НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Кореновська Ярослава Аркадіївна

УДК 519.21

ДИСЕРТАЦІЯ

Геометричні властивості нескінченновимірних відображень, що породжені сингулярними стохастичними потоками

01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ________________________ Я. А. Кореновська

Науковий керівник:
Дороговцев Андрій Анатолійович
доктор фізико-математичних наук,
професор

Київ — 2018

Анотація

Кореновська Я. А. Геометричні властивості нескінченновимірних відображень, що породжені сингулярними стохастичними потоками. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика (11 — Математика та статистика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню випадкових операторів, що побудовані за одновимірними стохастичними потоками. Основна частина дисертації складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаної літератури та додатку зі списками опублікованих праць здобувача за темою дисертації і наукових семінарів і конференцій, на яких доповідались отримані результати.

У вступі відзначаються: актуальність теми дисертації та її зв'язок з іншими науковими програмами, планами, темами в місці виконання дисертаційної роботи; мета і задачі, об'єкт і предмет та методи дослідження; наукова новизна і практичне значення отриманих результатів; особистий внесок здобувача, а також, де були апробовані і опубліковані основні результати дисертаційної роботи.

Перший розділ присвячений сильним випадковим операторам у сенсі А. В. Скорохода та образам компактних множин під їх дією. Перший підрозділ містить означення сильного випадкового оператора та приклади таких об'єктів. Крім того, в ньому доводиться, що сильним випадковим оператором у $L_2(\mathbb{R})$ є відображення, яке описує зсуви функцій уздовж розв'язків стохастичного диференціального рівняння, коефіцієнти якого неперервно-диференційовні з обмеженими похідними на всій дійсній вісі та дифузія відділена від нуля. У другому підрозділі показується, що образ компактної множини під дією сильного випад-

кового оператора, взагалі кажучи, може не існувати. Також доведено, що у випадку гаусівського сильного випадкового оператора, існування образу компактної множини гарантує умова Дадлі. У цьому ж підрозділі встановлено необхідну та достатню умову обмеженості сильного випадкового оператора зсуву, що породжений стохастичним диференціальним рівнянням.

У другому розділі досліджуються властивості випадкових інтегральних операторів, ядра яких задаються за допомогою зсувів гаусівських щільностей уздовж стаціонарного точкового процесу. Перший підрозділ містить означення і приклади точкового процесу та доведення того, що лінійна оболонка зсувів гаусівських щільностей уздовж стаціонарного ергодичного точкового процесу є тотальною у просторі квадратично інтегровних на обмеженому сегменті функцій. У другому підрозділі для ергодичних точкових процесів доведена необмеженість випадкового інтегрального оператора. У третьому підрозділі отримано оцінку зростання максимальної кількості кластерів потоку Арратья на відрізках одиничної довжини. Цей результат використовується для дослідження швидкості наближення випадковими ядерними операторами необмеженого випадкового інтегрального оператора, який побудовано за точковим процесом, що породжений потоком Арратья.

Третій розділ присвячений випадковим операторам зсуву, що побудовані за потоком Арратья. У першому підрозділі доведена формула інтегрування частинами для потоку Арратья. У другому підрозділі показано необмеженість оператора зсуву уздовж потоку Арратья та наведено достатню умову на сім'ю функцій, за якої цей сильний випадковий оператор є обмеженим на данній множині функцій. Встановлено достатню умову на компактну множину у просторі квадратично інтегровних функцій на всій дійсній вісі, за якої під дією оператора зсуву за потоком Арратья образ даного компакту існує та є випадкового компактною множиною. У третьому підрозділі доведені необхідні та достатні умови збереження збіжності під дією випадкового оператора зсуву за потоком Арратья.

У четвертому розділі досліджуються зміни поперечників за Колмогоровим компактних множин під дією деяких сильних випадкових операторів. У першому підрозділі отримані оцінки на поперечники за Колмогоровим компактної множини, на якій існує неперервна модифікація оператора зсуву за потоком Арратья. Другий підрозділ містить приклад компактної множини у сепарабельному гільбертовому просторі, для якої діагональний гаусівський сильний випадковий оператор не змінює асимптотичну поведінку поперечників за Колмогоровим. У третьому підрозділі встановлено, що оператор зсуву за потоком Арратья не погіршує верхню оцінку поперечника за Колмогоровим компакту з першого підрозділу. У четвертому підрозділі наведено приклади функцій, що їх образи під дією випадкового оператора зсуву уздовж потоку Арратья майже напевно не є нульовими, та побудовано підпростір, що зберігає свою розмірність при дії данного випадкового оператора. П'ятий підрозділ присвячений випадковим інтегральним операторам, побудованим за потоком Арратья. Показано, що в них є ті ж властивості, що у другому розділі доведені для випадкових інтегральних операторів, породжених стаціонарними точковими процесами. У шостому підрозділі знайдено асимптотику наближення випадковими ядерними операторами необмеженого випадкового інтегрального оператора за потоком Арратья.

Ключові слова: сильний випадковий оператор, умова Дадлі, потік Арратья, число кластерів, точковий процес, n-поперечник за Колмогоровим.

Список опублікованих праць здобувача

за темою дисертації

Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в п'яти статтях у фахових виданнях, що індексуються наукометричною базою Scopus, та п'яти збірках тез міжнародних конференцій:

1. *Korenovska I. A.* Random maps and Kolmogorov widths // Theory of Stochastic Processes **20**(**36**):1 (2015) 78–83.
2. *Кореновская Я. А.* Свойства сильных случайных операторов, построенных по потоку Арратья // Украинский математический журнал **69**:2 (2017) 157–172.
3. *Dorogovtsev A. A., Korenovska Ia. A.* Some random integral operators related to a point processes // Theory of Stochastic Processes **22**(**38**):1 (2017) 16–21.
4. *Dorogovtsev A. A., Korenovska Ia. A.* Essential sets for random operators constructed from an Arratia flow // Communications on Stochastic Analysis **11**:3 (2017) 301–312.
5. *Dorogovtsev A. A., Korenovska Ia. A., Glinyanaya E. V.* On some random integral operators generated by an Arratia flow // Theory of Stochastic Processes **22**(**38**):2 (2017) 8–18.
6. *Кореновская Я. А.* Случайные отображения и поперечники компактов в гильбертовом пространстве // XXII международная конференция молодых ученых «Ломоносов», 13–17 апреля, 2015, Москва, Россия: аннотация. — ISBN 978-5-317-04946-1.
7. *Korenovska I. A.* Random maps and widths of compact sets in Hilbert space // Yu. V. Linnik Centennial Conference «Analytical methods in number theory, probability theory and mathematical statistics», September 14–18, 2015, St. Petersburg, Russia: abstract. — P. 30–31.

8. *Korenovska I. A.* The images of compact sets under Gaussian strong random operators // International Conference Dedicated to the 80th Anniversary of Prof. A. Ya. Dorogovtsev «Stochastic Processes in Abstract Spaces», October 14–16, 2015, Kyiv, Ukraine: abstract. – P. 28.

9. *Korenovska I. A.* Strong random operators generated by stochastic flows // International Workshop in Honour of Prof. V. V. Buldygin «Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory and Mathematical Statistics», October 10–12, 2016, Kyiv, Ukraine: abstract. – P. 31–32.

10. *Korenovska Ia. A.* Random operators related to an Arratia flow // 12th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics and 2018 IMS Annual Meeting on Probability and Statistics, July 2–6, 2018, Vilnius, Lithuania: abstract. – P. 249.

Abstract

Korenovska Ia. A. Geometric properties of infinite-dimensional maps generated by singular stochastic flows. — Manuscript.

Candidate of Sciences (PhD) Thesis, Physical and Mathematical Sciences, 01.01.05 — Probability Theory and Mathematical Statistics (11 — Mathematics and Statistics). — Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 2018.

This thesis is devoted to the study of random operators generated by one-dimensional stochastic flows. The main part of the thesis consists of the introduction, four sections, conclusions and a list of references. They are followed by an appendix which lists the author's publications as well

as scientific seminars and conferences at which the obtained results were reported.

In the introduction we outline the relevance of the topic of the thesis and its connection with other scientific programs and topics at the place where the research was carried out; goals and objectives, the object and subject, and the methods of research; the scientific novelty and the practical significance of the obtained results; the author's personal contribution, and also reference to where the main results of the research were reported and published.

The first section is devoted to strong random operators in sense of A. V. Skorokhod, and images of compact sets under these operators. The first subsection contains the definition of a strong random operator and examples of objects of the kind. Moreover, it is proved that random map, which describes shift of functions along solutions of stochastic differential equation with coefficients that are continuously differentiable with bounded derivatives, and diffusion separated from zero, is a strong random operator in $L_2(\mathbb{R})$. In the second subsection it is shown that the image of a compact set under a strong random operator may not be defined. Also, it is proved that Dudley condition is sufficient for existence of the image of a compact set in the case of the Gaussian strong random operator. In this subsection we obtain the necessary and sufficient conditions of boundedness of the strong random operator of the shift which is generated by a stochastic differential equation.

In the second section we investigate properties of random integral operators whose kernels are obtained as a convolution of Gaussian densities with stationary point process. The first subsection contains definition and examples of a point proecss. It is also proved that the linear span of shifts of Gaussian densities along a stationary ergodic point process is dense in the space of functions which are square integrable on the bounded segment. In the second subsection we prove unboundedness of a random integral operator generated by an ergodic stationary point process. In the third subsection we estimate the rate of growth of a maximum number of clusters in Arratia flow on intervals with lengths of one. This estimation is used to investigate the rate of approximation of the unbounded random integral operator contructed from a point process generated by an Arratia flow by random nuclear operators.

The third section is devoted to shift random operators constructed using the Arratia flow. In the first subsection we prove the formula of change of variables for an Arratia flow. In the second subsection we show unboundedness of the shift-operator along an Arratia flow, and for a family of functions we obtain the sufficient condition under which this shift-operator is bounded on considered family of functions. It is established the sufficient condition for a compact set under which its image under shift-operator along an Arratia flow exists and is a random compact set. In the third subsection we prove the necessary and sufficient conditions for preserving convergence by shift-operator generated by an Arratia flow.

In the fourth section we investigate the changes of Kolmogorov widths of compact sets under strong random operators. In the first subsection we obtain estimates of Kolmogorov widths of a compact set on which there exists a continuous modification of the shift-operator along an Arratia flow. The second subsection contains an example of a compact set in a Hilbert space for which the behavior of its Kolmogorov widths doesn't change under diagonal Gaussian strong random operator. In the third subsection we show that shift-operator along an Arratia flow doesn't impair an upper estimation of the Kolmogorov width of the compact set from the first subsection. The fourth subsection contains examples of functions which images under shift-operator along an Arratia flow don't equal zero with probability one. A finite-dimensional subspace is constructed, which preserves its dimension under shift-operator along an Arratia flow. The fifth subsection is devoted to random integral operators generated by an Arratia flow. It is shown that they have the same properties which are proved in the second section for random integral operators constructed by a stationary point process. In the sixth subsection we find a rate of approximation of unbounded random integral operator generated by an Arratia flow by random nuclear operators.

Key words: strong random operator, Dudley condition, Arratia flow, number of clusters, point process, Kolmogorov n-width.

List of publications

The main results of the thesis were published in five papers, which were published in journals indexed by Scopus, and in the proceedings of five international conferences:

1. *Korenovska I. A.* Random maps and Kolmogorov widths // Theory of Stochastic Processes **20**(**36**):1 (2015) 78–83.
2. *Korenovskaya Ya. A.* Properties of strong random operators generated by an Arratia flow // Ukrainian Mathematical Journal **69**:2 (2017) 157–172. (in Russian)
3. *Dorogovtsev A. A., Korenovska Ia. A.* Some random integral operators related to a point processes // Theory of Stochastic Processes **22**(**38**):1 (2017) 16–21.
4. *Dorogovtsev A. A., Korenovska Ia. A.* Essential sets for random operators constructed from an Arratia flow // Communications on Stochastic Analysis **11**:3 (2017) 301–312.

5. *Dorogovtsev A. A., Korenovska Ia. A., Glinyanaya E. V.* On some random integral operators generated by an Arratia flow // Theory of Stochastic Processes **22**(**38**):2 (2017) 8–18.

6. *Korenovskaya Ya. A.* Random maps and widths fo compact sets in Hilbert space // XXII international conference of young scientists «Lomonosov», April 13–17, 2015, Moscow, Russia: abstract. — ISBN 978-5-317-04946-1. (in Russian)

7. *Korenovska I. A.* Random maps and widths of compact sets in Hilbert space // Yu. V. Linnik Centennial Conference «Analytical methods in number theory, probability theory and mathematical statistics», September 14–18, 2015, St. Petersburg, Russia: abstract. — P. 30–31.

8. *Korenovska I. A.* The images of compact sets under Gaussian strong random operators // International Conference Dedicated to the 80th Anniversary of Prof. A. Ya. Dorogovtsev «Stochastic Processes in Abstract Spaces», October 14–16, 2015, Kyiv, Ukraine: abstract. — P. 28.

9. *Korenovska I. A.* Strong random operators generated by stochastic flows // International Workshop in Honour of Prof. V. V. Buldygin «Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory and Mathematical Statistics», October 10–12, 2016, Kyiv, Ukraine: abstract. — P. 31–32.

10. *Korenovska Ia. A.* Random operators related to an Arratia flow // 12th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics and 2018 IMS Annual Meeting on Probability and Statistics, July 2–6, 2018, Vilnius, Lithuania: abstract. — P. 249.

Зміст

Вступ

Актуальність теми. Головними об'єктами дослідження даної роботи є одновимірні стохастичні потоки. Вони використовуються при вивченні математичних моделей турбулентності, систем взаємодіючих частинок (див. [2], [5], [24], [46]). У деякому сенсі стохастичні потоки – це випадкові аналоги динамічних систем. Відомо (див. [31], [42]), що за певних умов гладкості на коефіцієнти стохастичне диференціальне рівняння породжує стохастичний потік дифеоморфізмів. При цьому, будь-які дві частинки у такому потоці не можуть зіштовхуватись.

У дисертаційній роботі Арратья [2] при дослідженні слабкої границі шкалованих випадкових блукань зі склеюванням отримана сім'я вінерівських процесів, будь-які два з яких незалежні до моменту зустрічі, а у момент зустрічі склеюються і далі рухаються як один вінерівський процес. У подальшому такий об'єкт носить назву потоку Арратья та активно досліджується. Зокрема, А. А. Дороговцев (див. [7]) довів скінченність сумарного часу вільного пробігу частинок у потоці Арратья, з чого випливає зліченність числа кластерів потоку Арратья у будь-який додатній момент часу, та розривність потоку за просторовою змінною. А. А. Дороговцев, А. В. Гнедін, М. Б. Вовчанський у [6] довели аналог закону повторного логарифму при малих значеннях часового параметру для розміру максимального кластеру потоку Арратья, а розподіл числа кластерів отриман В. В. Фомічьовим (див. [21]).

Узагальнення потоку Арратья розглядалось Т. Е. Харрісом [24], де за певних умов на коваріаційну функцію доведено не лише існування потоку, а і склеювання частинок у ньому. І. І. Ніщенко (див. [34]) для наближення потоків Харріса було використано аналог дискретної схеми Ейлера-Маруями. Асимптотику при малих значеннях часового параметру для рівномірного відхилення частинок потоку Харріса від положення їх старту отримав О. О. Шамов (див. [37]). В. В. Конаровський (див. [25], [49]) досліджував систему броунівських частинок зі склеюванням, проте, на відміну від потоку Арратья, маси частинок підсумовуються при склеюванні.

Окрім склеювання розглядались і інші питання стосовно стохастичних потоків. Зокрема, у монографії А. А. Дороговцева [7] був побудований стохастичний інтеграл за потоком Арратья та отримано представлення Кларка для функціоналів від потоку Арратья. Принцип великих відхилень для броунівських стохастичних потоків з гладкою коваріацією і для потоку Арратья був доведений А. А. Дороговцевим та О. В. Остапенко (див. [10]). Локальний час у нулі потоку Арратья досліджувався П. П. Чернегою (див. [58]). Аналоги теореми Гірсанова для потоку Арратья та для потоку розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією доведені Т. В. Маловичко (див. [55]), а для потоку Арратья зі зносом – А. А. Дороговцевим (див. [7]).

Аналог розкладу Крилова-Веретеннікова для стохастичних напівгруп та n-точкових рухів потоку Арратья отримано А. А. Дороговцевим у роботі [8]. Напівгрупи n-точкових рухів потоку Харріса досліджувались К. В. Глиняною (див. [18]). Г. В. Рябовим та А. А. Дороговцевим (див. [12],[36]) отримані ортогональні розклади для квадратично інтегровних функціоналів від потоків зі склеюванням.

Зауважимо, що для потоку Харріса у [24] наведена лише достатня умова на характеристику, за якої відбувається склеювання частинок.

У загальному ж випадку, для потоків Харріса досі невідомо твердження, яке б однозначно давало відповідь на те, чи є склеювання у потоці. Тому, подальші зусилля направлені на розробку єдиного методу дослідження властивостей як стохастичних потоків, що породжуються стохастичними диференціальними рівняннями, так і потоків із взаємодією. У [47] А. А. Дороговцевим для множин гільбертового простору введено поняття квадратичної ентропії, що є скінченною для множини значень стохастичного потоку броунівських частинок на дійсній вісі, а для потоку Арратья з цього випливає скінченність часу вільного пробігу частинок, що стартують з обмеженого інтервалу.

Для дослідження геометричних властивостей потоків Харріса А. А. Дороговцевим (див. [7]) було запропоновано розглядати стохастичні напівгрупи операторів, що описують зсуви функцій уздовж цих потоків. Вивчення стохастичних напівгруп операторів у загальному випадку почалось з робіт [56], [57], у яких вони представлялись як стохастичні експоненти від деяких операторно-значних мартингалів. Такий підхід потребує існування неперервного оберненого у оператора середнього, однак у випадку потоків із склеювання відповідні оператори можуть цю умову не задовольняти. У роботі [7] розглядалась напівгрупа скінченновимірних проекторів та показано, що її геометрія характеризується за допомогою зміни поперечників компактів під дією цих операторів.

Дана дисертаційна робота присвячена дослідженню зміни поперечників компактних множин у просторі $L_2(\mathbb{R})$ під дією випадкових операторів $\{T_t,\ t \geq 0\}$, що описують зсуви функцій уздовж потоку Арратья. У [8] зауважено, що такі оператори є сильними випадковими у сенсі А. В. Скорохода [57], а тому, як показано у першому розділі даної роботи, образи компактних множин під дією таких операторів можуть не існувати. Як відомо (див. [54]), умова Дадлі є достатньою для існування неперервної модифікації на компакті гаусівського випадкового процесу. У першому розділі доведено, що ця умова є достатньою і для існування образу компактної множини під дією гаусівського сильного випадкового оператора. Другий розділ присвячен випадковим інтегральним операторам, побудованим за точковим процесом. Такі об'єкти виникають при дослідженні образів компактних множин під дією оператора зсуву за потоком Арратья. У третьому розділі буде показано, що випадковий оператор зсуву за потоком Арратья не є обмеженим випадковим оператором. Більш того, він не є гаусівським. Тому у третьому розділі буде доведена формула інтегрування частинами для потоку Арратья, що використовується для отримання достатньої умови існування образу компактної множини під дією T_t. Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячен побудові компактної множини у просторі $L_2(\mathbb{R})$, що майже напевно не зникає під дією випадкового оператора зсуву за потоком Арратья, а також дослідженню поперечників за Колмогоровим данної множини та її образу під дією T_t. Показано, як оператор зсуву та випадковий інтегральний оператор, що побудовані за потоком Арратья, пов'язані. У цьому ж розділі знайдено асимптотику наближення такого інтегрального оператора випадковими ядерними.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виповнена в Інституті математики НАН України у відділі теорії випадкових процесів в рамках держбюджетних тем «Стохастичний аналіз складних систем», державний реєстраційний номер 0111U001002, та «Стохастичні системи із сингулярною взаємодією», державний реєстраційний номер 0116U002066.

Мета і задачі дослідження. Метою даної дисертаційної роботи є дослідження зміни компактних множин під дією сильних випадкових операторів, що побудовані за одновимірними стохастичними потоками із сингулярною взаємодією. Ця мета включає в себе наступні задачі:

- встановлення умови, за якої образ компактної множини існує під дією сильного випадкового оператора зсуву уздовж потоку Арратья;
- побудова компактної множини, що майже напевно не зникає під дією оператора зсуву за потоком Арратья;
- знаходження оцінки зростання максимальної кількості числа кластерів потоку Арратья та її вплив на асимптотику наближення випадковими ядерними операторами інтегрального оператора за потоком Арратья.

Об'єкт і предмет дослідження. *Об'єкт дослідження* — потік Арратья та породжені ними сильні випадкові оператори. *Предмет дослідження* — випадковий точковий процес, побудований за потоком Арратья, а також випадкові інтегральні оператори, що ним породжені, випадковий оператор зсуву уздовж потоку Арратья, n-поперечники за Колмогоровим образів компактних множин під дією сильних випадкових операторів, асимптотика зростання максимальної кількості кластерів потоку Арратья на відрізку довжини один.

Методи дослідження. В роботі використовуються методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів та функціонального аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати дисертаційної роботи, які визначають її наукову новизну та виносяться на захист, наступні:

- для гаусівського сильного випадкового оператора встановлено достатню умову існування неперервної модифікації на компактній множині;
- отримано формулу інтегрування частинами для потоку Арратья;
- встановлено необмеженість оператора зсуву уздовж потоку Арратья та достатню умову існування образу компактної множини під його дією;
- отримано необхідні та достатні умови збереження збіжності послідовностей функцій під дією оператора зсуву уздовж потоку Арратья;
- знайдено оцінку зростання максимальної кількості кластерів потоку Арратья;
- встановлено, що зсуви гаусівської щільності уздовж стаціонарного точкового процесу утворюють тотальну множину у просторі L_2 на довільному відрізку;
- отримано оцінку швидкості наближення ядерними випадковими операторами інтегрального оператора, породженого точковим процесом за потоком Арратья.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати можуть мати подальші застосування в різноманітних розділах теорії випадкових процесів та теорії стохастичних потоків.

Особистий внесок здобувача. Постановка задач і вибір методів дослідження в дисертаційній роботі та у спільних статтях [13, 14, 15] належать науковому керівнику дисертанта доктору фізико-математичних наук, професору А. А. Дороговцеву. Всі представлені в дисертації результати отримані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на наступних конференціях та наукових семінарах:

- XXII международная конференция молодых ученых «Ломоносов», 13–17 апреля, 2015, Москва, Россия;
- Yu. V. Linnik Centennial Conference «Analytical methods in number theory, probability theory and mathematical statistics», September 14–18, 2015, St. Petersburg, Russia;
- International Conference Dedicated to the 80th Anniversary of Prof. A. Ya. Dorogovtsev «Stochastic Processes in Abstract Spaces», October 14–16, 2015, Kyiv, Ukraine;
- International Workshop in Honour of Prof. V. V. Buldygin «Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory and Mathematical Statistics», October 10–12, 2016, Kyiv, Ukraine;
- 12th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics and 2018 IMS Annual Meeting on Probability and Statistics, July 2–6, 2018, Vilnius, Lithuania;
- 2nd Ukrainian-German Mini-Workshop in stochastics «Stochastic calculus and geometry of stochastic flows with singular interactions», November 15, 2016, Jena, Germany;
- Symposium on Probability Theory and Random Processes, June 4–10, 2017, St. Petersburg, Russia;

- науковому семінарі «Числення Маллявена та його застосування» Інституту математики НАН України під керівництвом доктора фізико-математичних наук, професора А. А. Дороговцева;
- науковому семінарі «Статистичні проблеми для випадкових процесів і полів» при кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей фізико-математичного факультету Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут» імені Ігоря Сікорського під керівництвом доктора фізико-математичних наук, професора О. І. Клесова та доктора фізико-математичних наук, професора О. В. Іванова;
- науково-дослідницькому семінарі «Funktionenräume» при кафедрі аналізу та математичної фізики факультету математики та інформатики Єнського університету імені Фрідріха Шиллера під керівництвом професора Dr. Hans Triebel та професора Dr. Hans-Jürgen Schmeißer;
- науковому семінарі «Stochastische Analysis» інституту математики Берлінського технічного університету під керівництвом професора Dr. Michael Scheutzow.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в п'яти статтях [13, 14, 15, 26, 50] у фахових виданнях, що індексуються наукометричною базою Scopus, та п'яти збірках тез міжнародних конференцій [27, 28, 29, 51, 30].

Структура і обсяг роботи. Дисертація загальним обсягом 133 сторінки складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаної літератури, що містить 58 найменувань, та додатку зі списками опублікованих праць здобувача за темою дисертації і наукових семінарів і конференцій, на яких доповідались отримані результати.

Перший розділ присвячений сильним випадковим операторам у сенсі А. В. Скорохода та образам компактних множин під їх дією. У першому підрозділі наводиться означення сильного випадкового оператора та приклади таких об'єктів. Тут доводиться, що у просторі $L_2(\mathbb{R})$ сильним випадковим оператором є оператор зсуву

$$(T_t f)(u) = f(\varphi_{0,t}(u)), \quad f \in L_2(\mathbb{R}),$$

де $\varphi_{0,t}(u)$ – розв'язок стохастичного диференціального рівняння

$$dx(t) = a(x(t))dt + b(x(t))dw(t),$$

такий, що $\varphi_{0,0}(u) = u$.

Лема 1.1.1. *Нехай* $H = L_2(\mathbb{R})$, *оператор* T_t *породжується розв'язком стохастичного диференціального рівняння, де функції* $a, b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ *такі, що*

$$|a'| + |b'| \leq L, \quad \inf_{u \in \mathbb{R}} b(u) > 0.$$

Тоді T_t *– сильний випадковий оператор у* $L_2(\mathbb{R})$.

Умовою, яка гарантує можливість отримувати образ довільної множини під дією випадкового оператора, є обмеженість. Наприклад, випадковий оператор T_t з леми 1.1.1 обмежений тоді і лише тоді, коли

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} \left(\frac{\partial \varphi_{0,t}(u)}{\partial u} \right)^{-1} < +\infty.$$

У другому підрозділі зауважено, що образ компактної множини під дією сильного випадкового оператора може не існувати. Проте доведено, що у випадку гаусівського сильного випадкового оператора існування образу компактної множини гарантує умова Дадлі.

Для компактної множини $K \subset H$ сепарабельного гільбертового простору H позначимо через $N_K(u)$ найменшу кількість замкнутих куль радіуса $u > 0$, що утворюють покриття K.

Теорема 1.2.2. *Нехай A – гаусівський випадковий оператор у H. Якщо для компактної множини K у H виконується умова Дадлі*

$$\int_{N_K(u)>1} (\ln N_K(u))^{1/2} du < +\infty,$$

то з ймовірністю 1 образ $A(K)$ існує та є компактною множиною.

У *другому розділі* досліджуються властивості випадкового інтегрального оператора A у $L_2(\mathbb{R})$ з ядром

$$a(u,v) = \sum_{\theta \in \Theta} p_\varepsilon(u-\theta) p_\varepsilon(v-\theta),$$

побудованим за точковим процесом Θ на $\mathbb{R}$ та гаусівською щільністю $p_\varepsilon(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{u^2}{2\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$. У першому підрозділі встановлено, що зсуви p_ε уздовж стаціонарного точкового процесу утворюють тотальну множину у просторі $L_2([a;b])$, $a < b$.

Теорема 2.1.1. *Нехай Θ – стаціонарний ергодичний точковий процес на $\mathbb{R}$ та $0 < M|\Theta \cap [0;1)\,| < +\infty$. Тоді існує множина Ω_0 ймовірності 1 така, що для довільного $\omega \in \Omega_0$ лінійна оболонка функцій*

$$\Big\{ p_\varepsilon(\cdot - \theta(\omega)),\ \theta(\omega) \in \Theta(\omega) \Big\}$$

щільна у $L_2([a;b])$.

В другому підрозділі доведено, що A є сильним випадковим оператором у $L_2(\mathbb{R})$.

Теорема 2.2.1. *Якщо Θ – стаціонарний точковий процес на $\mathbb{R}$ та $M|\Theta \cap [0;1]|^2 < +\infty$, то A є сильним випадковим оператором у $L_2(\mathbb{R})$.*

Встановлено, що, взагалі кажучи, A не є обмеженим випадковим оператором у $L_2(\mathbb{R})$.

Теорема 2.2.2. *Нехай* Θ *– ергодичний стаціонарний точковий процес на* $\mathbb{R}$ *такий, що*

$$essup|\Theta \cap [0;1]| = +\infty.$$

Тоді A *не є обмеженим випадковим оператором у* $L_2(\mathbb{R})$.

Нехай точковий процес Θ_t на $\mathbb{R}$ складається з точок розриву функції $x(\cdot,t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що побудована за потоком Арратья $\{x(u,s),\ u \in \mathbb{R},\ s \geq 0\ \}$.

Означення 2.1.4 ([2]). *Потоком Арратья називаєтьcя сім'я випадкових процесів* $\{x(u,s),\ u \in \mathbb{R},\ s \geq 0\ \}$ *таких, що*
1) для будь-якого $u \in \mathbb{R}$ $x(u,\cdot)$ *– вінерівський мартингал відносно загальної фільтрації;*
2) для довільних $u_1 \leq u_2$ *та* $s \geq 0$ *з ймовірністю 1*

$$x(u_1,s) \leq x(u_2,s);$$

3) для будь-яких $u, v \in \mathbb{R}$ *та* $t \geq 0$

$$< x(u,\cdot), x(v,\cdot) > (t) = \int_0^t 1\!\!\mathrm{I}_{\{x(u,s)=x(v,s)\}} ds.$$

Для довільних $a < b$ та ортогонального проектора $Q_{a,b}$ простору $L_2(\mathbb{R})$ на $L_2([a;b])$ розглянемо випадковий оператор $A_{Q_{a,b}} = Q_{a,b} A Q_{a,b}$.

