НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Вигівська Людмила Вячеславівна

УДК 517.5

ДИСЕРТАЦІЯ

ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ, ЯКІ НЕ ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ, З ВІЛЬНИМИ ПОЛЮСАМИ НА КОЛІ

01.01.01 — Математичний аналіз
111 — Математика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії)

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ________ Л.В. Вигівська

Науковий керівник
Бахтін Олександр Костянтинович
доктор фізико-математичних наук,
професор

Київ — 2018

АНОТАЦІЯ

Вигівська Л.В. Екстремальні задачі для областей, які не перетинаються, з вільними полюсами на колі. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — "Математичний аналіз"(111 — Математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена розробці методів дослідження деяких відомих проблем геометричної теорії функцій комплексної змінної. Зокрема, вивчається задача, яка була представлена у вигляді відкритої проблеми у журналі "Успехи математических наук" 1994 року (див. [35], с. 68, № 9.2). Ця задача стосується знаходженню максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок на одиничному колі і внутрішнього радіуса в додатній степені області відносно початку координат та опису екстремальних конфігурацій. Значна увага у дисертаційній роботі також приділена вивченню задачі про максимум добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей, частина з яких симетричні відносно одиничного кола.

При дослідженні цих задач вдалось удосконалити підходи до розв'язування екстремальних задач про неперетинні області, які базуються на методах геометричної теорії функцій комплексної змінної, теорії потенціалу та квадратичних диференціалів. На основі цих підходів вдалося значно покращити та узагальнити деякі відомі результати даної теорії.

Зокрема, у другому та третьому розділах вдалося значно підсилити та узагальнити відомі результати про максимізацію добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей.

У четвертому розділі отримано нові результати для задачі про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей, частина з яких симетрична відносно одиничного кола.

Додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати та методика їх отримання можуть бути використані при вивченні питань комплексного аналізу, голоморфної динаміки, теорії потенціалу, теорії апроксимації та оцінок викривлення при конформному відображенні.

Ключові слова: неперетинні та частково перетинні системи областей, $n-$променева система точок, конформний та внутрішній радіуси області, функція Гріна області, розділяюче перетворення, полюси та кругові області квадратичного диференціала.

ABSTRACT

Vyhivska L.V. Extremal problems for domains that are non-overlapping with free poles on the circle. — Manuscript.

Candidate of Sciences thesis on Physics and Mathematics (PhD thesis), speciality 01. 01. 01 "Mathematical analysis" (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to the development of the research methods of some well known problems of the geometric function theory of a complex variable. In particular, we studied the problem, which had presented in 1994 as an open problem in the journal "Uspekhi Matematicheskikh Nauk"(see [35], pp. 68, No. 9.2). This problem is to find a maximum of the product of inner radii of mutually non-overlapping domains with respect to the points on a unit circle multiply by the inner radius at some positive degree of the domain with respect to zero and description of extreme configurations. An attention in

the dissertation is also given to the study of the problem of maximizing the product estimation of inner radii of non-overlapping domains in the case when some of the domains are symmetrical with respect to a unit circle.

During the study of these problems we improved the approaches for the solving of the extremal problems of non-overlapping domains, which are based on the methods of the geometric function theory of a complex variable, potential theory and quadratic differentials. Some of the well known results of the theory were significantly improved and generalized on the basis of these approaches.

The known results of maximizing the product of inner radii of non-overlapping domains were significantly amplified and generalized in the second and third chapters.

Obtained in the fourth chapter were some new results for the problem of the finding of a maximum of the product of inner radii mutually non-overlapping domains in the case when some of domains are symmetrical with respect to a unit circle.

Appendix contains applicant's publications list concerning the topic of the thesis and informs where the results of the dissertation have been reported and discussed.

The practical significance of the results. Thesis is a theoretical investigation. Its results and the method for the obtaining of these results can be used in the theory of potential, approximations, holomorphic dynamics, estimation of the distortion problems in conformal mapping, and complex analysis.

Key words: non-overlapping and partially overlapping system of domains, $n-$radial system of points, conformal and inner radii of domains, the Green function of domain, separating transformation, poles and circular domains of quadratic differential.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Бахтин А.К., Выговская Л.В., Денега И.В. Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей // Український математичний вісник. — 2016. — Т. 13, № 1. — С. 68 – 75.

(Переклад англійською: Bakhtin A., Vyhivska L., Denega I. Inequalities for the internal radii of non-overlapping domains // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 220, No. 5. — P. 584 – 590.)

2. Bakhtin A., Vyhivska L., Denega I. N-radial systems of points and problems for non-overlapping domains // Lobachevskii Journal of mathematics. — 2017. — Vol. 38, No. 2. — P. 229 — 235.

3. Vyhivska L. Some inequalities for inner radii of partially overlapping domains // Zb. pr. Institute of mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine. — 2017. — Vol. 14, No. 1. — P. 82 – 89.

4. Выговская Л.В. О проблемме В.Н. Дубинина для симметричных многосвязных областей // Український математичний вісник. — 2017. — Т. 14, № 2. — С. 295 – 302.

(Переклад англійською: Vyhivska L. On the problem of V.N. Dubinin for symmetric multiply connected domains // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 229, No. 1. — P. 108 – 113.)

5. Заболотный Я.В., Выговская Л.В. О произведении внутренних радиусов симметричных многосвязных областей // Український математичний вісник. — 2017. — Т. 14, № 3. — С. 441 – 452.

(Переклад англійською: Zabolotnii Ya.V., Vyhivska L.V. On a product of the inner radii of symmetric multiply connected domains // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 231, No. 1. — P. 101 – 109.)

6. Бахтин А.К., Денега И.В., Выговская Л.В. Неравенства для внутренних радиусов симметричных неналегающих областей // Український математичний журнал. — 2018. — Т. 70, № 9. — С. 1282 – 1288.

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ НА КОНФЕРЕНЦІЯХ

1. Vygivska L., Denega I. Sharp estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // International 11th Summer School «Algebra, Topology, Analysis», 1—14 August, 2016, Odessa, Ukraine. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2016. — P. 59 – 60.

2. Vygivska L. Some inequalities for the inner radii of non-overlapping domains // 5th International Conference for Young Scientists on Differential Equations and dedicated to Ya.B. Lopatynsky, 9 — 11 November, 2016, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Donetsk: Vasyl' Stus Donetsk National University, 2016. — P. 148 – 149.

3. Vyhivska L. Some inequalities for the inner radii of partially overlapping domains // Ukraine Scientific Conference «Modern Problems Theory of Probability and Mathematical Analysis», 22 – 25 February, 2017, Vorokhta, Ivano-Frankivsk Region, Ukraine. Abstracts. — Івано-Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника", 2017. — P. 61 – 63.

4. Vyhivska L. On the problem of product of inner radii symmetric non-overlapping domains // International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis», 31 May — 5 June, 2017, Odessa, Ukraine. — P. 103.

5. Vyhivska L. On the inner radii of symmetric non-overlapping domains // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu.O. Mitropolskiy (1917 – 2008), 7 — 10 June, 2017, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — P. 39.

6. Vyhivska L. Inequalities for the inner radii of symmetric non-overlapping domains // Ukraine Scientific Conference «Modern Problems Theory of Probability and Mathematical Analysis», 27 February – 02 March, 2018, Vorokhta, Ivano-Frankivsk Region, Ukraine. — P. 42 – 43.

7. Вигівська Л.В. Оцінки внутрішніх радіусів симетричних взаємно неперетинних областей // Науково-технічна конференція молодих вчених та спеціалістів Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України (до 100-річчя Національної академії наук України), 16 травня, 2018, Київ, Україна. — ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України. — С. 56 – 57.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел;

$\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел;

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — розширена комплексна площина або сфера Рімана;

$\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$;

$x \in E$ — елемент x належить множині E;

$X \subset E$ — множина X є підмножиною множини E;

$U = \{z : |z| < 1\}$ – одиничний круг;

$R(B, a)$ — конформний радіус однозв'язної області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ (див. с. 15, 25);

$r(B, a)$ — внутрішній радіус багатозв'язної області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ (див. с. 16, 26);

$g_B(z, z_0)$ — функція Гріна області B з полюсом в точці z_0 (див. с. 16, 25);

$\widetilde{\mathfrak{B}} = \{\widetilde{B_k}\}_{k=0}^n$ — заповнення несуттєвих граничних компонент системи неперетинних областей $\mathfrak{B} = \{B_k\}_{k=0}^n$ (див. с. 30 – 31);

$A_n = \{a_k \in \mathbb{C}, \quad k = \overline{1, n}\}$ — $n-$ променева система точок (див. с. 17, 56, 76);

$\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n)$ — керуючий функціонал $n-$ променевої системи точок (див. с. 19, 56, 77);

α_k — кутові параметри системи точок A_n (див. с. 17, 46, 56);

$P_k = P_k(A_n)$ — кутові області (див. с. 17, 46, 56);

$T = \{f_k\}_{k=0}^n$ — клас систем однолистих функцій (див. с. 99);

$Q(z)dz^2$ — квадратичний диференціал (див. с. 27 – 28);

$\chi(t) = \frac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right)$ — функція Жуковського (див. с. 56).

ВСТУП

Актуальність теми.

Теорія екстремальних задач для областей, які не перетинаються, розпочинається з відомої роботи М.О. Лаврентьєва [69], який 1934 року поставив та розв'язав задачу про добуток конформних радіусів двох взаємно неперетинних областей. Задачі такого типу викликали великий інтерес серед математиків, оскільки відразу знайшли своє застосування у теорії відображень, теорії однолистих функцій, теорії апроксимації та деяких інших областях комплексного аналізу. 1951 року Г.М. Голузін [27] розв'язав задачу для трьох областей і узагальнив постановку задачі для n однозв'язних областей. Для $n = 4$ повний розв'язок знайшла Г.В. Кузьміна[60]. Для випадку, коли кількість областей більша від чотирьох, розв'язку задачі в загальному випадку не отримано і досі. Найзагальнішу постановку екстремальних задач для неперетинних областей з фіксованими полюсами сформулював М.А. Лебедєв [70], який розглядав задачі про максимізацію добутку конформних радіусів у деяких додатніх степенях на класах неперетинних однозв'язних областей, які в загальній постановці не вирішені і дотепер.

Над задачами для неперетинних областей з фіксованими полюсами в різні роки працювали такі відомі математики як М.О. Лаврентьєв, Г. Грьотш, Г.М. Голузін, М.А. Лебедєв, П.П. Куфарев, А.Е. Фалес, Г.В. Кузьміна, Л.І. Колбіна, П.М. Тамразов, І.П. Мітюк, Ю.Є. Алєніцин, Дж.А. Дженкінс, М. Шиффер, П. Дюрен, З. Нехарі та ін.

Нову ідею не фіксувати полюси, а надавати їм певну "свободу" вперше було висунуто в роботі П.М. Тамразова [78], в якій розглянуто задачу про п'ять простих вільних полюсів першого порядку. На той час досить несподівано було застосування цієї ідеї до задач, яким відповідають квадратичні диференціали з полюсами другого порядку. Це було вперше зроблено у роботах Г.П. Бахтіної (див. напр. [19]), яка розглянула екстремальні задачі для неперетинних областей з вільними полюсами на колі. В подальшому задачі такого типу отримали назву задач про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами.

Таким чином, важлива ідея П.М. Тамразова про вільні полюси відповідних квадратичних диференціалів відіграла істотну роль в створенні нового напрямку в геометричній теорії функцій, а саме в теорії екстремальних задач про неперетинні області з вільними полюсами.

Методи досліджень, які були розроблені до початку 70-х років, а саме: метод контурного інтегрування, варіаційні методи, метод симетризації, параметричний метод, натикались на великі труднощі при дослідженні задач про оцінки добутків конформних радіусів неперетинних областей.

Наприкінці 70-х років минулого століття В.М. Дубініну [33, 34] вдалося розробити новий метод дослідження задач геометричної теорії функцій, зокрема, метод розділяючого перетворення, який значно розширив можливості дослідження задач такого типу.

В 1984 р. [20] Г.П. Бахтіна розглянула задачу про максимум функціонала

$$I = \prod_{k=0}^{n} R^{\alpha_k}(B_k, a_k),$$

де $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ — довільна система однозв'язних взаємно неперетинних областей, причому області $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ симетричні відносно одиничного кола, $a_0 = 0 \in B_0 \subset U$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$ $\alpha_k \geqslant 0$, $k = \overline{0, n}$, $R(B, a)$ — конформний радіус області B відносно точки a (див. с. 15), і отримала деякі часткові результати даної задачі.

В.М. Дубінін в 1988 р. [34] зробив важливий крок у розвитку цієї теорії, зокрема, він розглянув та повністю розв'язав задачу про максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)$$

при $\gamma = 1$ і $n \geqslant 2$, де $B_0, B_1, ..., B_n$ — довільні неперетинні багатозв'язні області, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B, a)$ — внутрішній радіус області B відносно точки a (див. с. 16).

На відміну від задачі, розглянутої в [20], замість конформного радіуса області розглядається внутрішній радіус (див. с. 16). В роботі [35] у списку відкритих проблем В.М. Дубінін сформулював такі дві задачі.

Проблема 1. Довести, що максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

де B_0, B_1, B_2, ..., B_n, $(n \geqslant 2)$ — попарно неперетині області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_j, a_j)$ — внутрішній радіус області B_j в точці a_j $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0, n}$ і $\gamma \leqslant n$ досягається для деякої конфігурації областей, які мають n – кратну симетрію.

Проблема 2. Для кожного фіксованого $\gamma \in (0, n]$ знайти максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

при умові, що B_0, B_1, B_2, ..., B_n, $(n \geqslant 2)$ — попарно неперетинні багатозв'язні області в $\overline{\mathbb{C}}$, причому області B_1, B_2,..., B_n, $(n \geqslant 2)$ — симетричні відносно точок одиничного кола, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_k, a_k)$ — внутрішній радіус області B_k в точці a_k $(a_k \in B_k)$, $k = \overline{0, n}$.

Відмітимо, що в роботі [35] проблема 2 була сформульована лише при $\gamma = 1$. Власне дослідженню цих двох проблем і присвячена дисертаційна робота.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у відділі комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України в рамках наукової теми «Метричні та геометричні задачі теорії аналітичних і субгармонічних функцій та множин», номер державної реєстрації 0116U003060.

Мета і завдання дослідження.

Об'єктом дослідження є екстремальні задачі геометричної теорії функцій комплексної змінної для областей, які не перетинаються, з вільними полюсами на колі.

Предметом дослідження є задачі про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей.

Метою дисертаційної роботи є розробка нових підходів та методів для розв'язування задач про максимізацію добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей та їх узагальнень.

Для досягнення зазначеної мети у роботі було поставлено такі *завдання*:

1) розв'язати задачу про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів частково перетинних областей із вільними полюсами на колі;

2) розробити методи для розв'язання задачі про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами, які утворюють n-променеві системи точок;

3) розв'язати задачу про максимум добутку внутрішніх радіусів скінченного числа взаємно неперетинних симетричних областей відносно точок одиничного кола і внутрішнього радіусу в степені γ, $\gamma \in (0,1)$ та $\gamma > 1$ області відносно початку координат.

Методи дослідження. При розв'язанні завдань дисертаційної роботи використовуються методи комплексного аналізу, теорії потенціалу і квадратичних диференціалів.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі отримані результати дисертаційної роботи є новими і полягають у наступному:

1. Отримано узагальнення відомих результатів для задач про екстремальне розбиття неперетинних і частково перетинних областей комплексної площини з вільними полюсами на колі.

2. Розв'язано задачу про екстремальне розбиття з вільними полюсами, які утворюють n-променеві системи точок.

3. Знайдено максимум добутку внутрішніх радіусів n, $n \geqslant 2$ взаємно неперетинних симетричних областей відносно точок одиничного кола і внутрішнього радіуса в степені $\gamma \in (0,1)$ області відносно початку координат. Для $\gamma > 1$ вказано максимум такого добутку, який справджується, починаючи з деякого номера n, залежного від γ; а за додаткових умов щодо розміщення точок на колі отримано точні оцінки при $\gamma \in (1; 0,38n^2)$, $\quad n \geqslant 2$.

Виклад основних результатів дисертаційного дослідження починається з **розділу 2**.

Нехай $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ – однозв'язна область, $U = \{z : |z| < 1\}$ – одиничний круг і $a \in B$. Згідно з теоремою Рімана про відображення, існує конформне відображення області B на одиничний круг U при якому $f(a) = 0 \in U$, $f'(a) > 0$. Якщо розглянути обернене відображення φ таке, що здійснює відображення одиничного круга U на область B так, що $\varphi(0) = a$. Тоді поняття **конформного радіуса** однозв'язної області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ визначимо наступним чином

$$R(B, a) = \frac{1}{|f'(a)|} = |\varphi'(0)|.$$

Узагальненням поняття конформного радіуса для багатозв'язних областей є поняття внутрішнього радіуса області, який визначається за допомогою узагальненої функції Гріна.

