НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Вигівська Людмила Вячеславівна

УДК 517.5

ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ, ЯКІ НЕ ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ, З ВІЛЬНИМИ ПОЛЮСАМИ НА КОЛІ

01.01.01 — математичний аналіз
111 — математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник

доктор фізико-математичних наук, професор
БАХТІН Олександр Костянтинович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ЗАДЕРЕЙ Петро Васильович,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського», м. Київ,
професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей
фізико-математичного факультету;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
ТАРГОНСЬКИЙ Андрій Леонідович,
Житомирський державний університет
імені Івана Франка, м. Житомир,
доцент кафедри математичного аналізу
фізико-математичного факультету.

Захист відбудеться **26 березня 2019 р.** о 15^{00} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий **13 лютого 2019 р.**

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **РОМАНЮК А. С.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Теорія екстремальних задач для областей, які не перетинаються, розпочинається з роботи М. О. Лаврентьєва[1], який 1934 року поставив і розв'язав задачу про добуток конформних радіусів двох взаємно неперетинних областей. Задачі такого типу викликали великий інтерес серед математиків, оскільки відразу знайшли своє застосування у теорії відображень, теорії однолистих функцій, теорії апроксимації та деяких інших областях комплексного аналізу. 1951 року Г. М. Голузін[2] розв'язав задачу для трьох областей і узагальнив постановку задачі для n однозв'язних областей. Для $n = 4$ повний розв'язок знайшла Г. В. Кузьміна[3]. Для випадку, коли кількість областей більша від чотирьох, розв'язку задачі в загальному випадку не отримано й досі. Найзагальнішу постановку екстремальних задач для неперетинних областей з фіксованими полюсами сформулював М. А. Лебедєв[4], який розглядав задачі про максимізацію добутку конформних радіусів у деяких додатніх степенях на класах неперетинних однозв'язних областей, які в загальній постановці не вирішені й дотепер.

Над задачами для неперетинних областей з фіксованими полюсами в різні роки працювали такі відомі математики, як М. О. Лаврентьєв, Г. Грьотш, Г. М. Голузін, М. А. Лебедєв, П. П. Куфарев, А. Е. Фалес, Г. В. Кузьміна, Л. І. Колбіна, П. М. Тамразов, І. П. Мітюк, Ю. Є. Алєніцин, Дж. А. Дженкінс, М. Шиффер, П. Дюрен, З. Нехарі та інші.

Нову ідею не фіксувати полюси, а надавати їм певну «свободу» вперше було висунуто в роботі П. М. Тамразова[5] 1968 р., в якій розглянуто задачу про п'ять простих вільних полюсів першого порядку. На той час досить несподіваним було застосування цієї ідеї до задач, яким відповідають квадратичні диференціали з полюсами другого порядку. Це було вперше зроблено у роботах Г. П. Бахтіної[6], яка розглянула екстремальні задачі для неперетинних областей із вільними полюсами на колі. В подальшому задачі такого типу отримали назву задач про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами.

---

[1] Лаврентьев М.А. К теории конформных отображений / М.А. Лаврентьев // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — **5**. — С. 159 – 245.

[2] Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г.М. Голузин. — М.: Наука, 1966. — 628 с.

[3] Кузьмина Г.В. К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей / Г.В. Кузьмина // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 1980. – **100.** – С. 131 – 145.

[4] Лебедев Н.А. Принцип площадей в теории однолистных функций / Н.А. Лебедев. — М.: Наука, 1975. — 336 с.

[5] Тамразов П.М. Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов / П.М. Тамразов // Известия АН СССР, серия мат. — 1968. — **32**, № 5. — С. 1033 – 1043.

[6] Бахтина Г.П. Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: спец. 01.01.01 "Теория функций и функциональный анализ"/ Г.П. Бахтина. — Киев, 1975. — 11 с.

Таким чином, важлива ідея П. М. Тамразова про вільні полюси відповідних квадратичних диференціалів відіграла суттєву роль у створенні нового напрямку в геометричній теорії функцій, а саме: в теорії екстремальних задач про неперетинні області з вільними полюсами.

Методи досліджень, які були розроблені до початку 70-х років, зокрема, метод контурного інтегрування, варіаційні методи, метод симетризації, параметричний метод, натикались на великі труднощі при дослідженні задач про максимум добутку конформних радіусів неперетинних областей.

Наприкінці 70-х років минулого століття В. М. Дубініну[7] вдалося розробити новий метод дослідження задач геометричної теорії функцій, а саме: метод розділяючого перетворення, який значно розширив можливості дослідження задач такого типу.

1984 р. Г. П. Бахтіна[8] розглянула задачу про максимум функціонала

$$I=\prod_{k=0}^{n} R^{\alpha_k}(B_k,a_k),$$

де $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ — довільна система однозв'язних взаємно неперетинних областей, причому області $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ симетричні відносно одиничного кола, $a_0=0\in B_0\subset U$, $a_k\in B_k\subset\mathbb{C}$, $|a_k|=1$, $k=\overline{1,n}$, $\alpha_k\geqslant 0$, $k=\overline{0,n}$, $R(B,a)$ — конформний радіус області B відносно точки a, й отримала деякі часткові результати даної задачі.

