НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кореновська Ярослава Аркадіївна

УДК 519.21

Геометричні властивості нескінченновимірних відображень, що породжені сингулярними стохастичними потоками

01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика

А в т о р е ф е р а т

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
ДОРОГОВЦЕВ Андрій Анатолійович
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу теорії випадкових процесів.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ПОПОВ Михайло Михайлович,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
професор кафедри математичного аналізу
факультету математики та інформатики;

кандидат фізико-математичних наук
КОНАРОВСЬКИЙ Віталій Васильович,
Лейпцизький університет,
науковий співробітник Інституту математики.

Захист відбудеться «12» березня 2019 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «28» січня 2019 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради,
доктор фізико-математичних наук, професор Пелюх Г. П.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Головними об'єктами дослідження даної роботи є одновимірні стохастичні потоки. Вони використовуються при вивченні математичних моделей турбулентності й систем частинок, які взаємодіють. Із монографії Х. Куніта[1] відомо, що за певних умов гладкості на коефіцієнти стохастичне диференціальне рівняння породжує стохастичний потік дифеоморфізмів. При цьому будь-які дві частинки у такому потоці не можуть зіштовхуватись.

У дисертаційній роботі Р. А. Арратья[2] при дослідженні слабкої границі шкалованих випадкових блукань зі склеюванням отримана сім'я вінерівських процесів, будь-які два з яких незалежні до моменту зустрічі, а в момент зустрічі склеюються і далі рухаються як один вінерівський процес. У подальшому такий об'єкт носить назву потоку Арратья. А. А. Дороговцев[3] довів, що сумарний час вільного пробігу частинок у потоці Арратья скінченний, із чого випливає зліченність числа кластерів потоку Арратья у будь-який додатній момент часу і розривність потоку за просторовою змінною. Тож методи диференціальної геометрії, що використовуються при дослідженні геометричних властивостей стохастичних потоків дифеоморфізмів, породжених стохастичними диференціальними рівняннями, у випадку потоку Арратья застосовувати не можна.

Подальші зусилля направлені на розробку єдиного методу дослідження як стохастичних потоків, що породжуються стохастичними диференціальними рівняннями, так і потоків зі склеюванням. Властивості останніх активно вивчаються, починаючи з дисертації Р. А. Арратья. Зокрема, А. А. Дороговцев, А. В. Гнедін, М. Б. Вовчанський[4] довели аналог закону повторного логарифму при малих значеннях часового параметру для розміру максимального кластеру потоку Арратья, а розподіл числа кластерів отримав В. В. Фомічьов[5]. В. В. Конаровський[6] досліджував систему броунівських частинок зі

---

[1] *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations. — Cambridge University Press, 1990. — 346 p.

[2] *Arratia R.* Brownian motion on the line. — PhD dissertation, Univ. Wisconsin, 1979. — 128 p.

[3] *Dorogovtsev A. A.* Semigroups of finite-dimensional random projections // Lithuanian Mathematical Journal **51**:3 (2011) 330–341.

[4] *Dorogovtsev A. A., Gnedin A. V., Vovchanskii M. B.* Iterated logarithm law for sizes of clusters in Arratia flow // Theory of Stochastic Processes **18(34)**: 2 (2012) 1–7.

[5] *Fomichov V.* The distribution of the number of clusters in the Arratia flow // Communications on Stochastic Analysis **10**:3 (2016) 257–270.

[6] *Konarovskyi V.* On asymptotic behavior of the modified Arratia flow // Electronic Journal of Probability **22**:19 (2017) 1–31.

склеюванням, проте, на відміну від потоку Арратья, маси частинок додаються при склеюванні. Узагальнення потоку Арратья розглядав Т. Е. Харріс[7]. За певних умов на коваріаційну функцію він довів не лише існування потоку, а й склеювання частинок у ньому. Для наближення потоків Харріса І. І. Ніщенко[8] використала аналог дискретної схеми Ейлера-Маруями. Асимптотику при малих значеннях часового параметру для рівномірного відхилення частинок потоку Харріса від положення їхнього старту отримав О. О. Шамов[9].

Окрім склеювання розглядалися й інші питання стосовно стохастичних потоків. Зокрема, у монографії А. А. Дороговцева[10] був побудований стохастичний інтеграл за потоком Арратья й отримано представлення Кларка для функціоналів від потоку Арратья. А. А. Дороговцев і О. В. Остапенко[11] довели принцип великих відхилень для броунівських стохастичних потоків зі гладкою коваріацією і для потоку Арратья. Локальний час у нулі потоку Арратья досліджував П. П. Чернега[12]. Аналоги теореми Гірсанова для потоку Арратья і для потоку розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією довела Т. В. Маловичко[13], а для потоку Арратья зі зносом – А. А. Дороговцев[14]. Аналог розкладу Крилова-Веретеннікова для стохастичних напівгруп та n-точкових рухів потоку Арратья отримав А. А. Дороговцев[15]. Напівгрупи n-точкових рухів потоку Харріса досліджувала К. В. Глиняна[16]. Ортогональні розклади для квадратично інтегровних функціоналів від потоків зі склеюванням отримали Г. В. Рябов[17] і

[7] *Harris T. E.* Coalescing and noncoalescing stochastic flows in $\mathbb{R}$ // Stoch. Proc. and Appl. **17**:2 (1982) 187–210.

