ВІДГУК

офіційного опонента про дисертаційну роботу **Скороходова Дмитра Сергійовича**
"Оптимальне відновлення операторів та функціоналів і суміжні екстремальні задачі теорії наближення", поданої до захисту на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01–математичний аналіз

1. Актуальність дослідження і його мета. Хоча ще у 1804 р. К.Ф.Гаус розглядав задачі відшукання квадратур найвищої алгебраїчної точності, що у даний час можна віднести до задач теорії наближень і найкращого відновлення операторів, проте прийнято вважати, що основи конструктивної теорії функцій (теорії апроксимації) започатковано дослідженнями П.Л.Чебишова та теоремами К.Веєрштраса (1885) і К.Рунге (1885) про найкраще рівномірне наближення поліномами функції, відповідно, неперервної на дійсному відрізку і аналітичної на замкненому компакті зі зв'язним доповненням. Відоме пряме конструктивне доведення теореми Веєрштрасса за допомогою многочленів Чебишова. З апроксимаційної теореми Веєрштраса про можливість рівномірного наближення поліномами неперервних дійсних функцій на відрізку $[a, b]$ алгебраїчними поліномами, зокрема, негайно випливає сепарабельність простору $C[a, b]$, а отже, з огляду на його гаусдорфовість, і його рівнопотужність з множиною дійсних чисел. Тобто, навіть початкові теореми, які лежать в основі теорії апроксимації, виявляють досить глибинні її зв'язки з іншими розділами сучасної математики. Не говорячи вже про безумовну користь конструктивних побудов апроксимуючих агрегатів з точки зору потреб обчислювальної математики, а отже, й з точки зору практичних потреб в обчислювальних інструментах в найбільш різноманітних розділах сучасної експериментальної науки. Різноманітні підтвердження цьому знаходимо, як протягом XX ст., так і вже у XXI ст. Власне, як зазвичай буває, нові теоретичні досягнення ведуть до більш результативних практичних застосувань, а потреба таких застосувань викликає нові постановки суто теоретичних проблем. До останніх варто віднести відродження на початку 70-их інтересу до дослідження суто класичних проблем, що стосуються кратних рядів: степеневих, Фур'є і т.п., – наприклад, результативність апроксимацій Паде при чисельному розв'язуванні задач фізики високих енергій методом кратних степеневих рядів з невизначеними коефіцієнтами, природньо приводить до потреби дослідження властивостей таких рядів, а суто практична результативність чисельного моделювання за допомомогою жадібних апроксимант (pure greedy approximation) призвела до появи наприкінці 90-их активного інтересу до суто теоретичних постановок проблем для таких об'єктів, потреба дослідження об'єктів однієї "форми" (наприклад, монотонності, опуклості) призвела до появи і активного розвитку такого відносно нового напрямку, як формозберігаючі наближення (опуклі функції наближаються опуклими поліномами, монотонні – монотонними). У цьому ж ряду, інспіроване потребами моделювання різноманітних природних сигналів (наприклад, частотно-часового аналізу геоакустичних сигналів) виникнення значного інтересу до дослідження розрідженої апроксимації (sparse approximation). Зазначимо також, що розвинута у дослідженнях Чебишова і його школи теорія найкращого наближення функцій на початку XX ст. переросла в конструктивну теорію функцій. При цьому після появи статей Д. Джексона (1911) і С.Н. Бернштейна (1912) акценти перемістились від задач наближення індивідуальних (окремих) функцій до дослідження поведінки похибок наближення многочленами при прямуванні до нескінченності їхніх степенів, що не відмінило актуальність знаходження "індивідуальних" оцінок апроксимацій функцій з різноманітних класів, різноманітними апроксимуючими агрегатами (поліномами за всеможливими ортонормованими системами) у термінах найрізноманітніших норм. У подальшому, після появи у 30-40-их роках поняття поперечника Колмогорова, дуже велику кількість досліджень було виконано у цьому контексті. У тому числі в дуже абстрактних функціонально-топологічних постановках проблем.