В. М. Дубінін[9] 1988 р. зробив важливий крок у розвитку цієї теорії, зокрема, він розглянув і повністю розв'язав задачу про максимум функціонала

$$J_n(\gamma)=r^{\gamma}(B_0,a_0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)$$

при $\gamma=1$ і $n\geqslant 2$, де $B_0,B_1,...,B_n$ — довільні неперетинні багатозв'язні області, $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $|a_k|=1$, $k=\overline{1,n}$, $r(B,a)$ — внутрішній радіус області B відносно точки a.

[7]Дубинин В.Н. Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении / В.Н. Дубинин // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — **168**. — С. 48 – 66.

[8]Бахтина Г. П. О конформных радиусах симметричных неналегающих областей / Г.П. Бахтина //Современ. вопр. веществен. и комплексн. анализа, Ин–т матем. АН УССР, Киев. — 1984. — С. 21–27.

[9]Дубинин В.Н. Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении / В.Н. Дубинин // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — **168**. — С. 48 – 66.

В. М. Дубінін у списку відкритих проблем[10] сформулював такі дві задачі.

Задача 1. Довести, що максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

де B_0, B_1, B_2, ..., B_n, $(n \geqslant 2)$ — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_j, a_j)$ — внутрішній радіус області B_j відносно точки a_j $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0, n}$ і $\gamma \geqslant n$ досягається для деякої конфігурації областей, які мають n – кратну симетрію.

Задача 2. Для кожного фіксованого $\gamma \in (0, n]$ знайти максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)$$

за умови, що B_0, B_1, B_2, ..., B_n, $(n \geqslant 2)$ — попарно неперетинні багатозв'язні області в $\overline{\mathbb{C}}$, причому області B_1, B_2, ..., B_n, $(n \geqslant 2)$ симетричні відносно точок одиничного кола, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_k, a_k)$ — внутрішній радіус області B_k відносно точки a_k $(a_k \in B_k)$, $k = \overline{0, n}$.

Відзначимо, що задача 2 була сформульована лише при $\gamma = 1$. Власне, дослідженню цих двох задач і присвячена дисертаційна робота.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у відділі комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України в рамках наукової теми «Метричні та геометричні задачі теорії аналітичних і субгармонічних функцій та множин», номер державної реєстрації 0116U003060.

Мета і завдання дослідження.

Об'єктом дослідження є екстремальні задачі геометричної теорії функцій комплексної змінної для областей, які не перетинаються, з вільними полюсами на колі.

Предметом дослідження є задачі про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей.

Метою дисертаційної роботи є розробка нових підходів і методів для розв'язування задач про максимізацію добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей і їх узагальнень.

[10] Дубинин В.Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного / В.Н. Дубинин // Успехи мат. наук. — 1994. — **49** (295), № 1. — С. 3 — 76.

Для досягнення зазначеної мети у роботі було поставлено такі *завдання*:

1) розв'язати задачу про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів частково перетинних областей із вільними полюсами на колі;

2) розробити методи для розв'язання задачі про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами, які утворюють n-променеві системи точок;

3) розв'язати задачу про максимум добутку внутрішніх радіусів скінченного числа взаємно неперетинних симетричних областей відносно точок одиничного кола і внутрішнього радіусу в степені γ, $\gamma \in (0,1)$ та $\gamma > 1$ області відносно початку координат.

Методи дослідження. При розв'язанні завдань дисертаційної роботи використовуються методи комплексного аналізу, теорії потенціалу і квадратичних диференціалів.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі отримані результати дисертаційної роботи є новими і полягають у наступному:

1. Отримано узагальнення відомих результатів для задач про екстремальне розбиття неперетинних і частково перетинних областей комплексної площини з вільними полюсами на колі.

2. Розв'язано задачу про екстремальне розбиття з вільними полюсами, які утворюють n-променеві системи точок.

3. Знайдено максимум добутку внутрішніх радіусів n, $n \geqslant 2$ взаємно неперетинних симетричних областей відносно точок одиничного кола і внутрішнього радіуса в степені $\gamma \in (0,1)$ області відносно початку координат. Для $\gamma > 1$ вказано максимум такого добутку, який справджується, починаючи з деякого номера n, залежного від γ; а за додаткових умов щодо розміщення точок на колі отримано точні оцінки при $\gamma \in (1; 0,38n^2)$, $\ n \geqslant 2$.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати й методика їх отримання можуть бути використані при вивченні питань комплексного аналізу, голоморфної динаміки, теорії апроксимації і для оцінок викривлення при конформному відображенні.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку й загального плану досліджень, постановка задач, формулювання робочих гіпотез, а також допомога у доборі методів досліджень належать науковому керівнику — О. К. Бахтіну. Доведення всіх основних результатів дисертації, які виносяться на захист, належать автору дисертації. У спільних із І. В. Денегою й О. К. Бахтіним публікаціях 1, 2, 6 внесок авторів такий: О. К. Бахтіну належить постановка задач, формулювання робочих гіпотез, І. В. Денезі належить загальна методика розв'язання задач, дисертанту — перевірка гіпотез і доведення результатів. У спільній із Я. В. Заболотним публікації 5 внесок авторів такий: Я. В. Заболотному належить формулювання робочих гіпотез і загальна методика розв'язання задачі, дисертанту — перевірка гіпотез і доведення результату.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідались на таких конференціях:

– XI Літній школі «Алгебра, Топологія, Аналіз» (м. Одеса, 1 – 14 серпня 2016 року);

– V Міжнародній конференції молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я. Б. Лопатинського (м. Київ, 9 – 11 листопада 2016 року);

– Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (м. Ворохта, 22 – 25 лютого 2017 року);

– Міжнародній науковій конференції «Алгебраїчні та геометричні методи аналізу» (м. Одеса, 31 травня – 5 червня 2017 року);

– Міжнародній конференції молодих математиків, присвяченій 100-річчю з дня народження академіка Національної Академії Наук України Ю. О. Митропольського (1917 – 2008) (м. Київ, 7 – 10 червня 2017 року);

– Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (м. Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 року);

– Науково-технічній конференції молодих вчених та спеціалістів Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України (м. Київ, 16 травня 2018 року);

– Міжнародній науковій конференції «(Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications» (Бендлево, Польща, 22 – 29 липня 2018 року);

а також на таких семінарах:

– семінари відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор С. А. Плакса);

– семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор А. С. Романюк).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 6 фахових роботах, серед яких 4 статті в журналах, що індексуються міжнародною наукометричною базою Scopus. Частково вони також висвітлені у матеріалах 7 конференцій, 3 з яких міжнародні.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, 4 розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 107 найменувань, і додатку, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації й відомості про апробацію результатів дисертації. Повний обсяг дисертації становить 151 сторінку.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету і завдання дослідження, коротко викладено зміст основної частини роботи й показано наукову новизну одержаних результатів, а також їх апробація.

У **розділі 1** зроблено огляд літератури, викладено основні ідеї методів дослідження даних проблем, наведено означення і теореми, необхідні для формулювання і доведення основних результатів дисертації.

Нехай $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ – однозв'язна область, $U = \{z : |z| < 1\}$ – одиничний круг і $a \in B$. Згідно з теоремою Рімана про відображення, існує конформне відображення області B на одиничний круг U, при якому $f(a) = 0 \in U$, $f'(a) > 0$. Якщо розглянути обернене відображення φ, яке здійснює відображення одиничного круга U на область B так, що $\varphi(0) = a$. Тоді поняття конформного радіуса однозв'язної області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ визначимо таким чином

$$R(B, a) = \frac{1}{|f'(a)|} = |\varphi'(0)|.$$

Узагальненням поняття конформного радіуса для багатозв'язних областей є поняття внутрішнього радіуса області, який визначається за допомогою узагальненої функції Гріна.

Нехай $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B \neq \overline{\mathbb{C}}$. Функцією Гріна області B називається така дійсна функція $g_B(z, a)$, яка визначена при всіх $z, a \in B$, $z \neq a$, і при кожному фікованому $a \in B$ виконуються наступні умови:

1) функція $g_B(z, a)$ як функція від z гармонічна в області $B \setminus \{a\}$;

2) якщо $z \to a$, то $g_B(z, a) \to +\infty$, при цьому різниця $g_B(z, a) - \ln \frac{1}{|z-a|}$ залишається обмеженою для скінченного a, різниця $g_B(z, a) - \ln |z|$ обмежена для $a = \infty$;

3) при наближенні до границі ∂B функція $g_B(z, a)$ прямує до нуля.

Довільну область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ завжди можна вичерпати послідовністю областей $B_1 \subset B_2 \subset ...$, для кожної з яких існує функція Гріна. Тоді за теоремою Харнака про зростаючі послідовності гармонічних функцій випливає, що для кожної точки $a \in B \setminus \{\infty\}$ послідовність гармонічних функцій

$$h_{B_k,a}(z) := g_{B_k}(z, a) - \ln \frac{1}{|z-a|}, \quad z \in B \setminus \{a\},$$

визначена за неперервністю в точці a й рівномірно збігається на компактних підмножинах області B при $k \to \infty$ або до $+\infty$ або до деякої гармонічної функції $h_{B,a}(z)$, яка не залежить від вибору областей $B_1, B_2, ...$. В цьому випадку функція

$$g_B(z, a) := h_{B,a}(z) + \ln \frac{1}{|z-a|}$$

називається узагальненою функцією Гріна області B відносно точки a, а величина $r(B, a) := \exp(h_{B,a}(a))$ називається внутрішнім радіусом області B відносно точки a.

Таким чином,

$$g_B(z, a) = \ln \frac{1}{|z-a|} + \ln r(B, a) + o(1),$$

де $o(1) \rightrightarrows 0, \quad z \to a$.

Відзначимо, що відмінність узагальненої функції Гріна від класичної функції Гріна полягає в тому, що при наближенні до границі узагальнена функція Гріна прямує до нуля всюди, за винятком, можливо, множини логарифмічної ємності нуль.

Одним із основних понять у даній роботі є поняття квадратичного диференціала. Фундаментальну роль квадратичних диференціалів у теорії екстремальних задач уперше відзначив О. Тейхмюллер[11],[12] 1939 року. Крім того, він сформулював принцип про те, що у більшості випадків кожній екстремальній задачі геометричної теорії функцій комплексної змінної відповідає деякий квадратичний диференціал.