[8] *Nishchenko I. I.* Discrete time approximation of coalescing stochastic flows on the real line // Theory of Stochastic Processes **17(33)**:1 (2011) 70–78.

[9] *Shamov A.* Short-time asymptotics of one-dimensional Harris flows // Communications on Stochastic Analysis **5**:3 (2011) 527–539.

[10] *Дороговцев А. А.* Мерозначные процессы и стохастические потоки. — Киев, Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 289 с.

[11] *Dorogovtsev A. A., Ostapenko O. V.* Large deviations for flows of interacting Brownian motions // Stochastics and Dynamics **10**:3 (2010) 315–339.

[12] *Чернега П. П.* Локальное время в нуле для потока Арратья // Украинский математический журнал **64**:4 (2012) 542–556.

[13] *Маловичко Т. В.* Теорема Гирсанова для стохастических потоков со взаимодействием // Украинский математический журнал **60**:11 (2008) 1529–1538.

[14] *Дороговцев А. А.* Мерозначные процессы и стохастические потоки. — Киев, Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 289 с.

[15] *Dorogovtsev A. A.* Krylov -Veretennikov expansion for coalescing stochastic flows // Commun. Stoch. Anal. **6**:3 (2012) 421–435.

[16] *Glinyanaya E. V.* Semigroups of m-point motions of the Arratia flow, and binary forests // Theory of Stochastic Processes **19(35)**:2 (2014) 31–41.

[17] *Riabov G. V.* Ito-Wiener expansion for functionals of the Arratia's flow n-point motion // Theory of Stoch. Processes **19(35)**:2 (2014) 64–89.

А. А. Дороговцев[18]. Для множин гільбертового простору А. А. Дороговцев[19] ввів поняття квадратичної ентропії, що є скінченною для множини значень стохастичного потоку броунівських частинок на дійсній осі, а для потоку Арратья з цього випливає скінченність часу вільного пробігу частинок, що стартують із обмеженого інтервалу.

Для дослідження геометричних властивостей потоків Харріса А. А. Дороговцев[20] запропонував розглядати стохастичні напівгрупи операторів, що описують зсуви функцій уздовж цих потоків. Вивчення стохастичних напівгруп операторів у загальному випадку почалося з роботи А. В. Скорохода[21], у якій вони представлялись як стохастичні експоненти від деяких операторно-значних мартингалів. Такий підхід потребує існування неперервного оберненого в оператора середнього, однак випадкові оператори зсуву вздовж стохастичних потоків зі склеюванням і скінченновимірні випадкові проектори можуть цю умову не задовольняти. А. А. Дороговцев показав, що геометрія напівгрупи скінченновимірних випадкових проекторів характеризується за допомогою зміни поперечників компактів під дією цих операторів.

Дана дисертаційна робота присвячена дослідженню зміни поперечників компактних множин у просторі $L_2(\mathbb{R})$ під дією випадкових операторів $\{T_t,\ t \geq 0\}$, що описують зсуви функцій уздовж потоку Арратья. Такі оператори є сильними випадковими у сенсі А. В. Скорохода. У даній роботі показано, що образи компактних множин під дією сильних випадкових операторів можуть не існувати, й доведено, що умова Дадлі є достатньою для існування образу компактної множини під дією гаусівського сильного випадкового оператора. Випадковий оператор зсуву за потоком Арратья не є гаусівським і не є обмеженим випадковим оператором, що показано в даній дисертаційній роботі. Тому для отримання достатньої умови існування образу компактної множини під дією T_t доведена формула інтегрування частинами для потоку Арратья, за допомогою якої встановлено, що компакти можуть зникати під дією T_t. В даній роботі побудовано компактну множину у просторі $L_2(\mathbb{R})$, що майже напевно не зникає під дією випадкового оператора зсуву за потоком Арратья, досліджено поперечники за Колмогоровим данної множини і її образу під дією T_t. При цьому встановлено, як T_t пов'язаний із випадковими інтегральними операторами, що побудовані за точко-

---

[18] *Dorogovtsev A. A.* Transformations of Wiener Measure and Orthogonal Expansions // A. A. Dorogovtsev, G. V. Riabov //arXiv:1310.4722 – 2013.

[19] *Дороговцев А. А.* Энтропия стохастических потоков // Матем. сб. **201**:5 (2010) 17–26.

[20] *Dorogovtsev A. A.* Semigroups of finite-dimensional random projections // Lithuanian Mathematical Journal **51**:3 (2011) 330–341.

[21] *Скороход А. В.* Случайные линейные операторы. — Киев, 1978. — 200 с.

