ВІДГУК
офіційного опонента
на дисертацію Кореновської Ярослави Аркадіївни
"Геометричні властивості нескінченновимірних відображень,
що породжені сингулярними стохастичними потоками",
подану на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика

Актуальність теми дисертації

У 1979 році у своїй дисертаційній роботі R.A. Arratia побудував математичну модель системи броунівських частинок на числовій прямій, які рухаються незалежно до моменту зустрічі, а потім склеюються та рухаються разом. Дана модель була запропонована як неперервний аналог дискретної моделі випадкових блукань зі склеюванням і отримана з останньої за допомогою її шкалювання та граничного переходу. Початковим інтересом до вивчення даної системи броунівських частинок зі склеюванням (надалі потоку Арратья) був її зв'язок з моделлю голосування (див. Arratia, 1981). Пізніше потік Арратья та його узагальнення, броунівська сітка, також виникають як граничний об'єкт у здавалося б незв'язаних між собою моделях. Наприклад, у роботі J. Norris та A. Turner (2012) – у зв'язку з пленарними моделями Гастінгса-Левітова, у праці C.F. Coletti та інших (2009) – у зв'язку з моделлю дренажної мережі, у роботі A. Sarkar та R. Sun (2013) – у зв'язку з орієнтованою перколяцією. На даний момент потік Арратья активно вивчається і є важливою математичною моделлю, яка має застосування у теорії турбулентності, статистичній механіці, гідрології, популяційній генетиці, тощо. Потрібно також відмітити, що дана модель допускає ряд важливих узагальнень та модифікацій, див., наприклад, роботи T.E. Harris (1984) для систем броунівських частинок із гладкою взаємодією, Y. Le Jan та O. Raimond (2004), S. Evans та інші (2013) для систем марковських процесів зі склеюванням, C. Howitt та J. Warren (2009), Y. Le Jan та O. Raimond (2004), R. Sun та J.M. Swart (2008 та 2014) для систем частинок з відбиттям, В. Конаровського та M. von Renesse (2017 та 2019), V. Marx (2018) для систем частинок, які склеюються або відштовхуються, змінюючи дифузію.

На сьогоднішній день існує велика кількість робіт, присвячених вивченню властивостей потоку Арратья. Зокрема великий вклад було зроблено А.А. Дороговцевим та його учнями (див., наприклад, роботи А.А. Дороговцева (2004, 2006, 2012), А.А. Дороговцева та О.В. Остапенко (2010), А.А. Дороговцева та М.Б. Вовчанського (2012, 2018), А.А. Дороговцева та Г.В. Рябова (2016), А. Шамова (2011), Г.В. Рябова (2017), К.В. Глиняної (2012, 2014), В.В. Фомічова (2016), а також інші роботи, перечислені у списку літератури дисертаційної роботи). Однак залишається ще багато відкритих питань, які потребують розвитку нових методів. Дана дисертаційна робота є логічним продовженням досліджень, які проводяться у Відділі теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України. У ній пропонується вивчення потоку Арратья з точки зору сильних випадкових операторів, які були введені А.В. Скороходом (1978) (див. також роботи А.А. Дороговцева (1986, 1988, 1989 та інші)) та є досить "тонким" математичним об'єктом, використовуючи як методи стохастичних процесів, так і функціонального аналізу. На мою думку, даний підхід є досить продуктивним і може бути застосований для вивчення інших моделей дифузійних частинок, згаданих вище. У роботі вивчаються деякі сильні випадкові оператори, породжені потоком Арратья, які не є обмеженими. Зокрема досліджується питання існування неперервної модифікації та обмеженості на деяких класах функцій, образи компактних множин під дією таких операторів.

Результати дисертаційної роботи можуть бути використані як для подальшого вивчення стохастичних потоків із сингулярною взаємодією, так і для дослідження властивостей фізичних моделей, які приводять до потоку Арратья. Підсумовуючи вище сказане, вважаю, що тема дисертаційної роботи є актуальною, а отримані результати — важливими.

Зміст роботи

Дисертація складається з анотації українською і англійською мовами, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаної літератури, що включає 58 найменувань, і додатку зі списком публікацій здобувача за темою дисертації та відомостями про апробацію результатів дисертації.

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертації, вказано на зв'язок роботи з науковими програмами, сформульовано мету та задачі дослідження, об'єкт, предмет і методи дослідження, відзначено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, їх апробацію та публікації, а також наведено короткий зміст роботи.

Перший розділ дисертації присвячений питанню існування образів компактних множин під дією сильних випадкових операторів. У підрозділі 1.1 наводиться означення сильного випадкового оператора та розглядаються декілька прикладів таких операторів. У підрозділі 1.2 вивчається дія сильного випадкового оператора на компактні множини. Основною проблемою є те, що сильні випадкові оператори, взагалі кажучи, не є випадковими елементами у просторі операторів, тому образ множини під дією такого оператора може не існувати. У зв'язку з цим автор доводить аналог умови Даллі, який гарантує існування образу компактної множини під дією гаусівського сильного випадкового оператора. Також у даному підрозділі встановлено необхідну та достатню умову обмеженості сильного випадкового оператору, який породжений розв'язками стохастичного диференціального рівняння (див. Лема 1.2.1).