Теорема 2.3.1. *Нехай* Θ_t *– точковий процес на* $\mathbb{R}$, *що побудований за потоком Арратья. Тоді, для будь-якого* $\beta \in (0;\frac{1}{4})$ *майже напевно*

$$(\ln n)^{\beta-\frac{1}{4}} \|A_{Q_{-n,n}}\|^2 \to +\infty, \quad n \to \infty.$$

Третій розділ присвячений випадковим операторам T_t, $t > 0$, зсуву уздовж потоку Арратья

$$T_t f(u) = f(x(u,t)), \quad f \in L_2(\mathbb{R}).$$

Для потоку Арратья $\{x(u,s),\ u \in \mathbb{R},\ s \in [0;t]\}$ розглянемо спряжений йому потік Арратья $\{y(u,s),\ u \in \mathbb{R},\ s \in [0;t]\}$, що рухається у зворотному часі і такий, що його траєкторії не перетинаються з траєкторіями потоку $\{x(u,s),\ u \in \mathbb{R},\ s \in [0;t]\}$ ([2]). Нехай ν_t – міра Лебега - Стілтьєса, що побудована за $y(\cdot,t)$. Інтеграл Лебега за мірою ν_t позначимо через $\int_{\mathbb{R}} f(u)dy(u,t)$. Для дослідження властивостей T_t у дисертаційній роботі доводиться формула інтегрування частинами для потоку Арратья.

Теорема 3.1.1. *Нехай* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *– невід'ємна вимірна функція та* $\int_{\mathbb{R}} h(u)du < +\infty$. *Тоді для будь-якого* $t > 0$ *з ймовірністю 1 існує інтеграл* $\int_{\mathbb{R}} h(x(u,t))du$ *та має місце рівність*

$$\int_{\mathbb{R}} h(x(u,t))du = \int_{\mathbb{R}} h(u)dy(u,t).$$

За рахунок склеювання частинок у потоці Арратья оператор зсуву T_t не є обмеженим.

Теорема 3.2.1. *Для будь-якого* $t > 0$ T_t *не є обмеженим сильним випадковим оператором у* $L_2(\mathbb{R})$.

За рахунок формули інтегрування частинами для потоку Арратья, отримано достатню умову на множину функцій, за якої T_t є обмеженим випадковим оператором на ній.

Теорема 3.2.2. *Нехай сім'я функцій* $\Phi \subset W_2^1(\mathbb{R})$ *з простору Соболева задовольняє умову*

$$\sup_{f \in \Phi} \|f'\|_{L_2(\mathbb{R},(|u|+1)^3du)} < +\infty.$$

Тоді для будь-якого $t > 0$

$$\mathbb{P}\Big\{\exists C > 0 \ \Big| \ \forall f \in \Phi \quad \|T_t f\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}\Big\} = 1.$$

Наслідком є таке твердження.

Теорема 3.2.3. *Нехай* $K \subseteq W_2^1(\mathbb{R})$ *– множина у* $L_2(\mathbb{R})$ *така, що*

$$\sup_{f,g \in K} \int_{\mathbb{R}} (f'(u) - g'(u))^2 (|u| + 1)^3 du < \infty.$$

Тоді для будь-якого $t > 0$ T_t *на* K *має неперервну модифікацію.*

У третьому підрозділі отримані необхідні та достатні умови збереження збіжності послідовності функцій з $L_2(\mathbb{R})$ під дією випадкового оператора T_t.

Теорема 3.3.1. *Нехай послідовність* $\{f_n, \ n \in \mathbb{N}\} \subset L_2(\mathbb{R})$ *така, що* $f_n \to 0$ *у* $L_2(\mathbb{R})$ *при* $n \to \infty$. *Якщо*

$$\mathbb{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \|T_t f_n\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0\right\} = 1,$$

то $f_n \to 0$ *майже всюди за мірою Лебега* λ *на* $\mathbb{R}$ *при* $n \to \infty$.

Теорема 3.3.2. *Нехай послідовність функцій* $\{f_n, \ n \in \mathbb{N}\} \subset L_2(\mathbb{R})$ *задовольняє умови*

1) $f_n \to 0$ *у* $L_2(\mathbb{R})$ *при* $n \to \infty$;

2) $f_n \to 0, \ n \to \infty,$ *майже всюди за* λ *на* $\mathbb{R}$;

3) існує $C > 0$, *що для довільного* $n \geq 1$

$$supp f_n \subset [-C; C].$$

Тоді, для будь-якого $t > 0$

$$\mathbb{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \|T_t f_n\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0\right\} = 1.$$

У *четвертому розділі* досліджуються зміни поперечників за Колмогоровим компактних множин під дією деяких сильних випадкових операторів.

Означення 4.0.1 ([3]). *n - поперечником за Колмогоровим множини $C \subseteq X$ у лінійному нормованому просторі X називається величина*

$$d_n(C,X) = \inf_{\dim L \le n} \sup_{f\in C} \inf_{g\in L} \|f-g\|_X,$$

де L – підпростір X.

У першому підрозділі отримані оцінки на поперечники компактної множини

$$\widetilde{K} = \left\{ f \in W_2^1(\mathbb{R}) \;\Big|\; \int_{\mathbb{R}} f^2(u)(1+|u|)^3 du + \right.$$
$$\left. + \int_{\mathbb{R}} \left(f'(u)\right)^2 (1+|u|)^7 du \le 1 \right\},$$

на якій існує неперервна модифікація оператору зсуву за потоком Арратья.

Лема 4.1.2. *Існують додатні константи C_1, C_2 такі, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$*

$$\frac{C_1}{n} \le d_n\left(\widetilde{K}, L_2(\mathbb{R})\right) \le \frac{C_2}{n^{\frac{3}{10}}}.$$

Розглянемо гаусівський сильний випадковий оператор A у сепарабельному гільбертовому просторі H з ортонормованим базисом $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n (f, e_n) e_n,$$

де $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ – незалежні гаусівські випадкові величини з $M\xi_n = 0$ та $M\xi_n^2 = 1,\ n \in \mathbb{N}$. У другому підрозділі наведено приклад компактної у H множини, для якої випадковий оператор A не змінює асимптотичну поведінку поперечників за Колмогоровим.

Лема 4.2.1. *Нехай* A *– гаусівський діагональний сильний випадковий оператор у сепарабельному гільбертовому просторі* H. *Тоді для компакту*

$$K = \left\{ f \in H \;\middle|\; (f, e_n)^2 \le \frac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

існують додатні випадкові величини c_1, c_2, *що на множині повної ймовірності для всіх* $n \ge N_0$

$$\frac{c_2}{\sqrt{n}} \le d_n(A(K), H) \le \frac{c_1}{\sqrt{n}}.$$

У третьому підрозділі встановлено, що оператор зсуву уздовж потоку Арратья не погіршує верхню оцінку поперечника за Колмогоровим компакту

$$\widetilde{K} = \left\{ f \in W_2^1(\mathbb{R}) \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}} f^2(u)(1+|u|)^3 du + \right.$$
$$\left. + \int_{\mathbb{R}} \left(f'(u)\right)^2 (1+|u|)^7 du \le 1 \right\}$$

Теорема 4.3.1. *Існує множина* $\widetilde{\Omega}$ *повної ймовірності така, що для будь-яких* $\omega \in \widetilde{\Omega}$ *та* $n \in \mathbb{N}$

$$d_n\left(T_t^{\omega}(\widetilde{K}), L_2(\mathbb{R})\right) \le \frac{C(\omega)}{n^{\frac{3}{10}}},$$

де випадкова величина $C(\omega) > 0$ *не залежить від* n.

Для фіксованого $n \in \mathbb{N}$ розглянемо розбиття $\{u_k,\ k = \overline{0, 2(n+1)}\}$ відрізку $[0; n^{-2}]$ на $2(n+1)$ сегментів однакової довжини. Побудуємо $(n+1)$ лінійно незалежних функцій $f_k, \quad k = \overline{0, n}$.

$$f_k = \begin{cases} 0, & u \notin [u_{2k}; u_{2k+1}], \\ 1, & u \in [u_{2k} + \frac{n^{-2}}{6(n+1)}; u_{2k} + \frac{2n^{-2}}{6(n+1)}], \\ \frac{6(n+1)}{n^{-2}}(u - u_{2k}), & u \in [u_{2k}; u_{2k} + \frac{n^{-2}}{6(n+1)}], \\ -\frac{6(n+1)}{n^{-2}}(u - u_{2k+1}), & u \in [u_{2k} + \frac{2n^{-2}}{6(n+1)}; u_{2k+1}]. \end{cases}$$

Теорема 4.4.2. *Існує множина* Ω_0 *повної ймовірності така, що для довільного* $\omega \in \Omega_0$ *функції* $T_t^\omega(f_0 * p_\varepsilon), \ldots, T_t^\omega(f_n * p_\varepsilon)$ *лінійно незалежні.*

Згідно з формулою інтегрування частинами для потоку Арратья, функції з попередньої теореми пов'язані з випадковими інтегральними операторами A_t у $L_2(\mathbb{R})$, ядра яких мають вигляд

$$a_t(u, v) = \sum_{\theta \in \Theta_t} \Delta y(\theta, t) p_\varepsilon(u - \theta) p_\varepsilon(v - \theta).$$

Властивості A_t досліджуються у п'ятому підрозділі. Зокрема, доведена необмеженість таких об'єктів.

Теорема 4.5.1. A_t *не є обмеженим випадковим оператором у* $L_2(\mathbb{R})$.

Аналогічно випадку інтегральних операторів з другого розділу, A_t можна наближати випадковими ядерними операторами $Q_{-n,n} A_t Q_{-n,n}$. У шостому підрозділі показано, що квадрат їх норми мажорується знизу максимумом з перших n величин

$$\zeta_k = \sum_{\theta \in \Theta_t \cap [k;k+1]} (\Delta y(\theta, t))^2, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

для якого знайдена оцінка зростання до нескінченності

Теорема 4.6.1. *З ймовірністю 1*

$$\frac{\ln \ln n}{\ln n} \cdot \max_{k=\overline{0,n}} \zeta_k \to +\infty, \ n \to \infty.$$

Розділ 1

Образи множин під дією сильних випадкових операторів

У даному розділі розглядаються сильні випадкові оператори у сепарабельному гільбертовому просторі. Для таких об'єктів характерним є те, що під їх дією образи більш ніж зліченних множин можуть не існувати. Головними результатами даного розділу є умови на компактну множину у сепарабельному гільбертовому просторі, за яких її образ під дією сильного випадкового оператора не лише існує, а є також і випадковою множиною.

1.1 Приклади сильних випадкових операторів

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – ймовірнісний простір. Для дійсного сепарабельного гільбертового простору H позначимо через $H(\Omega)$ множину всіх H - значних випадкових елементів. Наступне означення сильного випадкового оператора було запропоновано А. В. Скороходом [57].

Означення 1.1.1. ([57]) Сильним випадковим оператором у просторі H називається відображення $A : H \to H(\Omega)$ з властивостями

1) для будь-яких $f_1, f_2 \in H$ та $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\Big\{A\,(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha A f_1 + \beta A f_2\Big\} = 1;$$

2) для всіх $\varepsilon > 0$ та $f_n, f \in H$, що $\|f_n - f\|_H \to 0$ при $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\Big\{\|Af_n - Af\|_H > \varepsilon\Big\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Зауваження 1.1.1. Оскільки зі збіжності у середньому квадратичному випливає збіжність за ймовірністю, то надалі у роботі замість 2) буде перевірятись умова

2$'$) $M\|Af_n\|_H^2 \to 0$ при $\|f_n\|_H \to 0,\ n \to \infty$.

Наступний приклад сильного випадкового оператора використовується протягом першого та четвертого розділів.

Приклад 1.1.1. Розглянемо сепарабельний гільбертів простір H зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та ортонормованим базисом $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Нехай $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ – послідовність однаково розподілених випадкових величин таких, що $M\xi_1^2 < \infty$. Тоді оператор A, який діє за правилом

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n (f, e_n) e_n, \tag{1.1.1}$$

є сильним випадковим оператором у H. Справді, ряд (1.1.1) збігається у середньому квадратичному, оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n^2 (f, e_n)^2 = \|f\|_H^2 M\xi_1^2.$$

При цьому

$$M\|Af\|_H^2 = M\xi_1^2 \|f\|_H^2. \tag{1.1.2}$$

З (1.1.2) випливає, що умова 2$'$) виконується. Отже A – сильний випадковий оператор у H.

Приклад 1.1.2. Нехай $H = L_2[0;1]$, θ – рівномірно розподілена на $[0;1]$ випадкова величина. Розглянемо елемент $e \in L_2[0;1]$ з одиничною нормою, $\|e\|_{L_2[0;1]} = 1$, та задамо випадковий оператор A

$$Af = f(\theta)e.$$

Оскільки

$$M\|Af\|^2_{L_2[0;1]} = Mf^2(\theta) = \|f\|^2_{L_2[0;1]},$$

то A – сильний випадковий оператор у $L_2[0;1]$.

Надалі у роботі досліджуються сильні випадкові оператори у $L_2(\mathbb{R})$, що описують зсуви функцій уздовж стохастичних потоків. Цей приклад узагальнює випадкові оператори, що побудовані у прикладі 1.1.2 за допомогою випадкової величини.

Означення 1.1.2 ([31]). Сім'я $\left\{\varphi_{s,t};\ 0 \le s \le t\right\}$ випадкових відображень простору $\mathbb{R}$ в себе називається стохастичним потоком, якщо виконуються умови

1) для всіх $0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_n < \infty$ випадкові відображення

$$\varphi_{s_1,s_2},\ \varphi_{s_2,s_3},\ \ldots,\ \varphi_{s_{n-1},s_n}$$

незалежні;

2) для всіх $s, t, r \ge 0$ випадкові відображення $\varphi_{s,t}$ та $\varphi_{s+r,t+r}$ однаково розподілені;

3) для всіх $r \le s \le t$ та $u \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{r,s} \circ \varphi_{s,t}(u) = \varphi_{r,t}(u),$$

$\varphi_{r,r}(u)$ – тотожнє відображення;

4) для всіх $u \in \mathbb{R}$ при $t \to 0$

$$\varphi_{0,t}(u) \xrightarrow{P} u.$$

Стохастичний потік – це випадковий аналог детермінованої динамічної системи [3, 53]. Тобто сім'я випадкових відображень, для якої виконується групова властивість у деякому сенсі. Аналогічно тому, як динамічні системи задаються за допомогою диференціальних рівнянь, стохастичні потоки можна отримувати як розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь.

Приклад 1.1.3 ([31])**.** Розглянемо рівняння

$$dx(t) = a\left(x(t)\right) dt + b\left(x(t)\right) dw(t),$$

де a, b – неперервно диференційовані функції з обмеженими похідними, а $\{w(t),\ t \geq 0\}$ – одновимірний вінерівський процес. Сім'я розв'язків $\varphi_{s,t}(u)$, де $u \in \mathbb{R}$ та $\varphi_{s,s}(u) = u$, утворює стохастичний потік [31].

Покажемо, що відображення у $L_2(\mathbb{R})$, яке описує зсуви функцій уздовж розв'язків стохастичного диференціального рівняння, є сильним випадковим оператором у цьому просторі.

Приклад 1.1.4. Розглянемо наступне стохастичне диференціальне рівняння

$$dx(t) = a(x(t))dt + b(x(t))dw(t), \tag{1.1.3}$$

де функції $a, b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ такі, що

$$|a'| + |b'| \leq L, \quad \inf_{u \in \mathbb{R}} b(u) > 0.$$

Для довільного $u \in \mathbb{R}$ позначимо через $\varphi_{0,t}(u)$ такий розв'язок (1.1.3), що $\varphi_{0,0}(u) = u$. Для фіксованого $t > 0$ задамо випадковий оператор T_t у просторі $L_2\left(\mathbb{R}\right)$, що для будь-яких $f \in L_2\left(\mathbb{R}\right)$ та $u \in \mathbb{R}$

$$\left(T_t f\right)(u) = f\left(\varphi_{0,t}(u)\right). \tag{1.1.4}$$

Виявляється, що (1.1.4) задає сильний випадковий опратор у $L_2\left(\mathbb{R}\right)$.

Лема 1.1.1. *Нехай* $H = L_2(\mathbb{R})$, *оператор* T_t *породжується розв'язком стохастичного диференціального рівняння, де функції* $a, b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ *такі, що*

$$|a'| + |b'| \le L, \quad \inf_{u \in \mathbb{R}} b(u) > 0.$$

Тоді T_t *– сильний випадковий оператор у* $L_2(\mathbb{R})$.

Доведення. Оскільки f та $\varphi_{0,t}(u)$ вимірні за t та u функції, то вимірною за t та u також є функція $f \circ \varphi_{0,t}(u)$. Покажемо, що для будь-якої функції $f \in L_2(\mathbb{R})$ існує множина Ω_f повної ймовірності така, що для всіх $\omega \in \Omega_f$

$$(T_t f)(\omega) \in L_2(\mathbb{R}).$$

Для цього перевіримо, що

$$M \int_{\mathbb{R}} (T_t f)^2 (u) du < +\infty.$$

З (1.1.4) випливає наступне

$$M (T_t f)^2 (u) = M f^2 (\varphi_{0,t}(u)) = \int_{\mathbb{R}} f^2(v) \mathcal{E}_t(u,v) dv,$$

де $\mathcal{E}_t(u,v)$ – перехідна щільність для $\varphi_{0,t}(u)$. У [4] доведено, що за умови леми існують додатні константи C_1, C_2 такі, що для всіх $u, v \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\mathcal{E}_t(u,v) \le \frac{C_1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{C_2}{t}(u-v)^2}.$$

Отже,

$$M \int_{\mathbb{R}} (T_t f)^2 (u) du = \int_{\mathbb{R}} M (T_t f)^2 (u) du =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f^2(v) \mathcal{E}_t(u,v) dv du \le$$

$$\leq \frac{C_1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f^2(v)\, e^{-\frac{C_2}{t}(u-v)^2} du dv =$$

$$= \frac{C_1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} f^2(v) \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{C_2}{t}(u-v)^2} du dv = C_1 \sqrt{\frac{\pi}{C_2}} \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Таким чином, існує константа $\widetilde{C} = C_1 \sqrt{\frac{\pi}{C_2}}$, що для будь-якої $f \in L_2(\mathbb{R})$

$$M \int_{\mathbb{R}} (T_t f)^2 (u) du \leq \widetilde{C} \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Тому T_t – сильний випадковий оператор у $L_2(\mathbb{R})$. □

1.2 Дія сильного випадкового оператора на компактні множини

Далі у роботі будуть досліджуватися зміни компактних множин під дією сильних випадкових операторів. Слід зауважити, що для будь-якого сильного випадкового у H оператора A та елемента $f \in H$ існує множина Ω_f повної ймовірності така, що для будь-якого $\omega \in \Omega_f$ детермінована величина $(Af)(\omega)$ знаходиться у просторі H. Якщо ж множина $B \subset H$ більш ніж зліченна та $\bigcap_{f \in B} \Omega_f \in \mathcal{F}$, то $\mathbb{P}(\bigcap_{f \in B} \Omega_f)$ може не дорівнювати одиниці. Таким чином, образ компактної множини у H під дією сильного випадкового оператора може не існувати з додатньою ймовірністю.

Приклад 1.2.1. Нехай H – сепарабельний гільбертів простір із скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ та ортонормованим базисом $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Розглянемо наступний оператор S у H

$$Sg = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{\ln(n+2)}} (g, e_n) e_n, \quad g \in H.$$

S є компактним оператором у H, оскільки $\frac{1}{\sqrt[4]{\ln(n+2)}} \to 0$ при $n \to \infty$. Отже, образ множини

$$B = \left\{ g \in H \;\middle|\; \|g\|_H \le 1 \right\}$$

під дією оператора S є передкомпактним в H. Позначимо його замикання через K.

Нехай сильний випадковий оператор A такий, як у прикладі 1.1.1, де $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ – послідовність незалежних стандартних гаусівських випадкових величин. Тобто

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n (f, e_n) e_n, \quad f \in H.$$

Якщо існує множина Ω_0 повної ймовірності така, що для будь-якого $\omega \in \Omega_0$ образ $(A(K))(\omega) \subset H$, то для кожного $\omega \in \Omega_0$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\omega)(f, e_n) e_n \tag{1.2.1}$$

збігається у H для будь-якого $f \in K$. Це еквівалентно тому, що для кожного $\omega \in \Omega_0$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k(\omega)}{(\ln(k+2))^{\frac{1}{4}}} (g, e_k) e_k \tag{1.2.2}$$

збігається у H для будь-якого $g \in H$ з $\|g\|_H = 1$. Останнє рівносильно збіжності ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k(\omega)^2}{\sqrt{\ln(k+2)}} (g, e_k)^2 \tag{1.2.3}$$

для будь-якого $g \in H$ з $\|g\|_H = 1$. Таким чином, з (1.2.3) випливає, що

$$\mathbb{P}\left\{ \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{\xi_k^2}{\sqrt{\ln(k+2)}} < +\infty \right\} = 1. \tag{1.2.4}$$

Оскільки $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ – послідовність незалежних стандартних гаусівських випадкових величин, то, за лемою Бореля-Кантеллі,

$$\mathbb{P}\left\{\overline{\lim_n} \frac{\xi_n}{\sqrt{\ln(n+2)}} = \sqrt{2}\right\} = 0, \tag{1.2.5}$$

що суперечить (1.2.4). Отже, образ $A(K)$ не існує.

Сильний випадковий оператор A у H можна розглядати як H-значний випадковий процес, що заіндексований простором H. Таким чином, щоб образ компактної множини K під дією A існував достатньо, щоб оператор A мав на K неперервну модифікацію. Зауважимо, що для сильного випадкового оператора A з прикладу 1.2.1 Af є H - значним гаусівським випадковим елементом для будь-якого $f \in H$.

Означення 1.2.1. ([44]) Сильний випадковий оператор A у H називається гаусівським, якщо для будь-якого $f \in H$ H - значний випадковий елемент Af є гаусівським.

Відомо, що для існування неперервної модифікації на компактній множині K у гаусівського $\mathbb{R}$ - значного випадкового процесу достатньо, щоб для K виконувалась умова Дадлі [54].

Теорема 1.2.1 ([54]). *Нехай H – сепарабельний гільбертів простір, $K \subset H$ – компактна множина, $N_K(u)$ – найменша кількість замкнутих куль радіуса $u > 0$, що утворюють покриття K. Якщо*

$$\int_{N_K(u)>1} (\ln N_K(u))^{1/2} du < +\infty, \tag{1.2.6}$$

то гаусівський $\mathbb{R}$ - значний випадковий процес $\{\xi_f,\ f \in K\}$ має неперервну модифікацію.

Доведемо аналогічне твердження для гаусівських сильних випадкових операторів.

Теорема 1.2.2. *Нехай* A *– гаусівський випадковий оператор у* H. *Якщо для компактної множини* K *у* H *виконується умова Дадлі*

$$\int_{N_K(u)>1} (\ln N_K(u))^{1/2} du < +\infty, \tag{1.2.7}$$

то з ймовірністю 1 образ $A(K)$ *існує та є компактною множиною.*

Доведення. Зауважимо, що оператор MA, який діє за правилом

$$(MA)h = M(Ah), \quad h \in H$$

зараз є обмеженим оператором. Тому достатньо доводити теорему для випадку $MA = 0$. Розглянемо H - значний гаусівський випадковий процес $\{Af,\ f \in K\}$ та скористаємось наступною теоремою.

Теорема 1.2.3 ([1]). *Нехай* H *– сепарабельний гільбертів простір,* $K \subset H$ *– компактна множина. Для того щоб* H *- значний випадковий процес* $\{\xi_f,\ f \in K\}$ *мав неперервну модифікацію достатньо, щоб існували константа* $\alpha \in (0;1]$ *та опукла, парна та неперервна функція* φ *такі, що виконуються наступні умови*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0,$$

для будь-яких $f, g \in K$

$$M\varphi\left(\frac{\|\xi_f - \xi_g\|_H^\alpha}{\|f-g\|_H}\right) \le 1 \tag{1.2.8}$$

та

$$\int_{N_K(u)>1} \varphi^{-1}(N_K(u)) du < +\infty. \tag{1.2.9}$$

Перевіримо, що для гаусівського сильного випадкового оператора A існує константа $a > 0$ така, що виконується умова (1.2.8) з функцією $\varphi(x) = e^{ax^2} - 1$ та $\alpha = 1$.

Оскільки A – лінійний оператор, то достатньо довести, що існує константа $a > 0$, для якої виконується нерівність

$$Me^{a\|Ah\|_H^2} \leq 2$$

при будь-якому $h \in H$ з $\|h\| = 1$. Згідно з [44], існує константа $c > 0$, що для кожного $f \in H$

$$M\|Af\|_H^2 \leq c\|f\|_H^2.$$

Розглянемо число $a > 0$, для якого виконується нерівність

$$e^{2ac} \leq 2.$$

Зафіксуємо довільне $h \in H$ з одиничною нормою, $\|h\|_H = 1$. Для елемента Ah позначимо через $\{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ власні значення його кореляційного оператора S_h (S_h – ядерний оператор [43]). Тоді ([43])

$$Me^{a\|Ah\|_H^2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - 2a\lambda_k}} = e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln(1-2a\lambda_k)}.$$

Оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = M\|Ah\|_H^2 \leq c,$$

то для будь-якого $k \geq 1$

$$2a\lambda_k \leq 2ac < \frac{1}{2}.$$

Отже, для кожного $k \geq 1$

$$-\ln(1 - 2a\lambda_k) \leq 4a\lambda_k.$$

Таким чином,

$$Me^{a\|Ah\|_H^2} \leq e^{2a\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k} = e^{2aM\|Ah\|_H^2} \leq e^{2ac} \leq 2,$$

з чого випливає, що для гаусівського сильного випадкового оператора A виконується (1.2.8) з $\alpha = 1$ та $\varphi(x) = e^{ax^2} - 1$. $\square$

Зауваження 1.2.1. Для сильного випадкового оператора існування неперервної модифікації на компакті K, взагалі кажучи, не гарантує існування неперервної модифікації на її лінійній оболонці.

Приклад 1.2.2. Нехай H – сепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та ортонормованим базисом $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Розглянемо множину

$$K = \left\{ f \in H \;\middle|\; (f, e_n)^2 \le \frac{1}{n^2} \quad \text{для будь-якого} \;\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Оскільки

$$\sup_{f \in K} \sum_{k=n}^{\infty} (f, e_k)^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то K – компактна у H множина. Більш того, $\overline{\text{ЛО}(K)} = H$, оскільки не існує ненульового елементу з H, що ортогональний множині K.

Покажемо, що для K виконується умова (1.2.7). Для цього оцінимо зверху величину $N_K(u)$, де $u > 0$ довільне. Зауважимо, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ виконуються наступні співвідношення

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \le$$

$$\le \sum_{k=n}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2} dx = \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{n}.$$

Таким чином, для будь-якого $u > 0$ існує номер $n(u) = \left[\frac{2}{u^2}\right]$, що

$$\sup_{f \in K} \sum_{k=n(u)+1}^{\infty} (f, e_k)^2 \le \frac{u^2}{2}.$$

Отже, $\frac{u^2}{2}$ - покриття множини

$$C = \left\{ y \in H \;\middle|\; \quad (y, e_k)^2 \le \frac{1}{k^2} \quad \text{для будь-якого} \quad k = \overline{1, n(u)}, \right.$$

$$\left.(y, e_j) = 0 \ \text{ для кожного } \ j > n(u)\right\}$$

утворює u - покриття компакту K у просторі H.

Нехай A – гаусівський сильний випадковий оператор, що не є обмеженим. A на K, за рахунок умови (1.2.7), має неперервну модифікацію. Якщо A має на $\overline{\text{ЛО}(K)}$ неперервну модифікацію, то, оскільки A – лінійний оператор, існує таке продовження $\widetilde{A}$ оператора A на весь простір H, що норми $\widetilde{A}$ та A збігаються. Отже, A – обмежений оператор на H, що не так.

Ще однією умовою, яка гарантує можливість отримувати образ довільної множини під дією випадкового оператора, є обмеженість.

Означення 1.2.2. ([7]) Сильний випадковий оператор A у H є обмеженим випадковим оператором, якщо існує сім'я $\{A_\omega,\ \omega \in \Omega\}$ детермінованих обмежених лінійних операторів у H, що для будь-якого $f \in H$ майже напевно

$$(Af)_\omega = A_\omega f.$$

Наступний приклад ілюструє, що існують сильні випадкові оператори, які не є обмеженими.

Приклад 1.2.3. ([8]) Нехай $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ – незалежні стандартні гаусівські випадкові величини. З прикладу 1.1.1 випливає, що оператор

$$l_2 \ni x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \ Ax = (\xi_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

є сильним випадковим оператором у l_2. Оскільки $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ – незалежні стандартні гаусівські, то, згідно (1.2.5),

$$\sup_n |\xi_n| = +\infty \quad \text{ м.н.}$$

Таким чином, A не є обмеженим випадковим оператором у l_2.

Зауваження 1.2.2. Зауважимо, що оператор A з прикладу 1.2.3 є гаусівським та не є обмеженим. Таким чином, умова (1.2.7) є більш загальною, ніж умова обмеженості випадкового оператора.

Наступне твердження дає нам необхідну та достатню умову обмеженості оператора, що породжений стохастичним потоком, який задається стохастичним диференціальним рівнянням. Зауважимо, що за умов

$$a, b \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}) \tag{1.2.10}$$

розв'язок стохастичного диференціального рівняння

$$dx(t) = a(x(t))dt + b(x(t))dw(t)$$

є диференційованим за просторовою змінною [31].