Нехай $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B \neq \overline{\mathbb{C}}$. **Функцією Гріна** області B називається така дійсна функція $g_B(z,a)$, яка визначена при всіх $z, a \in B$, $z \neq a$ та при кожному фікованому $a \in B$ виконуються наступні умови:

1) функція $g_B(z,a)$ як функція від z гармонічна в області $B \setminus \{a\}$;

2) якщо $z \to a$, то $g_B(z,a) \to +\infty$, при цьому різниця $g_B(z,a) - \ln \frac{1}{|z-a|}$ залишається обмеженою для скінченного a, різниця $g_B(z,a) - \ln|z|$ обмежена для $a = \infty$;

3) при наближенні до границі ∂B функція $g_B(z,a)$ прямує до нуля.

Довільну область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ завжди можна вичерпати послідовністю областей $B_1 \subset B_2 \subset ...$, для кожної з яких існує функція Гріна. Тоді за теоремою Харнака про зростаючі послідовності гармонічних функцій випливає, що для кожної точки $a \in B \setminus \{\infty\}$ послідовність гармонічних функцій

$$h_{B_k,a}(z) := g_{B_k}(z,a) - \ln \frac{1}{|z-a|}, \quad z \in B \setminus \{a\},$$

визначена за неперервністю в точці a та рівномірно збігається на компактних підмножинах області B при $k \to \infty$ або до $+\infty$ або до деякої гармонічної функції $h_{B,a}(z)$, яка не залежить від вибору областей $B_1, B_2, \ldots$. В цьому випадку функція

$$g_B(z,a) := h_{B,a}(z) + \ln \frac{1}{|z-a|}$$

називається **узагальненою функцією Гріна області B відносно точки a**, а величина $r(B,a) := \exp(h_{B,a}(a))$ називається **внутрішнім радіусом області B відносно точки a**.

Таким чином,

$$g_B(z,a) = \ln \frac{1}{|z-a|} + \ln r(B,a) + o(1),$$

де $o(1) \rightrightarrows 0, z \to a$.

Відмітимо, що відмінність узагальненої функції Гріна від класичної функції Гріна полягає в тому, що при наближенні до границі узагальнена функція Гріна прямує до нуля всюди, за винятком, можливо, множини логарифмічної ємності нуль.

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Набір точок $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C},\ k = \overline{1,n}\right\}$ будемо називати n**-променевою системою точок**, якщо $|a_k| \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1,n}$, і

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi.$$

Нехай $P_k = P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $a_{n+1} := a_1$, $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi}\arg\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$.

Системою неперетинних областей називається скінченний набір довільних попарно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ таких, що $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \emptyset$, $k \neq m$, $k, m = \overline{1,n}$.

Для довільної системи точок $A_n := \{a_k : |a_k| = 1, k = \overline{1,n}\}$ і для відкритої множини D, $A_n \cup \{0\} \subset D$, позначимо через $D(a_k)$ зв'язну компоненту множини D, яка містить точку a_k, $k = \overline{0,n}$.

Нехай

$$D_k(0) := D(0) \cap \overline{P}_k,\ D_k(a_k) := D(a_k) \cap \overline{P}_k,\ D_k(a_{k+1}) := D(a_{k+1}) \cap \overline{P}_k,$$

для кожного $k = \overline{1,n}$, $a_{n+1} := a_1$.

Відкрита множина D, $A_n \cup \{0\} \subset D$, задовольняє **умову неперетинності відносно системи точок** A_n, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$ якщо справедлива рівність

$$[D_k(0) \cap D_k(a_k)] \cup [D_k(0) \cap D_k(a_{k+1})] \cup [D_k(a_k) \cap D_k(a_{k+1})] = \emptyset \quad 1 \leq k \leq n.$$

Система областей $\{D_k\}_{k=0}^{n}$ задовольняє **умову часткового перетину відносно системи точок одиничного кола**, якщо відкрита множина $D = \cup_{k=0}^{n} D_k$ задовольняє умову неперетинності відносно системи точок цього ж кола.

В **розділі 2** вивчається задача про максимум добутку внутрішніх радіусів частково перетинних областей. Основним результатом даного розділу є теорема, яка суттєво покращує результати робіт [22, 54, 87]. А саме нам вдалося суттєво розширити множину значень параметра γ, для яких ця проблема має точний розв'язок.

Теорема 2.2.1. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_4 = 4,17$, $\gamma_5 = 5,71$, $\gamma_6 = 7,5$, $\gamma_7 = 9,53$, $\gamma_8 = 11,81$ *і* $\gamma_n = 0,1215\,n^2$ *для* $n \geqslant 9$. *Тоді для довільної системи різних точок одиничного кола* $|a_k| = 1$ *і при умові, що* $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$ *і для довільної системи областей* D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *які задовольняють умову часткового перетину відносно точок одиничного кола, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(D_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \qquad (1)$$

Рівність досягається якщо a_k *і* D_k, $k = \overline{0,n}$, *є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Відзначимо, що умови теореми 2.2.1 справедливі й у випадку взаємно неперетинних областей. З даної теореми безпосередньо випливає результат, отриманий Г. П. Бахтіною, В. Є. В'юн, І. В. Денегою у роботі [22] ($\gamma \in (0, n]$, $\;n \geqslant 4$, $\;0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$) на класі областей, які задовольняють умову часткового перетину відносно точок одиничного кола. Результати Л. В. Ковальова [54] ($\gamma \in (0, n]$, $\;n \geqslant 5$, $\;0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $\;|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$) та О. К. Бахтіна й І. В. Денеги [87] ($\gamma \in (0, n]$, $\;n \geqslant 4$, $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $\;|a_k| = 1$, $\;k = \overline{1,n}$) для взаємно неперетинних областей також випливають з основної теореми розділу 2.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячено доведенню теореми про максимізацію добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно $n-$ променевої системи точок на деяку додатну степінь внутрішнього радіуса області відносно початку координат.

Для довільної n-променевої системи точок $A_n = \{a_k \in \mathbb{C}\}_{k=1}^n$ та $\gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ введемо "керуючий" функціонал:

$$\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \left[\chi \left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) \right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}.$$

Теорема 3.2.1. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_4 = 4,17$, $\gamma_5 = 5,71$, $\gamma_6 = 7,5$, $\gamma_7 = 9,53$, $\gamma_8 = 11,81$ *і* $\gamma_n = 0,1215\, n^2$ *для* $n \geqslant 9$. *Тоді для довільної* n*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = 1$ *і при умові, що* $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$ *і довільної системи неперетинних областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}} \right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{2}$$

Знак рівності досягається коли a_k *і* B_k, $k = \overline{0,n}$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

Відзначимо, що теорема 3.2.1 посилює результат І. В. Денеги [31] ($\gamma \in (0,n]$, $n \geqslant 5$, $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$), а також істотно узагальнює результат О. К. Бахтіна й І. В. Денеги [87] на випадок $n-$ променевої системи точок.

У **четвертому розділі** розв'язано задачу про максимум добутку внутрішніх радіусів n, $n \geqslant$ взаємно неперетинних симетричних областей відносно точок одиничного кола і внутрішнього радіуса в степені γ області відносно початку координат. Відзначимо, що стосовно даної задачі відомі лише результати Л. В. Ковальова [55] 2000 року ($\gamma = 1, \quad n \geqslant 2$) та О. К. Бахтіна, Г. П. Бахтіної й І. В. Денеги [15] 2017 року ($\gamma \in (0, 2], \quad n = 2$).

Зокрема, у теоремі 4.2.1 дисертаційної роботи повністю досліджено випадок для $n \geqslant 2$ і $\gamma \in (0,\, 1)$.

Теорема 4.2.1. [51] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, 1)$. *Тоді для довільної системи точок* a_k *при умові, що* $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1, n}$ *і довільного набору взаємно неперетинних областей* B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, *причому області* B_k, $k = \overline{1, n}$ *симетричні відносно одиничного кола, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \cdot \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}. \qquad (3)$$

Знак рівності досягається коли a_k *і* B_k, $k = \overline{0, n}$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

У теоремі 4.2.2 дисертаційної роботи приділено увагу випадку $\gamma > 1$, зокрема, доведено справедливість такого результату.

Теорема 4.2.2. [25] *Для довільного* $\gamma > 1$ *існує таке* $n_0(\gamma) \in \mathbb{N}$, *що для кожного* $n \geqslant n_0(\gamma)$, *для довільної системи різних точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $|a_k| = 1$ *і для довільного набору попарно неперетинних областей* $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, *причому області*

$\{B_k\}_{k=1}^n$ *симетричні відносно одиничного кола, виконується нерівність*

$$r^\gamma(B_0,0)\prod_{k=1}^n r(B_k,a_k)\leqslant r^\gamma\left(B_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^n r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right), \tag{4}$$

де $a_k^{(0)}$ *і* $B_k^{(0)}$, $k=\overline{0,n}$, *— полюси і кругові області квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{\gamma w^{2n}+2(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2,$$

відповідно, причому $|a_k^{(0)}|=1$ *для* $k=\overline{1,n}$, $a_0^{(0)}=0$, $a_k^{(0)}\in B_k^{(0)}$, $k=\overline{0,n}$.

Знак рівності в цій нерівності досягається, якщо $a_k=a_k^{(0)}$, $B_k=B_k^{(0)}$, $k=\overline{0,n}$.

У теоремі 4.2.3 показано, що якщо кутові параметри задачі задовольняють умову $0<\alpha_k\leqslant y_0/\sqrt{2\gamma}$, де y_0 — корінь рівняння $\ln\left(\frac{x^2}{4-x^2}\right)-\frac{4}{x^2}=0$ із проміжку $0<x\leqslant 2$, то множина тих γ, для яких розв'язується ця задача ширша, порівняно із загальним випадком.

Теорема 4.2.3. [17] *Нехай* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in(0,\gamma_n]$, $\gamma_n=0,38n^2$. *Тоді для довільної* $n-$ *променевої системи точок* A_n, *що належить одиничному колу і при умові, що* $0<\alpha_k\leqslant y_0/\sqrt{2\gamma}$, $y_0\approx 1,76$, $k=\overline{1,n}$ *і довільного набору взаємно неперетинних областей* B_k, $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_k\in B_k\subset\mathbb{C}$, $k=\overline{1,n}$, *причому області* B_k, $k=\overline{1,n}$ *симетричні відносно одиничного кола, справедлива нерівність*

$$r^\gamma\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^n r\left(B_k,a_k\right)\leqslant\left(\frac{4}{n}\right)^n\frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left|1-\frac{2\gamma}{n^2}\right|^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}}\left|\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}. \tag{5}$$

Знак рівності досягається, коли a_k *і* B_k, $k=\overline{0,n}$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{\gamma w^{2n}+2(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати та методика їх отримання можуть бути використані при вивченні питань комплексного аналізу, голоморфної динаміки, теорії апроксимації та для оцінок викривлення при конформному відображенні.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку та загального плану дослідження, постановка задач, формулювання робочих гіпотез, а також допомога у підборі методів дослідження належать науковому керівнику — О. К. Бахтіну. Доведення всіх основних результатів дисертації, які виносяться на захист, проведено особисто автором. У спільних з І.В. Денегою та О.К. Бахтіним публікаціях 1, 2, 6 внесок авторів такий: О.К. Бахтіну належить постановка задач, формулювання робочих гіпотез, І.В. Денезі належить загальна методика розв'язання задач, дисертанту – перевірка гіпотез і доведення результатів. У спільній з Я.В. Заболотним публікації 5 внесок авторів такий: Я.В. Заболотному належить формулювання робочих гіпотез і загальна методика розв'язання задачі, дисертанту – перевірка гіпотез і доведення результату.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідались на таких конференціях:

– XI Літній школі "Алгебра, Топологія, Аналіз" (м. Одеса, 1 – 14 серпня 2016 року);

– V Міжнародній конференції молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я. Б. Лопатинського (м. Київ, 9 – 11 листопада 2016 року);

– Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Ворохта, 22 – 25 лютого 2017 року);

– Міжнародній науковій конференції "Алгебраїчні та геометричні методи аналізу" (м. Одеса, 31 травня – 5 червня 2017 року);

– Міжнародній конференції молодих математиків присвяченій 100-річчю з дня народження академіка Національної Академії Наук України Ю. О. Митропольського (м. Київ, 7 – 10 червня 2017 року);

– Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 року);

– Науково-технічній конференції молодих вчених та спеціалістів Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України (м. Київ, 16 травня 2018 року);

– Міжнародній науковій конференції "(Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications" (Бендлево, Польща, 22 липня – 29 липня 2018 року);

а також на таких семінарах:

– семінари відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор С. А. Плакса);

– семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор А. С. Романюк).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 6 фахових роботах, серед яких 4 статті у журналах, що індексуються міжнародною наукометричною базою Scopus. Частково вони також висвітлені у матеріалах 7 конференцій, 3 з яких міжнародні.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, 4 розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 107 найменувань, і додатку, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації. Повний обсяг дисертації становить 151 сторінку.

Подяки. Висловлюю щиру подяку науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, професору Бахтіну Олександру Костянтиновичу за постановку задач, корисні поради та рекомендації, а також кандидатам фізико-математичних наук Денезі Ірині Вікторівні та Заболотному Ярославу Володимировичу за постійну увагу до роботи та підтримку при роботі над дисертаційною роботою.

РОЗДІЛ 1

ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ ТА ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1.1. Конформний і внутрішній радіуси області та функція Гріна

Нехай $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ – однозв'язна область, $U = \{z : |z| < 1\}$ – одиничний круг і $a \in B$. Згідно з теоремою Рімана про відображення (див. [27], с. 29), існує конформне відображення області B на одиничний круг U при якому $f(a) = 0$, $f'(a) > 0$. Якщо розглянути обернене відображення φ таке, що здійснює відображення одиничного круга U на область B так, що $\varphi(0) = a$. Тоді поняття **конформного радіуса** однозв'язної області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ визначається наступним чином

$$R(B, a) = \frac{1}{|f'(a)|} = |\varphi'(0)|.$$

Узагальненням поняття конформного радіуса для багатозв'язних областей є поняття внутрішнього радіуса області, який визначається за допомогою узагальненої функції Гріна (див. [27], с. 262).

Нехай $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B \neq \overline{\mathbb{C}}$. **Функцією Гріна** області B називається така дійсна функція $g_B(z, a)$, яка визначена при всіх $z, a \in B, z \neq a$ та при кожному фікованому $a \in B$ виконуються наступні умови:

1) функція $g_B(z, a)$ як функція від z гармонічна в області $B \setminus \{a\}$;

2) якщо $z \to a$, то $g_B(z, a) \to +\infty$, при цьому різниця $g_B(z, a) - \log \frac{1}{|z-a|}$ залишається обмеженою для скінченного a, різниця $g_B(z, a) - \log |z|$ обмежена для $a = \infty$;

3) при наближенні до границі ∂B функція $g_B(z,a)$ прямує до нуля.

Для довільної області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ функція Гріна визначається як границя

$$g_B(z,a) = \lim_{n\to\infty} g_{B_n}(z,a),$$

де $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ — вичерпування області B областями, що мають класичну функцію Гріна, тобто $\overline{B}_n \subset B_{n+1}$, $a \in B_1$ і $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = B$. Якщо ця границя дорівнює нескінченності, то говорять, що область B не має функції Гріна.

Крім того, функція Гріна є інваріантом при конформному та однолистому відображенні f, тобто

$$g_{f(B)}(f(z), f(a)) = g_B(z,a), \quad z \in B \setminus \{a\}.$$

Довільну область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ завжди можна вичерпати послідовністю областей $B_1 \subset B_2 \subset ...$, для кожної з яких існує функція Гріна. Тоді за теоремою Харнака про зростаючі послідовності гармонічних функцій випливає, що для кожної точки $a \in B \setminus \{\infty\}$ послідовність гармонічних функцій

$$h_{B_k,a}(z) := g_{B_k}(z,a) - \ln\frac{1}{|z-a|}, \quad z \in B \setminus \{a\},$$

визначена за неперервністю в точці a та рівномірно збігається на компактних підмножинах області B при $k \to \infty$ або до $+\infty$ або до деякої гармонічної функції $h_{B,a}(z)$, яка не залежить від вибору областей $B_1, B_2, \ldots$. В цьому випадку функція

$$g_B(z,a) := h_{B,a}(z) + \ln\frac{1}{|z-a|}$$

називається **узагальненою функцією Гріна області B відносно точки a**, а величина $r(B,a) := \exp(h_{B,a}(a))$ називається **внутрішнім радіусом області B відносно точки a**.