вими процесами. Властивості таких інтегральних випадкових операторів досліджуються в даній роботі. Зокрема для інтегрального оператора за точковим процесом, що породжений потоком Арратья, знайдено асимптотику наближення випадковими ядерними і вплив кластерів у потоці Арратья на швидкість збіжності цього наближення.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в Інституті математики НАН України у відділі теорії випадкових процесів у рамках держбюджетних тем «Стохастичний аналіз складних систем», державний реєстраційний номер 0111U001002, і «Стохастичні системи із сингулярною взаємодією», державний реєстраційний номер 0116U002066.

Мета і задачі дослідження. Метою даної дисертаційної роботи є дослідження зміни компактних множин під дією сильних випадкових операторів, що побудовані за одновимірними стохастичними потоками із сингулярною взаємодією. Ця мета містить наступні задачі:

- встановлення умови, за якої образ компактної множини існує під дією сильного випадкового оператора зсуву вздовж потоку Арратья;
- побудова компактної множини, що майже напевно не зникає під дією оператора зсуву за потоком Арратья;
- знаходження оцінки зростання максимальної кількості числа кластерів потоку Арратья і її вплив на асимптотику наближення випадковими ядерними операторами інтегрального оператора за потоком Арратья.

Об'єкт і предмет дослідження. *Об'єкт дослідження* — потік Арратья й сильні випадкові оператори, які він породжує. *Предмет дослідження* — випадковий точковий процес, побудований за потоком Арратья, а також випадкові інтегральні оператори, які він породжує, випадковий оператор зсуву вздовж потоку Арратья, n-поперечники за Колмогоровим образів компактних множин під дією сильних випадкових операторів, асимптотика зростання максимальної кількості кластерів потоку Арратья на відрізку одиничної довжини.

Методи дослідження. В роботі використовуються методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів і функціонального аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати дисертаційної роботи, що визначають її наукову новизну й виносяться на захист, такі:

- для гаусівського сильного випадкового оператора встановлено достатню умову існування неперервної модифікації на компактній множині;
- отримано формулу інтегрування частинами для потоку Арратья;
- встановлено необмеженість оператора зсуву вздовж потоку Арратья й достатню умову існування образу компактної множини під його дією;
- отримано необхідні й достатні умови збереження збіжності послідовностей функцій під дією оператора зсуву вздовж потоку Арратья;
- знайдено оцінку зростання максимальної кількості кластерів потоку Арратья;
- встановлено, що зсуви гаусівської щільності вздовж стаціонарного точкового процесу утворюють тотальну множину у просторі L_2 на довільному відрізку;
- отримано оцінку швидкості наближення ядерними випадковими операторами інтегрального оператора, породженого точковим процесом за потоком Арратья.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати можуть мати подальші застосування в різноманітних розділах теорії випадкових процесів і теорії стохастичних потоків.

Особистий внесок здобувача. Постановка задач і вибір методів дослідження в дисертаційній роботі й у спільних статтях[22] належать

[22] *Dorogovtsev A. A., Korenovska Ia. A.* Some random integral operators related to a point processes // Theory of Stochastic Processes **22**(**38**):1 (2017) 16–21.
Dorogovtsev A. A., Korenovska Ia. A. Essential sets for random operators constructed from an Arratia flow // Communications on Stochastic Analysis **11**:3 (2017) 301–312.
Dorogovtsev A. A., Korenovska Ia. A., Glinyanaya E. V. On some random integral operators generated by an Arratia flow // Theory of Stochastic Processes **22**(**38**):2 (2017) 8–18.

науковому керівнику дисертанта доктору фізико-математичних наук, професору А. А. Дороговцеву. Всі представлені в дисертації результати отримані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на таких конференціях і наукових семінарах:

- XXII международная конференция молодых ученых «Ломоносов», 13–17 апреля, 2015, Москва, Россия;
- Yu. V. Linnik Centennial Conference «Analytical methods in number theory, probability theory and mathematical statistics», September 14–18, 2015, St. Petersburg, Russia;
- International Conference Dedicated to the 80th Anniversary of Prof. A. Ya. Dorogovtsev «Stochastic Processes in Abstract Spaces», October 14–16, 2015, Kyiv, Ukraine;
- International Workshop in Honour of Prof. V. V. Buldygin «Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory and Mathematical Statistics», October 10–12, 2016, Kyiv, Ukraine;
- 12th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics and 2018 IMS Annual Meeting on Probability and Statistics, July 2–6, 2018, Vilnius, Lithuania;
- 2nd Ukrainian-German Mini-Workshop in stochastics «Stochastic calculus and geometry of stochastic flows with singular interactions», November 15, 2016, Jena, Germany;
- Symposium on Probability Theory and Random Processes, June 4–10, 2017, St. Petersburg, Russia;
- науковий семінар «Числення Маллявена та його застосування» Інституту математики НАН України під керівництвом доктора фізико-математичних наук, професора А. А. Дороговцева;
- науковий семінар «Статистичні проблеми для випадкових процесів і полів» при кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей фізико-математичного факультету Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут» імені Ігоря Сікорського під керівництвом доктора фізико-математичних наук, професора О. І. Клесова й доктора фізико-математичних наук, професора О. В. Іванова;

- науково-дослідницький семінар «Funktionenräume» при кафедрі аналізу та математичної фізики факультету математики та інформатики Єнського університету імені Фрідріха Шиллера під керівництвом професора Dr. Hans Triebel і професора Dr. Hans-Jürgen Schmeißer;

- науковий семінар «Stochastische Analysis» інституту математики Берлінського технічного університету під керівництвом професора Dr. Michael Scheutzow.