Лема 1.2.1. *Нехай випадковий оператор T_t породжений розв'язком стохастичного диференціального рівняння, коефіцієнти якого задовольняють умову*

$$a, b \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}). \tag{1.2.11}$$

Для того щоб T_t був обмеженим випадковим оператором необхідно та достатньо, щоб

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} \left(\frac{\partial \varphi_{0,t}(u)}{\partial u} \right)^{-1} < +\infty. \tag{1.2.12}$$

Доведення. Достатність. Оскільки для будь-якої функції $f \in L_2(\mathbb{R})$ виконуються наступні співвідношення

$$\|T_t f\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} f^2 (\varphi_{0,t}(u))\, du \leq$$

$$\leq \sup_{u \in \mathbb{R}} \left(\frac{\partial \varphi_{0,t}(u)}{\partial u} \right)^{-1} \cdot \int_{\mathbb{R}} f^2(y) dy,$$

то, у силу (1.2.12),

$$\|T_t f\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \leq C \cdot \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R})},$$

де $C = \sup_{u\in\mathbb{R}} \left(\frac{\partial\varphi_{0,t}(u)}{\partial u}\right)^{-1}$. Отже, T_t – обмежений випадковий оператор у $L_2(\mathbb{R})$.

Необхідність. Нехай T_t – обмежений випадковий оператор. Покажемо, що

$$\|T_t\| = \sup_{u\in\mathbb{R}} \left(\frac{\partial\varphi_{0,t}(u)}{\partial u}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Для цього розглянемо деяку функцію $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ та оператор $Q_g\colon\ L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, який діє наступним чином

$$Q_g f(u) = g(u) f(u).$$

Зараз норма оператора Q_g дорівнює $\|Q_g\| = \sup_{u\in\mathbb{R}} |g(u)|$. Оскільки

$$\|T_t f\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} f^2\left(\varphi_{0,t}(u)\right) du = \int_{\mathbb{R}} f^2(y) \left(\frac{\partial\varphi_{0,t}\left(\varphi^{-1}_{0,t}(y)\right)}{\partial u}\right)^{-1} dy,$$

то оператор T_t ізометричний оператору Q_g з функцією

$$g(y) = \left(\frac{\partial\varphi_{0,t}\left(\varphi^{-1}_{0,t}(y)\right)}{\partial u}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким чином,

$$\|T_t\| = \|Q_g\| = \sup_{u\in\mathbb{R}} \left(\frac{\partial\varphi_{0,t}(u)}{\partial u}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Оскільки оператор T_t обмежений, то

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \left(\frac{\partial\varphi_{0,t}(u)}{\partial u}\right)^{-1} < +\infty.$$

□

Зауваження 1.2.3. Зауважимо, що у [33] побудована нескінченно диференційована функція $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, усі похідні якої обмежені, така, що розв'язок стохастичного диференціального рівняння

$$dx(t) = h(x(t))dt + \sin(x(t))dw(t)$$

не задовольняє умову (1.2.12). Тобто відповідний випадковий оператор T_t не є обмеженим.

Висновки до розділу 1

1. Доведено достатню умову на компактну множину у сепарабельному гільбертовому просторі, за якої образ під дією гаусівського сильного випадкового оператора існує та є випадковою компактною множиною.

2. Встановлено необхідну та достатню умову обмеженості сильного випадкового оператора, що описує зсуви функцій з $L_2(\mathbb{R})$ уздовж стохастичного потоку, який породжений стохастичним диференціальним рівнянням.

Розділ 2

Випадкові інтегральні оператори та точкові процеси

Більш загальний приклад випадкового оператора, побудованого аналогічно прикладу 1.1.2, можна отримати за допомогою точкових процесів на $\mathbb{R}$. Наша зацікавленість у використанні таких процесів ініційована тим, що яскравим прикладом точкового процесу є образ прямої під дією стохастичного потока із склеюванням. У даному розділі досліджуються властивості випадкових інтегральних операторів, що породжені стаціонарними точковими процесами.

2.1 Точкові процеси

Нехай $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ – борелівська σ - алгебра на $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}_0$ – клас обмежених множин з $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Задамо множину

$$N = \Big\{ A \subset \mathbb{R} \;\Big|\; card(A \cap B) < \infty \text{ для будь-якої обемеженої множини } B \subset \mathbb{R} \Big\}.$$

На N можна задати σ - алгебру

$$\mathcal{N} = \sigma\left(\Big\{ A \in N \;\Big|\; card(A \cap B) = m \Big\},\ B \in \mathcal{B}_0,\ m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0 \right).$$

Означення 2.1.1 ([32]). Вимірне відображення $X : \Omega \to N$ називається точковим процесом на $\mathbb{R}$.

Означення 2.1.2 ([32]). Мірою інтенсивності точкового процесу X на $\mathbb{R}$ називається міра λ така, що для будь-якого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\lambda(B) = Mcard(X \cap B).$$

Означення 2.1.3 ([32]). Точковий процес X на $\mathbb{R}$ називається стаціонарним, якщо для будь-якого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ та $h > 0$

$$card(X \cap (B + h)) \stackrel{d}{=} card(X \cap B),$$

де $B + h = \{x + h,\ x \in B\}$.

Наведемо приклад стаціонарного точкового процесу на $\mathbb{R}$, що побудований за потоком Арратья.

Означення 2.1.4 ([2]). Потоком Арратья називається сім'я випадкових процесів $\{x(u, s),\ u \in \mathbb{R},\ s \geq 0\ \}$ таких, що
1) для будь-якого $u \in \mathbb{R}$ $x(u, \cdot)$ – вінерівський мартингал відносно загальної фільтрації;
2) для довільних $u_1 \leq u_2$ та $s \geq 0$ з ймовірністю 1

$$x(u_1, s) \leq x(u_2, s);$$

3) для будь-яких $u, v \in \mathbb{R}$ та $t \geq 0$

$$< x(u, \cdot), x(v, \cdot) > (t) = \int_0^t 1\!\!\mathrm{I}_{\{x(u,s)=x(v,s)\}} ds.$$

Приклад 2.1.1. Нехай $\{x(u, s),\ u \in \mathbb{R},\ s \geq 0\}$ – потік Арратья. Зафіксуємо $t > 0$ та для будь-якого відрізку $[a; b]$ розглянемо довільну послідовність $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset [a; b]$, що містить a та b. Задамо випадкові моменти наступним чином

$$\tau_1 = t,$$

$$\tau_k = \inf\left\{t;\ s \;\Big|\; \prod_{j=1}^{k-1}(x(u_k, s) - x(u_j, s)) = 0\right\},\quad k \geq 2.$$

Якщо $\nu_n(s)$ – кількість різних точок у наборі $\{x(u_1, s), \ldots, x(u_n, s)\}$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \tau_k = \int_0^t \nu_n(s)ds.$$

У [46] доведено, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n < +\infty \quad \text{м. н.}$$

Таким чином, множина $x([a; b], t)$ скінченна майже напевно [46]. Отже, функція $x(\cdot, t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є східчастою та $x(\mathbb{R}, t)$ – зліченна. Нехай Θ – множина точок розривів функції $x(\cdot, t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Оскільки потік Арратья є стаціонарним за просторовою змінною [20], то Θ – стаціонарний точковий процес на $\mathbb{R}$.

Позначимо через $\mathbf{M}$ простір усіх мір на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, кожна з яких є зліченною сумою $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ - значних мір на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. На $\mathbf{M}$ можна ввести σ - алгебру $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} = \sigma\left(\left\{\mu \in \mathbf{M} \;\Big|\; \mu(B) = k\right\},\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ k \in \mathbb{N}_0\right). \qquad (2.1.1)$$

Означення 2.1.5. ([32]) Якщо для елементу $\nu \in \mathbf{M}$ виконується умова $\nu(B) < +\infty$ для будь-якої обмеженої множини $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, то ν називається локально скінченним елементом.

Простір усіх локально скінченних елементів надалі позначатиметься через $\mathbf{M}_l$.

Означення 2.1.6. ([32]) Інваріантною називається σ - алгебра

$$\mathcal{I} = \sigma\left\{A \in \mathbf{M}_l \;\Big|\; A + x = A \ \text{ для будь-якого } \ x \in \mathbb{R}\right\}, \qquad (2.1.2)$$

де $A + x = \left\{\mu(\cdot + x) \;\Big|\; \mu \in A\right\}$.

Зауважимо, що з будь-яким стаціонарним точковим процесом Θ на $\mathbb{R}$ можна асоціювати міру

$$\mu_\Theta = \sum_{\theta \in \Theta} \delta_\theta, \tag{2.1.3}$$

що є $\mathbf{M}$ - значним випадковим елементом.

Означення 2.1.7. ([32]) Точковий процес Θ на $\mathbb{R}$ називається ергодичним, якщо $\mathbb{P}(\mu_\Theta \in A) \in \{0; 1\}$ для будь-якої множини $A \in \mathcal{I}$.

Приклад 2.1.2. ([32]) Стаціонарний процес Пуассона зі скінченною інтенсивністю є ергодичним.

Покажемо, що за певних умов на стаціонарний точковий процес Θ зсуви функції $p_\varepsilon(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{u^2}{2\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$, уздовж Θ утворюють щільний у $L_2([a; b])$ простір для довільних чисел $a < b$.

Теорема 2.1.1. *Нехай Θ – стаціонарний ергодичний точковий процес на $\mathbb{R}$ та $0 < M|\Theta \cap [0; 1)\,| < +\infty$. Тоді існує множина Ω_0 ймовірності 1 така, що для довільного $\omega \in \Omega_0$ лінійна оболонка функцій*

$$\Big\{ p_\varepsilon(\cdot - \theta(\omega)),\ \theta(\omega) \in \Theta(\omega) \Big\}$$

щільна у $L_2([a; b])$.

Доведення. Розіб'ємо доведення на кроки.

Лема 2.1.1. *Нехай Θ – стаціонарний ергодичний точковий процес на $\mathbb{R}$ та $0 < M|\Theta \cap [0; 1)\,| < +\infty$. Тоді з ймовірністю 1*

$$\sum_{\theta \in \Theta} \frac{1}{|\theta|} = +\infty.$$

Доведення. Достатньо довести, що майже напевно

$$\sum_{\theta \in \Theta \cap [1; +\infty)} \frac{1}{\theta} = +\infty. \tag{2.1.4}$$

Оскільки
$$\sum_{\theta\in\Theta\cap[1;+\infty)}\frac{1}{\theta}\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}|\Theta\cap[n;n+1)\,|,$$
то достатньо показати, що для послідовності
$$\xi_n=|\Theta\cap[n;n+1)\,|,\ \ n\in\mathbb{N}_0,$$
ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\xi_n$ розбігається майже напевно. Можна помітити, що $\{\xi_n,\ n\in\mathbb{N}_0\}$ – стаціонарна, ергодична послідовність та $M|\xi_0|<\infty$. Отже, згідно з ергодичною теоремою, для $S_n=\sum_{k=0}^{n}\xi_k$ має місце збіжність
$$\frac{1}{n}S_n\to M\xi_0,\quad n\to\infty\quad \text{м.н.}\tag{2.1.5}$$
Таким чином, з ймовірністю 1
$$C=\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}S_n<+\infty,$$
та існує $N\in\mathbb{N}$ таке, що для довільного $n\geq N$
$$\frac{1}{n}S_n\geq\frac{M\xi_0}{2}.\tag{2.1.6}$$
Можна перевірити, що для будь-якого $m\in\mathbb{N}$
$$\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k}\xi_k=\sum_{k=2}^{m}\left(\frac{S_k}{k}-\frac{S_{k-1}}{k-1}\right)+\sum_{k=2}^{m}\frac{S_{k-1}}{k(k-1)}.\tag{2.1.7}$$
З (2.1.5) випливає, що
$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{S_k}{k}-\frac{S_{k-1}}{k-1}\right)\leq 2C.$$
Отже, згідно (2.1.6), ряд $\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{S_{k-1}}{k(k-1)}$ розбіжний, що, завдяки (2.1.7), доводить лему. $\square$

Наслідок 2.1.1. З леми 2.1.1 та теореми Мюнца [41] випливає, що існує множина Ω_0 повної ймовірності така, що для будь-яких $\omega \in \Omega_0$ та $0 < a < b$ лінійна оболонка функцій

$$\left\{u^{\theta(\omega)};\ \theta(\omega) \in \Theta(\omega)\right\}$$

щільна у $L_2([a;b])$.

Наслідок 2.1.2. Існує множина Ω_0 повної ймовірності така, що для будь-яких $\omega \in \Omega_0$ та $a < b$ лінійна оболонка функцій

$$\left\{e^{\theta(\omega)u};\ \theta(\omega) \in \Theta(\omega)\right\}$$

щільна у $L_2([a;b])$.

Доведення. Позначимо через ЛО$\left\{f_k,\ k = \overline{1,n}\right\}$ лінійну оболонку функцій $f_1, \ldots, f_n$. Зауважимо, що для будь-яких $a < b$ та $f \in L_2([a;b])$ виконуються співвідношення

$$d\Big(f, \text{ЛО}\left\{e^{\theta u},\ \theta \in \Theta\right\}\Big)^2_{L_2([a;b])} =$$

$$= \inf_{c_\theta} \int_a^b \left(f(u) - \sum_{\theta \in \Theta} c_\theta e^{\theta u}\right)^2 du =$$

$$= \inf_{c_\theta} \int_{e^a}^{e^b} \left(f(\ln u) - \sum_{\theta \in \Theta} c_\theta u^\theta\right)^2 \frac{du}{u} \leq$$

$$\leq e^{-a} d\left(\tilde{f}, \text{ЛО}\left\{v^\theta, \theta \in \Theta\right\}\right)^2_{L_2([e^a;e^b])},$$

де функція $\tilde{f}(u) = f(\ln u)$ з простору $L_2([e^a;e^b])$. Таким чином, з наслідку 2.1.1, з ймовірністю 1 для будь-яких $a < b$ та $f \in L_2([a;b])$

$$d\Big(f, \text{ЛО}\left\{e^{\theta u},\ \theta \in \Theta\right\}\Big)_{L_2([a;b])} = 0.$$

$\square$

Щоб завершити доведення теореми, зафіксуємо довільну точку $\tilde{\theta} \in \Theta$. та розглянемо лінійний обмежений оператор B у $L_2([a;b])$ такий, що $(Bf)(u) = f(u)h(u)$, де

$$h(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{u^2}{2\varepsilon}} e^{-\frac{\tilde{\theta}^2}{2\varepsilon}}.$$

Тоді, для будь-яких $a < b$ та $f \in L_2([a;b])$

$$d\Big(f, \text{ЛО}\left\{p_\varepsilon(u-\theta), \theta \in \Theta\right\}\Big)^2_{L_2([a;b])} =$$

$$= d\left(B\left(f(u)\sqrt{2\pi\varepsilon}e^{\frac{u^2}{2\varepsilon}}e^{\frac{\tilde{\theta}^2}{2\varepsilon}}\right), \text{ЛО}\left\{B\left(e^{-\frac{\tilde{\theta}^2-\theta^2}{2\varepsilon}}e^{\frac{\theta u}{\varepsilon}}\right), \theta \in \Theta\right\}\right)^2_{L_2([a;b])} =$$

$$= d\left(B\tilde{f}(u), \text{ЛО}\left\{Be^{\frac{\theta u}{\varepsilon}}, \theta \in \Theta\right\}\right)^2_{L_2([a;b])},$$

де

$$\tilde{f}(u) = f(u)\sqrt{2\pi\varepsilon}e^{\frac{u^2}{2\varepsilon}}e^{\frac{\tilde{\theta}^2}{2\varepsilon}}.$$

Оскільки B – обмежений лінійний оператор у $L_2([a;b])$, то

$$d\left(B\tilde{f}(u), \text{ЛО}\left\{Be^{\frac{\theta u}{\varepsilon}}, \theta \in \Theta\right\}\right)^2_{L_2([a;b])} \leq$$

$$\leq \|B\|^2 d\left(\tilde{f}(u), \text{ЛО}\left\{e^{\frac{\theta u}{\varepsilon}}, \theta \in \Theta\right\}\right)^2_{L_2([a;b])},$$

що, згідно з наслідком 2.1.2, дорівнює нулю. □

2.2 Випадкові інтегральні оператори, породжені точковим процесом

За точковим процесом Θ на $\mathbb{R}$ побудуємо випадковий оператор A у просторі $L_2(\mathbb{R})$

$$Af(v) = \sum_{\theta \in \Theta} p_\varepsilon(v-\theta) \int_{\mathbb{R}} f(u) p_\varepsilon(u-\theta)\, du, \qquad (2.2.1)$$

$f \in L_2(\mathbb{R})$, $p_\varepsilon(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}e^{-\frac{u^2}{2\varepsilon}}$.

Теорема 2.2.1. *Якщо* Θ *– стаціонарний точковий процес на* $\mathbb{R}$ *та* $M|\Theta \cap [0;1]|^2 < +\infty$, *то* A *є сильним випадковим оператором у* $L_2(\mathbb{R})$.

Доведення. Лінійність оператора A випливає з властивості лінійності інтегралу. Для перевірки $2'$) доведемо, що

$$M \int_{\mathbb{R}} (Af(u))^2 \, du < +\infty \tag{2.2.2}$$

для будь-якої функції $f \in L_2(\mathbb{R})$. Розглянемо випадкову міру η, що побудована за точковим процесом Θ

$$\eta = \sum_{\theta \in \Theta} \delta_\theta.$$

Тоді, згідно (2.2.1), виконуються співвідношення

$$M \int_{\mathbb{R}} (Af(u))^2 \, du =$$

$$= M \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} p_{2\varepsilon}(u-v)(f * p_\varepsilon)(u)(f * p_\varepsilon)(v)\eta(du)\eta(dv) \le$$

$$\le \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(r_1)| \times |f(r_2)| \times$$

$$\times M \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} p_{2\varepsilon}(u-v)p_\varepsilon(u-r_1)p_\varepsilon(v-r_2)\eta(du)\eta(dv)dr_1dr_2.$$

Зауважимо, що

$$M \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} p_{2\varepsilon}(u-v)p_\varepsilon(u-r_1)p_\varepsilon(v-r_2)\eta(du)\eta(dv) =$$

$$= M \sum_{k_1,k_2 \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{\theta_1 \in \Theta \cap [k_1;k_1+1) \\ \theta_2 \in \Theta \cap [k_2;k_2+1)}} p_{2\varepsilon}(\theta_1-\theta_2)p_\varepsilon(\theta_1-r_1)p_\varepsilon(\theta_2-r_2) \le$$

$$\le \sum_{k_1,k_2 \in \mathbb{Z}} \max_{\substack{u \in [k_1;k_1+1) \\ v \in [k_2;k_2+1)}} p_2(u-v)p(u-r_1)p(v-r_2) \times M \sum_{\substack{\theta_1 \in \Theta \cap [k_1;k_1+1) \\ \theta_2 \in \Theta \cap [k_2;k_2+1)}} 1 =$$

$$= C \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} \max_{\substack{u\in[k_1;\,k_1+1)\\ v\in[k_2;\,k_2+1)}} p_{2\varepsilon}(u-v)p_\varepsilon(u-r_1)p_\varepsilon(v-r_2), \qquad (2.2.3)$$

де

$$C = M \sum_{\substack{\theta_1\in\Theta\cap[k_1;\,k_1+1)\\ \theta_2\in\Theta\cap[k_2;\,k_2+1)}} 1.$$

Зі стаціонарності точкового процесу Θ випливає, що

$$C = M|\Theta\cap[0;1)\,|^2.$$

Таким чином, оскільки $M|\Theta\cap[0;1]|^2 < +\infty$, достатньо перевірити, що величина у правій частині (2.2.3) є ядром, що породжує обмежений інтегральний оператор у просторі $L_2(\mathbb{R})$. Зауважимо, що виконується нерівність

$$\max_{\substack{u\in[k_1;\,k_1+1)\\ v\in[k_2;\,k_2+1)}} p_{2\varepsilon}(u-v)p_\varepsilon(u-r_1)p_\varepsilon(v-r_2) \le$$

$$\le \Big[p_\varepsilon(r_1-k_1)+p_\varepsilon(r_1-k_1-1)\Big]\times$$

$$\times\Big[p_\varepsilon(r_2-k_2)+p_\varepsilon(r_2-k_2-1)\Big]\times$$

$$\times\Big[2p_{2\varepsilon}(k_1-k_2)+p_{2\varepsilon}(k_1-k_2-1)+p_{2\varepsilon}(k_1+1-k_2)\Big]. \qquad (2.2.4)$$

Оскільки для довільних чисел $a, b\in\mathbb{R}$ існує константа $\widetilde{C}>0$, що

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_\varepsilon(a-k)p_\varepsilon(k-b) \le \widetilde{C}p_{2\varepsilon}(a-b),$$

то з деякими додатніми константами $\widetilde{C}_i$, $i=\overline{1,3}$, виконуються співвідношення

$$\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} p_\varepsilon(a-k_1)p_\varepsilon(b-k_2)p_{2\varepsilon}(k_1-k_2) =$$

$$= \widetilde{C}_1 \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} p_\varepsilon(a-k_1)p_\varepsilon(b-k_2)\int_{\mathbb{R}} p_\varepsilon(k_1-r)p_\varepsilon(r-k_2)dr =$$

$$= \widetilde{C}_1 \int_{\mathbb{R}} \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} p_\varepsilon(a-k_1) p_\varepsilon(k_1 - r) \times \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} p_\varepsilon(b-k_2) p_\varepsilon(k_2 - r) dr \leq$$

$$\leq \widetilde{C}_2 \int_{\mathbb{R}} p_{2\varepsilon}(a-r) p_{2\varepsilon}(b-r) dr = \widetilde{C}_3 p_{4\varepsilon}(a-b).$$

Тоді, з нерівності (2.2.4) випливає, що з деякою константою вираз у правій частині (2.2.3) обмежений ядром $p_{4\varepsilon}(r_1 - r_2)$, яке породжує обмежений оператор у $L_2(\mathbb{R})$. Таким чином, існує константа $\widetilde{C}_4 > 0$, що для довільної функції $f \in L_2(\mathbb{R})$

$$M \int_{\mathbb{R}} (Af(u))^2 du \leq$$

$$\leq \widetilde{C}_4 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(r_1)| \cdot |f(r_2)| \cdot p_{4\varepsilon}(r_1 - r_2) dr_2 dr_2 < +\infty,$$

що доводить теорему. □

Теорема 2.2.2. *Нехай* Θ *– ергодичний стаціонарний точковий процес на* $\mathbb{R}$ *такий, що*

$$essup|\Theta \cap [0;1]| = +\infty. \tag{2.2.5}$$

Тоді A *не є обмеженим випадковим оператором у* $L_2(\mathbb{R})$.

Доведення. Зауважимо, що при припущеннях щодо процесу Θ з ймовірністю 1 існує зростаюча послідовність натуральних чисел $\{n_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ така, що

$$\sup_{k \geq 1} |\Theta \cap [n_k; n_k + 1)\,| = +\infty.$$

Розглянемо послідовність функцій з $L_2(\mathbb{R})$ вигляду

$$f_k = 1\!\!\mathrm{I}_{[n_k; n_k+1)}, \quad k \geq 1.$$

У силу стаціонарності Θ, для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ виконуються співвідношення

$$\|Af_k\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{\theta \in \Theta} \int_{n_k}^{n_k+1} p_\varepsilon(u-\theta) du \cdot p_\varepsilon(v-\theta) \right)^2 dv \geq$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{\theta \in \Theta \cap [n_k; n_k+1)} \int_{n_k}^{n_k+1} p_\varepsilon(u-\theta)du \cdot p_\varepsilon(v-\theta) \right)^2 dv =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{\theta \in \Theta \cap [n_k; n_k+1)} \int_0^1 p_\varepsilon(u-(\theta+n_k))du \cdot p_\varepsilon(v-\theta) \right)^2 dv \geq$$

$$\geq p_\varepsilon(1)^2 \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{\theta \in \Theta \cap [n_k; n_k+1)} p_\varepsilon(v-\theta) \right)^2 dv \geq$$

$$\geq p_\varepsilon(1)^2 \sum_{\theta \in \Theta \cap [n_k; n_k+1)} \int_{\mathbb{R}} (p_\varepsilon(v-\theta))^2 \, dv = \sum_{\theta \in \Theta \cap [n_k; n_k+1)} \frac{p_\varepsilon(1)^2}{\sqrt{2}}.$$

Отже, $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|Af_k\| = +\infty$, та лема доведена. □

Зауважимо, що для стаціонарних точкових процесів має місце формула Кемпбелла.

Теорема 2.2.3 ([32], с. 12 (формула Кемпбелла))**.** *Нехай Θ – точковий процесс на $\mathbb{R}$ з мірою інтенсивності λ. Тоді для будь-якої вимірної функції g такої, що $g \geq 0$ або $\int_{\mathbb{R}} |g(u)|\lambda(du) < +\infty$, має місце формула*

$$M \sum_{u \in \Theta} g(u) = \int_{\mathbb{R}} g(u)\lambda(du). \tag{2.2.6}$$

Використовуючи формулу Кемпбелла, доведемо наступні властивості випадкових операторів, що певним чином побудовані за допомогою інтегрального випадкового оператора A. Для фіксованого інтервалу $[a; b]$ позначимо через $Q_{a,b}$ ортогональну проекцію $L_2(\mathbb{R})$ на $L_2([a; b])$, що співпадає з підпростором $L_2(\mathbb{R})$ функцій з носієм у $[a; b]$.

Лема 2.2.1. *Для довільних $a, b \in \mathbb{R}$ випадкові оператори $AQ_{a,b}$, $Q_{a,b}A$ є обмеженими у $L_2(\mathbb{R})$.*

Доведення. За допомогою нерівності Гельдера можна перевірити, що для довільних $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ виконуються співвідношення

$$(AQ_{a,b}f, g) = \sum_{\theta\in\Theta} \int_{\mathbb{R}} g(v)p_\varepsilon(v-\theta)dv \int_a^b f(u)p_\varepsilon(u-\theta)du \leq$$

$$\leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L_2(\mathbb{R})} \|f\|_{L_2(\mathbb{R})} \sum_{\theta\in\Theta} \left(\int_{\mathbb{R}} p_\varepsilon^2(v-\theta)dv \right)^{\frac{1}{2}} \max_{u\in[a;b]} p_\varepsilon(u-\theta) =$$

$$= 2^{-\frac{1}{4}} (b-a)^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L_2(\mathbb{R})} \|f\|_{L_2(\mathbb{R})} \sum_{\theta\in\Theta} \max_{u\in[a;b]} p_\varepsilon(u-\theta).$$

Згідно з формулою Кемпбелла

$$M \sum_{\theta\in\Theta} \max_{u\in[a;b]} p_\varepsilon(u-\theta) = \int_{\mathbb{R}} \max_{u\in[a;b]} p_\varepsilon(u-r)dr < +\infty.$$

Отже, майже напевно

$$\sum_{\theta\in\Theta} \max_{u\in[a;b]} p_\varepsilon(u-\theta) < +\infty,$$

що доводить лему. □

Лема 2.2.2. *Для довільних* $a, b \in \mathbb{R}$ *з ймовірністю 1 випадковий оператор*

$$A_{Q_{a,b}} = Q_{a,b} A Q_{a,b}$$

є ядерним.

Доведення. Щоб довести дане твердження, оцінимо ядерну норму оператора $Q_{a,b}AQ_{a,b}$. Для довільного $\theta \in \Theta$ позначимо через e_θ функцію

$$e_\theta = Q_{a,b} p_\varepsilon(\cdot - \theta)$$

та розглянемо інтегральний оператор B_θ у $L_2(\mathbb{R})$ з ядром

$$b_\theta(u, v) = e_\theta(u) e_\theta(v).$$

Зауважимо, що
$$Q_{a,b}AQ_{a,b} = \sum_{\theta\in\Theta} B_\theta. \qquad (2.2.7)$$
Для кожного $\theta \in \Theta$ оператор B_θ є ядерним у $L_2(\mathbb{R})$ та його ядерна норма співпадає з $\|e_\theta\|^2$. За формулою Кемпбелла
$$M\sum_{\theta\in\Theta}\|e_\theta\|^2 = M\sum_{\theta\in\Theta}\int_a^b p_\varepsilon(u-\theta)^2du =$$
$$= C\int_a^b\int_{\mathbb{R}} p_\varepsilon(u-v)^2dvdu < +\infty,$$
де $C = M|\Theta\cap[0;1]|$. Отже, $A_{Q_{a,b}}$ є ядерним випадковим оператором.

□

Для будь-якого інтервалу $[a;b]$ випадковий оператор $A_{Q_{a,b}}$ обмежений. Проте, коли $[a;b]$ зростає до $\mathbb{R}$, $A_{Q_{a,b}}$ повинен збігатися до необмеженого випадкового оператора A. Отже, можна очікувати, що операторна норма $\|A_{Q_{a,b}}\|$ буде зростати до нескінченності, коли $[a;b]$ зростає до $\mathbb{R}$.

Теорема 2.2.4. *Нехай Θ – точковий процес Пуассона з інтенсивністю 1. Тоді майже напевно*
$$\frac{\ln\ln n}{\ln n}\|A_{Q_{-n,n}}\|^2 \to +\infty, \quad n\to\infty.$$
Доведення. Задамо випадкові величини $\xi_n = |\Theta\cap[n;n+1)\,|$, $n\in\mathbb{N}$. Аналогічно оцінкам з доведення теореми 2.2.2
$$\|A_{Q_{-n,n}}\|^2 \geq \max_{k=\overline{1,n}}\|A_{Q_{-n,n}}1\!\!\mathrm{I}_{[k;k+1)}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \geq$$
$$\geq \frac{p_\varepsilon(1)^2}{\sqrt{2}}\max_{k=\overline{1,n}}\xi_k.$$
Зараз $\{\xi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ – незалежні випадкові величини з розподілом Пуассона з інтенсивністю 1. Отже,
$$\mathbb{P}\{\xi_1\geq m\} \sim \frac{e^{-1}}{m!}, \quad m\to+\infty.$$

Для довільного $R > 0$

$$\mathbb{P}\Big\{ \max_{k=\overline{1,n}} \xi_k \le m_n R \Big\} = \Big(1 - \mathbb{P}\Big\{\xi_1 > m_n R\Big\}\Big)^n.$$

Таким чином, за лемою Бореля-Кантеллі, для $m_n = \frac{\ln n}{\ln\ln n}$ майже напевно

$$\frac{\max\limits_{k=\overline{1,n}} \xi_k}{m_n} \to +\infty, \quad n \to \infty,$$

що доводить теорему. $\square$

Приклад 2.2.1. Зауважимо, що точковий процес, що побудований за потоком Арратья у прикладі 2.1.1, є стаціонарним та ергодичним. Більш того, він задовольняє умову теореми 2.2.2, тобто

$$essup|\Theta \cap [0;1]| = +\infty.$$

Дійсно, достатньо перевірити, що для будь-якого $a > 0$

$$\mathbb{P}\left\{|\Theta \cap [0;1]| \ge a\right\} > 0. \tag{2.2.8}$$

Нехай $\left\{u_k,\ k = \overline{0, a+1}\right\}$ – рівномірне розбиття відрізку $[0;1]$. Тоді виконуються співвідношення

$$\mathbb{P}\left\{|\Theta \cap [0;1]| \ge a\right\} = \mathbb{P}\left\{|x([0;1],t)| \ge a+1\right\} \ge$$

$$\ge \mathbb{P}\left\{x(u_0,t) < x(u_1,t) < \ldots < x(u_{a+1},t)\right\}.$$

Додатність ймовірності останньої події буде доведена у наступному параграфі.