Перелік прізвищ математиків, що присвятили свої роботи даній тематиці є надзвичайно великим, тому доповнимо його лише прізвищами тих, чиї дослідження в значній мірі визначили напрямки подальшого розвитку теорії апроксимації. Це дослідження Ш. Ла Валле-Пуссена, А.Лебега, Н.І.Ахієзера, А.Зігмунда, Ж.Фавара, С.М.Нікольського, С.Б.Стєчкіна, О.П.Тімана, П.Л.Ульянова, В.К.Дзядика, М.П.Корнійчука, М.П.Тімана. Серед сучасних досліджень варто виділити дослідження, виконані R.A. DeVore, A.A. Гончаром, О.І. Степанцем, І.О. Шевчуком, В.Н. Темляковим, В.Ф. Бабенком та їхніми учнями, а також дуже великою кількістю більш чи менш знаних математиків у наукових центрах у всьому світі. Різноманітні зв'язки, які існують між структурними та конструктивними властивостями функцій, в першу чергу швидкістю прямування до нуля їх найкращих поліноміальних наближень, були і є метою пошуку у таких дослідженнях. Серед задач, які при цьому розглядаються одне з центральних місць займає, так звана задача найкращого відновлення операторів. Така задача іноді зводиться до деяких екстремальних задач для функцій від однієї або від кількох змінних. М. П. Корнійчук, В. Ф. Бабенко, А. О. Лігун, О. Г. Марчук, К. Ю. Осипенко, Б. Д. Боянов, Л. Пласкота отримали точні розв'язки задачі найкращого відновлення тотожних операторів та функціоналів інтегрування на класах функцій, заданих певними обмеженнями на зростання або цих функцій, або їхніх похідних, або заданих обмеженням на норму похідної деякого порядку. Проте особливістю цих досліджень є те, що вони містять розв'язок задачі лише в окремих доволі вузьких випадках. Разом з цим задача оптимізації квадратурних формул з точки зору обчислювальної математики завжди виступала важливою конкретизацією задачі найкращого відновлення операторів. Так, С. М. Нікольський, Т. Н. Бусарова, М. П. Корнійчук, В. П. Моторний, А. О. Лігун, О. А. Женсикбаєв довели оптимальність формули з рівновіддаленими вузлами та однаковими коефіцієнтами (формули прямокутників) на періодичних класах Соболєва. К. І. Осколков, М. А. Чахкієв, В. Ф. Бабенко, Т. А. Гранкіна та Нгуєн Тхі Т. Х. поширили ці результати на класи згорток ядер, що не збільшують осциляцію. У цей контекст вкладаються також квадратурні формули за усередненнями підінтегральної функції на малих інтервалах з області визначення. Ці задачі виявилися істотно складнішими за задачі оптимізації точкових квадратурних формул. Оптимальність інтервального аналогу формули прямокутників вдалось встановити лише на окремих класах періодичних функцій В. Ф. Бабенком, В. П. Моторним, С. В. Бородачовим, Е. В. Дерец. При цьому залишалась відкритою гіпотеза про оптимальність інтервальної формули прямокутників на класах згорток ядер, що не збільшують осциляцію.

Іншими важливими дослідженнями у дисертації є дослідження сплайнів і точних нерівностей для дробових похідних. Сплайни є одним з найбільш важливих апаратів теорії наближення та знаходять численні застосування в різноманітних областях математики та її застосувань, а точні нерівності типу Колмогорова для похідних є важливими з точки зору багаточисельних застосувань, як самих нерівностей, так і їхніх методів доведення.

Е. Ландау, Ч.К. Чуі, А. Пінкус, С. Карлін, О.І. Звягінцев, М. Сато, О.Ю. Шадрін, В. Ф. Бабенко, А. О. Лігун, В. О. Кофанов, В. І. Бурєнков, Б. Д. Боянов, Н. Найденов, Ю. В. Бабенко та ін. встановили багато точних нерівностей типу Колмогорова як для довільних функцій, так і для функцій зі спеціальних класів, визначених на скінченному відрізку. Але більшість з таких нерівностей отримана для функцій малої гладкості. Тому проблема знаходження точних нерівностей типу Колмогорова все ще залишається далекою від остаточного і вичерпного розв'язання. Це ж стосується задачі про найкраще наближення операторів диференціювання лінійними обмеженими операторами.