Нехай B — область розширеної комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}_z$. Під квадратичним диференціалом у B розумітимемо символ

$$Q(z)dz^2,$$

де $Q(z)$ — функція, мероморфна у B. Якщо область $\psi(D) = B \subset \overline{\mathbb{C}}_z$, де ψ — конформне й однолисте відображення, то вважатимемо, що квадратичний диференціал породжує в області D за допомогою функції ψ квадратичний диференціал

$$\widetilde{Q}(w)dw^2 = Q(\psi(w))(\psi'(w))^2 dw^2.$$

Скінченна точка $z_0 \in B$ називається нулем або полюсом порядку n диференціала $Q(z)dz^2$, якщо вона є нулем або полюсом функції $Q(z)$.

Нулі і полюси квадратичного диференціала $Q(z)dz^2$ називаються його критичними точками, причому нулі і прості полюси називаються скінченними критичними точками.

Максимальна регулярна крива $z(t)$, $t \in (a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, при якій для всіх $t \in (a, b)$ виконується нерівність $Q(z)dz^2 \equiv Q(z(t))(z'(t))^2 dt^2 > 0$ (відповідно $Q(z)dz^2 < 0$), називається траєкторією (відповідно ортогональною траєкторією) диференціала. При конформному однолистому відображенні траєкторії переходять у траєкторії.

Круговою областю квадратичного диференціала $Q(z)dz^2$ називається однозв'язна область $G \subset \overline{\mathbb{C}}_z$, яка містить єдиний полюс другого порядку цього квадратичного диференціала в точці $z = a \in G$ і така, що при конформному однолистому відображенні $w = f(z)$ ($f(a) = 0$) області G на одиничний круг площини $\mathbb{C}_w$, має місце тотожність

$$Q(z)dz^2 \equiv -k\frac{dw^2}{w^2}, \quad k \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty).$$

[11]Teichmüller O. Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung / O. Teichmüller // Deutshe Math. — 1938. — **3**. — S. 621 – 678.

[12]Дженкинс Дж.А. Однолистные функции и конформные отображения / Дж. Дженкинс — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 256 с.

Кругова область G для $Q(z)dz^2$ містить єдиний подвійний полюс a диференціала $Q(z)dz^2$ і $G \setminus \{a\}$ заповнена траєкторіями $Q(z)dz^2$, кожна із яких є замкнутою жордановою кривою, яка відділяє точку a від границі G. При певному виборі чисто уявної сталої τ функція $w = \exp\{\tau \int (Q(z))^{\frac{1}{2}} dz\}$, доозначена значенням нуль в точці a, конформно відображає G на круг $|w| < r$, причому точка a переходить в точку $w = 0$.

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Набір точок $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C} : \, k = \overline{1,n}\right\}$ називатимемо n-променевою системою точок, якщо $|a_k| \in \mathbb{R}^+, \quad k = \overline{1,n}$, і

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi.$$

Нехай $P_k = P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}, \quad a_{n+1} := a_1$, $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi} \arg \dfrac{a_{k+1}}{a_k}, \quad \alpha_{n+1} := \alpha_1, \quad k = \overline{1,n}, \quad \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2.$

Системою неперетинних областей називається скінченний набір довільних попарно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=1}^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2$, у яких $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \emptyset, \quad k \neq m, \quad k, m = \overline{1,n}.$

Наведемо визначення операції заповнення несуттєвих граничних компонент відносно системи взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=1}^n$. При кожному $k = \overline{1,n}$ лише скінченна кількість компонент зв'язності множини $\overline{\mathbb{C}} \backslash B_k$ можуть містити якусь із областей B_j, $j = \overline{1,n}$, $j \neq k$; такі компоненти називають суттєвими. Область, отриману викиданням із $\overline{\mathbb{C}}$ всіх суттєвих компонент зв'язності множини B_k, будемо позначати $\widetilde{B}_k$. Очевидно, що $B_k \subset \widetilde{B}_k$ при всіх $k = \overline{1,n}$ і $\left\{\widetilde{B}_k\right\}_{k=1}^n$ є системою скінченнозв'язних взаємно неперетинних областей без ізольованих граничних точок. Перехід від системи $\{B_k\}_{k=1}^n$ до системи $\left\{\widetilde{B}_k\right\}_{k=1}^n$ називатимемо операцією заповнення несуттєвих граничних компонент. Відмітимо, що внутрішній радіус області при збільшенні області не зменшується, тобто виконується умова $r(B, a) \leqslant r(\widetilde{B}, a)$. Отже, операція заповнення несуттєвих компонент дозволяє перейти від нескінченнозв'язних областей до скінченнозв'язних областей з невиродженими суттєвими компонентами.

Для довільної системи точок $A_n := \{a_k : |a_k| = 1, k = \overline{1,n}\}$ і для відкритої множини D, $A_n \cup \{0\} \subset D$ позначимо через $D(a_k)$ зв'язну компоненту множини D, яка містить точку $a_k, \quad k = \overline{0,n}.$

Нехай

$$D_k(0) := D(0) \cap \overline{P}_k, \quad D_k(a_k) := D(a_k) \cap \overline{P}_k, \quad D_k(a_{k+1}) := D(a_{k+1}) \cap \overline{P}_k$$

для кожного $k = \overline{1, n}$, $a_{n+1} := a_1$.