Таким чином,

$$g_B(z,a)=\ln\frac{1}{|z-a|}+\ln r(B,a)+o(1),$$

де $o(1)\rightrightarrows 0, z\to a$.

Наприклад, функція Гріна одиничного круга відносно початку координат має вигляд

$$g_U(z,0)=\ln\frac{1}{|z|}.$$

Для будь-якої однозв'язної області B, яка містить точку a, $f_a(z)$ — функція Рімана, яка відображає область B на одиничний круг так, що $f_a(a)=0$, $f'_a(a)>0$, то функція Гріна має наступний вигляд

$$g_B(z,a)=\ln\frac{1}{|f_a(z)|}.$$

У випадку однозв'язних областей внутрішній радіус співпадає з конформним радіусом.

1.2. Деякі відомості з теорії квадратичних диференціалів

Одним з основних понять в даній роботі є поняття квадратичного диференціала. Фундаментальну роль квадратичних диференціалів в теорії екстремальних задач вперше відмітив О. Тейхмюллер у 1939 році (див., наприклад, [100]). О. Тейхмюллер сформулював принцип про те, що у більшості випадків кожній екстремальній задачі геометричної теорії функцій комплексної змінної відповідає деякий квадратичний диференціал.

Теорія квадратичних диференціалів була розвинена в роботах [30, 90, 91, 99].

Нехай B — область розширеної комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}_z$. Під **квадратичним диференціалом** в B будемо розуміти символ

$$Q(z)dz^2, \tag{1.1}$$

де $Q(z)$ — функція, мероморфна в B. Якщо область $\psi(D) = B \subset \overline{\mathbb{C}}_z$, де ψ — конформне та однолисте відображення, то будемо говорити, що квадратичний диференціал (1.1) породжує в області D за допомогою функції ψ квадратичний диференціал

$$\widetilde{Q}(w)dw^2 = Q(\psi(w))(\psi'(w))^2 dw^2.$$

Скінченна точка $z_0 \in B$ називається **нулем** або **полюсом** порядку n диференціала (1.1), якщо вона має відповідні властивості відносно функції $Q(z)$. Точка $z_0 = \infty$ називається нулем або полюсом порядку n диференціала (1.1), якщо відповідною властивістю володіє точка $w_0 = 0$ відносно функції $Q(1/w)/w^4$.

Нулі і полюси квадратичного диференціала (1.1) називаються його **критичними точками**, причому нулі і прості полюси називаються скінченними критичними точками.

Максимальна регулярна крива $z(t)$, $t \in (a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, така, що для всіх $t \in (a, b)$ виконується нерівність $Q(z)dz^2 \equiv Q(z(t))(z'(t))^2 dt^2 > 0$ (відповідно $Q(z)dz^2 < 0$), називається **траєкторією** (відповідно ортогональною траєкторією) диференціала (1.1). При конформному однолистому відображенні траєкторії переходять в траєкторії.

Круговою областю квадратичного диференціала $Q(z)dz^2$ називається однозв'язна область $G \subset \overline{\mathbb{C}}_z$, яка містить єдиний полюс другого порядку цього квадратичного диференціала в точці $z = a \in G$, така, що при конформному однолистому відображенні $w = f(z)$ ($f(a) = 0$) області G на одиничний круг площини $\mathbb{C}_w$, має місце тотожність

$$Q(z)dz^2 \equiv -k\frac{dw^2}{w^2}, \quad k \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty).$$

Кругова область G для $Q(z)dz^2$ містить єдиний подвійний полюс a диференціала $Q(z)dz^2$ і $G \setminus \{a\}$ заповнена траєкторіями $Q(z)dz^2$, кожна із яких є замкнутою жордановою кривою, яка відділяє точку a від границі G. При певному виборі чисто уявної сталої τ функція $w = \exp\{\tau \int (Q(z))^{\frac{1}{2}} dz\}$, доозначена значенням нуль в точці a, конформно відображає G на круг $|w| < r$, причому точка a переходить в точку $w = 0$.

Наведемо конкретні приклади квадратичних диференціалів, які зустрічаються в даній роботі:

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}, \tag{1.2}$$

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2, \tag{1.3}$$

Зокрема, квадратичний диференціал (1.2) виникає при дослідженні задач в розділах 2 та 3, а квадратичний диференціал (1.3) — в розділі 4.

Наведемо структуру траєкторій квадратичного диференціала (1.2) у випадку $n = 3$ і $\gamma = 1$. Диференціал (1.2) має чотири полюси другого порядку, а саме $w_0 = 0, w_1 = 1, w_2 = \omega, w_3 = \overline{\omega}$, де $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{3})$ та чотири неперетинні однозв'язні кругові області B_0, B_1, B_2, B_3 такі, що $0 \in B_0, 1 \in B_1, \omega \in B_2, \overline{\omega} \in B_3$ та $\overline{B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3} = \overline{\mathbb{C}}$. Прості нулі цього квадратичного диференціала мають вигляд $z_1 = -\frac{1}{2}$, $z_2 = -\frac{1}{2}\omega$, $z_3 = -\frac{1}{2}\overline{\omega}$. На рис. 1.1 схематично зображено структуру траєкторій та кругових областей квадратичного диференціала (1.2) при $n = 3$ і $\gamma = 1$.

На рис. 1.2 схематично зображено структуру траєкторій та кругових областей квадратичного диференціала (1.2) при $n = 4$ і $\gamma = 1$.

Розглянемо квадратичний диференціал (1.3), з яким ми матимемо справу в розділі 4. При $n = 2$, $\gamma = 0,6$ на рис. 1.3 схематично зображено структуру траекторій квадратичного диференціала (1.3), де B_0, B_1, B_2, B_∞ — кругові області квадратичного диференціала, область B_0 симетрична області B_∞ відносно одиничного кола, області B_1 і B_2

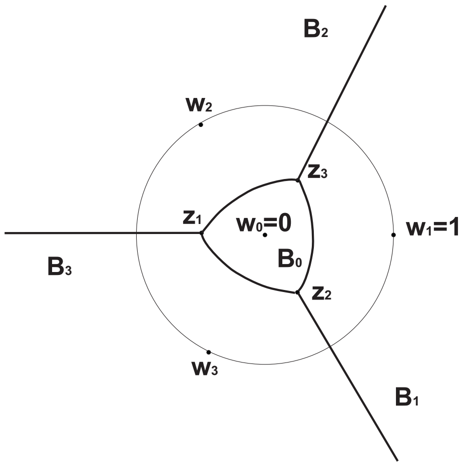


Рис. 1.1: Схематична структура траєкторій квадратичного диференціала (1.2) при $n=3$ і $\gamma=1$.

симетричні одна одній відносно уявної осі, крім того області B_1 і B_2 симетричні відносно одиничного кола, причому $\overline{B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_\infty} = \overline{\mathbb{C}}$.

Нехай $n = 2$, $\gamma = 2$. Варто відмітити, що в цьому випадку ми отримаємо двократні нулі, які лежать на уявній осі в точках $-i, i$. Полюси квадратичного диференціала містяться в точках $0, -1, 1, \infty$. Тоді схематична структура траєкторій квадратичного диференціала (1.3) матиме наступний вигляд (див. рис. 1.4).

Нехай $n = 2$, $\gamma > 2$. Тоді схематична структура траєкторій квадратичного диференціала (1.3) матиме вигляд, зображений на рис. 1.5.

Наведемо визначення операції заповнення несуттєвих граничних компонент відносно системи взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=0}^n$. При кожному $k = \overline{0,n}$ лише скінченна кількість компонент зв'язності множини $\overline{\mathbb{C}} \backslash B_k$ можуть містити якусь із областей B_j, $j = \overline{0,n}$, $j \neq k$; такі компоненти називають суттєвими. Область, отриману викиданням із $\overline{\mathbb{C}}$ всіх суттєвих компонент зв'язності множини B_k, будемо позначати $\widetilde{B}_k$. Очевидно, що $B_k \subset \widetilde{B}_k$ при всіх $k = \overline{0,n}$ і

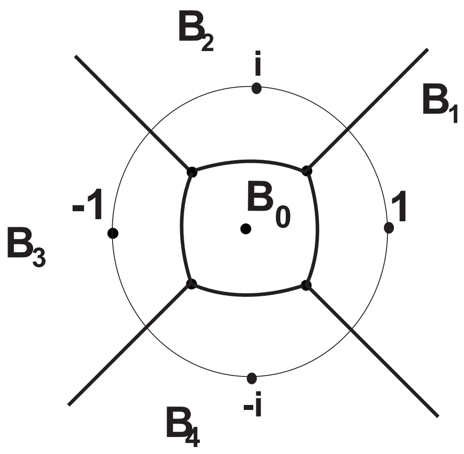


Рис. 1.2: Схематична структура траєкторій квадратичного диференціала (1.2) при $n = 4$ і $\gamma = 1$.

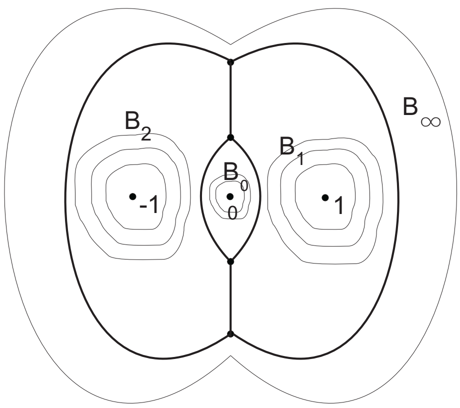


Рис. 1.3: Схематична структура траєкторій квадратичного диференціала (1.3) при $n = 2$ і $\gamma < 1$.

$\left\{\widetilde{B}_k\right\}_{k=0}^{n}$ є системою скінченнозв'язних взаємно неперетинних областей без ізольованих граничних точок. Перехід від системи $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ до системи $\left\{\widetilde{B}_k\right\}_{k=0}^{n}$ називається **операцією заповнення несуттєвих граничних компонент** [7]. Відмітимо, що внутрішній радіус області при збільшенні області не зменшується, тобто виконується умова $r(B,a) \leqslant r(\widetilde{B},a)$ ([36, 83]). Отже, операція заповнення несуттєвих компонент дозволяє перейти від нескінченнозв'язних областей до скінченнозв'язних областей з невиродженими суттєвими компонентами.

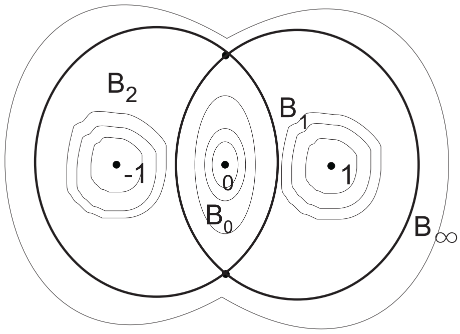


Рис. 1.4: Схематична структура траєкторій квадратичного диференціала (1.3) при $n = 2$ і $\gamma = 2$.

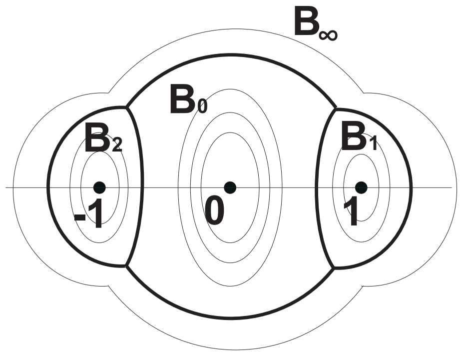


Рис. 1.5: Схематична структура траєкторій квадратичного диференціала (1.2) при $n = 2$ і $\gamma > 2$.

Для прикладу наведемо наступну конфігурацію з трьох областей B_0, B_1, B_2, таких, що $B_1 \subset B_0$, $a_k \in B_k$, $k = 0, 1, 2$ (див. рис. 1.6)

Після операції заповнення несуттєвих граничних компонент ми отримаємо області $\widetilde{B}_0$, $\widetilde{B}_1$, $\widetilde{B}_2$ (див. рис. 1.7)

1.3. Короткий історичний огляд

Екстремальні задачі для неперетинних областей почали свій розвиток з роботи М.О. Лаврентьєва 1934 року. Він поставив і розв'язав задачу про добуток конформних радіусів двох взаємно неперетинних областей.

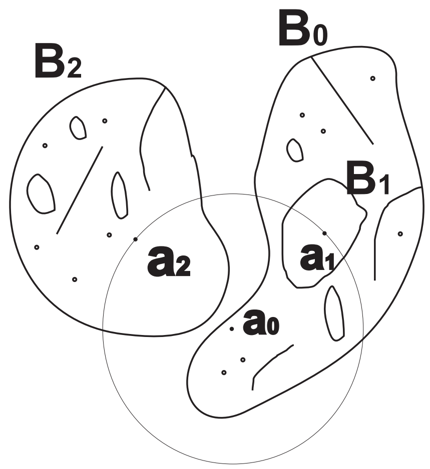


Рис. 1.6: Області B_0, B_1, B_2, до операції заповнення

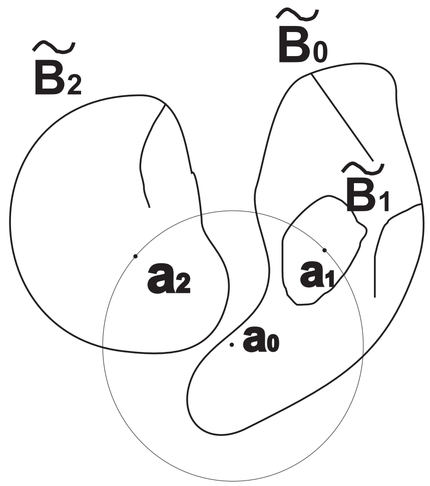


Рис. 1.7: Області $\widetilde{B}_0$, $\widetilde{B}_1$, $\widetilde{B}_2$, після операції заповнення

Задача Лаврентьєва. [69] Нехай задано дві фіксовані точки a_1 та a_2 комплексної площини. Розглянемо всі можливі пари взаємно неперетинних областей B_1 та B_2 такі, що $a_1 \in B_1 \subset \mathbb{C}$ та $a_2 \in B_2 \subset \mathbb{C}$. Вивчається задача про знаходження максимуму функціонала

$$I = R(B_1, a_1) \cdot R(B_2, a_2) \to max,$$

де $R(B_1, a_1), R(B_2, a_2)$ — конформні радіуси областей B_1 та B_2 відносно точок a_1 та a_2, відповідно. Для цього функціонала справедлива нерів-

ність
$$I \leqslant |a_1 - a_2|^2,$$
де рівність досягається для пари взаємно неперетинних півплощин, які отримані в результаті видалення серединного перпендикуляру з комплексної площини. Очевидно, що одна півплощина містить точку a_1, а інша — точку a_2.

На рис. 1.8 проілюстровано цю теорему для точок $a_1 = -1, a_2 = 1$.

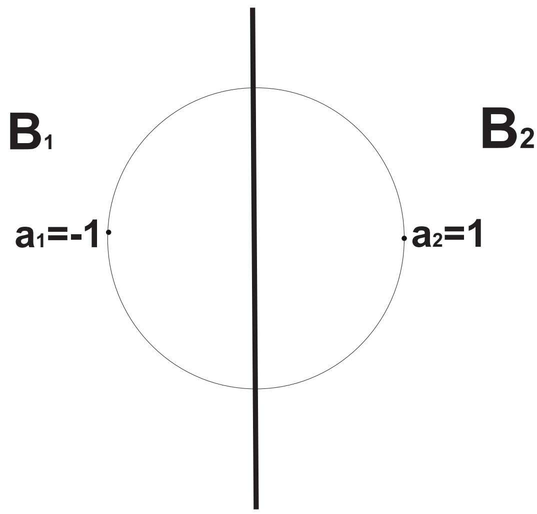


Рис. 1.8: Екстремальна конфігурація для півплощин B_1 і B_2 та точок -1 і 1.

Пізніше задача Лаврентьєва була узагальнена для випадку мероморфних функцій. Тоді для областей $B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$ та $B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ знак рівності в попередній нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли області B_1 та B_2 мають наступний вигляд
$$B_1 = \{w \in \overline{\mathbb{C}} : |\frac{w - a_1}{w - a_2}| < \rho\}, \quad B_2 = \{w \in \overline{\mathbb{C}} : |\frac{w - a_1}{w - a_2}| > \rho\},$$
де $\rho \in \mathbb{R}^+$ чи навпаки.

Одним з прикладів такої конфігурації областей може бути випадок, коли одна з областей обмежена деяким колом, в свою чергу інша область буде необмежена, тобто є доповнення до першої області (див. рис. 1.9

та 1.10). Варто відмітити, що для випадку мероморфних функцій порушується єдиність екстремалі, тобто сім'я екстремалей має континуальну потужність.