Основна мета дисертації – дослідження задач найкращого відновлення операторів і функціоналів та встановлення точної асимптотики найкращого нелінійного наближення функцій багатьох змінних сплайнами, знаходження точних нерівностей типу Колмогорова для норм дробових похідних функцій, визначених на дійсній півосі або скінченному відрізку, і розв'язання таких екстремальних задач теорії наближення, як обчислення лінійних поперечників функціональних класів, оптимізація квадратурних формул на функціональних класах, найкраще нелінійне наближення функцій багатьох змінних сплайнами.

Викладене вище та аналіз літератури, яка стосується теми дисертації, демонструють актуальність обраної теми досліджень та її вагоме теоретичне значення для конструктивної теорії функцій дійсної змінної, а в актуальності розглянутих у дисертації Д.С. Скороходова проблем не повинно виникнути сумніву.

2. Наукова новизна результатів дисертаційної роботи. Основний зміст дисертаційної роботи міститься у розділах 1–5. На думку автора відгуку, основні результати дисертаційної роботи, що складають її ядро, містяться у розділах 2 (2.2, 2.3), 4 (4.2 і 4.3) і 5 (5.2–5.6). Текст цих розділів містить найбільш вагому частину дисертаційного дослідження і за своєю новизною, значенням, завершеністю отриманих там результатів, є дослідженням найвищого математичного рівня і безумовно сам по собі відповідає всім вимогам, що висуваються до докторських дисертацій з математики.

Нижче дамо опис основних здобутків кожного розділу дисертації.

У Розділі 1 досліджується класична задача теорії наближення про знаходження точного значення лінійного поперечника класів функцій із заданою мажорантою модуля неперервності в просторі C та задачі про найкраще лінійне наближення класів функцій з заданою мажорантою модуля неперервності в просторі C за допомогою позитивних і позитивних мініедральних операторів. Власне до основних результатів цього розділу слід віднести такі:

– Для довільного модуля неперервності ω в періодичному випадку знайдено точне значення одновимірного поперечника $\lambda_1\left(\widetilde{H}^\omega;\widetilde{C}\right)$ і найкращий метод лінійного наближення класу $\widetilde{H}^\omega$ тотожньо сталими в просторі $\widetilde{C}$.

– В неперіодичному випадку встановлено, що поперечник $\lambda_1\left(H^\omega;C\right)$ і найкращий метод лінійного наближення класу H^ω константами в просторі C пов'язані між собою певним інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду, яке для класів Гельдера H^α, $\alpha\in(0,1)$ можна розв'язати в явному вигляді.

– Отримано нові оцінки зверху для лінійних поперечників $\lambda_N\left(H^\omega;C\right)$ та $\lambda_N\left(\widetilde{H}^\omega;\widetilde{C}\right)$, що уточнюють відомі раніше оцінки. Також обчислено відносний лінійний двовимірний поперечник $\lambda_2\left(H^\omega;C_+;C\right)$ і відносний лінійний мініедральний поперечник $\lambda_N^{\mathfrak{m}}\left(H^\omega;C_+;C\right)$ для всіх $N\in\mathbb{N}$.

У Розділі 2 отримано нові результати щодо оптимізації інтервальних квадратурних формул на класах згорток періодичних функцій та оптимізації кубатурних формул, що використовують усереднення підінтегральної функції вздовж перетинів області визначення з гіперплощинами заданої вимірності, на класах функцій багатьох змінних. Основними результатами у цьому розділі є такі:

– Встановлено, що інтервальна квадратурна формула з рівновіддаленими серединами вузлових інтервалів і однаковими коефіцієнтами є найкращою серед всіх інтервальних квадратурних формул із заданою кількістю вузлових інтервалів на класах згорток ядер, що не збільшують осциляцію, з інваріантними відносно перестановок множинами.

– Розв'язано задачу оптимізації кубатурних формул, що використовують усереднення підінтегральної функції вздовж перетинів області визначення з гіперплощинами заданої ковимірності 1 і які паралельні до координатних гіперплощин, на класах функцій, означених на паралелепіпеді, з заданим обмеженням на модуль неперервності, та на класах функцій, означених на багатовимірному торі, із заданною гладкістю частинних похідних.

