ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Скороходова Дмитра Сергійовича
«Оптимальне відновлення операторів та функціоналів і суміжні екстремальні задачі теорії наближення»,
подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

1. Актуальність теми дослідження. Основний напрям дисертаційного дослідження пов'язаний з задачею найкращого відновлення операторів та рядом споріднених задач теорії апроксимації: оптимізацією квадратурних формул, найкращим наближенням індивідуальних функцій та функціональних класів, обчисленням поперечників. Це коло задач формує основу сучасної теорії апроксимації та має велике значення для її застосувань. Постановка задачі найкращого відновлення операторів з'являється в математичній літературі порівняно недавно, на початку 1970-х рр., в роботах С.А. Смоляка, М.С. Бахвалова, О.Г. Марчука, М. Голомба, С.А. Мічелі, Т.Дж. Рівліна, А.А. Мелкмана. Дослідження даного циклу задач отримало потужний імпульс завдяки працям С.А. Мічелі, Т.Дж. Рівліна, А.А. Мелкмана, Х. Вожняковського, Е. Новака, А.Г. Вершульца, Г.В. Васильковського, Л. Пласкоти, результати яких по-суті є фундаментом теорії інформаційної складності. З точки зору теорії апроксимації задача найкращого відновлення операторів розглядалася К.Ю. Осипенком, М.П. Корнєйчуком, Б.Д. Бояновим, О.А. Женсикбаєвим, Г.Г. Магаріл-Ільяєвим та ін., але, незважаючи на чимало прикладених зусиль по її розв'язанню, до цього часу залишається недостатньо дослідженою, особливо на класах функцій багатьох змінних.

Перші постановки задачі оптимізації квадратур в сенсі відшукання квадратурних формул найвищої алгебраїчної точності були сформульовані ще К.Ф. Гаусом на початку 19 століття. Виходячи з ідей теорії апроксимації А.М. Колмогоров у 1940-х рр. запропонував іншу постановку задачі оптимізації квадратур на класах функцій. Перші точні її розв'язки містяться в роботах А. Сарда та С.М. Нікольського. Завдяки їх дослідженням задача оптимізації квадратур впевнено увійшла до числа класичних задач теорії наближення. Переважна більшість точних розв'язків задачі оптимізації квадратур була отримана математиками дніпропетровської (а на даний час дніпровської) школи теорії наближення, зокрема М.П. Корнєйчуком, В.П. Моторним, А.О. Лигуном, О.А. Женсикбаєвим, В.Ф. Бабенком. В їх роботах було доведено оптимальність формули прямокутників серед всеможливих поточкових квадратурних формул з заданою кількістю вузлів на класах періодичних диференційовних функцій W_p^r та їх узагальненнях – класах згорток ядер, що не збільшують осциляцію, з функціями, що належать переставно інваріантним множинам. Проте на сучасному етапі виникають прикладні проблеми, які потребують дослідження апроксимаційної спроможності квадратурних формул, що конструюються не за поточковою інформацією про підінтегральну функцію, а на основі її усереднень вздовж малих інтервалів вимірювання або вздовж перетинів області визначення певними многовидами.

Завдяки роботам І.Дж. Шонберга, Дж. Алберга, Е. Нільсона, Дж. Уолша, К. де Бора, С.Б. Стєчкіна поліноміальні сплайни, як апарат наближень, посіли визначне місце в сучасній теорії апроксимації. Окремий напрям в дослідженні наближень сплайнами становлять адаптивні (нелінійні або індивідуальні) наближення функцій сплайнами. Нелінійні наближення мають певні переваги над звичайними (або лінійними) наближеннями. Зокрема, меншу похибку наближення й інколи більшу швидкість збіжності, та можливість врахування локальних особливостей функції при побудові інтерполяційного сплайну (або сплайну найкращого наближення). Робота М.Ш. Бірмана і М.З. Соломяка 1967 року стала відправною точкою в численних дослідженнях нелінійних наближень сплайнами. Та попри чималу кількість отриманих результатів, відкритим залишалось питання про точну асимптотичну поведінку найкращого нелінійного наближення функцій багатьох змінних сплайнами.