Другий розділ дисертації присвячений випадковим інтегральним операторам, породженими точковими процесами. Означення точкового процесу і деякі приклади таких процесів наведено у підрозділі 2.1. У цьому підрозділі автор також доводить Теорему 2.1.1 про щільність у просторі L_2 лінійної оболонки зсувів гаусівської щільності уздовж стаціонарного ергодичного точкового процесу. Даний результат використовується пізніше для доведення Теореми 4.4.2, а також може мати незалежний інтерес. У підрозділі 2.2 вивчаються випадкові інтегральні оператори, породжені стаціонарними точковими процесами. Зокрема показано, що такі оператори не є обмеженими, якщо точковий процес є ергодичним і асоційована міра з додатною ймовірністю має як завгодно велику кількість атомів на обмеженому інтервалі (див. Теорема 2.2.2). Пізніше у підрозділі 2.3 з цього твердження випливає необмеженість сильного випадкового інтегрального оператора, породженого точковим процесом за потоком Арратья. У зв'язку з цим автором встановлено оцінку зростання норми ядерних випадкових операторів, що наближають такий сильний випадковий інтегральний оператор (див. Теорема 2.3.1). Даний результат випливає з оцінки зростання максимальної кількості кластерів потоку Арратья на відрізку (див. Лема 2.3.1).

Важливі результати отримані автором у *третьому розділі*, який присвячений вивченню сильних випадкових операторів зсуву, що побудовані за потоком Арратья. Зокрема у підрозділі 3.1 доведено формулу інтегрування частинами (3.1.3), яка встановлює зв'язок між мірою, отриманою при перенесенні міри Лебеґа потоком Арратья, та мірою Лебеґа-Стільтьєса, побудованою за дуальним потоком Арратья. Необмеженість оператору зсуву для потоку Арратья встановлено у другому підрозділі. Там же отримано достатні умови на клас функцій, що гарантують існування образу даного класу під дією оператора зсуву, та показано, що образ є випадковою компактною множиною. У підрозділі 3.3 вивчається питання збереження збіжності під дією оператора зсуву, породженого потоком Арратья, а саме: встановлено необхідні та достатні умови на збіжну послідовність функцій, за яких збіжність зберігається при дії оператору зсуву, побудованого за потоком Арратья.

Четвертий розділ дисертації присвячено геометричним властивостям образів компактних множин під дією випадкових операторів. У першому підрозділі даного розділу автор обчислює поперечник за Колмогоровим деякого нескінченновимірного прямокутника у сепарабельному гільбертовому просторі і у наступному підрозділі показує, що діагональний гаусівський випадковий оператор не змінює асимптотичну поведінку її поперечників (див. Лема 4.2.1). У підрозділі 4.3 встановлено оцінки зверху образу деякої компактної множини під дією випадкового оператора зсуву, породженого потоком Арратья. Неможливість отримати оцінку знизу зв'язана з тим, що образи деяких скінченновимірних підпросторів під дією оператора зсуву можуть бути нульовими з додатною ймовірністю. По цій причині у підрозділі 4.4 автором побудовано деяку сім'ю підпросторів, які не змінюють свою розмірність під дією оператора зсуву. Даний результат сформульований у вигляді Теореми 4.4.2. Останні два підрозділи присвячені дослідженню властивостей випадкових інтегральних операторів, породжених потоком Арратья.

Отримані нові наукові результати

У дисертації отримано такі основні результати:

- отримано достатню умову існування образу компактної множини під дією гаусівського сильного випадкового оператора;
- показано, що лінійна оболонка зсувів гаусівської щільності вздовж стаціонарного ергодичного точкового процесу є щільною в $L_2[a, b]$;
- встановлено оцінку знизу швидкості зростання норм ядерних випадкових операторів, які наближають сильний випадковий інтегральний оператор, породжений точковим процесом за потоком Арратья;
- доведено формулу інтегрування частинами для потоку Арратья;
- показано, що оператор зсуву вздовж потоку Арратья є необмеженим у просторі $L_2(\mathbb{R})$, а також отримано достатні умови на компактні множини в $L_2(\mathbb{R})$, на яких оператор зсуву має неперервну модифікацію;
- отримано необхідні та достатні умови збереження збіжності майже всюди за мірою Лебега послідовності функцій під дією оператора зсуву, породженого потоком Арратья;
- встановлено оцінку знизу швидкості зростання норм ядерних випадкових операторів, які наближають сильний випадковий інтегральний оператор, породжений потоком Арратья.

Обґрунтування отриманих результатів

Теоретичні результати роботи містяться у перелічених вище теоремах та лемах. Усі математичні твердження строго доведені з використанням сучасних методів теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів та функціонального аналізу.

Зауваження

За текстом дисертації необхідно зробити наступні зауваження.