Публікації. Результати дисертації опубліковані у п'яти статтях у фахових виданнях, що входять до наукометричної бази Scopus, і п'яти збірках тез міжнародних конференцій.

Структура і обсяг роботи. Дисертація загальним обсягом 133 сторінки складається з анотацій українською й англійською мовами, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаної літератури, що містить 58 найменувань, і додатку зі списками опублікованих праць здобувача за темою дисертації й наукових семінарів і конференцій, на яких доповідались отримані результати.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

Основна частина дисертаційної роботи складається з чотирьох розділів.

Перший розділ присвячений сильним випадковим операторам у сенсі А. В. Скорохода й образам компактних множин під їхньою дією. У першому підрозділі наводиться означення сильного випадкового оператора і приклади таких об'єктів. Тут доводиться, що у просторі $L_2(\mathbb{R})$ сильним випадковим оператором є оператор зсуву

$$(T_t f)(u) = f(\varphi_{0,t}(u)), \quad f \in L_2(\mathbb{R}),$$

де $\varphi_{0,t}(u)$ – розв'язок стохастичного диференціального рівняння

$$dx(t) = a(x(t))dt + b(x(t))dw(t),$$

такий, що $\varphi_{0,0}(u) = u$.

Лема 1.1.1. *Нехай* $H = L_2(\mathbb{R})$, *оператор* T_t *породжується розв'язком стохастичного диференціального рівняння, де функції* $a, b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ *такі, що*

$$|a'| + |b'| \leq L, \quad \inf_{u \in \mathbb{R}} b(u) > 0.$$

Тоді T_t *– сильний випадковий оператор у* $L_2(\mathbb{R})$.

Умовою, яка гарантує можливість отримувати образ довільної множини під дією випадкового оператора, є обмеженість. Наприклад, випадковий оператор T_t з леми 1.1.1 обмежений тоді і лише тоді, коли

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} \left(\frac{\partial \varphi_{0,t}(u)}{\partial u} \right)^{-1} < +\infty.$$

У другому підрозділі зауважено, що образ компактної множини під дією сильного випадкового оператора може не існувати. Проте доведено, що у випадку гаусівського сильного випадкового оператора існування образу компактної множини гарантує умова Дадлі.

Для компактної множини $K \subset H$ сепарабельного гільбертового простору H позначимо через $N_K(u)$ найменшу кількість замкнутих куль радіусу $u > 0$, що утворюють покриття K.

Теорема 1.2.2. *Нехай* A *– гаусівський випадковий оператор у* H. *Якщо для компактної множини* K *у* H *виконується умова Дадлі*

$$\int_{N_K(u) > 1} (\ln N_K(u))^{1/2} du < +\infty,$$

то з імовірністю 1 образ $A(K)$ *існує і є компактною множиною.*

У *другому розділі* досліджуються властивості випадкового інтегрального оператора A у $L_2(\mathbb{R})$ з ядром

$$a(u, v) = \sum_{\theta \in \Theta} p_\varepsilon(u - \theta) p_\varepsilon(v - \theta),$$

побудованим за точковим процесом Θ на $\mathbb{R}$ і гаусівською щільністю $p_\varepsilon(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{u^2}{2\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$. У першому підрозділі встановлено, що зсуви p_ε уздовж стаціонарного точкового процесу утворюють тотальну множину у просторі $L_2([a; b])$, $a < b$.

Теорема 2.1.1. *Нехай* Θ *– стаціонарний ергодичний точковий процес на* $\mathbb{R}$ *і* $0 < M|\Theta \cap [0;1)\,| < +\infty$*. Тоді існує множина* Ω_0 *ймовірності 1, така, що для довільного* $\omega \in \Omega_0$ *лінійна оболонка функцій*

$$\Big\{p_\varepsilon(\cdot - \theta(\omega)),\ \theta(\omega) \in \Theta(\omega)\Big\}$$

щільна у $L_2([a;b])$*.*

У другому підрозділі доведено, що A є сильним випадковим оператором у $L_2(\mathbb{R})$.

Теорема 2.2.1. *Якщо* Θ *– стаціонарний точковий процес на* $\mathbb{R}$ *і* $M|\Theta \cap [0;1]|^2 < +\infty$*, то* A *є сильним випадковим оператором у* $L_2(\mathbb{R})$*.*

Встановлено, що загалом A не є обмеженим випадковим оператором у $L_2(\mathbb{R})$.