Над задачами про оцінку поперечників (колмогоровських, лінійних, проекційних, відносних та ін.) функціональних компактів у банахових просторах працювало (і продовжує плідно працювати) багато видатних математиків таких, зокрема, як А.М. Колмогоров, В.М. Тихомиров, М.П. Корнєйчук, А. Пінкус, В.Ф. Бабенко, В.П. Моторний, А.О. Лигун, В.М. Коновалов та багато інших. Їх зусиллями точні значення поперечників, точна асимптотична або точна порядкова поведінки поперечників відомі для цілого ряду класів функцій однієї та багатьох змінних. Утім, незважаючи на значні успіхи, залишаються відкритими питання про точні значення лінійних поперечників ряду функціональних класів, зокрема класів функцій, що задаються мажорантами їх модулів неперервності.

Ще один напрям досліджень дисертаційної роботи пов'язаний зі встановленням точних нерівностей для норм похідних, які вперше з'являються на початку XX сторіччя в роботах Е. Ландау, Ж. Адамара, Г.Г. Гарді, Дж.І. Літлвуда, а також спорідненої задачі про найкраще наближення необмежених операторів лінійними обмеженими. Нерівності для норм похідних, а особливо їх точні варіанти, відіграють вагому роль в теорії диференціальних рівнянь, теоремах вкладення, теорії некоректних задач тощо. Один з найвизначніших результатів в даній тематиці належить А.М. Колмогорову і тому нерівності, що містять оцінки для норм проміжних похідних функції через норми самої функції і норми її старшої похідної називають нерівностями типу Колмогорова. Останні десятиріччя в застосуваннях все більш важливу роль набувають дослідження похідних функцій дробового порядку. Це зумовлює інтерес до вивчення точних нерівностей типу Колмогорова для норм дробових похідних. Також малодослідженими залишаються нерівності для норм похідних цілих порядків функцій, визначених на скінченному відрізку. Тут відомо вкрай мало точних результатів, які переважно стосуються похідних малого порядку. Отже, актуальним і перспективним є напрям, пов'язаний з дослідженням таких нерівностей на спеціальних класах функцій.

Зважаючи на вищесказане, вважаю тему дисертаційного дослідження Д.С. Скороходова важливою, актуальною і перспективною.

2. Зміст та наукова новизна результатів. Дисертаційна робота складається з анотацій, вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 344 найменування, та додатку. Загальний обсяг роботи становить 350 сторінок машинописного тексту.

Основний зміст роботи викладено в п'яти розділах. В даній дисертації перші підрозділи кожного з розділів носять зазвичай допоміжний характер; в них вводяться необхідні позначення та формулюються основні задачі, розв'язанню яких присвячено той чи інший розділ, наводяться огляди історії досліджуваних питань, а також анонсуються отримані результати.

В ***першому розділі*** дисертації розглядається класична екстремальна задача про обчислення точних значень лінійних поперечників $\lambda_N(\mathcal{M};C)$ класів $\mathcal{M}=H^\omega$ функцій, визначених на відрізку $[0,1]$, та їх 1-періодичних аналогів – класів $\mathcal{M}=\widetilde{H}^\omega$ – в просторі C неперервних функцій. Потрібно зазначити, що ця задача поставлена М.П. Корнєйчуком ще у 1960-ті роки, коли були обчислені точні значення колмогоровських поперечників відповідних класів, і до цього часу ця задача залишалася відкритою навіть при N=1. Сам М.П. Корнєйчук висунув гіпотезу про те, що

$$\lambda_N\big(\widetilde{H}^\omega;\tilde{C}\big)=2N\int_0^{\frac{1}{2N}}\omega(t)\mathrm{d}t.$$

Найбільш цікавим, на мій погляд, результатом першого розділу дисертації є теорема 1.2.1, в якій доведено істинність гіпотези Корнєйчука при $N=1$, а саме, для довільного модуля неперервності ω показано, що

$$\lambda_1\big(\widetilde{H}^\omega;\tilde{C}\big)=2\int_0^{1/2}\omega(t)\,\mathrm{d}t,$$

і доведено, що найкращий лінійний метод наближення класу $\widetilde{H}^\omega$ породжується функцією $\sigma(t)=t,\ t\in[0,1]$.

