)| \leqslant \frac{2\|x\|_\infty}{h} + \left\|g_{0,h}\right\|_M \|x''\|_{(N)}. \qquad \square$$

Сформулюємо тепер основні результати підрозділу. Нехай M і N є доповнюючі одна до одної N-функції. Через $W_N^{*,2}$ позначимо клас функцій $x \in L_N^{*,2}$, для яких $\|x''\|_{(N)} \leqslant 1$, а через $D^1 : L_\infty \to L_\infty$ позначимо оператор диференціювання першого порядку, а через $D^1_t : L_\infty \to \mathbb{R}$, $t \in [0,1]$, – функціонал диференціювання першого порядку в точці t. Для $h \geqslant 1$ означимо

$$x_{t,h}(\tau) := x_{t,1}(\tau) + \|x_{t,1}\|_\infty (h-1)\left(\frac{1}{2} - \tau\right), \qquad \tau \in [0,1], \tag{5.41}$$

де функція $x_{t,1}$ визначена рівністю (5.38). Мають місце наступні твердження.

Теорема 5.3.1. *Нехай M і N є доповнюючі одна до одної N-функції і права похідна $\mathfrak{p}$ функції M є неперервною. Нехай також $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$. Тоді для будь-якого $\delta > 0$ існує єдине число $h = h(\delta, t)$, для якого $\|x_{t,h}\|_\infty = \delta$, та для будь-якого $h > 0$*

$$\Omega\left(\|x_{t,h}\|_\infty ; D^1_t; W^{*,2}_N\right) = \left|x'_{t,h}(t)\right|. \tag{5.42}$$

Теорема 5.3.2. *Нехай M і N є доповнюючі одна до одної N-функції і права похідна $\mathfrak{p}$ функції M є неперервною. Тоді для будь-якого $\delta > 0$ існує єдине число $h = h(\delta) > 0$, для якого $\|x_{0,h}\|_\infty = \delta$. Більш того, для довільного $h > 0$*

$$\Omega\left(\|x_{0,h}\|_\infty ; D^1; W^{*,2}_N\right) = \left\|x'_{0,h}\right\|_\infty .$$

Відзначимо, що модуль неперервності оператора $D^1 : L_\infty \to L_\infty$ на класі W^2_s, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, можна записати в явному вигляді відносно δ:

$$\Omega\left(\delta; D^1; W^2_s\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{s'+1}{s'}\right)^{\frac{s'}{s'+1}} (2\delta)^{\frac{1}{s'+1}}, & \delta \in \left(0, \dfrac{1}{2s'(s'+1)^{1/s'}}\right], \\ 2\delta + \dfrac{1}{(s'+1)^{1/s'}}, & \delta \geqslant \dfrac{1}{2s'(s'+1)^{1/s'}}, \end{cases}$$

де $s' = s/(s-1)$.

Наступне твердження дає розв'язок задачі 5.1.5 для операторів $D^1 : L_\infty \to L_\infty$ та $D^1_t : L_\infty \to \mathbb{R}$, $t \in [0,1]$, на класі $W^{*,2}_N$.

Теорема 5.3.3. *Нехай M і N є доповнюючі одна до одної N-функції і права похідна $\mathfrak{p}$ функції M є неперервною. Тоді для довільного $0 \leqslant t \leqslant 1/2$*

$$E_K\left(D^1_t; W^{*,2}_N\right) = \begin{cases} +\infty, & 0 < K < 2, \\ \left\|g_{t,2/K}\right\|_M, & K \geqslant 2, \end{cases} \tag{5.43}$$

і

$$E_K\left(D^1; W^{*,2}_N\right) = \begin{cases} +\infty, & 0 < K < 2, \\ \left\|g_{0,2/K}\right\|_M, & K \geqslant 2, \end{cases}$$

де функція $g_{t,h}$ визначена рівностями (5.34) *та* (5.35).

Доведення теореми 5.3.1. В силу леми 5.3.1 та означень (5.38) і (5.41) функцій $x_{t,h}$ неважко бачити, що для будь-якого $h > 0$,

$$\Omega\left(\|x_{t,h}\|_\infty; D_t^1; W_N^{*,2}\right) = \left|x'_{t,h}(t)\right|.$$

Для завершення доведення теореми нам залишається переконатися в тому, що функція $\|x_{t,h}\|_\infty$ строго зростає за змінною h та приймає всі додатні значення. Для цього помітимо, що функція $\Omega\left(\delta; D_t^1; W_N^{*,2}\right)$ строго зростає. Дійсно, нехай $0 < \delta_1 < \delta_2$. Тоді для $\varepsilon = \delta_2 - \delta_1$ існує функція $x \in W_N^{*,2}$ така, що $\|x\|_\infty \leqslant \delta_1$ та $|x'(t)| \geqslant \Omega\left(\delta_1; D_t^1; W_N^{*,2}\right) - \varepsilon$. Розглянемо функцію

$$\overline{x}(u) := x(u) + 2(\delta_2 - \delta_1)\left(t - \frac{1}{2}\right)\operatorname{sgn} x'(t).$$

Вочевидь, $\overline{x} \in W_N^{*,2}$, $\|\overline{x}\|_\infty \leqslant \delta_2$ і

$$\begin{aligned}\Omega\left(\delta_2; D_t^1; W_N^{*,2}\right) &\geqslant |\overline{x}'(t)| = |x'(t)| + 2(\delta_2 - \delta_1)\\ &\geqslant \Omega\left(\delta_1; D_t^1; W_N^{*,2}\right) + \delta_2 - \delta_1 > \Omega\left(\delta_1; D_t^1; W_N^{*,2}\right),\end{aligned}$$

що й потрібно було довести. Тому, з огляду на співвідношення (5.42), для перевірки строгої монотонності функції $\|x_{t,h}\|_\infty$, необхідно і достатньо переконатися в строгій монотонності функції $\left|x'_{t,h}(t)\right|$.

Розпочнемо з випадку $h \in (0, 2t]$. Рівність (5.37) можна переписати у вигляді:

$$2h\int_0^{\frac{1}{2}} N\left(\mathfrak{p}(\alpha_h u)\right)\,\mathrm{d}u = 1. \tag{5.44}$$

Неважко також перевірити, що

$$\left|x'_{t,h}(t)\right| = h\int_0^{\frac{1}{2}} \mathfrak{p}\left(\alpha_h u\right)\,\mathrm{d}u.$$

Зі співвідношення (5.44)нескладно бачити, що α_h спадає зі збільшенням h, оскільки функції $\mathfrak{p}$ і N зростають на $\mathbb{R}_+^0$. Отже, той факт, що $\left|x'_{t,h}(t)\right|$ строго зростає за змінною h, буде доведеним, як тільки ми доведемо, що функція

$$\mu(a) := \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \mathfrak{p}(au)\,\mathrm{d}u}{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} N\left(\mathfrak{p}(au)\right)\,\mathrm{d}u}, \qquad a > 0,$$

спадає. Дійсно, з опуклості N і рівності $N(0) = 0$ випливає, що для всіх $0 < u \leqslant v$

$$v\, N(u) \leqslant u\, N(v), \tag{5.45}$$

а тому

$$\mu'(a) = \frac{\mathfrak{p}\left(\dfrac{a}{2}\right) \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} N\left(\mathfrak{p}(au)\right)\,\mathrm{d}u - N\left(\mathfrak{p}\left(\dfrac{a}{2}\right)\right) \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \mathfrak{p}(au)\,\mathrm{d}u}{\left(\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} N\left(\mathfrak{p}(au)\right)\,\mathrm{d}u\right)^2} \leqslant 0.$$

Перевіримо тепер, що

$$\lim_{h\to 0} \|x_{t,h}\|_\infty = 0. \tag{5.46}$$

Помітимо, що $\alpha_h \to +\infty$, коли $h \to 0$. Отже для доведення (5.46) в силу (5.44) достатньо довести, що $\mu(a) \to 0$, коли $a \to +\infty$. За правилом Лопіталя,

$$\lim_{a\to+\infty} \mu(a) = \lim_{a\to+\infty} \frac{\mathfrak{p}\left(\frac{a}{2}\right)}{N\left(\mathfrak{p}\left(\frac{a}{2}\right)\right)} = \lim_{b\to+\infty} \frac{b}{N(b)},$$

оскільки $\lim\limits_{a\to+\infty} \mathfrak{p}(a) = +\infty$. Проте для будь-якого $b > 0$ справджується нерівність

$$N(b) \geqslant \int_{\frac{b}{2}}^{b} \mathfrak{q}(u)\,\mathrm{d}u \geqslant \frac{b}{2}\, \mathfrak{q}\left(\frac{b}{2}\right).$$

Отже,

$$0 \leqslant \lim_{a\to+\infty} \mu(a) = \lim_{b\to+\infty} \frac{b}{N(b)} \leqslant \lim_{b\to+\infty} \frac{2}{N\left(b/2\right)} = 0,$$

оскільки $\lim\limits_{b\to+\infty} \mathfrak{q}(b) = +\infty$, звідки випливає гранична рівність (5.46).

Таким чином, функція $\|x_{t,h}\|_\infty$ строго зростає і приймає всі значення від 0 до $\|x_{t,2t}\|_\infty$, коли h пробігає напівінтервал $(0, 2t]$.

Перейдемо до випадку $h \in [2t, 1]$. Співвідношення (5.37) перепишемо у вигляді:

$$\frac{h}{\alpha_h} \int_0^{\alpha_h \frac{t}{h}} N\left(\mathfrak{p}(u)\right)\,\mathrm{d}u + \frac{h}{\alpha_h} \int_0^{\alpha_h\left(1-\frac{t}{h}\right)} N\left(\mathfrak{p}(u)\right)\,\mathrm{d}u = 1. \tag{5.47}$$

Крім того,

$$\left|x'_{t,h}(t)\right| = \frac{h}{\alpha_h} \int_0^{\alpha_h\left(1-\frac{t}{h}\right)} \mathfrak{p}(u)\,\mathrm{d}u.$$

Для доведення строгої монотонності $\left|x'_{t,h}(t)\right|$ за змінною h продиференціюємо функцію $F(h) := \left|x'_{t,h}(t)\right|$ за змінною h:

$$F'(h) = \left(\frac{1}{\alpha_h} - \frac{h\alpha'_h}{\alpha_h^2}\right) \int_0^{\alpha_h\left(1-\frac{t}{h}\right)} \mathfrak{p}(u)\,\mathrm{d}u + \left(\frac{h\alpha'_h}{\alpha_h}\left(1-\frac{t}{h}\right) + \frac{t}{h}\right) \mathfrak{p}\left(\alpha_h\left(1-\frac{t}{h}\right)\right).$$

Продиференціювавши співвідношення (5.47), отримаємо:

$$\frac{h\alpha_h'}{\alpha_h}\left(1-tN\left(\mathfrak{p}\left(\alpha_h\frac{t}{h}\right)\right)-(h-t)N\left(\mathfrak{p}\left(\alpha_h\left(1-\frac{t}{h}\right)\right)\right)\right)=$$
$$=1-tN\left(\mathfrak{p}\left(\alpha_h\frac{t}{h}\right)\right)+tN\left(\mathfrak{p}\left(\alpha_h\left(1-\frac{t}{h}\right)\right)\right).$$

Підставляючи в вираз для похідної $F'(h)$ знайдене вище співвідношення для α_h', отримаємо, що додатність похідної $F'(h)$ рівносильна справедливості нерівності

$$\frac{N\left(\mathfrak{p}\left(\alpha_h\left(1-\frac{t}{h}\right)\right)\right)}{\mathfrak{p}\left(\alpha_h\left(1-\frac{t}{h}\right)\right)}\int_0^{\alpha_h\left(1-\frac{t}{h}\right)}\mathfrak{p}(u)\,\mathrm{d}u\geqslant\frac{\alpha_h}{h}-\frac{t\alpha_h}{h}N\left(\mathfrak{p}\left(\alpha_h\left(1-\frac{t}{h}\right)\right)\right).$$

В силу (5.45) і (5.47) остання нерівність є наслідком нерівності

$$\frac{t\alpha_h}{h}N\left(\mathfrak{p}\left(\alpha_h\left(1-\frac{t}{h}\right)\right)\right)\geqslant\int_0^{\alpha_h\frac{t}{h}}N\left(\mathfrak{p}(u)\right)\,\mathrm{d}u.$$

Остання нерівність завжди виконується, оскільки N є зростаючою функцією, а також тому, що в цьому випадку $\frac{t}{h}\leqslant 1-\frac{t}{h}$. Таким чином, функція $\|x_{t,h}\|_\infty$ зростає за змінною h на $[h,1]$ і в силу своєї неперервності за змінною h, приймає всі значення від $\|x_{t,2t}\|_\infty$ до $\|x_{t,1}\|_\infty$.

Нарешті, розглянемо випадок, коли $h\geqslant 1$. Вочевидь,

$$\|x_{t,h}\|_\infty=\frac{h+1}{2}\|x_{t,1}\|_\infty.$$

Отже, $\|x_{t,h}\|_\infty$ зростає і приймає всі значення від $\|x_{t,1}\|_\infty$ до $+\infty$. □

Доведення теореми 5.3.2. За теоремою 5.3.2,

$$\Omega\left(\delta;D^1;W_N^{*,2}\right)=\Omega\left(\delta;D_0^1;W_N^{*,2}\right),$$

для довільного $\delta>0$, що завершує доведення. □

Доведення теореми 5.3.3. Для оцінювання знизу величини $E_K\left(D_t^1;W_N^{*,2}\right)$, застосуємо нерівність (5.13):

$$E_K\left(D_t^1;W_N^{*,2}\right)\geqslant\sup_{\delta>0}\left(\Omega\left(\delta;D_t^1;W_N^{*,2}\right)-K\delta\right).$$

За теоремою 5.3.1, останню нерівність можна переписати у вигляді

$$E_K\left(D_t^1;W_N^{*,2}\right)\geqslant\sup_{h>0}\left(\left|x_{t,h}'(t)\right|-K\|x_{t,h}\|_\infty\right). \tag{5.48}$$

Розглянемо випадок, коли $K \geqslant 2$. З останньої нерівності та побудови функцій $x_{t,h}$ (див. (5.38)), отримаємо

$$E_K\left(D_t^1; W_N^{*,2}\right) \geqslant \sup_{h\in[0,1]}\left(\left(\frac{2}{h}-K\right)\|x_{t,h}\|_\infty + \|g_{t,h}\|_M\right) \geqslant \left\|g_{t,\frac{2}{K}}\right\|_M. \qquad (5.49)$$

Задамо оператор $S_{t,K} : L_\infty \to \mathbb{R}$ за наступним правилом:

$$S_{t,K}x := \begin{cases} \dfrac{K\left(x\left(\frac{2}{K}\right)-x(0)\right)}{2}, & K\in\left[2,\dfrac{1}{t}\right], \\ \dfrac{K\left(x\left(t+\frac{1}{K}\right)-x\left(t-\frac{1}{K}\right)\right)}{2}, & K\geqslant\dfrac{1}{t}. \end{cases}$$

Вочевидь, $|S_{t,K}x| \leqslant K\|x\|_\infty$. Отже, норма оператора $S_{t,K}$ не перевищує K. Тому

$$\begin{aligned} E_K\left(D_t^1; W_N^{*,2}\right) &\leqslant U\left(D_t^1, S_{t,K}; W_N^{*,2}\right) = \sup_{\|x''\|_{(N)}\leqslant 1}|x'(t)-S_{t,K}(x)| = \\ &= \sup_{\|x''\|_{(N)}\leqslant 1}\left|\int_0^1 g_{t,\frac{2}{K}}(\tau)x''(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| = \left\|g_{t,\frac{2}{K}}\right\|_M. \end{aligned}$$

Співставляючи останню нерівність з (5.49), отримаємо рівність (5.43) для $K \geqslant 2$.

Розглянемо випадок, коли $K \in (0,2)$. З нерівності (5.48) матимемо

$$E_K\left(D_t^1; W_N^{*,2}\right) \geqslant \sup_{h\geqslant 1}\left(\left|x'_{t,h}(t)\right| - K\|x_{t,h}\|_\infty\right). \qquad (5.50)$$

За побудовою, функції $\varphi_{t,h}$ для $h \geqslant 1$ (див. (5.41)), виконуються рівності:

$$\|x_{t,h}\|_\infty = \frac{h+1}{2}\|x_{t,1}\|_\infty \quad \text{та} \quad \left|x'_{t,h}(t)\right| = \left|x'_{t,1}(t)\right| + (h-1)\|x_{t,1}\|_\infty.$$

Підставляючи ці рівності в нерівність (5.50), отримаємо

$$E_K\left(D_t^1; W_N^{*,2}\right) \geqslant \left|x'_{t,1}(t)\right| - \left(1+\frac{K}{2}\right)\|x_{t,1}\|_\infty + \sup_{h\geqslant 1}\left(1-\frac{K}{2}\right)\|x_{t,1}\|_\infty = +\infty.$$

Отже рівність (5.43) остаточно доведена.

Для отримання другої з рівностей в теоремі 5.3.3, необхідно скористатися твердженням теореми 5.3.2, проміжним оператором $S_K : L_\infty \to L_\infty$, який задано за допомогою правила: $S_Kx(t) = S_{t,K}x, \quad x \in L_\infty$ і нерівністю (5.40). □

5.4. Задача Стєчкіна для операторів диференціювання на класах функцій, третя похідна яких є обмеженою

В цьому підрозділі ми розв'яжемо задачу Стєчкіна про найкраще наближення операторів диференціювання та функціоналів диференціювання в точці першого та другого порядків лінійними обмеженими операторами на класі $W^3_\infty([0,1])$. Оскільки надалі ми будемо переважно розглядати функції, означені на відрізку $[0,1]$, то для зручності будемо опускати позначення області визначення в позначеннях просторів $L_p([0,1])$, $L^r_p([0,1])$, класу $W^r_p([0,1])$ та норми $\|\cdot\|_{L_p([0,1])}$.

Нехай $r \in \mathbb{N}$. Для спрощення доведення основних результатів, пояснимо загальну схему побудови лінійних обмежених функціоналів для наближення функціоналів D^k_t, $k\in\mathbb{N}$, $1\leqslant k\leqslant r-1$, і $t\in[0,1]$. Ці конструкції добре відомі (див., наприклад, [314]), а тому ми наводимо їх для повноти викладення.

Для $n\in\mathbb{N}$ розглянемо скінченно-різницевий функціонал S вигляду

$$Sf=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j f\left(a_j\right), \tag{5.51}$$

де $a_1,\ldots,a_n\in[0,1]$ – вузли і $\gamma_1,\ldots,\gamma_n\in\mathbb{R}$ – коефіцієнти S. Зрозуміло, що

$$\|S\|:=\sup_{f\in L_\infty\,:\,\|f\|_\infty\leqslant 1}|Sf|=\sum_{j=1}^{n}|\gamma_j|\,. \tag{5.52}$$

Обчислимо похибку наближення функціоналу D^k_t за допомогою функціоналу S. Застосуємо формулу Тейлора з залишком в інтегральній формі для $f\in L^r_\infty$:

$$f(x)=\sum_{m=0}^{r-1}\frac{f^{(m)}(t)(x-t)^m}{m!}+\frac{1}{(r-1)!}\int_t^x(x-u)^{r-1}f^{(r)}(u)\,\mathrm{d}u,\quad x\in[0,1].$$

Використовуючи цю формулу, перепишемо вираз (5.51) у вигляді:

$$Sf=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\left(\sum_{m=0}^{r-1}\frac{f^{(m)}(t)\left(a_j-t\right)^m}{m!}+\frac{1}{(r-1)!}\int_t^{a_j}\left(a_j-u\right)^{r-1}f^{(r)}(u)\,\mathrm{d}u\right).$$

Для $g\in L_\infty$ позначимо $g_+(u):=\max\{0;g(u)\}$, $u\in[0,1]$. Тоді

$$Sf=\sum_{m=0}^{r-1}\frac{f^{(m)}(t)}{m!}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\left(a_j-t\right)^m+\frac{1}{(r-1)!}\int_0^1\Delta_{k,r}(S;u)f^{(r)}(u)\,\mathrm{d}u,$$

де

$$\Delta_{k,r}(S;u):=\begin{cases}(-1)^r\displaystyle\sum_{j\,:\,a_j\leqslant t}\gamma_j\left(u-a_j\right)_+^{r-1}, & u\in[0,t],\\ \displaystyle\sum_{j\,:\,a_j>t}\gamma_j\left(a_j-u\right)_+^{r-1}, & u\in(t,1].\end{cases}$$

Припустимо, що коефіцієнти $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ задовольняють рівностям

$$\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\,(a_j-t)^m=\delta_{mk},\qquad m=0,1,\ldots,r-1,$$

де δ_{mk} є символ Кронекера. Тоді

$$\begin{aligned} U\left(D_t^k,S;W_\infty^r\right) &= \frac{1}{(r-1)!}\sup_{f\in W_\infty^r}\left|\int_0^1\Delta_{k,r}(S;u)f^{(r)}(u)\,\mathrm{d}u\right|= \\ &= \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1\left|\Delta_{k,r}(S;u)\right|\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{5.53}$$

Далі в параграфах 5.4.2 та 5.4.3 ми застосуємо цей підхід і, зокрема, формули (5.52) та (5.53), для спеціально побудованих функціоналів $S=F_N^{k,t}$, $k=1,2$. Також ми побудуємо в явному вигляді (де це видається можливим) вузли і коефіцієнти функціоналу S.

5.4.1. Основні результати підрозділу щодо розв'язку задачі Стєчкіна

Спочатку сформулюємо результати щодо розв'язку задачі 5.1.5 для функціоналів і операторів диференціювання другого порядку, а потім – для функціоналів та операторів диференціювання першого порядку.

Отже, розпочнемо з побудови екстремальних функціоналів $F_N^{2,t}$ в задачі Стєчкіна для $D_t^2: L_\infty\to\mathbb{R}$, у випадку $t\in[0,1/2]$. Для зручності, позначимо

$$N_t^*=\frac{18}{(1-2t^3)\,(1+4t^3)}$$

і нагадаємо, що $M_2\left(D_t^2\right)=16$ (див. [329]).

1. Нехай $N\in\left[4/t^2,+\infty\right)$. Для будь-якої функції $f\in L_\infty$ означимо

$$F_N^{2,t}f:=\frac{N}{4}\cdot f\left(t-\frac{2}{\sqrt{N}}\right)-\frac{N}{2}\cdot f\,(t)+\frac{N}{4}\cdot f\left(t+\frac{2}{\sqrt{N}}\right). \tag{5.54}$$

   Проте конструкції (5.54) недостатньо для розв'язання поставленої задачі. Дійсно, норма функціоналу $F_N^{2,t}$ дорівнює N, але в нашому випадку $N\geqslant 4/t^2>M_2\left(D_t^2\right)$ для всіх $t\in[0,1/2)$. Крім того, для $N\in\left[M_2\left(D_t^2\right),4/t^2\right)$ лівий вузол $t-\frac{2}{\sqrt{N}}$ функціоналу $F_N^{2,t}$ вже не належить відрізку $[0,1]$. Тому для побудови екстремального функціоналу $F_N^{2,t}$ у випадку $N\in\left[M_2\left(D_t^2\right),4/t^2\right)$ дещо змінимо конструкцію (5.54). Для цього зафіксуємо лівий вузол $F_N^{2,t}$ в точці 0 і дозволимо середньому та правому вузлам переміщуватися.

2. Нехай $N \in \left(N_t^*, 4/t^2\right)$. Розглянемо поліном

$$Q_{N,t}(c) := c^6 - \frac{18}{N}c^4 + 2t^3c^3 - 8t^6$$

і через $c_{N,t}$ позначимо його єдиний нуль на $[2t,1]$. Для $f \in L_\infty$ означимо

$$F_N^{2,t} f := \frac{6c_{N,t}}{c_{N,t}^3 + 4t^3} \cdot f\left(0\right) - \frac{N}{2} \cdot f\left(\frac{c_{N,t}^3 + 4t^3}{3c_{N,t}^2}\right) + \frac{3c_{N,t}}{c_{N,t}^3 - 2t^3} \cdot f\left(c_{N,t}\right). \quad (5.55)$$

Помітимо, що конструкція (5.55) також є недостатньою, оскільки для $N \in [16, t^*)$ правий вузол $c_{N,t}$ функціонала $F_N^{2,t}$ вже не належить відрізку $[0,1]$. Щоб завершити побудову функціоналу $F_N^{2,t}$, додатково зафіксуємо правий вузол в точці 1, дозволяючи переміщуватися лише середньому вузлу.

3. Нехай $N \in [16, N_t^*]$ і

$$b_{N,t} := \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{16}{N}}.$$

Для будь-якої функції $f \in L_\infty$ означимо

$$F_N^{2,t} f := \frac{2}{b_{N,t}} \cdot f\left(0\right) - \frac{N}{2} \cdot f\left(b_{N,t}\right) + \frac{2}{1 - b_{N,t}} \cdot f\left(1\right). \quad (5.56)$$

Отже, ми завершили побудову функціонала $F_N^{2,t}$ для $t \in [0, 1/2]$. Далі розглянемо випадок $t \in [1/2, 1]$. Через $\tilde{g}$ позначимо функцію, яка симетрична функції $g \in L_\infty$, тобто $\tilde{g}(u) = g(1-u)$ для $u \in [0,1]$. Для $N \geqslant 16$ означимо

$$F_N^{2,t} f := F_N^{2,1-t} \tilde{f}, \qquad \forall\ f \in L_\infty.$$

Теорема 5.4.1. *Якщо $t \in [0, 1/2]$, то*

$$E_N\left(D_t^2; W_\infty^3\right) = \begin{cases} \dfrac{2}{3\sqrt{N}}, & N \in \left[4/t^2, +\infty\right), \\ \dfrac{4c_{N,t}}{9} + \dfrac{4t^3}{9c_{N,t}^2} + \dfrac{2t^3 c_{N,t}}{c_{N,t}^3 + 4t^3} - t, & N \in \left(N_t^*, 4/t^2\right), \\ \dfrac{b_{N,t}^2 + 2t^3}{3b_{N,t}} - t + \dfrac{1}{3}, & N \in [16, N_t^*], \\ +\infty, & N \in (0, 16), \end{cases}$$

а якщо $t \in [1/2, 1]$, то $E_N\left(D_t^2; W_\infty^3\right) = E_N\left(D_{1-t}^2; W_\infty^3\right)$. Більш того, для всіх $t \in [0,1]$ функціонал $F_N^{2,t}$ є екстремальним в задачі 5.1.5 для $T = D_t^2$ на класі W_∞^3, тобто $E_N\left(D_t^2; W_\infty^3\right) = U\left(D_t^2, F_N^{2,t}; W_\infty^3\right)$.

Далі ми наведемо розв'язок задачі 5.1.5 для оператора $T = D^2$.

Теорема 5.4.2. *Для всіх* $N > 0$

$$E_N\left(D^2; W^3_\infty\right) = U\left(D^2; F^2_N; W^3_\infty\right) = E_N\left(D^2_0; W^3_\infty\right),$$

де оператор $F^2_N : L_\infty \to L_\infty$ *визначений співвідношенням:*

$$F^2_N f(t) := F^{2,t}_N f, \qquad \forall\ t \in [0,1] \quad \text{та} \quad \forall\ f \in L_\infty.$$

Тепер побудуємо екстремальні функціонали $F^{1,t}_N$ в задачі Стєчкіна про найкраще наближення функціоналу $D^1_t : L_\infty \to \mathbb{R}$ на класі W^3_∞ для $t \in [0, 1/2]$. Нагадаємо (див. [329]), що $M_2\left(D^1_t\right) = \min\left\{t^{-1}; 8 - 16t\right\}$. Для $t \in [0, 1/4)$ через $N^{**}_t \in \left(M_2\left(D^1_t\right), t^{-1}\right)$ позначимо єдиний корінь рівняння

$$\frac{\sqrt[3]{1 - 3\sqrt{1 - \frac{8-16t}{N}}}}{2(1-2t)} = \frac{\frac{1-\sqrt{1-\frac{8-16t}{N}}}{1-2t} - \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{4}{N} - \sqrt{1 - \frac{8-16t}{N}}}}{3 - 4t - \sqrt{1 - \frac{8-16t}{N}}}. \tag{5.57}$$

Доведення цього факту наведено в параграфі 5.4.4.

1. Нехай $N \in \left[t^{-1}, +\infty\right)$. Для $f \in L_\infty$ означимо

$$F^{1,t}_N f := -\frac{N}{2} f\left(t - \frac{1}{N}\right) + \frac{N}{2} f\left(t + \frac{1}{N}\right). \tag{5.58}$$

   Проте конструкцію (5.58) не можна поширити на випадок $N \in \left[M_2\left(D^1_t\right), t^{-1}\right)$ і $t \in [0, 1/4)$, оскільки в цьому випадку лівий вузол $t - 1/N$ функціоналу $F^{1,t}_N$ не належить відрізку $[0,1]$. Модифікуємо конструкцію (5.58), фіксуючи лівий вузол в точці 0 і дозволяючи правому і середньому вузлам переміщуватися.

2. Нехай $N \in \left[N^{**}_t, t^{-1}\right)$. Через $e_{N,t} \in [4t, 1]$ позначимо єдиний корінь рівняння

$$\frac{\sqrt[3]{1 - 3\sqrt{1 - \frac{8e-16t}{Ne^2}}}}{2(e-2t)} = \frac{\frac{e-e\sqrt{1-\frac{8e-16t}{Ne^2}}}{e-2t} - \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{4}{Ne} - \sqrt{1 - \frac{8e-16t}{Ne^2}}}}{3e - 4t - e\sqrt{1 - \frac{8e-16t}{Ne^2}}}. \tag{5.59}$$

   Доведення цього факту наведено в параграфі 5.4.5. Позначимо

$$d_{N,t} := \frac{e_{N,t}}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{8e_{N,t} - 16t}{Ne^2_{N,t}}}\right), \tag{5.60}$$

$$r_{N,t} := \frac{d_{N,t}e_{N,t} - \sqrt{d_{N,t}e_{N,t}\left(d_{N,t}-2t\right)\left(e_{N,t}-2t\right)}}{d_{N,t}+e_{N,t}-2t}. \tag{5.61}$$

Нарешті, для довільної функції $f \in L_\infty$ означимо

$$F_N^{1,t}f := -\frac{d_{N,t}+e_{N,t}-2t}{e_{N,t}d_{N,t}}f\left(0\right) + \frac{N}{2}f\left(d_{N,t}\right) - \frac{d_{N,t}-2t}{e_{N,t}\left(e_{N,t}-d_{N,t}\right)}f\left(e_{N,t}\right). \tag{5.62}$$

Конструкцію функціоналу $F_N^{1,t}$ необхідно змінити у випадку $N < N_t^{**}$, оскільки його правий вузол вже не належить відрізку $[0,1]$. Зафіксуємо правий вузол в точці 1 і дозволимо переміщуватися лише середньому вузлу.

3. Нехай $N \in \left[M_2\left(D_t^1\right), N_t^{**}\right)$, тобто $t \in [0,1/4)$ і $N \in [8-16t, N_t^{**})$. Позначимо $e_{N,t}=1$, а точки $d_{N,t}$ і $r_{N,t}$ визначимо, як і раніше, за допомогою формул (5.60) і (5.61), відповідно. Для будь-якої функції $f \in L_\infty$ означимо

$$F_N^{1,t}f := -\frac{d_{N,t}+1-2t}{d_{N,t}}f(0) + \frac{N}{2}f\left(d_{N,t}\right) - \frac{d_{N,t}-2t}{1-d_{N,t}}f(1). \tag{5.63}$$

Отже, ми побудували функціонал $F_N^{1,t}$ для $t \in [0,1/2]$. Тепер ми розширимо конструкцію на випадок $t \in [1/2,1]$. Для $N \geqslant M_2\left(D_t^1\right) = M_2\left(D_{1-t}^1\right)$ позначимо

$$F_N^{1,t}f := F_N^{1,1-t}\tilde{f}, \qquad \forall\ f \in L_\infty.$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 5.4.3. *Якщо* $t \in [0,1/2]$, *то*

$$E_N\left(D_t^1; W_\infty^3\right) = \begin{cases} +\infty, & N \in \left(0, M_2\left(D_t^1\right)\right), \\ \dfrac{1}{6N^2}, & N \in \left[t^{-1}, +\infty\right), \\ -\dfrac{t\left(d_{N,t}+e_{N,t}\right)}{3} + \dfrac{c_{N,t}d_{N,t}}{6} & \\ \quad -r_{N,t}^2 + 2tr_{N,t} - \dfrac{t^2}{2} + & \\ \quad + \dfrac{r_{N,t}^3\left(e_{N,t}+d_{N,t}-2t\right)}{3d_{N,t}e_{N,t}}, & N \in \left[M_2\left(D_t^1\right), t^{-1}\right), \end{cases} \tag{5.64}$$

а, якщо $t \in [1/2,1]$, *то* $E_N\left(D_t^1; W_\infty^3\right) = E_N\left(D_{1-t}^1; W_\infty^3\right)$. *Крім того, для всіх* $t \in [0,1]$ *функціонал* $F_N^{1,t}$ *є екстремальним в задачі 5.1.5 для функціоналу* D_t^1 *на класі* W_∞^3, *тобто* $E_N\left(D_t^1; W_\infty^3\right) = U\left(D_t^1, F_N^{1,t}; W_\infty^3\right)$.