2.3 Зростання норми A_Q у випадку точкового процесу, побудованого за потоком Арратья

Розглянемо потік Арратья $\{x(u,s),\ u \in \mathbb{R},\ s \ge 0\}$ та фіксоване $t > 0$.

Лема 2.3.1. *Існують додатні коснтани* C_0, R, *що для довільного* $C \geq C_0$

$$\frac{1}{C^4}\ln \mathbb{P}\Big\{|x([0;1],t)| \geq C\Big\} \geq -Rt. \tag{2.3.1}$$

Доведення. Нехай $\big\{u_k,\ k=\overline{0,C+1}\big\}$ – рівномірне розбиття відрізку $[0;1]$. Тоді

$$\mathbb{P}\left\{|x([0;1],t)| \geq C\right\} \geq$$
$$\geq \mathbb{P}\left\{x(u_0,t) < x(u_1,t) < \ldots < x(u_{C+1},t)\right\}.$$

Зауважимо, що остання ймовірність дорівнює ймовірності того, що вінерівський процес у просторі $\mathbb{R}^{C+2}$, що стартує з точки

$$\vec{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_{C+1}),$$

до моменту часу t не вийшов на границю множини

$$\Delta_{C+2} = \Big\{\vec{v} \in \mathbb{R}^{C+2}\ \Big|\ v_0 \leq v_1 \leq \ldots \leq v_{C+1}\Big\},$$

тобто

$$\mathbb{P}\left\{x(u_0,t) < x(u_1,t) < \ldots < x(u_{C+1},t)\right\} =$$
$$= \mathbb{P}\Big\{\ \vec{w}(\vec{u},s) \notin \partial\Delta_{C+2}\ \text{ для будь-якого }\ s \leq t\ \Big\},$$

де $\vec{w}(\vec{u},\cdot)$ – вінерівський процес у $\mathbb{R}^{C+2}$, що $\vec{w}(\vec{u},0)=\vec{u}$. Оскільки $\frac{1}{\sqrt{2}(C+1)}$ – відстань від точки $\vec{u}$ до будь-якої гіперплощини

$$H_i = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^{C+2} |\ v_i = v_{i+1}\}, \quad i = \overline{0,C},$$

то остання ймовірність не менша за

$$\mathbb{P}\left\{\ \|\vec{w}(\vec{0},s)\|_{\mathbb{R}^{C+2}} < \frac{1}{\sqrt{2}(C+1)}\ \text{ для будь-якого }\ s \leq t\ \right\},$$

де $\vec{w}(\vec{0},\cdot)$ – вінерівський процес у $\mathbb{R}^{C+2}$, що $\vec{w}(\vec{0},0)=\vec{0}$. Таким чином, має місце оцінка

$$\mathbb{P}\left\{x(u_0,t) < x(u_1,t) < \ldots < x(u_{C+1},t)\right\} \geq$$

$$\geq \mathbb{P}\left\{\sup_{s\in[0;t]}\|\vec{w}(\vec{0},s)\|_{\mathbb{R}^{C+2}} \leq \frac{1}{2(C+1)}\right\}$$

та виконуються співвідношення

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{s\in[0;t]}\|\vec{w}(\vec{0},s)\|_{\mathbb{R}^{C+2}} \leq \frac{1}{2(C+1)}\right\} \geq$$

$$\geq \mathbb{P}\left\{\sup_{s\in[0;t]}|w_j(0,s)| \leq \frac{1}{2(C+2)^{\frac{3}{2}}} \text{ для будь-якого } j=\overline{0,C+1}\right\},$$

де $\left\{w_j(0,\cdot),\ j=\overline{0,C+1}\right\}$ – незалежні вінерівські процеси у $\mathbb{R}$, $w_j(0,0)=0$. Отже,

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{s\in[0;t]}\|\vec{w}(\vec{0},s)\|_{\mathbb{R}^{C+2}} \leq \frac{1}{2(C+1)}\right\} \geq$$

$$\geq \left(\mathbb{P}\left\{\sup_{s\in[0;t]}|w_0(0,s)| \leq \frac{1}{2(C+2)^{\frac{3}{2}}}\right\}\right)^{C+2}.$$

Згідно [54], при $C\to\infty$

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{s\in[0;t]}|w_0(0,s)| \leq \frac{1}{2(C+2)^{\frac{3}{2}}}\right\} \sim \frac{4}{\pi}e^{-\frac{\pi^2}{8}4t(C+2)^3}.$$

Отже, починаючи з деякого $C_0>0$

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{s\in[0;t]}|w_0(0,s)| \leq \frac{1}{2(C+2)^{\frac{3}{2}}}\right\} \geq \frac{2}{\pi}e^{-\frac{\pi^2}{2}t(C+2)^3}.$$

Таким чином, існують константи $C_0,\ R>0,$ що для всіх $C\geq C_0$

$$\frac{1}{C^4}\ln\mathbb{P}\Big\{|x([0;1],t)|\geq C\Big\} \geq$$

$$\geq \frac{C+2}{C^4}\left(\ln\frac{2}{\pi}+\ln e^{-\frac{\pi^2}{2}t(C+2)^3}\right) \geq -Rt.$$

$\square$

Наслідок 2.3.1. Для точкового процесу Θ_t на $\mathbb{R}$, що утворений з усіх точок розриву функції $x(\cdot, t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, та будь-якого $C > 0$

$$\mathbb{P}\left\{|\Theta_t \cap [0;1]| \geq C\right\} > 0.$$

Згідно з наслідком 2.3.1 Θ_t задовольняє умову теореми 2.2.2. Отже, інтегральний випадковий оператор A, що відподіває даному точковому процесу, не є обмеженим. Таким чином, аналогічно теоремі 2.2.4, очікується, що $\|A_{Q_{-n,n}}\|$ збігаються до нескінченності при $n \to \infty$. Щоб це довести задамо випадкові величини

$$\xi_n = |\Theta_t \cap [n\,; n+1)\,|, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Лема 2.3.2. *Для будь-якого* $\beta \in (0; \frac{1}{4})$ *майже напевно*

$$\frac{\max\limits_{k=\overline{0,n}} \xi_k}{(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta}} \to +\infty, \quad n \to \infty. \tag{2.3.2}$$

Доведення. Для фіксованого $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ розглянемо величину $N_n = \left[\frac{n}{[\sqrt{8\ln n}]}\right]$. Для будь-якого $j = \overline{0, N_n}$ позначимо

$$k_j^n = j \cdot [\sqrt{8\ln n}].$$

Для доведення (2.3.2) достатньо показати, що

$$\frac{\max\limits_{j=\overline{0,N_n}} \xi_{k_j^n}}{(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta}} \to +\infty, \quad n \to \infty. \tag{2.3.3}$$

Перевіримо, що для будь-якого $C > 0$

$$\mathbb{P}\left\{ \text{н. ч. } \max_{j=\overline{0,N_n}} \xi_{k_j^n} \leq C(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta} \right\} = 0. \tag{2.3.4}$$

Згідно леми Бореля-Кантеллі, для (2.3.4) достатньо збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left\{ \max_{j=\overline{0,N_n}} \xi_{k_j^n} \leq C(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta} \right\}. \tag{2.3.5}$$

Для будь-якого $h > 0$ позначимо

$$\alpha(h) = \sup \{ |\mathbb{P}(B \cap D) - \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(D)|,$$

$$B \in \mathcal{F}_{-\infty}^{u},\ D \in \mathcal{F}_{u+h}^{+\infty},\ u \in \mathbb{R} \},$$

де $\mathcal{F}_u^v = \sigma\{x(w,\cdot),\ w \in [u;v]\}$. У [17] доведено, що для кожного $h > 0$

$$\alpha(h) \le 4\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_h^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv. \tag{2.3.6}$$

Таким чином, оскільки для будь-якого $n \in \mathbb{N}$

$$\xi_n = |x([n; n+1)\ , t)|,$$

виконується нерівність

$$\Bigg| \mathbb{P}\left\{ \max_{j=\overline{0,N_n}} \xi_{k_j^n} \le C(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta} \right\} -$$

$$- \mathbb{P}\left\{ \max_{j=\overline{0,N_n-1}} \xi_{k_j^n} \le C(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta} \right\} \mathbb{P}\left\{ \xi_{k_{N_n}^n} \le C(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta} \right\} \Bigg| \le$$

$$\le \alpha([\sqrt{8 \ln n}]). \tag{2.3.7}$$

Процес $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R}\}$ стаціонарний. Отже,

$$\mathbb{P}\left\{ \xi_{k_{N_n}^n} \le C(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta} \right\} = \mathbb{P}\left\{ \xi_0 \le C(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta} \right\}.$$

З нерівності (2.3.7) випливає, що

$$\mathbb{P}\left\{ \max_{j=\overline{0,N_n}} \xi_{k_j^n} \le C(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta} \right\} \le \alpha([\sqrt{8 \ln n}]) +$$

$$+ \mathbb{P}\left\{ \xi_0 \le C(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta} \right\} \mathbb{P}\left\{ \max_{j=\overline{0,N_n-1}} \xi_{k_j^n} \le C(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta} \right\}. \tag{2.3.8}$$

Аналогічно, для будь-якого $i = \overline{1, N_n - 1}$

$$\mathbb{P}\left\{ \max_{j=\overline{0,N_n-i}} \xi_{k_j^n} \le C(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta} \right\} \le \alpha([\sqrt{8 \ln n}]) +$$

$$+\mathbb{P}\left\{\xi_0 \le C(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta}\right\}\mathbb{P}\left\{\max_{j=\overline{0,N_n-i-1}}\xi_{k_j^n} \le C(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta}\right\}. \qquad (2.3.9)$$

З нерівностей (2.3.8), (2.3.9) випливають наступні співвідношення

$$\mathbb{P}\left\{\max_{j=\overline{0,N_n}}\xi_{k_j^n} \le C(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta}\right\} \le \alpha([\sqrt{8\ln n}])+$$

$$+\mathbb{P}\left\{\xi_0 \le C(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta}\right\}\Big(\alpha([\sqrt{8\ln n}])+$$

$$+\mathbb{P}\left\{\xi_0 \le C(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta}\right\}\mathbb{P}\left\{\max_{j=\overline{0,N_n-2}}\xi_{k_j^n} \le C(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta}\right\}\Big) \le \ldots \le$$

$$\le \alpha([\sqrt{8\ln n}])\sum_{j=0}^{N_n-1}\mathbb{P}\left\{\xi_0 \le C(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta}\right\}^j +$$

$$+\mathbb{P}\left\{\xi_0 \le C(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta}\right\}^{N_n}.$$

Щоб довести збіжність ряду (2.3.5) достатньо перевірити, що збігаються ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha([\sqrt{8\ln n}])\sum_{j=0}^{N_n-1}\mathbb{P}\left\{\xi_0 \le C(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta}\right\}^j, \qquad (2.3.10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left\{\xi_0 \le C(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta}\right\}^{N_n}. \qquad (2.3.11)$$

Для будь-якого $h > 0$ виконується нерівність [35]

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_h^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}dv \le \frac{1}{h\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{h^2}{2}}. \qquad (2.3.12)$$

З (2.3.12) випливають співвідношення

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha([\sqrt{8\ln n}])\sum_{j=0}^{N_n-1}\mathbb{P}\left\{\xi_0 \le C(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta}\right\}^j \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\alpha([\sqrt{8\ln n}])N_n \le$$

$$\leq 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{[\sqrt{8\ln n}]}\cdot\frac{1}{[\sqrt{8\ln n}]\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[\sqrt{8\ln n}]^2}{2}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{8\ln n\sqrt{2\pi}n^{\frac{5}{2}}}$ збігається та, починаючи з деякого номера

$$\frac{n}{[\sqrt{8\ln n}]}\cdot\frac{1}{[\sqrt{8\ln n}]\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[\sqrt{8\ln n}]^2}{2}}\leq\frac{2n}{8\ln n\sqrt{2\pi}n^{\frac{5}{2}}}.$$

Отже, ряд (2.3.10) збіжний.

З леми 2.3.1 випливає, що, починаючи з деякого номера

$$\frac{n}{\sqrt{8\ln n}}\mathbb{P}\left\{\xi_0>C\left(\ln n\right)^{\frac{1}{4}-\beta}\right\}\geq$$

$$\geq\frac{n}{\sqrt{8\ln n}}e^{-\frac{R\pi^2}{2}t\left(C(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta}\right)^4}\geq\frac{n^{\frac{1}{2}}}{(8\ln n)^{\frac{1}{2}}},$$

що доводить збіжність ряду (2.3.11). $\square$

Нагадаємо, що для випадкового інтегрального оператора A у $L_2(\mathbb{R})$, що побудований за Θ_t

$$Af(v)=\sum_{\theta\in\Theta_t}\int_{\mathbb{R}}f(u)p_\varepsilon(u-\theta)du\cdot p_\varepsilon(v-\theta),\tag{2.3.13}$$

та ортогональної проекції $Q_{-n,n}$ простору $L_2(\mathbb{R})$ на $L_2([-n,n])$ випадковий оператор $A_{Q_{-n,n}}=Q_{-n,n}AQ_{-n,n}$ обмежений.

Теорема 2.3.1. *Нехай Θ_t – точковий процес на $\mathbb{R}$, що побудований за потоком Арратья. Тоді, для будь-якого $\beta\in(0;\frac{1}{4})$ майже напевно*

$$(\ln n)^{\beta-\frac{1}{4}}\|A_{Q_{-n,n}}\|^2\to+\infty,\quad n\to\infty.\tag{2.3.14}$$

Доведення. Аналогічно оцінкам з доведення теореми 2.2.2

$$\|A_{Q_{-n,n}}\|^2\geq\max_{k=\overline{0,n}}\|A_{Q_{-n,n}}1\!\!\mathrm{I}_{[k;k+1)}\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\geq$$

$$\geq\frac{p_\varepsilon(1)^2}{\sqrt{2}}\max_{k=\overline{0,n}}\xi_k,$$

де $\xi_k = |\Theta_t \cap [k; k+1)|$. За лемою 2.3.2

$$\frac{\max\limits_{k=\overline{0,n}} \xi_k}{(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta}} \to +\infty, \quad n \to \infty,$$

з чого випливає (2.3.14). □

Висновки до розділу 2

1. Для лінійної оболонки зсувів гаусівської щільності уздовж ергодичного точкового процесу доведена щільність у просторі $L_2([a; b])$.

2. Для ергодичних точкових процесів встановлено необмеженість випадкових інтегральних операторів у просторі $L_2(\mathbb{R})$, ядра яких задаються за допомогою зсувів гаусівських щільностей уздовж заданого точкового процесу.

3. Отримана оцінка зростання максимальної кількості кластерів потоку Арратья на відрізках довжини один.

4. Встановлено оцінку зростання норми ядерних випадкових операторів, що наближають випадковий інтегральний оператор, породжений точковим процесом за потоком Арратья.

Розділ 3

Випадкові оператори зсуву, що побудовані за потоком Арратья

Основним об'єктом дослідження даного розділу є сильний випадковий оператор, що описує зсуви функцій з $L_2(\mathbb{R})$ уздовж потоку Арратья. У зв'язку з тим, що частинки у цьому потоці склеюються, досліджуваний випадковий оператор не є обмеженим. Головним результатом даного розділу є формула інтегрування частинами для потоку Арратья, за допомогою якої отримана достатня умова на компактні множини з $L_2(\mathbb{R})$, за якої існують їх образи під дією випадкового оператора, що породжений потоком Арратья.

3.1 Спряжений потік для потоку Арратья та формула інтегрування частинами

У [2] потік Арратья $\{x(u,s),\ u \in \mathbb{R},\ s \in [0;t]\}$ був побудований за допомогою випадкових блукань зі склеюванням. Оскільки у зворотному часі існують випадкові блукання зі склеюванням такі, що їх траєкторії не перетинаються з відповідними випадковими блуканнями у прямому часі, то для потоку Арратья $\{x(u,s),\ u \in \mathbb{R},\ s \in [0;t]\}$ існує спряжений йому потік Арратья $\{y(u,s),\ u \in \mathbb{R},\ s \in [0;t]\}$, що рухається у зворотному часі і такий, що його траєкторії не перетинаються з траєкторіями потоку $\{x(u,s),\ u \in \mathbb{R},\ s \in [0;t]\}$. Пізніше, в [9], була запропонована формула для представлення спряженого потоку, яка використовує більш загальний об'єкт аніж потік Арратья, а саме броунівську сітку [16]. Наведемо відповідні означення.

Нехай $\{w(u_j,\cdot), j=\overline{1,n}\}$ – сім'я незалежних вінерівських процесів таких, що для кожного $j=\overline{1,n}$ $w(u_j,\cdot)$ – вінерівський процес, що у момент часу $t_j>0$ страртує з точки $u_j \in \mathbb{R}$, тобто має представлення

$$w(u_j,t) = u_j + w_j(t-t_j), \quad t \geq t_j,$$

де $\{w_j,\ j=\overline{1,n}\}$ – незалежні стандартні вінерівські процеси. Задамо нові випадкові процеси наступним чином

$$\widetilde{w}(u_1,\cdot) = w(u_1,\cdot)$$

та для кожного $j=\overline{2,n}$

$$\widetilde{w}(u_j,t) = w(u_j,t)1\!\!1\{t_j \leq t < \tau_{j_*,j}\} + \widetilde{w}(u_{j_*},t)1\!\!1\{t \geq \tau_{j_*,j}\},$$

де

$$\tau_{k,j} = \inf\Big\{s>0 \;\Big|\; w(u_j,s) = \widetilde{w}(u_k,s)\Big\}$$

– момент першої зустрічі $w(u_j,\cdot)$ та $\widetilde{w}(u_k,\cdot)$, $k=\overline{1,j-1}$, а номер j_* такий, що

$$\tau_{j_*,j} = \min_{k=\overline{1,j-1}} \tau_{k,j}.$$

Означення 3.1.1 ([16, 39]). Набір $\{\widetilde{w}(u_j,\cdot),\ j=\overline{1,n}\}$ називається сім'єю вінерівських процесів, що склеюються та стартують з точок $u_1,\ldots,u_n \in \mathbb{R}$ у моменти часу $t_1,\ldots,t_n \in \mathbb{R}_+$ відповідно.

Означення 3.1.2 ([16]). Броунівською сіткою називається сім'я $\{x_r(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{R}_+,\ t \geq r\}$ вінерівських процесів, що склеюються та стартують з кожної точки простору у кожний момент часу.

Розглянемо броунівську сітку $\{x_r(u,t),\ u\in\mathbb{R},\ r\in\mathbb{R},\ t\geq r\}$. Для фіксованого $t>0$ задамо спряжений потік Арратья $\{y(u,s),\ u\in\mathbb{R},\ s\in[0;t]\}$ до потоку Арратья $\{x_0(u,s),\ u\in\mathbb{R},\ s\in[0;t]\}$ наступним чином [9]: для будь-якого $s\in[0;t]$

$$y(u,t-s)=\inf\{x_r(v,s)\mid x_r(v,t)>u,$$

$$\text{де } v\in\mathbb{Q},\ r\in\mathbb{Q}\cap[0;t]\}\quad\text{м.н.}\tag{3.1.1}$$

Зауваження 3.1.1. Зауважимо, що траєкторії x_0 та y не перетинаються, тим самим

$$\mathbb{P}\Big\{x_0(\mathbb{R},t)\cap(a;b)\neq\emptyset\Big\}=\mathbb{P}\Big\{y(a,t)\neq y(b,t)\Big\}.\tag{3.1.2}$$

Зауваження 3.1.2. У [45] показано, що для будь-якого $t>0$ функція $y(\cdot,t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ є монотонно неспадною та неперервною справа. Таким чином, можна розглядати міру Лебега - Стілтьєса ν_t, що побудована за $y(\cdot,t)$. Інтеграл Лебега за мірою ν_t позначимо через $\int_{\mathbb{R}}f(u)dy(u,t)$.

У наступній теоремі вважається, що x та спряжений йому потік y такі, як описано вище.

Теорема 3.1.1. *Нехай $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – невід'ємна вимірна функція та $\int_{\mathbb{R}}h(u)du<+\infty$. Тоді для будь-якого $t>0$ з ймовірністю 1 існує інтеграл $\int_{\mathbb{R}}h(x(u,t))du$ та має місце рівність*

$$\int_{\mathbb{R}}h(x(u,t))du=\int_{\mathbb{R}}h(u)dy(u,t).\tag{3.1.3}$$

Доведення. У [8] доведено, що для будь-якої невід'ємної функції $h\in L_1(\mathbb{R})$ та довільного $t>0$

$$M\int_{\mathbb{R}}h(x(u,t))du=\int_{\mathbb{R}}h(u)du.$$

Отже, з ймовірністю 1 існує інтеграл $\int_{\mathbb{R}}h(x(u,t))du$.

Позначимо через ν_t міру Лебега-Стілтьєса, що побудована за монотонно неспадною та неперервною справа функцією $y(\cdot, t)$. У силу теореми про заміну змінної в интегралі Лебега для доведення (3.1.3) достатньо показати, що для будь-якого $t > 0$

$$\nu_t = \lambda \circ x(\cdot, t)^{-1} \text{ м.н.},$$

де λ – міра Лебега на $\mathbb{R}$.

З (3.1.1) випливає, що для довільних $t > 0$ та $u \in \mathbb{R}$

$$y(u,t) = \inf \Big\{ v \in \mathbb{Q} \;\Big|\; x(v,t) > u \Big\} \text{ м.н.} \tag{3.1.4}$$

Для фіксованого $b \in \mathbb{R}$ позначимо

$$v' = \inf \Big\{ v \in \mathbb{Q} \;\Big|\; x(v,t) > b \Big\}.$$

Тоді, з (4.5.3) випливає, що існує множина Ω_b повної ймовірності така, що для будь-якого $\omega \in \Omega_b$ та довільної послідовності раціональних чисел $\{v_n, \ n \in \mathbb{N}\}$, що збігається до $v'(\omega)$ зліва, виконується нерівність

$$x(v_n, t, \omega) \le b$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Таким чином,

$$v'(\omega) = \sup \Big\{ v \in \mathbb{Q} \;\Big|\; x(v,t,\omega) \le b \Big\}.$$

Отже, для будь-яких $a, b \in \mathbb{R}$ існує множина

$$\Omega_{a,b} = \Omega_a \cap \Omega_b$$

з $\mathbb{P}(\Omega_{a,b}) = 1$, на якій

$$y(b,t) - y(a,t) = \sup \Big\{ v \in \mathbb{Q} \;\Big|\; x(v,t) \le b \Big\} -$$

$$- \sup \Big\{ v \in \mathbb{Q} \;\Big|\; x(v,t) \le a \Big\} = \lambda \Big\{ u \in \mathbb{R} \;\Big|\; x(u,t) \in (a; b] \Big\}. \tag{3.1.5}$$

Розглянемо множину Δ вигляду

$$\Delta = \cup_{k=1}^{n} \left(a_k; b_k \right], \tag{3.1.6}$$

де $\left\{ \left(a_k; b_k \right], \ k = \overline{1,n} \right\}$ – попарно неперетинні напівсегменти, а $n \in \mathbb{N}$ – довільне. У силу (3.1.5) на множині

$$\Omega_\Delta = \cap_{k=1}^{n} \Omega_{a_k, b_k}$$

повної ймовірності виконується рівність

$$\nu_t(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} (y(b_k, t) - y(a_k, t)) = \lambda \Big\{ u \in \mathbb{R} \ \Big| \ x(u,t) \in \Delta \Big\}.$$

Доведемо, що з ймовірністю 1 міри ν_t та $\lambda \circ x(\cdot, t)^{-1}$ збігаються на кільці $\mathcal{A}$, що породжене множинами виду (3.1.6). Для цього розглянемо наступні множини $\widetilde{\Omega}$, Ω'_x, Ω'_y

$$\widetilde{\Omega} = \bigcap_{r_1, r_1 \in \mathbb{Q}} \Omega_{r_1, r_2},$$

$$\Omega'_x = \Big\{ \ \omega \in \Omega \ \Big| \ x(\cdot, t) \text{ монотонно неспадна та неперервна справа } \Big\},$$

$$\Omega'_y = \Big\{ \ \omega \in \Omega \ \Big| \ y(\cdot, t) \text{ монотонно неспадна та неперервна справа } \Big\}.$$

Зафіксуємо довільне $p \in \mathbb{R}$ та розглянемо послідовність $\{r_n, \ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$ таку, що

$$r_n \to p + 0, \ \ n \to \infty.$$

Тоді для довільних $r \in \mathbb{Q}$ та $\omega \in \widetilde{\Omega} \cap \Omega'_x \cap \Omega'_y$, у силу неперервності справа функції $y(\cdot, t, \omega)$,

$$\nu_t(\left(r; p\right], \omega) = \lim_{n \to \infty} \nu_t(\left(r; r_n\right], \omega) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \lambda \Big\{ u \in \mathbb{R} \ \Big| \ x(u, t, \omega) \in \left(r; r_n\right] \ \Big\} =$$

$$= \lambda \Big\{ u \in \mathbb{R} \ \Big| \ x(u, t, \omega) \in \left(r; p\right] \ \Big\}. \tag{3.1.7}$$

Аналогічно, для довільних $q \in \mathbb{Q}$, $v \in \mathbb{R}$, $\omega \in \widetilde{\Omega} \cap \Omega'_x \cap \Omega'_y$

$$\nu_t((v;q]\,,\omega) = \lambda\Big\{u \in \mathbb{R}\ \Big|\ x(u,t,\omega) \in (v;q]\ \Big\}. \tag{3.1.8}$$

Оскільки для будь-яких $a, b \in \mathbb{R}$ існує $q \in \mathbb{Q}$ таке, що

$$(a;b] = (a;q] \cup (q;b]\,,$$

то з (3.1.7) та (3.1.8) випливає, що для будь-якого $\omega \in \widetilde{\Omega} \cap \Omega'_x \cap \Omega'_y$

$$\nu_t((a;b]\,,\omega) = \lambda\Big\{u \in \mathbb{R}\ \Big|\ x(u,t,\omega) \in (a;b]\ \Big\}.$$

Таким чином, на множині повної ймовірності $\widetilde{\Omega} \cap \Omega'_x \cap \Omega'_y$

$$\forall \Delta \in \mathcal{A} \qquad \nu_t(\Delta) = \lambda \circ x(\cdot,t)^{-1}(\Delta).$$

Оскільки для кожного $\omega \in \widetilde{\Omega} \cap \Omega'_x \cap \Omega'_y$ міри $\nu_t(\cdot,\omega)$ та $\lambda \circ x(\cdot,t,\omega)^{-1}(\cdot)$ збігаються на кільці $\mathcal{A}$, то, у силу теореми Каратеодорі, вони збігаються і на σ - алгебрі $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Таким чином,

$$\mathbb{P}\Big\{\ \forall \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \nu_t(\Delta) = \lambda \circ x(\cdot,t,\omega)^{-1}(\Delta)\ \Big\} = 1, \tag{3.1.9}$$

що і потрібно було довести. □

3.2 Необмеженість оператора зсуву для потоку Арратья

При дослідженні змін компактних множин під дією сильного випадкового оператору, що породжений потоком Арратья, необхідно гарантувати існування образів заданих компактних множин. Якщо T_t – обмежений випадковий оператор, то такі образи існують і є випадковими компактними множинами. Проте, за рахунок склеювання частинок у потоці Арратья, данний випадковий оператор не є обмеженим, що доводиться у даному параграфі.

Зафіксуємо $t > 0$ та для будь-якого відрізку $[a;b]$ розглянемо довільну множину $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset [a;b]$, яка містить точки a та b. Задамо випадкові моменти наступним чином

$$\tau_1 = t,$$

$$\tau_k = \inf\left\{t; s \,\middle|\, \prod_{j=1}^{k-1}(x(u_k,s) - x(u_j,s)) = 0\right\},\quad k \geq 2.$$

Якщо $\nu_n(s)$ – кількість різних точок у наборі $\{x(u_1,s),\ldots,x(u_n,s)\}$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \tau_k = \int_0^t \nu_n(s)ds.$$

У [46] доведено, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n < +\infty \text{ м. н.}$$

Таким чином, множина $x([a;b],t)$ скінченна майже напевно [46].

Враховуючи те, що функція $x(\cdot,t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є монотонно неспадною та неперервною справа, маємо, що для будь-якого $z \in x([a;b],t)$

$$\lambda\Big\{u \in [a;b] \,\Big|\, x(u,t) = z\Big\} > 0, \tag{3.2.1}$$

де λ – міра Лебега на $\mathbb{R}$.

Теорема 3.2.1. *Для будь-якого* $t > 0$ T_t *не є обмеженим сильним випадковим оператором у* $L_2(\mathbb{R})$.