Теорема 2.2.2. *Нехай* Θ *– ергодичний стаціонарний точковий процес на* $\mathbb{R}$ *, для якого*

$$essup|\Theta \cap [0;1]| = +\infty.$$

Тоді A *не є обмеженим випадковим оператором у* $L_2(\mathbb{R})$*.*

Нехай точковий процес Θ_t на $\mathbb{R}$ складається з точок розриву функції $x(\cdot,t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що побудована за потоком Арратья $\{x(u,s),\ u \in \mathbb{R},\ s \geq 0\,\}$.

Означення 2.1.4. *Потоком Арратья називається сім'я випадкових процесів* $\{x(u,s),\ u \in \mathbb{R},\ s \geq 0\,\}$ *таких, що*
1) для будь-якого $u \in \mathbb{R}$ $x(u,\cdot)$ *– вінерівський мартингал відносно загальної фільтрації;*
2) для довільних $u_1 \leq u_2$ *та* $s \geq 0$ *з імовірністю 1*

$$x(u_1,s) \leq x(u_2,s);$$

3) для будь-яких $u,v \in \mathbb{R}$ *і* $t \geq 0$

$$< x(u,\cdot), x(v,\cdot) > (t) = \int_0^t 1\!\!\mathrm{I}_{\{x(u,s)=x(v,s)\}} ds.$$

Для довільних $a < b$ й ортогонального проектору $Q_{a,b}$ простору $L_2(\mathbb{R})$ на $L_2([a;b])$ розглянемо випадковий оператор $A_{Q_{a,b}} = Q_{a,b} A Q_{a,b}$.

Теорема 2.3.1. *Нехай* Θ_t *– точковий процес на* $\mathbb{R}$, *що побудований за потоком Арратья. Тоді для будь-якого* $\beta \in (0; \frac{1}{4})$ *майже напевно*

$$(\ln n)^{\beta - \frac{1}{4}} \|A_{Q_{-n,n}}\|^2 \to +\infty, \quad n \to \infty.$$

Третій розділ присвячений випадковим операторам $T_t,\ t > 0,$ зсуву вздовж потоку Арратья

$$T_t f(u) = f(x(u,t)), \quad f \in L_2(\mathbb{R}).$$

Для потоку Арратья $\{x(u,s),\ u \in \mathbb{R},\ s \in [0;t]\}$ розглянемо спряжений до нього потік Арратья $\{y(u,s),\ u \in \mathbb{R},\ s \in [0;t]\}$, що рухається у зворотному часі, й такий, що його траєкторії не перетинаються зі траєкторіями потоку $\{x(u,s),\ u \in \mathbb{R},\ s \in [0;t]\}$. Нехай ν_t – міра Лебега-Стілтьєса, що побудована за $y(\cdot,t)$. Інтеграл Лебега за мірою ν_t позначимо через $\int_{\mathbb{R}} f(u) dy(u,t)$. Для дослідження властивостей T_t у дисертаційній роботі доводиться формула інтегрування частинами для потоку Арратья.

Теорема 3.1.1. *Нехай* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *– невід'ємна вимірна функція й* $\int_{\mathbb{R}} h(u)du < +\infty$. *Тоді для будь-якого* $t > 0$ *з імовірністю 1 існує інтеграл* $\int_{\mathbb{R}} h(x(u,t))du$ *та виконуєтьcя рівність*

$$\int_{\mathbb{R}} h(x(u,t))du = \int_{\mathbb{R}} h(u)dy(u,t).$$

Завдяки склеюванню частинок у потоці Арратья оператор зсуву T_t не є обмеженим.

Теорема 3.2.1. *Для будь-якого* $t > 0$ T_t *не є обмеженим сильним випадковим оператором у* $L_2(\mathbb{R})$.

За допомогою формули інтегрування частинами для потоку Арратья отримано достатню умову на множину функцій, за якої T_t є обмеженим випадковим оператором на ній.

Теорема 3.2.2. *Нехай сім'я функцій* $\Phi \subset W_2^1(\mathbb{R})$ *з простору Соболєва задовольняє умову*

$$\sup_{f \in \Phi} \|f'\|_{L_2(\mathbb{R},(|u|+1)^3 du)} < +\infty.$$

Тоді для будь-якого $t > 0$

$$\mathbb{P}\left\{\exists C > 0 |\ \forall f \in \Phi \quad \|T_t f\|_{L_2(\mathbb{R})} \le C \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}\right\} = 1.$$

Наслідком є таке твердження.

Теорема 3.2.3. *Нехай* $K \subseteq W_2^1(\mathbb{R})$ *– множина у* $L_2(\mathbb{R})$ *, для якої*

$$\sup_{f,g\in K} \int_{\mathbb{R}} (f'(u) - g'(u))^2(|u|+1)^3 du < \infty.$$

Тоді для будь-якого $t > 0$ T_t *на* K *має неперервну модифікацію.*

У третьому підрозділі отримані необхідні й достатні умови збереження збіжності послідовності функцій з $L_2(\mathbb{R})$ під дією випадкового оператора T_t.