Наступне твердження дає розв'язок задачі Стєчкіна для оператора $T = D^1$.

Теорема 5.4.4. *Для всіх* $N > 0$

$$E_N\left(D^1; W^3_\infty\right) = E_N\left(D^1_0; W^3_\infty\right) = U\left(D^1, F^1_N; W^3_\infty\right),$$

де оператор $F^1_N : L_\infty \to L_\infty$ *означено наступним чином*

$$F^1_N f(t) := F^{1,t}_N f, \qquad \forall\, t \in [0,1] \quad \text{та} \quad \forall\, f \in L_\infty.$$

5.4.2. Доведення результатів щодо розв'язку задачі Стєчкіна для D^2_t

Наведемо декілька допоміжних результатів.

Лема 5.4.1. *Нехай* $t \in [0, 1/2]$ *та* $N \in [16, +\infty)$. *Тоді* $\left\|F^{2,t}_N\right\| = N$ *та*

$$U\left(D^2_t; F^{2,t}_N; W^3_\infty\right) = \begin{cases} \dfrac{2}{3\sqrt{N}}, & N \in \left[4/t^2, \infty\right), \\ \dfrac{4c_{N,t}}{9} + \dfrac{4t^3}{9c^2_{N,t}} + \dfrac{2t^3 c_{N,t}}{c^3_{N,t} + 4t^3} - t, & N \in \left[N^*_t, 4/t^2\right), \\ \dfrac{3b^2_{N,t} + 2t^3}{3b_{N,t}} - t + \dfrac{1}{3}, & N \in [16, N^*_t). \end{cases} \tag{5.65}$$

Доведення. Рівність $\left\|F^{2,t}_N\right\| = N$ випливає безпосередньо з означення функціоналу $F^{2,t}_N$ і рівності (5.52). Перейдемо до доведення (5.65). Лівий вузол $F^{2,t}_N$ позначимо через a, середній – через b, а правий – через c. Через α, β і γ позначимо коефіцієнти $F^{2,t}_N$, що відповідають вузлам a, b і c. Вочевидь,

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha a + \beta b + \gamma c = 0, \quad \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 2. \tag{5.66}$$

Доведемо, що

$$a < t \leqslant b < c, \tag{5.67}$$

і

$$\alpha > 0, \quad \beta < 0, \quad \gamma > 0. \tag{5.68}$$

Дійсно, якщо $F^{2,t}_N$ визначено рівністю (5.54), то нерівності (5.67) і (5.68) є тривіальними. Якщо ж $F^{2,t}_N$ задано рівністю (5.55), то за нерівністю між середнім арифметичним та середнім геометричним,

$$b = \frac{c^3_{N,t} + 4t^3}{3c^2_{N,t}} = \frac{\frac{c^3_{N,t}}{2} + \frac{c^3_{N,t}}{2} + 4t^3}{3c^2_{N,t}} \geqslant t.$$

З іншого боку, $c_{N,t} \geqslant 2t$ за означенням. Отже,

$$b = \frac{c_{N,t}}{3} + \frac{4t^3}{3c_{N,t}^2} \leqslant \frac{c_{N,t}}{2} < c_{N,t},$$

та $\gamma = 3c_{N,t}/\left(c_{N,t}^3 - 2t^3\right) > 0$. Це доводить вірність обох нерівностей (5.67) і (5.68).

Нарешті, нехай $F_N^{2,t}$ задано формулою (5.56). В цьому випадку нам необхідно показати, що $b \geqslant t$, оскільки інші нерівності в (5.67) та (5.68) є очевидними. Така нерівність дійсно має місце, оскільки за визначенням N_t^* і нерівністю між середнім геометричним і середнім арифметичним:

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{16}{N}} \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{16}{N_t^*}} = \frac{1}{2} - \frac{1 - 8t^3}{6} \\ &= \frac{1 + 4t^3}{3} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 4t^3}{3} \geqslant t. \end{aligned}$$

Таким чином, з (5.53) отримаємо

$$U\left(D_t^2, F_N^{2,t}; W_\infty^3\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left|\Delta_{2,3}\left(F_N^{2,t}; u\right)\right| \,\mathrm{d}u, \tag{5.69}$$

де

$$\Delta_{2,3}\left(F_N^{2,t}; u\right) := \begin{cases} 0, & u \notin [a, c], \\ -\alpha(a-u)^2, & u \in [a, t], \\ \gamma(c-u)^2 + \beta(b-u)^2, & u \in [t, b], \\ \gamma(c-u)^2, & u \in [b, c]. \end{cases}$$

Тепер обчислимо інтеграл в правій частині (5.69). Помітимо, що нерівність $\gamma(c-u)^2 + \beta(b-u)^2 \geqslant 0$ виконується для всіх $u \in [t, b]$. Дійсно, застосовуючи співвідношення (5.66) і приймаючи до уваги, що $u \in [t, b]$, отримаємо

$$\gamma(c-u)^2 + \beta(b-u)^2 = 2 - \alpha(a-u)^2 \geqslant 2 - \alpha(b-a)^2 = 2 - 2\frac{b-a}{c-a} = 2\frac{c-b}{c-a} \geqslant 0.$$

Тут ми також використали явний вираз для α, отриманий з (5.66). Тому

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left|\Delta_{2,3}\left(F_N^{2,t}; u\right)\right| \mathrm{d}u &= \alpha\int_a^t (a-u)^2\,\mathrm{d}u + \beta\int_t^b (b-u)^2\,\mathrm{d}u + \gamma\int_t^c (c-u)^2\,\mathrm{d}u \\ &= 2\cdot\frac{cb^2 - b^2a - 3bct + 3bat + bc^2 - bca - a^3}{3(b-a)(c-a)} \\ &\qquad + 2\cdot\frac{3a^2t - 6at^2 + 2t^3 + 3cat - c^2a}{3(b-a)(c-a)}. \end{aligned}$$

Залишається поєднати останнє співвідношення з (5.69) і підставляючи вирази для вузлів функціоналу $F_N^{2,t}$, заданого формулами (5.54), (5.55) і (5.56). $\square$

Тепер для $N > M_2\left(D_t^2\right) = 16$ і $t \in [0,1/2]$ побудуємо функцію $f_{N,t} \in L_\infty^3$ таку, що для $f_{N,t}$ і функціоналу $F_N^{2,t}$ умова (5.14) теореми 5.1.1 виконується. Проведемо побудову окремо для випадків: $N \in \left[4/t^2, +\infty\right)$, $N \in \left[N_t^*, 4/t^2\right)$ та $N \in (16, N_t^*)$.

1. Нехай $N \in \left[4/t^2, +\infty\right)$. Позначимо $h = 2/\sqrt{N}$ і розглянемо функцію

$$s(u) = \begin{cases} \dfrac{u^3}{6} + \left(-\dfrac{t}{2} + \dfrac{h}{4}\right)u^2 + \left(\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{th}{2}\right)u - \dfrac{t^3}{6} - \dfrac{h^3}{24} + \dfrac{t^2h}{4}, & u \in [t-h, t], \\ -\dfrac{u^3}{6} + \left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{h}{4}\right)u^2 + \left(-\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{th}{2}\right)u + \dfrac{t^3}{6} - \dfrac{h^3}{24} + \dfrac{t^2h}{4}, & u \in [t, t+h]. \end{cases}$$

Через $\bar{s}$ позначимо $2h$-періодичне продовження функції s. Вочевидь, $\bar{s}$ є зсувом ідеального сплайну Ойлера третього порядку. Через $f_{N,t}$ позначимо звуження $\bar{s}$ на $[0,1]$. Графік функції $f_{N,t}$ зображено на рис. 5.2.

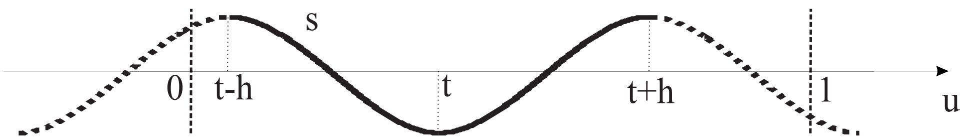

Рис. 5.2: Графік функції $f_{N,t}$ у випадку $N \in \left[4/t^2, +\infty\right)$

2. Нехай $N \in \left[N_t^*, 4/t^2\right)$. Розглянемо кубічні поліноми

$$P(u) = \frac{u^3}{6} + \left(\frac{c_{N,t}^3 + t^3}{3c_{N,t}^2} - t\right)u^2 - \left(\frac{c_{N,t}^3 + 4t^3}{6c_{N,t}} - t^2\right)u + \frac{\left(c_{N,t}^3 - 2t^3\right)^3}{81c_{N,t}^6},$$

$$Q(u) = -\frac{u^3}{6} + \frac{c_{N,t}^3 + t^3}{3c_{N,t}^2}u^2 - \frac{c_{N,t}^3 + 4t^3}{6c_{N,t}}u + \frac{t^3}{3} + \frac{\left(c_{N,t}^3 - 2t^3\right)^3}{81c_{N,t}^6}.$$

Через $\overline{Q}$ позначимо парну (відносно точки $c_{N,t}$) і $\left(\frac{4c_{N,t}^3 - 8t^3}{3c_{N,t}^2}\right)$-періодичне продовження Q, та означимо

$$f_{N,t}(u) := \begin{cases} P(u), & u \in [0,t], \\ \overline{Q}(u), & u \in [t,1]. \end{cases}$$

Графік функції $f_{N,t}$ зображено на рис. 5.3.

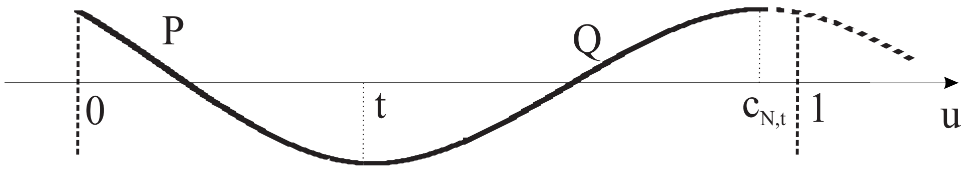

Рис. 5.3: Графік функції $f_{N,t}$ у випадку $N \in \left[N_t^*, 4/t^2\right)$

3. Нехай $N \in (16, N_t^*)$. Розглянемо функцію

$$f_{N,t}(u) = \begin{cases} P(u), & u \in [0,t], \\ Q(u), & u \in [t,1], \end{cases}$$

де

$$\begin{aligned} P(u) &= \frac{u^3}{6} - \left(\frac{3b_{N,t}^2 - 1 + 2t^3}{6\,(1-2b_{N,t})} + t\right)u^2 + \left(\frac{b_{N,t}\left(4t^3 + 3b_{N,t} - 2\right)}{6\,(1-2b_{N,t})} + t^2\right)u \\ &\quad + \frac{(1-b_{N,t})^2\left(b_{N,t}^2 - 2t^3\right)}{12\,(1-2b_{N,t})}, \\ Q(u) &= -\frac{u^3}{6} - \frac{3b_{N,t}^2 - 1 + 2t^3}{6\,(1-2b_{N,t})}u^2 + \frac{b_{N,t}\left(4t^3 + 3b_{N,t} - 2\right)}{6\,(1-2b_{N,t})}u \\ &\quad + \frac{t^3}{3} + \frac{(1-b_{N,t})^2\left(b_{N,t}^2 - 2t^3\right)}{12\,(1-2b_{N,t})}. \end{aligned}$$

Графік функції $f_{N,t}$ зображено на рис. 5.4.

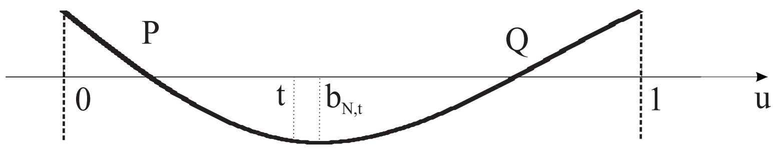

Рис. 5.4: Графік функції $f_{N,t}$ у випадку $N \in (16, N_t^*)$

Наступне твердження показує, що $f_{N,t}$ задовольняє рівність (5.14).

Лема 5.4.2. *Нехай $t \in [0, 1/2]$ та $N > 16$. Тоді $\left\|f_{N,t}'''\right\|_\infty = 1$ та*

$$\left|f_{N,t}''(t)\right| = N \cdot \|f_{N,t}\|_\infty + U\left(D_t^2, F_N^{2,t}; W_\infty^3\right). \tag{5.70}$$

Доведення. Для доведення леми окремо розглянемо випадки: $N \in \left[4/t^2, +\infty\right)$, $N \in \left[N_t^*, 4/t^2\right)$ і $N \in (16, N_t^*)$.

1. Нехай $N \in \left[4/t^2, +\infty\right)$ і позначимо $h = 2/\sqrt{N}$. Нескладно перевірити, що

$$\|f_{N,t}\|_\infty = \frac{h^3}{24} = \frac{1}{3N\sqrt{N}}, \qquad \left|f_{N,t}''(t)\right| = \frac{h}{2} = \frac{1}{\sqrt{N}}, \qquad \left\|f_{N,t}'''\right\|_\infty = 1.$$

Звідси та з (5.65) отримаємо, що $f_{N,t}$ задовольняє рівність (5.70).

2. Нехай $N \in \left[N_t^*, 4/t^2\right)$. З означення випливає, що $f_{N,t}$ – кубічний сплайн дефекту 1. Крім того, безпосередні обчислення показують, що

$$\|f_{N,t}\|_\infty = \frac{\left(c_{N,t}^3 - 2t^3\right)^3}{81 c_{N,t}^6}, \quad \left|f_{N,t}''(t)\right| = \frac{2\left(c_{N,t}^3 + t^3\right)}{3c_{N,t}^2} - t, \quad \left\|f_{N,t}'''\right\|_\infty = 1.$$

Отже, в силу (5.65), функція $f_{N,t}$ задовольняє рівність (5.70).

3. Нехай $N \in (16, N_t^*)$. Вочевидь, $f_{N,t}$ – кубічний сплайн дефекту 1. Неважко переконатися в тому, що $\left\|f_{N,t}'''\right\|_\infty = 1$ та

$$\|f_{N,t}\|_\infty = \frac{(1-b_{N,t})^2\left(b_{N,t}^2 - 2t^3\right)}{12\,(1-2b_{N,t})}, \quad \left|f_{N,t}''(t)\right| = -\frac{3b_{N,t}^2 - 1 + 2t^3}{3\,(1-2b_{N,t})} - t,$$

звідки в силу (5.65) випливає, що функція $f_{N,t}$ задовольняє нерівність (5.70).

Лема доведена. □

Перейдемо безпосереднього до доведення основних результатів для D_t^2 і D^2.

Доведення теореми 5.4.1. Розглянемо випадки: $N > 16$, $N \in (0,16)$ і $N = 16$.

1. Нехай $N > 16$. Поєднуючи лему 5.4.2, теорему 5.1.1 і приймаючи до уваги конструкцію функціоналу $F_N^{2,t}$, отримаємо шукану рівність

$$E_N\left(D_t^2; W_\infty^3\right) = U\left(D_t^2, F_N^{2,t}; W_\infty^3\right).$$

2. Нехай $N \in (0,16)$. В силу (5.13) для будь-якої функції $f \in W_\infty^3$, маємо

$$E_N\left(D_t^2; W_\infty^3\right) \geqslant |f''(t)| - N\|f\|_\infty. \tag{5.71}$$

Розглянемо поліном $Q_2(u) := 8u^2 - 2u + 1$. Вочевидь, $\|Q_2\|_\infty = 1$, $Q_2''(t) = 16$ та $\|Q_2'''\|_\infty = 0$. Продовжуючи (5.71), ми отримаємо

$$E_N\left(D_t^2; W_\infty^3\right) \geqslant \sup_{\lambda>0}\left(|\lambda Q_2''(t)| - N\|\lambda Q_2\|_\infty\right) = (16-N)\sup_{\lambda>0}\lambda = +\infty.$$

Отже, $E_N\left(D_t^2; W_\infty^3\right) = +\infty$.

3. Нарешті, нехай $N = 16$. Якщо $t = 1/2$, то позначимо

$$s(u) := \begin{cases} \dfrac{u^3}{6} - \dfrac{u^2}{8} + \dfrac{1}{192}, & u \in [0, 1/2]\,, \\ -\dfrac{u^3}{6} + \dfrac{3u^2}{8} - \dfrac{u}{4} + \dfrac{3}{64}, & u \in [1/2, 1]\,. \end{cases}$$

Нескладно бачити, що

$$\|s\|_\infty = 1/192, \qquad |s''(1/2)| = 1/4 \qquad \text{та} \qquad \|s'''\|_\infty = 1.$$

За теоремою 5.1.1,

$$E_{16}\left(D^2_{1/2}; W^3_\infty\right) = |s''(1/2)| - 16\,\|s\|_\infty = U\left(D^2_{1/2}, F^{2,t}_{16}; W^3_\infty\right).$$

Отже, виконуються умови теореми 5.4.1. Зрозуміло, що $\lim\limits_{K\to 16^+} b_{K,t} = 1/2$ та

$$\lim_{K\to 16^+}(K-16)\,\|f_{K,t}\|_\infty = \lim_{K\to 16^+}(K-16)\frac{\left(1-8t^3\right)}{48\sqrt{K-16}} = 0.$$

Таким чином, з нерівності (5.71) і рівності (5.70) ми отримаємо

$$\begin{aligned}
E_{16}\left(D^2_t; W^3_\infty\right) &\geqslant \lim_{K\to 16^+}\left(\left|f''_{K,t}(t)\right| - 16\,\|f_{K,t}\|_\infty\right) \\
&= \lim_{K\to 16^+}\left((K-16)\,\|f_{K,t}\|_\infty + U\left(D^2_t, F^{2,t}_{16}; W^3_\infty\right)\right) \\
&= U\left(D^2_t, F^{2,t}_{16}; W^3_\infty\right).
\end{aligned}$$

Останнє завершує доведення теореми 5.4.1. □

Доведення теореми 5.4.2. Обчислимо норму оператора F^2_N. Легко бачити, що

$$\left\|F^2_N\right\| := \sup_{f\in L_\infty,\ \|f\|_\infty\leqslant 1}\left\|F^2_N f\right\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]}\left(\sup_{f\in L_\infty,\ \|f\|_\infty\leqslant 1}\left|F^{2,t}_N f\right|\right) = N.$$

М. Сато [323] показала, що для будь-якого $\delta > 0$,

$$\Omega\left(\delta; D^2; W^3_\infty\right) = \Omega\left(\delta; D^2_0; W^3_\infty\right).$$

Таким чином, за лемою 2 [65] ми отримаємо

$$\begin{aligned}
E_N\left(D^2; W^3_\infty\right) &= \sup_{\delta>0}\left(\Omega\left(\delta; D^2; W^3_\infty\right) - N\delta\right) \\
&= \sup_{\delta>0}\left(\Omega\left(\delta; D^2_0; W^3_\infty\right) - N\delta\right) = E_N\left(D^2_0; W^3_\infty\right).
\end{aligned}$$

Крім того, з останніх рівностей випливає, що

$$E_N\left(D^2; W^3_\infty\right) = \sup_{t\in[0,1]} E_N\left(D^2_t; W^3_\infty\right).$$

Застосовуючи теорему 5.4.1, отримаємо

$$\begin{aligned}
U\left(D^2, F^2_N; W^3_\infty\right) &= \sup_{f\in W^3_\infty}\left\|f'' - F^2_N f\right\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]}\sup_{f\in W^3_\infty}\left|f''(t) - F^{2;t}_N f\right| \\
&= \sup_{t\in[0,1]} U\left(D^2_t, F^2_N; W^3_\infty\right) = \sup_{t\in[0,1]} E_N\left(D^2_t; W^3_\infty\right) = E_N\left(D^2; W^3_\infty\right).
\end{aligned}$$

Отже, теорема 5.4.2 доведена. □

5.4.3. Доведення результатів щодо розв'язку задачі Стєчкіна для D_t^1

Розпочнемо з деяких додаткових конструкцій і результатів. Для зручності нагадаємо, що $M_2\left(D_t^1\right)=\min\left\{t^{-1};8-16t\right\}$.

Лема 5.4.3. *Нехай* $t\in[0,1/2]$ *і* $N\geqslant M_2\left(D_t^1\right)$. *Нехай також* $F_N^{1,t}$ *визначений рівностями* (5.58), (5.62) *і* (5.63). *Тоді* $\left\|F_N^{1,t}\right\|=N$ *і*

$$U\left(D_t^1,F_N^{1,t};W_\infty^3\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{6N^2}, & N\in\left[t^{-1},+\infty\right),\\ -\dfrac{t\left(d_{N,t}+e_{N,t}\right)}{3}+\dfrac{e_{N,t}d_{N,t}}{6} & \\ \quad -r_{N,t}^2+2tr_{N,t}-\dfrac{t^2}{2} & \\ \quad +\dfrac{r_{N,t}^3\left(e_{N,t}+d_{N,t}-2t\right)}{3d_{N,t}e_{N,t}}, & N\in\left[M_2\left(D_t^1\right),t^{-1}\right).\end{cases}\tag{5.72}$$

Доведення. Рівність $\left\|F_N^{1,t}\right\|=N$ є очевидною. Доведемо (5.72), для чого використаємо (5.53). У випадку $N\in\left[t^{-1},+\infty\right)$ маємо

$$\begin{aligned}U\left(D_t^1,F_N^{1,t};W_\infty^3\right) &= \frac{N}{4}\int_t^{t+\frac{1}{N}}\left(t+\frac{1}{N}-u\right)^2\mathrm{d}u\\ &\quad+\frac{N}{4}\int_{t-\frac{1}{N}}^{t}\left(t-\frac{1}{N}-u\right)^2\mathrm{d}u=\frac{1}{6N^2},\end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

У випадку $N\in\left[M_2\left(D_t^1\right),t^{-1}\right)$, з (5.53) отримаємо

$$U\left(D_t^1,F_N^{1,t};W_\infty^3\right)=\frac{1}{2}\int_0^1\left|\Delta_{1,3}\left(F_N^{1,t};u\right)\right|\mathrm{d}u,\tag{5.73}$$

де

$$\Delta_{1,3}\left(F_N^{1,t};u\right):=\begin{cases}\dfrac{d_{N,t}+e_{N,t}-2t}{e_{N,t}d_{N,t}}u^2, & u\in[0,t],\\ \dfrac{N}{2}\left(d_{N,t}-u\right)^2+\dfrac{\left(2t-d_{N,t}\right)\left(e_{N,t}-u\right)^2}{e_{N,t}\left(e_{N,t}-d_{N,t}\right)}, & u\in\left(t,d_{N,t}\right),\\ \dfrac{\left(2t-d_{N,t}\right)\left(e_{N,t}-u\right)^2}{e_{N,t}\left(e_{N,t}-d_{N,t}\right)}, & u\in\left[d_{N,t},e_{N,t}\right].\end{cases}$$

Обчислимо інтеграл у правій частині (5.73). Зауважимо, що на інтервалі $\left(t,d_{N,t}\right)$ функція $\Delta_{1,3}\left(F_N^{1,t};\cdot\right)$ досягає нульового значення лише в точці $r_{N,t}$. Нескладно бачити, що $\Delta_{1,3}\left(F_N^{1,t};u\right) \geqslant 0$ для всіх $u \in [0, r_{N,t}]$ та $\Delta_{1,3}\left(F_N^{1,t};u\right) \leqslant 0$ для всіх $u \in [r_{N,t}, e_{N,t}]$. Тому

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^1 \left|\Delta_{1,3}\left(F_N^{1,t};u\right)\right| \mathrm{d}u \\
&\quad = \frac{d_{N,t}+e_{N,t}-2t}{2d_{N,t}e_{N,t}}\int_0^t u^2\,\mathrm{d}u + \frac{N}{4}\int_t^{d_{N,t}} (d_{N,t}-u)^2 \operatorname{sgn}\,(r_{N,t}-u)\,\mathrm{d}u \\
&\qquad\quad - \frac{d_{N,t}-2t}{2e_{N,t}\left(e_{N,t}-d_{N,t}\right)}\int_t^{d_{N,t}} (e_{N,t}-u)^2 \operatorname{sgn}\,(r_{N,t}-u)\,\mathrm{d}u \\
&\qquad\quad + \frac{d_{N,t}-2t}{2e_{N,t}\left(e_{N,t}-d_{N,t}\right)}\int_{d_{N,t}}^{e_{N,t}} (e_{N,t}-u)^2\,\mathrm{d}u \\
&\quad = -\frac{t\left(d_{N,t}+e_{N,t}\right)}{3} + \frac{c_{N,t}d_{N,t}}{6} - r_{N,t}^2 + 2tr_{N,t} - \frac{t^2}{2} + \frac{r_{N,t}^3\left(e_{N,t}+d_{N,t}-2t\right)}{3d_{N,t}e_{N,t}}.
\end{aligned}$$

Поєднуючи останні співвідношення з (5.73), отримаємо шукану рівність (5.72). $\square$

Нехай або $t \in [0,1/2]$ і $N > M_2\left(D_t^1\right)$, або $t \in [1/4,1/2]$ і $N = M_2\left(D_t^1\right)$. Побудуємо функцію $g_{N,t} \in L_\infty^3$ таку, що $g_{N,t}$ та функціонал $F_N^{1,t}$ задовольняють умови (5.14) теореми 5.1.1. Для зручності, розіб'ємо доведення на три частини.

1. Нехай $N \in \left[t^{-1}, +\infty\right)$. Розглянемо кубічний поліном

$$s(u) = -\frac{u^3}{6} + \frac{tu^2}{2} - \frac{(t^2N^2-1)u}{2N^2} + \frac{t(t^2N^2-3)}{6N^2}, \quad u \in \left[t-\frac{1}{N}, t+\frac{1}{N}\right].$$

Через $\bar{s}$ позначимо парне (відносно точки $t + 1/N$) і $4/N$-періодичне

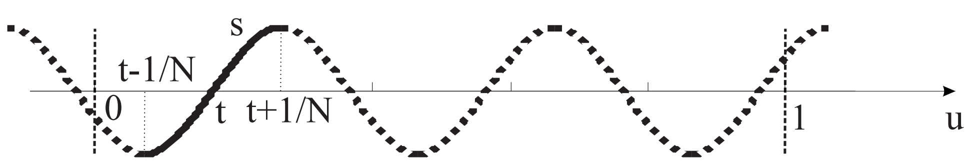

Рис. 5.5: Графік функції $g_{N,t}$ у випадку $N \in \left[t^{-1}, +\infty\right)$

продовження s. Вочевидь, $\bar{s}$ є ідеальним сплайном Ойлера порядку 3. Через $g_{N,t}$ позначимо звуження $\bar{s}|_{[0,1]}$. Графік функції $g_{N,t}$ зображено на рис. 5.5.

2. Нехай $t \in [0,1/4)$ і $N \in \left[N_t^{**}, t^{-1}\right)$. Розглянемо кубічні поліноми

$$\begin{aligned}
P(u) \;=\; & -\frac{u^3}{6} + \left(r_{N,t} - \frac{d_{N,t}+e_{N,t}}{4}\right)u^2 + \left(-r_{N,t}^2 + \frac{d_{N,t}e_{N,t}}{2}\right)u \\
& + \frac{r_{N,t}^3}{6} + \frac{d_{N,t}^3}{24} - \frac{d_{N,t}^2 e_{N,t}}{8},
\end{aligned}$$

$$Q(u) = \frac{u^3}{6} - \left(\frac{d_{N,t} + e_{N,t}}{4}\right) u^2 + \left(\frac{d_{N,t} e_{N,t}}{2}\right) u - \frac{r_{N,t}^3}{6} + \frac{d_{N,t}^3}{24} - \frac{d_{N,t}^2 e_{N,t}}{8}.$$

Через $\overline{Q}$ позначимо парне (відносно точки $e_{N,t}$) і $2\left(e_{N,t} - d_{N,t}\right)$-періодичне продовження функції Q. Позначимо

$$g_{N,t}(u) := \begin{cases} P(u), & u \in [0, r_{N,t}] \\ \overline{Q}(u), & u \in [r_{N,t}, 1]. \end{cases}$$

Графік функції $g_{N,t}$ зображено на рис. 5.6.

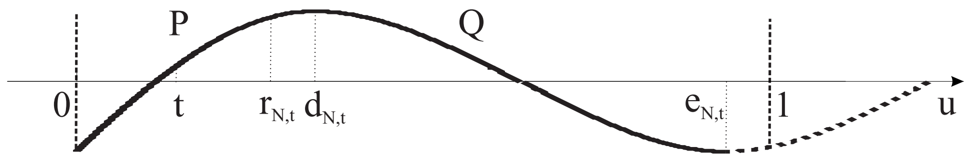

Рис. 5.6: Графік функції $g_{N,t}$ у випадку $t \in [0, 1/4)$ і $N \in \left[N_t^{**}, t^{-1}\right)$

3. Нехай $t \in [0, 1/4)$ і $N \in (8 - 16t, N_t^{**})$. Розглянемо кубічні поліноми

$$P(u) = -\frac{u^3}{6} + \left(r_{N,t} - \frac{1 - 3d_{N,t}^2 + 2r_{N,t}^3}{6\left(1 - 2d_{N,t}\right)}\right) u^2$$
$$- \left(r_{N,t}^2 + \frac{3d_{N,t}^2 - 2d_{N,t} + 4d_{N,t} r_{N,t}^3}{6\left(1 - 2d_{N,t}\right)}\right) u - \frac{\left(1 - d_{N,t}\right)^2 \left(d_{N,t}^2 - 2r_{N,t}^3\right)}{12\left(1 - 12d_{N,t}\right)},$$

$$Q(u) = \frac{u^3}{6} - \frac{1 - 3d_{N,t}^2 + 2r_{N,t}^3}{6\left(1 - 2d_{N,t}\right)} u^2 - \frac{3d_{N,t}^2 - 2d_{N,t} + 4d_{N,t} r_{N,t}^3}{6\left(1 - 2d_{N,t}\right)} u - \frac{r_{N,t}^3}{3}$$
$$- \frac{\left(1 - d_{N,t}\right)^2 \left(d_{N,t}^2 - 2r_{N,t}^3\right)}{12\left(1 - 12d_{N,t}\right)}.$$

Тепер означимо

$$g_{N,t}(u) := \begin{cases} P(u), & u \in [0, r_{N,t}], \\ Q(u), & u \in [r_{N,t}, 1]. \end{cases}$$

Графік функції $g_{N,t}$ зображено на рис. 5.7.

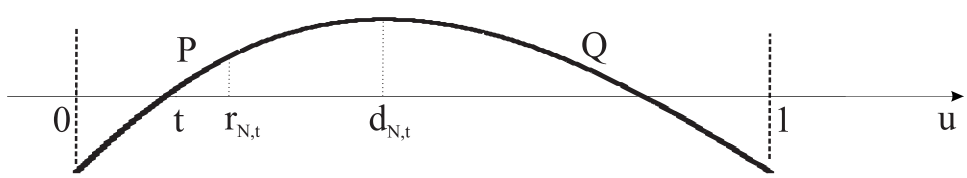

Рис. 5.7: Графік функції $g_{N,t}$ у випадку $t \in [0, 1/4)$ і $N \in (8 - 16t, N_t^{**})$

Наступне твердження доводить екстремальність функції $g_{N,t}$.

Лема 5.4.4. *Нехай або* $t \in [0,1/2]$ *і* $N > M_2\left(D_t^1\right)$, *або* $t \in [1/4,1/2]$ *і* $N = M_2\left(D_t^1\right)$. *Тоді* $\left\|g'''_{N,t}\right\|_\infty = 1$ *і*

$$\left|g'_{N,t}(t)\right| = N\left\|g_{N,t}\right\|_\infty + U\left(D_t^1, F_N^{1,t}; W_\infty^3\right). \tag{5.74}$$

Доведення. Спочатку нехай $N \in \left[t^{-1}, +\infty\right)$. Неважко перевірити, що

$$\left\|g_{N,t}\right\|_\infty = s\left(t + \frac{1}{N}\right) = \frac{1}{3N^3}, \quad \left|g'_{N,t}(t)\right| = s'(t) = \frac{1}{2N^2}, \quad \left\|g'''_{N,t}\right\|_\infty = 1.$$

З цих рівностей та рівності (5.72) бачимо, що функція $g_{N,t}$ задовольняє всім припущенням леми 5.4.4.