У теоремі 1.2.2 дисертації, на відміну від періодичного випадку, для класу H^ω точне значення лінійного поперечника $\lambda_1(H^\omega;C)$, а також функцію $g(t)$, що породжує найкращий лінійний метод наближення, вдалось виразити в неявному вигляді – як розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма першого роду з невідомим параметром. Для класів Гельдера це рівняння дисертант зумів розв'язати точно. Як наслідок, у теоремі 1.2.3 для довільного класу H^α, $\alpha\in(0,1)$, встановлено рівність

$$\lambda_1(H^\alpha;C)=\frac{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(1/2+\alpha/2)}{2\Gamma(3/2-\alpha/2)},$$

і показано, що найкращий лінійний метод наближення класу H^α константами породжує функція

$$g(x) := \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma^2(1/2-\alpha/2)} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^{1/2+\alpha/2}(1-t)^{1/2+\alpha/2}}, \qquad x \in [0,1],$$

де $\Gamma(x)$ – гамма-функція Ейлера.

Що стосується N-вимірних лінійних поперечників, то для них встановлено нові оцінки зверху: $\lambda_N\big(\widetilde{H}^\omega; \tilde{C}\big) \le \lambda_N(H^\omega; C) \le \lambda_1(H^{\omega_N}; C)$, та висунуто гіпотезу про точність другої з наведених нерівностей. В підрозділі 1.3 розглядається питання про точність таких оцінок на широкому класі лінійних додатних методів. Дослідження такого роду близькі до задач наближення з обмеженнями. Для вивчення апроксимативних властивостей наближень з обмеженнями були введені поняття відносних поперечників за Колмогоровим (В.М. Коновалов, 1984) та лінійних відносних поперечників (С.П. Сидоров, 2007). В даній дисертації вводиться споріднена до відносних поперечників характеристика функціональних множин – мініедральний лінійний відносний поперечник $\lambda_N^{\mathrm{m}}(\mathcal{M}; V; X)$. В теоремі 1.3.1 для довільних $N \in \mathbb{N}$ та $\omega_N(t) = \omega\left(\frac{t}{N}\right)$ встановлено рівність $\lambda_N^{\mathrm{m}}(H^\omega; C_+; C) = \lambda_1(H^{\omega_N}; C)$ і, як наслідок, обчислено точне значення цього поперечника для $\mathcal{M} = H^\omega$, $X = C$ та конусу невід'ємних неперервних функцій $V = C_+$. На мою думку, отримані в 1 розділі дисертації результати є істотним кроком в розв'язанні задачі про обчислення точних значень лінійних поперечників $\lambda_N(H^\omega; C)$ і $\lambda_N\big(\widetilde{H}^\omega; \tilde{C}\big)$ та створюють основу для подальших досліджень цієї задачі.

Другий розділ дисертації присвячено розв'язанню задачі Колмогорова-Нікольського оптимізації квадратурних формул. Суть задачі полягає у відшуканні оптимальної похибки відновлення інтегралів функцій з фіксованого класу $\mathcal{M}$ за допомогою множини функціоналів $\mathcal{Q} \subset (C(\Omega))^*$, тобто у знаходженні точних або асимптотично точних значень величин вигляду

$$E(\mathcal{M}; \mathcal{Q}) := \inf_{\kappa \in \mathcal{Q}} \sup_{f \in \mathcal{M}} \left| \int_\Omega f(t)\, \mathrm{d}t - \kappa(f) \right|,$$

де $n \in \mathbb{N}$ та $\mathcal{Q}_n(\Omega)$ – множина точкових квадратурних формул – функціоналів $\kappa \in (C(\Omega))^*$ вигляду

$$\kappa(f) = \sum_{j=1}^{n} a_j f(x_j), \qquad f \in C(\Omega), \tag{1}$$

$\{a_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}$ – коефіцієнти і $\{x_j\}_{j=1}^n \subset \Omega$ – вузли квадратури κ.

В даній дисертації вивчаються не точкові квадратурні формули вигляду (1), а так звані інтервальні квадратурні формули, тобто функціонали κ вигляду

$$\kappa(f):=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{2h}\int_{x_j-h}^{x_j+h}f(t)\,\mathrm{d}t,\qquad f\in C(\mathbb{T}),\tag{2}$$

де $\{a_j\}_{j=1}^{n}\subset\mathbb{R}$ – коефіцієнти, а $\{x_j\}_{j=1}^{n}\subset\mathbb{T}$ – середини вузлових інтервалів квадратурної формули κ. Іншими словами, квадратури κ вигляду (2) одержуються внаслідок заміни функції $f(x)$ у формулі (1) на її функцію Стєклова $f^h(x)$.