У Розділі 3 проведено дослідження задачі найкращого наближення функцій двох змінних лінійними сплайнами та задачі про найкраще наближення функцій багатьох змінних з обмеженим лапласіаном трансфінітними інтерполяційними гармонічними сплайнами. Основні досягнення цього розділу полягають в наступному:

– Встановлено точну асимптотичну поведінку величини $R_N(f)_{p;\alpha,\beta}$, коли $N \to \infty$, що характеризує похибку найкращого нелінійного несиметричного наближення в метриці простору L_p двічі неперервно диференційовних функцій f від двох змінних, означених на багатокутнику, за допомогою лінійних сплайнів на тріангуляціях їх області визначення, які складаються не більше, ніж з N трикутників. Також побудовано асимптотично оптимальні послідовності тріангуляцій та лінійних сплайнів на них.

– Розв'язано екстремальну задачу про знаходження форми d-вимірного симплекса одиничного об'єму, на якому досягається мінімум похибки найкращого несиметричного наближення в метриці простору L_p додатно визначеної квадратичної форми за допомогою лінійних функцій.

– Знайдено порядок величин $\mathcal{E}_N\left(W_\infty^\Delta\right)_p$ та $\mathcal{E}_N\left(W_p^\Delta\right)_1$ при $N \to \infty$, і доведено, що він не залежить від вимірності простору та досягається на розбиттях, які утворені розбиттям області визначення рівновіддаленими гіперплощинами.

У Розділі 4 розв'язується задача найкращого відновлення операторів за неповно та неточно заданою інформацією. Основні результати цього розділу такі:

– Знайдено похибку найкращого відновлення тотожного оператора на класі $W_\infty^2(\Omega)$ функцій від багатьох змінних, визначених на опуклому тілі Ω, що мають рівномірно обмежені похідні другого порядку за довільним напрямком, за інформацією про значення функцій та їх градієнтів на заданій системі вузлів. Встановлено відповідні результати для періодичного аналогу класу $W_\infty^2(\Omega)$ – класу $W_\infty^2(\mathcal{L})$, де $\mathcal{L}$ – повновимірна гратка.

– Розв'язано задачу про найкраще відновлення довільних інтегральних операторів з невід'ємними ядрами та їх сум на класах функцій, визначених на компакті метричного простору та заданих обмеженням на мажоранту модуля неперервності, за значеннями функцій з класу на заданій системі вузлів, які відомі з похибкою.

У Розділі 5 встановлено нові точні нерівності типу Колмогорова для норм дробових похідних функцій, визначених на невід'ємній півосі, та для норм похідних цілого порядку функцій, визначених на скінченному відрізку, що належать до спеціальних функціональних класів. Розв'язана задача Стєчкіна для операторів диференціювання малих порядків на класах функцій, визначених на скінченному відрізку. Основні результати цього розділу такі:

– Знайдено непокращувану сталу в нерівності типу Колмогорова, що оцінює рівномірну норму дробової похідної $D^k_- f$, $k \in (0, 2 - 1/s) \setminus \{1\}$, в сенсі Маршо функції $f \in L^2_{\infty,s}\left(\mathbb{R}^0_+\right)$ через рівномірну норму самої функції та норму її другої похідної в метриці простору L_s, $1 \leqslant s < \infty$, та розв'язано задачу Стєчкіна про найкраще наближення оператора D^k_- лінійними обмеженими операторами на класі $W^2_{\infty,s}\left(\mathbb{R}^0_+\right)$. У випадку $k \in (0, 1)$ встановлено узагальнення цих результатів на ситуацію, коли норма другої похідної функції береться на ідеальній гратці.

– Розв'язано задачі Ландау-Колмогорова та Стєчкіна для оператора $D^1 : L_\infty([0,1]) \to L_\infty([0,1])$ та функціоналів $D^1_{t_0} : L_\infty([0,1]) \to \mathbb{R}$, $t_0 \in [0,1]$, диференціювання на класі $W^{*,2}_N([0,1])$ функцій $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, друга похідна яких обмежена одиницею за нормою Люксембурга.