Теорема 3.3.1. *Нехай послідовність* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_2(\mathbb{R})$ *така, що* $f_n \to 0$ *у* $L_2(\mathbb{R})$ *при* $n \to \infty$. *Якщо*

$$\mathbb{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \|T_t f_n\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0\right\} = 1,$$

то $f_n \to 0$ *майже всюди за мірою Лебега* λ *на* $\mathbb{R}$ *при* $n \to \infty$.

Теорема 3.3.2. *Нехай послідовність функцій* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_2(\mathbb{R})$ *задовольняє умови*

1) $f_n \to 0$ *у* $L_2(\mathbb{R})$ *при* $n \to \infty$;
2) $f_n \to 0$, $n \to \infty$, *майже всюди за* λ *на* $\mathbb{R}$;
3) існує $C > 0$, *що для довільного* $n \geq 1$

$$supp f_n \subset [-C; C].$$

Тоді для будь-якого $t > 0$

$$\mathbb{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \|T_t f_n\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0\right\} = 1.$$

У *четвертому розділі* досліджуються зміни поперечників за Колмогоровим компактних множин під дією деяких сильних випадкових операторів.

Означення 4.0.1. n *- поперечником за Колмогоровим множини* $C \subseteq X$ *у лінійному нормованому просторі* X *називається величина*

$$d_n(C, X) = \inf_{\dim L \leq n} \sup_{f\in C} \inf_{g\in L} \|f - g\|_X,$$

де L *– підпростір* X.

У першому підрозділі отримані оцінки на поперечники компактної множини

$$\widetilde{K} = \left\{ f \in W_2^1(\mathbb{R}) \;\Big|\; \int_{\mathbb{R}} f^2(u)(1+|u|)^3 du + \right.$$
$$\left. + \int_{\mathbb{R}} \left(f'(u)\right)^2 (1+|u|)^7 du \le 1 \right\},$$

на якій існує неперервна модифікація оператора зсуву за потоком Арратья.

Лема 4.1.2. *Існують додатні константи* C_1, C_2 *такі, що для будь-якого* $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{C_1}{n} \le d_n\left(\widetilde{K}, L_2(\mathbb{R})\right) \le \frac{C_2}{n^{\frac{3}{10}}}.$$

Розглянемо гаусівський сильний випадковий оператор A у сепарабельному гільбертовому просторі H із ортонормованим базисом $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n (f, e_n) e_n,$$

де $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ – незалежні гаусівські випадкові величини з $M\xi_n = 0$ і $M\xi_n^2 = 1,\ n \in \mathbb{N}$. У другому підрозділі наведено приклад компактної в H множини, для якої випадковий оператор A не змінює асимптотичної поведінки поперечників за Колмогоровим.

Лема 4.2.1. *Нехай* A *– гаусівський діагональний сильний випадковий оператор у сепарабельному гільбертовому просторі* H. *Тоді для компакту*

$$K = \left\{ f \in H \;\Big|\; (f, e_n)^2 \le \frac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

існують додатні випадкові величини c_1, c_2, *що на множині повної ймовірності для всіх* $n \ge N_0$

$$\frac{c_2}{\sqrt{n}} \le d_n(A(K), H) \le \frac{c_1}{\sqrt{n}}.$$

У третьому підрозділі встановлено, що оператор зсуву вздовж потоку Арратья не погіршує верхньої оцінки поперечника за Колмогоровим компакту

$$\widetilde{K} = \left\{ f \in W_2^1(\mathbb{R}) \;\Big|\; \int_{\mathbb{R}} f^2(u)(1+|u|)^3 du + \right.$$

$$+\int_{\mathbb{R}} \left(f'(u)\right)^2 (1+|u|)^7 du \leq 1\Bigg\}$$

Теорема 4.3.1. *Існує множина* $\widetilde{\Omega}$ *повної ймовірності така, що для будь-яких* $\omega \in \widetilde{\Omega}$ *та* $n \in \mathbb{N}$

$$d_n\left(T_t^{\omega}(\widetilde{K}), L_2(\mathbb{R})\right) \leq \frac{C(\omega)}{n^{\frac{3}{10}}},$$

де випадкова величина $C(\omega) > 0$ *не залежить від* n.