Головною метою другого розділу дисертації є знаходження оптимальної інтервальної квадратурної формули (2) з не більше, ніж n вузлами, на деяких важливих класах згорток періодичних функцій. В теоремі 2.2.1 дисертантом доведено, що інтервальна формула прямокутників $\kappa_{n,1}^h$, яка має рівновіддалені середини вузлових інтервалів $x_j=\frac{2\pi j}{n}$ та однакові коефіцієнти $a_j=\frac{2\pi}{n}$,

$$\kappa_{n,1}^h(f):=\sum_{j=1}^{n}\frac{\pi}{nh}\int_{\frac{2\pi j}{n}-h}^{\frac{2\pi j}{n}+h}f(t)\,\mathrm{d}t,\qquad f\in C(\mathbb{T})$$

є найкращою серед всіх можливих інтервальних квадратур вигляду (2) з не більше, ніж n вузлами, на класах $K*F$ згорток CVD-ядер $K\perp 1$ з переставно інваріантними множинами F періодичних функцій. Крім того, в ній обчислено точні значення оптимальних похибок квадратурних формул. Зазначу, що $Q_n^h(\mathbb{T})$-оптимальність формули $\kappa_{n,1}^h$ була доведена В.Ф. Бабенком (1982) на класі $W_1^r(\mathbb{T})$ та В.П. Моторним (1998) на класі $W_\infty^r(\mathbb{T})$. Наслідком з теореми 2.2.1 є той факт, що інтервальна формула прямокутників є найкращою на класах Соболєва $W_p^r(\mathbb{T})$ для всіх $1<p<\infty$ та $r\in\mathbb{N}$. Ключову роль в доведенні теореми 2.2.1 відіграє встановлена автором властивість ядра Стєклова не збільшувати осциляцію в згортці з певним вузьким класом функцій (теорема 2.2.6). Ця властивість становить чималий самостійний інтерес і, на мій погляд, може знайти застосування при розв'язанні й інших екстремальних задач теорії наближення.

В підрозділі 2.3 розглядаються кубатурні формули вигляду

$$\kappa(f)=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{\mu(L_j)}\int_{L_j}f(t)\mathrm{d}t,$$

які використовують в якості інформації про функцію багатьох змінних $f:\Omega\to\mathbb{R}$ її усереднення вздовж перетинів L_j області визначення Ω з гіперплощинами заданої розмірності, які паралельні координатним гіперплощинам. В теоремах 2.3.1 та 2.3.4 отримано результати що описують точну асимптотичну поведінку найкращого відновлення інтегралів від функцій з класів $H_\infty^\omega(\Omega)$ та $H_1^\omega(\Omega)$, де $H_p^\omega(\Omega):=\{f\in C(\Omega):\forall x,y\in\Omega\Rightarrow|f(x)-f(y)|\le\omega(\|x-y\|_p)\}$,

$p = 1, \infty$, а також встановлено асимптотично найкращі кубатурні формули на зазначених класах функцій.

Третій розділ дисертації присвячено в основному дослідженню задачі про встановлення точної асимптотичної поведінки найкращих адаптивних наближень функцій двох змінних за допомогою лінійних неперервних сплайнів $\mathcal{S}_1(\Delta)$, побудованих на тріангуляціях Δ заданого многокутника D, які складаються з не більше, ніж N трикутників. При цьому наближення розглядається у просторі функції $f \in L_p(D)$ з $L_{p;\alpha,\beta}$-нормою вигляду $\|f\|_{L_{p;\alpha,\beta}(D)} := \|\alpha f_+ + \beta f_-\|_{L_p(D)}$. Важливість $L_{p;\alpha,\beta}$-норм полягає в тому, що (α, β)-наближення дозволяють з єдиних позицій розглядати як задачі найкращого наближення в $L_p(D)$, оскільки $\|f\|_{L_{p;1,1}(D)} = \|f\|_{L_p(D)}$, так і задачі найкращих односторонніх наближень, адже $\lim\limits_{\beta\to+\infty} E(f;F)_{L_{p;1,\beta}(D)}$ збігається з величиною найкращого наближення зверху функції f елементами підпростору F.

В підрозділі 3.3 для опуклої функції $f \in C^2(D)$ двох змінних знайдено точну асимптотичну поведінку найкращого (α, β)-наближення в $L_{p;\alpha,\beta}$-нормі за допомогою лінійних сплайнів з $\mathcal{S}_1(\Delta)$, при $N \to \infty$ (теорема 3.3.1). Також побудовано асимптотично оптимальні для цієї задачі послідовності тріангуляцій і лінійних сплайнів на них, що становить значний інтерес для побудови практичних алгоритмів наближення.