– Розв'язано задачу Стєчкіна про найкраще наближеня операторів $D^k : L_\infty([0,1]) \to L_\infty([0,1])$, $k \in \{1, 2\}$, та функціоналів $D^k_{t_0} : L_\infty([0,1]) \to \mathbb{R}$, $k \in \{1,2\}$ і $t_0 \in [0,1]$, на класі $W^3_\infty([0,1])$.

– Доведено нові точні нерівності типу Колмогорова для абсолютно монотонних та кратно монотонних функцій, визначених на скінченному відрізку.

Доведення основних тверджень з розділів 2 і 5 є найскладнішими, самі розділи є найбільш цільними розділами дисертації, а отримані там нетривіальні результати демонструють потужність й силу застосованих у них підходів.

Зазначимо, що ми зосередили увагу тільки на результатах, які утворюють ядро дисертаційної роботи і в достатній мірі характеризують новизну і силу дисертації. Зі сказаного вище у цьому пункті, а також в актуальності, випливає, що всі основні результати дисертаційної роботи Д.С. Скороходова є новими, тобто отримані вперше автором дисертаційної роботи, і мають важливе значення, як для розвитку теорії апроксимації в цілому, так і для можливих застосувань.

У підрозділі "Особистий внесок здобувача", де йдеться про статті, написані з співавторами, досить чітко і зрозуміло сказано про вклад автора дисертації.

3. Обґрунтованість і достовірність результатів дисертації. Доведення всіх основних результатів дисертаційної роботи Д.С.Скороходова приведені з достатньою повнотою, на прийнятому в сучасній математичній літературі рівні строгості і тому в їх обґрунтованості і достовірності не виникає сумніву. Дисертація написана чіткою і зрозумілою мовою, виклад логічний і послідовний.

4. Зауваження.

1) Доведення у багатьох місцях є занадто конспективними, а то й зовсім відсутніми у дисертації.

(a) Так, про доведення теореми 5.4.4 на с.271_1 читаємо: "Доведення теореми 5.4.4. Доведення аналогічне доведенню теореми 5.4.2." Власне, в цих рядках навіть не описано у чому ж полягає ця аналогічність. На думку автора відгуку, попри вдавану аналогічність того, що потрібно зробити, цього є недостатньо, бо з огляду на контекст, твердження теореми

5.4.4 є важливим. Іншим виходом зі ситуаціїї було би виключення цієї теореми з тексту дисертації, адже автор не вважав за потрібне внесення формулювання цієї теореми у текст автореферату дисертації.

(b) На с.255_{5-7} читаємо: "Для отримання другої з рівностей в теоремі 5.3.3, необхідно скористатися твердженням теореми 5.3.2, проміжним оператором ..., який задано за допомогою правила ... і нерівністю (5.40)." На погляд автора відгуку, з огляду на те, що текст дисертації по-суті читають практично лише рецензенти (опоненти), це є цілковита неповага до їхньої роботи, адже, що пропонується – або повірити, що це справді так, або самому в цьому переконатися. Отже, доведення другої частини теореми 5.3.3 відсутнє у повному обсязі у дисертації.

2) На с.254_7 читаємо: "Доведення теореми 5.3.2. За теоремою 5.3.2,..." ?? Мабуть потрібно – "За теоремою 5.3.1, ..."

3) Описки. У дисертаційній роботі і авторефераті є ряд стилістичних і граматичних помилок, зустрічається неправильне вживання відмінків. Проте з контексту завжди зрозуміло про що йдеться і зміст при цьому не спотворюється. Тому не наводимо список цих неточностей, хоча він доволі великий. Вкажемо лише, що на с.6_1 автореферату вказано числа, сумою яких є 22 статті автора дисертації, хоча їх насправді на одну менше – 21.

Підсумовуючи цей перелік зауважень, зазначу, що виявлені огріхи не спотворюють змісту і сприйняття тексту дисертації, доведення якої, хоча й написані іноді занадто конспективно, проте є зрозумілими, а сумнівів у правильності основних положень дисертації у автора відгуку не виникає.