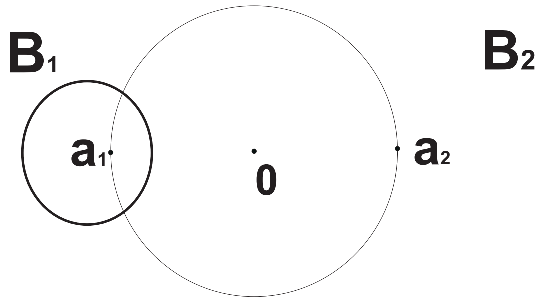


Рис. 1.9: Екстремальна конфігурація для областей B_1 і B_2 та точок a_1 і a_2.

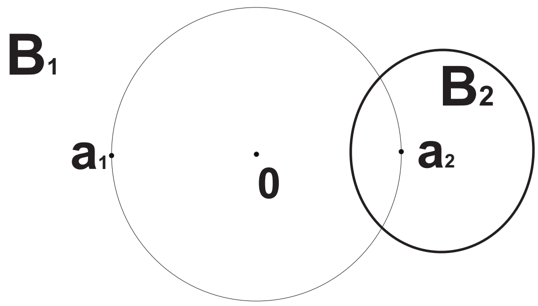


Рис. 1.10: Екстремальна конфігурація для областей B_1 і B_2 та точок a_1 і a_2.

Наступним кроком в розвитку даної тематики став результат Г.М. Голузіна (див. [26]). В 1951 р. у випадку $n \geqslant 3$ він сформулював аналог задачі Лаврентьєва і у випадку $n = 3$ отримав точну оцінку, а саме:

$$I = \prod_{k=1}^{3} R(B_k, a_k) \leqslant \frac{61}{81\sqrt{3}} |a_1 - a_2| \cdot |a_1 - a_3| \cdot |a_2 - a_3|.$$

В 1952 р. задачу М.О. Лаврентьєва узагальнила Л.І. Колбіна [57], доповнивши попередній результат тим, що відображуючі функції бралися в фіксованих додатніх степенях. Постановка цієї задачі полягає у наступному:

При заданих скінченних різних точках a_1, a_2 максимум I_0 величини $I = R^{\alpha}(B_1, a_1) R^{\beta}(B_2, a_2)$, $(\alpha > 0, \beta > 0)$ відносно всеможливих пар областей B_1, B_2 таких, що $a_1 \in B_1 \subset \mathbb{C},\ a_2 \in B_2 \subset \mathbb{C},$ досягається для полюсів та кругових областей квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{(a_2 - a_1)[z - a_1 - \alpha(a_2 - a_1)/(\alpha - \beta)]}{(z - a_1)^2(z - a_2)^2}\,dz^2. \qquad (1.4)$$

Щоб уявити геометричну картину екстремальних конфігурацій, наведемо рисунки для випадку, коли $a_1 = -1, a_2 = 1$ і $\alpha < \beta$ та $\alpha > \beta$. У випадку $\alpha < \beta$ ми отримаємо наступну конфігурацію (див. рис. 1.11).

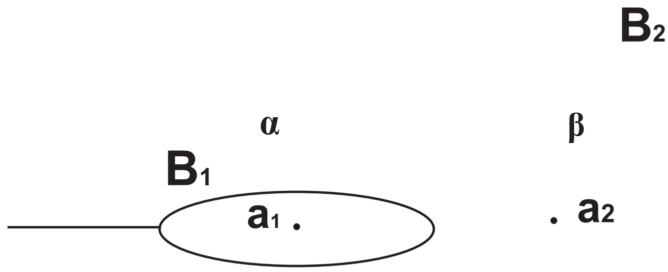


Рис. 1.11: Схематична структура траєкторій квадратичного диференціала (1.4) при $\alpha < \beta$.

Якщо $\alpha > \beta$, то кругові області та полюси квадратичного диференціала (1.4) подані на рисунку 1.12.

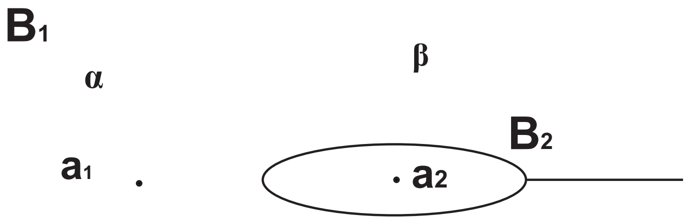


Рис. 1.12: Схематична структура траєкторій квадратичного диференціала (1.4) при $\alpha > \beta$.

У випадку $\alpha = \beta,$ ми отримаємо класичну теорему М.О. Лаврентьєва.

Робота Л.І. Колбіної [58] цікава тим, що в ній знайдено інваріантний функціонал для трьох областей, який в подальшому ми будемо використовувати в наших доведеннях.

Нехай система функцій $\{f_k(z)\}_{k=1}^3$ здійснює однолисте і конформне відображення одиничного круга на систему взаємно неперетинних однозв'язних областей B_1, B_2, B_3 таких, що $a_1 \in B_1 \subset \mathbb{C}, a_2 \in B_2 \subset \mathbb{C}, a_3 \in B_3 \subset \mathbb{C}$ і фіксований набір чисел $\alpha_k \geqslant 0, k = 1, 2, 3.$ Тоді I_0 є інваріантом при довільних автоморфізмах комплексної площини.

$$I_0 = \frac{\prod\limits_{k=1}^{3} |f_k'(0)|^{\alpha_k}}{|f_1(0) - f_2(0)|^{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3} \cdot |f_1(0) - f_3(0)|^{\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3} \cdot |f_2(0) - f_3(0)|^{-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}}.$$

В нашій роботі даний функціонал узагальнюється для випадку багатозв'язних областей.

П.П. Куфарев та А.Е. Фалес в роботі [68] розглядали задачі про добуток конформних радіусів двох взаємно неперетинних областей, які лежать в крузі.

В 1975, М.А. Лебедєв [70] запропонував розглянути екстремальну задачу про максимум функціонала

$$\prod_{k=1}^{n} R^{\alpha_k}(B_k, a_k) \to max \qquad \alpha_k \geqslant 0, \qquad n > 3,$$

де $\{B_k\}_{k=1}^n$ — довільні однозв'язні області такі, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, a_k, $k = \overline{1, n}$ — різні фіксовані точки.

Л.І. Колбіна в роботі [58] повністю розв'язала вище наведену задачу у випадках $n = 2, 3$.

На початку 80-х років при $n = 4$ ця задача вивчалась у роботах Г.В. Кузьміної [60] (при $\alpha_k = 1$) та С.І. Федорова [82].

Над задачами з фіксованими полюсами в різні роки працювали такі відомі математики, як М.О. Лаврентьєв, Г.М. Голузін, Г. Грьотш, М.А. Лебедєв, Дж.А. Дженкінс, М. Шиффер, П. Дюрен, З. Нехарі, Л.І. Колбіна, П.П. Куфарев, А.Е. Фалес, Ю.Є. Алєніцин, І.П. Мітюк, П.М. Тамразов, В.М. Дубінін, Г.В. Кузьміна та ін.

Основною характерною властивістю розглянутих вище задач було те, що полюси відповідних квадратичних диференціалів були фіксовані.

В роботі П.М. Тамразова було вперше запропоновано ідею про те, що дуже цікаво розглядати задачі, у яких полюси квадратичного диференціала мають певну "свободу" і, зокрема, у [78] наведено приклад розв'язаної екстремальної задачі для п'яти простих вільних полюсів першого порядку та запропоновано новий метод для розв'язання цієї задачі. В рамках цієї ідеї в роботі Г.П. Бахтіної [19] був запропонований клас екстремальних задач про неперетинні області, які відповідають квадратичним диференціалам з вільними полюсами другого порядку на колі.

Зокрема, одну з перших задач такого виду сформулювала Г.П. Бахтіна у своїй дисертації в 1974 р. [19], яка полягала у наступному: знайти максимум функціонала

$$I_n = \prod_{k=1}^{n} R(B_k, a_k),$$

де $\{B_k\}_{k=1}^n$ —довільна система однозв'язних симетричних областей така, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$.

Зокрема, в роботі було одержано наступну оцінку

$$I_4 = \prod_{k=1}^{4} R(B_k, a_k) \leqslant 1,$$

причому рівність досягається коли система областей $\{B_k\}_{k=1}^n$ і точок $\{a_k\}_{k=1}^n$, відповідно, є круговими областями і полюсами квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{z^2}{(z^4-1)^2}\,dz^2.$$

В.М. Дубінін істотно узагальнив постановку Г.П. Бахтіної у наступному сенсі, а саме: він розглянув задачу про максимізацію функціонала для внутрішніх радіусів і довільних багатозв'язних областей.

Наприкінці 70-х років минулого століття він створив метод так званого розділяючого перетворення, який базується на теорії конденсаторів. Суть методу полягає в тому, що він дозволяє зводити задачу з великим числом полюсів до декількох задач з меншим числом полюсів. І, зокрема, у [33] отримано таку теорему.

Теорема. Для довільних різних точок a_k, $k = 1, ..., n$ $n \geqslant 2$, які лежать на колі $|z| = 1$, і довільних попарно неперетинних областей D_k, $k = 1, ..., n$, таких, що $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, виконується нерівність

$$\prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n .$$

Якщо ж області D_k мають класичну функцію Гріна, то рівність досягається в тому і тільки тому випадку, коли області D_k і точки a_k є відповідно круговими областями і полюсами квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - 1)^2}\,dw^2.$$

В 1984 р. Г.П. Бахтіна розглянула наступну задачу про максимум функціонала

$$I_n = \prod_{k=0}^{n} R^{\alpha_k}(B_k, a_k), \tag{1.5}$$

де $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ — довільна система однозв'язних взаємно неперетинних областей, причому області $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ симетричні відносно одиничного кола, такі, що $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset U$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $\alpha_k \geqslant 0$, $k = \overline{0, n}$ і отримала деякі часткові результати в даній проблемі.

В.М. Дубінін розглянув частковий випадок функціонала, який розглядався в роботах Г.П. Бахтіної, але значно розширив клас неперетинних областей. А саме: він розглядав функціонал виду

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

де $B_0, B_1, ..., B_n$ — довільні багатозв'язні області, γ — додатній параметр, $|a_k| = 1$, $k = 1, ..., n$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $r(B_k, a_k)$ — внутрішній радіус області B_k відносно точки a_k. Таким чином, він розглянув випадок, коли $\alpha_0 = \gamma$, $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 1$ у задачі (1.5). І сформулював у роботі [35] дві наступні проблеми.

Проблема 1. Довести, що максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

де B_0, B_1, B_2, ..., B_n, $(n \geqslant 2)$ — попарно неперетині області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_j, a_j)$ — внутрішній радіус області B_j в точці a_j $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0, n}$ і $0 < \gamma \leqslant n$ досягається для деякої конфігурації областей, які мають n – кратну симетрію (див. рис. 1.13)

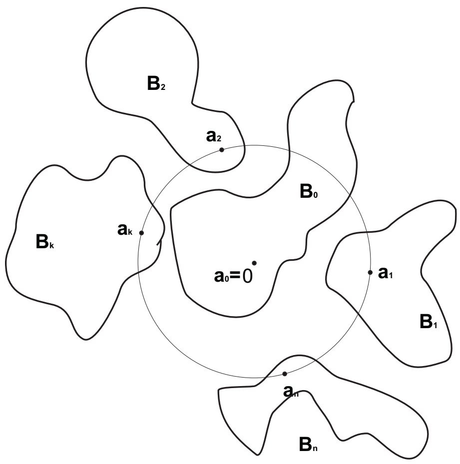


Рис. 1.13: Проблема 1.

Проблема 2. Знайти максимум функціонала

$$J_n = \prod_{k=0}^{n} r(B_k, a_k),$$

при умові, що B_0, B_1, B_2,..., B_n, $(n \geqslant 2)$ — попарно неперетинні багатозв'язні області в $\overline{\mathbb{C}}$, причому області B_1, B_2, ..., B_n, $(n \geqslant 2)$ — симетричні відносно точок одиничного кола, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$,

$r(B_k, a_k)$ — внутрішній радіус області B_k в точці a_k $(a_k \in B_k)$, $k = \overline{0, n}$ (див. рис. 1.14)

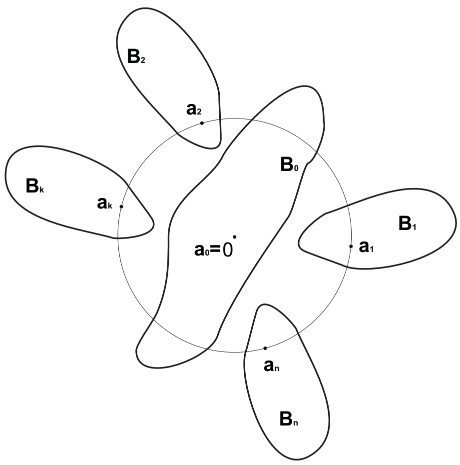


Рис. 1.14: Проблема 2.

Варто звернути увагу на те, що в постановці проблеми 2 навіть не було степеня γ, як в проблемі 1, оскільки проблема 2 навіть для показника степеня $\gamma = 1$ викликала значні труднощі, так як на той час не було розроблено відповідних методів дослідження.

Природним узагальненням проблеми 2 є наступна проблема.

Проблема 2$'$. Знайти максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

де $0 < \gamma \leqslant n$, області B_0, B_1, B_2, ..., B_n, $(n \geqslant 2)$ — попарно неперетинні багатозв'язні в $\overline{\mathbb{C}}$, причому області B_1, B_2,..., B_n, $(n \geqslant 2)$ симетричні відносно точок одиничного кола, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_k, a_k)$ — внутрішній радіус області B_k в точці a_k $(a_k \in B_k)$, $k = \overline{0, n}$.

Проблеми 1 та 2$'$ мають розв'язок тільки при $0 < \gamma \leqslant n$, оскільки як тільки $\gamma = n + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ існує послідовність систем областей $B_0^{(p)}, ..., B_n^{(p)}$, де $p \to \infty$ при якому $J_n(\gamma) \to \infty$. Варто відмітити, що проблеми 1 та 2$'$ є зовсім різними задачами, які потребуються різних методів для свого дослідження.

Проблема 1 при $\gamma = 1$ була розв'язана В.М. Дубініним у 1988 році в роботі [34].

В 2003 році Г.В. Кузьміна розв'язала проблему 1 для $\gamma \in (0,1)$.

Л.В. Ковальов в 1996 році в роботі [54] отримав розв'язок проблеми 1 при суттєвих обмеженнях на геометрію розташування систем точок на одиничному колі $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}, k = \overline{1,n}$. А саме він отримав наступний результат.

Теорема. [54] Нехай $a_k = \exp(i\alpha_k)$, $k = \overline{1,n}$, $n \geqslant 5$, – точки одиничного кола, причому $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < 2\pi$, $\alpha_{k+1} - \alpha_k \leqslant 2\pi/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{0,n}$ ($\alpha_0 = \alpha_n - 2\pi$, $\alpha_{n+1} = 2\pi$), де γ – фіксоване число $0 < \gamma \leqslant n$. Тоді для будь-яких попарно неперетинних областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$ ($a_0 = 0 \in B_0$), справедлива нерівність

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \frac{4^{\gamma/n+n}\gamma^{\gamma/n}n^n}{(n^2-\gamma)^{\gamma/n+n}} \left(\frac{n - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{n + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}} \right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак рівності досягається для точок $a_k = \exp(i2\pi k/n)$, $k = \overline{1,n}$, і кругових областей квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

О.К. Бахтін та І.В. Денега [87] довели вірність твердження теореми Ковальова при $n = 4$.

Щодо проблеми 2, то вона виявилася набагато складнішою, ніж проблема 1 та лише в 2000 році був отриманий розв'язок Л.В. Ковальовим у роботі [55]. З того часу до 2017 р. у проблемі $2'$ не було отримано жодних результатів. 2017 року у роботі О. К. Бахтіна, Г. П. Бахтіної й І. В. Денеги [15] вдалося отримати розв'язок проблеми $2'$ при умові $\gamma \in (0,2], \quad n = 2$.

В рамках ідеї П.М. Тамразова про вільні полюси, О.К. Бахтін в 2006 році запропонував розглядати задачі про максимізацію функціоналів на класах неперетинних областей відносно точок, які розміщені на так званих (n,m)-променевих системах. Задачі такого типу значно узагальнюють всі ті задачі з вільними полюсами, що вивчались раніше. Для таких систем точок О.К. Бахтіним також було отримано значну кількість результатів [7].