В підрозділі 3.4 досліджується трансфінітна інтерполяція функцій $f: \Omega \to \mathbb{R}$ з обмеженим лапласіаном за допомогою гармонічних сплайнів, які є гармонічними функціями всередині елементів розбиття Ω. Досліджується похибка найкращої інтерполяції класу $W_q^\Delta(\Pi)$ гармонічними сплайнами на прямокутних розбиттях $\mathcal{P}_N$ множини Π, які складаються рівно з N елементів

$$\mathcal{E}_N\big(W_q^\Delta(\Pi)\big)_s := \inf_{P\in\mathcal{P}_N} \mathcal{E}_P\big(W_q^\Delta(\Pi)\big)_s = \inf_{P\in\mathcal{P}_N} \sup_{f\in W_q^\Delta(\Pi)} \|f - S_P f\|_{L_s(\Pi)}.$$

В теоремі 3.4.2 доведено, що для довільних $d \in \mathbb{N}$ і $1 \le s \le \infty$ існують константи $C_1, C_2 > 0$ такі, що $C_1 \le N^2 \cdot \mathcal{E}_N(W_\infty^\Delta)_s = N^2 \cdot \mathcal{E}_N\big(W_{s'}^\Delta\big)_1 \le C_2$ для всіх достатньо великих значень $N \in \mathbb{N}$. Тим самим показано, що порядок похибки трансфінітної інтерполяції за допомогою гармонічних сплайнів не залежить від розмірності простору визначення функцій та збігається з N^{-2}, де N – кількість елементів розбиття.

Четвертий розділ містить результати, що стосуються задачі найкращого відновлення операторів. Досліджується похибка найкращого відновлення оператора A на класі W за інформацією I, що задана з похибкою вимірювання U, тобто величина вигляду

$$\mathcal{E}_Y^*(A; W; I; U) := \inf_{\Phi: Z\to Y} \sup_{x\in W} \sup_{z\in Ix+U} \|Ax - \Phi z\|_Y,$$

де inf береться за всіма методами відновлення $\Phi: Z \to Y$. В теоремі 4.2.1 доведено, що для довільного опуклого тіла $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ і скінченної множини Q, що міститься всередині Ω, виконується оцінка

$$\frac{1}{4}\, r^2(\Omega, Q) \le \mathcal{E}^*_{L_\infty(\Omega)}\big(\mathrm{id}_{C(\Omega)}; W^2_\infty(\Omega); I'_Q\big) \le \max\left\{\frac{1}{4}\, r^2(\Omega, Q); \frac{1}{2}\, r^2(\partial\Omega, Q)\right\},$$

яка перетворюється в рівність при $r(\Omega, Q) \le \sqrt{2} r(\partial\Omega, Q)$, де $r(A, B) := \sup\limits_{x\in A} \inf\limits_{y\in B} \|x - y\|_2$, а I'_Q – інформаційний оператор вигляду

$$I'_Q(f) = \big(f(q_1), \dots, f(q_n), \nabla f(q_1), \dots, \nabla f(q_n)\big), \qquad f \in C(\Omega).$$

Також побудовано найкращий метод Φ відновлення оператора $\mathrm{id}_{C(\Omega)}$ на класі $W^2_\infty(\Omega)$ за інформацією I'_Q. В підрозділі 4.2 встановлено також періодичний аналог теореми 4.2.1 (див. теорему 4.2.2). Підрозділ 4.3 дисертації присвячено розв'язанню задачі найкращого відновлення інтегральних операторів з невід'ємним ядром та їх сум на класах функцій з заданою мажорантою модуля неперервності за неточною інформацією про значення функцій з класу в заданій скінченній системі точок. Основним результатом даного підрозділу є теорема 4.3.2, в якій на класах $H^\omega_\mu(M') := \{x \in C_\mu(M'):\ |x(t') - x(t'')| \le \omega(\rho(t', t'')),\ \forall t', t'' \in M'\}$, знайдено найкращий метод Φ відновлення інтегрального оператора A з невід'ємним ядром K за інформацією I_Q, що задана з похибкою U_e, та знайдено точне значення найменшої допустимої похибки $\mathcal{E}^*_Y\big(A; H^\omega_\mu(M'); I_Q; U_e\big)$.