6. Публікації і апробація результатів роботи. Основні результати дисертаційної роботи з достатньою повнотою відображені у 42 наукових публікаціях, з яких 21 стаття у наукових фахових виданнях, 16 – у виданнях, відображених у міжнародних наукометричних базах даних. Результати дисертаційної роботи доповідались на численних міжнародних наукових конференціях, як в Україні, так і за її межами (Вірменія, Естонія, Росія, США), а також на наукових семінарах Київського національного університету ім.Т.Г.Шевченка, Інституту математики НАНУ, Львівського національного університету ім. І.Франка, у Дніпровському національному університеті ім. О.Гончара, в Одеському національному університеті ім. І.І.Мечнікова і, отже, пройшли належну апробацію.

7. Практичне значення результатів роботи. Дисертаційна робота є теоретичним дослідженням і її результати можуть знайти застосування в тих розділах математики (насамперед математичного аналізу і диференціальних рівнянь), в яких традиційно знаходять застосування результати теорії апроксимації. Результати дисертаційної роботи можуть бути рекомендовані до використання при читанні спеціальних курсів, а також у наукових дослідженнях в наступних наукових і навчальних закладах, в яких проводяться дослідження з математичного аналізу в широкому розумінні цього слова: Київському, Харківському, Одеському, Дніпровському, Чернівецькому та Львівському національних університетах, Інституті математики НАНУ, Фізико-технічному інституті низьких температур (м.Харків), Інституті прикладної математики і механіки (м.Слов'янськ), НПУ ім.М.П.Драгоманова та Дрогобицькому ДПУ ім. І.Франка.

8. Висновки. Дисертаційна робота Д.С.Скороходова є завершеним науковим дослідженням, має теоретичний характер, а її результати мають вагоме значення для теорії апроксимації. Дисертаційна робота присвячена дослідженню класичних задач теорії апроксимації про обчислення лінійних поперечників функціональних класів, оптимізацію квадратурних формул на функціональних класах, найкраще нелінійне наближення функцій багатьох змінних сплайнами, найкраще відновлення операторів, встановлення точних нерівностей типу Колмогорова для норм похідних дробового порядку функцій однієї змінної. В ній зокрема доведено, що інтервальна квадратурна формула з рівновіддаленими серединами вузлових інтервалів і однаковими коефіцієнтами є найкращою серед всіх інтервальних квадратурних формул із заданою кількістю вузлових інтервалів однакової довжини, які можуть перетинатися, на класах згорток ядер, що не збільшують осциляцію, з переставно інваріантними множинами, що істотно узагальнює відомі результати щодо оптимізації інтервальних квадратур. Також розв'язано екстремальну задачу про знаходження форми d-вимірного симплекса одиничного об'єму, на якому досягається мінімум похибки найкращого несиметричного наближення в метриці простору L_p додатно визначеної квадратичної канонічної форми за допомогою лінійних функцій.

Дисертаційна робота виконана на сучасному науковому рівні. Перелічені вище зауваження до роботи не применшують хорошого враження від роботи в цілому. Аналізуючи дисертаційну роботу, слід відзначити її ідейну цілісність, вона містить остаточний розв'язок цілого ряду перелічених вище важливих для теорії наближень задач. Результати роботи належно опубліковані. Автореферат в цілому правильно і повно відображає зміст дисертації. З огляду на сказане вище, вважаю, що дисертаційна робота Д.С.Скороходова задовольняє вимоги "Порядку присудження наукових ступенів"(Постанова Кабінету міністрів України №567 від 24.07.2013 щодо докторських дисертацій), результати дисертаційної роботи відповідають вимогам до наукового рівня результатів (актуальність, новизна, наукова значимість) докторської дисертації, а її автор **Дмитро Сергійович Скороходов** заслуговує присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Професор, доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри теорії функцій і теорії
ймовірностей Львівського національного
університету імені Івана Франка

О.Б.Скасків

18. 02. 2019 р.

Підпис Скасківа О. Б.
ПІДТВЕРДЖУЮ
ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР
ЛЬВІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Надійшов до спеціалізованої
вченої ради Д26.206.02 22.07.2019 р.
Секретар ради /Сахур О.Р./

Канцелярія
Інститут математики Академії наук України