Для фіксованого $n \in \mathbb{N}$ розглянемо розбиття $\{u_k,\ k = \overline{0, 2(n+1)}\}$ відрізку $[0; n^{-2}]$ на $2(n+1)$ сегментів однакової довжини. Побудуємо лінійно незалежні функції f_k, $k = \overline{0, n}$.

$$f_k = \begin{cases} 0, & u \notin [u_{2k}; u_{2k+1}], \\ 1, & u \in [u_{2k} + \frac{n^{-2}}{6(n+1)}; u_{2k} + \frac{2n^{-2}}{6(n+1)}], \\ \frac{6(n+1)}{n^{-2}}(u - u_{2k}), & u \in [u_{2k}; u_{2k} + \frac{n^{-2}}{6(n+1)}], \\ -\frac{6(n+1)}{n^{-2}}(u - u_{2k+1}), & u \in [u_{2k} + \frac{2n^{-2}}{6(n+1)}; u_{2k+1}]. \end{cases}$$

Теорема 4.4.2. *Існує множина* Ω_0 *повної ймовірності така, що для довільного* $\omega \in \Omega_0$ *функції* $T_t^{\omega}(f_0 * p_{\varepsilon}), \ldots, T_t^{\omega}(f_n * p_{\varepsilon})$ *лінійно незалежні.*

Згідно з формулою інтегрування частинами для потоку Арратья, функції з попередньої теореми пов'язані з випадковими інтегральними операторами A_t в $L_2(\mathbb{R})$, ядра яких мають вигляд

$$a_t(u, v) = \sum_{\theta \in \Theta_t} \Delta y(\theta, t) p_{\varepsilon}(u - \theta) p_{\varepsilon}(v - \theta).$$

Властивості A_t досліджуються у п'ятому підрозділі. Зокрема, доведена необмеженість таких об'єктів.

Теорема 4.5.1. A_t *не є обмеженим випадковим оператором у* $L_2(\mathbb{R})$.

Аналогічно до випадку інтегральних операторів із другого розділу, A_t можна наближати випадковими ядерними операторами $Q_{-n,n} A_t Q_{-n,n}$. У шостому підрозділі показано, що квадрат їхньої норми мажорується знизу максимумом із перших n величин

$$\zeta_k = \sum_{\theta \in \Theta_t \cap [k; k+1]} (\Delta y(\theta, t))^2, \ \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

для якого знайдена оцінка швидкості зростання до нескінченності.

Теорема 4.6.1. *З імовірністю 1*

$$\frac{\ln\ln n}{\ln n} \cdot \max_{k=\overline{0,n}} \zeta_k \to +\infty,\ n \to \infty.$$

ВИСНОВКИ

У дисертації досліджуються зміни компактних множин під дією сильних випадкових операторів, що побудовані за одновимірними стохастичними потоками із сингулярною взаємодією.

Основні результати даної дисертаційної роботи такі:

- для гаусівського сильного випадкового оператора встановлено достатню умову існування неперервної модифікації на компактній множині;
- отримано формулу інтегрування частинами для потоку Арратья;
- встановлено необмеженість оператора зсуву вздовж потоку Арратья й достатню умову існування образу компактної множини під його дією;
- отримано необхідні й достатні умови збереження збіжності послідовностей функцій під дією оператора зсуву вздовж потоку Арратья;
- знайдено оцінку швидкості зростання максимальної кількості кластерів потоку Арратья;
- встановлено, що зсуви гаусівської щільності вздовж стаціонарного точкового процесу утворюють тотальну множину у просторі L_2 на довільному відрізку;
- отримано оцінку швидкості наближення ядерними випадковими операторами інтегрального оператора, породженого точковим процесом за потоком Арратья.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. *Korenovska I. A.* Random maps and Kolmogorov widths // Theory of Stochastic Processes, **20**(**36**):1 (2015) 78–83.

2. *Кореновская Я. А.* Свойства сильных случайных операторов, построенных по потоку Арратья // Украинский математический журнал, **69**:2 (2017) 157–172.

3. *Dorogovtsev A. A., Korenovska Ia. A.* Some random integral operators related to a point processes // Theory of Stochastic Processes, **22**(**38**):1 (2017) 16–21.

4. *Dorogovtsev A. A., Korenovska Ia. A.* Essential sets for random operators constructed from an Arratia flow // Communications on Stochastic Analysis, **11**:3 (2017) 301–312.

5. *Dorogovtsev A. A., Korenovska Ia. A., Glinyanaya E. V.* On some random integral operators generated by an Arratia flow // Theory of Stochastic Processes, **22**(**38**):2 (2017) 8–18.

6. *Кореновская Я. А.* Случайные отображения и поперечники компактов в гильбертовом пространстве // XXII международная конференция молодых ученых «Ломоносов», 13–17 апреля, 2015, Москва, Россия: аннотация. — `https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2015/data/6968/uid83275_report.pdf`

7. *Korenovska I. A.* Random maps and widths of compact sets in Hilbert space // Yu. V. Linnik Centennial Conference «Analytical methods in number theory, probability theory and mathematical statistics», September 14–18, 2015, St. Petersburg, Russia: abstract. — P. 30–31, `http://www.pdmi.ras.ru/EIMI/2015/Linnik/abstract_pt.pdf`

8. *Korenovska I. A.* The images of compact sets under Gaussian strong random operators // International Conference Dedicated to the 80th Anniversary of Prof. A. Ya. Dorogovtsev «Stochastic Processes in Abstract Spaces», October 14–16, 2015, Kyiv, Ukraine: abstract. — P. 28.