Нехай $n, m \in \mathbb{N}$. Систему точок

$$A_{n,m} := \{a_{k,p} \in \mathbb{C} : k = \overline{1,n}, p = \overline{1,m}\}$$

будемо називати (n,m)-променевою, якщо при всіх $k = \overline{1,n}$ і $p = \overline{1,m}$ виконуються співвідношення:

$$0 < |a_{k,1}| < \ldots < |a_{k,m}| < \infty;$$

$$\arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \ldots = \arg a_{k,m} =: \theta_k;$$

$$0 = \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < \theta_{n+1} := 2\pi.$$

У випадку $m = 1$, $(n,1)$-променеву систему точок будемо називати n-променевою і в цьому випадку розглянемо більш прості позначення: $a_{k,1} =: a_k$, $k = \overline{1,n}$, $A_{n,1} =: A_n$, $a_{n+1} := a_1$, $a_0 := a_n$.

Довільній (n,m)-променевій системі точок $A_{n,m}$ поставимо у відповідність набір областей $P(A_{n,m}) = \{P_k\}_{k=1}^{n}$, де

$$P_k := \{w \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : \theta_k < \arg w < \theta_{k+1}\}, \; k = \overline{1,n}.$$

$$P_0 := P_n, \; P_{n+1} := P_1.$$

Величини $\alpha_k := \alpha_k(A_{n,m}) := \frac{1}{\pi}[\theta_{k+1} - \theta_k]$, $k = \overline{1,n}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $\alpha_0 := \alpha_n := \frac{1}{\pi}[2\pi - \theta_k]$ будемо називати кутовими параметрами (n,m)-променевої системи точок $A_{n,m}$. Очевидно, що $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k(A_{n,m}) = 2.$

Якщо (n,m)-променева система точок $A_{n,m}$ володіє властивістю $\alpha_k(A_{n,m}) = \frac{2}{n}$, $k = \overline{1,n}$, то її будемо називати рівнокутовою. Рівнокутовій системі точок ставиться у відповідність фіксована система областей $P^0(A_{n,m}) = \{P_k^0\}_{k=1}^n$, де

$$P_k^0 := \left\{ w \in \mathbb{C} \backslash \{0\} : \frac{2\pi}{n} k < \arg w < \frac{2\pi}{n}(k+1) \right\}, \ k = \overline{1,n}.$$

Для фіксованого $R \in \mathbb{R}^+$ і будь-якої (n,m)-променевої системи точок $A_{n,m}$ розглянемо наступний "керуючий" функціонал:

$$M_R(A_{n,m}) := \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} \left[\chi\left(\left| \frac{a_{k,p}}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_k}} \right) \cdot \chi\left(\left| \frac{a_{k,p}}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot |a_{k,p}|.$$

Якщо T_n — довільний набір із n різних точок одиничного кола і $\partial U \setminus T_n$ складається з об'єднання n неперетинних дуг з довжинами $\gamma_1 = \sigma_1\pi, ..., \gamma_n = \sigma_n\pi$, то

$$\mu(T_n) := \prod_{k=1}^{n} \sigma_k.$$

Нехай функція

$$\zeta_k^R(\omega) := \frac{R^{\frac{1}{\alpha_k}} - z_k(\omega)}{R^{\frac{1}{\alpha_k}} + z_k(\omega)}$$

однолисто і конформно відображає область P_k на одиничний круг $U, k = \overline{1,n}$. Позначимо $\omega_{k,p}^{(1)}(R) := \zeta_k^R(a_{k,p})$, $\omega_{k,p}^{(2)}(R) := \zeta_k^R(a_{k+1,p})$, $a_{n+1,p} := a_{1,p}$, $\omega_{0,p}^{(2)}(R) := \omega_{n,p}^{(2)}(R)$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$. При всіх $k = \overline{1,n}$ множина $\{\omega_{k,p}^{(1)}(R)\}_{p=1}^m \cup \{\omega_{k,p}^{(2)}(R)\}_{p=1}^m$ складається із $2m$ різних точок на ∂U_R.

Нехай

$$\mu_k(R) := \mu_k^{(R)}(A_{n,m}) := \mu(\{\omega_{k,p}^{(1)}(R)\}_{p=1}^m \cup \{\omega_{k,p}^{(2)}(R)\}_{p=1}^m), \quad k = \overline{1,n}.$$

Одним з важливих результатів роботи [7] є наступна теорема.

Теорема 1.3.1. Нехай фіксовані $R \in \mathbb{R}^+$, $n, m \in \mathbb{N}$ та $n \geqslant 3$. Тоді, яка б не була (n,m)-променева система точок $A_{n,m} = a_{k,p}$ та довільна система взаємно неперетинних областей $B_{k,p}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$,

$p=\overline{1,m},$ справедлива нерівність

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant 2^{nm}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{m}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot M_R(A_{n,m}).$$

Знак рівності в попередній нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли точки $a_{k,p}$ та області $B_{k,p}$ $(k=\overline{1,n},\ \ p=\overline{1,m},)$ є, відповідно полюсами та круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2=-\frac{w^{n-2}+(R^n+w^n)^{2m-2}}{[(R^{\frac{n}{2}}-iw^{\frac{n}{2}})^{2m}+(R^n+iw^{\frac{n}{2}})^{2m}]^2}\,dw^2, \qquad (1.6)$$

і $cap(\tilde{B}_{k,p}\setminus B_{k,p})=0$ при всіх $k=\overline{1,n},\ \ p=\overline{1,m}.$

З усього вище наведеного випливає, що значний вклад в розвиток напрямку екстремальних задач з вільними полюсами зробили математики відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України. Варто відмітити особливу роль П.М. Тамразова, оскільки з його ідей про вільні полюси з'явився даний напрямок у геометричній теорії функцій комплексної змінної.

Відмітимо, що в роботі [7] для загальних (n,m)-променевих систем точок розглянуто функціонал виду

$$J=r^{\gamma_0}\left(D,0\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r^{\gamma_{k,p}}\left(D,a_{k,p}\right), \qquad (1.7)$$

де $\gamma_0\,,\ \gamma_{k,p}\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}\,,\ k=\overline{1,n}\,,\ p=\overline{1,m}\,,\ A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$ — (n,m)-променева система, D — відкрита множина, $A_{n,m}\subset D\subset\overline{\mathbb{C}}\,,\ 0\in D\,.$

В даній дисертаційній роботі вивчаються екстремальні задачі для функціонала (1.7) у випадку $\gamma_0=\gamma>0, \quad m=1, \quad \gamma_{k,p}=1, \quad k=\overline{1,n}.$

1.4. Розділяюче перетворення областей

В даній роботі важливу роль відіграє метод кусково-розділяючого перетворення. Цей метод полягає в наступному: досліджуваний об'єкт розбивається на області, які далі відображуються на частини спеціального вида; потім з останніх конструюются симетричні об'єкти, для яких уже отримані точні оцінки. Таким чином, метод розділяючого перетворення дозволяє екстремальну задачу, якій відповідає квадратичний диференціал з великою кількістю полюсів звести до деякого числа задач, яким відповідає квадратичний диференціал зі значно меншою кількістю полюсів.

Із загальної теорії розділяючого перетворення відмітимо тільки те, що стосується розділяючого перетворення для областей.

Розглянемо систему різних точок розширеної комплексної площини $0, a_1, a_2, ..., a_n$ таких, що

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < ... < \arg a_n < 2\pi.$$

Позначимо

$$\arg a_{n+1} := 2\pi, \quad a_0 := a_n, \quad \alpha_k := \frac{1}{\pi}\left(\arg a_{k+1} - \arg a_k\right), \ k = \overline{1, n}.$$

Зрозуміло, що $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2.$

Нехай

$$P_k := \{w : \ \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}, \quad k = \overline{1, n},$$

$$P_0 := P_n, \ P_{n+1} := P_1.$$

Тоді вибираючи однозначну вітку багатозначної аналітичної функції

$$z_k(w) = -i\left(e^{-i\arg a_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad k = \overline{1, n}, \qquad z_0 := z_n, \ z_{n+1} := z_1,$$

отримаємо, що функція $z_k(w)$ конформно і однолисто відображає області P_k, $k = \overline{1, n}$, на праву півплощину $\operatorname{Re} z > 0$ таким чином, що виконуються наступні асимптотичні рівності:

$$|z_k(w) - z_k(a_m)| \sim \frac{1}{\alpha_k} |a_m|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} |w - a_m|, \quad w \in \overline{P_k}, \quad w \to a_m,$$

$$k = 1, 2, ..., n, \ m = k, k+1; \ a_{n+1} := a_1;$$

$$|z_k(w)| = |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \in \overline{P_k} \quad w \to 0.$$

Нехай $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ — сімейство областей, які задовольняють умовам:

$$0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}, \quad a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}, \ k = \overline{1, n}.$$

$$B_k \bigcap B_m = \varnothing, \qquad k \neq m, \ k, m = 0, 1, ..., n.$$

Позначимо через $L_k^{(1)}, \ k = \overline{1, n}$, об'єднання зв'язної компоненти множини $z_k\left(B_k \bigcap \overline{P}_k\right)$, яка містить точку $z_k(a_k)$, $k = \overline{1, n}$, з її симетричним відображенням відносно уявної осі, а через $L_{k-1}^{(2)}, \ k = \overline{1, n}, \ L_0^{(2)} := L_n^{(2)}$, — об'єднання зв'язної компоненти множини $z_{k-1}\left(B_k \bigcap \overline{P}_{k-1}\right)$, яка містить точку $z_{k-1}(a_k)$, $k = \overline{1, n}$, з її симетричним відображенням відносно уявної осі. Сімейство двох симетричних відносно уявної осі областей $\left\{L_k^{(1)}, L_{k-1}^{(2)}\right\}$ називається результатом розділяючого перетворення області B_k відносно сімейства двох функцій $\{z_k, z_{k-1}\}$, $k = \overline{1, n}$.

Аналогічно, результатом розділяючого перетворення області B_0 відносно сімейства функцій $\{z_k\}_{k=1}^{n}$ називається сімейство симетричних відносно уявної осі областей $L_k^{(0)}, \ k = \overline{1, n}$, які отримані внаслідок об'єднання зв'язної компоненти множини $z_k(B_0 \bigcap P_k)$, $k = \overline{1, n}$, яка містить точку 0, з її симетричним відображенням відносно уявної осі.

Система областей $\left\{L_k^{(0)}, L_k^{(1)}, L_k^{(2)}\right\}$ є системою попарно неперетинних областей.

Із загальної теорії розділяючого перетворення для областей має місце результат.

Теорема 1.4.1. *Мають місце наступні нерівності:*

$$r\left(B_k,a_k\right)\leqslant\left[\frac{r\left(L_k^{(1)},z_k\left(a_k\right)\right)}{\frac{1}{\alpha_k}\cdot|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}}\cdot\frac{r\left(L_{k-1}^{(2)},z_{k-1}\left(a_k\right)\right)}{\frac{1}{\alpha_{k-1}}\cdot|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}},\quad\forall k=\overline{1,n},\quad(1.8)$$

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left[r\left(L_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{\alpha_k^2}{2}},\quad(1.9)$$

Якщо для областей $B_k,\ k=\overline{0,n}$*, існує класична функція Гріна, то в нерівностях* (1.8) *і* (1.9) *знак рівності досягається тоді і тільки тоді, коли області* $B_k,\ k=\overline{0,n}$*, відповідно, симетричні відносно прямих* $w=\rho\cdot\exp\left\{i\cdot\frac{2\pi}{n}\left(k-1\right)\right\},\ \rho>0,\ k=\overline{0,n}.$

1.5. Результати попередників, які використовуються в роботі

В роботі [34] було отримано важливу оцінку добутку внутрішніх радіусів трьох неперетинних областей з фіксованими полюсами в точках $0,-i,i$. Справедливий результат.

Теорема 1.5.1. *Для довільних попарно неперетинних областей* B_0,B_1,B_2 *таких, що* $0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}},-i\in B_1\subset\overline{\mathbb{C}},i\in B_2\subset\overline{\mathbb{C}}$*, справедлива нерівність*

$$r^{\sigma^2}(B_0,0)r(B_1,-i)r(B_2,i)\leqslant$$
$$\leqslant 2^{\sigma^2+6}u^{\sigma^2}(2-u)^{-(2-\sigma)^2/2}(2+\sigma)^{-(2+\sigma)^2/2},\quad 0<\sigma\leqslant 2,$$

знак рівності досягається тоді і тільки тоді, коли області B_0,B_1,B_2*, є круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2=\frac{(4-\sigma^2)w^2-\sigma^2}{w^2(w^2+1)^2}\,dw^2.\quad(1.10)$$

З теореми 1.5.1 слідують очевидні твердження.

Наслідок 1. Для кругових областей квадратичного диференціала (1.10) D_0, D_1, D_2 таких, що $\overline{D_0 \cup D_1 \cup D_2} = \overline{\mathbb{C}}$, причому $0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}, -i \in D_1 \subset \overline{\mathbb{C}}, i \in D_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедлива рівність

$$r^{\sigma^2}(D_0, 0)r(D_1, -i)r(D_2, i) =$$
$$= 2^{\sigma^2+6}u^{\sigma^2}(2-u)^{-(2-\sigma)^2/2}(2+\sigma)^{-(2+\sigma)^2/2}, \quad 0 < \sigma \leqslant 2.$$

Наслідок 2. Для довільних попарно неперетинних областей B_0, B_1, B_2 таких, що $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}, -i \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}, i \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедлива нерівність

$$r^{\sigma^2}(B_0, 0)r(B_1, -i)r(B_2, i) \leqslant$$
$$\leqslant r^{\sigma^2}(D_0, 0)r(D_1, -i)r(D_2, i), \quad 0 < \sigma \leqslant 2,$$

знак рівності досягається тоді і тільки тоді, коли заповнення областей B_0, B_1, B_2 співпадає з відповідними круговими областями D_0, D_1, D_2 і $cap(\tilde{B}_k \setminus B_k) = 0$ при всіх $k = \overline{1,2}$.

Надалі при доведенні теорем в розділі 4 нам буде потрібен результат теореми 1.5.1 у випадку, коли полюси квадратичного диференціала розміщені в точках $0, -1, 1$. В цьому випадку теорема 1.5.1 набуде такого вигляду.

Теорема 1.5.2. *Для довільних попарно неперетинних областей B_0, B_1, B_2 таких, що $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}, -1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}, 1 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедлива нерівність*

$$r^{\sigma^2}(B_0, 0)r(B_1, -1)r(B_2, 1) \leqslant$$
$$\leqslant 2^{\sigma^2+6}u^{\sigma^2}(2-u)^{-(2-\sigma)^2/2}(2+\sigma)^{-(2+\sigma)^2/2}, \quad 0 < \sigma \leqslant 2,$$

знак рівності досягається тоді і тільки тоді, коли області B_0, B_1, B_2, є круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\sigma^2)w^2+\sigma^2}{w^2(w^2-1)^2}\,dw^2.$$

Наступна теорема є фактично єдиним відомим результатом (до 2017 року) у проблемі $2'$, який був доведений у роботі [55].

Теорема 1.5.3. *Нехай* $B_0, ..., B_n$ $(n \geqslant 2)$ *неперетинні області в* $\overline{\mathbb{C}}$; $a_k \in B_k$, $k = 0, ..., n$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = 1, ..., n$, $B_k = B_k^*$, $k = 1, ..., n$. *Тоді*

$$\prod_{k=0}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \frac{2^{2n+1/n}}{(n^2-2)^{n/2+1/n}} \left(\frac{n-\sqrt{2}}{n+\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}.$$

Якщо ж області B_k *мають класичну функцію Гріна, то рівність досягається в тому і тільки тому випадку, коли точки* a_k *та області* B_k *є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(\alpha w)^{2n} + (\alpha w)^n(2n^2-2)+1}{w^2((\alpha w)^n-1)^2}\, dw^2, \quad |\alpha| = 1.$$

В роботі [15] було отримано аналог теореми 1.5.2, коли області B_1, B_2 володіють симетрією відносно одиничного кола.

Теорема 1.5.4. *Нехай* $\gamma \in (0,2]$. *Для довільного фіксованого набора взаємно неперетинних областей* B_0, B_1, B_2, *таких, що* $0 \in B_0 \subset \mathbb{C}, 1 \in B_1 \subset \mathbb{C}, -1 \in B_2 \subset \mathbb{C}$, *причому області* $B_k, k \in 1,2$, *володіють симетрією відносно одиничного кола, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\, r(B_1, 1)\, r(B_2, -1) \leqslant$$

$$\leqslant (2)^{1-\gamma} \cdot \left[\frac{2^{2\gamma+6}\cdot(2\gamma)^{\gamma}}{(2-\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2-\sqrt{2\gamma})}\cdot(2+\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2+\sqrt{2\gamma})}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Знак рівності досягається коли B_0, B_1, B_2, є круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

Наступна теорема була отримана в роботі [33] у випадку, якщо всі точки лежать на колі, і узагальнена для довільної $n-$ променевої системи точок у роботі [7].