Доведення. Зафіксуємо довільне $t > 0$ та припустимо, що існує сім'я $\{\widetilde{T}_{t,\omega},\ \omega \in \Omega\}$ лінійних обмежених детермінованих операторів у $L_2(\mathbb{R})$ така, що для будь-якої функції $f \in L_2(\mathbb{R})$ існує множина Ω_f повної ймовірності, на якій

$$(T_t f)_\omega = \widetilde{T}_{t,\omega} f.$$

Оскільки $\widetilde{T}_{t,\omega}$ – лінійний обмежений оператор у $L_2(\mathbb{R})$, то на множині

$$\widetilde{\Omega} = \bigcap_{r_1, r_2 \in \mathbb{Q}} \Omega_{1\!\!\mathrm{I}_{[r_1;r_2]}}$$

повної ймовірності

$$\sup_{\{\ (p,r)\in\mathbb{Q}^2:\ r<p\ ,\ p-r<\delta\ \}} \|\widetilde{T}_{t,\omega} 1\!\!\mathrm{I}_{[r;p]}\|_{L_2(\mathbb{R})} \to 0, \quad \delta \to 0. \tag{3.2.2}$$

У силу вищезгаданої властивості потоку Арратья (3.2.1) існує Ω' така, що $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ та для кожного $\omega \in \Omega'$ знайдеться $z_\omega \in \mathbb{R}$, для якого

$$\lambda\Big\{u \in [0;1] \ \Big|\ x(u,t,\omega) = z_\omega\Big\} > 0.$$

Таким чином, для довільних $\omega \in \Omega' \cap \widetilde{\Omega}$ та $\delta > 0$

$$\sup_{\{\ (p,r)\in\mathbb{Q}^2:\ r<p,\ p-r<\delta\ \}} \|\widetilde{T}_{t,\omega} 1\!\!\mathrm{I}_{[r;p]}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \geq$$

$$\geq \sup_{\{\ (p,r)\in\mathbb{Q}^2:\ r<p,\ p-r<\delta\ \text{та}\ z_\omega\in[r;p]\ \}} \|\widetilde{T}_{t,\omega} 1\!\!\mathrm{I}_{[r;p]}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \geq$$

$$\geq \sup_{\{\ (p,r)\in\mathbb{Q}^2:\ r<p,\ p-r<\delta\ \text{та}\ z_\omega\in[r;p]\ \}} \int_0^1 1\!\!\mathrm{I}_{[r;p]}(x(u,t,\omega))du \geq$$

$$\geq \lambda\Big\{u \in [0;1] \ \Big|\ x(u,t,\omega) = z_\omega\Big\} > 0.$$

Оскільки для $\omega \in \Omega' \cap \widetilde{\Omega}$ та $\delta > 0$

$$\sup_{\{\ (p,r)\in\mathbb{Q}^2:\ r<p,\ p-r<\delta\ \}} \|\widetilde{T}_{t,\omega} 1\!\!\mathrm{I}_{[r;p]}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \geq \lambda\Big\{u \in [0;1] \ \Big|\ x(u,t,\omega) = z_\omega\Big\},$$

то отримано суперечність з (3.2.2), що доводить теорему. $\square$

Наступна теорема дає достатню умову на сім'ю функцій, за якої T_t є обмеженим випадковим оператором на даній множині функцій.

Теорема 3.2.2. *Нехай сім'я функцій* $\Phi \subset W_2^1(\mathbb{R})$ *з простору Соболева задовольняє умову*

$$\sup_{f\in\Phi} \|f'\|_{L_2(\mathbb{R},(|u|+1)^3du)} < +\infty. \tag{3.2.3}$$

Тоді для будь-якого $t > 0$

$$\mathbb{P}\left\{\exists C > 0 \,\middle|\, \forall f \in \Phi \quad \|T_t f\|_{L_2(\mathbb{R})} \le C\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}\right\} = 1. \tag{3.2.4}$$

Доведення. З умови (3.2.3) випливає, що для будь-якої функції $f \in \Phi$

$$\lim_{C\to+\infty} \int_C^{+\infty} (f'(u))^2(u+1)^3du = 0.$$

Тоді для довільного $\beta \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$ має місце збіжність

$$\lim_{C\to+\infty} C^\beta \int_C^{+\infty} (f'(u))^2(u+1)^{(3-\beta)}du = 0. \tag{3.2.5}$$

Розглянемо клас еквівалентності $f \in \Phi$ та зафіксуємо довільну функцію $\widetilde{f} \in f$. Оскільки для будь-якого $u > 0$, у силу нерівності Гельдера,

$$u^{\frac{1}{2}}|\widetilde{f}(u)| \le \left(u\int_u^{+\infty}(f'(v))^2(1+v)^2dv\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1+u}\right)^{\frac{1}{2}},$$

то, згідно (3.2.5),

$$\lim_{u\to+\infty} u^{\frac{1}{2}}|\widetilde{f}(u)| = 0.$$

Аналогічно доводиться, що $\lim_{u\to-\infty}(-u)^{\frac{1}{2}}|\widetilde{f}(u)| = 0$. Таким чином, якщо виконується умова (3.2.3), то для кожного класу еквівалентності $f \in \Phi$ та будь-якої функції $\widetilde{f} \in f$

$$\lim_{|u|\to+\infty} |u|^{\frac{1}{2}}|\widetilde{f}(u)| = 0. \tag{3.2.6}$$

У силу останнього співвідношення та формули інтегрування частинами для потоку Арратья, для довільної функції $f \in \Phi$ та фіксованого $t > 0$

$$\|T_t f\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} f^2(x(u,t))du = \int_{\mathbb{R}} f^2(u)dy(u,t).$$

Оскільки

$$\lim_{|u|\to+\infty} \frac{|y(u,t)|}{|u|} = 1 \ \text{ м. н.}, \tag{3.2.7}$$

то для довільного

$$\omega \in \Omega' = \left\{\omega' \in \Omega \;\middle|\; \lim_{|u|\to+\infty} \frac{|y(u,t,\omega')|}{|u|} = 1\right\},$$

у силу (3.2.6),

$$\lim_{|u|\to+\infty} f^2(u)|y(u,t,\omega)| = 0.$$

Таким чином,

$$\int_{\mathbb{R}} f^2(u)dy(u,t) = -2\int_{\mathbb{R}} f(u)f'(u)y(u,t)du \ \text{ м. н.}$$

З (3.2.7) випливає, що для кожного $\omega \in \Omega'$ існує константа $\widetilde{C}_\omega > 0$, для якої

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \frac{|y(u,t,\omega)|}{(|u|+1)^{\frac{3}{2}}} \le \widetilde{C}_\omega$$

та

$$\int_{\mathbb{R}} |f(u)f'(u)y(u,t,\omega)|du \le \widetilde{C}_\omega \int_{\mathbb{R}} (|u|+1)^{\frac{3}{2}}|f(u)f'(u)|du.$$

З умови (3.2.3) та нерівності Гельдера маємо, що на множині Ω' для кожної $f \in \Phi$ виконується нерівність

$$\|T_t f\|_{L_2(\mathbb{R})}(\omega) \le C_\omega \|f\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

де $C_\omega = \widetilde{C}_\omega \cdot \sup_{f\in\Phi} \|f'\|_{L_2(\mathbb{R},(|u|+1)^3du)}$, що доводить обмеженість оператора T_t на множині Φ. □

З останньої теореми випливає достатня умова на компактні множини $K \subset L_2(\mathbb{R})$, за якої T_t має неперервну модифікацію на K.

Теорема 3.2.3. *Нехай $K \subseteq W_2^1(\mathbb{R})$ – множина у $L_2(\mathbb{R})$ така, що*

$$\sup_{f,g\in K} \int_{\mathbb{R}} (f'(u)-g'(u))^2(|u|+1)^3du < \infty. \tag{3.2.8}$$

Тоді для будь-якого $t > 0$ T_t на K має неперервну модифікацію.

Доведення. Зафіксуємо довільне $t > 0$. Оскільки T_t – сильний випадковий оператор у $L_2(\mathbb{R})$, то для будь-яких $f, g \in L_2(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ існує множина $\Omega_{f,g,\alpha,\beta}$ така, що $\mathbb{P}(\Omega_{f,g,\alpha,\beta}) = 1$ та для кожного $\omega \in \Omega_{f,g,\alpha,\beta}$ має місце рівність

$$(T_t(\alpha f + \beta g))(\omega) = \alpha(T_t f)(\omega) + \beta(T_t g)(\omega).$$

Нехай $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ – зліченна щільна у K множина. Позначимо через

$$\widetilde{\Omega} = \bigcap_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{Q}^2} \bigcap_{f,g\in\{f_n,\ n\in\mathbb{N}\}} \Omega_{f,g,\alpha,\beta}.$$

Оскільки для довільної $f \in K$ існує послідовність $\{n_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ така, що $f_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{L_2(\mathbb{R})} f$, то, у силу (3.2.8) та теореми 3.2.2,

$$\mathbb{P}\Big\{ \lim_{k\to\infty} \|T_t(f_{n_k} - f)\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0 \Big\} = 1.$$

Таким чином, на множині $\widetilde{\Omega}$ існує $\lim_{k\to\infty}(T_t f_{n_k})(\omega)$, що не залежить від вибору підпослідовності. Дійсно, нехай до функції f збігаються послідовності $\{f_{n_k},\ k \in \mathbb{N}\}$, $\{f_{m_k},\ k \in \mathbb{N}\}$. Тоді у силу (3.2.8) та теореми 3.2.2

$$\|(T_t f_{n_k})(\omega) - (T_t f_{m_k})(\omega)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq$$
$$\leq C_\omega \|f_{n_k} - f_{m_k}\|_{L_2(\mathbb{R})} \to 0,\ k \to \infty.$$

Отже,

$$\lim_{k\to\infty}(T_t f_{n_k})(\omega) = \lim_{k\to\infty}(T_t f_{m_k})(\omega).$$

Задамо на $\widetilde{\Omega}$ оператор $\widetilde{T}_t$ наступним чином

$$(\widetilde{T}_t f)(\omega) = \lim_{k\to\infty}(T_t f_{n_k})(\omega),$$

якщо $f \in K$. Тоді $\widetilde{T}_t$ – модифікація T_t на K. Щоб це довести розглянемо довільну функцію $f \in K$ та множину

$$\widetilde{\Omega}_f = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_{f,f_n,1,-1}$$

з $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}_f) = 1$. У силу (3.2.8) та теореми 3.2.2 існує Ω'_f, $\mathbb{P}(\Omega'_f) = 1$, така, що для кожного $\omega \in \Omega'_f$ виконується нерівність

$$\|T_t(f - f_n)\|_{L_2(\mathbb{R})}(\omega) \le C_\omega \|f - f_n\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

де константа $C_\omega > 0$ не залежить від $n \in \mathbb{N}$. Для збіжної послідовності $\{f_{n_k},\ k \in \mathbb{N}\}$, $f_{n_k} \xrightarrow[n\to\infty]{L_2(\mathbb{R})} f$, на множині $\Omega_f = \widetilde{\Omega}_f \cap \Omega'_f$ виконуються співвідношення

$$\|T_t f - T_f f_{n_k}\|_{L_2(\mathbb{R})}(\omega) =$$

$$= \|T_t(f - f_{n_k})\|_{L_2(\mathbb{R})}(\omega) \le C_\omega \|f - f_{n_k}\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Отже, для довільного $\omega \in \Omega_f$ має місце рівність

$$(T_t f)(\omega) = \lim_{k\to\infty} (T_t f_{n_k})(\omega),$$

з чого випливає, що $T_t f$ та $\widetilde{T}_t f$ на множині Ω_f, $\mathbb{P}(\Omega_f) = 1$, збігаються. Таким чином, для довільної функції $f \in K$

$$\mathbb{P}\Big\{\ T_t f = \widetilde{T}_t f\ \Big\} = 1.$$

Зауважимо, що для кожного $\omega \in \widetilde{\Omega}$ та довільних $n, m \in \mathbb{N}$ виконуються співвідношення

$$\|\widetilde{T}_t f_n - \widetilde{T}_t f_m\|_{L_2(\mathbb{R})}(\omega) =$$

$$= \|T_t f_n - T_t f_m\|_{L_2(\mathbb{R})}(\omega) \le C_\omega \|f_n - f_m\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Тоді для будь-яких $k \in \mathbb{N}$ та $f, g \in K$, $f_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{L_2(\mathbb{R})} f$, $f_{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{L_2(\mathbb{R})} g$, має місце нерівність

$$\|\widetilde{T}_t f - \widetilde{T}_t g\|_{L_2(\mathbb{R})}(\omega) \le \|\widetilde{T}_t f - \widetilde{T}_t f_{n_k}\|_{L_2(\mathbb{R})}(\omega) +$$

$$+ \|\widetilde{T}_t g - \widetilde{T}_t f_{m_k}\|_{L_2(\mathbb{R})}(\omega) +$$

$$+ C_\omega \left(\|f - f_{n_k}\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|g - f_{m_k}\|_{L_2(\mathbb{R})}\right) + C_\omega \|f - g\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Отже, на множині $\widetilde{\Omega}$ існує константа $C_\omega > 0$ така, що для всіх $f, g \in K$

$$\|\widetilde{T}_t f - \widetilde{T}_t g\|_{L_2(\mathbb{R})}(\omega) \le C_\omega \|f - g\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

що рівносильно неперервності відображення $\widetilde{T}_t(\omega): K \to L_2(\mathbb{R})$ при кожному $\omega \in \widetilde{\Omega}$. □

У попередній теоремі розглядались множини, що містять функції з вузького класу. Кожний елемент множини з теореми є не тільки неперервною функцією, але й задовольняє умові Гельдера з показником $1/2$. У наступному параграфі розгядається більш обширний клас функцій з $L_2(\mathbb{R})$, для яких вивчається збереження збіжності під дією випадкового оператора T_t.

3.3 Збереження збіжності під дією оператора зсуву за потоком Арратья

Оскільки оператор T_t не є обмеженим сильним випадковим оператором у $L_2(\mathbb{R})$, то не для кожної збіжної послідовності функцій $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ її образ $\{T_t f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ під дією T_t буде збіжною послідовністю.

Приклад 3.3.1. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ та $k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ розглянемо функцію

$$f_{n,k} = 1\!\!\mathrm{I}_{[\frac{k}{2^n}; \frac{k+1}{2^n}]}.$$

Занумеруємо послідовність

$$\{f_{n,k},\ n \in \mathbb{N},\ k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}\}$$

в одну $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, що збігається до 0 у $L_2(\mathbb{R})$. Якби T_t зберігав збіжність цієї послідовності, то

$$\mathbb{P}\Big\{\|T_t f_n\|_{L_2(\mathbb{R})} \to 0,\ \ n \to \infty\Big\} = 1. \tag{3.3.1}$$

Зауважимо, що виконуються наступні співвідношення

$$\mathbb{P}\Big\{ \text{ н. ч. } \ \|T_t f_n\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = 1\Big\} \geq$$

$$\geq \mathbb{P}\Big\{ \text{ н. ч. } \ \|T_t f_n\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = 1,$$

$$x(0,t) = x(1,t),\ x(0,t) \in [0;1]\} \geq$$

$$\geq \mathbb{P}\{ \text{ н. ч. } \ f_n(x(0,t)) = 1,$$

$$x(0,t) = x(1,t),\ x(0,t) \in [0;1]\} =$$

$$= \mathbb{P}\{x(0,t) = x(1,t),\ x(0,t) \in [0;1]\}.$$

Суперечність з (3.3.1) дає наступна лема.

Лема 3.3.1. *Для потоку Арратья* $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ *та множини* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *з додатньою мірою Лебега,* $\lambda(\Delta) > 0$, *має місце*

$$\mathbb{P}\Big\{x(0,t) = x(1,t),\ x(0,t) \in \Delta\Big\} > 0.$$

Доведення. Нехай w_1, w_2 – незалежні вінерівські процеси, що стартують з 0 та 1 відповідно

$$0 = w_1(0) < w_2(0) = 1.$$

Розглянемо їх перший момент зустрічі

$$\sigma = \inf\Big\{s \geq 0 \ \Big| \ w_1(s) = w_2(s)\Big\}$$

та задамо нові вінерівські процеси

$$z_1(s) = w_1(s),$$

$$z_2(s) = w_2(s)1\!\!1\{s < \sigma\} + w_1(s)1\!\!1\{s \geq \sigma\}.$$

Оскільки $(x(0,t), x(1,t)) \stackrel{d}{=} (z_1(t), z_2(t))$ [2], то

$$\mathbb{P}\Big\{x(0,t) = x(1,t),\ x(0,t) \in \Delta\Big\} = \mathbb{P}\Big\{\sigma \leq t,\ z_1(t) \in \Delta\Big\} =$$

$$= M\Big(1\!\!1\{\sigma \le t\} M(1\!\!1\{\ w_1(t) \in \Delta,\ w_2(t) \in \mathbb{R}\ \}/\mathcal{F}_\sigma)\Big).$$

Розглянемо потік σ - алгебр $\{\mathcal{F}_t,\ t \ge 0\}$, де

$$\mathcal{F}_t = \sigma(w_1(s), w_2(s), s \le t).$$

Зі строго марківської властивості для двовимірного вінерівського процесу $(w_1(t), w_2(t))$ та того, що σ – марківський момент відносно $\{\mathcal{F}_t,\ t \ge 0\}$, випливає рівність

$$M\Big(1\!\!1\{\sigma \le t\} M(1\!\!1\{\ w_1(t) \in \Delta,\ w_2(t) \in \mathbb{R}\ \}/\mathcal{F}_\sigma)\Big) = MF(\sigma, w_1(\sigma)),$$

де функція F задається наступним чином

$$F(y_1, y_2) = 1\!\!1\{y_1 \le t\} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t - y_1)}} \int_\Delta e^{-\frac{(u-y_2)^2}{2(t-y_1)}} du.$$

Щільність спільного розподілу для $(\sigma, w_1(\sigma))$ має вигляд

$$f_{(\sigma, w_1(\sigma))}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi y_1^2} e^{-\frac{2y_2^2+1}{4y_1}}.$$

Отже,

$$\mathbb{P}\Big\{x(0,t) = x(1,t),\ x(0,t) \in \Delta\Big\} =$$

$$= \int_\mathbb{R} \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{2}\pi y_1^2} e^{-\frac{2y_2^2+1}{4y_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(t - y_1)}} \int_\Delta e^{-\frac{(v-y_2)^2}{2(t-y_1)}} dv dy_1 dy_2 > 0.$$

$\square$

Таким чином, для послідовності функцій з прикладу 3.3.1

$$\mathbb{P}\Big\{\text{ н. ч. } \|T_t f_n\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = 1\Big\} > 0,$$

що суперечить (3.3.1).

Виявляється, що необхідною умовою збереження збіжності під дією оператора T_t є збіжність майже всюди за мірою Лебега λ на $\mathbb{R}$.

Теорема 3.3.1. *Нехай послідовність* $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset L_2(\mathbb{R})$ *така, що* $f_n \to 0$ *у* $L_2(\mathbb{R})$ *при* $n \to \infty$. *Якщо*

$$\mathbb{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \|T_t f_n\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0\right\} = 1, \tag{3.3.2}$$

то $f_n \to 0$ *майже всюди за мірою Лебега* λ *на* $\mathbb{R}$ *при* $n \to \infty$.

Доведення. Зауважимо, що $f_n \to 0$ м.в. за λ на $\mathbb{R}$ при $n \to \infty$ тоді і лише тоді, коли для будь-якого $C > 0$

$$\lambda\left\{u \in \mathbb{R} \;\middle|\; \overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(u)| \geq C\right\} = 0.$$

Припустимо, що для деякого $C > 0$ множина

$$\Delta_C = \left\{v \in \mathbb{R} \;\middle|\; \overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(v)| > C\right\}$$

має додатню міру Лебега, $\lambda(\Delta_C) > 0$. Тоді, за лемою 3.3.1, для довільного $t > 0$

$$\mathbb{P}\left\{ \text{ н. ч. } \|T_t f_n\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \geq C^2\right\} \geq$$
$$\geq \mathbb{P}\{ \text{ н. ч. } f_n^2(x(0,t)) \geq C^2,$$
$$x(0,t) = x(1,t),\ x(0,t) \in \Delta_C\} =$$
$$= \mathbb{P}\left\{x(0,t) = x(1,t),\ x(0,t) \in \Delta_C\right\} > 0,$$

що суперечить (3.3.2). □

Необхідна умова збереження збіжності з теореми 3.3.1 не є достатньою. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 3.3.2. Нехай $f_n = \frac{1}{c_n} 1\!\!\mathrm{I}_{(a_n;a_{n+1}]}$, де $c_0 = 1,\ a_0 = 0$ та для будь-якого $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = (\ln n)^{\frac{1}{4}}, \quad a_n = a_{n-1} + 1 + 2n(t \ln 2)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3.3}$$

Очевидно, що $f_n \to 0,\ n \to \infty$, майже всюди. Для заданої послідовності функцій має місце наступне твердження.

Лема 3.3.2. *Для фіксованого* $t > 0$ *та довільного* $\delta \in (0; 2\sqrt{t})$

$$\mathbb{P}\Big\{ \text{ н. ч. } \|T_t f_n\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \geq \delta \Big\} = 1.$$

Доведення. Розглянемо $\{w_j,\ j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ – незалежні вінерівські процеси на $[0; t]$ такі, що для довільного $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$w_{2n}(0) = a_n \text{ та } w_{2n+1}(0) = a_n + 1.$$

За сім'єю $\{w_j,\ j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ та послідовністю $\{u_j,\ j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, де $u_{2n} = a_n$ та $u_{2n+1} = a_n + 1$ для кожного $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, побудуємо нові випадкові процеси $\{\widetilde{y}(u_k, \cdot),\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ наступним чином.

Для будь-яких функцій $g_1, g_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ позначимо

$$\tau[g_1, g_2] = \inf \Big\{ s \geq 0 \ \Big|\ g_1(s) = g_2(s) \Big\}.$$

Для кожного $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ задамо процеси

$$\widetilde{y}(a_n, s) = w_{2n}(s) 1\!\!\mathrm{I}\{\ s < \tau[w_{2n}, \widetilde{y}(a_{n-1}+1, \cdot)]\ \} +$$

$$+ \widetilde{y}(a_{n-1}+1, s) 1\!\!\mathrm{I}\{\ s \geq \tau[w_{2n}, \widetilde{y}(a_{n-1}+1, \cdot)]\ \},$$

$$\widetilde{y}(a_n + 1, s) = w_{2n+1}(s) 1\!\!\mathrm{I}\{\ s < \tau[w_{2n+1}, \widetilde{y}(a_n, \cdot)]\ \} +$$

$$+ \widetilde{y}(a_n + 1, s) 1\!\!\mathrm{I}\{\ s \geq \tau[w_{2n+1}, \widetilde{y}(a_n, \cdot)]\ \},$$

де $\widetilde{y}(0, s) = w_0(s)$.

В [31] показано, що для потоку Арратья $\{y(u, t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geq 0\}$ $\{y(u_k, \cdot),\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ та $\{\widetilde{y}(u_k, \cdot),\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ мають однакові розподіли у просторі $\mathcal{C}([0; t])^\infty$. Отже, для довільного $\delta > 0$

$$\mathbb{P}\left\{ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{(y(a_n+1, t) - y(a_n, t))}{c_n^2} \geq \delta \right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{(\widetilde{y}(a_n+1, t) - \widetilde{y}(a_n, t))}{c_n^2} \geq \delta \right\}. \tag{3.3.4}$$

Таким чином,

$$\mathbb{P}\left\{\text{ н. ч. } \quad \|T_t f_n\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \geq \delta\right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{\text{ н. ч. } \quad \frac{1}{c_n^2}\int_{\mathbb{R}} 1\!\!\mathrm{I}_{(a_n;a_n+1]}(x(u,t))du \geq \delta\right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{\text{ н. ч. } \quad \frac{(y(a_n+1,t) - y(a_n,t))}{c_n^2} \geq \delta\right\},$$

де $\{y(u,r),\ u \in \mathbb{R},\ r \in [0;t]\}$ – спряжений потік для потоку Арратья $\{x(u,r),\ u \in \mathbb{R},\ r \in [0;t]\}$.

Таким чином, згідно з (3.3.4), достатньо перевірити, що

$$\mathbb{P}\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{(\widetilde{y}(a_n+1,t) - \widetilde{y}(a_n,t))}{c_n^2} \geq \delta\right\} = 1.$$

Доведення останньої рівності базується на наступній лемі.

Лема 3.3.3. *Нехай* $\{w_j,\ j \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$ – *сім'я незалежних вінерівських процесів на* $[0;t]$ *таких, що* $w_{2n}(0) = a_n$ *та* $w_{2n+1}(0) = a_n+1$ *для довільного* $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. *Тоді для будь-якого* $n \in \mathbb{N}$ *виконується наступна нерівність*

$$\mathbb{P}\left\{\max_{s\in[0;t]} \max_{j=\overline{0,2n-1}} w_j(s) \geq \min_{s\in[0;t]} w_{2n}(s)\right\} < \frac{1}{2^n t\sqrt{\pi \ln 2}}. \tag{3.3.5}$$

Доведення. Нехай $\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2$ – незалежні вінерівські процеси на $[0;t]$ такі, що $\widetilde{w}_1(0) = \widetilde{w}_2(0) = 0$. Зауважимо, що

$$\mathbb{P}\left\{\max_{s\in[0;t]} \max_{j=\overline{0,2n-1}} w_j(s) \geq \min_{s\in[0;t]} w_{2n}(s)\right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{\ \exists\, j = \overline{0, 2n-1} \ \Big|\ \max_{s\in[0;t]} w_j(s) - \min_{s\in[0;t]} w_{2n}(s) \geq 0\right\} \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n-1}\left(\mathbb{P}\left\{\max_{s\in[0;t]} \widetilde{w}_1(s) - \min_{s\in[0;t]} \widetilde{w}_2(s) \geq a_n - a_j\right\} + \right.$$

$$+\mathbb{P}\left\{\max_{s\in[0;t]}\widetilde{w}_1(s)-\min_{s\in[0;t]}\widetilde{w}_2(s)\geq a_n-a_j-1\right\}\Bigg).$$

Оскільки $\{a_n,\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ – зростаюча послідовінсть, то для довільного $n\in\mathbb{N}$ виконуються наступні співвідношення

$$\sum_{j=0}^{n-1}\Bigg(\mathbb{P}\left\{\max_{s\in[0;t]}\widetilde{w}_1(s)-\min_{s\in[0;t]}\widetilde{w}_2(s)\geq a_n-a_j\right\}+$$

$$+\,\mathbb{P}\left\{\max_{s\in[0;t]}\widetilde{w}_1(s)-\min_{s\in[0;t]}\widetilde{w}_2(s)\geq a_n-a_j-1\right\}\Bigg)\leq$$

$$\leq\frac{2}{\sqrt{\pi t}}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{a_n-a_j-1}e^{-\frac{(a_n-a_j-1)^2}{4t}}\leq$$

$$\leq\frac{2(n-1)}{\sqrt{\pi t}}\cdot\frac{1}{a_n-a_{n-1}-1}e^{-\frac{(a_n-a_{n-1}-1)^2}{4t}}\leq\frac{1}{2^n t\sqrt{\pi\ln 2}}\ ,$$

де остання нерівність випливає з вибору послідовності $\{a_n,\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$. $\square$

Наслідок 3.3.1. Для сім'ї $\{w_j,\ j\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ незалежних вінерівських процесів, що задовольняють умови леми 3.3.3, має місце

$$\mathbb{P}\left\{\text{ н. ч. }\quad\max_{s\in[0;t]}\max_{j=\overline{0,2n-1}}w_j(s)\geq\min_{s\in[0;t]}w_{2n}(s)\right\}=0.$$

Згідно побудові процесів $\{\widetilde{y}(u_k,\cdot),\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ та наслідку 3.3.1

$$\mathbb{P}\{\ \exists N\in\mathbb{N}\ \ \forall n\geq N:\quad\widetilde{y}(a_n,t)=w_{2n}(t),$$

$$\widetilde{y}(a_n+1,t)=w_{2n+1}(t)1\!\!\mathrm{I}\{t<\tau[w_{2n},w_{2n+1}]\}+$$

$$+\,w_{2n}(t)1\!\!\mathrm{I}\{t\geq\tau[w_{2n},w_{2n+1}]\}\ \}=1.$$

Таким чином,

$$\mathbb{P}\{\ \exists N\in\mathbb{N}\ \ \forall n\geq N:\quad\widetilde{y}(a_n+1,t)-\widetilde{y}(a_n,t)=$$

$$w_{2n+1}(t)-w_{2n}(t)\ \}=1.\qquad(3.3.6)$$

Оскільки

$$\mathbb{P}\Big\{\ w_{2n+1}(t) - w_{2n}(t) \ge c_n^2\delta\ \Big\} \ge \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{1}{4t}(c_n^2\delta+1)^2},$$

то у силу вибору послідовності $\{c_n,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, для довільного $\delta \in (0; 2\sqrt{t})$, деякого $N_0 \in \mathbb{N}$ та всіх $n \ge N_0$

$$\mathbb{P}\Big\{\ w_{2n+1}(t) - w_{2n}(t) \ge c_n^2\delta\ \Big\} \ge \frac{1}{n}.$$

Отже, за лемою Бореля - Кантеллі,

$$\mathbb{P}\Big\{\ \text{н. ч.}\quad w_{2n+1}(t) - w_{2n}(t) \ge c_n^2\delta\ \Big\} = 1,$$

що, у силу (3.3.6), еквівалентно наступному

$$\mathbb{P}\Big\{\ \text{н. ч.}\quad \widetilde{y}(a_n+1, t) - \widetilde{y}(a_n, t) \ge c_n^2\delta\ \Big\} = 1.$$

$\square$

Приклад 3.3.2 ілюструє, що з умов збіжності $f_n \to 0$ майже всюди та в $L_2(\mathbb{R})$ при $n \to \infty$ послідовності $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset L_2(\mathbb{R})$, взагалі кажучи, не випливає збіжність до нуля послідовності $\{T_t f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Більш того, цього не достатньо, щоб образ $\{T_t f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ був обмеженим з ймовірністю 1.