Нехай тепер $t \in [0,1/4)$ і $N \in \left[N_t^{**}, t^{-1}\right)$. Безпосередні обчислення показують, що $\left\|g'''_{N,t}\right\|_\infty = 1$ та

$$\left\|g_{N,t}\right\|_\infty = -P(0) = -Q\left(e_{N,t}\right) = Q\left(d_{N,t}\right) = \frac{d_{N,t}^2 e_{N,t}}{8} - \frac{r_{N,t}^3}{6} - \frac{d_{N,t}^3}{24},$$

$$\left|g'_{N,t}(t)\right| = -\frac{t^2}{2} + 2tr_{N,t} - \frac{t\left(d_{N,t} + e_{N,t}\right)}{2} - r_{N,t}^2 + \frac{d_{N,t}e_{N,t}}{2}.$$

Підставляючи ці співвідношення в (5.74), отримаємо тотожність.

Нарешті, нехай $t \in [0,1/4)$ і $N \in (8 - 16t, N_t^{**})$. Зрозуміло, що $\left\|g'''_{N,t}\right\|_\infty = 1$ та

$$\left\|g_{N,t}\right\|_\infty = -P(0) = -Q\left(e_{N,t}\right) = Q\left(d_{N,t}\right) = \frac{\left(1 - d_{N,t}\right)^2\left(d_{N,t}^2 - 2r_{N,t}^3\right)}{12\left(1 - 12d_{N,t}\right)},$$

$$\left|g'_{N,t}(t)\right| = t^2 - \frac{2t - 6td_{N,t}^2 + 4tr_{N,t}^3 + 3d_{N,t}^2 - 2d_{N,t} + 4d_{N,t}r_{N,t}^3}{6\left(1 - 2d_{N,t}\right)},$$

що завершує доведення леми. □

Перейдемо до доведення основних результатів підрозділу.

Доведення теореми 5.4.3. Розглянемо три випадки:

1. Нехай $N > M_2\left(D_t^1\right)$. Поєднуючи лему 5.4.4, теорему 5.1.1 і приймаючи до уваги конструкцію функціоналу $F_N^{1,t}$, отримаємо

$$E_N\left(D_t^1; W_\infty^3\right) = U\left(D_t^1, F_N^{1,t}; W_\infty^3\right).$$

   Звідси та з леми 5.4.3 ми отримаємо шукані рівності (5.64).

2. Нехай $N \in \left(0, M_2\left(D_t^1\right)\right)$. В силу 5.14, для будь-якої функції $f \in W_\infty^3$,

$$E_N\left(D_t^1; W_\infty^3\right) \geqslant |f'(t)| - N\|f\|_\infty. \tag{5.75}$$

Через $Q_{1,t}$ позначимо алгебраїчний поліном степені не вище за 2, який є екстремальним в нерівності Маркова-Нікольського $|Q'(t)| \leqslant M_2\left(D_t^1\right)\|Q\|_\infty$ для поліномів Q другої степені. Тоді з (5.75) отримаємо

$$\begin{aligned} E_N\left(D_t^1; W_\infty^3\right) &\geqslant \sup_{\lambda>0}\left(\left|\lambda Q_{1,t}'(t)\right| - N\left\|\lambda Q_{1,t}\right\|_\infty\right) \\ &= \left(M_2\left(D_t^1\right) - N\right)\sup_{\lambda>0}\lambda = +\infty. \end{aligned}$$

3. Нехай $N = M_2\left(D_t^1\right)$. Якщо $t \in [1/4, 1/2]$, то за лемою 5.4.4 функція $g_{N,t}$ задовольняє рівності (5.74). За теоремою 5.1.1 отримаємо шукану рівність

$$E_{M_2\left(D_t^1\right)}\left(D_t^1; W_\infty^3\right) = U\left(D_t^1, F_{M_2\left(D_t^1\right)}^{1,t}; W_\infty^3\right).$$

Розглянемо випадок, коли $t \in [0, 1/4)$. Нескладно перевірити, що $e_{K,t} = 1$ для всіх $K \in [8 - 16t, N_t^{**})$. Таким чином,

$$\lim_{K\to(8-16t)^+} d_{K,t} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{K\to(8-16t)^+} r_{K,t} = \frac{1-\sqrt{1-6t+8t^2}}{3-4t},$$

$$\begin{aligned} &\lim_{K\to(8-16t)^+}(K-(8-16t))\frac{\left(1-d_{K,t}\right)^2\left(d_{K,t}^2 - 2r_{K,t}^3\right)}{12\left(1-2d_{K,t}\right)} \\ &= \lim_{K\to(8-16t)^+}(K-(8-16t))\frac{\sqrt{K}\left(d_{K,t}^2-2r_{K,t}^3\right)}{48\sqrt{K-(8-16t)}} = 0. \end{aligned}$$

Отже, приймаючи до уваги нерівність (5.75) і рівність (5.74), матимемо

$$\begin{aligned} E_{8-16t}\left(D_t^1; W_\infty^3\right) &\geqslant \lim_{K\to(8-16t)^+}\left(\left|g_{K,t}'(t)\right| - 16\left\|g_{K,t}\right\|_\infty\right) \\ &= \lim_{K\to(8-16t)^+}\left((K-(8-16t))\left\|g_{K,t}\right\|_\infty + U\left(D_t^1, F_K^{1,t}; W_\infty^3\right)\right) \\ &= U\left(D_t^1, F_{8-16t}^{1,t}; W_\infty^3\right), \end{aligned}$$

що завершує доведення теореми. □

Доведення теореми 5.4.4. Доведення аналогічне доведенню теореми 5.4.2. □

5.4.4. Доведення існування та єдиності розв'язку рівняння (5.57)

В цьому параграфі ми доведемо наступне твердження.

Лема 5.4.5. *Нехай $t \in [0, 1/4)$. Тоді рівняння (5.57) має єдиний розв'язок на інтервалі $\big(8-16t, t^{-1}\big)$.*

Доведення. Розглянемо нову змінну $x = \sqrt{1-(8-16t)/N}$. Вочевидь, $\frac{4}{N} = \frac{1-x^2}{2(1-2t)}$, і змінна x приймає всі значення між 0 та $1-4t$, коли N змінюється в інтервалі $\big(8-16t, t^{-1}\big)$. Після підстановки в рівність (5.57) і домноження на $2(1-2t)(3-4t-x)$, ми отримаємо

$$\sqrt[3]{1-3x}\,(3-4t-x) = 2(1-x) - 2\sqrt{1-x}\sqrt{1-2t}\sqrt{1-4t-x}. \tag{5.76}$$

Зауважимо, що єдиність розв'язку рівняння (5.76) на інтервалі $(0, 1-4t)$ еквівалентна доведенню того, що рівняння (5.57) має єдиний розв'язок на $\big(8-16t, t^{-1}\big)$. Тому в подальшому ми будемо досліджувати лише рівняння (5.76).

Для $x \in [0, 1-4t]$ розглянемо функцію

$$f(x) = \sqrt[3]{1-3x}(3-4t-x) - 2(1-x) + 2\sqrt{1-x}\sqrt{1-2t}\sqrt{1-4t-x}.$$

Помітимо, що f неперервна на відрізку $[0, 1-4t]$ та приймає значення різних знаків в його кінцях: $f(0) = 1-4t+2\sqrt{1-2t}\sqrt{1-4t} > 1-4t > 0$ і $f(1-4t) = 2\sqrt[3]{12t-2} - 8t < 2\sqrt[3]{64t} - 8t = 0$. Отже, рівняння (5.76) має розв'язок на інтервалі $(0, 1-4t)$.

Покажемо єдиність такого розв'язку. Розглянемо випадки: $t > 1/6$ та $t \leqslant 1/6$.

1. Нехай $t > 1/6$. Тоді $1-4t < 1/3$ та

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4(1-3x)^{-2/3}(1-t-x) + 2 \\ &\quad -2\sqrt{1-2t}(1-2t-x)(1-x)^{-1/2}(1-4t-x)^{-1/2} \\ &< -4(1-3x)^{-2/3}(1-t-x) + 2 = (1-3x)^{-2/3}\left(-4+4t+4x+2\sqrt[3]{1-3x}\right) \\ &\leqslant (1-3x)^{-2/3}(-2+4t+2x) \leqslant -4t\,(1-3x)^{-2/3} < 0. \end{aligned}$$

Тому f спадає на $(0, 1-4t)$. Отже, рівняння (5.76) має єдиний розв'язок.

2. Далі, нехай $t \leqslant 1/6$. Як і в попередньому випадку ми можемо показати, що f спадає на інтервалі $(0, 1/3)$. Також для всіх $x > 1/3$,

$$f(x) < -2(1-x) + 2\sqrt{1-2t}\sqrt{1-x}\sqrt{1-4t-x} \leqslant -2(1-x) + 2(1-x) = 0.$$

Отже, рівняння (5.76) має єдиний розв'язок, який розташовано на $(0, 1/3)$. $\square$

Наступне твердження випливає з доведення леми 5.4.5.

Наслідок 5.4.1. *Для всіх* $N \geqslant N_t^{**}$,

$$\frac{\sqrt[3]{1-3\sqrt{1-\frac{8-16t}{N}}}}{2(1-2t)} \leqslant \frac{\frac{1-\sqrt{1-\frac{8-16t}{N}}}{1-2t} - \sqrt{2}\sqrt{1-\frac{4}{N}-\sqrt{1-\frac{8-16t}{N}}}}{3-4t-\sqrt{1-\frac{8-16t}{N}}}.$$

5.4.5. Доведення існування та єдиності розв'язку рівняння (5.59)

Даний параграф присвячено доведенню наступного твердження.

Лема 5.4.6. *Нехай* $t \in [0, 1/4)$ *і* $N \in \left[N_t^{**}, t^{-1}\right)$. *Тоді рівняння* (5.59) *має єдиний розв'язок на відрізку* $[4t, 1]$.

Доведення. Нехай $e^* = 4\left(1+\sqrt{1-Nt}\right)/N$. Вочевидь,

$$4t \leqslant 4tN/N \leqslant 4/N \leqslant e^* \leqslant 8/N \leqslant 1,$$

і рівняння (5.59) не має розв'язків на напівінтервалі $[4t, e^*)$, оскільки

$$1-\frac{8e-16t}{Ne^2} = \frac{Ne^2-8e+16t}{Ne^2} < \frac{N\left(e^*\right)^2-8e^*+16t}{Ne^2} = 0.$$

Тому надалі розглядатимемо лише випадок $e \in [e^*, 1]$.

Позначимо через y функцію змінної e: $y = \sqrt{1-\frac{8e-16t}{Ne^2}}$. Нескладно бачити, що

$$\frac{4}{Ne} = \frac{e\left(1-y^2\right)}{2(e-2t)} \qquad \text{та} \qquad y' = \frac{1-y^2}{2ey}\cdot\frac{e-4t}{e-2t}.$$

Зокрема, функція y зростає на $[e^*, 1]$. Помітимо також, що $e \geqslant 4t + ey$ або, що еквівалентно, $e \geqslant 4t/(1-y)$. Використовуючи останні позначення, перепишемо рівняння (5.59) в наступному вигляді

$$\sqrt[3]{1-3y} = \frac{2e(1-y) - 2\sqrt{e-2t}\sqrt{1-y}\sqrt{e-4t-ey}}{3e-4t-ey}.$$

Домноживши і поділивши праву частину останньої рівності на вираз, спряжений до чисельника її правої частини, матимемо

$$\sqrt[3]{1-3y} = \frac{4t}{e+\frac{\sqrt{e-2t}\sqrt{e-4t-ey}}{\sqrt{1-y}}}. \tag{5.77}$$

Рівняння (5.77) рівносильно рівнянню (5.59), оскільки $3e-4t-ey \geqslant 2e \geqslant 2e^* > 0$.

Розглянемо функцію

$$f(e) = \sqrt[3]{1-3y}\left(e + \sqrt{\frac{(e-2t)(e-4t-ey)}{1-y}}\right) - 4t, \qquad e \in [e^*, 1]\,.$$

Зауважимо, що f неперервна на $[e^*, 1]$ та $f(e^*) = e^* + \sqrt{(e^*-2t)(e^*-4t)} - 4t > 0$. Крім того, з нерівності $N \geqslant N_t^{**}$ і наслідку 5.4.1 випливає, що

$$f(1) = \sqrt[3]{1 - 3\sqrt{1-\frac{8-16t}{N}}}\left(1 + \sqrt{\frac{(1-2t)\left(1-4t-\sqrt{1-\frac{8-16t}{N}}\right)}{1-\sqrt{1-\frac{8-16t}{N}}}}\right) - 4t < 0.$$

Отже, рівняння (5.77) має розв'язок на відрізку $[e^*, 1]$. Доведемо його єдиність. Позначимо

$$e^{**} = \frac{9+3\sqrt{9-8Nt}}{2N}$$

і помітимо, що

$$e^{**} \geqslant \frac{8+3\sqrt{8-8Nt}}{2N} \geqslant \frac{8+8\sqrt{1-Nt}}{2N} = e^*.$$

Більш того, якщо $e^{**} < 1$, то для всіх $e > e^{**}$ маємо, що $y > 1/3$, звідки $f(e) < -4t \leqslant 0$. Тому нам достатньо розглянути лише випадок, коли $e \in [e^*, \min\{e^{**}; 1\}]$. Диференціюючи функцію f за змінною e, отримаємо

$$\begin{aligned} f'(e) \;=\; & -(1-3y)^{-\frac{2}{3}}\Bigg[(ey'-1+3y) \\ & + \left(y'\frac{\sqrt{e-2t}\,((1+y)(e-4t-ey)+e(1-y)(1-3y))}{2\sqrt{1-y}(1-y)\sqrt{e-4t-ey}} \right.\\ & \left. - \frac{(1-3y)(e-3t-ey+ty)}{\sqrt{1-y}\sqrt{e-2t}\sqrt{e-4t-ey}}\right)\Bigg]. \end{aligned}$$

Покажемо, що обидва доданки в квадратних дужках є невід'ємними. Дійсно, з нерівності $e \geqslant 4t/(1-y)$, ми отримаємо

$$\begin{aligned} ey'-1+3y \;&=\; \frac{\left(1-y^2\right)(e-4t) - 2(e-2t)(1-3y)y}{2y(e-2t)} = \\ &=\; \frac{e\left(1-2y+5y^2\right) - 4t\left(1-y+2y^2\right)}{2y(e-2t)} \geqslant \frac{4t\left(2y^2+2y^3\right)}{2y(1-y)(e-2t)} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Також

$$
\begin{aligned}
y' & \frac{(1+y)(e-4t-ey)+e(1-y)(1-3y)}{2(1-y)} - \frac{(1-3y)(e-3t-ey+ty)}{e-2t} \\
& = \frac{(1+y)(e-4t)\left((1+y)(e-4t-ey)+e(1-y)(1-3y)\right)}{4ey(e-2t)} \\
& \qquad - \frac{(1-3y)(e-3t-ey+ty)}{e-2t} \\
& = \frac{e^2\left(1-3y+7y^2-5y^3\right)-2te\left(3-3y+9y^2-y^3\right)+8t^2(1+y)^2}{2ey(e-2t)}.
\end{aligned}
$$

Позначимо чисельник останньої частки через δ. Вочевидь, δ є параболою відносно змінної e. Покажемо, що вершина v параболи δ розташована нижче за $4t/(1-y)$. Дійсно, приймаючи до уваги, що $y \leqslant 1/3$, ми отримаємо

$$
\begin{aligned}
v(1-y)-4t &= \frac{t\left(3-3y+9y^2-y^3\right)}{(1-3y+7y^2-5y^3)} - 4t \\
&= -\frac{t\left(1-6y+16y^2-10y^3-y^4\right)}{(1-3y+7y^2-5y^3)} \\
&= -\frac{t\left((1-3y)^2+7y^2-10y^3-y^4\right)}{(1-3y+7y^2-5y^3)} \leqslant 0.
\end{aligned}
$$

Оскільки $1-3y+7y^2-5y^3 \geqslant 0$, то

$$\delta(e) \geqslant \delta\left(\frac{4t}{1-y}\right) = 0.$$

Таким чином, f' недодатна на $[e^*, \min\{e^{**}; 1\}]$ і може обертатися в нуль лише, коли $e = e^*$. Отже, функція f є строго спадною на відрізку $[e^*, \min\{e^{**}; 1\}]$, що завершує доведення єдиності розв'язку рівняння (5.59). □

5.5. Задача Ландау-Колмогорова для абсолютно монотонних на відрізку функцій

Даний підрозділ присвячено результатам щодо розв'язання задачі Ландау-Колмогорова (задачі 5.1.3 і 5.1.4) на класі абсолютно монотонних функцій на відрізку. Наведені тут результати опубліковано в статті [331]. Надалі для зручності будемо розглядати функції, означені на відрізку $[0, 1]$, а тому будемо опускати позначення відрізку $[0, 1]$ в символах просторів $L_p([0, 1])$, $L_p^r([0, 1])$, класів $W_p^r([0, 1])$ та норми $\|\cdot\|_{L_p([0,1])}$.

Означення 5.5.1. [344, с. 144] *Функція $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ називається абсолютно монотонною на відрізку $[0,1]$, якщо вона є неперервною на $[0,1]$, нескінченно диференційовною всередині $(0,1)$, і $f^{(k)}(x) \geqslant 0$ для всіх $x \in (0,1)$ та $k \in \mathbb{Z}_+$.*

Множину абсолютно монотонних на $[0,1]$ функцій позначимо через AM.

Введемо деякі позначення. Нехай $n \in \mathbb{Z}_+$ та $e_n(x) := x^n$, $x \in [0,1]$. Нехай також $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$ і $n \geqslant r$. Розглянемо множину функцій

$$\mathcal{M}_r^n := \left\{ g_{\lambda,n} = \lambda \frac{(n+1-r)!}{(n+1)!} e_{n+1} + (1-\lambda) \frac{(n-r)!}{n!} e_n \;\middle|\; \lambda \in [0,1) \right\}$$

і напівінтервали

$$\Delta_{n;p} := \left(\frac{(n-r+1)!}{(n+1)!} \left\| e_{n+1} \right\|_p , \, \frac{(n-r)!}{n!} \left\| e_n \right\|_p \right].$$

Нехай також

$$\mathcal{M}_r^{r-1} := \left\{ g_{\rho,r-1} = \frac{1}{r!} e_r + \rho e_{r-1} \;\middle|\; \rho > 0 \right\} \quad \text{і} \quad \Delta_{r-1;p} := \left(\frac{1}{r!} \left\| e_r \right\|_p , \, \infty \right).$$

Зауважимо, що множини $\mathcal{M}_r^n$ та інтервали $\Delta_{n;p}$, $n \geqslant r-1$, попарно не перетинаються. Крім того, $\bigcup\limits_{n \geqslant r-1} \Delta_{n;p} = \mathbb{R}_+$. Означимо $\mathcal{M}_r := \bigcup\limits_{n \geqslant r-1} \mathcal{M}_r^n$. Тоді для будь-якої функції $y \in \mathcal{M}_r$ отримаємо $\left\| y^{(r)} \right\|_\infty = 1$.

Зафіксуємо $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Покажемо, що для довільного $\delta > 0$ існує єдина функція $y_\delta \in \mathcal{M}_r$ така, що $\left\| y_\delta \right\|_p = \delta$. Для цього вивчимо дію функціоналу $\| \cdot \|_p$ на елементи множини $\mathcal{M}_r^n$, $n \geqslant r-1$, та $\mathcal{M}_r$. Розглянемо спочатку випадок, коли $n \geqslant r$. За означенням, множина $\mathcal{M}_r^n$ є опуклою оболонкою функцій $g_{0,n+1}$ і $g_{0,n}$, за виключенням самої функції $g_{0,n+1}$. Крім того, для будь-якого $\lambda \in [0,1)$

$$\left\| g_{\lambda,n} \right\|_p = \left\| \frac{(n-r)!}{n!} e_n + \lambda \frac{(n-r)!}{n!} e_n \left(\frac{n+1-r}{n+1} e_1 - 1 \right) \right\|_p .$$

З останнього співвідношення неважко бачити, що для $0 \leqslant \mu < \lambda < 1$ має місце нерівність $\left\| g_{\mu,n} \right\|_p > \left\| g_{\lambda,n} \right\|_p$. Тому функціонал $\left\| \cdot \right\|_p$ є строго спадною функцією на множині $\mathcal{M}_r^n$ і здійснює ін'єктивне відображення множини $\mathcal{M}_r^n$ в інтервал $\Delta_{n;p}$. Сюрьєктивність відображення $\| \cdot \|_p$ випливає з його неперервності. Подібні міркування у випадку $n = r-1$ показують, що функціонал $\| \cdot \|_p$ також здійснює взаємно-однозначне відображення множини $\mathcal{M}_r^{r-1}$ на інтервал $\Delta_{r-1;p}$.

Отже, функціонал $\|\cdot\|_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, здійснює бієктивне відображення множини $\mathcal{M}_r$ на $\mathbb{R}_+$. Тому для будь-якого $\delta > 0$ існує єдина функція $y_\delta \in \mathcal{M}_r$ така, що

$$\|y_\delta\|_p = \delta. \tag{5.78}$$

Теорема 5.5.1. *Нехай $k, r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant r-1$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Тоді для $\delta > 0$*

$$\Omega\left(\delta; D^k; W^r_\infty \cap AM\right) = \left\|y_\delta^{(k)}\right\|_q.$$

Зауваження 5.5.1. *Твердження теореми 5.5.1 можна поширити і на більш загальний випадок, коли замість L_p-норми функції береться довільна строго монотонна функція, а замість L_q-норми – норма Люксембурга (див. підрозділ 5.3).*

У випадку, коли $p \in \{1, \infty\}$, функціонал $\|\cdot\|_p$ є лінійним на класі AM. Тому в цьому випадку для $\Omega\left(\delta; D^k; W^r_\infty \cap AM\right)$ можна вказати більш явний вираз.

Наслідок 5.5.1. *Нехай $k, r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant r-1$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $p \in \{1, \infty\}$. Тоді, якщо $\delta \in \Delta_{n;p}$, $n \geqslant r$, то*

$$\Omega\left(\delta; D^k; W^r_\infty \cap AM\right) = \left\|\lambda_\delta \frac{(n+1-r)!}{(n+1-k)!} e_{n+1-k} + (1-\lambda_\delta)\frac{(n-r)!}{(n-k)!} e_{n-k}\right\|_q,$$

де

$$\lambda_\delta = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}\delta - \|e_n\|_p}{\frac{n+1-r}{n+1}\|e_{n+1}\|_p - \|e_n\|_p}.$$

Якщо $\delta \in \Delta_{r-1;p}$, то

$$\Omega\left(\delta; D^k; W^r_\infty \cap AM\right) = \left\|\frac{(r-1)!\left(\delta - \frac{1}{r!}\right) e_{r-1-k}}{(r-1-k)!\,\|e_{r-1}\|_p} + \frac{e_{r-k}}{(r-k)!}\right\|_q.$$

Відзначимо наступну геометричну властивість модуля неперервності.

Наслідок 5.5.2. *Нехай $k, r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant r-1$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $p \in \{1, \infty\}$. Тоді на кожному з інтервалів $\Delta_{n;p}$, $n \geqslant r-1$, функція $\Omega\left(\delta; D^k; W^r_\infty \cap AM\right)$ є опуклою донизу. Строга опуклість донизу має місце, коли $1 < q < \infty$.*

Перейдемо до результатів, які дають розв'язок задачі 5.1.1 на класі AM. Нехай $\mathcal{P}^n_+ := \mathcal{P}^n \cap AM$, $n \in \mathbb{N}$. Наступне твердження становить собою нерівність типу Маркова-Бернштейна-Нікольського для поліномів з $\mathcal{P}^n_+$.

Лема 5.5.1. *Нехай $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Тоді для будь-якого полінома $Q \in \mathcal{P}_+^n$ виконується нерівність:*

$$\left\|Q^{(k)}\right\|_q \leqslant \left\|e_n^{(k)}\right\|_q \|e_n\|_p^{-1} \|Q\|_p.$$

Зауваження 5.5.2. *Зауважимо, що лема 5.5.1 у випадку $p = q = \infty$ була встановлена в [279] і незалежно в [149]. Також, в [149] розглянуто випадок $p, q \in \{1, \infty\}$.*

Це твердження разом з теоремою 5.5.1 дозволяє отримати наступний результат.

Теорема 5.5.2. *Нехай $k, r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant r-1$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ (за виключенням випадку $k = q = 1$ і $p = \infty$). Тоді для довільних $A \geqslant \left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q \|e_{r-1}\|_p^{-1}$ і $f \in AM$ справджується точна нерівність*

$$\left\|f^{(k)}\right\|_q \leqslant A\|f\|_p + C_{p,q}^{k,r}(A) \left\|f^{(r)}\right\|_\infty, \tag{5.79}$$

де

$$C_{p,q}^{k,r}(A) = \sup_{y \in \mathcal{M}_r} \left(\left\|y^{(k)}\right\|_q - A\|y\|_p \right). \tag{5.80}$$

Зрозуміло, що якщо пара додатних чисел (A, B) міститься в $\Gamma_{AM}\left(D^k; L_\infty^r\right)$, то $A \geqslant \left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q \|e_{r-1}\|_p^{-1}$. Тому твердження теореми 5.5.2 можна записати у вигляді

$$\Gamma_{AM}\left(D^k; L_\infty^r\right) = \left\{ \left(A, C_{p,q}^{k,r}(A)\right) \;:\; A \geqslant \left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q \|e_{r-1}\|_p^{-1} \right\}.$$

Наступне твердження дає розв'язок задачі 5.1.1 на класі AM при $p, s \in \{1, \infty\}$ та $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

Теорема 5.5.3. *Нехай $p, s \in \{1, \infty\}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ і $k, r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant r-1$. Множина $\Gamma_{AM}\left(D^k; L_s^r\right)$ є непорожньою тоді і тільки тоді, коли*

$$1/p < k - 1/q \leqslant r - 1/s. \tag{5.81}$$

При виконанні умов (5.81), для будь-яких $A \geqslant \left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q \|e_{r-1}\|_p^{-1}$ і $f \in AM$ виконується точна нерівність

$$\left\|f^{(k)}\right\|_q \leqslant A\|f\|_p + D_{p,q,s}^{k,r}(A) \left\|f^{(r)}\right\|_s, \tag{5.82}$$

де

$$D_{p,q,s}^{k,r}(A) := \sup_{n \geqslant r} \frac{\left\|e_n^{(k)}\right\|_q - A\|e_n\|_p}{\left\|e_n^{(r)}\right\|_s}. \tag{5.83}$$

Відзначимо, що у випадку $p \in (0,1] \cup \{\infty\}$ і $s = \infty$ нерівності (5.79) та (5.82) збігаються. Тому $D^{k,r}_{p,q,\infty}(A) = C^{k,r}_{p,q}(A)$. Проте в (5.80) точна верхня межа береться на множині функцій $\mathcal{M}_r$, потужність якої дорівнює континуум, а в (5.83) константа $D^{k,r}_{p,q,\infty}(A)$ зображена у вигляді точної верхньої межі зліченої множини. Тому, теорему 5.5.3 можна вважати покращенням твердження теореми 5.5.2.

Вкажемо явний вираз для $D^{k,r}_{\infty,q,\infty}(A)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Для $n \geqslant r-1$ означимо

$$\tau^{k,r}_q(n) := \frac{1}{r}\left((n+1)\left\|e^{(k)}_n\right\|_q - (n+1-r)\left\|e^{(k)}_{n+1}\right\|_q\right).$$

Теорема 5.5.4. *Нехай $k, r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant r-1$, і $1 \leqslant q \leqslant \infty$ (окрім випадку $k = q = 1$). Тоді, якщо $\tau^{k,r}_q(n) \leqslant A \leqslant \tau^{k,r}_q(n+1)$, $n \geqslant r-1$, то*

$$D^{k,r}_{\infty,q,\infty}(A) = \frac{(n+1-r)!}{(n+1)!}\left(\left\|e^{(k)}_{n+1}\right\|_q - A\right).$$

При доведенні теореми 5.5.1 суттєву роль матиме наступне твердження.

Теорема 5.5.5. *Нехай $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ і $\delta > 0$. Тоді для будь-якої функції $f \in AM$ такої, що $\|f\|_p \leqslant \delta$ та $\left\|f^{(r)}\right\|_\infty \leqslant 1$, при кожному $l = 0, \ldots, r-1$ число змін знаку функції $y^{(l)}_\delta - f^{(l)}$ не перевищує 1.*

В наступному параграфі наведено доведення теорем 5.5.1 і 5.5.5 та наслідків 5.5.1 і 5.5.2. Доведенню інших результатів присвячено параграф 5.5.2.

5.5.1. Доведення теорем 5.5.1 і 5.5.5

Нехай $n, r \in \mathbb{N}$ та $\delta > 0$. Нагадаємо, що за означенням множин $\mathcal{M}^n_r$, якщо $y_\delta \in \mathcal{M}^n_r$, $n \geqslant r-1$, то $y^{(j)}_\delta(0) = 0$ для всіх $j = 0, \ldots, n-1$, $y^{(n+2)}_\delta(x) = 0$ для всіх $x \in [0,1]$ та $\left\|y^{(r)}_\delta\right\|_\infty = 1$.

Доведення теореми 5.5.5. Доведення теореми проведемо від супротивного. Припустимо, що існують функція $f \in W^r_\infty \cap AM$, для якої $\|f\|_p \leqslant \delta$, і число $l \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leqslant l \leqslant r-1$, такі, що

$$\nu\left(y^{(l)}_\delta - f^{(l)}\right) \geqslant 2, \tag{5.84}$$

де $\nu(w)$ позначає кількість змін знаку неперервної на $[0,1]$ функції w. Розглянемо функцію $g := y_\delta - f$ та оберемо $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant r-1$, таким чином, що $y_\delta \in \mathcal{M}^n_r$ (зрозуміло, що таке n є єдиним). Відзначимо деякі властивості функції g:

(1) $g^{(s)}(0) \leqslant 0$ для всіх $s = 0, \ldots, n-1$;

(2) $\nu\left(g^{(l)}\right) \geqslant 2$;

(3) $g^{(r)}(1) \geqslant 0$;

(4) $g^{(n+1)}$ не зростає.

Дійсно, властивості (1) і (4) є наслідками з абсолютної монотонності функції $f^{(l)}$ і зауваження, наведеного на початку параграфа. Властивість (2) є нерівністю (5.84), переписаною в термінах функції g. Справедливість властивості (3) випливає з нерівності

$$g^{(r)}(1) = y_\delta^{(r)}(1) - f^{(r)}(1) = \left\|y_\delta^{(r)}\right\|_\infty - \left\|f^{(r)}\right\|_\infty \geqslant 0.$$

Доведемо наступні допоміжні факти.

Лема 5.5.2. *Нехай $s \in \mathbb{Z}_+$, $s \leqslant n-1$, та $\nu\left(g^{(s)}\right) \geqslant 2$. Тоді існують точки ξ_{s+1} і η_{s+1}, $0 < \xi_{s+1} < \eta_{s+1} < 1$, для яких*

$$g^{(s+1)}\left(\xi_{s+1}\right) > 0 \qquad i \qquad g^{(s+1)}\left(\eta_{s+1}\right) < 0.$$

Лема 5.5.3. *Нехай $s \in \mathbb{Z}_+$, $s \leqslant n-1$, та існують точки ξ_s, η_s і ω_s, де $0 < \xi_s < \eta_s < \omega_s \leqslant 1$, для яких*

$$g^{(s)}\left(\xi_s\right) > 0, \qquad g^{(s)}\left(\eta_s\right) < 0 \qquad i \qquad g^{(s)}\left(\omega_s\right) \geqslant 0.$$

Тоді існують точки ξ_{s+1}, η_{s+1} і ω_{s+1}, $0 < \xi_{s+1} < \eta_{s+1} < \omega_{s+1} \leqslant 1$, такі, що

$$g^{(s+1)}\left(\xi_{s+1}\right) > 0, \qquad g^{(s+1)}\left(\eta_{s+1}\right) < 0 \qquad i \qquad g^{(s+1)}\left(\omega_{s+1}\right) \geqslant 0.$$

Доведення леми 5.5.2. Дійсно, за властивістю (1) функції g і вибору числа s, $g^{(s)}(0) \leqslant 0$. Крім того, за умовою леми, $\nu\left(g^{(s)}\right) \geqslant 2$. Тому нескладно бачити, що існують точки ξ_s і η_s, $0 < \xi_s < \eta_s \leqslant 1$, для яких

$$g^{(s)}\left(\xi_s\right) > 0 \qquad \text{i} \qquad g^{(s)}\left(\eta_s\right) < 0.$$

За теоремою Лагранжа, існують точки ξ_{s+1} та η_{s+1}, $0 < \xi_{s+1} < \eta_{s+1} < 1$, в яких

$$g^{(s+1)}\left(\xi_{s+1}\right) = \frac{g^{(s)}\left(\xi_s\right) - g^{(s)}(0)}{\xi_s} > 0 \quad \text{i} \quad g^{(s+1)}\left(\eta_{s+1}\right) = \frac{g^{(s)}\left(\eta_s\right) - g^{(s)}\left(\xi_s\right)}{\eta_s - \xi_s} < 0.$$

Таким чином, лема 5.5.2 доведена. $\square$

Доведення леми 5.5.3. Доведення цієї леми можна провести в повній аналогії з доведенням леми 5.5.2. □

Повернімося до доведення теореми 5.5.5. Розглянемо спочатку випадок, коли $n \neq r-1$. Покажемо, що існують точки ξ_r та η_r, $0 < \xi_r < \eta_r \leqslant 1$, в яких $g^{(r)}(\xi_r) > 0$ та $g^{(r)}(\eta_r) < 0$.