Відкрита множина D, $A_n \cup \{0\} \subset D$ задовольняє умову неперетинності відносно системи точок A_n, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, якщо справедлива рівність

$$[D_k(0) \cap D_k(a_k)] \cup [D_k(0) \cap D_k(a_{k+1})] \cup [D_k(a_k) \cap D_k(a_{k+1})] = \emptyset \quad 1 \leq k \leq n.$$

Система областей $\{D_k\}_{k=0}^n$ задовольняє умову часткового перетину відносно системи точок одиничного кола, якщо відкрита множина $D = \cup_{k=0}^n D_k$ задовольняє умову неперетинності відносно системи точок цього самого кола.

Виклад основних результатів дисертаційного дослідження починається з **розділу 2**. У розділі 2 вивчається задача про максимум добутку внутрішніх радіусів частково перетинних областей. Основним результатом даного розділу є теорема, яка суттєво посилює результати попередників. А саме, нам вдалося істотно розширити множину значень параметра γ, для яких ця задача має точний розв'язок.

Теорема 2.2.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_4 = 4,17$, $\gamma_5 = 5,71$, $\gamma_6 = 7,5$, $\gamma_7 = 9,53$, $\gamma_8 = 11,81$ і $\gamma_n = 0,1215\, n^2$ для $n \geqslant 9$. Тоді для довільної системи різних точок одиничного кола $|a_k| = 1$ і при умові, що $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1, n}$ і для довільної системи областей D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, які задовольняють умову часткового перетину відносно точок одиничного кола, справедлива нерівність*

$$r^\gamma\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Рівність досягається, якщо a_k і D_k, $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

Результати розділу опубліковано в статтях[13],[14] та тезах конференцій[15],[16].

Відзначимо, що умови теореми 2.2.1 справедливі й у випадку взаємно неперетинних областей. З даної теореми безпосередньо випливає результат, отриманий Г. П. Бахтіною, В. Є. В'юн, І. В. Денегою у роботі[17] 2015 року ($\gamma \in (0, n], \quad n \geqslant 4, \quad 0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$) на класі областей, які задовольняють умову часткового перетину відносно точок одиничного кола. Результати Л. В. Ковальова[18] 1996 року ($\gamma \in (0, n], \quad n \geqslant 5, \quad 0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}, \quad |a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$) та О. К. Бахтіна й І. В. Денеги[19] 2012 року ($\gamma \in (0, n], \quad n \geqslant 4$, $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}, \quad |a_k| = 1, \quad k = \overline{1, n}$) для взаємно неперетинних областей також випливають з основної теореми розділу 2.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячено доведенню теореми про максимум добутку внутрішніх радіусів n, $n \geqslant 2$ взаємно неперетинних областей відносно $n-$променевої системи точок і внутрішнього радіуса в степені γ області відносно початку координат.

Для довільної n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ та $\gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ введемо «керуючий» функціонал:

$$\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \left[\chi \left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) \right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}.$$

[13] Бахтин А.К., Выговская Л.В., Денега И.В. Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей // Український математичний вісник. — 2016. — Т. 13, № 1. — С. 68 – 75. (Переклад англійською: Bakthin A., Vyhivska L., Denega I. Inequalities for the internal radii of non-overlapping domains // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 220, No. 5. — P. 584 – 590.)

[14] Vyhivska L. Some inequalities for inner radii of partially overlapping domains // Zb. pr. Institute of mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine. — 2017. — Vol. 14, No. 1. — P. 82 – 89.

[15] Vygivska L., Denega I. Sharp estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // International 11th Summer School «Algebra, Topology, Analysis», 1—14 August, 2016, Odessa, Ukraine. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2016. — P. 59 – 60.

[16] Vyhivska L. Some inequalities for the inner radii of partially overlapping domains // Ukraine Scientific Conference «Modern Problems Theory of Probability and Mathematical Analysis», 22–25 February, 2017, Vorokhta, Ivano-Frankivsk Region, Ukraine. Abstracts. — Івано-Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника", 2017. — P. 61 – 63.

[17] Бахтина Г.П., Вьюн В.Е., Денега И.В. Задачи об экстремальном разбиении для частично неналегающих областей / Г.П. Бахтина, В.Е. Вьюн, И.В. Денега // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, 2015. — Т. 11, №1. — С. 1 — 7.

[18] Ковалев Л.В. К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности / Л.В. Ковалев // Дальневосточный матем. сборник. — 1996. — **2**. — С. 96 – 98.

[19] Bakhtin A.K., Denega I.V. Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane / A.K. Bakhtin, I.V. Denega // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations. — 2012. — V. LXII, no. 2. — P. 83–92.

Теорема 3.2.1. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_4 = 4,17$, $\gamma_5 = 5,71$, $\gamma_6 = 7,5$, $\gamma_7 = 9,53$, $\gamma_8 = 11,81$, $\gamma_n = 0,1215\, n^2$ *для* $n \geqslant 9$. *Тоді для довільної* n*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = 1$ *і при умові, що* $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$ *і довільної системи взаємно неперетинних областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак рівності досягається, коли a_k *і* B_k, $k = \overline{0,n}$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

Результати розділу опубліковано у статті[20] та тезі[21] конференцій.

Відзначимо, що теорема 3.2.1 посилює результат І. В. Денеги[22] 2012 року ($\gamma \in (0, n], \quad n \geqslant 5, \quad 0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}, \quad k = \overline{1,n}$), а також істотно узагальнює результат О. К. Бахтіна й І. В. Денеги[23] 2012 року на випадок $n-$променевої системи точок.