Теорема 1.5.5. [7] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. *Тоді для довільної* $n-$ *променевої системи точок* a_k , $k = 1, ..., n$ *таких, що* $|a_k| = 1$ *і довільної системи попарно неперетинних областей* D_k , $k = 1, ..., n$, *таких, що* $(a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}})$, $k = 1, ..., n$, *виконується нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k) \leqslant \left(2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^n .$$

Знак рівності досягається тоді і тільки тоді коли, області $\widetilde{D_k}$ *і точки* a_k *є, відповідно, круговими областями і полюсами квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - 1)^2}\, dw^2, \quad cap(\widetilde{D_k} \setminus D_k) = 0, \quad k = 1, ..., n.$$

Висновки

У першому розділі дисертаційної роботи зроблено огляд літератури, викладено основні ідеї методів дослідження даних проблем, наведено означення і теореми, необхідні для формулювання і доведення основних результатів дисертації.

РОЗДІЛ 2

ЗАДАЧА ПРО МАКСИМІЗАЦІЮ ДОБУТКУ ВНУТРІШНІХ РАДІУСІВ ЧАСТКОВО ПЕРЕТИННИХ ОБЛАСТЕЙ З ВІЛЬНИМИ ПОЛЮСАМИ НА КОЛІ ПРИ ОБМЕЖЕННЯХ НА КУТОВІ КОЕФІЦІЄНТИ

Даний розділ присвячений дослідженню екстремальної задачі про добуток внутрішніх радіусів частково перетинних областей при умові, що відхилення одне від одного вільних полюсів на колі не перевищує заданої величини.

2.1. Постановка задачі та відомі результати попередників

1994 року в роботі [35] В.М. Дубінін поставив у якості відкритої проблеми наступну задачу.

Проблема 1. Розглянемо добуток

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right), \tag{2.1}$$

де B_0, B_1,..., B_n $(n \geqslant 2)$ попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$ і $0 < \gamma \leqslant n$. Показати, що максимум величини 2.1 досягається для конфігурації областей B_k та точок a_k, які мають n-кратну симетрію.

Дана проблема в загальному випадку не розв'язана і досі, відомі лише часткові результати. У 1988 р. В.М. Дубінін запропонував підхід, заснований на методі симетризації (див., наприклад, [34, 35]).

В роботі [34] проблема 1 була розв'язана для $\gamma = 1$ та $n \geqslant 2$. У 1996 р. Л.В. Ковальов [54] отримав розв'язок проблеми 1 при досить суттєвих обмеженнях на геометрію розташування точок на одиничному колі, а саме при умові, що

$$0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma},\ k = \overline{1,n}, \quad n \geqslant 5.$$

Зрозуміло, що ці умови є досить жорсткими умовами, суттєво звужуючи набір можливих конфігурацій. У 2003 р. в роботі Г.В. Кузьміної [67] у випадку однозв'язних областей ця проблема була розв'язана при $\gamma \in (0,1)$ іншим методом.

Як було відмічено в розділі 1, ідея П.М. Тамразова про те, що дуже важливо розв'язувати екстремальні задачі, які відповідають квадратичним диференціалам з вільними полюсами, спонукала до виникнення нового напрямку в геометричній теорії функцій комплексної змінної, а саме до напрямку, який вивчає екстремальні задачі про розбиття комплексної площини з вільними полюсами на колі. Вперше сформулювала подібні задачі у 1974–1975 роках Г.П. Бахтіна [19]. Далі цей напрямок почав бурхливо розвиватись. Відмітимо роботи Г.В. Кузьміної [59, 60], В.М. Дубініна [34, 35], М. Шиффера [90], П. Дюрена [90], Є.Г. Ємельянова [41, 42], Л.В. Ковальова [54], Д.А. Кирилової [39], Е.Г. Прилепкіної [40], Е.В. Костюченко [39] та ін.

Відмітимо, що значний внесок у розв'язання цієї проблеми був зроблений співробітниками відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу, зокрема Г.П. Бахтіною [19], О.К. Бахтіним [7], В.Є. В'юн [23], І.В. Денегою [31, 32], Я.В. Заболотним [45, 47, 49] та ін.

В 2011 — 2012 роках в роботах [45, 47] отриманий частковий розв'язок проблеми 1 при $n = 2$ та $\gamma \in (0; 1,1]$, при $n = 3$ та $\gamma \in (0; 1,5]$ і при $n = 4$ та $\gamma \in (0; 1,7]$. В 2013 році в роботі [10] розв'язано проблему 1 при $n = 2$ та $\gamma \in (1,1; 1,4]$. В роботі [12] у 2017 році вдалося отримати розв'язок проблеми 1 для $n = 2$ та $\gamma \in (1,1; 1,6]$. В роботі [50] отримано розв'язок проблеми 1 при $n = 6, 7, 8$, відповідно на інтервалах $\gamma \in (1; 2,49]$, $\gamma \in (1; 2,67]$, $\gamma \in (1; 2,84]$. В роботах [13, 14] вдалося розв'язати проблему 1 при умовах, що $n \geqslant 8$ та $\gamma \in (0, n^{0,42}]$.

Одним з цікавих результатів, є теорема Я.В. Заболотного [48], яка показує, що для довільного степеня α, $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$ існує номер $n_0(\alpha)$, і для довільного номера, який більший за n_0 та для довільного фіксованого $\gamma \in (1, n^{\alpha}]$, справедлива нерівність

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак рівності досягається коли a_k і B_k, $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

В якості номера $n_0(\alpha)$ можна прийняти величину $n_0(\alpha) = \exp \frac{1}{(\frac{2}{3} - \alpha)^2}$. Робота Я.В. Заболотного є істотним узагальненням результату роботи [7].

В зв'язку з дослідженням робіт [6], [7] та введенням загальних n-променевих систем точок можна розглянути узагальнену задачу В.М. Дубініна.

Подальші часткові результати у проблемі 1 були отримані в багатьох роботах, зокрема [7, 9, 16, 31, 86].

Майже одночасно з розвитком задач та отриманням результатів для систем взаємно неперетинних областей, полюси яких розташовувались або на колі, або на променях, розглядались задачі для областей, які можуть частково перетинатись. Тобто виник напрямок екстремальних задач в геометричній теорії функцій для областей, які задовольняють умову часткового перетину відносно променевої системи точок (див. [7, 22, 32]).

В 2012 році отримано розв'язок проблеми 1 на класах систем областей, які задовольняють умову часткового перетину відносно променевої системи A_n, для $n \geqslant 2$ та $\gamma \in (0,1]$ (див. [32]). В 2015 році в роботі [22] отримано результат для $n \geqslant 4$ та $0 < \gamma \leqslant n$ на класі областей, які задовольняють умову часткового перетину відносно променевої системи точок, які розташовані на одиничному колі. Фактично, результат роботи [22] є узагальненням результату роботи [54] у випадку областей, які задовольняють умову часткового перетину.

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Набір точок $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C} : k = \overline{1,n}\right\}$ будемо називати n-променевою системою точок, якщо $|a_k| \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1,n}$, і

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi.$$

Нехай $P_k = P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $a_{n+1} := a_1$, $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi} \arg \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$.

Надалі позначатимемо $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$. Для довільної n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}$ і $\gamma \in \mathbb{R}^+$ вважатимемо, що

$$\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \cdot \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}.$$

Легко перевірити, що клас n-променевих систем точок для яких справедлива рівність $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = 1$ автоматично включає всі системи n різних точок, що розміщені на одиничному колі.

Для довільної системи різних точок $A_n := \{a_k : |a_k| = 1, k = \overline{1,n}\}$ і для відкритої множини D, $A_n \cup \{0\} \subset D$, позначимо через $D(a_k)$ зв'язну компоненту множини D, яка містить точку a_k, $k = \overline{0,n}$.

Нехай

$$D_k(0) := D(0) \cap \overline{P}_k,\ D_k(a_k) := D(a_k) \cap \overline{P}_k,\ D_k(a_{k+1}) := D(a_{k+1}) \cap \overline{P}_k,$$

для кожного $k = \overline{1, n}$, $a_{n+1} := a_1$.

Відкрита множина D, $A_n \cup \{0\} \subset D$, задовольняє умову неперетинності відносно системи точок A_n, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$ якщо справедлива рівність $[D_k(0) \cap D_k(a_k)] \cup [D_k(0) \cap D_k(a_{k+1})] \cup [D_k(a_k) \cap D_k(a_{k+1})] = \emptyset$, $1 \leq k \leq n$.

Система областей $\{D_k\}_{k=0}^{n}$ задовольняє умову часткового перетину відносно заданої системи точок одиничного кола, якщо відкрита множина $D = \cup_{k=0}^{n} D_k$ задовольняє умову неперетинності відносно системи точок цього ж кола.

На рисунку 2.15 наведено приклад області, яка задовольняє умові часткового перетину відносно системи точок $0, a_1, a_2, a_3$.

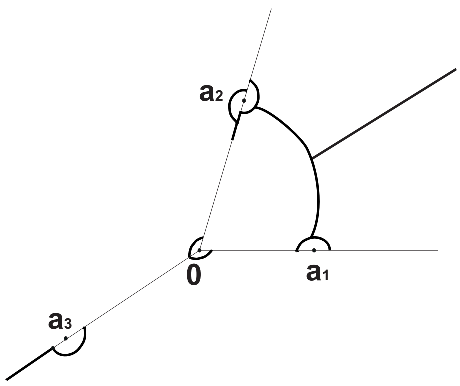


Рис. 2.15: Приклад часткового перетину областей

Ще одним з прикладів може бути рисунок 2.16 .

Очевидно, що випадок взаємно неперетинних областей є частинним випадком областей, які частково перетинаються (див. рис. 2.17 і 2.18).

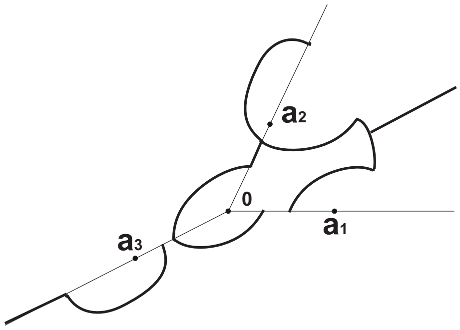


Рис. 2.16: Приклад часткового перетину областей

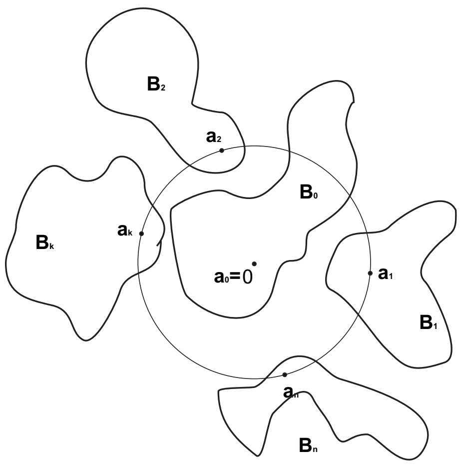


Рис. 2.17: Приклад взаємно неперетинних однозв'язних областей

2.2. Формулювання основного результату розділу

Основним результатом даного розділу є наступна теорема, яка посилює результат роботи [22].

Теорема 2.2.1. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_4 = 4,17$, $\gamma_5 = 5,71$, $\gamma_6 = 7,5$, $\gamma_7 = 9,53$, $\gamma_8 = 11,81$ *і* $\gamma_n = 0,1215\,n^2$ *для* $n \geqslant 9$. *Тоді для довільної системи різних точок одиничного кола* $|a_k| = 1$ *і при умові, що* $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$ *і для довільної системи областей* D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *які задовольняють умову часткового перетину відносно точок одиничного*

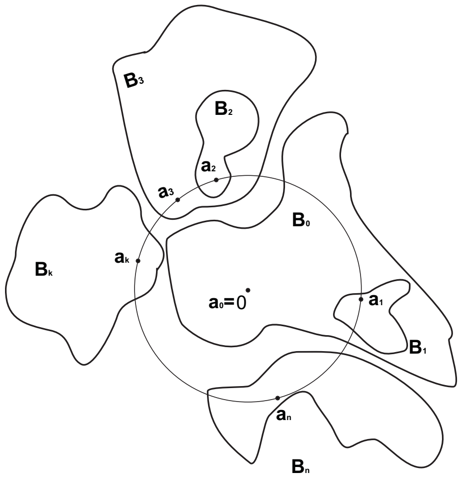


Рис. 2.18: Приклад взаємно неперетинних багатозв'язних областей

кола, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}\left(D_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k,a_k\right)\leqslant\left(\frac{4}{n}\right)^{n}\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{2.2}$$

Рівність досягається якщо a_k і D_k, $k=\overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2=-\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Наведемо екстремальну конфігурацію даної теореми при деяких n і γ. Нехай $n=3$ і $\gamma>1$. Тоді схематична структура траекторій квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2=-\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2$$

буде наступна (див. рис. 2.19).

Нехай $n=4$ і $\gamma>1$. Тоді схематична структура траекторій квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2=-\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2$$

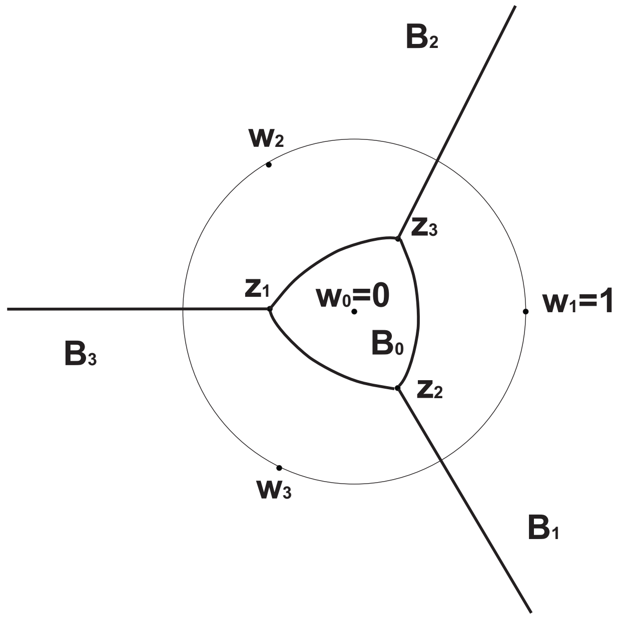


Рис. 2.19: Схематична структура траєкторій квадратичного диференціала при $n = 3$ і $\gamma > 1$

буде наступна (див. рис. 2.20).

З теореми 2.2.1 безпосередньо випливають деякі наслідки. Наступний наслідок справедливий, якщо праву частину нерівності 2.2 теореми 2.2.1 переписати у термінах кругових областей квадратичного диференціала.

Наслідок 1. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_4 = 4,17$, $\gamma_5 = 5,71$, $\gamma_6 = 7,5$, $\gamma_7 = 9,53$, $\gamma_8 = 11,81$ і $\gamma_n = 0,1215\, n^2$ для $n \geqslant 9$. Тоді для довільної системи точок одиничного кола $|a_k| = 1$ і при умові, що $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$ і для довільної системи областей D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, які задовольняють умову часткового перетину відносно точок одиничного кола, справедлива нерівність

$$r^\gamma\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right) \leqslant r^\gamma \left(D_0^{(0)}, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right),$$

де $a_k^{(0)}$ і $D_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

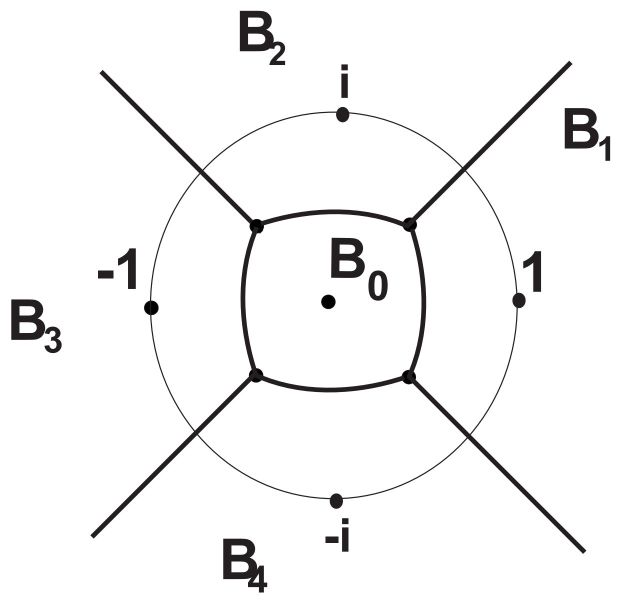


Рис. 2.20: Схематична структура траєкторій квадратичного диференціала при $n = 4$ і $\gamma > 1$

Наслідки 2 та 3 справедливі, якщо розглядати системи різних точок кола радіуса $R > 0$.