П'ятий розділ дисертації присвячено дослідженню точних нерівностей типу Колмогорова, тобто нерівностей, що оцінюють норму проміжної похідної функції через норму самої функції та норму її похідної старшого порядку, а також розв'язанню спорідненої екстремальної задачі Стєчкіна про найкраще наближення операторів. Прикладні задачі сучасного природознавства потребують дослідження похідних не тільки цілих, але й дробових порядків. Тому природний інтерес становить задача знаходження непокращуваних нерівностей типу Колмогорова для норм похідних функції $f: \mathbb{R}^0_+ = [0, \infty) \to \mathbb{R}$ дробових порядків в сенсі Маршо:

$$D^k_- f(x) = \frac{1}{\kappa(k, n)} \int_0^{+\infty} \frac{(\Delta^n_{-t} f)(x)}{t^{1+k}}\, \mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad n \in \mathbb{N}, n > k,$$

де

$(\Delta^n_{-t} f)(x) := \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(x - mt)$, $(k, n) := \Gamma(-k) \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} m^k$.
В підрозділі 5.2 встановлено нерівності для норм дробових похідних в сенсі Маршо функцій $f \in L^2_{\infty,s}(\mathbb{R}^0_+)$, визначених на невід'ємній дійсній напівосі. В теоремі 5.2.6 при довільних $1 \le s \le \infty$, $k \in (0,1)$ i $\lambda = k/(2 - 1/s)$ для будь-якої функції $f \in L^2_{\infty,s}(\mathbb{R}^0_+)$ встановлено нерівність типу Колмогорова $\|D^k_- f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^0_+)} \le \mathrm{K}\, \|f\|^{1-\lambda}_{L_\infty(\mathbb{R}^0_+)} \|f''\|^{\lambda}_{L_s(\mathbb{R}^0_+)}$, із непокращуваною константою К,

записаною в явному вигляді через параметри задачі. В теоремі 5.2.7 знайдено аналогічну точну нерівність при довільних $1 < s \le \infty$, $k \in (1,2 - 1/s)$ і $\lambda = k/(2 - 1/s)$.

С.Б. Стєчкін (1965) поставив задачу найкращого наближення оператора T лінійними обмеженими операторами на класі W, яка полягає в обчисленні величини

$$E_N(T;W) := \inf_{S\in\mathcal{L},\ \|S\|\le N} U(T,S;W) = \inf_{S\in\mathcal{L},\ \|S\|\le N} \sup_{x\in W} \|Tx - Sx\|_Y$$

та знаходженні екстремальних операторів $S^* \in \mathcal{L}$, $\|S^*\| \le N$, на яких досягається зовнішній inf в останній формулі. В теоремах 5.3.1 та 5.3.2 підрозділу 5.3 обчислено значення модулів неперервності оператора диференціювання D^1 і функціонала диференціювання D_t^1 в точці t відповідно на класах $W_N^{*,2}$ функцій, друга похідна яких належить простору Орліча. Як наслідок, в теоремі 5.3.3 розв'язана задача Стєчкіна про точне значення найкращого наближення оператора диференціювання D^1 і функціонала диференціювання D_t^1 в точці t на зазначених класах $W_N^{*,2}$. Підрозділ 5.4 присвячено розв'язанню задачі Стєчкіна для операторів $D^k: L_\infty([0,1]) \to L_\infty([0,1])$, $k \in \{1,2\}$, і функціоналу $D_t^k: L_\infty([0,1]) \to \mathbb{R}$, $k \in \{1,2\}$ і $t \in [0,1]$, на класах $W_\infty^3([0,1])$.

Підрозділи 5.5 і 5.6 дисертації присвячені одержанню точних нерівностей типу Колмогорова для функцій, визначених на відрізку $[0,1]$. Задача про знаходження точних констант в нерівностях типу Колмогорова для функцій, визначених на скінченному відрізку, називається задачею Ландау-Колмогорова та має різні постановки. Найбільш загальна з них полягає в знаходженні модуля неперервності $\Omega(\delta; D^k; W_s^r)$, $\delta \ge 0$, оператора диференціювання $D^k: L_p([0,1]) \to L_q([0,1])$ на класі $W_s^r([0,1])$. В теоремі 5.5.1 для довільних $k, r \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le r - 1$, $1 \le p, q \le \infty$ знайдено точні значення модулів неперервності $\Omega(\delta; D^k; W_\infty^r([0,1]) \cap AM)$, $\delta > 0$, і тим самим знайдено розв'язок задачі Ландау-Колмогорова на класі абсолютно монотонних функцій. В підрозділі 5.6 отримано деякі нові результати по розв'язанню задачі Ландау-Колмогорова на класі m-кратно монотонних функцій.