9. *Korenovska I. A.* Strong random operators generated by stochastic flows // International Workshop in Honour of Prof. V. V. Buldygin «Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory and Mathematical Statistics», October 10–12, 2016, Kyiv, Ukraine: abstract. — P. 31–32.

10. *Korenovska Ia. A.* Random operators related to an Arratia flow // 12th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics and 2018 IMS Annual Meeting on Probability

and Statistics, July 2–6, 2018, Vilnius, Lithuania: abstract. — P. 249, http://ims-vilnius2018.com/content/pdf/ivc123.pdf

АНОТАЦІЇ

Кореновська Я. А. Геометричні властивості нескінченновимірних відображень, що породжені сингулярними стохастичними потоками. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.05 «Теорія ймовірностей і математична статистика». — Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню випадкових операторів, що побудовані за одновимірними стохастичними потоками. Встановлено достатню умову існування образу компактної множини гільбертового простору під дією випадкового оператора T_t зсуву вздовж потоку Арратья, для чого доведена формула інтегрування частинами для потоку Арратья. У дисертації встановлено, що компакти можуть зникати під дією T_t, і побудовано компактну множину у $L_2(\mathbb{R})$, що майже напевно не зникає; досліджено її поперечники за Колмогоровим і показано, що їхня зміна під дією T_t пов'язана зі властивостями випадкових інтегральних операторів, що побудовані за точковими процесами. Властивості таких випадкових інтегральних операторів досліджуються в даній роботі. У випадку, коли точковий процес задається положеннями у додатній момент часу частинок потоку Арратья, для відповідного інтегрального випадкового оператора в роботі знайдено вплив властивостей кластерів потоку Арратья на швидкість наближення його випадковими ядерними операторами.

Ключові слова: сильний випадковий оператор, умова Дадлі, потік Арратья, число кластерів, точковий процес, n-поперечник за Колмогоровим.

Кореновская Я. А. Геометрические свойства бесконечномерных отображений, порожденных сингулярными стохастическими потоками. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 — теория вероятности

и математическая статистика. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

Диссертационная работа посвящена исследованию случайных операторов, построенных по одномерным стохастическим потокам.

В работах А. А. Дороговцева доказано, что свойства полугруппы конечномерных случайных проекторов характеризуются изменением поперечников компактных множеств под действием данных операторов. Случайный оператор T_t сдвига вдоль потока Арратья является сильным случайным оператором в смысле А. В. Скорохода, поэтому образы компактных множеств под его действием могут не существовать. В данной диссертационной работе было доказано, что условие Дадли является достаточным для существования образа компактного множества в сепарабельном гильбертовом пространстве под действием гауссовского сильного случайного оператора.

Для получения достаточного условия существования образа компактного множества под действием T_t, который не является гауссовским сильным случайным оператором, в данной диссертационной работе была доказана формула интегрирования по частям для потока Арратья. Помимо этого, с ее помощью было установлено, что компакты могут исчезать под действием случайного оператора сдвига вдоль потока Арратья.

В данной диссертации было построено компактное множество в $L_2(\mathbb{R})$, которое почти наверное не исчезает под действием T_t, исследованы его поперечники по Колмогорову и показано, что их изменение под действием T_t связано со свойствами случайных интегральных операторов, построенных по точечным процессам. Свойства таких случайных интегральных операторов исследуются в данной работе.

В случае, когда точечный процесс задается положениями частиц в потоке Арратья в ненулевой момент времени, для соответствующего случайного интегрального оператора в данной диссертационной работе установлено влияние свойств кластеров потока Арратья на скорость приближения его случайными ядерными операторами.

Ключевые слова: сильный случайный оператор, условие Дадли, поток Арратья, число кластеров, точечный процесс, n-поперечник Колмогорова.

Korenovska Ia. A. Geometric properties of infinite-dimensional maps generated by singular stochastic flows. — Manuscript.

Candidate of Science (PhD) Thesis, 01.01.05 «Probability Theory and Mathematical Statistics». — Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev, 2018.

The thesis is devoted to the study of random operators constructed by one-dimensional stochastic flows. Random operator T_t of shift along an Arratia flow is a strong random operator in sense of A. V. Skorokhod. Consequently, images of compact sets under T_t may not exist. It was obtained in this thesis that image of compact set under Gaussian strong random operator exists when Dudley condition holds. To obtain the sufficient condition in the case of T_t it was proved in this work the formula of change of variables for an Arratia flow. Besides, the formula was used to show that compact sets may disappear under shift operator along an Arratia flow. It was constructed in this thesis a compact set in $L_2(\mathbb{R})$, which almost surely doesn't disappear under T_t. Kolmogorov n-widths of this compact were investigated, and it was shown how their changes under T_t relate to properties of random integral operators generated by a point processes. It was shown in this work that corresponding random integral operators may be approximate by random nuclear operators. In the thesis we find which properties of clusters in Arratia flow influe on a rate of the approximation in the case of point process which is given by positions of particles in Arratia flow at a nonzero time.

Key words: strong random operator, Dudley condition, Arratia flow, number of clusters, point process, Kolmogorov n-width.