- У посиланнях на інші роботи варто було б також вказувати сторінки та номера теорем, означень тощо.
- Ймовірність на *С.36 р.3*[1] рівна одиниці, а не нулю.
- *С.40 р.6* Варто було б пояснити, чому оператор A – лінійний. На мою думку, це не є тривіальним питанням для неспеціалістів.
- *С.45 Означення 2.1.4* та *С.46 р.6* Варто було б відмітити, що надалі розглядається певна модифікація потоку Арратья. Якщо розглядати довільну сім'ю випадкових процесів $\{x(u, s),\ u \in \mathbb{R},\ s \geq 0\}$, що задовольняють умови 1)-3) означення, то наприклад, множина $x([a, b], t)$ може бути нескінченною майже напевно.
- *С.51 р.6* Незрозуміло, чому (2.2.2) достатньо для перевірки 2'). Взагалі кажучи, властивість 2') випливає з нерівності на *С.53 р.7*.
- *С.53 Теорема 2.2.2* Варто також додати умову $M|\Theta \cap [0, 1]|^2 < \infty$. У іншому випадку незрозуміло, чи A є сильним випадковим оператором.
- *С.54 р.4* і *С.55 р.5* Пропущена константа $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ у правій частині нерівності.
- *С.63 р.6* Варто було б пояснити, чому збіжність ряду (2.3.11) випливає з даної нерівності.
- Хоча означення оператору зсуву для потоку Арратья наведено у вступі, варто було б пригадати його означення на *початку підрозділу 3.2*, де вперше вивчаються його властивості. Факт, що цей оператор є сильним випадковим оператором, варто було б сформулювати як окрему лему.
- *С.79 р.3* Визначення потоку σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t\}$ варто було б сформулювати раніше, оскільки $\mathcal{F}_\sigma$ використовується раніше на *С.79 р.1*
- *С.93 р.-8* Варто було б пояснити вибір компакту K.
- *С.101 р.9* C не є підмножиною H. Варто було б її визначити як $C = \{f \in H|\ (f, e_k) = 0,\ k < m$ або $k > m + n,\ |(f, e_k)| \leq \frac{\sqrt{n}}{k},\ m \leq k \leq m + n\}$.
- Описки: повинно бути *С.13 р.-1* "отримав" замість "отриман"; *С.38 р.3* $\|h\|_H = 1$ замість $\|h\| = 1$; *С.46 р.-2* $A \subset M_l$ замість $A \in M_l$; *С.68 р.11* (3.1.4) замість (4.5.3); *С.80 р.-5* $\mathbb{1}_{(a_n;a_n+1]}$ замість $\mathbb{1}_{(a_n;a_{n+1}]}$; *С.89 р.8* $... > 1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi t}}$ замість $... > 1 - \varepsilon$; *С.114 р.7* $M\|T_t f\|^2_{L_2(\mathbb{R})}...$ замість $M\|T_t \mathbb{1}_B\|^2_{L_2(\mathbb{R})}...$

Наведені зауваження не впливають на загальну високу оцінку дисертаційної роботи і мають редакторський характер.

Викладення результатів в опублікованих працях та авторефераті

Основні результати дисертації з достатньою повнотою викладено у п'яти статтях у фахових наукових виданнях, що входять до наукометричної бази Scopus, та у п'яти тезах міжнародних конференцій.

Результати дослідження належним чином представлено в авторефераті, зміст якого ідентичний з основними положеннями дисертації.

[1] Сторінка 36, рядок 3

Висновки

Дисертаційна робота Кореновської Ярослави Аркадіївни є самостійним, логічно завершеним, теоретично обґрунтованим на високому фаховому рівні науковим дослідженням, яке містить істотно нові результати з теорії сингулярних стохастичних потоків.

Робота має теоретичний характер. Отримані результати та запропоновані методи можуть бути застосовані при подальшому дослідженні стохастичних потоків із сингулярною взаємодією. Результати автора можна використати для читання спеціальних курсів лекцій з теорії випадкових процесів та теорії стохастичних потоків в університетах України та за кордоном.

Вважаю, що дисертація Кореновської Ярослави Аркадіївни "Геометричні властивості нескінченновимірних відображень, що породжені сингулярними стохастичними потоками", подана на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика, відповідає вимогам "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 24 липня 2013 р. № 567 (зі змінами, внесеними згідно з постановами КМУ №656 від 19.08.2015 р. та № 159 від 30.12.2015 р.), стосовно кандидатських дисертацій, а її автор – Кореновська Ярослава Аркадіївна заслуговує на присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика.

Офіційний опонент
кандидат фізико-математичних наук,
науковий співробітник Інституту математики,
Лейпцизький університет, Німеччина Конаровський В.В.

22 лютого 2019 р.

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Fakultät für Mathematik und Informatik
Tel. +49-341-9732100 · Fax +49-341-9732199
PF 10 09 20 · D-04009 Leipzig

Надійшов до спеціалізованої вченої ради
Д 26.206.02 27.02.2019р.
Вчений секретар спеціалізованої вченої ради /Пелюх Г.П./

Інститут математики Національної академії наук України
Канцелярія