3. Обґрунтованість та достовірність результатів дисертації. Дисертаційна робота Скороходова Дмитра Сергійовича виконана на високому науковому рівні. Одержані в ній математичні результати є новими, науково значимими та достовірними. Обґрунтованість наукових результатів забезпечується повними та строгими доведеннями. Основні положення дисертації викладено послідовно й логічно, з дотриманням усіх сучасних математичних стандартів.

4. Публікації та апробація результатів. Результати дисертаційної роботи досить повно представлено у 21 статті, які опубліковано у провідних фахових закордонних та вітчизняних виданнях. Із них 16 статей надруковано у виданнях, внесених до міжнародних наукометричних баз Web of Science та Scopus. Отримані результати неодноразово доповідалися на фахових наукових семінарах у провідних наукових центрах України, а також пройшли апробацію на багатьох міжнародних конференціях як в Україні так і за її межами. Автореферат адекватно висвітлює основні результати дисертації.

5. Практичне значення результатів дисертації. Дисертаційна робота Скороходова Дмитра Сергійовича є завершеною науковою працею, яка містить важливі результати теоретичного характеру. Отримані у роботі результати та розроблені методи можуть знайти практичне застосування при розв'язанні екстремальних задач в багатьох галузях сучасного аналізу, зокрема, теорії функцій, теорії наближення, теорії інформаційної складності, а також суміжних областях знань.

6. Зауваження та недоліки.

1. Перелік умовних позначень в дисертації неповний. До нього варто було б віднести поняття відносного лінійного мініедрального поперечника $\lambda_N^m(\mathcal{M}; V; X)$, просторів Орліча L_M^*, класів $L_M^{*,r}$, $W_N^{2,*}([0,1])$, $W_\infty^2(\Omega)$, $W_s^2([0,1])$, одиничних куль F_p, величин $\Pi(g,t)$ та інші.

2. За недоглядом автора леми 3.3.8 і 3.3.9 викладені таким чином, що їх формулювання повністю збігається з формулюванням леми 3.3.7. Насправді у формулюванні леми 3.3.8 замість нерівності (3.42) має фігурувати нерівність

$$\sum_{j\in M_4(\Delta_N;\varepsilon)} |T_j^N| < \varepsilon,$$

а у формулюванні леми 3.3.9 замість нерівності (3.42) має фігурувати нерівність

$$\sum_{j\in M_5(\Delta_N;\varepsilon)} \left|T_j^N\right| < \varepsilon.$$

3. На с. 77 (3-4 стрічки знизу) замість слів «її вузли і коефіцієнти, відповідно» треба писати «її коефіцієнти і вузли, відповідно»; на с. 93 (11-12 стрічки зверху) замість слів «найкращого наближення знизу $E^+(f;F)_p$, найкращого наближення зверху $E^-(f;F)_p$» треба писати «найкращого наближення зверху $E^+(f;F)_p$, найкращого наближення знизу $E^-(f;F)_p$», на с.16 автореферату (16 стрічка знизу) замість слів «відповідно, з величинами найкращого наближення зверху та знизу» треба писати «відповідно, з величинами найкращого наближення знизу та зверху».

4. На с. 121 (9 стрічка знизу) та с. 122 (5 стрічка зверху) замість слів «за теоремою 2.3.2» треба писати «за твердженням 2.3.2».

5. Однакові функції в різних місцях дисертації записуються по різному, наприклад, th(·) (с. 142), tanh(·) (с. 181, 182, 183).

6. На с. 150 (3 стрічка знизу) при означенні $\omega(g,\delta)$ замість «$\sup\{|g(x') - g(x'')|:$» слід писати «$\sup\{|g(x',y') - g(x'',y'')|:$».

7. На с. 169 (7 стрічка зверху) замість «$\{T_j^N\}_{i=1}^N$» треба писати «$\{T_j^N\}_{j=1}^N$».