У **четвертому розділі** розв'язано задачу про максимум добутку внутрішніх радіусів n, $n \geqslant 2$ взаємно неперетинних симетричних областей відносно точок одиничного кола і внутрішнього радіуса в степені γ області відносно початку координат. Відзначимо, що стосовно даної задачі відомі лише результати Л. В. Ковальова[24],[25] 2000 року ($\gamma = 1, \quad n \geqslant 2$) та О. К. Бахтіна, Г. П. Бахтіної й І. В. Денеги[26] 2017 року ($\gamma \in (0, 2], \quad n = 2$).

Зокрема, у теоремі 4.2.1 дисертаційної роботи повністю досліджено випадок для $n \geqslant 2$ і $\gamma \in (0,\, 1)$.

---

[20] Bakhtin A., Vyhivska L., Denega I. N-radial systems of points and problems for non-overlapping domains // Lobachevskii Journal of mathematics. — 2017. — Vol. 38, No. 2. — P. 229 – 235.

[21] Vygivska L. Some inequalities for the inner radii of non-overlapping domains // 5th International Conference for Young Scientists on Differential Equations and dedicated to Ya.B. Lopatynsky, 9—11 November, 2016, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Donetsk: Vasyl' Stus Donetsk National University, 2016. — P. 148 – 149.

[22] Денега И.В. Квадратичные дифференциалы и разделяющее преобразование в экстремальных задачах о неналегающих областях / И.В. Денега // Доп. НАН України. — 2012. — №4. — С. 15 – 19.

[23] Bakhtin A.K., Denega I.V. Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane / A.K. Bakhtin, I.V. Denega // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations. — 2012. — V. LXII, no. 2. — P. 83–92.

[24] Ковалев Л.В. О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей / Л.В. Ковалев // Изв. вузов. Матем. — 2000, № 6. — С. 82 – 87.

[25] Ковалев Л.В. О трех непересекающихся областях / Л.В. Ковалев // Дальневосточный математический журнал. — 2000. — **1**, № 1. — С. 3 – 7.

[26] Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Денега И.В. Экстремальное разбиение комплексной плоскости с фиксированными полюсами // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, 2017. — Т. 14, №1. — С. 34 — 38.

Теорема 4.2.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, 1)$. Тоді для довільної системи точок a_k при умові, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $a_1 = 1$ і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, причому області B_k, $k = \overline{1,n}$ симетричні відносно одиничного кола, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \cdot \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Знак рівності досягається, коли a_k і B_k, $k = \overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

У теоремі 4.2.2 приділено увагу випадку $\gamma > 1$, зокрема, доведено справедливість такого результату.

Теорема 4.2.2. *Для довільного $\gamma > 1$ існує таке $n_0(\gamma) \in \mathbb{N}$, що для кожного $n \geqslant n_0(\gamma)$, для довільної системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $|a_k| = 1$ і для довільного набору попарно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, причому області $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ симетричні відносно одиничного кола, виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}\left(B_0^{(0)}, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right),$$

де $a_k^{(0)}$ і $B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$, — полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2,$$

відповідно, причому $|a_k^{(0)}| = 1$ для $k = \overline{1,n}$, $a_0^{(0)} = 0$, $a_k^{(0)} \in B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$.

Знак рівності в цій нерівності досягається, якщо $a_k = a_k^{(0)}$, $B_k = B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$.

У теоремі 4.2.3 показано, що якщо кутові параметри задачі задовольняють умову $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{2\gamma}$, де y_0 — корінь рівняння $\ln\left(\frac{x^2}{4-x^2}\right) - \frac{4}{x^2} = 0$ із проміжку $0 < x \leqslant 2$, то множина тих γ, для яких розв'язується ця задача ширша, порівняно із загальним випадком.

Теорема 4.2.3. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = 0,38n^2$. Тоді для довільної $n-$променевої системи точок A_n, що належить одиничному колу і при умові, що $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{2\gamma}$, $y_0 \approx 1,76$, $k = \overline{1,n}$ і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, причому області B_k, $k = \overline{1,n}$ симетричні відносно одиничного кола, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left|1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right|^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \left|\frac{n - \sqrt{2\gamma}}{n + \sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Знак рівності досягається, коли a_k і B_k, $k = \overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

Результати розділу опубліковано у статтях[27], [28], [29] і тезах[30], [31],[32], [33].

[27]Заболотный Я.В., Выговская Л.В. О произведении внутренних радиусов симметричных многосвязных областей // Український математичний вісник. — 2017. — Т. 14, № 3. — С. 441 – 452. (Переклад англійською: Zabolotnii Ya.V., Vyhivska L.V. On a product of the inner radii of symmetric multiply connected domains // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 231, No. 1. — P. 101 – 109.)

[28]Выговская Л.В. О проблемме В.Н. Дубинина для симметричных многосвязных областей // Український математичний вісник. — 2017. — Т. 14, № 2. — С. 295 – 302. (Переклад англійською: Vyhivska L. On the problem of V.N. Dubinin for symmetric multiply connected domains // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 229, No. 1. — P. 108 – 113.)