Для цього застосуємо лему 5.5.2 при $s = l$ та отримаємо, що існують точки ξ_{l+1} і η_{l+1}, $0 < \xi_{l+1} < \eta_{l+1} < 1$, в яких $g^{(l+1)}(\xi_{l+1}) > 0$ та $g^{(l+1)}(\eta_{l+1}) < 0$. Якщо тепер $l+1 < r$, то за властивістю (1), $g^{(l+1)}(0) \leqslant 0$ і, отже, $\nu\left(g^{(l+1)}\right) \geqslant 2$. Таким чином ми знову можемо застосувати лему 5.5.2 при $s = l+1$. Повторюючи цей ланцюжок міркувань, ми переконуємося в існуванні шуканих точок ξ_r і η_r.

Покажемо, що існують точки ξ_n, η_n і ω_n, $0 < \xi_n < \eta_n < \omega_n \leqslant 1$, в яких

$$g^{(n)}(\xi_n) > 0, \qquad g^{(n)}(\eta_n) < 0 \qquad \text{і} \qquad g^{(n)}(\omega_n) \geqslant 0.$$

Зрозуміло, що у випадку $n = r$, за властивістю (3) функції g ми можемо обрати $\omega_r = 1$. У випадку $r < n$ послідовно застосуємо лему 5.5.3 при $s = r$, $s = r+1$, …, $s = n-1$. В результаті отримаємо, що існують шукані точки ξ_n, η_n та ω_n. Але за теоремою Лагранжа, існують точки η_{n+1} і ω_{n+1}, $0 < \eta_{n+1} < \omega_{n+1} \leqslant 1$, в яких

$$g^{(n+1)}(\eta_{n+1}) = \frac{g^{(n+1)}(\eta_n) - g^{(n+1)}(\xi_n)}{\eta_n - \xi_n} < 0,$$

$$g^{(n+1)}(\omega_{n+1}) = \frac{g^{(n+1)}(\omega_n) - g^{(n+1)}(\eta_n)}{\omega_n - \eta_n} \geqslant 0.$$

Проте, останнє твердження суперечить властивості (4) функції g.

Розглянемо випадок $n = r-1$. Якщо $l < r-1$, то послідовно застосовуючи лему 5.5.2 можемо переконатися в існуванні точок ξ_r і η_r, $0 < \xi_r < \eta_r < 1$, в яких

$$g^{(r)}(\xi_r) > 0 \qquad \text{і} \qquad g^{(r)}(\eta_r) < 0.$$

В той же час $g^{(r)}(1) \geqslant 0$ за властивістю (3) функції g. Отже, $g^{(r)}(\eta_r) < 0$ і $g^{(r)}(1) \geqslant 0$, що суперечить властивості (4).

Залишається розглянути випадок, коли $l = r-1$. За властивістю (4), функція $g^{(r-1)}$ опукла вгору і, отже, має не більше двох змін знаку на відрізку $[0,1]$. При цьому нерівність (5.84) виконується лише в ситуації, коли $g^{(r-1)}(0) < 0$ і

$g^{(r-1)}(1) < 0$, а також існує точка $\xi \in (0,1)$, в якій $g^{(r-1)}(\xi) > 0$. За теоремою Лагранжа існує точка $\eta \in (\xi, 1)$ така, що $g^{(r)}(\eta) < 0$. Останнє суперечить властивості (3) функції g. Таким чином теорема 5.5.5 доведена. $\square$

Доведення теореми 5.5.1. Нехай $\delta > 0$ і функція $f \in W^r_\infty \cap AM$ є такою, що $\|f\|_p \leqslant \delta$. За теоремою 5.5.5, для довільного $l = 0, 1, \ldots, r-1$, число змін знаку різниці $y_\delta^{(l)} - f^{(l)}$ на відрізку $[0,1]$ не перевищує 1. Покажемо, що для всіх $l = 0, 1, \ldots, r-1$ справджується нерівність

$$\left\| f^{(l)} \right\|_\infty \leqslant \left\| y_\delta^{(l)} \right\|_\infty . \tag{5.85}$$

Для цього припустимо, що існує $l \in \{0, \ldots, r-1\}$ таке, що

$$\left\| y_\delta^{(l)} \right\|_\infty < \left\| f^{(l)} \right\|_\infty . \tag{5.86}$$

Якщо $l \leqslant r-2$ або $y_\delta \notin \mathcal{M}_r^{r-1}$, то $y_\delta^{(l)}(0) = 0$. За припущенням (5.86),

$$y_\delta^{(l)}(1) = \left\| y_\delta^{(l)} \right\|_\infty < \left\| f^{(l)} \right\|_\infty = f^{(l)}(1)$$

і для будь-якого $x \in [0,1]$ матимемо $y_\delta^{(l)}(x) \leqslant f^{(l)}(x)$, оскільки в іншому випадку різниця $y_\delta^{(l)} - f^{(l)}$ мала б не менше двох змін знаку на відрізку $[0,1]$. Отже, для будь-якого $x \in [0,1]$ отримаємо

$$y_\delta^{(l-1)}(x) = \int_0^x y_\delta^{(l)}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x f^{(l)}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f^{(l-1)}(x),$$

причому знак строгої нерівності має місце, якщо $x = 1$. Аналогічним чином можемо переконатися в тому, що $y_\delta^{l-2}(x) \leqslant f^{(l-2)}(x)$ для довільного $x \in [0,1)$ і $y_\delta^{(l-2)}(1) < f^{(l-2)}(1)$. Продовжуючи ці міркування, можемо переконатися в тому, що $y_\delta(1) < f(1)$ та $y_\delta(x) \leqslant f(x)$ для будь-якого $x \in [0,1)$. Тому $\delta = \|y_\delta\|_p < \|f\|_p$, що суперечить вибору функції f.

Нехай тепер $l = r-1$ і $y_\delta \in \mathcal{M}_r^{r-1}$. За аналогією з попереднім випадком, ми можемо переконатися в тому, що $y_\delta^{(r-1)}(0) > f^{(r-1)}(0)$. Крім того, в силу (5.86), $y_\delta^{(r-1)}(1) < f^{(r-1)}(1)$. Застосовуючи теорему Лагранжа, отримаємо, що існує точка $\eta \in (0,1)$, в якій $y_\delta^{(r)}(\eta) < f^{(r)}(\eta)$. Проте тоді

$$y_\delta^{(r)}(\eta) < f^{(r)}(\eta) \leqslant f^{(r)}(1) \leqslant 1 = y_\delta^{(r)}(1) = y_\delta^{(r)}(\eta),$$

що неможливо. Таким чином, нерівність (5.85) завжди виконується.

Тепер покажемо, що для всіх $l \in \{1, \ldots, r-1\}$,

$$\left\| f^{(l)} \right\|_1 \leqslant \left\| y_\delta^{(l)} \right\|_1 . \tag{5.87}$$

Дійсно, з щойно доведеної нерівності (5.85) і властивостей функції y_δ маємо:

$$\begin{aligned} \left\| f^{(l)} \right\|_1 &= \int_0^1 f^{(l)}(t)\,\mathrm{d}t = f^{(l-1)}(1) - f^{(l-1)}(0) \leqslant f^{(l-1)}(1) = \left\| f^{(l-1)} \right\|_\infty \\ &\leqslant \left\| y_\delta^{(l-1)} \right\|_\infty = y_\delta^{(l-1)}(1) = \int_0^1 y_\delta^{(l)}(t)\,\mathrm{d}t = \left\| y_\delta^{(l)} \right\|_1 . \end{aligned}$$

Зазначимо, що для довільної функції $g \in AM$, функція $g(1-\cdot)$ є її неспадним переставленням (див. [97, розділ 1]). Тоді, за нерівностями (5.85), (5.87) і теоремою 5.5.5, для довільних $1 \leqslant q \leqslant \infty$ і $l \in \{1, \ldots, r-1\}$ можна застосувати теорему 1.3.10 з [97]. Тому має місце нерівність

$$\left\| f^{(l)} \right\|_q \leqslant \left\| y_\delta^{(l)} \right\|_q .$$

Зокрема, при $l = k$ матимемо $\left\| f^{(k)} \right\|_q \leqslant \left\| y_\delta^{(k)} \right\|_q$, що й потрібно було довести. □

Доведення наслідку 5.5.2. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant r$, і $\delta_1, \delta_2 \in \Delta_{n;p}$, $\delta_1 < \delta_2$. Позначимо $\delta := \frac{\delta_1+\delta_2}{2}$. Раніше нами було зауважено, що функція $h(t) := \|g_{t,n}\|_p$, $t \in [0,1)$, є строго спадним бієктивним відображенням інтервалу $[0,1)$ на інтервал $\Delta_{n;p}$. Отже, існують числа λ_1, λ і λ_2, $0 \leqslant \lambda_2 < \lambda < \lambda_1 < 1$, для яких $h(\lambda_1) = \delta_1$, $h(\lambda) = \delta$ і $h(\lambda_2) = \delta_2$.

Покажемо, що $\lambda = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$. Дійсно, при $p \in \{1, \infty\}$ функція $h(t)$ є лінійною. Тому

$$h(\lambda) = \delta = \frac{h(\lambda_1) + h(\lambda_2)}{2} = h\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right),$$

а з монотонності $h(t)$ випливає, що $\lambda = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$.

Зауважимо тепер, що для довільного $x \in [0,1]$,

$$\frac{(n-r)!}{n!} e_n^{(k)}(x) - \frac{(n+1-r)!}{(n+1)!} e_{n+1}^{(k)}(x) = \frac{(n-r)!}{n!} e_n^{(k)}(x) \left(1 - \frac{(n+1-r)x}{n+1-k}\right) > 0.$$

Отже,

$$
\begin{aligned}
\Omega\left(\delta; D^k; W_\infty^r \cap AM\right) &= \left\| \frac{(n-r)!}{n!} e_n^{(k)} + \lambda \frac{(n-r)!}{n!} e_n^{(k)} \left(1 - \frac{(n+1-r)x}{n+1-k}\right) \right\|_q \\
&\leqslant \frac{1}{2} \left[\left\| \lambda_1 \frac{(n-r)!}{n!} e_n^{(k)} + (1-\lambda_1) \frac{(n+1-r)!}{(n+1)!} e_{n+1}^{(k)} \right\|_q \right. \\
&\quad \left. + \left\| \lambda_2 \frac{(n-r)!}{n!} e_n^{(k)} + (1-\lambda_2) \frac{(n+1-r)!}{(n+1)!} e_{n+1}^{(k)} \right\|_q \right] \\
&= \frac{1}{2} \Big(\Omega\left(\delta_1; D^k; W_\infty^r \cap AM\right) + \Omega\left(\delta_2; D^k; W_\infty^r \cap AM\right) \Big).
\end{aligned} \tag{5.88}
$$

Вочевидь, нерівність (5.88) обертається в рівність тоді і тільки тоді, коли $q \in \{1, \infty\}$. В інших випадках функція $\Omega\left(\delta; D^k; W_\infty^r \cap AM\right)$ строго опукла донизу на інтервалі $\Delta_{n;p}$, $n \geqslant r$.

Зауважимо, що наведені міркування з очевидними змінами можна перенести і на випадок $n = r - 1$. Тим самим твердження наслідку 5.5.2 доведено. $\square$

5.5.2. Доведення інших результатів підрозділу

Доведення леми 5.5.1. Будь-який поліном $Q \in \mathcal{P}_+^n$ має вид

$$
Q(x) = \sum_{m=0}^{n} Q_m e_m(x), \qquad x \in [0,1],
$$

де $Q_m \geqslant 0$, для всіх $m = 0, \ldots, n$. Тому для $1 \leqslant q \leqslant \infty$ матимемо

$$
\begin{aligned}
\left\| Q^{(k)} \right\|_q &= \left\| \sum_{m=k}^{n} Q_m e_m^{(k)} \right\|_q \leqslant \sum_{m=k}^{n} Q_m \left\| e_m^{(k)} \right\|_q \leqslant \max_{m=\overline{k,n}} \left\| e_m^{(k)} \right\|_q \sum_{m=k}^{n} Q_m \\
&\leqslant \max_{m=\overline{k,n}} \left\| e_m^{(k)} \right\|_q \|Q\|_\infty.
\end{aligned} \tag{5.89}
$$

В той же час, для довільного $x \in [0,1]$,

$$
Q(x) = \sum_{m=0}^{n} Q_m x^m \geqslant \sum_{m=0}^{n} Q_m x^n = \|Q\|_\infty x^n = \|Q\|_\infty e_n(x).
$$

Тому для $p \in \{1, \infty\}$,

$$
\|Q\|_p \geqslant \Big\| \, \|Q\|_\infty e_n \Big\|_p = \|Q\|_\infty \|e_n\|_p .
$$

Об'єднуючи останню нерівність з нерівністю (5.89), отримаємо

$$\left\|Q^{(k)}\right\|_q \leqslant \frac{\max\limits_{k\leqslant m\leqslant n}\left\|e_m^{(k)}\right\|_q}{\|e_n\|_p}\|Q\|_p.$$

Для завершення доведення залишається перевірити, що $\max\limits_{k\leqslant m\leqslant n}\left\|e_m^{(k)}\right\|_q = \left\|e_n^{(k)}\right\|_q$. Дійсно, для будь-якого $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant k$,

$$\left\|e_m^{(k)}\right\|_q = \frac{m!}{(m-k)!\,((m-k)q+1)^{1/q}}.$$

Послідовність $\left\{\left\|e_{m;b}^{(k)}\right\|_q\right\}_{m=k}^{\infty}$ монотонно зростає тоді і тільки тоді, коли для довільного $m \geqslant k$

$$1+\frac{k}{m-k+1} \geqslant \left(1+\frac{1}{m-k+1/q}\right)^{1/q}.$$

При цьому, остання нерівність випливає з нерівності Бернулі для показника q:

$$\left(1+\frac{k}{m-k+1}\right)^q \geqslant 1+\frac{kq}{m-k+1} \geqslant 1+\frac{1}{(m-k)/q+1/q} \geqslant 1+\frac{1}{m-k+1/q}. \quad \square$$

Доведення теореми 5.5.2. За теоремою 5.5.1 для довільної функції $f \in AM$ такої, що $f \notin \mathcal{P}_+^{r-1}$, справджується нерівність

$$\left\|f^{(k)}\right\|_q \leqslant \left\|y_\delta^{(k)}\right\|_q \cdot \left\|f^{(r)}\right\|_\infty,$$

де $\delta := \frac{\|f\|_p}{\left\|f^{(r)}\right\|_\infty}$ і функція y_δ була означена в (5.78). Тоді для $A \geqslant \left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q \|e_{r-1}\|_p^{-1}$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f^{(k)}}{\left\|f^{(r)}\right\|_\infty}\right\|_q &\leqslant A\,\|y_\delta\|_p + \left(\left\|y_\delta^{(k)}\right\|_q - A\,\|y_\delta\|_p\right)\\ &\leqslant A\frac{\|f\|_p}{\left\|f^{(r)}\right\|_\infty} + \sup_{y\in\mathcal{M}_r}\left(\left\|y^{(k)}\right\|_q - A\|y\|_p\right)\frac{\left\|f^{(r)}\right\|_\infty}{\left\|f^{(r)}\right\|_\infty}.\end{aligned}$$

З останньої нерівності випливає нерівність (5.79).

У випадку, коли $f \in \mathcal{P}_+^{r-1}$, з леми 5.5.1 і того факту, що $f^{(r)} \equiv 0$, отримаємо

$$\left\|f^{(k)}\right\|_q \leqslant \frac{\left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q}{\|e_{r-1}\|_p}\cdot\|f\|_p \leqslant A\|f\|_p + C_{p,q}^{k,r}(A)\left\|f^{(r)}\right\|_\infty.$$

Для завершення доведення теореми 5.5.2 і встановлення точності нерівності (5.79) покажемо, що $0 < C_{p,q}^{k,r}(A) < \infty$ для довільного $A \geqslant \left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q \|e_{r-1}\|_p^{-1}$.

Зазначимо, що

$$C^{k,r}_{p,q}(A) := \sup_{y\in\mathcal{M}_r}\left(\left\|y^{(k)}\right\|_q - A\|y\|_p\right) = \sup_{n\geqslant r-1}\sup_{y\in\mathcal{M}^n_r}\left(\left\|y^{(k)}\right\|_q - A\|y\|_p\right).$$

У випадку $n = r-1$ розглянемо функцію

$$G(\rho) = \left\|\rho e^{(k)}_{r-1} + \frac{e^{(k)}_r}{r!}\right\|_q - A\left\|\rho e_{r-1} + \frac{e_r}{r!}\right\|_p, \qquad \rho > 0.$$

Враховуючи неперервність G на $\mathbb{R}_+$ і умову $A \geqslant \left\|e^{(k)}_{r-1}\right\|_q \|e_{r-1}\|_p^{-1}$, отримаємо

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to\infty} G(\rho) &= \lim_{\rho\to\infty}\rho\left(\left\|e^{(k)}_{r-1} + \frac{e^{(k)}_r}{\rho r!}\right\|_q - A\left\|e_{r-1} + \frac{e_r}{\rho r!}\right\|_p\right)\\ &= \lim_{\rho\to\infty}\rho\Big(\left\|e^{(k)}_{r-1}\right\|_q - A\left\|e_{r-1}\right\|_p\Big) \leqslant 0.\end{aligned}$$

Отже,

$$\sup_{y\in\mathcal{M}^{r-1}_r}\left(\left\|y^{(k)}\right\|_q - A\|y\|_p\right) < \infty. \tag{5.90}$$

Покажемо, що $\sup\limits_{n\geqslant r}\sup\limits_{y\in\mathcal{M}^n_r}\left(\left\|y^{(k)}\right\|_q - A\|y\|_p\right) < \infty$. Вочевидь, для будь-якого $n > r-1$ величина

$$\sup_{y\in\mathcal{M}^n_r}\left(\left\|y^{(k)}\right\|_q - A\|y\|_p\right) = \sup_{0\leqslant\lambda<1}\left(\left\|g^{(k)}_{\lambda,n}\right\|_q - A\|g_{\lambda,n}\|_p\right) \tag{5.91}$$

є скінченною. Тому нам достатньо перевірити, що

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathcal{M}^n_r}\left(\left\|y^{(k)}\right\|_q - A\|y\|_p\right) < \infty. \tag{5.92}$$

Дійсно, для достатньо великих $n\in\mathbb{N}$ і будь-якої $y\in\mathcal{M}^n_r$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned}\left(\frac{(n+1-r)!}{(n+1)!}\left\|e^{(k)}_{n+1}\right\|_q - A\frac{(n-r)!}{n!}\|e_n\|_p\right) &\leqslant \left(\left\|y^{(k)}\right\|_q - A\|y\|_p\right)\\ &\leqslant \left(\frac{(n-r)!}{n!}\left\|e^{(k)}_{n}\right\|_q - A\frac{(n+1-r)!}{(n+1)!}\|e_{n+1}\|_p\right).\end{aligned}$$

За умовами теореми $1\leqslant r-k+1/q < r+1/p$, оскільки $r-k+1/q \leqslant r-1+1 \leqslant r+1/p$ і знак рівності в останній нерівності можливий тоді і тільки тоді, коли $k=q=1$ і $p=\infty$. Тому

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathcal{M}^n_r}\left(\left\|y^{(k)}\right\|_q - A\|y\|_p\right) &= \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n^{-r+k-1/q}}{q^{1/q}} - \frac{n^{-r-1/p}}{p^{1/p}}\right)\\ &= \limsup_{n\to\infty}\frac{n^{-r+k-1/q}}{q^{1/q}} = 0.\end{aligned}$$

Співставляючи (5.90), (5.91) і (5.92), отримаємо, що $C_{p,q}^{k,r}(A)$ є скінченною додатною константою, що завершує доведення теореми 5.5.2. $\square$

Доведення теореми 5.5.3. Вочевидь, $\|f+g\|_p = \|f\|_p+\|g\|_p$ для будь-яких двох функцій $f, g \in AM$, коли $p \in \{1,\infty\}$. За теоремою 8.2 [106, розділ 8], довільну функцію $f \in AM$ можна зобразити у вигляді суми ряду:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e_n(x), \qquad x \in [0,1],$$

з невід'ємними коефіцієнтами f_n, $n \in \mathbb{Z}_+$. Більш того, функцію f можна рівномірно наблизити послідовністю поліномів $\left\{\sum\limits_{n=0}^{N} f_n e_n\right\}_{N=0}^{\infty}$. Тому, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant r$, таке, що $\left\|f^{(k)} - \sum\limits_{n=k}^{N} f_n e_n^{(k)}\right\|_q < \varepsilon$. За лемою 5.5.1, для будь-якого $A \geqslant \left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q \|e_{r-1}\|_p^{-1}$ матимемо

$$\begin{aligned}
\left\|f^{(k)}\right\|_q &\leqslant \varepsilon + \left\|\sum_{n=k}^{N} f_n e_n^{(k)}\right\|_q \leqslant \varepsilon + \sum_{n=k}^{N} f_n \left\|e_n^{(k)}\right\|_q \\
&\leqslant \varepsilon + \frac{\left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q}{\|e_{r-1}\|_p} \sum_{n=k}^{r-1} f_n \|e_n\|_p + \sum_{n=r}^{N} f_n \Big(\left\|e_n^{(k)}\right\|_q - A\|e_n\|_p \Big) + A \sum_{n=r}^{N} f_n \|e_n\|_p \\
&\leqslant \varepsilon + A \sum_{n=k}^{N} f_n \|e_n\|_p + D_{p,q,s}^{k,r}(A) \sum_{n=r}^{N} f_n \left\|e_n^{(r)}\right\|_s \\
&\leqslant \varepsilon + A\|f\|_p + D_{p,q,s}^{k,r}(A) \left\|f^{(r)}\right\|_s .
\end{aligned}$$

За довільністю $\varepsilon > 0$, для доведення нерівності (5.82) залишається переконатися в скінченності і додатності величини $D_{p,q,s}^{k,r}(A)$. Зрозуміло, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left\|e_n^{(k)}\right\|_q}{q^{-1/q} n^{k-1/q}} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\|e_n\|_p}{p^{-1/p} n^{-1/p}} = 1 \quad \text{та} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\left\|e_n^{(r)}\right\|_s}{s^{-1/s} n^{r-1/s}} = 1.$$

З умов (5.81), що пов'язують між собою показники p, q, s і порядки k, r, отримаємо

$$k - 1/q \geqslant 1 - 1/q \geqslant 0 \geqslant -1/p.$$

При цьому, $k - 1/q = -1/p$ в тому і тільки тому випадку, коли $k = 1$, $p = \infty$ і $q = 1$. Проте тоді $\|e_n'\|_1 \leqslant \|e_n\|_\infty$. Тому для довільного $A \geqslant 1$, $D_{p,q,s}^{k,r}(A) \leqslant 0$ при всіх $n \geqslant 2$, і $\Gamma_{AM}\left(D^1; L_s^r\right) = \varnothing$.

Нехай далі $k-1/q>-1/p$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|e_n^{(k)}\right\|_q - A\left\|e_n\right\|_p}{q^{-1/q}n^{k-1/q}}=1.$$

У випадку, коли $k-1/q>r-1/s$, $D_{p,q,s}^{k,r}(A)=\infty$ і, отже, $\Gamma_{AM}\left(D^k;L_s^r\right)=\varnothing$.

Якщо $k-1/q<r-1/s$, то супремум в означенні величини $D_{p,q,s}^{k,r}(A)$ досягається, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left\|e_n^{(k)}\right\|_q - A\left\|e_n\right\|_p\right)\left\|e_n^{(r)}\right\|_s^{-1}=0$.

У випадку $k-1/q=r-1/s$ неважко бачити, що

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left\|e_n^{(k)}\right\|_q - A\left\|e_n\right\|_p\right)\left\|e_n^{(r)}\right\|_s^{-1}=s^{1/s}q^{-1/q}.$$

Отже, $D_{p,q,s}^{k,r}(A)$ є скінченою і додатною. □

Доведення теореми 5.5.4. Доведемо, що послідовність чисел $\left\{\tau_q^{k,r}(n)\right\}_{n=r-1}^{\infty}$ неспадна. Для цього спочатку покажемо, що $\tau_q^{k,r}(r-1)\leqslant\tau_q^{k,r}(r)$. Цю нерівність можна переписати в наступному вигляді

$$\frac{r-k}{r+1}\left(\frac{r-k+1/q}{r-1-k+1/q}\right)^{1/q}\leqslant 1-\frac{1}{r+1-k}\left(\frac{r-k+1/q}{r+1-k+1/q}\right)^{1/q}. \tag{5.93}$$

За нерівністю Бернулі для показника $1/q$,

$$\left(\frac{r-k+1/q}{r-1-k+1/q}\right)^{1/q}\leqslant\frac{r-1-k+2/q}{r-1-k+1/q},$$

$$\left(\frac{r-k+1/q}{r+1-k+1/q}\right)^{1/q}\leqslant\frac{r+1-k}{r+1-k+1/q}.$$

Тому, ми доведемо (5.93), як щойно переконаємося в справедливості нерівності

$$\frac{(r-k)(r-1-k+2/q)}{(r+1)(r-1-k+1/q)}\leqslant\frac{r-k+1/q}{r+1-k+1/q}.$$

Зрозуміло, що остання нерівність рівносильна нерівності

$$\frac{1}{q}+rk-k^2+\frac{k}{q}-r^2k+\frac{r^2}{q}+2rk^2+\frac{r}{q^2}+\frac{3k^2}{q}-k^3-\frac{4rk}{q}-\frac{2k}{q^2}-\frac{1}{q^2}\leqslant 0,$$

яку достатньо довести для $r=k+1$. В цьому випадку вона набуває вигляд

$$\frac{2}{q}\leqslant\frac{k}{q}+\frac{k}{q^2},$$

а тому завжди виконується для $k\geqslant 2$.

Розглянемо тепер випадок $k=1$ і $r=2$. В цій ситуації нерівність (5.93) можна переписати у вигляді

$$\frac{2}{3} \leqslant \frac{2}{(1+q)^{1/q}} - \frac{1}{(1+2q)^{1/q}}. \tag{5.94}$$

Покажемо, що нерівність (5.94) виконується для всіх $q \in [1,\infty]$. Для цього розглянемо функцію $f(q) = \frac{2}{(1+q)^{1/q}} - \frac{1}{(1+2q)^{1/q}}$. Знайдемо її похідну

$$\begin{aligned} f'(q) &= \frac{2}{(1+q)^{1/q}}\left(\frac{\ln(1+q)}{q^2} - \frac{1}{q(1+q)}\right) - \frac{1}{(1+2q)^{1/q}}\left(\frac{\ln(1+2q)}{q^2} - \frac{2}{q(1+2q)}\right) \\ &= \frac{2}{q}\left(\frac{1}{(1+q)^{1/q}}\left(\frac{\ln(1+q)}{q} - \frac{1}{1+q}\right) - \frac{1}{(1+2q)^{1/q}}\left(\frac{\ln(1+2q)}{2q} - \frac{1}{1+2q}\right)\right). \end{aligned}$$

Зафіксуємо q і означимо функцію

$$\rho(x) := \frac{\frac{\ln(1+qx)}{qx} - \frac{1}{1+qx}}{(1+qx)^{1/q}}, \qquad x \in [1,2].$$

Має місце співвідношення $f'(q) = \frac{2\rho(1)-2\rho(2)}{q}$. Доведемо, що функція ρ спадає на відрізку $[1,2]$. Для цього знайдемо її похідну:

$$\rho'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x(1+qx)} + \frac{q}{(1+qx)^2} - \frac{\ln(1+qx)}{qx^2}\right)(1+qx) - \left(\frac{\ln(1+qx)}{qx} - \frac{1}{1+qx}\right)}{(1+qx)^{1+1/q}}.$$

Для того, щоб показати, що $\rho'(x) \leqslant 0$ для $x \in [1,2]$, переконаємося в справедливості нерівності

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1+q}{1+qx}}{\frac{1}{qx} + \frac{1+qx}{qx^2}} - \ln(1+qx) \leqslant 0.$$

Позначимо ліву частину останньої нерівності через $w(x)$ і продиференціюємо її

$$w'(x) = -\frac{\frac{1}{x^2} + \frac{(1+q)q}{(1+qx)^2}}{\frac{1}{qx} + \frac{1+qx}{qx^2}} + \frac{\left(\frac{1}{x} + \frac{1+q}{1+qx}\right)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{qx^2} + \frac{2}{qx^3}\right)}{\left(\frac{1}{qx} + \frac{1+qx}{qx^2}\right)^2} - \frac{q}{1+qx}.$$

Покажемо, що $w'(x) \leqslant 0$. Для цього необхідно і достатньо показати, що

$$\frac{1}{qx^3} \leqslant \frac{(1+q)((1+q)x+1)}{(1+qx)^2 x} + \frac{1}{q(1+qx)x^3}.$$

Оскільки $x \in [1,2]$, то остання нерівність завжди виконується. Отже, функція w спадає. Доведемо тепер, що $w(1) \leqslant 0$. Нескладно перевірити, що величина

$$w(1) = \frac{2q}{2+q} - \ln(1+q)$$

спадає за змінною q і, більш того, $w(1) \leqslant 2/3 - \ln 2 \leqslant 0$. Тому $\rho(x)$ спадає за x, а $f(q)$ зростає за q. Таким чином, нерівність (5.94) доведена.

Для доведення нерівності $\tau_q^{k,r}(n) \leqslant \tau_q^{k,r}(n+1)$ для всіх $n \geqslant r$ необхідно і достатньо показати, що справджується нерівність

$$\begin{gathered}(n+1-k)\left(\frac{n+1-k+1/q}{n-k+1/q}\right)^{1/q} \\ +(n+2-r)\frac{n+2}{n+2-k}\left(\frac{n-k+1+1/q}{n-k+2+1/q}\right)^{1/q} \leqslant 2n+3-r.\end{gathered} \tag{5.95}$$

За нерівністю Бернулі для показника $1/q$,

$$\left(\frac{n+1-k+1/q}{n-k+1/q}\right)^{1/q} \leqslant \frac{n-k+2/q}{n-k+1/q} \quad \text{і} \quad \left(\frac{n+2-k+1/q}{n+2-k+1/q}\right)^{1/q} \leqslant \frac{n+2-k}{n+2-k+1/q}.$$

Тому нерівність (5.95) випливає з нерівності

$$(n+1-k)\frac{n-k+2/q}{n-k+1/q} + (n+2-r)\frac{n+2}{n-k+2+1/q} \leqslant 2n+3-r.$$

В свою чергу, останню нерівність достатньо довести лише для $r = k+1$, тобто

$$(n+1-k)\frac{n-k+2/q}{n-k+1/q} + (n+1-k)\frac{n+2}{n-k+2+1/q} \leqslant 2n+2-k,$$

яка, як нескладно переконатися, виконується, оскільки $1 \leqslant k$.

Перейдемо безпосередньо до доведення твердження теореми 5.5.4. За теоремою 5.5.3, для довільного $A \geqslant \left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q$ нерівність (5.82) при $p = s = \infty$ обертає в рівність одна з функцій $\{e_n(x)\}_{n=r}^{\infty}$. Для $n \geqslant r$ розглянемо величини

$$d(n) := d_q^{k,r}(n) := \frac{(n-r)!}{n!}\left(\left\|e_n^{(k)}\right\|_q - A\right).$$

Неважко бачити, що якщо для деякого $n \geqslant r$, $A \leqslant \tau_q^{k,r}(n)$, то $d(n+1) \leqslant d(n)$. Отже, $d(m) \leqslant d(n)$ для всіх $m \geqslant n$. Якщо ж $A \geqslant \tau_q^{k,r}(n)$, $n \geqslant r$, то $d(n) \leqslant d(n+1)$ і $d(n) \leqslant d(m)$ для всіх $m \geqslant n$. Таким чином, якщо $A \in [\tau_q^{k,r}(n), \tau_q^{k,r}(n+1)]$, де $n \geqslant r-1$, то $D_{\infty,q,\infty}^{k,r}(A) = d(n+1)$. Це спостереження завершує доведення. □

5.6. Задача Ландау-Колмогорова для кратно монотонних на відрізку функцій

В цьому підрозділі наведено результати стосовно розв'язання задач Ландау-Колмогорова 5.1.3 і 5.1.4 для класу кратно монотонних функцій, означених на скінченному відрізку. Наведені тут результати опубліковано в [151, 153]. Надалі для зручності будемо розглядати функції, означені на відрізку $[0,1]$, а тому будемо опускати позначення відрізку $[0,1]$ в символах просторів $L_p([0,1])$, $L_p^r([0,1])$, класів $W_p^r([0,1])$ та норми $\|\cdot\|_{L_p([0,1])}$.