Приклад 3.3.3. Розглянемо послідовність чисел $\{u_k,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ таку, що $u_0 = 0, u_1 = 1$ та для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{1}{2^n}, \qquad u_{2n} - u_{2n-1} = 2n(\ln 2)^{\frac{1}{2}}.$$

Задамо функції

$$f_n = 1\!\!\mathrm{I}_{[u_{2n}; u_{2n+1}]}.$$

Зараз послідовінсть $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ така, що $f_n \to 0$ майже всюди та в $L_2(\mathbb{R})$ при $n \to \infty$. Покажемо, що для заданої послідовності функцій виконується наступна властивість

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_t 1\!\!\mathrm{I}_{[u_{2n}; u_{2n+1}]}\|_{L_2(\mathbb{R})} = +\infty\right\} = 1. \qquad (3.3.7)$$

За формулою інтегрування частинами для потоку Арратья

$$\|T_t 1\!\!\mathrm{I}_{[u_{2n},u_{2n+1}]}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} 1\!\!\mathrm{I}_{[u_{2n},u_{2n+1}]}(v)dy(v,t),$$

де, як і раніше, $\{y(v,s),\ v\in\mathbb{R}, s\in[0;t]\}$ – спряжений потік Арратья для потоку Арратья $\{x(v,s),\ v\in\mathbb{R}, s\in[0;t]\}$. Таким чином, для доведення (3.3.7) достатньо перевірити, що для кожного $C>0$

$$\mathbb{P}\left\{\limsup_{n\to\infty}\left(y(u_{2n+1},t)-y(u_{2n},t)\right)\geq C\right\}=1. \tag{3.3.8}$$

Для цього, аналогічно доведенню леми 3.3.2, задамо новий процес $\{\widetilde{y}(u_n,\cdot),\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$, що побудований за сім'єю $\{w(u_n,\cdot),\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ незалежних вінерівських процесів на $[0;t]$, для яких

$$w(u_n,0)=u_n.$$

Для кожного $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ та $s\geq 0$

$$\widetilde{y}(u_n,s)=w(u_n,s)1\!\!\mathrm{I}\{\ s<\tau[w(u_n,\cdot),\widetilde{y}(u_{n-1},\cdot)]\ \}+$$
$$+\widetilde{y}(u_{n-1},s)1\!\!\mathrm{I}\{\ s\geq\tau[w(u_n,\cdot),\widetilde{y}(u_{n-1},\cdot)]\ \}\ ,$$

де $\widetilde{y}(u_0,\cdot)=w(u_0,\cdot)$. Для довільного $C>0$

$$\mathbb{P}\left\{\limsup_{n\to\infty}\ \left(y(u_{2n+1},t)-y(u_{2n},t)\right)\geq C\right\}=$$
$$=\mathbb{P}\left\{\limsup_{n\to\infty}\ \left(\widetilde{y}(u_{2n+1},t)-\widetilde{y}(u_{2n},t)\right)\geq C\right\}. \tag{3.3.9}$$

Доведення того, що остання ймовірність дорівнює 1, базується на наступному твердженні, що є модифікацією леми 3.3.3.

Лема 3.3.4. *Нехай* $\{w(u_n,\cdot),\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ *– сім'я незалежних вінерівських процесів на* $[0;t]$ *таких, що* $w(u_n,0)=u_n$. *Тоді, для будь-якого* $n\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\left\{\ \max_{s\in[0;t]}\max_{j=\overline{0,2n-1}}w(u_j,s)\geq\min_{s\in[0;t]}w(u_{2n},s)\ \right\}<\frac{1}{2^{n^2}\sqrt{\pi t\ln 2}}.$$

Доведення. Нехай w_1, w_2 – незалежні вінерівські процеси на $[0;t]$, що стартують з точки 0, а саме $w_1(0) = w_2(0) = 0$. Помітимо, що

$$\mathbb{P}\left\{ \max_{s\in[0;t]} \max_{j=\overline{0,2n-1}} w(u_j, s) \geq \min_{s\in[0;t]} w(u_{2n}, s) \right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{ \exists\, j = \overline{0, 2n-1} \;\middle|\; \max_{s\in[0;t]} w(u_j, s) - \min_{s\in[0;t]} w(u_{2n}, s) \geq 0 \right\} \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{2n-1} \mathbb{P}\left\{ \max_{s\in[0;t]} w(u_j, s) - \min_{s\in[0;t]} w(u_{2n}, s) \geq 0 \right\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{2n-1} \mathbb{P}\left\{ \max_{s\in[0;t]} w_1(s) - \min_{s\in[0;t]} w_2(s) \geq u_{2n} - u_j \right\}.$$

Оскільки w_1, w_2 – незалежні вінеріські процеси та $\{u_n,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ – зростаюча послідовність, то виконуються наступні нерівності

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \mathbb{P}\left\{ \max_{s\in[0;t]} w_1(s) - \min_{s\in[0;t]} w_2(s) \geq u_{2n} - u_j \right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{j=0}^{2n-1} \frac{1}{u_{2n} - u_j} e^{-\frac{(u_{2n}-u_j)^2}{4t}} \leq$$

$$\leq \frac{2n-1}{\sqrt{\pi t}(u_{2n} - u_{2n-1})} e^{-\frac{(u_{2n}-u_{2n-1})^2}{4t}}.$$

Зараз $u_{2n} - u_{2n-1} = 2n\sqrt{\ln 2}$. Тому для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{2n-1}{\sqrt{\pi t}(u_{2n} - u_{2n-1})} e^{-\frac{(u_{2n}-u_{2n-1})^2}{4t}} \leq \frac{1}{2^{n^2}\sqrt{\pi t \ln 2}},$$

що завершує доведення. □

Наслідок 3.3.2. Для сім'ї $\{w(u_n, \cdot),\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ незалежних вінерівських процесів, що задовольняють умови леми 3.3.4, має місце

$$\mathbb{P}\left\{ \text{н. ч.} \quad \max_{s\in[0;t]} \max_{j=\overline{0,2n-1}} w(u_j, s) \geq \min_{s\in[0;t]} w(u_{2n}, s) \right\} = 0.$$

Згідно побудові процесів $\{\widetilde{y}(u_k,\cdot),\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ та наслідку 3.3.2

$$\begin{gathered}\mathbb{P}\{\ \exists\, N\in\mathbb{N}:\ \forall\, n\ge N\quad \widetilde{y}(u_{2n},t)=w(u_{2n},t),\\ \widetilde{y}(u_{2n+1},t)=w(u_{2n+1},t)1\!\!\mathrm{I}\{\ t<\tau[w(u_{2n},\cdot),w(u_{2n+1},\cdot)]\}+\\ +w(u_{2n},t)1\!\!\mathrm{I}\{\ t\ge\tau[w(u_{2n},\cdot),w(u_{2n+1},\cdot)]\}\ \}=1.\end{gathered}\tag{3.3.10}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\ \exists\, N\in\mathbb{N}\ \ \forall\, n\ge N\qquad &\widetilde{y}(u_{2n+1},t)-\widetilde{y}(u_{2n},t)=\\ &=w(u_{2n+1},t)-w(u_{2n},t)\}=1.\end{aligned}\tag{3.3.11}$$

Для заданої послідовності $\{u_n,\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ та будь-яких $C>0$, $n\in\mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\mathbb{P}\Big\{\ w(u_{2n+1},t)-w(u_{2n},t)\ge C\ \Big\}=$$

$$=\int_C^\infty\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{\left(v-\frac{1}{2^k}\right)^2}{4t}}dv\ge\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_C^\infty e^{-\frac{v^2}{4t}}dv.$$

Отже, за лемою Бореля-Кантеллі, для будь-якого $C>0$

$$\mathbb{P}\Big\{\ \limsup_{n\to\infty}(w(u_{2n+1},t)-w(u_{2n},t))\ge C\ \Big\}=1,$$

що, згідно з (3.3.11) та (3.3.9), доводить (3.3.8). Таким чином, послідовність $\{T_tf_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ з ймовірністю 1 не є обмеженою.

Незважаючи на те, що збіжність майже всюди не гарантує збереження під дією T_t ані збіжності, ані обмеженості, при додатковій умові на носії функцій $\{f_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ цього достатньо, щоб

$$\mathbb{P}\left\{\lim_{n\to\infty}\|T_tf_n\|_{L_2(\mathbb{R})}=0\right\}=1.$$

Теорема 3.3.2. *Нехай послідовність функцій* $\{f_n,\ n\in\mathbb{N}\}\subset L_2(\mathbb{R})$ *задовольняє умови*

1) $f_n\to 0$ *у* $L_2(\mathbb{R})$ *при* $n\to\infty$*;*

2) $f_n \to 0,\ n \to \infty,$ *майже всюди за* λ *на* $\mathbb{R}$;

3) існує $C > 0,$ *що для довільного* $n \in \mathbb{N}$

$$suppf_n \subset [-C; C].$$

Тоді, для будь-якого $t > 0$

$$\mathbb{P}\Big\{ \lim_{n\to\infty} \|T_t f_n\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0 \Big\} = 1.$$

Доведення. Використаємо наступне допоміжне твердження.

Лема 3.3.5. *Нехай виконуються умови 1)-3) теореми 3.3.2. Тоді для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує відкрита множина* $\Delta^\varepsilon \subseteq [-C; C]$ *така, що*

а) $\lambda(\Delta^\varepsilon) < \varepsilon$;

б) $\sup_{u\in[-C;C]\setminus\Delta^\varepsilon} |f_n(u)| \to 0,\ n \to \infty$;

в) для довільного $t > 0$

$$\mathbb{P}\Big\{\ x(\mathbb{R}, t) \cap \Delta^\varepsilon \neq \emptyset\ \Big\} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi t}}\ .$$

Доведення. З умов 2), 3) за теоремою Єгорова випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує вимірна множина $G^\varepsilon \subseteq [-C; C]$ така, що $\lambda(G^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$ та

$$\sup_{u\in[-C;C]\setminus G^\varepsilon} |f_n(u)| \to 0,\ n \to \infty.$$

Оскільки $G^\varepsilon \subseteq [-C; C]$ вимірна, то можна знайти відкриту множину

$$\Delta^\varepsilon = \bigcup_k (a_k^\varepsilon; b_k^\varepsilon),$$

де об'єднання не більш ніж зліченне, для якої $\lambda(\Delta^\varepsilon) < \varepsilon$ та $G^\varepsilon \subseteq \Delta^\varepsilon$. Таким чином, за (3.1.2), виконуються співвідношення

$$\mathbb{P}\Big\{\ x(\mathbb{R}, t) \cap \Delta^\varepsilon \neq \emptyset\ \Big\} \le \sum_k \mathbb{P}\Big\{\ x(\mathbb{R}, t) \cap (a_k^\varepsilon; b_k^\varepsilon) \neq \emptyset\ \Big\} =$$

$$= \sum_k \mathbb{P}\Big\{\ y(b_k^\varepsilon; t) \neq y(a_k^\varepsilon; t)\ \Big\} \le \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sum_k \int_0^{\frac{b_k^\varepsilon - a_k^\varepsilon}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{u^2}{2t}} du \le$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_k (b_k^\varepsilon - a_k^\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi t}} \ ,$$

що доводить лему. $\square$

Зафіксуємо довільне $t > 0$. За умовою б) для кожного $\varepsilon > 0$ на множині

$$\Omega^\varepsilon = \left\{ \omega \in \Omega \ \middle| \ x(\mathbb{R}, t, \omega) \cap \Delta^\varepsilon = \emptyset \right\}$$

має місце збіжність $\|(T_t f_n)(\omega)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to 0, \ n \to \infty$. Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left\{ \lim_{n\to\infty} \|T_t f_n\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0 \right\} \geq \mathbb{P}(\Omega^\varepsilon) > 1 - \varepsilon \ ,$$

з чого, в силу довільного вибору $\varepsilon > 0$, випливає

$$\mathbb{P}\left\{ \lim_{n\to\infty} \|T_t f_n\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0 \right\} = 1. \tag{3.3.12}$$

$\square$

Використовуючи теорему 3.3.2, наведемо приклад класу компактів K у просторі $L_2(\mathbb{R})$, для яких з умов $f_n \xrightarrow{L_2(\mathbb{R})} f, \ n \to \infty$ та $\{f_n, \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq K$, випливає, що

$$\mathbb{P}\left\{ \lim_{n\to\infty} \|T_t (f_n - f)\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0 \right\} = 1.$$

Приклад 3.3.4. Нехай K – компакт у $\mathcal{C}([0;1])$. Тоді, на його вкладенні у простір $L_2([0;1])$, за теоремою 3.3.2, достатньо перевірити, що зі збіжності у $L_2(\mathbb{R})$ послідовності $\{f_n, \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq K$ до функції $f \in K$ випливає збіжність майже всюду за мірою Лебега на $[0;1]$.

У силу теореми Арцела-Асколі, для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, що для всіх $u, v \in [0;1]$ з $|u - v| < \delta$ виконується нерівність

$$\sup_{f \in K} |f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.3.13}$$

Для послідовності $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq K$ такої, що $f_n \xrightarrow{L_2(\mathbb{R})} f,\ n \to \infty,$ існує номер $n(\delta)$, що для всіх $n \geq n(\delta)$

$$\lambda \left\{ u \in [0;1] \;\Big|\; |f_n(u) - f(u)| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} < \delta \,.$$

Нехай $\left\{ a_k,\ k = \overline{0, \left[\frac{1}{\delta}\right] + 1} \right\}$ – наступне розбиття відрізку $[0;1]$

$$a_{\left[\frac{1}{\delta}\right]+1} = 1 \quad \text{та} \quad a_k = k\delta, \quad k = \overline{0, \left[\frac{1}{\delta}\right]} \,.$$

З (3.3.13) випливає, що для будь-якого $n \geq n(\delta)$ та довільного $k = \overline{0, \left[\frac{1}{\delta} - 1\right]}$ існує $u_k^n \in [a_k; a_{k+1})$ таке, що

$$\Big| f_n(u_k^n) - f(u_k^n) \Big| < \frac{\varepsilon}{3},$$

та для кожної точки $v \in [a_{\left[\frac{1}{\delta}\right]}; 1]$ існує $u^n_{\left[\frac{1}{\delta}\right]} \in [1-\delta; 1]$, що

$$\Big| f(u^n_{\left[\frac{1}{\delta}\right]}) - f(v) \Big| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{та} \quad \Big| f_n(u^n_{\left[\frac{1}{\delta}\right]}) - f_n(v) \Big| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отже, послідовність $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ рівномірно збігається на $[0;1]$ до f, з чого випливає збіжність майже всюду на $[0;1]$.

Висновки до розділу 3

1. Доведено необмеженість випадкового оператора, що описує зсуви функцій уздовж потоку Арратья.

2. Доведена формула інтегрування частинами для потоку Арратья.

3. Наведені необхідні та достатні умови на збіжну послідовність функцій з $L_2(\mathbb{R})$, за яких зсуви функцій уздовж потоку Арратья зберігають збіжність даної послідовності.

4. Встановлено достатню умову на компактну множину у просторі $L_2(\mathbb{R})$, за якої під дією оператора зсуву за потоком Арратья образ даного компакту існує та є випадковою компактною множиною.

Розділ 4

Зміна геометричних характеристик компактних множин під дією випадкових операторів

У даному розділі вивчаються зміни компактних множин під дією деяких сильних випадкових операторів. Однією з геометричних характеристик підмножини лінійного нормованого простору є її поперечник за Колмогоровим.

Означення 4.0.1 ([3]). n - поперечником за Колмогоровим множини $C \subseteq X$ у лінійному нормованому просторі X називається величина

$$d_n(C, X) = \inf_{\dim L \leq n} \sup_{f \in C} \inf_{g \in L} \|f - g\|_X,$$

де L – підпростір X.

n - поперечник множини є похибкою її апроксимації n - вимірними підпросторами. Для оцінки знизу даної геометричної характеристики найчастіше використовується метод, який базується на наступній теоремі про поперечник кулі.

Теорема 4.0.1 ([52]). *Нехай* L_{n+1} – $(n+1)$ - *вимірний підпростір лінійного нормованого простору* X. *Тоді для множини*

$$U_{n+1}(\gamma) = \left\{ u \in L_{n+1} \;\middle|\; \|u\|_X \leq \gamma \right\}$$

має місце рівність

$$d_n(U_{n+1}(\gamma), X) = \gamma.$$

У випадку гільбертового простору метод оцінки поперечників компактних множин був запропонований Ісмагіловим [48] і полягає він у наступному.

Нехай K_1 – компакт у гільбертовому просторі H, $\varphi : K_1 \to H$ – неперервне відображення та $K = \varphi(K_1)$. Нехай σ – невід'ємна міра на K_1 така, що $\int_{K_1} d\sigma = 1$ та $supp\sigma = K_1$. Розглянемо лінійний оператор A у просторі $L_2(K_1, d\sigma)$

$$Af(u) = \int_{K_1} (\varphi(u), \varphi(v))_H\, f(v) d\sigma_v, \tag{4.0.1}$$

де $(\varphi(u), \varphi(v))_H$ – скалярний добуток векторів $\varphi(u)$ та $\varphi(v)$.

Оскільки K – компактна множина у просторі H, то існує константа $C > 0$, що

$$\sup_{u \in K} \|u\|_H \le C.$$

З означення відображення φ випливає, що $\varphi(u) \in K$ для довільного $u \in K_1$. Отже, виконуються нерівності

$$\int_{K_1} \int_{K_1} (\varphi(u), \varphi(v))_H^2 d\sigma_u d\sigma_v \le$$

$$\le \int_{K_1} \int_{K_1} \|\varphi(u)\|_H^2 \cdot \|\varphi(v)\|_H^2 d\sigma_u d\sigma_v \le C^4 \left(\int_{K_1} d\sigma \right)^2 = C^4.$$

Оскільки A – інтегральний оператор у $L_2(K_1, d\sigma)$ з ядром $(\varphi(u), \varphi(v))_H$, для якого

$$\int_{K_1} \int_{K_1} (\varphi(u), \varphi(v))_H^2 d\sigma_u d\sigma_v < +\infty,$$

то A є оператором Гільберта-Шмідта. Більш того, згідно з симетричністю ядра $(\varphi(u), \varphi(v))_H$, він є самоспряженим. Таким чином, A

має чисто точковий спектр з невід'ємних власних значень. Нехай $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$ – додатні власні значення оператора A, а $f_1(u), f_2(u), \ldots$ – відповідні власні функції та

$$\int_{K_1} f_i(u) f_j(u) d\sigma_u = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots).$$

Тоді для поперечників компакту K у гільбертовому просторі H має місце наступна теорема Ісмагілова.

Теорема 4.0.2 ([48]). *Для n - го поперечника $d_n(K, H)$ виконуються нерівності*

$$\sqrt{\sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j} \leq d_n(K, H) \leq \max_{u \in K_1} \sqrt{\sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j \left| f_j(u) \right|^2}.$$

Перші роботи, в яких з'явилися поперечники за Колмогоровим, були присвячені задачам наближення просторів гладких функцій у просторі функцій меншої гладкості ([38, 48, 52]). У даному розділі досліджуються поперечники у просторі $L_2(\mathbb{R})$ кулі певного простора Соболева, а саме множини

$$K = \left\{ f \in W_2^1(\mathbb{R}) \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}} f^2(u)(1 + |u|)^3 du + \right.$$
$$\left. + \int_{\mathbb{R}} \left(f'(u)\right)^2 (1 + |u|)^7 du \leq 1 \right\}, \tag{4.0.2}$$

а також зміна поперечників під дією деяких сильних випадкових операторів.

4.1 Поперечники деяких компактів

У першому розділі була доведена достатня умова на компактну множину у сепарабельному гільбертовому просторі, за якої під дією гаусівського сильного випадкового оператора образ існує. Наведемо приклад компакту, для якого ця умова виконується, та оцінимо його поперечники за Колмогоровим.

Лема 4.1.1. *Нехай* H *– сепарабельний гільбертів простір з ортонормованим базисом* $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. *Для поперечників за Колмогоровим компактної множини*

$$K = \left\{ f \in H \;\middle|\; (f, e_n)^2 \le \frac{1}{n^2} \quad \text{для всіх } n \in \mathbb{N} \right\} \tag{4.1.1}$$

має місце рівність $d_n(K, H) = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$.

Доведення. Для оцінки зверху величини $d_n(K, H)$ розглянемо підпростір L розмірності n, що є лінійною оболонкою елементів $\{e_k,\ k = \overline{1, n}\}$. Тоді для будь-яких $g \in L$ та $f \in K$

$$\|f - g\|_H^2 = \sum_{k=1}^{n} (f - g, e_k)^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} (f, e_k)^2.$$

Отже,

$$\inf_{g \in L} \|f - g\|_H = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} (f, e_k)^2}$$

досягається на наступному елементі підпростору L

$$g = \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k.$$

З визначення (4.1.1) компактної множини K маємо

$$\sup_{f \in K} \inf_{g \in L} \|f - g\|_H = \sup_{f \in K} \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} (f, e_k)^2} = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}.$$

Таким чином,

$$d_n(K, H) = \inf_{\dim L \le n} \sup_{f \in K} \inf_{g \in L} \|f - g\|_H \le \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}.$$

Для оцінки знизу поперечника компакту (4.1.1) покладемо у теоремі 4.0.2

$$K_1 = K = \left\{ f \in H \;\middle|\; (f, e_n)^2 \le \frac{1}{n^2} \text{ для всіх } n \in \mathbb{N} \right\}$$

та $\varphi(x) = x$, що використовується у (4.0.1)

Нехай σ – розподіл $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$, де $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – незалежні випадкові величини такі, що ξ_n приймає значення $-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}$ з ймовірностями $\frac{1}{2}$. Тоді інтегральний оператор A у просторі $L_2(K, d\sigma)$

$$Af(x) = \int_K (x, y) f(y) d\sigma_y =$$

$$= \int_K \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)(y, e_n) f(y) d\sigma_y$$

має власні значення $\left\{\frac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ з відповідними власними функціями $\{(x, e_n),\ n \in \mathbb{N}\}$. Отже, згідно з теоремою 4.0.2,

$$d_n(K, H) \ge \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}},$$

що доводить лему. □

Зауваження 4.1.1. Для характеризації компактності оператора іноді використовують n - числа Колмогорова оператора, що, насправді, є n - поперечником за Колмогоровим образу одиничної кулі під дією даного оператора. При цьому відомо, що для діагонального оператора A у сепарабельному гільбертовому просторі з ортонормованим базисом $\{e_k,\ k \in \mathbb{N}\}$

$$Ax = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k (x, e_k) e_k$$

де $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \ldots$, його n - число Колмогорова є α_n. Цей факт можна було використати у попередній лемі при доведенні нижньої оцінки поперечника $d_n(K, H)$, оцінивши дану величину знизу n - числом

Колмогорова для оператора A з $\alpha_k = \frac{1}{k}$. Однак, такий підхід дає оцінку
$$d_n(K, H) \geq \frac{1}{n},$$
що є менш точною, ніж була доведена вище.

Розглянемо компактну множину $\widetilde{K}$ у $L_2(\mathbb{R})$, образ якої існує під дією сильного випадкового оператора T_t, що породжений потоком Арратья,
$$\widetilde{K} = \left\{ f \in W_2^1(\mathbb{R}) \;\Big|\; \int_{\mathbb{R}} f^2(u)(1+|u|)^3 du + \right.$$
$$\left. + \int_{\mathbb{R}} \left(f'(u)\right)^2 (1+|u|)^7 du \leq 1 \right\} \tag{4.1.2}$$
та оцінимо її поперечники за Колмогоровим у просторі $L_2(\mathbb{R})$.

Лема 4.1.2. *Існують додатні константи* C_1, C_2 *такі, що для будь-якого* $n \in \mathbb{N}$
$$\frac{C_1}{n} \leq d_n\left(\widetilde{K}, L_2(\mathbb{R})\right) \leq \frac{C_2}{n^{\frac{3}{10}}}.$$

Доведення. Зафіксуємо довільне $n \in \mathbb{N}$. Щоб оцінити зверху величину $d_n\left(\widetilde{K}, L_2(\mathbb{R})\right)$ розглянемо розбиття $\{u_k,\ k = \overline{0,n}\}$ відрізку $\left[-n^{\frac{1}{5}}; n^{\frac{1}{5}}\right]$ на n сегментів $\left\{[u_k; u_{k+1}],\ k = \overline{0, n-1}\right\}$ однакової довжини. Покажемо, що для n - вимірного підпростору
$$L_n = \text{ЛО}\left\{ 1\!\!\mathrm{I}_{[u_k; u_{k+1}]},\ k = \overline{0, n-1}\right\} \tag{4.1.3}$$
виконується нерівність
$$\sup_{f \in \widetilde{K}} \inf_{g \in L_n} \|f - g\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \frac{C_2}{n^{\frac{3}{10}}}.$$
Дійсно, якщо $f \in \widetilde{K}$, то
$$\int_{\mathbb{R}} f^2(u)(1+|u|)^3 du \leq 1,$$

з чого випливає, що для будь-якого $C > 0$

$$\int_{|u|>c} f^2(u)du \leq \frac{1}{(1+C)^3}\int_{|u|>c} f^2(u)(1+|u|)^3 du \leq \frac{1}{C^3}.$$

Отже, для функції

$$g_f = \sum_{k=0}^{n-1} f(u_k)1\!\!1_{[u_k;u_{k+1}]} \in L_n$$

виконується нерівність

$$\|f - g_f\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{5}}} + \int_{|u|\leq n^{\frac{1}{5}}} \left(f(u) - g_f(u)\right)^2 du.$$

Згідно з нерівністю Коші, для $f \in \widetilde{K}$ та $u \in [u_k; u_{k+1}]$

$$\left(\int_{u_k}^{u} f'(v)dv\right)^2 \leq \int_{u_k}^{u} \frac{dv}{(1+|v|)^7} \leq u - u_k.$$

Таким чином,

$$\int_{|u|\leq n^{\frac{1}{5}}} \left(f(u) - g_f(u)\right)^2 du = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{u_k}^{u_{k+1}}\left(\int_{u_k}^{u} f'(v)dv\right)^2 du \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)^2 = \frac{2}{n^{\frac{3}{5}}},$$

з чого випливає

$$d_n(\widetilde{K}, L_2(\mathbb{R})) \leq \frac{3^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{3}{10}}}.$$

Щоб оцінити знизу величину $d_n(\widetilde{K}, L_2(\mathbb{R}))$, скористаємось теоремою 4.0.1 про поперечник кулі. Розглянемо розбиття $\{u_k,\ k = \overline{0, 2(n+1)}\}$ відрізку $[0;1]$ на $2(n+1)$ сегментів

$$\left\{[u_k; u_{k+1}],\ k = \overline{0, 2n+1}\right\}$$

однакової довжини. Задамо $(n+1)$ - вимірний підпростір

$$L_{n+1} = \text{ЛО}\left\{f_k,\ k = \overline{0,n}\right\},$$

де функції $f_k, \quad k=\overline{0,n}$, визначені наступним чином

$$f_k = \begin{cases} 0, & u \notin [u_{2k}; u_{2k+1}], \\ 1, & u \in \left[u_{2k} + \frac{1}{6(n+1)}; u_{2k} + \frac{2}{6(n+1)}\right], \\ 6(n+1)(u-u_{2k}), & u \in \left[u_{2k}; u_{2k} + \frac{1}{6(n+1)}\right], \\ -6(n+1)(u-u_{2k+1}), & u \in \left[u_{2k} + \frac{2}{6(n+1)}; u_{2k+1}\right]. \end{cases} \tag{4.1.4}$$

Покажемо, що при $c = \frac{2^3(5+2^9\cdot 3^3)}{5}$ куля

$$B_{n+1} = \left\{ f \in L_{n+1} \;\middle|\; \|f\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \frac{1}{\sqrt{c}n} \right\}$$

є підмножиною $\widetilde{K}$.

Оскільки функції $f_k, \quad k=\overline{0,n}$, ортогональні та мають однакові норми у $L_2(\mathbb{R})$

$$\|f_k\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{5}{18(n+1)},$$

то для будь-якого $f \in B_{n+1}$ виду $f = \sum_{k=0}^n c_k f_k$ виконується нерівність

$$\sum_{k=0}^n c_k^2 \le \frac{36}{5cn}.$$

Таким чином, згідно з (4.1.4),

$$\int_{\mathbb{R}} f^2(u)(1+|u|)^3 du + \int_{\mathbb{R}} \left(f'(u)\right)^2 (1+|u|)^7 du \le 2^3 \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R})} +$$

$$+2^7 \cdot \sum_{k=0}^n c_k^2 \left(\int_{u_{2k}}^{u_{2k}+\frac{1}{6(n+1)}} (6(n+1))^2 du + \int_{u_{2k}+\frac{2}{6(n+1)}}^{u_{2k+1}} (6(n+1))^2 du \right) \le$$

$$\le \frac{2^3}{cn^2} + 2^{10}\cdot 3n \frac{36}{5cn} \le \frac{1}{c} \cdot \frac{2^3(5+2^9\cdot 3^3)}{5} = 1.$$

Отже, $B_{n+1} \subset \widetilde{K}$ та, у силу монотонності поперечників,

$$d_n(\widetilde{K}, L_2(\mathbb{R})) \ge d_n(B_{n+1}, L_2(\mathbb{R})).$$

Згідно з теоремою 4.0.1,

$$d_n(B_{n+1}, L_2(\mathbb{R})) = \frac{1}{\sqrt{c}n}.$$

Таким чином, виконується нерівність

$$d_n(\widetilde{K}, L_2(\mathbb{R})) \geq \frac{C_1}{n}$$

з константою $C_1 = \sqrt{c}$. □

У наступних параграфах дослідимо зміни поперечників за Колмогоровим компактних множин (4.1.1) та (4.1.2) під дією деяких сильних випадкових операторів.

4.2 Зміна поперечників компакту під дією гаусівського діагонального випадкового оператора

Нехай H – сепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та ортонормованим базисом $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Розглянемо у H гаусівський діагональний сильний випадковий оператор A

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n (f, e_n) e_n, \tag{4.2.1}$$

де $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ – незалежні гаусівські випадкові величини з $M\xi_n = 0$ та $M\xi_n^2 = 1,\ n \in \mathbb{N}$. У даному параграфі покажемо, що поведінка поперечників за Колмогоровим компактної у H множини

$$K = \left\{ f \in H \;\middle|\; (f, e_n)^2 \leq \frac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

під дією A не змінюється.