[29]Бахтин А.К., Денега И.В., Выговская Л.В. Неравенства для внутренних радиусов симметричных неналегающих областей // Український математичний журнал. — 2018. — Т. 70, № 9. — С. 1282 – 1288.

[30]Vyhivska L. On the problem of product of inner radii symmetric non-overlapping domains // International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis», 31 May—5 June, 2017, Odessa, Ukraine. — P. 103.

[31]Vyhivska L. On the inner radii of symmetric non-overlapping domains // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu.O. Mitropolskiy (1917–2008), 7—10 June, 2017, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — P. 39.

[32]Vyhivska L. Inequalities for the inner radii of symmetric non-overlapping domains // Ukraine Scientific Conference «Modern Problems Theory of Probability and Mathematical Analysis», 27 February-02 March, 2018, Vorokhta, Ivano-Frankivsk Region, Ukraine. — P. 42 – 43.

[33]Вигівська Л.В. Оцінки внутрішніх радіусів симетричних взаємно неперетинних областей // Науково-технічна конференція молодих вчених та спеціалістів Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України (до 100-річчя Національної академії наук України), 16 травня, 2018, Київ, Україна. — ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України. — С. 56 – 57.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі отримано нові результати у класичному напрямку геометричної теорії функцій комплексної змінної, які пов'язані із задачами про екстремальне розбиття комплексної площини. Запропоновано підхід, який базується на методах розділяючого перетворення, квадратичних диференціалів, «керуючих» функціоналів, що дозволило узагальнити й посилити низку відомих результатів щодо екстремальних задач на класах неперетинних і частково перетинних областей.

У роботі проведено дослідження стосовно двох задач, які 1994 року В. М. Дубінін окреслив як відкриті проблеми.

У дисертаційній роботі отримано такі результати:

1. Отримано узагальнення відомих результатів для задач про екстремальне розбиття неперетинних і частково перетинних областей комплексної площини з вільними полюсами на колі.

2. Розв'язано задачу про екстремальне розбиття з вільними полюсами, які утворюють n-променеві системи точок.

3. Знайдено максимум добутку внутрішніх радіусів n, $n \geqslant 2$ взаємно неперетинних симетричних областей відносно точок одиничного кола і внутрішнього радіуса в степені $\gamma \in (0, 1)$ області відносно початку координат. Для $\gamma > 1$ вказано максимум такого добутку, який справджується, починаючи з деякого номера n, залежного від γ; а за додаткових умов щодо розміщення точок на колі отримано точні оцінки при $\gamma \in (1; 0,38n^2), \quad n \geqslant 2$.

Одержані результати і методика їх доведення можуть бути використані при вивченні питань комплексного аналізу, голоморфної динаміки, в теорії апроксимацій і для оцінок викривлення при конформному відображенні.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Бахтин А. К., Выговская Л. В., Денега И. В. Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей // Український математичний вісник. — 2016. — Т. 13, №1. — С. 68 – 75.

(Переклад англійською: Bakthin A., Vyhivska L., Denega I. Inequalities for the internal radii of non-overlapping domains // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 220, No. 5. — P. 584 — 590.)

2. Bakthin A. Vyhivska L. Denega I. N-radial systems of points and problems for non-overlapping domains // Lobachevskii Journal of mathematics. — 2017. — T. 38, № 2. — P. 229 — 235.

3. Vyhivska L. Some inequalities for inner radii of partially overlapping domains // Zb. pr. Institute of mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine. — 2017. — Vol. 14, No. 1. — P. 82 – 89.

4. Выговская Л. В. О проблемме В. Н. Дубинина для симметричных многосвязных областей // Український математичний вісник. — 2017. — Т. 14, № 2. — С. 295 – 302.

(Переклад англійською: Vyhivska L. On the problem of V. N. Dubinin for symmetric multiply connected domains // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 229, No. 1. — P. 108 – 113.)

5. Заболотный Я. В., Выговская Л. В. О произведении внутренних радиусов симметричных многосвязных областей // Український математичний вісник. — 2017. — Т. 14, № 3. — С. 441 – 452.

(Переклад англійською: Zabolotnii Ya. V., Vyhivska L. V. On a product of the inner radii of symmetric multiply connected domains // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 231, No. 1. — P. 101 – 109.)

6. Бахтин А. К., Денега И. В., Выговская Л. В. Неравенства для внутренних радиусов симметричных неналегающих областей // Український математичний журнал. — 2018. — Т. 70, № 9. — С. 1282 – 1288.

7. Vygivska L., Denega I. Sharp estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // International 11th Summer School «Algebra, Topology, Analysis», 1—14 August, 2016, Odessa, Ukraine. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2016. — P. 59 – 60.

8. Vygivska L. Some inequalities for the inner radii of non-overlapping domains // 5th International Conference for Young Scientists on Differential Equations and dedicated to Ya. B. Lopatynsky, 9 — 11 November, 2016, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Donetsk: Vasyl' Stus Donetsk National University, 2016. — P. 148 – 149.

9. Vyhivska L. Some inequalities for the inner radii of partially overlapping domains // Ukraine Scientific Conference «Modern Problems Theory of Probability and Mathematical Analysis», 22-25 February, Vorokhta, Ivano-Frankivsk Region, Ukraine, 2017. — P. 61 – 63.