Означення 5.6.1. *Нехай $m \in \mathbb{Z}_+$. Невід'ємна неспадна функція $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ називається m-кратно монотонною на $[0,1]$, якщо її похідні $x^{(1)}, \dots, x^{(m-1)}$ існують та неспадають на $[0,1]$.*

Через MM^m будемо позначати множину m-кратно монотонних функцій. Для $r, m \in \mathbb{N}$ і $1 \leqslant s \leqslant \infty$ нехай $L_s^{r,m} := L_s^r \cap MM^m$ та $W_s^{r,m} := W_s^r \cap MM^m$. Для заданих чисел $n \in \mathbb{N}$ і $c \in (0,1]$ означимо

$$e_n(t) := \frac{t^n}{n!} \quad \text{та} \quad \varphi_{n;c}(t) := \frac{(t-1+c)_+^n}{n!}, \quad t \in [0,1].$$

За означенням, $e_n \equiv \varphi_{n;1}$. Нехай також $e_0 \equiv 1$. Означимо множину індексів

$$I := \{(\lambda, c) \in \mathbb{R}_+ \times (0,1] \ : \ \lambda = 0 \text{ для всіх } c < 1\}$$

і через Θ_n позначимо множину функцій $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$, які можна зобразити у вигляді $\psi = \lambda e_{n-1} + \varphi_{n;c}$, $(\lambda, c) \in I$. Зрозуміло, що для $\delta > 0$ і $1 \leqslant p \leqslant \infty$ існує єдина функція $\psi = \psi_{n,\delta;p} \in \Theta_n$ така, що

$$\|\psi_{n,\delta;p}\|_p = \delta. \tag{5.96}$$

В деяких випадках функцію $\psi_{n,\delta;p}$ можна вказати у явному вигляді. Наприклад, якщо обрати $\delta \leqslant \frac{1}{n!(np+1)^{1/p}}$, то

$$\psi_{n,\delta;p} = \phi_{n;c}, \qquad \text{де} \quad c = \left(\delta n!(np+1)^{1/p}\right)^{\frac{1}{n+1/p}}.$$

Також, якщо $p \in \{1, \infty\}$, то для всіх $\delta > \frac{1}{n!(np+1)^{1/p}}$ маємо

$$\psi_{n,\delta;p} = e_n + \frac{n!\,(n+1/p)^{1/p}\,\delta - 1}{n+1/p}\, e_{n-1}.$$

Основні результати підрозділу 5.6 містяться в наступних твердженнях.

Теорема 5.6.1. *Нехай $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$, $m \in \{r-2, r-1, r\}$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$. Тоді*

$$\Omega\left(\delta; D^k : L_p \to L_q; W_\infty^{r,m}\right) = \left\|\psi_{r,\delta;p}^{(k)}\right\|_q, \tag{5.97}$$

де функція $\psi_{r,\delta;p}$ задана (5.96). *Більш того,*

$$\Omega\left(\delta; D^{r-1}: L_p \to L_q; W_\infty^{r,r-1}\right) = \Omega\left(\delta; D^{r-1}: L_p \to L_q; W_\infty^{r,r}\right). \qquad (5.98)$$

Зауваження 5.6.1. *Твердження теореми 5.6.1 можна поширити і на більш загальний випадок, коли замість L_p-норми функції береться довільна строго монотонна функція, а замість L_q-норми – норма Люксембурга (див. підрозділ 5.3).*

Теорема 5.6.2. *Нехай $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$, і $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тоді для всіх $\delta > 0$*

$$\begin{aligned} \Omega\left(\delta; D^{r-2}: L_p \to L_\infty; W_\infty^{r,r-2}\right) &= \Omega\left(\delta; D^{r-2}: L_p \to L_\infty; W_\infty^{r,r-1}\right), \\ \Omega\left(\delta; D^{r-1}: L_p \to L_\infty; W_\infty^{r,r-2}\right) &= \Omega\left(\delta; D^{r-1}: L_p \to L_\infty; W_\infty^{r,r-1}\right), \end{aligned}$$

а у випадку $r \geqslant 3$,

$$\Omega\left(\delta; D^{r-2}: L_p \to L_1; W_\infty^{r,r-2}\right) = \Omega\left(\delta; D^{r-2}: L_p \to L_1; W_\infty^{r,r-1}\right).$$

Теореми 5.6.1 і 5.6.2 дозволяють розв'язати задачу 5.1.3 на класах $L_\infty^{r,r}$, $L_\infty^{r,r-1}$ і частково на класі $L_\infty^{r,r-2}$.

Нехай $\mathcal{P}_+^{n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, є множиною поліномів степені не вище за n, які невід'ємні на $[0,1]$ разом зі своїми похідними до порядку m включно. Спочатку встановимо нерівність типу Маркова-Нікольського для поліномів $P \in \mathcal{P}_+^{n,n-1}$.

Теорема 5.6.3. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, і $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Тоді для всіх $Q \in \mathcal{P}_+^{n,n-1}$ виконується точна нерівність*

$$\left\|Q^{(k)}\right\|_q \leqslant \frac{\left\|e_n^{(k)}\right\|_q}{\|e_n\|_p} \|Q\|_p. \qquad (5.99)$$

Розглянемо допоміжну функцію. Для $k, r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant r-1$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ і для $A \geqslant \left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q \|e_{r-1}\|_p^{-1}$ означимо

$$B_{p,q}^{k,r}(A) := \sup_{\psi \in \Theta_r} \left(\left\|\psi^{(k)}\right\|_q - A\|\psi\|_p \right).$$

Важлива властивість введеної величини полягає в наступному.

Твердження 5.6.1. *Нехай $k, r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant r-1$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Тоді для всіх $A \geqslant \left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q \|e_{r-1}\|_p^{-1}$ величина $B_{p,q}^{k,r}(A)$ скінченна і невід'ємна.*

В деяких ситуаціях ми можемо вказати явний вираз для функції $B^{k,r}_{p,q}(A)$.

Твердження 5.6.2. *Нехай $k, r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant r-1$, $p \in \{1,\infty\}$ і $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Тоді для всіх $A \geqslant \left\|e^{(k)}_{r-1}\right\|_q \|e_{r-1}\|_p^{-1}$,*

$$B^{k,r}_{p,q}(A) = \lambda(1-\lambda)^{-1+1/\lambda} \left\|e^{(k)}_r\right\|_q^{1/\lambda} \|e_r\|_p^{1-1/\lambda} A^{1-1/\lambda}, \qquad \lambda = \frac{k-1/q+1/p}{r+1/p}.$$

Наступне твердження дає розв'язок задачі 5.1.4.

Теорема 5.6.4. *Нехай $r \in \mathbb{N}$, $m \in \{r-2, r-1, r\}$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Тоді для всіх $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant r-1$,*

$$\Gamma_{MM^m}\left(D^k : L_p \to L_q; L^r_\infty\right) = \left\{\left(A, B^{k,r}_{p,q}(A)\right) \;:\; A \geqslant \left\|e^{(k)}_{r-1}\right\|_q \|e_{r-1}\|_p^{-1}\right\}.$$

Більш того,

$$\Gamma_{MM^{r-1}}\left(D^{r-1} : L_p \to L_q; L^r_\infty\right) = \Gamma_{MM^r}\left(D^{r-1} : L_p \to L_q; L^r_\infty\right).$$

Теорема 5.6.5. *Нехай $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$, і $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тоді для всіх $\delta > 0$,*

$$\begin{aligned}
\Gamma_{MM^{r-2}}\left(D^{r-2} : L_p \to L_\infty; L^r_\infty\right) &= \Gamma_{MM^{r-1}}\left(D^{r-2} : L_p \to L_\infty; L^r_\infty\right), \\
\Gamma_{MM^{r-2}}\left(D^{r-1} : L_p \to L_\infty; L^r_\infty\right) &= \Gamma_{MM^{r-1}}\left(D^{r-1} : L_p \to L_\infty; L^r_\infty\right),
\end{aligned}$$

а у випадку $r \geqslant 3$,

$$\Gamma_{MM^{r-2}}\left(D^{r-2} : L_p \to L_1; L^r_\infty\right) = \Gamma_{MM^{r-1}}\left(D^{r-2} : L_p \to L_1; L^r_\infty\right).$$

Також, наведемо результат роботи [151] щодо розв'язку задачі 5.1.3 у випадку, коли норма старшої похідної кратно монотонної функції береться в ідеальній решітці (див. означення 5.2.1).

Теорема 5.6.6. *Нехай $p, q \in \{1, \infty\}$ і $k, r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant r-1$, E – ідеальна решітка на $[0,1]$, E^1 – асоційований простір до E, причому $\Delta_A \in E^1$ для всіх $A > 0$, де*

$$\Delta_A(t) := \max\left\{0; \frac{(1-t)^{r-k-1+1/q}}{(r-k-1+1/q)!} - A\cdot\frac{(1-t)^{r-1+1/p}}{(r-1+1/p)!}\right\}, \qquad t \in [0,1].$$

Тоді

$$\Gamma_{MM^r}\left(D^k : L_p \to L_q; L^r_E\right) := \left\{(A, B) \;:\; A \geqslant \frac{(r-1+1/p)!}{(r-k-1+1/q)!},\; B \geqslant \|\Delta_A\|_{E^1}\right\}.$$

5.6.1. Властивості порівнянь кратно монотонних функцій

Розпочнемо з декількох додаткових результатів. Через $\nu(z)$ позначимо число змін знаку функції $z : [0,1] \to \mathbb{R}$ на відрізку $[0,1]$.

Лема 5.6.1. *Нехай $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$, $m \in \{r-2, r-1, r\}$ і $\psi \in \Theta_r$. Тоді для всіх $x \in W_\infty^{r,m}$ і $j = 0, \ldots, m$ різниця $\nu\left(x^{(j)} - \psi^{(j)}\right) \leqslant 1$.*

Доведення. Для доведення застосуємо ідеї роботи [186]. Нехай функція $\psi \in \Theta_r$ є заданою. За означенням, існує пара $(\lambda, c) \in I$ така, що $\psi = \lambda e_{r-1} + \phi_{r;c}$. Отже виконуються наступні рівності:

$$\psi^{(j)}(t) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, r-2 \;\text{ і }\; t \in [0, 1-c], \tag{5.100}$$

$$\psi^{(r)}(t) = \left\|\psi^{(r)}\right\|_\infty = 1, \qquad t \in [1-c, 1].$$

Покажемо, що для всіх $j = 0, 1, \ldots, r-2$ та $x \in W_\infty^{r,m}$ різниця $x^{(j)} - \psi^{(j)}$ має щонайбільше одну зміну знаку на відрізку $[0,1]$. Для цього розглянемо функцію

$$g(t) := x(t) - \psi(t), \qquad t \in [0,1],$$

і припустимо, що $g^{(j)}$ має не менше двох змін знаку на $[0,1]$. Оскільки $j \leqslant r-2$ і $m \geqslant r-2$, то функція $x^{(j)}$ невід'ємна на $[0,1]$. Тоді за властивістю (5.100) маємо

$$g^{(j)}(t) = x^{(j)}(t) \geqslant 0 \quad \text{для всіх} \quad t \in [0, 1-c]. \tag{5.101}$$

За припущенням існують точки ξ_j, η_j, $1-c < \xi_j < \eta_j \leqslant 1$, такі, що

$$g^{(j)}\left(\xi_j\right) < 0 \qquad \text{і} \qquad g^{(j)}\left(\eta_j\right) > 0.$$

Застосовуючи теорему Лагранжа з (5.101) та останніх співвідношень робимо висновок, що існують точки ξ_{j+1}, η_{j+1}, $1-c < \xi_{j+1} < \eta_{j+1} < 1$, в яких

$$g^{(j+1)}(\xi_{j+1}) = \frac{g^{(j)}(\xi_j) - g^{(j)}(1-c)}{\xi_j - 1 + c} < 0,$$

$$g^{(j+1)}(\eta_{j+1}) = \frac{g^{(j)}(\eta_j) - g^{(j)}(\xi_j)}{\eta_j - \xi_j} > 0.$$

Якщо $j+1 < r-1$, то $g^{(j+1)}(t) = x^{(j+1)}(t) \geqslant 0$ для будь-якого $t \in [0, 1-c]$ і функція $g^{(j+1)}$ має не менше двох змін знаку на $[0,1]$. Повторюючи ці аргументи можна довести, що функції $g^{(j+1)}, \dots, g^{(r-2)}$ також мають щонайменше дві зміни знаку на $[0,1]$. Крім того, існують ξ_{r-1}, η_{r-1}, $1-c < \xi_{r-1} < \eta_{r-1} < 1$, такі, що

$$g^{(r-1)}(\xi_{r-1}) < 0 \quad \text{і} \quad g^{(r-1)}(\eta_{r-1}) > 0.$$

Оскільки $x^{(r-1)}$ абсолютно неперервна на $[0,1]$, то

$$\int_{\xi_{r-1}}^{\eta_{r-1}} g^{(r)}(t)\,\mathrm{d}t = g^{(r-1)}\left(\eta_{r-1}\right) - g^{(r-1)}\left(\xi_{r-1}\right) > 0.$$

З іншого боку, за вибором функції x, маємо

$$\int_{\xi_{r-1}}^{\eta_{r-1}} g^{(r)}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\xi_{r-1}}^{\eta_{r-1}} \left(x^{(r)}(t) - \psi^{(r)}(t)\right)\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\left\|x^{(r)}\right\|_\infty - 1\right)(\eta_{r-1} - \xi_{r-1}) \leqslant 0,$$

що суперечить попередній нерівності.

У випадку $r-1 \leqslant j \leqslant m$ твердження леми є тривіальним. Лема доведена. $\square$

Лема 5.6.2. *Нехай $k, r \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leqslant k \leqslant r-1$, $r \geqslant 2$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ та $\psi \in \Theta_r$. Тоді для довільної функції $x \in W_\infty^{r,r-2}$ такої, що $\|x\|_p \leqslant \|\psi\|_p$, виконується нерівність*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|\psi^{(k)}\right\|_\infty. \tag{5.102}$$

Доведення. Спочатку доведемо лему для $k \leqslant r-3$. Припустимо, що

$$\left\|x^{(k)}\right\|_\infty > \left\|\psi^{(k)}\right\|_\infty.$$

Оскільки $x, \psi \in MM^{r-2}$, то останню нерівність можна переписати у вигляді

$$x^{(k)}(1) - \psi^{(k)}(1) > 0. \tag{5.103}$$

В той же час, для $t \in [0, 1-c]$ маємо $x^{(k)}(t) \geqslant 0 = \psi^{(k)}(t)$. Покажемо, що існує точка $\xi \in (1-c, 1)$, в якій $x^{(k)}(\xi) < \psi^{(k)}(\xi)$. Дійсно, нехай $x^{(k)}(t) \geqslant \psi^{(k)}(t)$ для всіх $t \in [0,1]$. Тоді за формулою Тейлора отримаємо, що для $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \ldots + \frac{x^{(k-1)}(0)t^{k-1}}{(k-1)!} + \int_0^t \frac{(t-u)^{k-1}}{(k-1)!} x^{(k)}(u)\,\mathrm{d}u \\ &\geqslant \int_0^t \frac{(t-u)^{k-1}}{(k-1)!} \psi^{(k)}(u)\,\mathrm{d}u = \psi(t). \end{aligned}$$

Отже, в силу нерівності (5.103) і неперервності функцій $x^{(k)}$ і $\psi^{(k)}$ отримаємо, що $x(1) > \psi(1)$. Звідси випливає нерівність $\|x\|_p > \|\psi\|_p$, яка суперечить вибору x.

Таким чином ми довели, що $x^{(k)}(1-c) \geqslant \psi^{(k)}(1-c)$, $x^{(k)}(1) > \psi^{(k)}(1)$ та існує така точка $\xi \in (1-c, 1)$, в якій $x^{(k)}(\xi) < \psi^{(k)}(\xi)$. Це показує, що різниця $x^{(k)} - \psi^{(k)}$ має щонайменше дві зміни знаку на відрізку $[0,1]$, що суперечить лемі 5.6.1. Тому нерівність (5.102) виконується для всіх $k \leqslant r-3$.

Тепер доведемо нерівність (5.102) для $k = r-2$. Припустимо супротивне:

$$\left\|x^{(r-2)}\right\|_\infty > \left\|\psi^{(r-2)}\right\|_\infty .$$

Нехай $\xi \in [0,1]$ є точкою максимуму функції $x^{(r-2)}$. Нехай також $\psi = \lambda e_{r-1} + \phi_{r;c}$ для деякої пари $(\lambda, c) \in I$. З останньої нерівності випливає, що

$$x^{(r-2)}(\xi) > \frac{c^2}{2} + \lambda. \tag{5.104}$$

Розглянемо три випадки: $\xi = 0$, $\xi = 1$ та $\xi \in (0,1)$.

(1) Нехай $\xi = 0$. Тоді для всіх $t \in [0, c]$,

$$x^{(r-2)}(t) > \tau_1(t) := \frac{1}{2}(c-t)^2 + \lambda(1-t). \tag{5.105}$$

Дійсно, за нерівністю (5.104) і невід'ємністю $x^{(r-2)}$ ми отримаємо

$$x^{(r-2)}(0) > \frac{c^2}{2} + \lambda = \tau_1(0) \quad \text{та} \quad x^{(r-2)}(c) \geqslant 0 = \tau_1(c).$$

Припустимо, що існує точка $\eta \in (0,c)$ така, що $x^{(r-2)}(\eta) \leqslant \tau_1(\eta)$. Тоді за теоремою Лагранжа існують точки ξ_1, η_1, $0 < \xi_1 < \eta < \eta_1 < c$, в яких $x^{(r-1)}(\xi_1) < \tau_1'(\xi_1)$ і $x^{(r-1)}(\eta_1) \geqslant \tau_1'(\eta_1)$. Таким чином,

$$\begin{aligned} \int_{\xi_1}^{\eta_1} x^{(r)}(t)\,\mathrm{d}t &= x^{(r-1)}(\eta_1) - x^{(r-1)}(\xi_1) > \tau_1'(\eta_1) - \tau_1'(\xi_1) = \\ &= \eta_1 - \xi_1 = \int_{\xi_1}^{\eta_1} \left\|\psi^{(r)}\right\|_\infty \mathrm{d}t \geqslant \int_{\xi_1}^{\eta_1} x^{(r)}(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

що неможливо. Отже, виконується нерівність (5.105). З невід'ємності функції $x^{(r-2)}$ на відрізку $[0,1]$ маємо

$$\left\|x^{(r-3)}\right\|_\infty \geqslant \left\|x^{(r-2)}\right\|_1 > \int_0^c \tau_1(u)\,\mathrm{d}u = \frac{c^3}{6} + \lambda\frac{c^2}{2} = \left\|\psi^{(r-3)}\right\|_\infty .$$

Проте остання нерівність суперечить нерівності (5.102) з $k = r-3$.

(2) Випадок, коли $\xi = 1$, доводиться аналогічним чином до випадку (1).

(3) Нехай $\xi \in (0,1)$. Оскільки $x^{(r-1)}(\xi) = 0$, то для всіх $t \in [0,1]$

$$x^{(r-2)}(t) \geqslant x^{(r-2)}(\xi) - \frac{1}{2}(t-\xi)^2 > \frac{c^2}{2} + \lambda - \frac{1}{2}(t-\xi)^2.$$

Отже,

$$\begin{aligned}\left\|x^{(r-3)}\right\|_\infty &\geqslant \left\|x^{(r-2)}\right\|_1 \geqslant \inf_{\eta\in[0,1-c]} \int_\eta^{\eta+c} x^{(r-2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{c^3}{2} + \lambda c - \frac{1}{2}\int_0^c t^2\,\mathrm{d}t > \frac{c^3}{6} + \lambda c = \left\|\psi^{(r-3)}\right\|_\infty,\end{aligned}$$

що також неможливо.

Для завершення доведення леми, перевіримо справедливість нерівності (5.102) для $k = r-1$. Припустимо супротивне: існує точка $\xi \in [0,1]$, в якій

$$\left|x^{(r-1)}(\xi)\right| > \lambda + c = \left\|\psi^{(r-1)}\right\|_\infty,$$

де $(\lambda, c) \in I$ є парою чисел, для яких $\psi = \lambda e_{r-1} + \phi_{r;c}$. Розглянемо два випадки: $x^{(r-1)}(\xi) > 0$ і $x^{(r-1)}(\xi) < 0$.

(1) Якщо $x^{(r-1)}(\xi) > 0$, то $x^{(r-1)}(t) \geqslant x^{(r-1)}(\xi) - |\xi - t|$ для всіх $t \in [0,1]$. Зауважимо, що $[\xi - c, \xi] \cap [0, 1-c] \neq \varnothing$. З останньої нерівності випливає, що для кожного $\alpha \in [\xi - c, \xi] \cap [0, 1-c]$

$$\begin{aligned}x^{(r-2)}(\alpha + c) &\geqslant x^{(r-2)}(\alpha + c) - x^{(r-2)}(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha+c} x^{(r-1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant x^{(r-1)}(\xi)c - \inf_{\eta\in[0,1-c]}\int_\eta^{\eta+c} |\xi - t|\,\mathrm{d}t > \lambda c + \frac{c^2}{2} = \left\|\psi^{(r-2)}\right\|_\infty.\end{aligned}$$

Отже, $\left\|x^{(r-2)}\right\|_\infty > \left\|\psi^{(r-2)}\right\|_\infty$, що неможливо.

(2) Випадок, коли $x^{(r-1)}(\xi) < 0$ розглядається за аналогією з (1).

Лема доведена. □

Наступне твердження є наслідком леми 5.6.2.

Лема 5.6.3. *Нехай $k, r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant r-2$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ і $\psi \in \Theta_r$. Якщо функція $x \in W_\infty^{r,r-2}$ є такою, що $\|x\|_p \leqslant \|\psi\|_p$, то $\left\|x^{(k)}\right\|_1 \leqslant \left\|\psi^{(k)}\right\|_1$.*

Доведення. Дійсно, в силу невід'ємності функції $x^{(k)}$ на відрізку $[0,1]$, з нерівності (5.102) випливає, що

$$\begin{aligned}\left\|x^{(k)}\right\|_1 &= \int_0^1 x^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t = x^{(k-1)}(1) - x^{(k-1)}(0)\\ &\leqslant x^{(k-1)}(1) = \left\|x^{(k-1)}\right\|_\infty \leqslant \left\|\psi^{(k-1)}\right\|_\infty\\ &= \psi^{(k-1)}(1) = \psi^{(k-1)}(1) - \psi^{(k-1)}(0) = \int_0^1 \psi^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t = \left\|\psi^{(k)}\right\|_1. \qquad \square\end{aligned}$$

Лема 5.6.4. *Нехай $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ та $\psi \in \Theta_r$. Якщо функція $x \in W_\infty^{r,r-1}$ є такою, що $\|x\|_p \leqslant \|\psi\|_p$, то тоді*

$$\left\|x^{(r-1)}\right\|_q \leqslant \left\|\psi^{(r-1)}\right\|_q. \tag{5.106}$$

Доведення. В лемі 5.6.2 ми встановили, що $\left\|x^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|\psi^{(k)}\right\|_\infty$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leqslant k \leqslant r-1$. Отже, $\left\|x^{(r-1)}\right\|_\infty \leqslant \left\|\psi^{(r-1)}\right\|_\infty$, а тому

$$\left\|x^{(r-1)}\right\|_1 = x^{(r-2)}(1) - x^{(r-2)}(0) \leqslant \left\|x^{(r-2)}\right\|_\infty \leqslant \left\|\psi^{(r-2)}\right\|_\infty = \left\|\psi^{(r-1)}\right\|_1.$$

Тепер доведемо, що $\nu\left(r\left(x^{(r-1)}, \cdot\right) - r\left(\psi^{(r-1)}, \cdot\right)\right) \leqslant 1$, де $r(f, \cdot)$ є незростаючим переставленням функції f (див. [97, розділ 1]). Дійсно, за вибором функції x, нерівність $\left|x^{(r)}(t)\right| \leqslant 1$ виконується майже скрізь на $[0,1]$. Тому $\left|r'\left(x^{(r-1)}, t\right)\right| \leqslant 1$ для майже всіх $t \in [0,1]$. З іншого боку, $r\left(\psi^{(r-1)}, t\right) = \max\{\lambda + c - t; 0\}$. Таким чином, графіки функцій $r\left(x^{(r-1)}, \cdot\right)$ і $r\left(\psi^{(r-1)}, \cdot\right)$ перетинаються не більше одного разу. Звідси випливає, що для всіх $t \in [0,1]$ має місце нерівність

$$\int_0^t r\left(x^{(r-1)}, u\right)\mathrm{d}u \leqslant \int_0^t r\left(\psi^{(r-1)}, u\right)\mathrm{d}u.$$

Отже, нерівність (5.106) випливає з властивостей переставлень. $\square$

5.6.2. Доведення основних результатів підрозділу 5.6

Перейдемо до доведення основних результатів цього підрозділу.

Доведення теореми 5.6.1. Спочатку доведемо рівність (5.97). Для цього оберемо довільну функцію $x \in W_\infty^{r,m}$, для якої $\|x\|_p \leqslant \delta$. Покажемо, що $\left\|x^{(k)}\right\|_q \leqslant \left\|\psi_{r,\delta;p}^{(k)}\right\|_q$. Зрозуміло, що функції x і $\psi = \psi_{r,\delta;p}$ задовольняють умови лем 5.6.1, 5.6.2 та 5.6.3. Отже, $\left\|x^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|\psi_{r,\delta;p}^{(k)}\right\|_\infty$, $\left\|x^{(k)}\right\|_1 \leqslant \left\|\psi_{r,\delta;p}^{(k)}\right\|_1$ і різниця

$x^{(k)} - \psi^{(k)}_{r,\delta;p}$ має щонайбільше одну зміну знаку на $[0,1]$. Оскільки $k \leqslant m-1$, функції $x^{(k)}$ та $\psi^{(k)}$ є неспадними на $[0,1]$, звідки випливає, що для всіх $t \in [0,1]$,

$$r\left(x^{(k)}, t\right) = x^{(k)}(1-t) \qquad \text{і} \qquad r\left(\psi^{(k)}_{r,\delta;p}, t\right) = \psi^{(k)}_{r,\delta;p}(1-t).$$

Звідси для всіх $t \in [0,1]$ маємо

$$\int_0^t r\left(x^{(k)}, u\right) \mathrm{d}u \leqslant \int_0^t r\left(\psi^{(k)}_{r,\delta;p}, u\right) \mathrm{d}u.$$

Застосовуючи останню нерівність і властивості переставлень, отримаємо шукану нерівність (5.97).

Для завершення доведення теореми зауважимо, що справедливість рівності (5.98) миттєво випливає з леми 5.6.4. Теорема доведена. □

Зауважимо, що теорема 5.6.2 є наслідком лем 5.6.1 і 5.6.2.

Доведення теореми 5.6.3. Спочатку доведемо, що

$$\left\|Q^{(n)}\right\|_\infty \leqslant \frac{\|Q\|_p}{\|e_n\|_p}. \tag{5.107}$$

Дійсно, оскільки Q є поліномом степені не вище за n, ми повинні розглянути два випадки: $Q^{(n)}(0) > 0$ і $Q^{(n)}(0) < 0$.

(1) Припустимо, що $Q^{(n)}(0) > 0$. Приймаючи до уваги той факт, що функції Q, Q',…,$Q^{(n-1)}$ невід'ємні на $[0,1]$, отримаємо, що для всіх $t \in [0,1]$,

$$Q(t) \;=\; \sum_{m=0}^{n-1} Q^{(m)}(0)e_m(t) + Q^{(n)}(0)e_n(t) \geqslant Q^{(n)}(0)e_n(t) = \left\|Q^{(n)}\right\|_\infty e_n(t).$$

Отже, $\|Q\|_p \geqslant \left\|Q^{(n)}\right\|_\infty \|e_n\|_p$, що доводить нерівність (5.107).

(2) Нехай тепер $Q^{(n)}(0) < 0$. Оскільки $Q^{(n-1)}$ невід'ємна на $[0,1]$, то $Q^{(n-1)}(t) \geqslant Q^{(n)}(0) \cdot (t-1)$ для всіх $t \in [0,1]$. Якщо $n = 1$, то тоді $\|Q\|_p \geqslant \left\|Q^{(1)}\right\|_\infty \|e_1\|_p$, що дає шукану нерівність (5.107). Якщо $n \geqslant 2$, то

для всіх $t \in [0,1]$ матимемо

$$\begin{aligned} Q(t) &= \sum_{m=0}^{n-2} Q^{(m)}(0)e_m(t) + \int_0^t Q^{(n-1)}(u)e_{n-2}(t-u)\,\mathrm{d}u \\ &\geqslant \int_0^t Q^{(n-1)}(u)e_{n-2}(t-u)\,\mathrm{d}u \geqslant \left\|Q^{(n)}\right\|_\infty \int_0^t (1-u)e_{n-2}(t-u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\left\|Q^{(n)}\right\|_\infty}{(n-2)!}\int_0^t (1-u)(t-u)^{n-2}\,\mathrm{d}u \geqslant \frac{\left\|Q^{(n)}\right\|_\infty}{(n-2)!}\int_0^t u(t-u)^{n-2}\,\mathrm{d}u \\ &= \left\|Q^{(n)}\right\|_\infty e_n(t). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $\|Q\|_p \geqslant \left\|Q^{(n)}\right\|_\infty \|e_n\|_p$, що завершує доведення (5.107).

Повернімося до доведення теореми 5.6.3. Оскільки $\left|Q^{(n)}(t)\right| = \left\|Q^{(n)}\right\|_\infty$ для всіх $t \in [0,1]$, з нерівності (5.107) отримаємо

$$\left\|Q^{(n)}\right\|_q \leqslant \frac{\left\|e_n^{(n)}\right\|_q}{\|e_n\|_p}\|Q\|_p.$$

Це є шуканою нерівністю (5.99) для $k = n$.