8. На с. 90 (8 стрічка знизу) замість «$\kappa_{n,\sigma}^h(f) := \sum_{j=1}^n \frac{2\pi\sigma}{n} \int_{\frac{2\pi j}{n}-h}^{\frac{2\pi j}{n}+h} f(t)\,\mathrm{d}t$» має бути «$\kappa_{n,\sigma}^h(f) := \sum_{j=1}^n \frac{\pi\sigma}{nh} \int_{\frac{2\pi j}{n}-h}^{\frac{2\pi j}{n}+h} f(t)\,\mathrm{d}t$».

9. На с. 175 (1 стрічка знизу) замість «$\sum_{j=1}^d$» має бути «$\sum_{j=2}^d$».

10. На с. 214 не означено z_j.

11. На с. 219 згадується про результати А.М. Колмогорова з роботи [84] за 1937 рік, однак робота [84] надрукована у 1939 році, а не у 1937 році.

12. На с. 224 та 227 в означеннях модуля неперервності оператора пропущено «sup», тобто замість «$\{||Tf||_Y: ...\}$» треба писати «$\sup\{||Tf||_Y: ...\}$».

13. На с. 232 (4 стрічка зверху) набрано зайву дужку «) ».

14. На с. 246 (3 стрічка знизу) заміст слів «наслідку 5.2.7» треба писати «теореми 5.2.7».

15. Трапляються невдалі висловлювання на кшталт «простори Орліча, які узагальнюють одиничні кулі в простори L_p» (с. 5), «період довжини 2π» (с. 19, 79).

16. Наявний цілий ряд недоліків при оформленні списків публікацій здобувача як в дисертації, так і в авторефераті. Зокрема, невдалі скорочення типу «Дн-ського», «Дн-ськ» (с. 10, 11, 12, 13, 311, 312, 313, 314, 345, 347, 348 дисертації). Також у ряді тез доповідей на конференціях не вказано або невірно вказано час та місце їх проведення (с. 12, 13, 14, 345, 346, 347 дисертації та с.31, 32 автореферату).

17. Трапляється помилкове використання україномовних слів та термінів: замість «розмірність» вживається термін «вимірність» (с. 33, 128, 142), замість «додатний» вживається термін «позитивний» (с.17, 56, 57. 58, 70, 204, 207, 208), «відтак» вживається в сенсі «тому», «отже» (с. 65, 76), «майже всюди» вживається замість «майже скрізь» (с. 86), «обертається» вживається в сенсі «приймає значення», «перетворюється», «дорівнює» (с. 102, 148, 202, 219, 225, 237, 238, 239, 240), замість «найближча справа (зліва)» використовується «найближча праворуч (ліворуч)» (с. 104), замість «корозмірність» вживається «ковимірність» (с. 128), замість «в смислі» краще писати «в сенсі» (с. 5, 17, 232).

Також помічено помилкове написання українською мовою прізвищ англійських авторів. Наприклад, замість «Я. Гілєвич» у дисертації написано «Й. Жилєвіч» (с. 56).

18. Мають місце поодинокі граматичні помилки (с. 5, 12, 203, 345 дисертації та с. 31 автореферату).

Наведені недоліки не є принциповими, вони носять здебільшого технічний чи редакційний характер і не впливають на загальне позитивне враження від дисертації.

7. Висновки. Зважаючи на вищесказане вважаю, що дисертаційна робота Скороходова Дмитра Сергійовича «Оптимальне відновлення операторів та функціоналів і суміжні екстремальні задачі теорії наближення» є завершеною науковою працею, що містить нові, важливі наукові результати і задовольняє вимогам пп. 9, 10, 12-14 «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №567 від 24 липня 2013 року (зі змінами і доповненнями, внесеними згідно з постановами КМУ №656 від 19.08.2015 р., №1159 від 30.12.2015 р., №567 від 27.07.2016 р., та наказом МОН України від 12.01.2017 р.) щодо докторських дисертацій, а її автор, Скороходов Дмитро Сергійович, заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Провідний науковий співробітник
відділу теорії функцій
Інституту математики НАН України,
доктор фіз.-мат. наук А.С. Сердюк

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
Ідентифікаційний код 05417207
м. Київ

ЗАСВІДЧУЮ
Зав. канцелярією
Інституту математики АН України
«20» лютого 2019 р.

Надійшов до спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 20.02.2019р.
Секретар ради /Сатур О.Р./

Інститут математики Національної академії наук України
Канцелярія