10. Vyhivska L. On the problem of product of inner radii symmetric non-overlapping domains // International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis», 31 May – 05 June, 2017, Odessa, Ukraine. — P. 103.

11. Vyhivska L. On the inner radii of symmetric non-overlapping domains // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100^{th} Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008), June 7 – 10, 2017, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2017 — P. 39.

12. Vyhivska L. Inequalities for the inner radii of symmetric non-overlapping domains // Ukraine Scientific Conference «Modern Problems Theory of Probability and Mathematical Analysis», 27 February - 02 March, Vorokhta, Ivano-Frankivsk Region, Ukraine, 2018. — P. 42 – 43.

13. Вигівська Л. В. Оцінки внутрішніх радіусів симетричних взаємно неперетинних областей // Науково-технічна конференція молодих вчених та спеціалістів Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України (до 100-річчя Національної академії наук України), 16 травня, 2018, Київ, Україна. — ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України. — С. 56 – 57.

АНОТАЦІЇ

Вигівська Л. В. Екстремальні задачі для областей, які не перетинаються, з вільними полюсами на колі. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — "Математичний аналіз" (111 — Математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена розробці методів дослідження деяких відомих проблем геометричної теорії функцій комплексної змінної. Зокрема, досліджується задача, яка була сформульована В. М. Дубініним 1994 року у вигляді відкритої проблеми. Ця задача стосується знаходженню максимуму добутку внутрішніх радіусів n, $n \geqslant 2$ взаємно неперетинних симетричних областей відносно точок одиничного кола і внутрішнього радіуса в додатній степені γ області відносно початку координат і опису екстремальних конфігурацій. Розв'язується також задача про максимум добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей, частина з яких володіє симетрією відносно одиничного кола.

Ключові слова: неперетинні й частково перетинні системи областей, $n-$променева система точок, конформний і внутрішній радіуси області, функція Гріна області, розділяюче перетворення, полюси і кругові області квадратичного диференціала.

Выговская Л. В. Экстремальные задачи для областей, которые не пересекаются, со свободными полюсами на окружности. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (доктора философии) по специальности 01.01.01 ”Математический анализ” (111 — математика). — Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

Диссертационная работа посвящена разработке методов исследования некоторых известных проблем геометрической теории функций комплексного переменного. В частности, изучается задача, которую В. Н. Дубинин 1994 году представил в виде открытой проблемы. Эта задача касается нахождения максимума произведения внутренних радиусов n, $n \geqslant 2$ взаимно непересекающихся областей относительно точек на единичной окружности и внутреннего радиуса в положительной степени γ области относительно начала координат и описания экстремальных конфигураций. Также изучается задача о максимуме произведения внутренних радиусов непересекающихся областей, часть из которых обладает симметрией относительно единичного круга.

Ключевые слова: непересекающиеся и частично пересекающиеся области, $n-$лучевая система точек, конформный и внутренний радиусы области, функция Грина области, разделяющее преобразование, полюсы и круговые области квадратичного дифференциала.

Vyhivska L. V. Extremal problems for domains that are non-overlapping with free poles on a circle. — The manuscript.

Candidate of Sciences thesis on Physics and Mathematics (PhD thesis), speciality 01.01.01 "Mathematical analysis" (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to the development of research methods of some well-known problems of the geometric function theory of a complex variable. In particular, we studied the problem, which V. N. Dubinin had formulated in 1994 as an open problem. This problem is to find a maximum of the product of inner

radii of n mutually non-overlapping domains with respect to the points on a unit circle and the inner radius of positive degree γ of the domain with respect to zero and description of extreme configurations. An attention in the dissertation is also given to the study of problem of maximizing the product of inner radii of non-overlapping domains in the case when some of the domains are symmetrical with respect to a unit circle.

During the study of these problems we improved the approaches for solving the extremal problems of non-overlapping domains, which are based on the methods of the geometric function theory of a complex variable, potential theory and quadratic differentials. Some of the well-known results of the theory were significantly improved and generalized on the basis of these approaches.

The known results of maximizing the product of inner radii of non-overlapping domains were significantly amplified and generalized in the second and third chapters.

In the second chapter we obtained the generalization of known results for problems of extremal decomposition of non-overlapping and partially overlapping domains of a complex plane with free poles on a circle.

We solved the problem of extremal decomposition with free poles, which form the n-radial points systems in the third chapter.

Some new results for the problem of finding a maximum of the product of inner radii mutually non-overlapping domains in the case when some of the domains are symmetrical with respect to a unit circle were obtained in the fourth chapter. We found a maximum of the product of inner radii of mutually non-overlapping symmetric domains with respect to the points of a unit circle and the inner radius of degree $\gamma \in (0;1)$ of the domain with respect to zero. Moreover, for $\gamma > 1$ a maximum of the product is obtained, starting from a certain number n, which depends on γ. With additional conditions on the parameters of the problem, we obtained the maximum of the product of the inner radii of domains at $\gamma \in (1; 0,38n^2)$.

Key words: non-overlapping and partially overlapping system of domains, $n-$radial system of points, conformal and inner radii of domains, the Green function of domain, separating transformation, poles and circular domains of quadratic differential.

Підписано до друку 16.01.2019. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,5. Умов. друк. арк. 1,4. Тираж 100 пр. Зам. 18.

Інститут математики НАН України,
01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.