У лемі 4.1.1 було доведено, що для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$d_n(K, H) = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}},$$

тобто $d_n(K,H) \asymp \frac{1}{\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$. Аналогічні оцінки мають місце і для образу компакту K під дією діагонального гаусівського випадкового оператора (4.2.1).

Лема 4.2.1. *Нехай A – гаусівський діагональний сильний випадковий оператор у сепарабельному гільбертовому просторі H. Тоді для компакту*

$$K = \left\{ f \in H \;\middle|\; (f, e_n)^2 \leq \frac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

існують додатні випадкові величини c_1, c_2, що на множині повної ймовірності для всіх $n \geq N_0$

$$\frac{c_2}{\sqrt{n}} \leq d_n(A(K), H) \leq \frac{c_1}{\sqrt{n}}.$$

Доведення. Щоб оцінити величину $d_n(A(K), H)$ зверху, розглянемо зліченну щільну у $A(K)$ множину

$$C_0 = \bigcup_{m \geq 1} \left\{ (\xi_1 r_1, \ldots, \xi_m r_m, 0, 0, \ldots) \;\middle|\; r_k \in \mathbb{Q},\ |r_k| \leq \frac{1}{k^2},\ k = \overline{1, m} \right\}.$$

Тоді

$$d_n(A(K), H) = d_n(C_0, H) \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\xi_k^2}{k^2} \right)^{1/2}.$$

Згідно з теоремою про два ряди, з ймовірністю 1 ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k^2 - 1}{k^2}$$

збігається. Отже, майже напевно при $n \to \infty$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\xi_k^2 - 1}{k^2} \to 0,$$

з чого випливає існування константи $c_1 > 0$, що

$$d_n(A(K), H) \leq c_1 \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{м. н.}$$

Для оцінки поперечника $d_n(A(K),H)$ знизу використаємо теорему 4.0.1 про поперечник кулі. Покажемо, що майже напевно $A(K)$ містить n - вимірну кулю радіусу $\frac{1}{2\sqrt{n}}$. Позначимо

$$\tau = \min\left\{k \geq 1 \;\middle|\; |\xi_k| \geq \sqrt{n}, \ldots, |\xi_{k+n}| \geq \sqrt{n}\right\}.$$

Тоді для кожного $m \in \mathbb{N}$

$$p_m = P\{\tau = m\} =$$

$$= \left(1 - \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^n\right)^{m-1}\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^n$$

та з ймовірністю p_m множина $A(K)$ містить

$$C = \underbrace{0 \times \ldots \times 0}_{m-1} \times \left[-\frac{\sqrt{n}}{m}; \frac{\sqrt{n}}{m}\right] \times$$

$$\times \left[-\frac{\sqrt{n}}{m+1}; \frac{\sqrt{n}}{m+1}\right] \times \ldots \times \left[-\frac{\sqrt{n}}{m+n}; \frac{\sqrt{n}}{m+n}\right] \times 0 \times 0 \times \ldots$$

Оскільки n - вимірна куля радіуса $\frac{\sqrt{n}}{m+n}$ є підмножиною C, то з ймовірністю p_m

$$d_{n-1}(A(K),H) \geq \frac{\sqrt{n}}{m+n}.$$

Таким чином, з ймовірністю

$$\sum_{m=1}^{n} P\{\tau = m\} = 1 - \left(1 - \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^n\right)^n$$

виконується нерівність

$$d_n\left(A\left(K\right), H\right) \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Оскільки ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^n\right)^n$$

збігається, то, згідно з лемою Бореля-Кантеллі, майже напевно

$$d_{n-1}(A(K), H) \geq c_2 \frac{1}{\sqrt{n}},$$

що доводить теорему. □

4.3 Зміна поперечників компакту під дією випадкового оператора зсуву уздовж потоку Арратья

Дослідимо зміну поперечників за Колмогоровим у просторі $L_2(\mathbb{R})$ компактної множини

$$\widetilde{K} = \left\{ f \in W_2^1(\mathbb{R}) \;\Big|\; \int_{\mathbb{R}} f^2(u)(1+|u|)^3 du + \right.$$

$$\left. + \int_{\mathbb{R}} \left(f'(u)\right)^2 (1+|u|)^7 du \leq 1 \right\} \tag{4.3.1}$$

під дією випадкового оператора T_t

$$T_t f(u) = f(x(u,t)),$$

який побудовано за потоком Арратья $\{x(u,s),\ u \in \mathbb{R},\ s \geq 0\}$.

Теорема 4.3.1. *Існує множина* $\widetilde{\Omega}$ *повної ймовірності така, що для будь-яких* $\omega \in \widetilde{\Omega}$ *та* $n \in \mathbb{N}$

$$d_n\left(T_t^{\omega}(\widetilde{K}), L_2(\mathbb{R})\right) \leq \frac{C(\omega)}{n^{\frac{3}{10}}}, \tag{4.3.2}$$

де випадкова величина $C(\omega) > 0$ *не залежить від* n.

Доведення. Для фіксованого $n \in \mathbb{N}$ розглянемо $\{u_k,\ k = \overline{0,n}\}$ – розбиття відрізку $\left[-n^{\frac{1}{5}}; n^{\frac{1}{5}}\right]$ на n сегментів однакової довжини. Щоб довести (4.3.2) достатньо показати, що для лінійної оболонки

$$L_n^{\omega} = \text{ЛО}\left\{\, T_t^{\omega} 1\!\!1_{[u_k;u_{k+1}]},\ k = \overline{0, n-1}\,\right\}, \tag{4.3.3}$$

розмірність якої не більша за n, виконується нерівність

$$\sup_{h_1\in T_t^\omega(\widetilde{K})}\inf_{h_2\in L_n^\omega}\|h_1-h_2\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\frac{C(\omega)}{n^{\frac{3}{10}}}.$$

З формули інтегрування частинами для потоку Арратья випливає, що для довільної функції $f\in\widetilde{K}$

$$\left\|T_t^\omega f-T_t^\omega\left(\sum_{k=0}^{n-1}f(u_k)1\!\!\mathrm{I}_{[u_k;u_{k+1}]}\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=$$

$$=\int_{|u|>n^{\frac{1}{5}}}f^2(u)dy(u,t,\omega)+$$

$$+\int_{|u|\le n^{\frac{1}{5}}}\left(f(u)-\sum_{k=0}^{n-1}f(u_k)1\!\!\mathrm{I}_{[u_k;u_{k+1}]}(u)\right)^2dy(u,t,\omega).$$

Для оцінки зверху останнього інтегралу помітимо, що

$$\int_{|u|\le n^{\frac{1}{5}}}\left(f(u)-\sum_{k=0}^{n-1}f(u_k)1\!\!\mathrm{I}_{[u_k;u_{k+1}]}(u)\right)^2dy(u,t,\omega)\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{u_k}^{u_{k+1}}\left(\int_{u_k}^{u}|f'(v)|\,dv\right)^2dy(u,t,\omega),$$

де $\{y(u,s),\ u\in\mathbb{R},\ s\ge 0\}$ – спряжений потік Арратья. З визначення множини $\widetilde{K}$ маємо, що для будь-яких $f\in\widetilde{K}$ та $u\in[u_k;u_{k+1}]$

$$\left(\int_{u_k}^{u}|f'(v)|\,dv\right)^2\le\int_{u_k}^{u}\frac{dv}{(1+|v|)^7}\le u_{k+1}-u_k.$$

Отже,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{u_k}^{u_{k+1}}\left(\int_{u_k}^{u}|f'(v)|\,dv\right)^2dy(u,t,\omega)\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)\int_{u_k}^{u_{k+1}}dy(u,t,\omega)=$$

$$= \frac{2}{n^{\frac{4}{5}}} \left(y(n^{\frac{1}{5}}, t, \omega) - y(-n^{\frac{1}{5}}, t, \omega) \right).$$

Для спряженого потоку $\{y(u,s), u \in \mathbb{R}, s \in [0;t]\}$, який також є потоком Арратья, виконується наступна властивість [44]

$$\lim_{|u|\to+\infty} \frac{|y(u,t)|}{|u|} = 1 \quad \text{м.н.}$$

Таким чином, для будь-якого ω з множини

$$\widetilde{\Omega} = \left\{ \omega' \in \Omega \;\middle|\; \lim_{|u|\to+\infty} \frac{|y(u,t,\omega')|}{|u|} = 1 \right\}$$

виконується нерівність

$$\int_{|u|\le n^{\frac{1}{5}}} \left(f(u) - \sum_{k=0}^{n-1} f(u_k) 1\!\!\mathrm{I}_{[u_k;u_{k+1}]}(u) \right)^2 dy(u,t,\omega) \le \frac{4c(\omega)}{n^{\frac{3}{5}}} \qquad (4.3.4)$$

з константою

$$c(\omega) = \sup_{|u|\ge 1} \frac{|y(u,t,\omega)|}{|u|}. \qquad (4.3.5)$$

Покажемо, що для довільного $\omega \in \widetilde{\Omega}$ існує $\widetilde{c}(\omega) > 0$ таке, що

$$\int_{|u|>n^{\frac{1}{5}}} f^2(u) dy(u,t,\omega) \le \frac{\widetilde{c}(\omega)}{n^{\frac{3}{5}}}.$$

Зауважимо, що

$$\int_{|u|>n^{\frac{1}{5}}} f^2(u) dy(u,t) \le \frac{1}{n^{\frac{3}{5}}} \int_{|u|>n^{\frac{1}{5}}} f^2(u)(1+|u|)^3 dy(u,t).$$

Нехай $\{\theta_j,\ j \in \mathbb{N}\}$ – послідовність точок розриву на $\mathbb{R}_+$ функції $y(\cdot,t)$. Тоді

$$\int_{u>n^{\frac{1}{5}}} f^2(u)(1+u)^3 dy(u,t) = \sum_{\theta_i \ge n^{\frac{1}{5}}} f^2(\theta_i)(1+\theta_i)^3 \Delta y(\theta_i,t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\{i:\ \theta_i \in [k;k+1)\}} f^2(\theta_i)(1+\theta_i)^3 \Delta y(\theta_i,t) \le$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}(2+k)^3 \sum_{\{i:\ \theta_i\in[k;k+1)\}} f^2(\theta_i)\Delta y(\theta_i,t).$$

З нерівності Коші та визначення множини $\widetilde{K}$ випливає, що для довільного $u\in\mathbb{R}_+$

$$f^2(u)\leq \int_u^{+\infty}\left(f'(v)\right)^2(1+v)^7dv\cdot\int_u^{+\infty}\frac{dv}{(1+v)^7}\leq\frac{1}{6u^6}.$$

Отже, згідно з (4.3.5), виконуються наступні співвідношення

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2+k)^3 \sum_{\{i:\ \theta_i\in[k;k+1)\}} f^2(\theta_i)\Delta y(\theta_i,t)\leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}(2+k)^3\frac{1}{6k^6}\left(y(k+1,t)-y(k,t)\right)\leq\frac{16c}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Таким чином, для будь-якого $\omega\in\widetilde{\Omega}$ існує константа $C_1(\omega)=\frac{16c(\omega)}{3}$ така, що

$$\int_{u>n^{\frac{1}{5}}} f^2(u)dy(u,t,\omega)\leq\frac{C_1(\omega)}{n^{\frac{3}{5}}}.$$

Аналогічно можна довести

$$\int_{u<-n^{\frac{1}{5}}} f^2(u)dy(u,t,\omega)\leq\frac{C_1(\omega)}{n^{\frac{3}{5}}}.$$

Таким чином, з останньої нерівності та (4.3.4) випливає, що для будь-якого $\omega\in\widetilde{\Omega}$ виконується

$$d_n\left(T_t^{\omega}(\widetilde{K}),L_2(\mathbb{R})\right)\leq\frac{C(\omega)}{n^{\frac{3}{10}}}.$$

Теорема доведена. □

Зауважимо, що у доведенні останньої теореми для отримання оцінки зверху величини $d_n(T_t^{\omega}(\widetilde{K}),L_2(\mathbb{R}))$ у якості апроксимативного був випадковий скінченновимірний підпростір (4.3.3), що є образом під дією T_t апроксимативного детермінованого підпростору (4.1.3), який у лемі 4.1.2 використовувався для отримання тієї ж самої (з точністю до випадкової константи) оцінки для $d_n(\widetilde{K}, L_2(\mathbb{R}))$. У наступному параграфі обгрунтуємо, чому такий прийом не можна використовувати для нижньої оцінки величини $d_n(T_t^{\omega}(\widetilde{K}), L_2(\mathbb{R}))$.

4.4 T_t-суттєві функції

Нехай $\{x(u,s),\ u \in \mathbb{R}, s \geq 0\}$ – потік Арратья. Для фіксованого $t > 0$ розглянемо сильний випадковий оператор T_t у $L_2(\mathbb{R})$

$$T_t f(u) = f(x(u,t)), \tag{4.4.1}$$

де $u \in \mathbb{R},\ f \in L_2(\mathbb{R})$. Якщо носій функції $f \in L_2(\mathbb{R})$ обмежений, то $T_t f$ є нульовим елементом у просторі $L_2(\mathbb{R})$ з додатньою ймовірністю. Дійсно, якщо $suppf \subset [a;b]$ для деяких констант a та b, то, згідно з формулою інтегрування частинами для потоку Арратья (3.1.3),

$$\mathbb{P}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x(u,t))du = 0\right\} \geq \mathbb{P}\left\{\ x(\mathbb{R},t) \cap [a;b] = \emptyset\ \right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} 1\!\!1_{[a;b]}(x(u,t))du = 0\right\} = \mathbb{P}\left\{\ \int_{-\infty}^{+\infty} 1\!\!1_{[a;b]}(u)dy(u,t) = 0\ \right\},$$

де $\{y(u,s),\ u \in \mathbb{R},\ s \in [0;t]\}$ – спряжений потік Арратья. Оскільки

$$\mathbb{P}\left\{\ \int_{-\infty}^{+\infty} 1\!\!1_{[a;b]}(u)dy(u,t) = 0\ \right\} = \mathbb{P}\left\{\ y(b,t) = y(a,t)\ \right\} > 0,$$

то $\mathbb{P}\left\{\ \|T_t f\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0\ \right\} > 0$.

Оскільки образи деяких функцій під дією оператора T_t можуть бути нульовими з додатньою ймовірністю, то образи деяких скінченновимірних підпросторів $L_2(\mathbb{R})$ під дією T_t також можуть бути нульовими з додатньою ймовірністю. Таким чином, при дослідженні зміни під дією T_t поперечників за Колмогоровим компактних множин у $L_2(\mathbb{R})$ необхідно гарантувати існування підпросторів, образи яких майже напевно не є нульовими.

Означення 4.4.1. Для фіксованого $t > 0$ функція $f \in L_2(\mathbb{R})$ називається T_t - суттєвою, якщо

$$\mathbb{P}\left\{ \|T_t f\|_{L_2(\mathbb{R})} > 0 \right\} = 1.$$

Приклад 4.4.1. Нехай $f \in L_2(\mathbb{R})$ ненульова аналітична функція. Позначимо множину її нулів через

$$Z_f = \left\{ u \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(u) = 0 \right\}.$$

Оскільки $x(\cdot, t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – східчаста функція, то

$$\mathbb{P}\left\{ x(\mathbb{R}, t) = x(\mathbb{Q}, t) \right\} = 1.$$

Таким чином,

$$\mathbb{P}\left\{ x(\mathbb{R}, t) \cap Z_f = \emptyset \right\} = \mathbb{P}\left\{ x(\mathbb{Q}, t) \cap Z_f = \emptyset \right\} =$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left\{ x(\mathbb{Q}, t) \cap Z_f \neq \emptyset \right\} \geq 1 - \sum_{r \in \mathbb{Q}} \mathbb{P}\left\{ x(r, t) \cap Z_f \neq \emptyset \right\} = 1.$$

Отже,

$$\mathbb{P}\left\{ x(\mathbb{R}, t) \cap Z_f = \emptyset \right\} = 1,$$

та f – T_t - суттєва для кожного $t > 0$.

Зауваження 4.4.1. Для різних $t_1 \neq t_2$ T_{t_1} - суттєва функція не обов'язково є T_{t_2} - суттєвою.

Щоб навести приклад T_1 - суттєвої функції, що не є T_2 - суттєвою, розглянемо зростаючу послідовність чисел $\{u_k,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ таку, що $u_0 = 0, u_1 = 1$ та для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{1}{2^n}, \qquad u_{2n} - u_{2n-1} = 2n(\ln 2)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 4.4.1. *Функція* $f = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[u_{2n}; u_{2n+1}]}$ *є* T_1 *- суттєвою, але не* T_2 *- суттєва.*

Доведення. Щоб довести, що f не T_2 - суттєва покажемо, що

$$\mathbb{P}\{\ \|T_2 f\|^2_{L_2(\mathbb{R})} > 0\ \} < 1.$$

З визначення оператора T_t (4.4.1) та вигляду функції f випливають наступні рівності

$$\mathbb{P}\{\ \|T_2 f\|^2_{L_2(\mathbb{R})} > 0\ \} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 1\!\!1_{[u_{2n};u_{2n+1}]}(x(u,2)) \right)^2 du > 0 \right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 1\!\!1_{[u_{2j};u_{2j+1}]}(x(u,2)) 1\!\!1_{[u_{2n};u_{2n+1}]}(x(u,2)) du > 0 \right\}.$$

Оскільки для будь-яких $k \neq j$

$$[u_{2k}; u_{2k+1}] \cap [u_{2j}; u_{2j+1}] = \emptyset,$$

то має місце рівність

$$\mathbb{P}\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 1\!\!1_{[u_{2j};u_{2j+1}]}(x(u,2)) 1\!\!1_{[u_{2n};u_{2n+1}]}(x(u,2)) du > 0 \right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} 1\!\!1_{[u_{2n};u_{2n+1}]}(x(u,2)) du > 0 \right\}.$$

За формулою інтегрування частинами для потоку Арратья (3.1.3),

$$\mathbb{P}\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} 1\!\!1_{[u_{2n};u_{2n+1}]}(x(u,2)) du > 0 \right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (y(u_{2n+1},2) - y(u_{2n},2)) > 0 \right\}.$$

Оскільки функція $y(\cdot,2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – монотонно неспадна, то ймовірність останньої події збігається з

$$\mathbb{P}\left\{ \exists n \geq 0 \ \middle|\ y(u_{2n+1},2) \neq y(u_{2n},2) \right\}. \tag{4.4.2}$$

Для оцінки зверху (4.4.2) оцінимо величину

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\ y(u_{2n+1}, 2) \neq y(u_{2n}, 2)\ \},$$

що є не меншою за (4.4.2). Для цього задамо $w(u, \cdot)$ – вінерівський процес на $\mathbb{R}_+$, що стартує з точки $u \in \mathbb{R}$, а саме $w(u, 0) = u$. Розглянемо

$$\tau_u = \inf\left\{ t > 0 \,\middle|\, w(u, t) = 0 \right\}$$

та новий процес $\widetilde{w}(u, \cdot) = w(u, \cdot \wedge \tau_u)$. Оскільки $\{y(u, s), u \in \mathbb{R}, s \in [0; t]\}$ – потік Арратья на $[0; t]$, то

$$\mathbb{P}\{\ y(u_{2n+1}, 2) \neq y(u_{2n}, 2)\ \} = \mathbb{P}\left\{\ \widetilde{w}\left(\frac{1}{2^{n+1}}, 2\right) \neq 0\ \right\}.$$

Таким чином,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\ y(u_{2n+1}, 2) \neq y(u_{2n}, 2)\ \} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left\{\ \widetilde{w}\left(\frac{1}{2^{n+1}}, 2\right) \neq 0\ \right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left\{\ \widetilde{w}\left(\frac{1}{2^{n+1}}, 2\right) > 0\ \right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^{n+1}}} e^{-\frac{v^2}{4}} dv \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} < 1.$$

Отже функція $f = \sum_{n=0}^{\infty} 1\!\!1_{[u_{2n}; u_{2n+1}]}$ не є T_2 - суттєвою.

Покажемо, що функція $f = \sum_{n=0}^{\infty} 1\!\!1_{[u_{2n}; u_{2n+1}]}$ є T_1 - суттєвою. Для цього, згідно з формулою інтегрування частинами для потоку Арратья (3.1.3), достатньо перевірити, що для f виконується нерівність

$$\mathbb{P}\{\ \|T_1 f\|_{L_2(\mathbb{R})} > 0\ \} \geq \mathbb{P}\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (y(u_{2n+1}, 1) - y(u_{2n}, 1)) > 0 \right\}.$$

З леми 3.3.4 та наслідку 3.3.2 випливає

$$\mathbb{P}\left\{\ \limsup_{n\to\infty} (y(u_{2n+1}, 1) - y(u_{2n}, 1)) \geq 1\ \right\} = 1, \tag{4.4.3}$$

що доводить твердження. □

Використовуючи приклад 4.4.1, можна задати сім'ю функцій, що є T_t - суттєвими для кожного $t > 0$. Нехай Θ_t – точковий процес на $\mathbb{R}$, що утворений з усіх точок розриву функції $y(\cdot, t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Розглянемо інтегральний випадковий оператор A у $L_2(\mathbb{R})$, що побудований за Θ_t

$$Af(u) = \sum_{\theta \in \Theta_t} \Delta y(\theta, t) \int_{\mathbb{R}} f(v) p_\varepsilon(v - \theta) dv p_\varepsilon(u - \theta),$$

де $p_\varepsilon(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{u^2}{2\varepsilon}}$, $\Delta y(\theta, t) = y(\theta+, t) - y(\theta-, t)$. За формулою інтегрування частинами для потоку Арратья

$$(Af, f) = \int_{\mathbb{R}} (f * p_\varepsilon)^2 (x(u, t)) du. \tag{4.4.4}$$

Лема 4.4.1. *Для будь-якої ненульової функції* $f \in L_2(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}\{\ (Af, f) \neq 0\ \} = 1.$$

Доведення. Функція $f * p_\varepsilon$ – аналітична. Отже, для кожного $t > 0$, як показано у прикладі 4.4.1, виконуються рівності

$$\mathbb{P}\{\ (Af, f) > 0\ \} = \mathbb{P}\left\{\ \|T_t(f * p_\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R})} > 0\ \right\} =$$

$$= \mathbb{P}\{\ x(\mathbb{R}, t) \cap Z_{f * p_\varepsilon} = \emptyset\ \} = 1.$$

□

Таким чином, згідно з останньою лемою, для довільного $\varepsilon > 0$ та ненульової $f \in L_2(\mathbb{R})$ функція $f * p_\varepsilon$ є T_t - суттєвою для кожного $t > 0$. Використовуючи дану сім'ю функцій, побудуємо скінченновимірний підпростір, що майже напевно зберігає свою розмірність під дією оператора T_t.

Для фіксованого $n \in \mathbb{N}$ розглянемо розбиття $\{u_k,\ k = \overline{0, 2(n+1)}\}$ відрізку $[0; n^{-2}]$ на $2(n+1)$ сегментів однакової довжини. Задамо

$(n+1)$ лінійно незалежних функцій f_k, $k = \overline{0,n}$.

$$f_k = \begin{cases} 0, & u \notin [u_{2k}; u_{2k+1}], \\ 1, & u \in [u_{2k} + \frac{n^{-2}}{6(n+1)}; u_{2k} + \frac{2n^{-2}}{6(n+1)}], \\ \frac{6(n+1)}{n^{-2}}(u - u_{2k}), & u \in [u_{2k}; u_{2k} + \frac{n^{-2}}{6(n+1)}], \\ -\frac{6(n+1)}{n^{-2}}(u - u_{2k+1}), & u \in [u_{2k} + \frac{2n^{-2}}{6(n+1)}; u_{2k+1}]. \end{cases} \tag{4.4.5}$$

Лема 4.4.2. *Існує* $\varepsilon_0 > 0$, *що для довільного* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *функції* $\{f_k * p_\varepsilon,\ k = \overline{0,n}\}$ *лінійно незалежні.*

Доведення. Оскільки задані функції $\{f_k, k = \overline{0,n}\}$ лінійно незалежні, то їх визначник Грама не дорівнює нулю, тобто $G(f_0, \ldots, f_n) \neq 0$. Для кожного $k = \overline{0,n}$

$$f_k * p_\varepsilon \to f_k,\ \varepsilon \to 0.$$

Отже, згідно з неперервністю визначника Грама, існує $\varepsilon_0 > 0$, що для довільного $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$G(f_0 * p_\varepsilon, \ldots, f_n * p_\varepsilon) \neq 0.$$

$\square$

Теорема 4.4.2. *Існує множина* Ω_0 *повної ймовірності така, що для довільного* $\omega \in \Omega_0$ *функції* $T_t^\omega(f_0 * p_\varepsilon), \ldots, T_t^\omega(f_n * p_\varepsilon)$ *лінійно незалежні.*

Доведення. Позначимо через K^ε інтегральний оператор у $L_2(\mathbb{R})$ з ядром

$$k^\varepsilon(v_1, v_2) = \int_{\mathbb{R}} p_\varepsilon(u - v_1) p_\varepsilon(u - v_2) dy(u, t).$$

Щоб довести твердження теореми достатньо перевірити, що на деякій множині Ω_0 повної ймовірності виконується нерівність $(K^\varepsilon f, f) >$

0 для довільної функції $f \in$ ЛО$\{f_0, \ldots, f_n\}$. Згідно з формулою інтегрування частинами для потоку Арратья

$$(K^\varepsilon f, f) = \sum_\theta (f * p_\varepsilon)^2(\theta) \Delta y(\theta, t), \tag{4.4.6}$$

де θ – точка розриву функції $y(\cdot, t)$.

У другому розділі доведено існування множини Ω_0 повної ймовірності, що для довільного $\omega \in \Omega_0$ лінійна оболонка функцій $\{p_\varepsilon(\cdot - \theta(\omega))|_{[0;1]}\}_{\theta(\omega)}$ щільна у просторі $L_2([0;1])$. Отже, на множині Ω_0 для довільної $f \in$ ЛО$\{f_0, \ldots, f_n\} \subset L_2([0;1])$ існує випадкова точка θ_f така, що $(f(\cdot), p_\varepsilon(\cdot - \theta_f)) \neq 0$. Оскільки функція $y(\cdot, t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неспадна, то $\Delta y(\theta, t) > 0$ для довільної точки розриву θ. Таким чином, на множині Ω_0

$$\begin{aligned}\sum_\theta (f * p_\varepsilon)^2(\theta) \Delta y(\theta, t) &= \sum_\theta (f(\cdot), p_\varepsilon(\cdot - \theta))^2 \Delta y(\theta, t) \\ &\geq (f(\cdot), p_\varepsilon(\cdot - \theta_f))^2 \Delta y(\theta_f, t) > 0,\end{aligned}$$

що доводить теорему. □

4.5 Випадкові інтегральні оператори, породжені потоком Арратья

Розглянемо $\{x(u, s),\ u \in \mathbb{R},\ s \in [0;t]\}$ – потік Арратья [2] на інтервалі $[0;t]$, $t > 0$, та $\{y(u, s),\ u \in \mathbb{R},\ s \in [0;t]\}$ – спряжений до нього потік. Нехай T_t – випадковий інтегральний оператор у $L_2(\mathbb{R})$, що описує зсуви функцій уздовж $x(\cdot, t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, а саме

$$(T_t f)(\cdot) = f(x(\cdot, t)), \qquad f \in L_2(\mathbb{R}).$$

Як було показано у попередньому параграфі, образ функції з обмеженим носієм під дією T_t є нульовою функцією з додатною ймовірністю.

Проте для $f \neq 0$ функція $T_t(f * p_\varepsilon)$, де $p_\varepsilon(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{u^2}{2\varepsilon}}$, майже напевно не є нульовою. Більш того, з формули інтегрування частинами для потоку Арратья (3.1.3) випливає рівність

$$\|T_t(f * p_\varepsilon)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u) f(v) \times$$
$$\times \sum_{\theta \in \Theta_t} \Delta y(\theta, t) p_\varepsilon(u - \theta) p_\varepsilon(v - \theta) du dv, \qquad (4.5.1)$$

де Θ_t – множина усіх точок розриву функції $y(\cdot, t) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, а $\Delta y(\theta, t) = y(\theta+, t) - y(\theta-, t)$.

Права частина (4.5.1) є квадратичною формою випадкового інтегрального оператора A_t у $L_2(\mathbb{R})$ з ядром

$$a_t(u, v) = \sum_{\theta \in \Theta_t} \Delta y(\theta, t) p_\varepsilon(u - \theta) p_\varepsilon(v - \theta). \qquad (4.5.2)$$

У даному параграфі досліджуються деякі властивості A_t.

Оскільки $\{y(u, r),\ u \in \mathbb{R},\ r \in [0; t]\}$ у оберненому часі є потоком Арратья на $[0; t]$ та його траєкторії не перетинаються з траєкторіями $\{x(u, r),\ u \in \mathbb{R},\ r \in [0; t]\}$, то

$$\Theta_t = x(\mathbb{R}, t).$$

Отже, зі стаціонарності за просторовою зміною потоку $\{x(u, r),\ u \in \mathbb{R},\ r \in [0; t]\}$ випливає стаціонарність точкового процесу Θ_t. Побудуємо за ним випадкову міру на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ наступним чином

$$\nu_t(B) = \sum_{\theta \in \Theta_t} \Delta y(\theta, t) \delta_\theta(B), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Оскільки Θ_t – стаціонарний, то ν_t є стаціонарною випадковою мірою.

Лема 4.5.1. *Для довільної обмеженої борелевої множини* B

$$M\nu_t(B) = \lambda(B),$$

де λ *– міра Лебега на* $\mathbb{R}$.