Наслідок 2. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (0,\, \gamma_n]$, $\gamma_4 = 4,17$, $\gamma_5 = 5,71$, $\gamma_6 = 7,5$, $\gamma_7 = 9,53$, $\gamma_8 = 11,81$ і $\gamma_n = 0,1215\, n^2$ для $n \geqslant 9$. Тоді для довільної системи різних точок кола радіуса R, $|a_k| = R > 0$ і при умові, що $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$ і для довільної системи областей D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, які задовольняють умову часткового перетину відносно точок кола радіуса R, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \cdot R^{n+\gamma}.$$

Рівність досягається якщо a_k і D_k, $k = \overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + R^n\gamma}{w^2(w^n - R^n)^2}\, dw^2.$$

Наслідок 3. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_4 = 4,17$, $\gamma_5 = 5,71$, $\gamma_6 = 7,5$, $\gamma_7 = 9,53$, $\gamma_8 = 11,81$ і $\gamma_n = 0,1215\,n^2$ для $n \geqslant 9$. Тоді для довільної системи різних точок кола радіуса R, $|a_k| = R > 0$ і при умові, що $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$ і для довільної системи областей D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, які задовольняють умову часткового перетину відносно точок кола радіуса R, справедлива наступна нерівність

$$r^{\gamma}\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right) \leqslant r^{\gamma}\left(D_0^{(0)}, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right),$$

де $a_k^{(0)}$ і $D_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + R^n\gamma}{w^2(w^n - R^n)^2}\,dw^2.$$

З теореми 2.2.1 безпосередньо випливає наступний результат, отриманий Г.П. Бахтіною, В.Є. В'юн, І.В. Денегою у роботі [22].

Наслідок 4. [22] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma_n = n$. Нехай $0 < \gamma \leqslant \gamma_n$. Тоді для довільної $n-$ променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $|a_k| = 1$ такої, що $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$ і для довільного набора областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, які задовольняють умову часткового перетину відносно променевої системи A_n, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак рівності досягається якщо $a_k^{(0)}$ і $B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\,dw^2.$$

З теореми 2.2.1 випливає справедливість важливого твердження для систем неперетинних областей. А саме має місце наступний наслідок.

Наслідок 5. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_4 = 4,17$, $\gamma_5 = 5,71$, $\gamma_6 = 7,5$, $\gamma_7 = 9,53$, $\gamma_8 = 11,81$ і $\gamma_n = 0,1215\, n^2$ для $n \geqslant 9$. Тоді для довільної системи точок одиничного кола $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$ і при умові, що $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$ і довільної системи неперетинних областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак рівності досягається коли a_k і B_k, $k = \overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

У роботі [16] був отриманий наступний результат.

Наслідок 6. [16] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_4 = 4,17$, $\gamma_5 = 5,71$, $\gamma_6 = 7,5$, $\gamma_7 = 9,53$, $\gamma_8 = 11,81$ та $\gamma_n = 0,12\, n^2$ для $n \geqslant 9$. Тоді для довільної системи точок одиничного кола $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$ такої, що $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$, та довільної системи неперетинних областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак рівності досягається коли a_k і B_k, $k = \overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

Наступні наслідки справедливі для системи точок одиничного кола $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$ та кола радіуса $R > 0$ у випадку довільної системи неперетинних областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$.

Наслідок 7. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_4 = 4,17$, $\gamma_5 = 5,71$, $\gamma_6 = 7,5$, $\gamma_7 = 9,53$, $\gamma_8 = 11,81$ та $\gamma_n = 0,1215\, n^2$ для $n \geqslant 9$. Тоді для довільної системи точок одиничного кола $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $|a_k| = 1$ такої, що $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$, та довільної системи неперетинних областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r^{\gamma}\left(B_0^{(0)}, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right),$$

де $a_k^{(0)}$ і $D_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

Наслідок 8. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_4 = 4,17$, $\gamma_5 = 5,71$, $\gamma_6 = 7,5$, $\gamma_7 = 9,53$, $\gamma_8 = 11,81$ та $\gamma_n = 0,1215\, n^2$ для $n \geqslant 9$. Тоді для довільної системи точок кола радіуса R, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $|a_k| = R > 0$ такої, що $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$, та довільної системи неперетинних областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \cdot R^{n+\gamma}.$$

Знак рівності досягається коли a_k і B_k, $k = \overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + R^n\gamma}{w^2(w^n-R^n)^2}\, dw^2.$$

Наслідок 9. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_4 = 4,17$, $\gamma_5 = 5,71$, $\gamma_6 = 7,5$, $\gamma_7 = 9,53$, $\gamma_8 = 11,81$ та $\gamma_n = 0,1215\, n^2$ для $n \geqslant 9$. Тоді для довільної системи точок кола радіуса R, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $|a_k| = R > 0$ такої, що $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$, та довільної системи неперетинних областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r^{\gamma}\left(B_0^{(0)}, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right),$$

де $a_k^{(0)}$ і $D_k^{(0)}$, $k=\overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2=-\frac{(n^2-\gamma)w^n+R^n\gamma}{w^2(w^n-R^n)^2}\,dw^2.$$

Результати попередників, а саме Л.В. Ковальова [54] та О.К. Бахтіна і І.В. Денеги [87] також випливають з основної теореми розділу 2.

Наслідок 10. [54] Нехай $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 5$, $\gamma\in(0,\gamma_n]$, $\gamma_n=n$. Тоді для довільних різних точок одиничного кола $|a_k|=1$ таких, що $0<\alpha_k\leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k=\overline{0,n}$ та довільної системи взаємно неперетинних областей B_k, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $a_0=0\in B_0$, справедлива нерівність (2.2).

Знак рівності досягається коли a_k і B_k, $k=\overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2=-\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Наслідок 11. [87] Нехай $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 4$, $\gamma\in(0,\gamma_n]$, $\gamma_n=n$. Тоді для довільних різних точок одиничного кола $|a_k|=1$ таких, що $0<\alpha_k\leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k=\overline{0,n}$ та довільної системи взаємно неперетинних областей B_k, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $a_0=0\in B_0$, справедлива нерівність (2.2).

Знак рівності досягається коли a_k і B_k, $k=\overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2=-\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Для порівняння результату теореми 2.2.1 та результатів робіт [22], [54], [87] складемо наступну таблицю

n	Результат попередників, $\gamma_n = n$	Результат теореми 2.2.1, γ_n	Приріст інтервалу
4	4	4,17	0,17
5	5	5,71	0,71
6	6	7,5	1,5
7	7	9,53	2,53
8	8	11,81	3,81
9	9	9,8415	0,8415
10	10	12,15	2,15
11	11	14,7015	3,7015
12	12	17,496	5,496
13	13	20,5335	7,5335
14	14	23,814	9,814
15	15	27,3375	12,3375
16	16	31,104	15,104
17	17	35,1135	18,1135
18	18	39,366	21,366
19	19	43,8615	24,8615
20	20	48,6	28,6
...	...	...	...
50	50	303,75	253,75
...	...	...	...
100	100	1215	1115
...	...	...	...
500	500	30375	29875
...	...	...	...
1000	1000	121500	120500

Отже, за рахунок покращення методу дослідження та детального вивчення властивостей функції $P(x)$ вдалося значно посилити результати попередників.

2.3. Доведення теореми 2.2.1

Нехай області D_k, $k=\overline{0,n}$, задовольняють умови теореми та нехай множина $D=\cup_{k=0}^{n}D_k$. Тоді виконуються нерівності

$$r(D_k,a_k)\leqslant r(D,a_k),$$

при всіх $k=\overline{0,n}$, отже, справедлива наступна оцінка

$$r^{\gamma}(D_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(D_k,a_k)\leqslant r^{\gamma}(D,0)\prod_{k=1}^{n}r(D,a_k).$$

Розглянемо систему функцій $\zeta=\pi_k(w)=-i\left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$. Вибираючи відповідну вітку багатозначної аналітичної функції $\pi_k(w), k=\overline{1,n}$ отримаємо, що функція $\pi_k(w)$ однолисто і конформно відображає кут P_k на праву півплощину при кожному $k=\overline{1,n}$. Сімейство функцій $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^{n}$ називається допустимим сімейством для розділяючого перетворення області D відносно кутів $\{P_k\}_{k=1}^{n}$.

Нехай $L_k^{(1)}$, $k=\overline{1,n}$, позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$ отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(D\bigcap\overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_k)$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Позначимо через $L_k^{(2)}$, $k=\overline{1,n}$, таку область площини $\mathbb{C}_\zeta$, яка отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(D\bigcap\overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_{k+1})$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Відзначимо, що $\pi_n(a_{n+1}):=\pi_n(a_1)$. Крім того, позначимо через $L_k^{(0)}$ таку область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(D\bigcap\overline{P}_k)$, яка містить точку $\zeta=0$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Позначимо $\pi_k(a_k):=l_k^{(1)}=-i$, $\pi_k(a_{k+1}):=l_k^{(2)}=i$, $k=\overline{1,n}$, $\pi_n(a_{n+1}):=l_n^{(2)}=i$.

З визначення функцій π_k, випливає, що

$$|\pi_k(w) - l_k^{(1)}| \sim \frac{1}{\alpha_k} \cdot |w - a_k|, \quad w \to a_k, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w) - l_k^{(2)}| \sim \frac{1}{\alpha_k} \cdot |w - a_{k+1}|, \quad w \to a_{k+1}, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k}.$$

Використовуючи формули (1.8) і (1.9), а також теорему 4.10 [37], приходимо до висновку, що

$$r\left(D, a_k\right) \leqslant \left[\frac{r\left(L_k^{(1)}, -i\right) \cdot r\left(L_{k-1}^{(2)}, i\right)}{\frac{1}{\alpha_k} \cdot \frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = \overline{1, n}, \tag{2.3}$$

$$r\left(D, 0\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(L_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4}$$

Приймаючи до уваги нерівності (2.3) і (2.4), маємо співвідношення

$$J_n(\gamma) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left[r\left(L_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}} \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{r\left(L_{k-1}^{(2)}, i\right) r\left(L_k^{(1)}, -i\right)}{\frac{1}{\alpha_{k-1}\cdot\alpha_k}}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\left[r\left(L_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}} \prod_{k=1}^{n}\left[\alpha_{k-1}\cdot\alpha_k\cdot r\left(L_{k-1}^{(2)}, i\right) r\left(L_k^{(1)}, -i\right)\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\alpha_k\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\gamma\alpha_k^2}\left(L_k^{(0)}, 0\right) r\left(L_k^{(1)}, -i\right) r\left(L_k^{(2)}, i\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.5}$$

З умов теореми випливає нерівність $0 < \gamma\alpha_k^2 \leqslant 4$, $k = \overline{1, n}$. Використовуючи теорему 1.5.1, наведену в розділі 1, маємо нерівність

$$r^{\gamma\alpha_k^2}\left(L_k^{(0)}, 0\right) r\left(L_k^{(1)}, -i\right) r\left(L_k^{(2)}, i\right) \leqslant$$

$$\leqslant r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)}, 0\right) r\left(D_k^{(1)}, -i\right) r\left(D_k^{(2)}, i\right), \tag{2.6}$$

де $D_k^{(0)}$, $D_k^{(1)}$, $D_k^{(2)}$ — кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(4 - \alpha_k^2\gamma)w^2 - \alpha_k^2\gamma}{w^2(w^2+1)^2}\, dw^2,$$

які утворюють систему трьох попарно неперетинних областей таких, що $0 \in D_k^{(0)}$, $-i \in D_k^{(1)}$, $i \in D_k^{(2)}$.

Для правої частини нерівності (2.6) маємо рівність

$$r^{\gamma\alpha_k^2}(D_0, 0)\, r(D_1, -i)\, r(D_2, i) =$$

$$= S(\sigma) = 2^{\sigma^2+6} \cdot \sigma^{\sigma^2} \cdot (2-\sigma)^{-\frac{1}{2}(2-\sigma)^2} \cdot (2+\sigma)^{-\frac{1}{2}(2+\sigma)^2}, \quad \sigma \in [0,2],$$

де D_0, D_1, D_2 — довільна трійка попарно неперетинних областей така, що $0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $-i \in D_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $i \in D_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Отже, з усього вище наведеного випливає наступна нерівність

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)}, 0\right) r\left(D_k^{(1)}, -i\right) r\left(D_k^{(2)}, i\right)\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \left[\prod_{k=1}^{n} S\left(\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\right]^{1/2} = \gamma^{-n/2} \left[\prod_{k=1}^{n} P\left(\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.7)$$

де $P(x) = 2^{x^2+6} \cdot x^{x^2+2} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2} \cdot (2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2}, \quad x \in [0,2].$

Таким чином, оцінка функціонала $J_n(\gamma)$ зведена до оцінки функції багатьох змінних, яка залежить тільки від аргументів точок a_k.

Розглянемо допоміжну екстремальну задачу

$$\prod_{k=1}^{n} P(x_k) \longrightarrow \max; \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = 2\sqrt{\gamma},$$

$$x_k = \alpha_k\sqrt{\gamma}, \quad 0 < x_k \leqslant 2.$$

Нехай $F(x) = \ln(P(x))$ і $X^{(0)} = \left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ буде довільна екстремальна точка вище вказаної задачі. Використовуючи метод роботи [54], приходимо до висновку, що справедливе наступне твердження: якщо $0 < x_k^{(0)} < x_j^{(0)} < 2$, $k \neq j$, то $F'(x_k^{(0)}) = F'(x_j^{(0)})$, і якщо деяке $x_j^{(0)} = 2$, то для довільного $x_k^{(0)} < 2$, справедлива нерівність $F'(x_k^{(0)}) \leqslant F'(x_j^{(0)}) = F'(2) = 1$, де $k, j = \overline{1, n}$, $k \neq j$, $F'(x) = 2x \ln 2x + (2-x)\ln(2-x) - (2+x)\ln(2+x) + \frac{2}{x}$ (див. рис. 2.21). Далі для

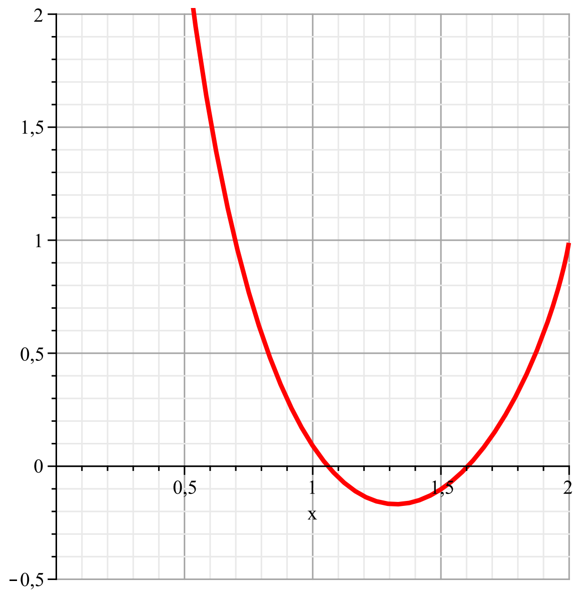


Рис. 2.21: Графік функції $F'(x)$

доведення теореми залишилось показати, що виконується умова

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}.$$

Нехай $F'(x) = t$, $y_0 \leqslant t \leqslant 1$, $y_0 \approx -0,17$. Розглянемо наступні величини t: $t_1 = 1$, $t_2 = 0,95$, $t_3 = 0,9$, $t_4 = 0,85$, $\cdots$, $t_{23} = -0,15$, $t_{24} = -0,17$. Знайдемо корені рівняння $F'(x) = t_k$, $k = \overline{1,24}$. Оскільки $\forall t_k \in [y_0, 1)$, то звідси слідує, що рівняння має два корені $x_1(t) \in (0, x_0]$, $x_2(t) \in (x_0, 2]$, $x_0 \approx 1,324683$. Всі обчислення представлені в таблиці нижче.

k	t_k	$x_1(t_k)$	$x_2(t_k)$	$3x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$	$4x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$
1	1,00	0,697331	2,000000		
2	0,95	0,708144	1,992640	4,084633	4,781964
3	0,90	0,719344	1,983233	4,107666	4,815810
4	0,85	0,730957	1,972549	4,130581	4,849925
5	0,80	0,743014	1,960786	4,153657	4,884614
6	0,75	0,755550	1,948028	4,177071	4,920085
7	0,70	0,768602	1,934315	4,200964	4,956513
8	0,65	0,782217	1,919654	4,225462	4,994064
9	0,60	0,796446	1,904035	4,250687	5,032904
10	0,55	0,811347	1,887429	4,276766	5,073211
11	0,50	0,826991	1,869791	4,303831	5,115178
12	0,45	0,843462	1,851059	4,332032	5,159023
13	0,40	0,860858	1,831149	4,361534	5,204996
14	0,35	0,879304	1,809955	4,392531	5,253389
15	0,30	0,898950	1,787338	4,425249	5,304553
16	0,25	0,919989	1,763115	4,459964	5,358914
17	0,20	0,942675	1,737044	4,497012	5,417001
18	0,15	0,967348	1,708794	4,536819	5,479494
19	0,10	0,994487	1,677892	4,579935	5,547283
20	0,00	1,059462	1,604865	4,588325	5,582811
21	-0,05	1,100561	1,559491	4,737878	5,797340
22	-0,10	1,152868	1,502748	4,804430	5,904991
23	-0,15	1,234855	1,416172	4,874775	6,027642
24	-0,17	1,324683	1,324683	5,029248	6,264103

Із таблиці випливає, що на інтервалі $t \in (0,95; 1)$ досягається мінімальне значення величин $(n-1)x_1(t_1)+x_2(t_2), n = 4, 5,$ яке відповідно дорівнює $4,0846$ і $4,7819$.