Доведемо тепер нерівність (5.99) для $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Розглянемо поліном

$$x(t) := \frac{\|e_n\|_p}{\|Q\|_p}Q(t), \qquad t \in [0,1].$$

Неважко бачити, що $\|x\|_p = \|e_n\|_p$. Більш того, з нерівності (5.107) випливає, що $x \in W_\infty^{n,n-1}$. Оскільки $e_n \in \Theta_n$, застосуємо теорему 5.6.1. Звідси,

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q = \frac{\|e_n\|_p}{\|Q\|_p}\left\|Q^{(k)}\right\|_q \leqslant \left\|e_n^{(k)}\right\|_q. \qquad \square$$

Доведення твердження 5.6.1. Зауважимо, що для всіх $A \geqslant \left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q \|e_{r-1}\|_p^{-1}$, маємо $B_{p,q}^{k,r}(A) = \max\{B_1; B_2\}$, де

$$B_1 := \sup_{c\in(0,1]}\left(\left\|\phi_{r;c}^{(k)}\right\|_q - A\|\phi_{r;c}\|_p\right),$$

$$B_2 := \sup_{\lambda\geqslant 0}\left(\left\|e_r^{(k)} + \lambda e_{r-1}^{(k)}\right\|_q - A\|e_r + \lambda e_{r-1}\|_p\right).$$

Покажемо, що обидві величини B_1 і B_2 скінчені. Спочатку доведемо, що $B_1 < \infty$. Дійсно, для $t \in [0,1]$ та $c \in (0,1]$ маємо $\phi_{r;c}(t) \leqslant \phi_{r;1}(t) = e_r(t)$. Отже,

$$B_1 \leqslant \sup_{c\in(0,1]}\left(\left\|e_r^{(k)}\right\|_q - A\|\phi_{r;c}\|_p\right) \leqslant \left\|e_r^{(k)}\right\|_q < \infty.$$

Тепер доведемо, що $B_2 < \infty$. Дійсно,

$$\begin{aligned} B_2 &= \sup_{\lambda \geqslant 0} \left(\left\| e_r^{(k)} + \lambda e_{r-1}^{(k)} \right\|_q - A \left\| e_r + \lambda e_{r-1} \right\|_p \right) \\ &\leqslant \sup_{\lambda \geqslant 0} \left(\left\| e_r^{(k)} \right\|_q + \lambda \left\| e_{r-1}^{(k)} \right\|_q - \frac{\left\| e_{r-1}^{(k)} \right\|_q}{\left\| e_{r-1} \right\|_p} \lambda \left\| e_{r-1} \right\|_p \right) = \left\| e_r^{(k)} \right\|_q . \end{aligned}$$

Невід'ємність величини $B_{p,\Phi}^{k,r}(A)$ випливає з нерівностей

$$B_{p,q}^{k,r}(A) \geqslant B_1 \geqslant \lim_{c \to 0} \left(\left\| \phi_{r;c}^{(k)} \right\|_q - A \left\| \phi_{r;c} \right\|_p \right) = 0. \qquad \square$$

Доведення твердження 5.6.2. Нехай величини B_1 та B_2 є такими ж, як і в доведенні твердження 5.6.1. За вибором чисел p і q для довільних двох функцій $x, y \in L_\infty^{r,r-1}$ маємо $\|x+y\|_q \leqslant \|x\|_q + \|y\|_q$ та $\|x+y\|_p = \|x\|_p + \|y\|_p$. Отже,

$$\begin{aligned} B_2 &= \sup_{\lambda \geqslant 0} \left(\left\| e_r^{(k)} + \lambda e_{r-1}^{(k)} \right\|_q - A \left\| e_r + \lambda e_{r-1} \right\|_p \right) \\ &\leqslant \sup_{\lambda \geqslant 0} \left(\left\| e_r^{(k)} \right\|_q + \lambda \left\| e_{r-1}^{(k)} \right\|_q - A \left\| e_r \right\|_p - A\lambda \left\| e_{r-1} \right\|_p \right) \\ &= \left\| e_r^{(k)} \right\|_q - A \left\| e_r \right\|_p \leqslant \sup_{c \in (0,1]} \left(\left\| \phi_{r;c}^{(k)} \right\|_q - A \left\| \phi_{r;c} \right\|_p \right) = B_1. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$B_{p,q}^{k,r}(A) = \sup_{c \in (0,1]} \left(\left\| \phi_{r;c}^{(k)} \right\|_q - A \left\| \phi_{r;c} \right\|_p \right) = \sup_{c \in (0,1]} \left(\left\| e_r^{(k)} \right\|_q c^{r-k+1/q} - A \left\| e_r \right\|_p c^{r+1/p} \right).$$

Безпосередні обчислення показують, що функція

$$g(c) := \left\| e_r^{(k)} \right\|_q c^{r-k+1/q} - A \left\| e_r \right\|_p c^{r+1/p}, \qquad c > 0,$$

досягає свого максимуму в точці

$$c_0 = \left((1-\lambda) \left\| e_r^{(k)} \right\|_q A^{-1} \left\| e_r \right\|_p^{-1} \right)^{\frac{1}{k-1/q+1/p}} .$$

Покажемо, що $c_0 \leqslant 1$. Дійсно, оскільки $A \geqslant \left\| e_{r-1}^{(k)} \right\|_q \left\| e_{r-1} \right\|_p^{-1}$, то

$$c_0^{k-1/q+1/p} \leqslant (1-\lambda) \frac{\left\| e_r^{(k)} \right\|_q \left\| e_{r-1} \right\|_p}{\left\| e_{r-1}^{(k)} \right\|_q \left\| e_r \right\|_p}.$$

За узагальненою нерівністю Бернулі,

$$\frac{\left\|e_r^{(k)}\right\|_q}{\left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q} = \left(1 - \frac{1}{r-k+1/q}\right)^{1/q} \leqslant 1 - \frac{1/q}{r-k+1/q} = \frac{r-k}{r-k+1/q},$$

$$\frac{\|e_r\|_p}{\|e_{r-1}\|_p} = \left(1 - \frac{1}{r+1/p}\right)^{1/p} \geqslant 1 - \frac{1/p}{r+1/p} = \frac{r}{r+1/p}.$$

Отже,

$$c_0^{k-1/q+1/p} \leqslant (1-\lambda)\frac{(r-k)\,(r+1/p)}{r\,(r-k+1/q)} = \frac{r-k}{r} < 1.$$

Таким чином,

$$B_{p,q}^{k,r}(A) = g(c_0) = \lambda(1-\lambda)^{-1+1/\lambda}\left\|e_r^{(k)}\right\|_q^{1/\lambda}\|e_r\|_p^{1-1/\lambda}A^{1-1/\lambda}. \qquad \square$$

Доведення теореми 5.6.4. Нехай $(A,B) \in \Gamma_{MM^m}\left(D^k : L_p \to L_\Phi; L_\infty^r\right)$. За нерівністю (5.99), $A \geqslant \left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q \|e_{r-1}\|_p^{-1}$. Покажемо, що

$$B \leqslant B_{p,q}^{k,r}(A). \tag{5.108}$$

Для цього для довільної функції $x \in L_\infty^{r,m}\backslash\mathcal{P}^{r-1,m}$ означимо $y := \frac{x}{\left\|x^{(r)}\right\|_\infty}$. Вочевидь, $y \in W_\infty^{r,m}$. Нехай $\psi \in \Theta_r$ є функцією, для якої $\|\psi\|_p = \|y\|_p$. Тоді за теоремою 5.6.1,

$$\begin{aligned}\left\|x^{(k)}\right\|_q &= \left\|x^{(r)}\right\|_\infty\left\|y^{(k)}\right\|_q \leqslant \left\|x^{(r)}\right\|_\infty\left\|\psi^{(k)}\right\|_q \\ &\leqslant \left\|x^{(r)}\right\|_\infty\left[A\|\psi\|_p + B_{p,q}^{k,r}(A)\right] = A\|x\|_p + B_{p,q}^{k,r}(A)\left\|x^{(r)}\right\|_\infty.\end{aligned}$$

Залишається розглянути випадок, коли $x \in \mathcal{P}^{r-1,m}$. Оскільки $\left\|x^{(r)}\right\|_\infty = 0$, то за лемою 5.6.1

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \leqslant \frac{\left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q}{\|e_{r-1}\|_p}\|x\|_p \leqslant A\|x\|_p + B_{p,q}^{k,r}(A)\left\|x^{(r)}\right\|_\infty.$$

Отже, (5.108) випливає з означення множини $\Gamma_{MM^m}\left(D^k : L_p \to L_q; L_\infty^r\right)$. Більш того, ми встановили, що для всіх $A \geqslant \left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q \|e_{r-1}\|_p^{-1}$ існує $B \geqslant 0$, для якого $(A,B) \in \Gamma_{MM^m}\left(D^k : L_p \to L_q; L_\infty^r\right)$. З іншого боку,

$$B \geqslant \sup_{\psi\in\Theta_r}\frac{\left\|\psi^{(k)}\right\|_q - A\|\psi\|_p}{\left\|\psi^{(r)}\right\|_\infty} := B_{p,q}^{k,r}(A).$$

Отже, $B = B_{p,q}^{k,r}(A)$, що доводить теорему. $\square$

Теорема 5.6.5 доводиться аналогічним чином до теореми 5.6.4.

Доведення теореми 5.6.6. За теоремою 5.6.3 для будь-якого $Q \in \mathcal{P}_{+}^{r-1,r-1}$

$$\left\|Q^{(k)}\right\|_q \leqslant \frac{(r-1+1/p)!}{(r-k-1+1/q)!} \cdot \|Q\|_p \,, \tag{5.109}$$

яка обертається в рівність для полінома $Q = e_{r-1}$. Зрозуміло, що $Q^{(r)}(t) \equiv 0$ для будь-якого $Q \in \mathcal{P}_{+}^{r-1,r-1}$. Тому множина $\Gamma_{MM^r}\left(D^k : L_p \to L_q; L_E^r\right)$ не містить ті пари невід'ємних пар (A, B), для яких $A < \frac{(r-1+1/p)!}{(r-k-1+1/q)!}$.

Нехай тепер число $A \geqslant \frac{(r-1+1/p)!}{(r-k-1+1/q)!}$ є довільним. Для $x \in MM^r$ запишемо формулу Тейлора в точці $t = 0$ з залишковим членом в інтегральній формі

$$x(t) = P_{r-1}(t) + \int_0^t \frac{(t-u)^{r-1}}{(r-1)!}\, x^{(r)}(u)\,\mathrm{d}u,$$

де $P_{r-1}(t) = \sum\limits_{k=0}^{r-1} \frac{x^{(k)}(0)}{k!}\, t^k$. Неважко бачити, що

$$\|x\|_\infty = \|P_{r-1}\|_\infty + \int_0^1 \frac{(1-u)^{r-1}}{(r-1)!}\, x^{(r)}(u)\,\mathrm{d}u,$$

$$\|x\|_1 = \|P_{r-1}\|_1 + \int_0^1 \frac{(1-u)^{r}}{r!}\, x^{(r)}(u)\,\mathrm{d}u.$$

Тому для $p, q \in \{1, \infty\}$

$$\|x\|_p = \|P_{r-1}\|_p + \int_0^1 \frac{(1-u)^{r-1+1/p}}{(r-1+1/p)!}\, x^{(r)}(u)\,\mathrm{d}u \tag{5.110}$$

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q = \left\|P_{r-1}^{(k)}\right\|_q + \int_0^1 \frac{(1-u)^{r-k-1+1/q}}{(r-k-1+1/q)!}\, x^{(r)}(u)\,\mathrm{d}u. \tag{5.111}$$

Застосовуючи рівності (5.110) і (5.111), нерівність (5.109), невід'ємність похідної $x^{(r)}$ і означення асоційованого простору, отримаємо

$$\begin{aligned} \left\|x^{(k)}\right\|_q - A\|x\|_p &\leqslant \left(\frac{(r-1+1/p)!}{(r-k-1+1/q)!} - A\right) \cdot \|P_{r-1}\|_p + \int_0^1 \Delta_A(u)\, x^{(r)}(u)\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant \int_0^1 \Delta_A(u)\, x^{(r)}(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \|\Delta_A\|_{E^1} \left\|x^{(r)}\right\|_E . \end{aligned}$$

Таким чином ми довели, що якщо $(A, B) \in \Gamma_{MM^r}\left(D^k : L_p \to L_q; L_E^r\right)$, то $A \geqslant \frac{(r-1+1/p)!}{(r-k-1+1/q)!}$ і $B \leqslant \|\Delta_A\|_{E^1}$. Покажемо тепер, що $B = \|\Delta_A\|_{E^1}$.

Дійсно, за означенням норми в асоційованому просторі E^1, для довільного $\varepsilon > 0$ існує функція $g \in E$, $\|g\|_E = 1$, для якої

$$\int_0^1 \Delta_A(u)\, g(u)\, \mathrm{d}u > (1-\varepsilon)\, \|\Delta_A\|_{E^1}\, .$$

Зазначимо, що функція $\overline{g}(t) = |g(t)| \cdot \operatorname{sgn} \Delta_A(t)$ також належить простору E і $\|\overline{g}\|_E \leqslant \|g\|_E$. Нехай $f := \frac{\overline{g}}{\|\overline{g}\|_E}$. Тоді

$$\int_0^1 \Delta_A(u)\, f(u)\, \mathrm{d}u = \frac{1}{\|\overline{g}\|_E} \int_0^1 \Delta_A(u)\, \overline{g}(u)\, \mathrm{d}u \geqslant \int_0^1 \Delta_A(u)\, g(u)\, \mathrm{d}u > (1-\varepsilon)\, \|\Delta_A\|_{E^1}\, .$$

Для $t \in [0,1]$ розглянемо функцію

$$x(t) := \int_0^t \frac{(t-u)^{r-1}}{(r-1)!}\, f(u)\, \mathrm{d}u.$$

Зрозуміло, що $x \in MM^r$ і $\left\|x^{(r)}\right\|_E = \|f\|_E = 1$. Тому, використовуючи рівності (5.110), (5.111), а також означення функції f, отримаємо

$$\begin{aligned} \left\|x^{(k)}\right\|_q - A\|x\|_p &= \int_0^1 \left(\frac{(1-u)^{r-k-1+1/q}}{(r-k-1+1/q)!} - A \cdot \frac{(1-u)^{r-1+1/p}}{(r-1+1/p)!} \right) f(u)\, \mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \Delta_A(u)\, f(u)\, \mathrm{d}u > (1-\varepsilon)\, \|\Delta_A\|_{E^1} = (1-\varepsilon)\|\Delta_A\|_{E^1} \left\|x^{(r)}\right\|_E . \end{aligned}$$

Теорема доведена. $\square$

Висновки до розділу 5

В даному розділі встановлено нові точні нерівності типу Колмогорова для норм дробових похідних функцій, визначених на напівосі невід'ємних чисел, та для норм похідних цілого порядку функцій, визначених на скінченному відрізку, що належать спеціальним функціональним класам. Також розв'язана задача Стєчкіна для операторів диференціювання малих порядків на класах функцій, визначених на скінченному відрізку. Отримані тут результати полягають в наступному:

1. Знайдено непокращувану константу в нерівності типу Колмогорова (5.7), що оцінює рівномірну норму дробової похідної $D^k_- f$, $k \in (0, 2-1/s) \setminus \{1\}$, в смислі Маршо функції $f \in L^2_{\infty,s}\left(\mathbb{R}^0_+\right)$ через рівномірну норму самої

функції та норму її другої похідної в метриці простору L_s, $1 \leqslant s < \infty$, та розв'язано задачу Стєчкіна 5.1.5 про найкраще наближення оператора D_-^k лінійними обмеженими операторами на класі $W_{\infty,s}^2\left(\mathbb{R}_+^0\right)$. У випадку $k \in (0,1)$ встановлено узагальнення цих результатів на ситуацію, коли норма другої похідної функції береться в ідеальній решітці.

2. Розв'язано задачі Ландау-Колмогорова 5.1.2 та Стєчкіна 5.1.5 для оператора $D^1 : L_\infty([0,1]) \to L_\infty([0,1])$ та функціоналів $D_{t_0}^1 : L_\infty([0,1]) \to \mathbb{R}$, $t_0 \in [0,1]$, диференціювання на класі $W_N^{*,2}([0,1])$ функцій $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, друга похідна яких обмежена одиницею за нормою Люксембурга.
3. Розв'язано задачу Стєчкіна 5.1.5 про найкраще наближеня операторів $D^k : L_\infty([0,1]) \to L_\infty([0,1])$, $k \in \{1,2\}$, та функціоналів $D_{t_0}^k : L_\infty([0,1]) \to \mathbb{R}$, $k \in \{1,2\}$ і $t_0 \in [0,1]$, на класі $W_\infty^3([0,1])$.
4. Встановлено нові точні нерівності типу Колмогорова для абсолютно монотонних та кратно монотонних функцій, визначених на скінченному відрізку.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню класичних задач теорії апроксимації про обчислення лінійних поперечників функціональних класів, оптимізацію квадратурних формул на функціональних класах, найкраще нелінійне наближення функцій багатьох змінних сплайнами, найкраще відновлення операторів, встановлення точних нерівностей типу Колмогорова для норм похідних цілого і дробового порядку функцій однієї змінної та їх застосуванням. Основні результати роботи викладено в таких пунктах.

1. Обчислено точне значення одновимірного лінійного поперечника класу $\widetilde{H}^\omega$ періодичних функцій з заданою мажорантою ω модуля неперервності в просторі $\widetilde{C}$ неперервних періодичних функцій і побудовано найкращий лінійний метод наближення класу $\widetilde{H}^\omega$ константами в $\widetilde{C}$.

Показано, що одновимірний лінійний поперечник класу H^ω в просторі C та найкращий лінійний метод наближення цього класу константами пов'язані між собою деяким інтегральним рівняння Фредгольма першого роду з параметром. Це рівняння розв'язане в явному вигляді для класів Гельдера, для яких $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$.

Отримано нові оцінки зверху для N-вимірних лінійних поперечників класів $\widetilde{H}^\omega$ та H^ω в просторі неперервних функцій, що покращують раніше відомі оцінки, та обчислено відносний лінійний мініедральний поперечник $\lambda_N^{\mathfrak{m}}\left(H^\omega; C_+; C\right)$ для всіх $N \in \mathbb{N}$.

2. Доведено, що інтервальна квадратурна формула з рівновіддаленими серединами вузлових інтервалів і рівними коефіцієнтами є найкращою серед всіх інтервальних квадратурних формул з заданою кількістю вузлових інтервалів однакової довжини, які можуть перетинатися, на класах згорток ядер, що не збільшують осциляцію, з переставно інваріантними множинами. Цей результат суттєво поширює відомі результати щодо оптимізації інтервальних квадратур. Ключову роль у доведенні цього результату мала встановлена властивість про не збільшення осциляції в згортці з ядром Стєклова вузького класу функцій, які можна зобразити у вигляді різниці деяких двох ідеальних несиметричних сплайнів

нульового порядку.

Розв'язано задачу оптимізації кубатурних формул, що використовують в якості інформації про підінтегральну функцію її усереднення вздовж перетинів області визначення з гіперплощинами заданої ковимірності, паралельних координатним гіперплощинам, на класах функцій, які задані обмеженнями на модуль неперервності або на гладкість чистих частинних похідних.

3. Знайдено точну асимптотику при $N \to \infty$ величини $R_N(f)_{p;\alpha,\beta}$ найкращого нелінійного несиметричного наближення в метриці простору L_p двічі неперервно диференційовних функцій f двох змінних за допомогою лінійних неперервних сплайнів на тріангуляціях, які складаються з не більше, ніж N трикутників, а також побудовано асимптотично оптимальні послідовності тріангуляцій та лінійних сплайнів на них.

Розв'язано екстремальну задачу про знаходження форми d-вимірного симплекса, $d \in \mathbb{N}$, одиничного об'єму, на якому досягається мінімум похибки найкращого несиметричного наближення в метриці простору L_p додатно визначеної квадратичної канонічної форми за допомогою лінійних функцій.

Знайдено точний порядок величини $\mathcal{E}_N\left(W^{\Delta}_{\infty}\right)_p$, коли $N \to \infty$, що характеризує похибку наближення в метриці простору L_p функцій з обмеженим лапласіаном за допомогою трансфінітних інтерполяційних гармонічних сплайнів на прямокутних розбиттях, які складаються з не більше, ніж N паралелепіпедів. Показано, що такий порядок не залежить від вимірності простору визначення функцій та досягається на розбиттях, утворених розбиттям області визначення функції рівновіддаленими паралельними гіперплощинами.

4. Отримано точні оцінки зверху та знизу для величини похибки найкращого відновлення класу $W^2_{\infty}(\Omega)$ функцій багатьох змінних, визначених на опуклому тілі Ω, що мають рівномірно обмежені похідні другого порядку за довільним напрямком, за інформацією про значення функцій та їх градієнтів в заданій скінченній системі вузлів, та наведено загальні умови, в яких оцінки зверху та знизу збігаються. Подібні результати встановлено й для періодичного аналогу класу $W^2_{\infty}(\Omega)$ – класу $W^2_{\infty}(\mathcal{L})$, де $\mathcal{L}$ – повновимірна решітка. Ці результати поширюють результати Б. Д. Боянова на випадок функцій багатьох змінних та

В. Ф. Бабенка та А. О. Лігуна на випадок класів функцій вищої гладкості.

Розв'язано задачу про найкраще відновлення інтегральних операторів з невід'ємними ядрами та їх сум на класах функцій, які визначені на компакті метричного простору та мають задану мажоранту модуля неперервності, за значеннями функцій з класу в заданій скінченній системі вузлів, які відомі з похибкою.

5. Одержано непокращувану нерівність типу Колмогорова, що оцінює рівномірну норму дробової похідної в смислі Маршо порядку $k \in (0, 2 - 1/s) \setminus \{1\}$ функції $f \in L^2_{\infty,s}\left(\mathbb{R}^0_+\right)$, $1 \leqslant s < \infty$, через рівномірну норму самої функції та норму її другої похідної в метриці простору L_s, та розв'язано задачу Стєчкіна про найкраще наближення оператора D^k_- дробового диференціювання в смислі Маршо лінійними обмеженими операторами на класі $W^2_{\infty,s}\left(\mathbb{R}^0_+\right)$. У випадку $k \in (0, 1)$ розглянуто узагальнення цих результатів на ситуацію, коли друга похідна функції f належить ідеальній решітці.

Розв'язано задачу Стєчкіна 5.1.5 для операторів диференціювання та функціоналів диференціювання в точці на класах $W^3_\infty([0,1])$ та $W^{*,2}_N([0,1])$, де N – це N-функція, що має неперервну справа похідну.

Для абсолютно монотонних та кратно монотонних функцій $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ та для широких діапазонів значень параметрів $1 \leqslant p, q, s \leqslant \infty$ та $k, r \in \mathbb{N}$, $k \leqslant r - 1$, отримано розв'язок задачі Ландау-Колмогорова про точні константи в нерівностях, що оцінюють норму проміжної похідної $\left\|x^{(k)}\right\|_{L_q([0,1])}$ через норму самої функції $\|x\|_{L_p([0,1])}$ та норму її похідної старшого порядку $\left\|x^{(r)}\right\|_{L_s([0,1])}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Азарин В. С., Аппроксимация кусочно-линейными функциями / В. С. Азарин, В. И. Бармин // В кн.: Матем. сб. Киев: Наукова думка. – 1976. – С. 25–26.

2. Александров П. С. Комбинаторная топология / П. С. Александров. – М.: Физматгиз, 1947.

3. Про формулу розкладу в околі кута / А. М. Аникеенко, О. М. Литвин, В. Л. Рвачов, М. О. Сафонов // Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1972. – №2. – С. 99—100.

4. Арестов В. В. О наилучшем приближении операторов дифференцирования / В. В. Арестов // Матем. заметки. – 1967. – Т. 1, №2. – С. 149–154.

5. Арестов В. В. О наилучшем равномерном приближении операторов дифференцирования / В. В. Арестов // Матем. заметки. – 1969. – Т. 5, №3. – С. 273–284.

6. Арестов В. В. О точных неравенствах между нормами функций и их производных / В. В. Арестов // Acta sci. math. – 1972. – V. 33, №3-4. – С. 243–267.

7. Арестов В. В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи / В. В. Арестов // Усп. матем. наук. – 1996. – Т. 51, №6. – С. 89–124.

8. Арестов В. В. Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными / В. В. Арестов, В. Н. Габушин // Изв. вузов. Матем. – 1995. – №11. – С. 42–68.

9. Бабенко В. Ф. Асимптотически точная оценка остатка наилучших для некоторых классов функций кубатурных формул / В. Ф. Бабенко // Матем. заметки. – 1976. – Т. 19, №3. – С. 313–322.

10. Бабенко В. Ф. Точная асимптотика остатков оптимальных для некоторых классов функций весовых кубатурных формул / В. Ф. Бабенко // Матем. заметки. – 1976. – Т. 20, №4. – С. 589–595.

11. Бабенко В. Ф. Интерполяция непрерывных отображений кусочно-линейными / В. Ф. Бабенко // Матем. заметки. – 1978. – Т. 24, №1. – С. 43–52.

12. Бабенко В. Ф. Наилучшая кусочно-линейная интерполяция непрерывных отображений / В. Ф. Бабенко // Исследования современных проблем теории суммирования и приближения функций и их приложения. – ДГУ, Днепропетровск. – 1980. – С. 3–7.

13. Бабенко В. Ф. Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций / В. Ф. Бабенко // Укр. матем. журн. – 1982. – Т. 34, №4. – С. 409–416.

14. Бабенко В. Ф. Несимметричные экстремальные задачи в теории приближения / В. Ф. Бабенко // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 269, №3. – С. 521–524.

15. Бабенко В. Ф. Теоремы двойственности для некоторых задач теории приближения / В. Ф. Бабенко // Современные вопросы действительного и комлексного анализа. – Киев: Ин-тут. математики АН УССР, 1984. – С. 3–13.

16. Бабенко В. Ф. Экстремальные задачи теории приближения и несимметричные нормы : дис. докт. фiз.-мат. наук / Бабенко В. Ф. // Днепропетровск: ДГУ, 1987. – 275 с.

17. Бабенко В. Ф. О наилучших равномерных приближениях сплайнами при наличии ограничений на их производные / В. Ф. Бабенко // Матем. заметки. – 1991. – Т. 50, №6. – С. 24–30.

18. Бабенко В. Ф. Поперечники и наилучшие квадратурные формулы для классов сверток / В. Ф. Бабенко // Укр. матем. журн. – 1991. – Т. 43, №9. – С. 1135-1148.

19. Бабенко В. Ф. Об оптимизации приближенного интегрирования монотонных функций двух переменных / В. Ф. Бабенко, С. В. Бородачев // Укр. матем. журн. – 1999. – Т. 51, №7. – С. 881–889.

20. Бабенко В. Ф. Об оптимизации кубатурных формул на классах функций многих переменных / В. Ф. Бабенко, С. В. Бородачев // Вестн. Дн-ского. ун-та., Сер. Матем. – 2002. – Т. 7. – С. 3–7.

21. Бабенко В. Ф. О наилучших квадратурных формулах на классах сверток с $O(M, \Delta)$-ядрами / В. Ф. Бабенко, Т. А. Гранкина // Исследование по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложения. Сборник научных трудов. – Днепропетровск: ДГУ, 1982. – С. 6–13.

22. Неравенства для производных и их приложения / В. В. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов // К.: Наукова думка, 2003.

23. Бабенко В. Ф. Об аддитивных неравенствах для промежуточных производных функций, заданных на конечном интервале / В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов // Укр. матем. журн. – 1997. – Т. 49, №5. – С. 619–628.

24. Бабенко В. Ф. О точных неравенствах для промежуточных производных дифференцируемых отображений банаховых пространств / В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов // Доп. НАН України. – 1997. – №1. – С. 22–25.

25. Бабенко В. Ф. Об аддитивных неравенствах для промежуточных производных дифференцируемых отображений банаховых пространств / В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов // Матем. заметки. – 1998. – Т. 63, №3. – С. 332–342.

26. Бабенко В. Ф. Приближение некоторых классов функций многих переменных гармоническими сплайнами / В. Ф. Бабенко, Т. Ю. Лескевич // Укр. матем. журн. – 2012. – Т. 64, №8. – С. 1011–1024.

27. Бабенко В. Ф. Об интерполяции многогранными функциями / В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун // Матем. заметки. – 1975. – Т. 18, №6. – С. 803–814.

28. Бабенко В. Ф. О порядке относительных приближений классов дифференцируемых периодических функций сплайнами / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Укр. матем. журн. – 2010. – Т. 62, №2. – С. 147–157.

29. Бабенко В. Ф. Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Тр. ИММ УрО РАН. – 2011. – Т. 17, №3. – С. 60–70.

30. Бабенко В. Ф. Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных с ограниченным в L_∞ лапласианом и смежные задачи / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, С. А. Пичугов // Матем. заметки. – 2014. – Т. 95, №1. – С. 3–17.

31. Бабенко В. Ф. Об одном неравенстве Стейна / В. Ф. Бабенко, С. А. Пичугов // Приближение функций и суммирование рядов. – Днепропетровск: ДГУ. – 1991. – Т. 43. – С. 420–422.

32. Бабенко В. Ф. Об оптимальном восстановлении интегралов от многозначных функций / В. Ф. Бабенко, В. В. Бабенко, М. В. Полищук // Доп. НАН України, Сер. Матем. — 2014. — №11. — С. 7-10.

33. Бабенко В. Ф. О неравенствах типа Колмогорова для периодических и непериодических функций / В. Ф. Бабенко, С. А. Селиванова // Диф. рівн. та їх заст. – Дніпропетровськ: Дніпропетр. держ. ун-т., 1998. – С. 91–95.

34. Бабенко В.Ф. Об оптимизации интервальных квадратурных формул / В. Ф. Бабенко, Д. С. Скороходов // Вісн. Дн-ського. ун-ту., Сер. Матем. – 2007. – Т. 8, №12. – С. 261–267.

35. Бабенко В. Ф. О точных константах в неравенствах для норм производных на конечном отрезке / В. Ф. Бабенко, Ж. Б. Удраого // Укр. матем. журн. – 1999. – Т. 51, №1. – С. 117–119.

36. Бабенко В. Ф. Про нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку / В. Ф. Бабенко, М. С. Чурілова // Вісн. Дн-ського. ун-ту., Сер. Матем. – 2001. – Т. 6. – С. 16–20.

37. Бабенко В. Ф. Про нерівності типу Колмогорова для дробових похідних функцій, визначених на дійсній осі / В. Ф. Бабенко, М. С. Чурілова // Вісн. Дн-ського. ун-ту., Сер. Матем. – 2008. – Т. 13. – С. 28–34.

38. Бабенко Ю. В. Точные неравенства типу Ландау для функций со вторыми производными из пространств Орлича / Ю. В. Бабенко // Вісн. Дн-ського. ун-ту., Сер. Матем. – 2000. – Т. 2. – С. 18–22.

39. Бабенко Ю. В. Поточечные неравенства типа Ландау-Колмогорова для функций, заданных на конечном отрезке / Ю. В. Бабенко // Укр. матем. журн. – 2001. – Т. 53, №2. – С. 238–243.

40. Бабенко Ю. В. Задачи Колмогорова и Стечкина для классов функций, вторая производная которых принадлежит пространству Орлича / Ю. В. Бабенко, Д. С. Скороходов // Матем. заметки. – 2012. – Т. 91, №2. – С. 172–183.

41. Бахвалов Н. С. Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций / Н. С. Бахвалов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1971. – Т. 11, №4. – С. 1014—1018.

42. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. т. 1 / С. Н. Бернштейн. – М.: АН СССР, 1952. – 582 с.

43. Бирман М. Ш. Кусочно-полиномиальные приближения функций классов W_p^α / М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк // Матем. сб. – 1967. – Т. 73, №3. – С. 331–355.

44. Бородачев С. В. Оптимизация “интервальных” квадратурных формул для классов $H^{\omega_+;\omega_-}$ / С. В. Бородачев // Вісн. Дн-ського. ун-ту., Сер. Матем. – 1998. – №3. – С. 19–26.

45. Бородачев С. В. Об оптимизации “интервальных” квадратурных формул на некоторых несимметричных классах периодических функций / С. В. Бородачев // Вісн. Дн-ського ун-ту., Сер. Матема. – 1999. – №4. – С. 19–24.

46. Бородачев С. В. Об оптимизации интервальных квадратурных формул на некоторых классах абсолютно непрерывных функций / С. В. Бородачев // Вісн. Дн-ського. ун-ту., Сер. Матем. – 2000. – №5. – С. 28–34.

47. Боянов Б. Д. Наилучшие методы интерполирования для некоторых классов дифференцируемых функций / Б. Д. Боянов // Матем. заметки. – 1975. – Т. 17, №4. – С. 511–524.

48. Боянов Б. Д. Характеристика и существование оптимальных квадратурных формул для одного класса дифференцируемых функций / Б. Д. Боянов // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 232, №6. – С. 1233–1236.

49. Боянов Б. Д. Существование оптимальных квадратурных формул с заданными кратностями узлов / Б. Д. Боянов // Матем. сб. – 1978. – Т. 105, №3. – С. 342–370.

50. Боянов Б. Единственность оптимальной квадратурной формулы / Б. Боянов // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 248, №2. – С. 272–274.

51. Боянов Б. Д. Оптимальные квадратурные формулы / Б. Д. Боянов // Усп. матем. наук. – 2005. – Т. 60, №6. – С. 33–52.

52. Буренков В. И. О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале / В. И. Буренков // Тр. МИАН СССР. – 1980. – Т. 156. – С. 22–29.

53. Буренков В. И. О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале. II / В. И. Буренков // Тр. МИАН СССР. – 1986. – Т. 173. – С. 38–49.

54. Буренков В. И. О точных постоянных в неравенствах для модуля производной / В. И. Буренков, В. А. Гусаков // Тр. МИАН. – 2003. – Т. 243. – С. 104–126.

55. Бусарова Т. Н. Наилучшие квадратурные формулы для одного класса дифференцируемых периодических функций / Т. Н. Бусарова // Укр. матем. журн. – 1973. – Т. 25, №3. – С. 291–301.

56. Буслаев А. П. О приближении оператора дифференцирования / А. П. Буслаев // Матем. заметки. – 1981. – Т. 29, №5. – С. 731–742.

57. Буслаев А. П. О существовании экстремальных функций в неравенствах для производных / А. П. Буслаев, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров // Матем. заметки. – 1982. – Т. 32, №6. – С. 823–834.

58. Буслаев А. П. О неравенствах для производных в многомерном случае / А. П. Буслаев, В. М. Тихомиров // Матем. заметки. – 1979. – Т. 25, №1. – С. 59–73.

59. Вакарчук С. Б. О восстановлении линейных функционалов на классах дифференцируемых функций двух переменных по некоторой обобщенной информации / С. Б. Вакарчук // Изв. вузов. Матем. – 1989. – №2. – С. 11–17.

60. Вакарчук С. Б. О наилучших полиномиальных приближениях и поперечниках классов функций в пространстве L_2 / С. Б. Вакарчук // Матем. заметки. – 2018. – Т. 103, №2. – С. 307–311.

61. Вакарчук С. Б. О поперечниках классов функций, аналитических в круге / С. Б. Вакарчук, М. Ш. Шабозов // Матем. сб. – 2010. – Т. 201, №8. – С. 3–22.