Доведення. З означення ν_t випливає рівність

$$M\nu_t(B) = M \sum_{\theta \in \Theta_t \cap B} \Delta y(\theta, t).$$

Використовуючи формулу інтегрування частинами для потоку Арратья, маємо

$$M \sum_{\theta \in \Theta_t \cap B} \Delta y(\theta, t) = M \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_B(x(u,t))du = M\|T_t 1\!\!1_B\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

У [8] показано, що для довільної функції $f \in L_2(\mathbb{R})$

$$M\|T_t 1\!\!1_B\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Таким чином,

$$M\|T_t 1\!\!1_B\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \lambda(B),$$

що доводить лему. □

Наслідок 4.5.1. Для довільної невід'ємної функції $h \in L_1(\mathbb{R})$ має місце аналог формули Кемпбелла для точкових процесів [32]

$$M \sum_{\theta \in \Theta_t} \Delta y(\theta, t) h(\theta) = \int_{\mathbb{R}} h(u) du \tag{4.5.3}$$

Використовуючи аналог формули Кемпбелла, доведемо наступні властивості випадкового оператора A_t.

Лема 4.5.2. *A_t – сильний випадковий оператор у $L_2(\mathbb{R})$.*

Доведення. Аналогічно доведенню теореми 2.2.1, використовуючи (4.5.3), можна показати, що з константою

$$C_t = M\Big(y(k_1+1,t) - y(k_1,t)\Big)\Big(y(k_2+1,t) - y(k_2,t)\Big)$$

виконується нерівність

$$M\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} p_{2\varepsilon}(u-v)p_\varepsilon(u-r_1)p_\varepsilon(v-r_2)\nu_t(du)\nu_t(dv) \leq$$

$$\leq C_t \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} \max_{\substack{u\in[k_1;k_1+1)\\ v\in[k_2;k_2+1)}} p_{2\varepsilon}(u-v)p_\varepsilon(u-r_1)p_\varepsilon(v-r_2). \tag{4.5.4}$$

Обмеженість C_t випливає зі співвідношень

$$C_t \leq \left(M\Big(y(k_1+1,t)-y(k_1,t)\Big)^2\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left(M\Big(y(k_2+1,t)-y(k_2,t)\Big)^2\right)^{\frac{1}{2}} = M\widetilde{w}\,(1,2t)^2 \leq$$

$$\leq Mw\,(1,2t)^2 < +\infty,$$

$w(a,s)$ – вінерівський процес, для якого $w(a,0) = a$, $\widetilde{w}(a,s) = w(a,s\wedge\tau)$, де

$$\tau = \inf\Big\{s\geq 0 \;\Big|\; w(a,s)=0\Big\}.$$

Як доведено у теоремі 2.2.1, величина у правій частині (4.5.4) є ядром, що породжує обмежений інтегральний оператор у просторі $L_2(\mathbb{R})$. Таким чином, існує константа $\widetilde{C}_t > 0$, що для довільної функції $f\in L_2(\mathbb{R})$

$$M\int_{\mathbb{R}} (A_t f(u))^2\,du \leq$$

$$\leq \widetilde{C}_t \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(r_1)|\cdot|f(r_2)|\cdot p_{4\varepsilon}(r_1-r_2)dr_2dr_2 < +\infty,$$

що доводить теорему. □

Для фіксованих чисел $a<b$ розглянемо $Q_{a,b}$ – ортогональний проектор $L_2(\mathbb{R})$ на $L_2([a;b])$, що збігається з підпростором функцій, носії яких належать відрізку $[a;b]$. Використовуючи аналог формули Кемпбелла (4.5.3), аналогічно лемі 2.2.1 та лемі 2.2.2 можна довести наступні твердження.

Лема 4.5.3. *Випадкові оператори* $Q_{a,b}A_t$ *та* $A_tQ_{a,b}$ *є обмеженими у* $L_2(\mathbb{R})$.

Лема 4.5.4. *Для довільних чисел* $a < b$ *з ймовірністю 1 випадковий оператор* $Q_{a,b}A_tQ_{a,b}$ *є ядерним у* $L_2(\mathbb{R})$.

Покажемо, що A_t не є обмеженим.

Теорема 4.5.1. A_t *не є обмеженим випадковим оператором у* $L_2(\mathbb{R})$.

Доведення. Можна показати, що для деякої константи $b > 0$ виконуються співвідношення

$$\|A_t 1\!\!\mathrm{I}_{[n;n+1]}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \geq$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{\theta \in \Theta_t \cap [n;n+1]} \Delta y(\theta, t) \int_n^{n+1} p_\varepsilon(u-\theta) du p_\varepsilon(v-\theta) \right)^2 dv \geq$$

$$\geq b \sum_{\theta \in \Theta_t \cap [n;n+1]} (\Delta y(\theta, t))^2 . \qquad (4.5.5)$$

Розглянемо випадкові величини

$$\zeta_n = \sum_{\theta \in \Theta_t \cap [n;n+1]} (\Delta y(\theta, t))^2 , \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Перевіримо, що

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \zeta_n = +\infty \quad \text{м. н.} \qquad (4.5.6)$$

Дійсно, оскільки траєкторії потоків $\{x(u,r),\ u \in \mathbb{R},\ r \in [0;t]\}$ та $\{y(u,r),\ u \in \mathbb{R},\ r \in [0;t]\}$ не перетинаються, то для довільного $m \in \mathbb{N}$ та рівномірного розбиття $\{u_j,\ j = \overline{1, 2m+2}\}$ відрізку $[-m; m]$ маємо

$$\mathbb{P}\{\zeta_1 \geq m\} = \mathbb{P}\left\{ \sum_{\theta \in \Theta_t \cap [1;2]} (\Delta y(\theta, t))^2 \geq m \right\} \geq$$

$$\geq \mathbb{P}\{\, 1 \leq x(u_1,t) = x(u_2,t) < x(u_3,t) = x(u_4,t) < \ldots <$$

$$< x(u_{2m+1},t) = x(u_{2m+2},t) \leq 2\} > 0.$$

Отже $essup \zeta_1 = +\infty$, що, з урахуванням стаціонарності та перемішування [1] послідовності $\{\zeta_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, доводить (4.5.6). Таким чином,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_t 1\!\!\mathrm{I}_{[n;n+1]}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \geq b \sup_{n\in\mathbb{N}} \zeta_n = +\infty \qquad \text{м. н.}$$

□

Оскільки A_t не є обмеженим, то операторні норми $Q_{-n,n}A_tQ_{-n,n}$ при $n \to \infty$ прямують до нескінченності. Зауважимо, що у другому розділі досліджувалась оцінка швидкості такої збіжності для випадкових операторів $Q_{-n,n}\widetilde{A}Q_{-n,n}$, де $\widetilde{A}$ – випадковий інтегральний оператор у $L_2(\mathbb{R})$, ядро якого породжене стаціонарним точковим процесом Θ

$$\widetilde{a}(u,v) = \sum_{\theta\in\Theta} p_\varepsilon(u-\theta)p_\varepsilon(v-\theta).$$

При цьому доведена наступна оцінка знизу

$$\|Q_{-n,n}\widetilde{A}Q_{-n,n}\|^2 \geq \max_{k=\overline{0,n}} |\Theta \cap [k;k+1]|. \tag{4.5.7}$$

Для точкового процесу Θ_t у наступному пункті наведені оцінки на швидкість зростання величин

$$\max_{k=\overline{0,n}} \sum_{\theta\in\Theta_t\cap[k;k+1]} (\Delta y(\theta,t))^2,$$

з чого, у свою чергу, випливає нижня оцінка швидкості збіжності $\|Q_{-n,n}A_tQ_{-n,n}\|$ до нескінченності, оскільки

$$\|Q_{-n,n}A_tQ_{-n,n}\|^2 \geq \max_{k=\overline{0,n}} \sum_{\theta\in\Theta_t\cap[k;k+1]} (\Delta y(\theta,t))^2. \tag{4.5.8}$$

4.6 Зростання норм $\|Q_{-n,n}A_tQ_{-n,n}\|$

Для довільного $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ розглянемо випадкову величину

$$\xi_n = |x([n; n+1], t)|,$$

де $|\Delta|$ – потужність множини Δ. Оскільки потік Арратья стаціонарний за просторовою змінною, то $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ – однаково розподілені випадкові величини. У другому розділі було доведено, що існують додатні константи $C_0,\ R > 0,$ що для довільного $C \geq C_0$

$$\frac{1}{C^4} \ln \mathbb{P}\{\xi_0 \geq C\} \geq -Rt. \tag{4.6.1}$$

З цього твердження випливало, що для будь-якого $\beta \in (0; \frac{1}{4})$ майже напевно

$$\frac{\max\limits_{k=\overline{0,n}} \xi_k}{(\ln n)^{\frac{1}{4}-\beta}} \to +\infty,\ n \to \infty. \tag{4.6.2}$$

Для фіксованого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ розглянемо випадкову величину

$$\zeta_k = \sum_{\theta \in \Theta_t \cap [k; k+1]} (\Delta y(\theta, t))^2.$$

Покажемо, що майже напевно $\max_{k=\overline{0,n}} \zeta_k$ прямує до нескінченності при $n \to \infty$.

Теорема 4.6.1. *З ймовірністю 1*

$$\frac{\ln \ln n}{\ln n} \cdot \max_{k=\overline{0,n}} \zeta_k \to +\infty,\ n \to \infty. \tag{4.6.3}$$

Доведення. Для натурального $n \geq 3$ розглянемо величину $N_n = \left[\frac{n}{[\sqrt{8 \ln n}]}\right]$ та для довільного $j = \overline{0, N_n}$ визначимо

$$k_j^n = j \cdot [\sqrt{8 \ln n}].$$

Покажемо, що майже напевно

$$\frac{\ln \ln n}{\ln n} \cdot \max_{j=\overline{0,N_n}} \zeta_{k_j^n} \to +\infty, \quad n \to \infty. \tag{4.6.4}$$

Для цього, згідно з лемою Бореля-Кантеллі, достатньо перевірити, що при будь-якому $C>0$ збігається ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty}\mathbb{P}\left\{\max_{j=\overline{0,N_n}}\zeta_{k_j^n}\le C\frac{\ln n}{\ln\ln n}\right\}. \qquad (4.6.5)$$

Оскільки процес $\{y(u,t),\ u\in\mathbb{R}\}$ стаціонарний, то для довільного $j=\overline{0,N_n}$

$$\mathbb{P}\left\{\zeta_{k_j^n}\le C\frac{\ln n}{\ln\ln n}\right\}=\mathbb{P}\left\{\zeta_0\le C\frac{\ln n}{\ln\ln n}\right\}.$$

Так само як у доведенні теореми першого розділу виконуються співвідношення

$$\mathbb{P}\left\{\max_{j=\overline{0,N_n}}\zeta_{k_j^n}\le C\frac{\ln n}{\ln\ln n}\right\}\le$$

$$\le\alpha([\sqrt{8\ln n}])\sum_{j=0}^{N_n-1}\mathbb{P}\left\{\zeta_0\le C\frac{\ln n}{\ln\ln n}\right\}^j+\mathbb{P}\left\{\zeta_0\le C\frac{\ln n}{\ln\ln n}\right\}^{N_n}.$$

З (2.3.6) випливає збіжність ряду $\sum_{n=3}^{\infty}\alpha([\sqrt{8\ln n}])N_n$. Отже,

$$\sum_{n=3}^{\infty}\alpha([\sqrt{8\ln n}])\sum_{j=0}^{N_n-1}\mathbb{P}\left\{\zeta_0\le C\frac{\ln n}{\ln\ln n}\right\}^j<+\infty.$$

Перевіримо, що

$$\sum_{n=3}^{\infty}\mathbb{P}\left\{\zeta_0\le C\frac{\ln n}{\ln\ln n}\right\}^{N_n}<+\infty. \qquad (4.6.6)$$

Для цього скористаємось наступним твердженням.

Теорема 4.6.2. *Для будь-якого* $t>0$ *існує константа* $a_t>0$, *що для довільного* $C\ge t$

$$\mathbb{P}\{\zeta_0\ge C\}\ge a_t\frac{1}{\sqrt{C}}e^{-\frac{C}{2t}}.$$

Доведення. Оскільки траєкторії спряжених потоків Арратья $\{y(u,r),\ u\in\mathbb{R},\ r\in[0;t]\}$ та $\{x(u,r),\ u\in\mathbb{R},\ r\in[0;t]\}$ не перетинаються, то для довільного $C\geq 0$

$$\mathbb{P}\{\zeta_0\geq C\}=\mathbb{P}\left\{\sum_{\theta\in\Theta_t\cap[0;1]}(\Delta y(\theta,t))^2\geq C\right\}\geq$$

$$\geq\mathbb{P}\left\{x(0,t)=x(\sqrt{C},t),\ \ x(0,t)\in[0;1]\right\}. \tag{4.6.7}$$

Нехай $\{w_1(s),\ s\geq 0\}$, $\{w_2(s),\ s\geq 0\}$ – незалежні вінерівські процеси, що $w_1(0)=w_2(0)=0$. Позначимо

$$\tau=\inf\left\{r\geq 0\ \middle|\ w_1(r)=\sqrt{C}+w_2(r)\right\}.$$

Тоді для (4.6.7) виконуються співвідношення

$$\mathbb{P}\left\{x(0,t)=x(\sqrt{C},t),\ \ x(0,t)\in[0;1]\right\}=$$

$$=\mathbb{P}\left\{\tau\leq t,\ w_1(t)\in[0;1]\right\}\geq$$

$$\geq\mathbb{P}\left\{\sqrt{C}+w_2(t)\leq 0,\ w_1(t)\in[0;1]\right\}=$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{u^2}{2t}}du\cdot\int_{\sqrt{C}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{u^2}{2t}}du.$$

Для довільного $h>0$ виконується нерівність [35]

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_h^{+\infty}e^{-\frac{v^2}{2}}dv\geq\frac{h}{h^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{h^2}{2}}.$$

Отже, для всіх $C\geq C_0$ має місце оцінка знизу

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{u^2}{2t}}du\cdot\int_{\sqrt{C}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{u^2}{2t}}du\geq a_t\frac{1}{\sqrt{C}}e^{-\frac{C}{2t}}$$

з константою

$$a_t=\frac{1}{8\pi}\int_0^1 e^{-\frac{u^2}{2t}}du,$$

що доводить твердження.

$\square$

У силу теореми 4.6.2 виконуються нерівності

$$N_n\mathbb{P}\left\{\zeta_0 \geq C\frac{\ln n}{\ln\ln n}\right\} = \frac{n}{[\sqrt{8\ln n}]}\mathbb{P}\left\{\zeta_0 \geq C\frac{\ln n}{\ln\ln n}\right\} \geq$$

$$\geq \frac{a_t}{\sqrt{8C}} \cdot \frac{n\sqrt{\ln\ln n}}{\ln n}e^{-\frac{C\ln n}{2t\ln\ln n}}, \tag{4.6.8}$$

з чого випливає (4.6.6). Таким чином, для довільного $C > 0$ ряд (4.6.5) збігається, що доводить (4.6.4), а, отже, й (4.6.3). □

Згідно з теоремою 4.6.2 та нерівністю (4.5.8) для зростання норм випадкових операторів $Q_{[-n;n]}A_tQ_{[-n;n]}$ має місце наступна оцінка

$$\frac{\ln\ln n}{\ln n} \cdot \left\|Q_{[-n;n]}A_tQ_{[-n;n]}\right\|^2 \to \infty, \quad n \to \infty \qquad \text{м. н.} \tag{4.6.9}$$

Зауважимо, що у першому розділі для випадкового оператора $\widetilde{A}$, що побудований за точковим процесом Пуассона з інтенсивністю один, для зростання величин $\|Q_{[-n;n]}\widetilde{A}Q_{[-n;n]}\|^2$ доведено аналогічну (4.6.9) оцінку.

Висновки до розділу 4

1. Побудована компактна множина у сепарабельному гільбертовому просторі, для якої діагональний гаусівський сильний випадковий оператор не змінює асимптотичну поведінку її поперечників за Колмогоровим.

2. Побудовано сім'ю скінченновимірних підпросторів, що під дією сильного випадкового оператора зсуву уздовж потоку Арратья зберігають свою розмірність з ймовірністю 1.

3. Знайдено оцінку зростання норм випадкових ядерних операторів, які наближають інтегральний випадковий оператор, породжений потоком Арратья.

Висновки

У дисертації вивчаються властивості випадкових операторів, що побудовані за одновимірними стохастичними потоками.

Основні результати даної дисертаційної роботи наступні:

- для гаусівського сильного випадкового оператора встановлено достатню умову існування неперервної модифікації на компактній множині;
- отримано формулу інтегрування частинами для потоку Арратья;
- встановлено необмеженість оператора зсуву уздовж потоку Арратья та достатню умову існування образу компактної множини під його дією;
- отримано необхідні та достатні умови збереження збіжності послідовностей функцій під дією оператора зсуву уздовж потоку Арратья;
- знайдено оцінку зростання максимальної кількості кластерів потоку Арратья;
- встановлено, що зсуви гаусівської щільності уздовж стаціонарного точкового процесу утворюють тотальну множину у просторі L_2 на довільному відрізку;

- отримано оцінку швидкості наближення ядерними випадковими операторами інтегрального оператора, породженого точковим процесом за потоком Арратья.

Список використаної літератури

[1] *Adler R. J., Taylor J. E.* Random Fields and Geometry. — Springer, 2007. — 455 p.

[2] *Arratia R.* Brownian motion on the line. — PhD dissertation, Univ. Wisconsin, 1979. — 128 p.

[3] *Arnold L.* Random dynamical systems. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998. — 586 p.

[4] *Aronson D. G.* Bounds for the fundamental solution of a parabolic equations // Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967) 890–896.

[5] *Berestycki N.* Recent progress in coalescent theory. — Ensaios Matemáticos [Mathematical Surveys], 16. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2009. — 193 pp.

[6] *Dorogovtsev A. A., Gnedin A. V., Vovchanskii M. B.* Iterated logarithm law for sizes of clusters in Arratia flow // Theory of Stochastic Processes **18(34)**: 2 (2012) 1–7.

[7] *Dorogovtsev A. A.* Semigroups of finite-dimensional random projections // Lithuanian Mathematical Journal **51**:3 (2011) 330–341.

[8] *Dorogovtsev A. A.* Krylov -Veretennikov expansion for coalescing stochastic flows // Commun. Stoch. Anal. **6**:3 (2012) 421–435.

[9] *Dorogovtsev A. A.* Stochastic flows. — CRC Press. To appear.

[10] *Dorogovtsev A. A., Ostapenko O. V.* Large deviations for flows of interacting Brownian motions // Stochastics and Dynamics **10**:3 (2010) 315–339.

[11] *Dorogovtsev A. A., Nishchenko I. I.* An analysis of stochastic flows // Communications on Stochastic Analysis **8**:3 (2014) 331–342.

[12] *Dorogovtsev A. A.* Transformations of Wiener Measure and Orthogonal Expansions // A. A. Dorogovtsev, G. V. Riabov //arXiv:1310.4722 – 2013.

[13] *Dorogovtsev A. A., Korenovska Ia. A.* Some random integral operators related to a point processes // Theory of Stochastic Processes **22**(**38**):1 (2017) 16–21.

[14] *Dorogovtsev A. A., Korenovska Ia. A.* Essential sets for random opera- tors constructed from an Arratia flow // Communications on Stochastic Analysis **11**:3 (2017) 301–312.

[15] *Dorogovtsev A. A., Korenovska Ia. A., Glinyanaya E. V.* On some random integral operators generated by an Arratia flow // Theory of Stochastic Processes **22**(**38**):2 (2017) 8–18.

[16] *Fontes L. R. G., Isopi M., Newman C. M., Ravishankar K.* The Brownian web // Proc. Nat. Acad. Sciences **99** (2002) 15888–15893.

[17] *Glinyanaya E. V.* Spatial Ergodicity of the Harris Flows // Communications on Stochastic Analysis **11**:2 (2017) 223–231.

[18] *Glinyanaya E. V.* Semigroups of m-point motions of the Arratia flow, and binary forests // Theory of Stochastic Processes **19(35)**:2 (2014) 31–41.

[19] *Ito S.* On the canonical form of turbulence // Nagoya Mathematical Journal **2** (1951) 83–92.

[20] *Fomichov V. V.* The level-crossing intensity for the density of the image of the Lebesgue measure under the action of a Brownian flow // Ukrainian Mathematical Journal **69**:6 (2017) 803–822.

[21] *Fomichov V.* The distribution of the number of clusters in the Arratia flow // Communications on Stochastic Analysis **10**:3 (2016) 257–270.

[22] *Fomichov V. V.* A note on weak convergence of the n-point motions of Harris flows // Theory of Stochastic Processes **21(37)**:2 (2016) 4–13.

[23] *Fomichov V. V.* The rate of weak convergence of the n-point motions of Harris flows // International Workshop in Honour of Prof. V. V. Buldygin

[24] *Harris T. E.* Coalescing and noncoalescing stochastic flows in $\mathbb{R}$ // Stoch. Proc. and Appl. **17**:2 (1982) 187–210.

[25] *Konarovskyi V.* On asymptotic behavior of the modified Arratia flow // Electronic Journal of Probability **22**:19 (2017) 1–31.

[26] *Korenovska I. A.* Random maps and Kolmogorov widths // Theory of Stochastic Processes **20**(**36**):1 (2015) 78–83.

[27] *Korenovska I. A.* Random maps and widths of compact sets in Hilbert space // Yu. V. Linnik Centennial Conference «Analytical methods in number theory, probability theory and mathematical statistics», September 14–18, 2015, St. Petersburg, Russia: abstract. — P. 30–31.

[28] *Korenovska I. A.* The images of compact sets under Gaussian strong random operators // International Conference Dedicated to the 80th Anniversary of Prof. A. Ya. Dorogovtsev «Stochastic Processes in Abstract Spaces», October 14–16, 2015, Kyiv, Ukraine: abstract. — P. 28.

[29] *Korenovska I. A.* Strong random operators generated by stochastic flows // International Workshop in Honour of Prof. V. V. Buldygin «Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory and Mathematical Statistics», October 10–12, 2016, Kyiv, Ukraine: abstract. — P. 31–32.

[30] *Korenovska Ia. A.* Random operators related to an Arratia flow // 12th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics and 2018 IMS Annual Meeting on Probability and Statistics, July 2–6, 2018, Vilnius, Lithuania: abstract. — P. 249.

[31] *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations. — Cambridge University Press, 1990. — 346 p.

[32] *Last G., Penrose M.* Lectures on the Poisson Processes. — Cambridge University Press, 2017 (to appear).

[33] *Mohammed S.-E. A., Scheutzow M. K. R.* Spatial estimates for stochastic flows in Euclidean space // The Annals of Probability **26**:1 (1998) 56–77.

[34] *Nishchenko I. I.* Discrete time approximation of coalescing stochastic flows on the real line // Theory of Stochastic Processes **17(33)**:1 (2011) 70–78.

[35] *Peres Y., Mörters P.* Brownian motion. — Cambridge University Press, 2010. — 413 p.

[36] *Riabov G. V.* Ito-Wiener expansion for functionals of the Arratia's flow n-point motion // Theory of Stoch. Processes **19(35)**:2 (2014) 64–89.

[37] *Shamov A.* Short-time asymptotics of one-dimensional Harris flows // Communications on Stochastic Analysis **5**:3 (2011) 527–539.

[38] *Tikhomirov V. M.* Some questions in approximation theory (in Russian). — Izdat. Moskov.Univ., Moscow, 1976. — 304 p.

[39] *Tóth B., Werner W.* The true self-repelling motion // Probab. Theory Related Fields **111**:3 (1998) 375–452.

[40] *Tsirelson B.* Scaling limit, noise, stability. — Lecture Notes in Mathematics 1840, Springer, 2004, pp. 1–106.

[41] *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. — Москва, Наука, 1965. — 408 с.

[42] *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. — Москва, Наука, 1986. — 448 с.

[43] *Го Х.-С.* Гауссовские меры в банаховых пространствах. — Москва, Мир, 1979. — 176 с.

[44] *Дороговцев А. А.* Стохастический анализ и случайные отображения в гильбертовом пространстве. — Киев, Наукова думка, 1992. — 120 с.

[45] *Дороговцев А. А.* Некоторые замечания о винеровском потоке со склеиванием // Укр. мат. журн. **57**:10 (2005) 1327–1333.

[46] *Дороговцев А. А.* Мерозначные процессы и стохастические потоки. — Киев, Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 289 с.

[47] *Дороговцев А. А.* Энтропия стохастических потоков // Матем. сб. **201**:5 (2010) 17–26.

[48] *Исмагилов Р. С.* Об n - мерных поперечниках компактов в гильбертовом пространстве // Функциональный анализ и его приложения **2**:2 (1968) 32–39.

[49] *Конаровський В. В.* Система дифузійних частинок із склеюванням змінної маси // Український математичний журнал **62**:1 (2010) 90–103.

[50] *Кореновская Я. А.* Свойства сильных случайных операторов, построенных по потоку Арратья // Украинский математический журнал **69**:2 (2017) 157–172.

[51] *Кореновская Я. А.* Случайные отображения и поперечники компактов в гильбертовом пространстве // XXII международная конференция молодых ученых «Ломоносов», 13–17 апреля, 2015, Москва, Россия: аннотация. — ISBN 978-5-317-04946-1.

[52] *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений. — Москва, Наука, 1976. — 320 с.

[53] *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. — Москва, Наука, 1980. — 384 с.

[54] *Лифшиц М. А.* Гауссовские случайные функции. — Киев, ТВіМС, 1995. — 246 с.

[55] *Маловичко Т. В.* Теорема Гирсанова для стохастических потоков со взаимодействием // Украинский математический журнал **60**:11 (2008) 1529–1538.

[56] *Скороход А. В.* Операторные стохастические дифференциальные уравнения и стохастические полугруппы // Успехи мат. наук **37**:6(228) (1982) 157–183.

[57] *Скороход А. В.* Случайные линейные операторы. — Киев, 1978. — 200 с.

[58] *Чернега П. П.* Локальное время в нуле для потока Арратья // Украинский математический журнал **64**:4 (2012) 542–556.

Додаток

Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в п'яти статтях у фахових виданнях, що індексуються наукометричною базою Scopus, та п'яти збірках тез міжнародних конференцій:

1. *Korenovska I. A.* Random maps and Kolmogorov widths // Theory of Stochastic Processes **20**(**36**):1 (2015) 78–83.

2. *Кореновская Я. А.* Свойства сильных случайных операторов, построенных по потоку Арратья // Украинский математический журнал **69**:2 (2017) 157–172.

3. *Dorogovtsev A. A., Korenovska Ia. A.* Some random integral operators related to a point processes // Theory of Stochastic Processes **22**(**38**):1 (2017) 16–21.

4. *Dorogovtsev A. A., Korenovska Ia. A.* Essential sets for random operators constructed from an Arratia flow // Communications on Stochastic Analysis **11**:3 (2017) 301–312.

5. *Dorogovtsev A. A., Korenovska Ia. A., Glinyanaya E. V.* On some random integral operators generated by an Arratia flow // Theory of Stochastic Processes **22**(**38**):2 (2017) 8–18.

6. *Кореновская Я. А.* Случайные отображения и поперечники компактов в гильбертовом пространстве // XXII международная конференция молодых ученых «Ломоносов», 13–17 апреля, 2015, Москва, Россия: аннотация. — ISBN 978-5-317-04946-1.

7. *Korenovska I. A.* Random maps and widths of compact sets in Hilbert space // Yu. V. Linnik Centennial Conference «Analytical methods in number theory, probability theory and mathematical statistics», September 14–18, 2015, St. Petersburg, Russia: abstract. — P. 30–31.

8. *Korenovska I. A.* The images of compact sets under Gaussian strong random operators // International Conference Dedicated to the 80th Anniversary of Prof. A. Ya. Dorogovtsev «Stochastic Processes in Abstract Spaces», October 14–16, 2015, Kyiv, Ukraine: abstract. — P. 28.

9. *Korenovska I. A.* Strong random operators generated by stochastic flows // International Workshop in Honour of Prof. V. V. Buldygin «Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory and Mathematical Statistics», October 10–12, 2016, Kyiv, Ukraine: abstract. — P. 31–32.

10. *Korenovska Ia. A.* Random operators related to an Arratia flow // 12th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics and 2018 IMS Annual Meeting on Probability and Statistics, July 2–6, 2018, Vilnius, Lithuania: abstract. — P. 249.

Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на наступних конференціях і наукових семінарах:

1. XXII международная конференция молодых ученых «Ломоносов», 13–17 апреля, 2015, Москва, Россия;

2. Yu. V. Linnik Centennial Conference «Analytical methods in number theory, probability theory and mathematical statistics», September 14–18, 2015, St. Petersburg, Russia;

3. International Conference Dedicated to the 80th Anniversary of Prof. A. Ya. Dorogovtsev «Stochastic Processes in Abstract Spaces», October 14–16, 2015, Kyiv, Ukraine;

4. International Workshop in Honour of Prof. V. V. Buldygin «Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory and Mathematical Statistics», October 10–12, 2016, Kyiv, Ukraine;

5. 12th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics and 2018 IMS Annual Meeting on Probability and Statistics, July 2–6, 2018, Vilnius, Lithuania;

6. 2nd Ukrainian-German Mini-Workshop in stochastics «Stochastic calculus and geometry of stochastic flows with singular interactions», November 15, 2016, Jena, Germany;

7. Symposium on Probability Theory and Random Processes, June 4–10, 2017, St. Petersburg, Russia;

8. науковому семінарі «Числення Маллявена та його застосування» Інституту математики НАН України під керівництвом доктора фізико-математичних наук, професора А. А. Дороговцева (6 доповідей);

9. науковому семінарі «Статистичні проблеми для випадкових процесів і полів» при кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей фізико-математичного факультету Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут» імені Ігоря Сікорського під керівництвом доктора фізико-математичних наук, професора О. І. Клесова та доктора фізико-математичних наук, професора О. В. Іванова;

10. науково-дослідницькому семінарі «Funktionenräume» при кафедрі аналізу та математичної фізики факультету математики та інформатики Єнського університету імені Фрідріха Шиллера під керівництвом професора Dr. Hans Triebel та професора Dr. Hans-Jürgen Schmeißer;
11. науковому семінарі «Stochastische Analysis» інституту математики Берлінського технічного університету під керівництвом професора Dr. Michael Scheutzow.