62. Выск Н. Д. Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным / Н. Д. Выск, К. Ю. Осипенко // Матем. заметки. – 2007. – Т. 81, №6. – С. 803–815.

63. Габушин В. Н. Неравенства для норм функции и ее производных в метриках L_p / В. Н. Габушин // Матем. заметки. – 1967. – Т. 1, №3. – С. 291–298.

64. Габушин В. Н. О наилучшем приближении оператора дифференцирования на полупрямой / В. Н. Габушин // Матем. заметки. – 1969. – Т. 6, №5. – С. 573–582.

65. Габушин В. Н. Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах / В. Н. Габушин // Матем. заметки. – 1970. – Т. 8, №5. – С. 551–562.

66. Галеев Э. М. Оптимизация: теория, примеры, задачи / Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 320 с.

67. Гейсберг С. П. Обобщение неравенства Адамара / С. П. Гейсберг // Исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций: сб. научн. тр. ЛМИ. – 1965. – Т. 50. – С. 42–54.

68. Гранкина Т. А. О наилучших квадратурных формулах для некоторых классов функций, представимых в виде сверток / Т. А. Гранкина. – М., 1981. – Деп. в ВИНИТИ, №5782-81.

69. Григорян Ю. И. Поперечники некоторых множеств в функциональных пространствах / Ю. И. Григорян // Матем. заметки. – 1973. – Т. 13, №5. – С. 637–646.

70. Дерец Е. В. О наилучшей интервальной квадратурной формуле для класса $W^2H_1^\omega$ / Е. В. Дерец // Вiсн. Дн-ського. ун-ту., Сер. Матем. – 2008. – №16. – С. 73–83.

71. Долженко Е. П. Аппроксимации со знакочувствительным весом (теоремы существования и единственности) / Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов // Изв. РАН. Сер. матем. – 1998. – Т. 62, №6. – С. 59–102.

72. Долженко Е. П. Аппроксимация со знакочувствительным весом (устойчивость, приложения к теории ужей и хаусдорфовым аппроксимациям) / Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов // Изв. РАН. Сер. матем. – 1999. – Т. 63, №3. – С. 77–118.

73. Женсыкбаев А. А. Наилучшая квадратурная формула для некоторых классов периодических дифференцируемых функций / А. А. Женсыкбаев // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1977. – Т. 41, №5. – С. 1110–1124.

74. Женсыкбаев А. А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы / А. А. Женсыкбаев // Усп. матем. наук, 1981. – Т. 36, №4 – С. 107–159.

75. Женсыкбаев А. А. Сплайн-аппроксимация и оптимальное восстановление операторов / А. А. Женсыкбаев // Матем. сб. – 1993. – Т. 184, №12. – С. 3–22.

76. Женсыкбаев А. А. Проблемы восстановления операторов / А. А. Женсыкбаев. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 412 с. – (Современная математика).

77. Завьялов Ю. С. Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

78. Звягинцев А. И. Неравенства Колмогорова для $n = 4$ / А. И. Звягинцев // Латв. матем. ежегодник. – 1982. – №26. – С. 165–175.

79. Звягинцев А. И. О неравенствах Колмогорова между верхними гранями функциональных производных для $n = 3$ / А. И. Звягинцев, А. Я. Лепин // Латв. Мат. Ежегодник. – 1982. – №26. – С. 176–181.

80. Калябин Г. А. Точные константы в неравенствах для промежуточных производных (случай Габушина) / Г. А. Калябин // Функц. анализ и его прил. – 2004. – Т. 38, №3. – С. 29–38.

81. Канторович Л. В. Об особых приемах численного интегрирования четных и нечетных функций / Л. В. Канторович // Тр. МИАН СССР. – 1949. – Т. 28 – С. 3–25.

82. Килижеков Ю. А. Погрешность аппроксимации интерполяционными многочленами первой степени на n-симплексах / Ю. А. Килижеков // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60, №4. – С. 504–510.

83. Клименко В. Т. Аппроксимация гармоническими сплайнами функций двух переменных / В. Т. Клименко // Укр. матем. журн. – 1995. – Т. 47, №9. – С. 1190–1196.

84. Колмогоров А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале / А. Н. Колмогоров // Учёные записки МГУ, Математика, 1939. – Т. 30, №3. – С. 3–13.

85. Колмогоров А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале / А. Н. Колмогоров // Избранные труды. Математика и механика / А. Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1985. – С. 252–263.

86. Колмогоров А. Н. Элементы теориии функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М.: Физматлит, 2004. – 572 с.

87. Колпаков Е. В. Восстановление математических объектов по неполной информации / Е. В. Колпакова, В. И. Колпаков. – Саратов: СГУ, 1995.

88. Коновалов В. Н. Оценки поперечников типа Колмогорова для классов дифференцируемых периодических функций / В. Н. Коновалов // Матем. заметки. – 1984. – Т. 35, №3. – С. 369–380.

89. Корнейчук Н. П. Точное значение наилучших приближений и поперечников некоторых классов функций / Н. П. Корнейчук // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 150, №6. – С. 1218–1220.

90. Корнейчук Н. П. Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных / Н. П. Корнейчук // Матем. заметки. – 1968. – Т. 3, №5. – С. 565–576.

91. Корнейчук Н. П. О методах исследования экстремальных задач теории наилучшего приближения / Н. П. Корнейчук // Усп. матем. наук. – 1974. – Т. 29, №3. – С. 9–42.

92. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения / Н. П. Корнейчук. – М.: Наука, 1976.

93. Корнейчук Н. П. Поперечники в L_p классов непрерывных и дифференцируемых функций и оптимальные методы кодирования и восстановления функций и их производных / Н. П. Корнейчук // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1981. – Т. 45, №2. – С. 266–290.

94. Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближений / Н. П. Корнейчук. – М.: Наука, 1984. – 352 с.

95. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения / Н. П. Корнейчук. – М.: Наука, 1987. – 424 с.

96. Корнейчук Н. П. О линейных поперечниках классов H^ω / Н. П. Корнейчук // Укр. матем. журн. – 1996. – Т. 48, №9. – С. 1255–1264.

97. Корнейчук Н. П. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов / Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун. – Киев: Наукова думка, 1992. – 304 с.

98. Корнейчук Н. П. Аппроксимация с ограничениями / Н. П. Корнейчук, А. А. Лигун, В. Г. Доронин. – К.: Наукова думка, 1982. – 254 с.

99. Корнейчук Н. П. Наилучшие квадратурные формулы для классов дифференцируемых функций и кусочнополиномиальное приближение / Н. П. Корнейчук, Н. Е. Лушпай // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1969. – Т. 33, №6. – С. 1416–1437.

100. Коровкин П. П. О сходимости линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций / П. П. Коровкин // Докл. АН СССР. – 1953. – Т. 90, №6. – С. 961–964.

101. Коровкин П. П. О порядке приближения функций линейными положительными операторами / П. П. Коровкин // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 114, №6. – С. 1158–1161.

102. Коротков В. К. Интегральные операторы / В. К. Коротков. – Новосибирск: Наука, 1983. – 224 с.

103. Кофанов В. А. Неравенства разных метрик для дифференцируемых периодических функций / В. А. Кофанов // Укр. матем. журн. – 2015. – Т. 67, №2. – С. 202—212.

104. Красносельский М. А. Позитивные линейные системы: метод положительных операторов / М. А. Красносельский Е. А. Лифшиц, А. В. Соболев. – М.: Наука, 1985. – 254 с.

105. Красносельский М. А. Выпуклые функции и пространства Орлича / М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры., 1958. – 271 с.

106. Крейн М. Г. L-проблема в абстрактном линейном нормированном пространстве (статья в книге: Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов). – Харьков: ГНТИ Укр., 1938. – С. 171–199.

107. Крейн М. Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М. Г. Крейн, А. А. Нудельман. – М.: Наука, 1973. – 551 с.

108. Крейн М. Г. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространствах Банаха / М. Г. Крейн, М. А. Рутман // Усп. матем. наук. – 1948. – Т. 3, №1. – С. 3–95.

109. Кудрявцев Л. Д. Лекции по математическому анализу. Т. 2 / Л. Д. Кудрявцев. – М.: Дрофа, 2004. – 720 с.

110. Кузьмина А. Л. Интервальные квадратурные формулы с кратными узловыми интервалами / А. Л. Кузьмина // Изв. вузов. Матем. – 1980. – Т. 7. – С. 39–44.

111. Купцов Н. П. Колмогоровские оценки для производных в $L_2[0,\infty)$ / Н. П. Купцов // Тр. МИАН СССР. – 1975. – Т 138. – С. 94–117.

112. Купцов Н. П. О точных константах в неравенствах между нормами функций и их производных / Н. П. Купцов // Матем. заметки. – 1987. – Т. 41, №3. – С. 313–319.

113. Лигун А. А. Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций / А. А. Лигун // Матем. заметки. – 1976. – Т. 19, №6. – С. 913–926.

114. Лигун А. А. Об оптимальном выборе узлов при приближении функций интерполяционными сплайнами / А. А. Лигун, А. А. Шумейко // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1984. – Т. 24, №9. – С. 1283–1293.

115. Литвин О. М. Інтерлінація функцій / О. М. Литвин. – Харків: Основа, 1993.

116. Литвин О. М. Интерлинация функций 2-х переменных на M ($M \geq 2$) прямых с наивысшей алгебраической точностью / О. М. Литвин // Укр. матем. журн. – 1992. – Т. 44, №11. – С. 1498–1510.

117. Литвин О. М. Методы аппроксимации функций и современные компьютерные технологии / О. М. Литвин, И. В. Сергиенко // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – Т. 43, №1. – С. 64–81.

118. Лушпай Н. Е. Наилучшие квадратурные формулы на классах дифференцируемых периодических функций / Н. Е. Лушпай // Матем. заметки. – 1969. – Т. 6, №4. – С. 475–481.

119. Любич Ю. И. О неравенствах между степенями линейного оператора / Ю. И. Любич // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1960. – Т. 24, №6. – С. 825–864.

120. Люстерник Л. А. Некоторые кубатурные формулы для кратных интегралов / Л. А. Люстерник // Докл. АН УССР. – 1948. – Т. 62. – С. 449–452.

121. Магарил-Ильяев Г. Г. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным / Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко // Матем. заметки. – 1991. – Т. 50, №6. – С. 85–93.

122. Магарил-Ильяев Г. Г. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью / Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко // Матем. сб. – 2002. – Т. 193, №3. – С. 79–100.

123. Магарил-Ильяев Г. Г. Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям / Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко // Матем. сб. – 2009. – Т. 200, №5. – С. 37–54.

124. Марчук А. Г. Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек / А. Г. Марчук, К. Ю. Осипенко // Матем. заметки. – 1975. – Т. 17, №3. – С. 359–368.

125. Маторин А. П. О неравенствах между наибольшими значениями абсолютных величин функции и ее производных на полупрямой / А. П. Маторин // Укр. матем. журн. – 1955. – Т. 7, №3. – С. 262–266.

126. Моторный В. П. О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций / В. П. Моторный // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1974. – Т. 38, №3. – С. 583–614.

127. Моторный В. П. Исследования днепропетровских математиков по оптимизации квадратурных формул / В. П. Моторный // Укр. матем. журн. – 1990. – Т. 42, №1. – С. 18–33.

128. Теория приближений и гармонический анализ / В. П. Моторный, В. Ф. Бабенко, А. А. Довгошей, О. И. Кузнецова. – К.: Наукова думка, 2014.

129. Моторный В. П. О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i f\left(x_i\right)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций / В. П. Моторный, А. О. Кущ // Иссл. по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Дн-ск., 1987. – С. 60–65.

130. Мысовских И. П. Интерполяционные кубатурные формулы / И. П. Мысовских. – М: Наука, 1981.

131. Нгуен Тхи Т. Х., О наилучших методах интегрирования и восстановления функций на классах, задаваемых свертками, не увеличивающими осцилляцию / Нгуен Тхи Т. Х. // Усп. матем. наук. – 1984. – Т. 39, №2. – С. 177–178.

132. Нгуен Тхи Т. Х., Наилучшие квадратурные формулы и методы восстановления функций, определяемых ядрами, не увеличивающими осцилляцию / Нгуен Тхи Т. Х. // Матем. сб. – 1986. – Т. 130, №1. – С. 105–119.

133. Нгуен Тхи Т. Х., Теорема Ролля для дифференциальных операторов и некоторые экстремальные задачи теории приближения / Нгуен Тхи Т. Х. // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 295, №6. – С. 1313–1318.

134. Нгуен Тхи Т. Х., Некоторые экстремальные задачи на классах функций, задаваемых линейными дифференциальными операторами / Нгуен Тхи Т. Х. // Матем. сб., 1989. – Т. 180, №10. – С. 1355–1395.

135. Нгуен Тхи Т. Х., Осцилляционные свойства дифференциальных операторов и операторов свертки и некоторые приложения / Нгуен Тхи Т. Х. // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1989. – Т. 53, №3. – С. 590–606.

136. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем / С. М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1946. – Т. 10, №3. – С. 207–256.

137. Никольский С. М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами / С. М. Никольский // Усп. матем. наук. – 1960. – Т. 5, №2. – С. 165–177.

138. Никольский С. М. Квадратурные формулы / С. М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1952. – Т. 16, №2. – С. 181–196.

139. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. – М.: Наука, 1977.

140. Никольский С. М. Квадратурные формулы / С. М. Никольский. – М.: Наука, 1988.

141. Оловянишников В. М. К вопросу о неравенствах между верхними гранями последовательных производных на полупрямой / В. М. Оловянишников // Усп. матем. наук. – 1951. – Т. 6, №2. – С. 167–170.

142. Осколков К. И. Об оптимальности квадратурной формулы с равноотстоящими узлами на классах периодических функций / К. И. Осколков // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 249, №1. – С. 49–52.

143. Парфінович Н. В. Сплайни в екстремальних задачах теорії наближень, нерівності для похідних та їх застосування : дис. докт. фіз.-мат. наук : 01.01.01 / Парфінович Н. В. – Дніпро: ДНУ, 2018. – 327 с.

144. Прудников А. П. Интегралы и ряды. Том 1: Элементарные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Марычев. – М.: Наука, 1981.

145. Рубан В. И. Четные поперечники классов $W^{(r)}H_\omega$ в пространстве $C_{2\pi}$ / В. И. Рубан // Матем. заметки. – 1974. – Т. 15, №3. – С. 387–392.

146. Самко С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Марычев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

147. Сидоров С. П. Оценка относительного линейного поперечника единичного шара для класса положительных операторов / С. П. Сидоров // Сиб. журн. индустр. матем. – 2007. – Т. 10, №4. – С. 122–128.

148. Сидоров С. П. Аппроксимативные свойства линейных конечномерных методов формосохраняющего приближения дифференцируемых функций : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня докт. фіз.-мат. наук / С. П. Сидоров. – Екатеринбург, 2014.

149. Скороходов Д. С. О задаче Ландау-Колмогорова на отрезке для абсолютно монотонных функций / Д. С. Скороходов // Вісн. Дн-ського. ун-ту., Сер. Матем. – 2009. – Т. 14. – С. 120–128.

150. Скороходов Д. С. О существовании обобщенного несимметричного (α, β)-сплайна, усреднения которого принимают равные минимумы в заданных точках / Д. С. Скороходов // Укр. матем. журн. – 2009. – Т. 61, №2. – С 261–267.

151. Скороходов Д. С. О неравенствах типа Колмогорова для классов кратно монотонных на конечном отрезке фунций / Д. С. Скороходов // Вісн. Дн-ського. ун-ту., Сер. Матем. – 2010. – Т. 6, №15. – С. 156–161.

152. Скороходов Д. С. Нерівності типу Колмогорова для функцій, означених на дійсній осі або напівосі, та їх застосування : дис. канд. фіз.-мат. наук : 01.01.01 / Скороходов Д. С. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2010.

153. Скороходов Д. С. Задача Ландау-Колмогорова на отрезке для класса абсолютно-монотонных функций / Д. С. Скороходов // Укр. матем. журн. – 2011. – Т. 63, №4. – С. 531–548.

154. Скороходов Д. С. О наилучшем приближении классов Гельдера линейными методами / Д. С. Скороходов // Доп. НАН України. – 2014. – Т 8. – С. 41–47.

155. Скороходов Д. С. О наилучшем линейном методе приближения классов Гельдера / Д. С. Скороходов // Укр. матем. журн. – 2015. – Т. 67, №9. – С. 1265–1284.

156. Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них : дис. канд. фіз.-мат. наук / Смоляк С. А. – М.: МГУ, 1965.

157. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул / С. Л. Соболев. – М.: Наука, 1974.

158. Спеньер Э. Алгебраическая топология / Э. Спеньер. – М.: Изд-во Ин. Лит., 1971.

159. Стечкин С. Б. Неравенства между нормами производных функции / С. Б. Стечкин // Acta Sci. Math. – 1965. – Т. 26, №3-4 – С. 225–230.

160. Стечкин С. Б. Наилучшее приближение линейных операторов / С. Б. Стечкин // Матем. заметки. – 1967. – Т. 1, №2. – С. 137–148.

161. Субботин Ю. Н. Зависимость оценок многомерной кусочно полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик тріангуляции / Ю. Н. Субботин // Тр. МИАН СССР. – 1989. – Т. 189. – С. 117–137.

162. Субботин Ю. Н. Точные значения относительных поперечников классов дифференцируемых функций / Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский // Матем. заметки. – 1999. – Т 65, №6. – С. 871—879.

163. Субботин Ю. Н. Об относительных поперечниках классов дифференцируемых функций / Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский // Тр. МИАН. – 2005. – Т 248. – С. 250—261.

164. Субботин Ю. Н. Уточнение оценок относительных поперечников классов дифференцируемых функций / Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский // Тр. МИАН. – 2010. – Т. 269. – С. 242-–253.

165. Субботин Ю. Н. Об относительных поперечниках классов дифференцируемых функций. III / Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский // Тр. ИММ УрО РАН. – 2011. – Т. 17, №3. – С. 300–302.

166. Субботин Ю. Н. Неравенства для производных монотонных функций : в сборнике статей “Приближение функций. Теоретические и прикладные аспекты” / Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных. – М.: МИЭТ, 2003. – С. 199–211.

167. Тайков Л. В. Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования / Л. В. Тайков // Матем. заметки. – 1968. – Т. 4, №2. – С. 233–238.

168. Тимошин О. А. Наилучшее приближение производной и аналоги неравенства Ландау на полупространстве / О. А. Тимошин // Тр. МИАН. – 1997. – Т. 219. – С. 387–399.

169. Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений / В. М. Тихомиров // Усп. матем. наук. – 1960. – Т. 15, №3. – С. 81–120.

170. Тихомиров В. М. Письмо в редакцию / В. М. Тихомиров // Усп. матем. наук. – 1960. – Т. 15, №6. – С. 226.

171. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений / В. М. Тихомиров. – М.: Изд-во МГУ, 1976.

172. Тихомиров В. М. Неравенства для производных: Комментарии к избранным трудам А. Н. Колмогорова / В. М. Тихомиров, Г. Г. Магарил-Ильяев. – М.: Наука, 1985. – С. 387–390.

173. Чахкиев М. А. Экспоненциальные полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля, и оптимальные квадратурные формулы / М. А. Чахкиев // Матем. сб. – 1983. – Т. 120, №2. – С. 273–285.

174. Чахкиев М. А. Линейные дифференциальные операторы с вещественным спектром и оптимальные квадратурные формулы / М. А. Чахкиев // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1984. – Т. 48, №5. – С. 1078–1108.

175. Чурілова М. С. Нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку та їх застосування в теорії апроксимації : дис. канд. фіз.-мат. наук : 01.01.01 / Чурілова М. С. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2006. – 150 с.

176. Халмош П. Теория меры / П. Халмош. – М.: Изд-во Ин. Лит., 1953.

177. Черная Е. В. Асимптотически точная оценка погрешности весовой кубатурной формулы на некотором классе непрерывных функций / Е. В. Черная // Укр. матем. журн. – 1995. – Т. 47, №10. – С. 1606–1618.

178. Шадрин А. Ю. О точных постоянных в неравенствах между L_∞-нормами производных на конечном отрезке / А. Ю. Шадрин // Докл. РАН. – 1992. – Т. 326, №1. – С. 50–53.

179. Шарипов Н. Р. Наилучшие интервальные квадратурные формулы для классов Липшица / Н. Р. Шарипов // Констр. теор. функц. и функц. анал. – 1983. – Т. 4. – С. 124–132.

180. Шилов Г. Е. О неравенствах междку производными / Г. Е. Шилов // Сб. научных студ. работ МГУ. – 1937. – С. 17–27.

181. Ahlberg J. H. The Theory of Splines and Their Applications / J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, J. L. Walsh. – New York: Acad. Press, 1967. – 296 p.

182. Arestov V. V. Inequalities for fractional derivatives on the half-line / V. V. Arestov // Approximation Theory. – V. 4. – Warsaw: Banach Center Publication. – P. 19–34.

183. Aronszajn N. On general integral transformations / N. Aronszajn, P. Szeptycki // Math. Ann. – 1966. – V. 163. – P. 127–154.

184. Babenko V. F. On the optimal error bound for cubature formulae on certain classes of continuous functions / V. F. Babenko // Anal. Math. – 1977. – V. 3. – P. 3–9.

185. Babenko V. F. Approximations, widths and optimal quadrature formulae for classes of periodic functions with rearrangement invariant sets of derivatives / V. F. Babenko // Anal. Math. – 1987. – V. 13. – P. 281–306.

186. Babenko V. Kolmogorov inequalities for multiply monotone functions defined on a half-line / V. Babenko, Yu. Babenko // East J. Approx. – 2005. – V. 11, №2. – P. 169–186.

187. Babenko V. F. The Kolmogorov inequality for absolutely monotone functions on a half-line / V. F. Babenko, Yu. V. Babenko // Adv. in Constr. Approx. – Vanderbilt. – 2003. – P. 63–74.

188. On asymptotical behavior of the optimal linear spline interpolation error of C^2 functions / V. Babenko, Yu. Babenko, A. Ligun, A. Shumeiko // East J. Approx. – 2006. – V. 12, №1. – P. 71–101.

189. On one extremal property of a regular simplex / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, D. Skorokhodov // Com. in Anal. and Geom. – 2009. – V. 17, №4. – P. 685–699.

190. Exact asymptotics of the optimal L_p-error of asymmetric linear spline approximation / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, D. Skorokhodov // Jaen J. Approx. – 2014. – V. 6, №1. – P. 1–36.

191. Optimal recovery of integral operators and its applications / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, D. Skorokhodov // J. Complexity. – 2016. – V. 35. – P. 102–123.

192. Babenko V. Exact asymptotics of the optimal $L_{p,\Omega}$-error of linear spline interpolation / V. Babenko, Yu. Babenko, D. Skorokhodov // East J. Approx. – 2008. – V. 14, №3. – P. 285–317.

193. Babenko V. F. On optimization of approximate integration over d-dimensional ball / V. F. Babenko, S. V. Borodachov // East J. Approx. – 2003. – V. 9, №1. – P. 95–109.

194. Babenko V. F. On optimization of approximate integration of multivariate periodic functions / V. F. Babenko, S. V. Borodachov // North Holland Mathematics Studies. – 2004. – V. 197. – P. 13–22. – (Proceedings of the International Conference on Functional Analysis and its Applications dedicated to the 110-th anniversary of Stefan Banach, Lviv, Ukraine, 2002).

195. Babenko V. F. On the construction of optimal cubature formulae which use integrals over hyperspheres / V. F. Babenko, S. V. Borodachov // J. Complexity. – 2007. – V. 23, №3. – P. 346–358.

196. Babenko V. F. Optimal recovery of isotropic classes of twice-differentiable multivariate functions / V. F. Babenko, S. V. Borodachov, D. S. Skorokhodov // J. Complexity. – 2010. – V. 26, №6. – P. 591–607.

197. Babenko V. F. Construction of optimal cubature formulas related to computer tomography / V. F. Babenko, S. V. Borodachov, D. S. Skorokhodov // Constr. Approx. – 2011. – V. 33, №3. – P. 313–330.

198. Babenko V. F. Optimal cubature formulas for tensor products of certain classes of functions / V. F. Babenko, S. V. Borodachov, D. S. Skorokhodov // J. Complexity. – 2011. – V. 27, №6. – P. 519–530.

199. Babenko V. F. Optimal cubature formulas related to tomography for certain classes of functions defined on a cube / V. F. Babenko, S. V. Borodachov, D. S. Skorokhodov // Jaen J. Approx. – 2011. – V. 3, №2. – P. 143–160.

200. Kolmogorov type inequalities for the Marchaud fractional derivatives on the real line and the half-line [Електронний ресурс] / V. F. Babenko, M. S. Churilova, N. V. Parfinovych, D. S. Skorokhodov // J. Ineq. and Appl. – 2014. – V. 2014, №1. – P. 1–29. – Режим доступу до ресурсу: https://link.springer.com/article/10.1186/1029-242X-2014-504.

201. Babenko V. F. On exact inequalities of Hardy-Littlewood-Polya type / V. F. Babenko, T. M. Rassias // J. Math. Anal. and Appl. – 2000. – V. 245. – P. 570–593.

202. Babenko V. On the best interval quadrature formulae for classes of differentiable periodic functions / V. Babenko, D. Skorokhodov // J. Complexity. – 2007. – V. 23, №4-6. – P. 890–917.

203. Babenko V. On the best interval quadrature formulae for convolution classes / V. Babenko, D. Skorokhodov // East J. Approx. – 2008. – V. 14, №3. – P. 353–376.

204. Babenko Yu. On the asymptotic behavior of the optimal error of spline interpolation of multivariate functions : PhD thesis / Babenko Yu. – Nashville: Vanderbilt, 2006.

205. Babenko Yu. Exact asymptotic of the uniform error of interpolation by multilinear splines / Yu. Babenko // J. Approx. Theory. – 2010. – V. 162. – P. 1007–1024.

206. Babenko Yu. On the L_p-error of adaptive approximation of bivariate functions by harmonic splines / Yu. Babenko, T. Leskevich // Applic. Anal. – 2014. – V. 93, №1. – P. 171–189.

207. Babenko Yu. Sharp asymptotics of the L_p approximation error for interpolation on block partitions / Yu. Babenko, T. Leskevich, J. M. Mirebeau // Numer. Math. – 2011. – V 117, №3. – P. 397–423.

208. Babenko Yu. Stechkin's Problem for Differential Operators and Functionals of First and Second Order / Yu. Babenko, D. Skorokhodov // J. Approx. Theory. – 2013. – V. 167, №3. – P. 173–200.

209. Barrar R. B. On a nonlinear characterization problem for monosplines / R. B. Barrar, H. L. Loeb // J. Approx. Theory. – 1976. – V. 18, №3. – P. 220–240.

210. Bartle R. G. Introduction to real analysis : 3rd Ed / R. G. Bartle, D. R. Sherbert. – John Wiley & Sons, Inc., 2000.

211. Bejancu A. Transfinite Thin Plate Spline Interpolation / A. Bejancu // Constr. Approx. – 2011. – V. 34, №2. – P. 237–256.

212. Benedetto J. J. Sampling, wavelets, and tomography / J. J. Benedetto, A. I. Zayed. (eds) – Basel: Birkhäuser, 2004.

213. Birkhoff G. The draftsman's and related equations / G. Birkhoff, W. J. Gordon // J. Approx. Theory. – 1968. – V. 1, №2. – P. 199–208.

214. Bojanov B. Uniqueness of the optimal nodes of quadrature formulae / B. Bojanov // Math. of Comput. – 1981. – V. 36, №154. – P. 525–546.

215. Bojanov B. D. Cubature formulas for polyharmonic functions / B. D. Bojanov // Recent progress in multivariate approximation. – 2001. – V. 137. – P. 49–74.

216. Bojanov B. D. An extension of Pizzetti formula for polyharmonic functions / B. D. Bojanov // Acta Math. Hung. – 2001. – V. 91, №1-2. – P. 99–113.

217. Bojanov B. Interpolation and integration based on averaged values / B. Bojanov // Banach Center Publications. – 2006. – V. 72. – P. 25–47.

218. Bojanov B. Periodic monosplines and perfect splines of least norm / B. Bojanov, Daren Huang // Constr. Approx. – 1987. – V. 3, №1. – P. 363–375.

219. Bojanov B. On the optimal quadrature formulas in W_q^r of quasi-Hermitian type / B. Bojanov, Daren Huang // Approx. Theory and its Appl. – 1988. – V. 4, №4. – P. 13–22.

220. Bojanov B. D. Gaussian extended cubature formulae for polyharmonic functions / B. D. Bojanov, D. K. Dimitrov // Math. of Comput. – 2001. – V. 70, №234. – P. 671–683.

221. Bojanov B. An extension of the Landau-Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdös / B. Bojanov, N. Naidenov // J. d'Analyse Mathématique. – 1999. – V. 78, №1. – P. 263–280.

222. Bojanov B. Examples of Landau-Kolmogorov inequality in integral norms on a finite interval / B. Bojanov, N. Naidenov // J. Approx. Theory. – 2002. – V. 117, №1. – P. 55–73.

223. Bojanov B. D. Gaussian interval quadrature formulae / B. D. Bojanov, P. P. Petrov // Numer. Math. – 2001. – V. 87, №4. – P. 625–643.

224. Bojanov B. Uniqueness of the interval quadrature formula / B. Bojanov, P. Petrov // Numer. Math. – 2003. – V. 95, №1. – P. 53–62.

225. Bojanov B. Gaussian Interval Quadrature Formulae for Tchebycheff Systems / B. Bojanov, P. Petrov // SIAM J. Numer. Anal. – 2005. – V. 43, №2. – P. 787–795.

226. Bojanov B. D. Uniqueness of the Gaussian quadrature for a ball / B. D. Bojanov, G. Petrova // J. Approx. Theory. – 2000. – V. 104, №1. – P. 21–44.

227. Bondarenko A. Optimal asymptotic bound for spherical designs / A. Bondarenko, D. Radchenko, M. Viazovska // Ann. Math. – 2013. – V. 178, №2. – P. 443–452.

228. Borodachov S. An optimal multivariate spline method of recovery of twice differentiable functions / S. Borodachov, T. Sorokina // BIT Numer. Math. – 2011. – V 51. – P. 497–511.

229. Borsuk K. Drei Sätze über die n-dimensionale eukludische Späre / K. Borsuk // Fund. Math. – 1933. – V. 20. – P. 949–952.

230. Borwein P. Polynomials and polynomial inequalities / P. Borwein, T. Erdélyi. – Berlin: Springer, 1995.

231. Böröczky K. Approximation of general smooth convex bodies / K. Böröczky // Adv. in Math. – 2000. – V. 153, №2. – P. 325–341.

232. Böröczky K. Approximation of Convex Bodies and a Momentum Lemma for Power Diagrams / K. öröczky, M. Ludwig // Monatsh. für Math. – 1999. – V. 127, №2. – P. 101–110.

233. Brezin M. A solution-based triangular and tetrahedral mesh quality indicator / M. Brezin // SIAM J. Sci. Comp. – 1992. – V. 19, №6. – P. 2051–2060.

234. Chen L. On minimizing the linear interpolation error of convex quadratic functions and the optimal simplex / L. Chen // East J. Approx. – 2008. – V. 10, №3. – P. 271–284.

235. Chen L. Optimal anisotropic meshes for minimizing interpolation errors in L_p-norm / L. Chen, P. Sun, J. Xu // Math. Comput. – 2007. – V. 19. – P. 179–204.

236. Chernaya E. V. On the optimization of weighted cubature formulae on certain classes of continuous functions / E. V. Chernaya // East J. Approx. – 1995. – V. 1, №1. – P. 47–60.

237. Chui C. K. An Introduction to Wavelets / C. K. Chui. – London: Academic Press, 1992.

238. Chui C. K. A note on Landau's problem for bounded intervals / C. K. Chui, P. W. Smith // Amer. Math. Monthly. – 1975. – V. 82, №9. – P. 927–929.

239. Cohen A. Adaptive and anisotropic piecewise polynomial approximation / A. Cohen, J. M. Mirebeau // Multiscale, Nonlinear and Adaptive Approximation. – Springer, 2009.

240. Coons S. A. Surface for computer-aided design of space forms / S. A. Coons // Project MAC report MAC-TR-41. – Cambridge, 1967. – P. 3–30.

241. D'Azevedo E. F. On optimal interpolation triangle incidences / E. F. D'Azevedo, R. B. Simpson // SIAM J. Sci. and Stat. Comput. – 1989. – V. 10, №6. – P. 1063–1075.

242. Delsarte P. Spherical codes and designs / P. Delsarte, J. M. Goethals, J. J. Seidel // Geometriae Dedicata. – 1977. – V. 6, №3. – P. 363–388.

243. DeVore R. A. Monotone Approximation by Splines / R. A. DeVore // SIAM J. Math. Anal. – 1977. – V. 8, №5. – P. 891–905.

244. DeVore R. Nonlinear approximation / R. Devore // Acta Numer. – 1998. – V. 7. – P. 51–150.

245. Dimitrov D. K. Integration of polyharmonic functions / D. K. Dimitrov // Math. Comput. – 1996. – V. 62, №215. – P. 1269–1281.

246. Dũng D. Hyperbolic Cross Approximation / D. Dũng, V. Temlyakov, T. Ullrich. – Basel: Birkhäuser, 2018.

247. Dyken C. Transfinite mean value interpolation / C. Dyken, M. Floater // Comp. Aided Geom. Design. – 2009. – V. 26, №1. – P. 117–134.

248. Dyn N. Data dependent triangulations for piecewise linear interpolation / N. Dyn, D. Levin, S. Rippa // IMA J. Numer. Anal. – 1990. – V. 10, №1. – P. 137–154.

249. Eriksson B.-O. Some best constants in the Landau inequality on a finite interval / B.-O. Eriksson // J. Approx. Theory. – 1998. – V. 94, № 3. – P. 420–454.

250. Evans L. C. Partial Differential Equations : 2nd Ed / L. C. Evans. – American Mathematical Society, 2010. – 749 p.

251. Fink A. M. Kolmogorov-Landau inequalities for monotone functions / A. M. Fink // J. Math. Anal. and Appl. – 1992. – V. 90, №1. – P. 251–258.

252. Floater M. S., Mean value coordinates / M. S. Floater // Comp. Aided Geom. Design. – 2003. – V 20, №1. – P. 19–27.

253. Gauss C. F. Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi / C.F. Gauss // Commentationes Societatis Regiae Scientarium Gottingensis Recentiores 3. – 1814. – V. 3. – P. 163–196.

254. Gilewicz J. Widths and shape-preserving widths of Sobolev-type classes of s-monotone functions / J. Gilewicz, V. N. Konovalov, D. Leviatan // J. Approx. Theory. – 2006. – V. 140, №2. – P. 101–126.

255. Golomb M. Interpolation operators as optimal recovery schemes for classes of analytic functions / M. Golomb // Optimal Estimation in Approx. Theory, The IBM Research Symposia Series. – 1977. – P. 93–138.

256. Gonska H. H. Quantitative Korovkin type theorems on simultaneous approximation / H. H. Gonska // Math. Z. – 1984. – V. 186, №3. – P. 419–433.

257. Goodman J. Handbook of Discrete and Computational Geometry / J. Goodman, J. O'Rourke (eds). – CRC Press, 2004.

258. Gordon W. Construction of curvilinear coordinate systems and application to mesh generation / W. Gordon, G. Hall // Int. J. Numer. Methods in Eng. – 1973. – V. 7. – P. 461–477.

259. Gruber P. Volume approximation of convex bodies by inscribed polytopes / P. Gruber // Mathematische. Annalen. – 1988. – V. 281, №2. – P. 229–245.

260. Gruber P. Error of asymptotic formulae for volume approximation of convex bodies in E^d / P. Gruber // Monatsh. Math. – 2002. – V. 135, №4. – P. 279–304.

261. Gruber P. Optimum quantization and its applications / P. Gruber // Adv. Math. – 2004. – V. 186, №2. – P. 456–497.

262. Hardy G. H. Inequalities / G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya // Cambridge: University Press, 1934.

263. Horn R. A. Matrix Analysis / R. A. Horn, C. R. Johnson // Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

264. Huang W. Measuring mesh qualities and application to variational mesh adaption / W. Huang // SIAM J. Sci. Comput. – 2005. – V. 26, №5. – P. 1643–1666.

265. Huang W. Variational mesh adaptation. II. Error estimates and monitor functions / W. Huang, W. Sun // J. Comput. Phys. – 2003. – V. 184, №2. – P. 619–648.

266. Jetter K. Die Eindeutigkeit L_2-optimaler polynomialer Monosplines / K. Jetter, G. Lange // Math. Z. – 1978. – V. 158, №1. – P. 22–34.

267. Kallioniemi H. The Landau problem on compact intervals and optimal differentiation / H. Kallioniemi // J. Approx. Theory. – 1990. – V. 63. – P. 72–91.

268. Karlin S. Total Positivity, V. 1 / S. Karlin. Stanford. Univ. Press, 1968.

269. Karlin S. Oscillatory perfect splines and related extremal problems / S. Karlin // Studies in spline functions and approximation theory. – New York: Acad. Press, 1976. – P. 371–460.

270. Kilbas A. A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. – Amsterdam: Elsevier, 2006.

271. Klein R. Voronoi Diagrams and Delaunay Triangulations / R. Klein, D. T. Lee. – World Scientific, 2013.

272. Knoop H.-B. Ein Satz vom Korovkin-Typ fur C^k Raume / H.-B. Knoop, P. Pottinger // Math. Z. – 1976. – V 148. – P. 23–32.

273. Kolmogoroff A. Über Die Beste Annäherung Von Funktionen Einer Gegebenen Funktionenklasse / A. Kolmogoroff // Ann. Math. – 1936. – V. 37, №1. – P. 107–110.

274. Konovalov V. Shape preserving widths of Sobolev-type classes of k-monotone functions on a finite interval / V. Konovalov, D. Leviatan // Israel J. Math. – 2003. – V. 133. – P. 239–268.

275. Konovalov V. N. Shape Preserving Widths of Weighted Sobolev-Type Classes of Positive, Monotone, and Convex Functions on a Finite Interval / V. N. Konovalov, D. Leviatan // Constr. Approx. – 2008. – V. 19, №1. – P. 23–58.

276. Korneichuk N. P. Optimal methods of coding and functions recovery / N. P. Korneichuk // Sofia: Optimal algorithms, 1986. – P. 157–171.

277. Kounchev O. Multivariate polysplines: applications to numerical and wavelet analysis / O. Kounchev. – London: Academic Press, 2001.

278. Krein S. G. Interpolation of Linear Operators / S. G. Krein, J. I. Petunin, E. M. Semenov. – Groningen: American Mathematical Society, 1982.

279. Kroó A. On the exact markov inequality for k-monotone polynomials in uniform and L_1-norm / A. Kroó, J. Szabados // Acta Math. Hungar. – 2009. – V. 125, №1-2. – P. 99–112.

280. Kuzmenko D. Optimization of transfinite interpolation of functions with bounded Laplacian by harmonic splines on box partitions / D. Kuzmenko, D. Skorokhodov // J. Approx. Theory. – 2016. – V. 209, №9. – P. 44–57.

281. Kwong M. K. Norm inequalities for derivatives and differences / M. K. Kwong, A. Zettl. – Berlin: Springer, 1992. – 1536 p.

282. Landau E. Einige Ungleichungen fur zweimal differenzierbare Funktionen / E. Landau // Proc. London Math. Soc. – 1913. – V. 13. – P. 43–49.

283. Ling B. Optimal recovery of isotropic classes of twice-differentiable functions defined on d-dimensional Euclidean space / B. Ling, Y. Liu // J. Approx. Theory. – 2014. – V. 182. – P. 83–91.

284. Mainardi F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models / F. Mainardi. – Imperial College Press, 2010.

285. Mairhuber J. C. On variation diminishing transformations on the circle / J. C. Mairhuber, I. J. Schoenberg, R. E. Williamson // Rend. Circ. Mat. Palermo. – 1959. – V. 8, №2. – P. 241–270.

286. Magaril-Il'yaev G. G. On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line / G. G. Magaril-Il'yaev, V. M. Tihomirov // Anal. Math. – 1981. – V. 7, № 1. – P. 37–47.

287. Mangeron D. I., Sopra un problema al contorno per un'equatione differentiable alle derivate parziali di quartordine conle caratteristice reali dopie / D. I. Mangeron // Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli. – 1932. – V. 2. – P. 28–40.

288. Marchaud A. Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles / A. Marchaud // Journal de mathématique pures et appliquées 9^{e} série. – 1927. – V. 6. – P. 337–426.

289. Melkman A. A. Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data / A. A. Melkman, C. A. Micchelli // SIAM J. Numer. Anal. – 1979. – V. 16, №1. – P. 87–105.

290. Micchelli C. A. A Survey of optimal recovery / C. A. Micchelli, T. J. Rivlin // Optimal Estimation in Approx. Theory, The IBM Research Symposia Series. – 1977. – P. 93–138.

291. Micchelli C. A. Lectures on optimal recovery / C. A. Micchelli, T. J. Rivlin // Lect. Notes in Math. – 1985. – V. 1129. – P. 21–93.

292. Milovanovic G. V. Gauss-Radau and Gauss-Lobatto interval quadrature rules for Jacobi weight function / G. V. Milovanovic, A. S. Cvetkovic // Numer. Math. – 2006. – V. 102, №3. – P. 523–542.

293. Mirebeau J. M. Optimally adapted finite elements meshes / J. M. Mirebeau // Constr. Approx. – 2010. – V. 32, №2. – P. 339–383.

294. Mirebeau J. M. Approximation adaptative et anisotrope par éléments finis Théorie et Algorithmes : Thèse de doctorat / Mirebeau J. M. – 2010.

295. Mitrinovic D. S. Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives / D. S. Mitrinovich, J. Pecaric, A. M. Fink. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

296. Motornyi V. P. On the best interval quadrature formula in the class of functions with bounded r^{th} derivative / V. P. Motornyi // East J. Approx. – 1998. – V. 4. – P. 459–478.

297. Muñoz-Deldago F. J. Almost convexity and quantitative Korovkin type results / F. J. Muñoz-Deldago, D. Cárdenas-Morales // Appl. Math. Lett. – 1998. – V. 94, №4. – P. 105–108.

298. Muñoz-Deldago F. J. Qualitative Korovkin-type results on conservative approximation / F. J. Muñoz-Deldago, V. Ramírez-González, D. Cárdenas-Morales // J. Approx. Theory. – 1998. – V. 94. – P. 144-159.

299. Nadler E. Piecewise linear approximation on triangulations of a planar region : PhD thesis / Nadler E. – Brown University, 1985.

300. Nadler E. Piecewise linear best L_2 approximation on triangles / E. Nadler // Approximation Theory, V. 5 / Chui, C. K., Schumaker, L. L., Ward, J. D. (eds.). – Academic Press. – 1986. – P. 499–502.

301. Naidenov N. Landau-type extremal problem for the triple $\|f\|_\infty$, $\|f'\|_p$, $\|f''\|_\infty$ on a finite interval / N. Naidenov // J. Approx. Theory. – 2003. – V. 123. – P. 147–161.

302. Naidenov N. On an extremal problem of Kolmogorov type for functions from $W^4_\infty([a,b])$ / N. Naidenov // East J. Approx. – 2003. – V. 9, №3. – P. 117–135.

303. Natterer F. The mathematics of computerized tomography / F. Natterer. – Stuttgart; John Wiley and Sons, Ltd., 1986.

304. Nemirovski A. S. Problem Complexity and Method Efficiency in Optimization / A. S. Nemirovski, D. B. Yudin // New York: Wiley and Sons, 1983.

305. Novak E. Deterministic and Stochastic Error Bounds in Numerical Analysis / E. Novak // Lecture Notes in Math, V. 1349. – Berlin: Springer-Verlag, 1988.

306. Novak E. On the power of adaptation / E. Novak // J. Complexity. – 1996. – V. 12. – P. 199–237.

307. Novak E. Tractability of multivariate problems / E. Novak, H. Wozniakowski. – European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.

308. Oldham K. B. The Fractional Calculus; Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order / K. B. Oldham, J. Spanier // Mathematics in Science and Engineering, V. 5. – Academic Press, 1974.

309. Omladich M. On a new type of quadrature formulae / M. Omladich, S. Pahor, S. Suhadolc // Numer. Math. – 1976. – V. 25. – P. 421–426.

310. Osipenko K. Yu. Optimal recovery of analytic functions / K. Yu. Osipenko. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2000.

311. Oskolkov K. I. On optimal Quadrature Formulae on Certain Classes of Periodic Functions / K. I. Oskolkov // Appl. Math. Optim. – 1982. – V. 8. – P. 245–263.

312. Petrova G. Uniqueness of the Gaussian extended cubature for polyharmonic functions / G. Petrova // East J. Approx. – 2003. – V. 9, №3. – P. 269–275.

313. Petrova G. Cubature formulae for spheres, simplices and balls / G. Petrova // J. Comput. and Appl. Math. – 2004. – V. 162, №2. – P. 483–496.

314. Pinkus A. Some extremal properties of perfect splines and the pointwise Landau problem on the finite interval / A. Pinkus // J. Approx. Theory. – 1978. – V. 23. – P. 37–64.

315. Pinkus A. N-Widths in Approximation Theory / A. Pinkus. – New York: Springer-Verlag, 1985.

316. Pittnauer F. Interpolation mit Intervallfunctionalen / F. Pittnauer, M. Reimer // Math. Z. – 1976. – V. 146. – P. 7–15.

317. Pittnauer F. Intervallfunktionale vom Gauss-Legendre-Typ / F. Pittnauer, M. Reimer // Math. Nachr. – 1979. – V. 87. – P. 239–248.

318. Plaskota L. Noisy information and computational complexity / L. Plaskota. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.

319. On piecewise linear approximation of quadratic functions / H. Pottmann, R. Krasauskas, B. Hamann та ін. // J. Geom. Graph. – 2000. – V. 4, №1. – P. 23–53.

320. Rajan V. T. Optimality of Delaunay triangulation in $\mathbb{R}^d$ / V. T. Rajan // Proc. of the Seventh Annual Symposium on Comp. Geom. – 1991. – P. 357–363.

321. Rogers C. A. Packing and Covering / C. A. Rogers. – Cambridge: Cambridge University Press, 1964.

322. Sard A. Best approximate integration formulas; best approximation formulas / A. Sard // Amer. J. Math. – 1949. – V. 71. – P. 80–91.

323. Sato M. The Landau inequality for bounded intervals with $\left\|f^{(3)}\right\|$ finite / M. Sato // J. Approx. Theory. – 1982. – V. 34. – P. 159–166.

324. Schaefer H. H. Banach lattices and positive operators / H. H. Schaefer. – Springer-Verlag, 1974.

325. Schoenberg I. J. Solution of Landau's problem concerning higher derivatives on the halfline / I. J. Shoenberg, A. Cavaretta // Proc. of the Int. Conf. on

Constructive Function Theory (Varna, 19–25 May 1970). Sofia: DARBA, 1972. – P. 297–310.

326. Schumaker L. Spline Functions: Basic Theory / L. Schumaker // Cambridge: Cambridge University Press, 3rd Ed, 2007. – 600 p.

327. Serdyuk A. S. Exact values of Kolmogorov widths of classes of Poisson integrals / A. S. Serdyuk, V. V. Bodenchuk // J. Approx. Theory. – 2013. – V. 173. – P. 89–109.

328. Shadrin A. Yu. To the Landau-Kolmogorov problem on a finite interval / A. Yu. Shadrin // Open Problems in Approx. Theory. – 1994. – P. 192–204.

329. Shadrin A. Yu. Twelve proofs of Markov inequality / A. Yu. Shadrin // Approximation Theory: A volume dedicated to Borislav Bojanov (D. K. Dimitrov et al, Eds). – Sofia: Marin Drinov Acad. Publ. House. – 2004. – P. 233–299.

330. Shadrin A. The Landau–Kolmogorov inequality revisited / A. Shadrin // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2014. – V. 34, №3. – P. 1183–1210.

331. Skorokhodov D. On inequalities for the norms of intermediate derivatices of multiply monotone functions defined on a finite segment / D. Skorokhodov // Укр. матем. журн. – 2012. – Т. 64, № 4. – С. 508–524.

332. Skorokhodov D. The order of the best transfinite interpolation of functions with bounded laplacian with the help of harmonic splines on box partitions / D. Skorokhodov // Вісн. Дн-ського. ун-ту., Сер. Матем. – 2018. – Т. 26. – С. 82–88.

333. Sobolev S. L. Cubature formulas and modern analysis: An introduction / S. L. Sobolev. – Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

334. Stein E. M. Functions of exponential type / E. M. Stein // Ann. Math. – 1957. – V. 65, №3. – P. 582–592.

335. Tarasov V. E. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media / V. E. Tarasov. – Berlin: Springer, 2010.

336. Temlyakov V. M. Approximation of Periodic Functions, Computational Mathematics and Analysis Series / V. M. Temlyakov. – Commack, NY: Nova Science Publishers Inc., 1993.

337. Toth Fejes L. Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum / Fejes L. Toth // Berlin: Springer, 2nd ed., 1974.

338. Traub J. F. Information-based complexity / J. F. Traub, G. W. Wasilkowski, H. Wozniakowski // Boston, MA: Academic Press, Inc., 1988.

339. Traub J. F. A general theory of optimal algorithms / J. F. Traub, H. Wozniakowski // ACM Monograph Series. – New York: Academic Press, Inc., 1980.

340. Triebel H. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators / H. Triebel. – Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company, 1978.

341. Weisz F. Summability of Multi-Dimensional Trigonometric Fourier Series / F. Weisz // Surveys in Approx. Theory. – 2012. – V. 7. – P. 1–179.

342. Werschulz A. G. The Computational Complexity of Differential and Integral Equations / A. G. Werschulz. – Oxford: Oxford Univ. Press, 1991.

343. Werschulz A. G. The complexity of Fredholm equations of the second kind: noisy information about everything / A. G. Werschulz // J. Integral Equations and Appl. – 2009. – V. 21, №1. – P. 553–559.

344. Widder D. V. The Laplace transform / D. V. Widder. – Princeton Math. Series, 1946.

Додаток А

Список публікацій добувача:

1. On one extremal property of a regular simplex / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, **D. Skorokhodov** // Commun. Anal. Geom. – 2009. – V. 17, №4. – P. 685–699.
2. Exact asymptotics of the optimal L_p-error of asymmetric linear spline approximation / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, **D. Skorokhodov** // Jaen J. Approx. – 2014. – V. 6, №1. – P. 1–36.
3. Kuzmenko D. Optimization of transfinite interpolation of functions with bounded Laplacian by harmonic splines on box partitions / D. Kuzmenko, **D. Skorokhodov** // J. Approx. Theory. – 2016. – V. 209, №9. – P. 44–57.
4. Babenko V. On the best interval quadrature formulae for classes of differentiable periodic functions / V. Babenko, **D. Skorokhodov** // J. Complexity. – 2007. – V. 23, №.4-6. – P. 890–917.
5. Бабенко В.Ф. Об оптимизации интервальных квадратурных формул / В. Ф. Бабенко, **Д. С. Скороходов** // Вісн. Дн-ського. ун-ту., Сер. Матем. – 2007. – Т. 8, №12. – С. 261–267.
6. Babenko V. On the best interval quadrature formulae for convolution classes / V. Babenko, **D. Skorokhodov** // East J. Approx. – 2008. V. 14, №3. – P. 353–376.
7. **Скороходов Д.С.** О существовании обобщенного несимметричного (α, β)-сплайна, усреднения которого принимают равные минимумы в заданных точках / Д. С. Скороходов // Укр. матем. журн. – 2009. – Т. 61, №2. – С 261–267.
8. Babenko V. F. Construction of optimal cubature formulas related to computer tomography / V. F. Babenko, S. V. Borodachov, **D. S. Skorokhodov** // Constr. Approx. – 2011. – V. 33, №3. – P. 313–330.
9. Babenko V. F. Optimal cubature formulas related to tomography for certain classes of functions defined on a cube / V. F. Babenko, S. V. Borodachov, **D. S. Skorokhodov** // Jaen J. Approx. – 2011. – V. 3, №2. – P. 143–160.
10. Babenko V. F. Optimal cubature formulas for tensor products of certain classes

of functions / V. F. Babenko, S. V. Borodachov, **D. S. Skorokhodov** // J. Complexity. – 2011. – V. 27, №6. – P. 519–530.

11. **Скороходов Д. С.** О наилучшем приближении классов Гельдера линейными методами / Д. С. Скороходов // Доп. НАНУ. – 2014. – Т 8. – С. 41–47.
12. **Скороходов Д. С.** О наилучшем линейном методе приближения классов Гельдера / Д. С. Скороходов // Укр. матем. журн. – 2015. – Т. 67, №9. – С. 1265–1284.
13. Optimal recovery of integral operators and its applications / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, **D. Skorokhodov** // J. Complexity. – 2016. – V. 35, №8. – P. 102–123.
14. Babenko V. F. Optimal recovery of isotropic classes of twice-differentiable multivariate functions / V. F. Babenko, S. V. Borodachov, **D. S. Skorokhodov** // J. Complexity. – 2010. – V. 26, №6. – P. 591–607.
15. Бабенко Ю. В. Задачи Колмогорова и Стечкина для классов функций, вторая производная которых принадлежит пространству Орлича / Ю. В. Бабенко, **Д. С. Скороходов** // Матем. заметки. – 2012. – Т. 91, №2. – С. 172–183.
16. Babenko Yu. Stechkin's Problem for Differential Operators and Functionals of First and Second Order / Yu. Babenko, **D. Skorokhodov** // J. Approx. Theory. – 2013. – V. 167, №3. – P. 173–200.
17. Kolmogorov type inequalities for the Marchaud fractional derivatives on the real line and the half-line [Електронний ресурс] / V. F. Babenko, M. S. Churilova, N. V. Parfinovych, **D. S. Skorokhodov** // J. Ineq. Appl. – 2014. – V. 2014, №1. – P. 1–31. – Режим доступу до ресурсу: https://link.springer.com/article/10.1186/1029-242X-2014-504.
18. **Skorokhodov D.** On inequalities for the norms of intermediate derivatices of multiply monotone functions defined on a finite segment / D. Skorokhodov // Укр. матем. журн. – 2012. – Т. 64, №4. – С. 508–524.
19. **Скороходов Д. С.** О неравенствах типа Колмогорова для классов кратно монотонных на конечном отрезке фунций / Д. С. Скороходов // Вісн. Дн-ського. ун-ту., Сер. Матем. – 2010. – Т. 6, №15. – С. 156–161.
20. **Скороходов Д. С.** Задача Ландау-Колмогорова на отрезке для класса

абсолютно-монотонних функцій / Д. С. Скороходов // Укр. матем. журн. – 2011. – Т. 63, №4. – С. 531–548.

21. **Skorokhodov D.** The order of the best transfinite interpolation of functions with bounded laplacian with the help of harmonic splines on box partitions / D. Skorokhodov // Вісн. Дн-ського. ун-ту., Сер. Матем. – 2018. – Т. 26. – С. 82–88.
22. Babenko V. Best interval quadrature formulae for convolution classes / V. Babenko, **D. Skorokhodov** // Twelfth International Conference in Approximation Theory : міжнар. наук. конф., 4–8 березня 2007 р. : тези допов. – Сан Антоніо, 2007. – С. 48–49.
23. Babenko V. F. Optimal interval quadrature formulae for classes of differentiable periodic functions / V. F. Babenko, **D. S. Skorokhodov** // Extremal Problems in Complex and Real Analysis : міжнар. наук. конф., 22–26 травня 2007 р. : тези допов. – М., 2007. – С. 9.
24. Babenko V. On linear approximation of quadratic functions of two variables in L_p-metric and applications / V. Babenko, Yu. Babenko, **D. Skorokhodov** // Tenth SIAM Conference on Geometric Design and Computing : міжнар. наук. конф., 4–8 листопада 2007 р. : тези допов. – Сан Антоніо, 2007. – С. 42.
25. Бабенко В. Ф. Точная асимптотика L_p-погрешности оптимального кусочно-линейного интерполирования функций класса C^2 / В. Ф. Бабенко, Ю. В. Бабенко, **Д. С. Скороходов** // Современные проблемы теории функций и их приложения : міжнар. наук. конф., 28 січня – 4 лютого 2008 р. : тези допов. – Саратов, 2008. – С. 16–17.
26. Бабенко В. Ф. Асимптотически оптимальное L_p-приближение выпуклых на квадрате функций / В. Ф. Бабенко, Ю. В. Бабенко, **Д. С. Скороходов** // Проблеми математичного моделювання : міждерж. наук.-метод. конф., 28–30 травня 2008 р. : тези допов. – Дніпродзержинськ, 2008. – С. 13–14.
27. Бабенко В. Ф. Об интервальных квадратурных формулах на некоторых классах периодических функций / В. Ф. Бабенко, **Д. С. Скороходов** // Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування : міжнар. наук. конф., 16 – 21 червня 2008 р. : тези допов. – Мелітопіль, 2008. – С. 14.

28. Babenko V. On the weighted interval quadrature formulae on some classes of periodic functions / V. Babenko, **D. Skorokhodov** // Harmonic Analysis and Approximations, IV : міжнар. наук. конф., 19–26 вересня 2008 р. : тези допов. – Цахкадзор, 2008. – С. 117–118.
29. To one additional extremal property of regular simplex / V. F. Babenko, Yu. V. Babenko, N. V. Parfinovych, **D. S. Skorokhodov** // Wavelets and Applications : міжнар. наук. конф., 14–20 червня 2009 р. : тези допов. – С.-Пб., 2009. – С. 5–6.
30. Exact asymptotics of the optimal L_p-error of asymmetric linear spline approximation / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, **D. Skorokhodov** // Wavelets and Applications : міжнар. наук. конф., 14–20 червня 2009 р. : тези допов. – С.-Пб., 2009. – С. 6–7.
31. Babenko V. F. Optimal cubature formulas for tensor products of certain classes of functions / V. F. Babenko, S. V. Borodachov, **D. S. Skorokhodov** // Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III : міжнар. наук. конф., 22–26 серпня 2009 р. : тези допов. – К., 2009. – С. 19.
32. Exact asymptotics of the best asymmetric piecewise-linear approximation of functions with positive Hessian / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, **D. Skorokhodov** // Thirteenth International Conference in Approximation Theory : міжнар. наук. конф., 7–10 березня 2010 р. : тези допов. – Сан Антоніо, 2010. – С. 38.
33. On one extremal property of a regular simplex and its applications to adaptive mesh generation / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, **D. Skorokhodov** // Optimal Configurations on the Sphere and Other Manifolds : міжнар. наук. конф., 17–20 травня 2010 р. : тези допов. – Нешвіл, 2010. – С. 2.
34. Babenko V. Optimal recovery of certain classes of smooth multivariate functions / V. Babenko, S. Borodachov, **D. Skorokhodov** // Optimal Configurations on the Sphere and Other Manifolds : міжнар. наук. конф., 17–20 травня 2010 р. : тези допов. – Нешвіл, 2010. – С. 5.
35. Babenko V. Optimal recovery of certain classes of multivariate functions / V. Babenko, S. Borodachov, **D. Skorokhodov** // Approximation Theory and

Applications : міжнар. наук. конф., 14–17 червня 2010 р. : тези допов. – Дн-ськ., 2010. – С. 8–9.

36. **Skorokhodov D. S.** Exact values of one-dimensional linear widths of the classes of functions with given majorant for the modulus of continuity / D. S. Skorokhodov // International Conference in Modern Analysis : міжнар. наук. конф., 20–23 червня 2011 р. : тези допов. – Донецьк, 2011. – С. 102.
37. О неравенствах типа Ландау-Колмогорова для дробных производных функций, заданных на оси и полуоси / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, **Д. С. Скороходов**, М. С. Чурилова // Теорія наближення функцій та її застосування : міжнар. наук. конф., 28 травня – 3 червня 2012 р. : тези допов. – Київ, 2012. – С. 18.
38. **Скороходов Д. С.** Точные неравенства для производных функций малой гладкости, заданных на конечном отрезке / Д. С. Скороходов // Теорія наближення функцій та її застосування : міжнар. наук. конф., 28 травня – 3 червня 2012 р. : тези допов. – Київ, 2012. – С. 99–100.
39. Sharp inequalities of Kolmogorov type for the Marchaud fractional derivatives of functions of low smoothness / V. Babenko, M. Churilova, N. Parfinovych, **D. Skorokhodov** // International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach : міжнар. наук. конф., 17–21 вересня 2012 р. : тези допов. – Львів, 2012. – С. 67.
40. Exact asymptotics of best adaptive asymmetric approximation of bivariate convex functions by piecewise-linear splines / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych, **D. Skorokhodov** // Fourteenth International Conference in Approximation Theory : міжнар. наук. конф., 7–10 квітня 2013 р. : тези допов. – Сан Антоніо, 2013. – С. 44.
41. **Skorokhodov D.** On the best approximation of functions from Hölder classes by a subset of linear finite-rank positive methods / D. Skorokhodov // Kangro-100: Methods of Analysis and Algebra : міжнар. наук. конф., 1–6 вересня 2013 р. : тези допов. – Тарту, 2013. – С. 125.
42. On the optimal recovery of solutions of PDEs based on information on initial and boundary values with error / V. Babenko, Yu. Babenko, N. Parfinovych,

D. Skorokhodov // Теорія наближень і її застосування : міжнар. наук. конф., 8–11 жовтня 2015 р. : тези допов. – Дн-ськ., 2015. – С. 5.

Відомості про апробацію результатів дисертації:

За результатами дисертаційної роботи було зроблено доповіді на:

– Міжнародних конференціях з теорії наближення (04.03.2007– 08.03.2007, 07.03.2010–10.03.2010, 07.04.2013–10.04.2013, Сан Антоніо, США),
форма участі – доповідь;

– Міжнародній конференції "Екстремальні проблеми в комплексному та дійсному аналізі" (22.05.2007–26.05.2007, Москва, Росія),
форма участі – доповідь;

– Міжнародній конференції з геометричного моделювання і обчислень (04.11.2007–08.11.2007, Сан Антоніо, США),
форма участі – доповідь;

– Міждержавній науково-методичній конференції "Проблеми математичного моделювання" (28.05.2008–30.05.2008, Дніпродзержинськ, Україна),
форма участі – доповідь;

– Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування", присвяченій 70-річчю з дня народження академіка А. М. Самойленка (16.06.2008–21.06.2008, Мелітополь, Україна),
форма участі – доповідь;

– Міжнародній конференції з гармонічного аналізу та наближень, IV, присвяченій 80-річчю академіка А. Талаляна (19.09.2008–26.09.2008, Цахкадзор, Вірменія),
форма участі – доповідь;

– Міжнародній конференції "Вейвлети та застосування" (14.06.2009–20.06.2009, Санкт-Петербург, Росія),
форма участі – доповідь;

– Міжнародній конференції "Теорія наближень та її застосування", присвяченій 80-річчю з дня народження М. П. Корнєйчука (14.06.2010–17.06.2010, Дніпропетровськ, Україна), форма участі – доповідь;

– Міжнародній конференції з сучасного аналізу (20.06.2011–23.06.2011, Донецьк, Україна),

форма участі – доповідь;

– Міжнародній конференції Банах-120, присвяченій 120-річчю Стефана Банаха (17.09.2012–21.09.2012, Львів, Україна),

форма участі – доповідь;

– Міжнародній конференції Кенгро-100: Методи аналізу і алгебри, присвяченій 100-річчю з дня народження професора Гунара Кенгро (01.09.2013–06.09.2013, Тарту, Естонія),

форма участі – доповідь;

– Міжнародній конференції "Теорія наближень та її застосування", присвяченій 75-річному ювілею В. П. Моторного (08.10.2015–11.10.2015, Дніпропетровськ, Україна),

форма участі – доповідь;

Результати дисертаційної роботи неодноразово доповідались і обговорювались на міжвузівському семінарі з теорії функцій при кафедрі математичного аналізу і теорії функцій ДНУ ім. Олеся Гончара (Дніпропетровськ, 2010–2014, керівники семінару: член-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., проф. В. П. Моторний і д.ф.-м.н., проф. В. Ф. Бабенко; Дніпро, 31.05.2017 та 20.04.2018, керівник семінару член-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., проф. В. П. Моторний),

форма участі – доповідь,

а також на

– Семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (Київ, 28.04.2017 та 20.10.2017, керівник семінару д.ф.-м.н., проф. А. С. Романюк),

форма участі – доповідь;

– Семінарі з теорії функцій при кафедрі математичного аналізу Одеського національного університету ім. І. І. Мечнікова (Одеса, 29.09.2017, керівник семінару д.ф.-м.н., проф. А. О. Кореновський),

форма участі – доповідь;

– Семінарі "Сучасний аналіз" у Київському національному університеті ім. Тараса Шевченка (Київ, 06.12.2017, керівники семінару: д.ф.-м.н., проф. О. О. Курченко, д.ф.-м.н., проф. В. М. Радченко, д.ф.-м.н., проф. І. О. Шевчук), форма участі – доповідь;

– Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій у Львівському національному університеті ім. Івана Франка (Львів, 07.12.2017, керівник семінару д.ф.-м.н., проф. О. Б. Скасків),
форма участі – доповідь;

– Київському семінарі з функціонального аналізу в Інституті математики НАН України (Київ, 11.04.2018, керівники семінару: академік НАН України д.ф.-м.н., проф. Ю. М. Березанський, академік НАН України д.ф.-м.н., проф. Ю. С. Самойленко, чл.-кор. НАН України д.ф.-м.н., проф. А. Н. Кочубей),
форма участі – доповідь.