Тоді для $n = 4$ маємо, що

$$\sum_{k=1}^{4} x_k > 3x_1(t_1) + x_2(t_2) = 4,0846 = 2\sqrt{\gamma_4}.$$

Звідси маємо, що $\gamma_4 = 4,1709$.

Аналогічно, для $n = 5$ маємо, що

$$\sum_{k=1}^{5} x_k > 4x_1(t_1) + x_2(t_2) = 4,7819 = 2\sqrt{\gamma_5}.$$

Таким чином, $\gamma_5 = 5,7116$.

Використовуючи вище наведену таблицю маємо, що відповідний мінімум величин

$$(n-1)x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$$

при $n = 6, 7, 8$ дорівнює, відповідно, $\gamma_6 = 7,505$, $\gamma_7 = 9,5369$, $\gamma_8 = 11,8119$.

Із таблиці отримуємо, що для функції $F'(x)$ справедлива нерівність $(x_1 - 0,69)\,n + (x_2 - x_1) > 0$. Отже, $nx_1 + (x_2 - x_1) > 0,69\,n$. І, остаточно, маємо

$$(n-1)x_1 + x_2 > 0,69n = 2\sqrt{\gamma_n}, \quad \gamma_n = 0,1215\,n^2, \quad n \geqslant 9.$$

Таким чином, з вище наведених нерівностей випливає, що для довільного фіксованого $\gamma \in (1, \gamma_n]$, де γ_n задано в умовах теореми, виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^{(0)}(t) > 2\sqrt{\gamma_n}, \quad n \geqslant 4.$$

З іншого боку, необхідною умовою є рівність

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^{(0)}(t) = 2\sqrt{\gamma_n}, \quad n \geqslant 4.$$

З цього випливає, що всі точки $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ належать проміжку $(0,\, x_0]$.

Тобто ми маємо, що для екстремального набору $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ виконується рівність $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$, $k = \overline{1,n}$ для всіх $\gamma \in (1, \gamma_n]$, та $n \geqslant 4$.

Отже, підсумовуючи всі міркування маємо, що справедлива нерівність

$$J_n(\gamma) \leqslant \gamma^{-n/2}\left[\prod_{k=1}^{n} P\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

З іншого боку,

$$\gamma^{-n/2}\left[\prod_{k=1}^{n} P\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = r^{\gamma}\left(D_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k^{(0)},a_k^{(0)}\right),$$

де $a_k^{(0)}$ і $D_k^{(0)}$, $k=\overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Відомо (див. [7]) , що

$$r^{\gamma}\left(D_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k^{(0)},a_k^{(0)}\right) = \left(\frac{4}{n}\right)^{n}\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Теорема 2.2.1 доведена.

2.4. Лема про існування екстремалі у проблемі В.М. Дубініна з додатковими обмеженнями на кутові коефіцієнти

Лема 2.4.1. *При умовах теореми 2.2.1 екстремальні конфігурації існують при кожному фіксованому* γ, $\gamma \in (1,n^2]$.

Доведення леми 2.4.1. Позначимо через $\mathfrak{D}$ множину всіх систем областей $\{D_k\}_{k=0}^{n}$, які задовольняють умову часткового перетину відносно деякої системи різних точок одиничного кола $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, $|a_k|=1$,

$k = \overline{1,n}$. З нерівності (2.7), отриманої при доведенні теореми 2.2.1, випливає, що функціонал $J_n(\gamma)$ обмежений при всіх γ, $\gamma \in (1, n^2]$ на класі $\mathfrak{D}$. Тоді існує величина

$$\sup J_n(\gamma) = J_n^{(0)}(\gamma) < +\infty,$$

де супремум береться по усьому класу $\mathfrak{D}$ при кожному фіксованому $n \geqslant 2$ і $\gamma \in (1, n^2]$. Отже, існує послідовність $J_n^{(p)}(\gamma) \nearrow J_n^{(0)}(\gamma)$, $p \to \infty$.

Тоді існує послідовність систем областей $\{D_k^{(p)}\}_{k=0}^n \in \mathfrak{D}$, яка задовольняє умову часткового перетину відносно відповідно різних точок одиничного кола $|a_k^{(p)}| = 1$, $k = \overline{1,n}$.

Переходячи скінченне число разів до підпослідовностей вище вказаних послідовностей, приходимо до висновку, що

$$|a_k^{(p)}| \to |a_k^{(0)}|, \quad k = \overline{1,n}.$$

З відомої теореми Каратеодорі про збіжність областей до ядра випливає, що при кожному k, $D_k^{(p)} \to D_k^{(0)} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, де $D_k^{(0)}$ є ядром послідовності $D_k^{(p)}$, причому $a_k^{(0)} \in D_k^{(0)}$.

Очевидно, що система областей $\{D_k^{(0)}\}_{k=0}^n$ задовольняє умову часткового перетину відносно системи точок $\{a_k^{(0)}\}_{k=0}^n$, тобто $D_k^{(0)} \in \mathfrak{D}$ і

$$J_n^{(p)}(\gamma) = r^\gamma\left(D_0^{(p)}, 0\right) \prod_{k=1}^n r\left(D_k^{(p)}, a_k^{(p)}\right) \to J_n^{(0)}(\gamma).$$

Отже, система областей $D_k^{(0)}$ і точок $a_k^{(0)}$ є екстремальною конфігурацією даної задачі.

Лема 2.4.1 доведена.

Висновки

У другому розділі дисертаційної роботи удосконалено метод дослідження, який дозволив отримати розв'язок задачі про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів частково перетинних областей відносно точок на одиничному колі і внутрішнього радіуса в деякій додатній степені області відносно початку координат. Цей результат узагальнює та посилює відомі результати попередників [22, 54, 87].

Результати розділу опубліковано в статтях [16, 107] та тезах конференцій [101, 103].

РОЗДІЛ 3

ЕКСТРЕМАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕПЕРЕТИННИХ ОБЛАСТЕЙ З ВІЛЬНИМИ ПОЛЮСАМИ НА $N-$ПРОМЕНЕВІЙ СИСТЕМІ ТОЧОК

Даний розділ присвячений дослідженню екстремальної задачі про добуток внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей при додатковій умовій на кутові параметри $n-$ променевої системи точок.

3.1. Постановка задачі та відомі результати попередників

В зв'язку з дослідженням робіт [6], [7] та введенням загальних n-променевих систем точок можна розглянути узагальнену задачу В.М. Дубініна. Тобто замість систем точок, розташованих на одиничному колі, розглянемо систему точок, яка утворює n-променеву систему точок, підпорядковану деяким умовам.

В роботах [6], [7] був запропонований метод "керуючих" функціоналів, який дає змогу послабити вимоги на геометрію розташування систем точок. Завдяки цьому вдалося узагальнити постановку задачі В.М. Дубініна. Для цього введемо деякі позначення та означення.

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Набір точок $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C} : k = \overline{1,n}\right\}$ будемо називати n-променевою системою точок, якщо $|a_k| \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1,n}$, і

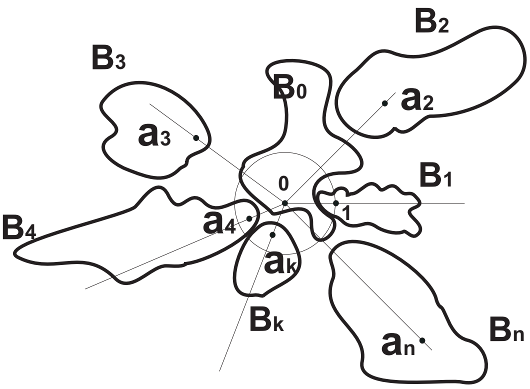
$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi.$$

Для довільної n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ та $\gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ введемо "керуючий" функціонал:

$$\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}.$$

Легко перевірити, що клас n-променевих систем точок для яких справедлива рівність $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = 1$ автоматично включає всі системи n різних точок, що розміщені на одиничному колі.

На рисунку наведено приклад n-променевої системи точок



Сформулюємо задачу, яка вивчається в даному розділу.

Узагальнена проблема 1. Знайти максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

при $0 < \gamma \leqslant n$, B_0, B_1, B_2,..., B_n, $(n \geqslant 2)$ — попарно неперетині області в $\overline{\mathbb{C}}$ такі, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, система точок $\{a_k\}_{k=1}^n$ утворює $n-$ променеву систему точок, причому $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_k, a_k)$ — внутрішній радіус області B_k в точці a_k, $k = \overline{0, n}$ і описати всі системи екстремальних конфігурацій.

Подальші часткові результати у проблемі 1 були отримані в багатьох роботах, зокрема [7, 9, 31, 32, 86]. У роботі [32] розв'язано проблему 1 при $\gamma \in (0, 1]$ та $n \geqslant 2$.

Основний результат, який було отримано по узагальненій проблемі 1 з додатковими обмеженнями на кутові параметри задачі, тобто при умові, що $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1, n}$ та системі точок $\{a_k\}_{k=1}^n$, які утворюють $n-$ променеву систему точок, а саме у роботі [31] розв'язано проблему 1 при додаткових обмеженнях на кутові параметри задачі при $\gamma \in (0, n]$ та $n \geqslant 5$.

3.2. Формулювання основного результату розділу

Для довільної $n-$ променевої системи точок та довільної системи неперетинних областей справедливий наступний результат.

Теорема 3.2.1. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_4 = 4,17$, $\gamma_5 = 5,71$, $\gamma_6 = 7,5$, $\gamma_7 = 9,53$, $\gamma_8 = 11,81$, $\gamma_n = 0,1215\, n^2$ *для* $n \geqslant 9$. *Тоді для довільної* n*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = 1$ *і при умові, що* $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1, n}$ *і довільної системи взаємно неперетинних областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \qquad (3.1)$$

Знак рівності досягається коли a_k *і* B_k, $k = \overline{0, n}$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

З цього результату випливають наступні наслідки.

Наслідок 1. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_4 = 4,17$, $\gamma_5 = 5,71$, $\gamma_6 = 7,5$, $\gamma_7 = 9,53$, $\gamma_8 = 11,81$, $\gamma_n = 0,1215\, n^2$ для $n \geqslant 9$. Тоді для довільної n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = 1$ і при умові, що $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$ і довільної системи неперетинних областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r^{\gamma}\left(B_0^{(0)}, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right).$$

Знак рівності досягається коли $a_k^{(0)}$ і $B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

Якщо розглянути $n-$променеву систему точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = R^{n+\gamma}$, причому $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$, то справедливі наступні наслідки.

Наслідок 2. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_4 = 4,17$, $\gamma_5 = 5,71$, $\gamma_6 = 7,5$, $\gamma_7 = 9,53$, $\gamma_8 = 11,81$, $\gamma_n = 0,1215\, n^2$ для $n \geqslant 9$. Тоді для довільної n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = R^{n+\gamma}$ і при умові, що $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$ і довільної системи неперетинних областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \cdot R^{n+\gamma}.$$

Знак рівності досягається коли a_k і B_k, $k = \overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + R^n\gamma}{w^2(w^n-R^n)^2}\, dw^2.$$

Наслідок 3. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_4 = 4,17$, $\gamma_5 = 5,71$, $\gamma_6 = 7,5$, $\gamma_7 = 9,53$, $\gamma_8 = 11,81$, $\gamma_n = 0,1215\, n^2$ для $n \geqslant 9$. Тоді для довільної n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = R^{n+\gamma}$ і при умові, що $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$ і довільної системи неперетинних областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r^{\gamma}\left(B_0^{(0)}, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right).$$

Знак рівності досягається коли a_k і B_k, $k=\overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + R^n\gamma}{w^2(w^n-R^n)^2}\,dw^2.$$

Безпосереднім наслідком з теореми 3.2.1 є наступний результат для точок одиничного кола.

Наслідок 4. [16] Нехай $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 4$, $\gamma\in(0,\gamma_n]$, $\gamma_4=4,17$, $\gamma_5=5,71$, $\gamma_6=7,5$, $\gamma_7=9,53$, $\gamma_8=11,81$ та $\gamma_n=0,12\,n^2$ для $n\geqslant 9$. Тоді для довільної системи точок одиничного кола $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k|=1$ такої, що $0<\alpha_k\leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k=\overline{1,n}$, та довільної системи неперетинних областей B_k, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n}$, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)\leqslant\left(\frac{4}{n}\right)^n\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак рівності досягається коли a_k і B_k, $k=\overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

З результату теореми 3.2.1 випливає, що цей результат істотно покращує результат І.В. Денеги [31].

Наслідок 5. [31] Нехай $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 5$, $\gamma\in(0,\gamma_n]$. Тоді для довільної n-променевої системи точок $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$, $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n)=1$ такої, що $0<\alpha_k\leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k=\overline{1,n}$, та довільної системи неперетинних областей B_k, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n}$, справедлива нерівність (3.1). Знак рівності досягається при тих же умовах, що і в теоремі 3.2.1.

З результату теореми 3.2.1 випливає, що цей результат істотно узагальнює результат О.К. Бахтіна та І.В. Денеги [87] на випадок $n-$ променевої системи точок.

Наслідок 6. [87] Нехай $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 4$, $\gamma\in(0,\gamma_n]$, $\gamma_n=n$. Тоді для довільних різних точок одиничного кола $|a_k|=1$ таких, що

$0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{0,n}$ та довільної системи взаємно неперетинних областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \in B_0$, справедлива нерівність (3.1). Знак рівності досягається при тих же умовах, що і в теоремі 3.2.1.

З результату теореми 3.2.1 випливає, що цей результат істотно узагальнює результат Л.В. Ковальова [54] на випадок $n-$променевої системи точок.

Наслідок 7. [54] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n$. Тоді для довільних різних точок одиничного кола $|a_k| = 1$ таких, що $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{0,n}$ та довільної системи взаємно неперетинних областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \in B_0$, справедлива нерівність (3.1). Знак рівності досягається при тих же умовах, що і в теоремі 3.2.1.

3.3. Доведення теореми 3.2.1

Розглянемо систему функцій $\zeta = \pi_k(w) = -i\left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $\quad k = \overline{1,n}$. При відповідному виборі однозначної вітки багатозначної аналітичної функції $\pi_k(w)$ отримаємо, що функція $\pi_k(w)$ здійснює однолисте і конформне відображення кутової області P_k на праву півплощину при кожному $k = \overline{1,n}$.

Сімейство функцій $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^{n}$ називається допустимим для розділяючого перетворення областей B_k, $k = \overline{0,n}$ відносно кутів $\{P_k\}_{k=1}^{n}$.

Нехай $L_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$, позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$ отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_k \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_k)$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Позначимо через $L_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, таку область площини $\mathbb{C}_\zeta$, яка отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_{k+1} \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_{k+1})$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Відзначимо, що $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Крім того, позначимо через $L_k^{(0)}$ таку область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_0\bigcap\overline{P}_k)$, яка містить точку $\zeta=0$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Позначимо $\pi_k(a_k):=l_k^{(1)}$, $\pi_k(a_{k+1}):=l_k^{(2)}$, $k=\overline{1,n}$, $\pi_n(a_{n+1}):=l_n^{(2)}$.

З визначення функцій π_k, випливає, що

$$|\pi_k(w)-l_k^{(1)}|\sim\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot|w-a_k|,\quad w\to a_k,\quad w\in\overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)-l_k^{(2)}|\sim\frac{1}{\alpha_k}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot|w-a_{k+1}|,\quad w\to a_{k+1},\quad w\in\overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)|\sim|w|^{\frac{1}{\alpha_k}},\quad w\to 0,\quad w\in\overline{P_k}.$$

Використовуючи формули (1.8) і (1.9) пункту 1.4 розділу 1 та теорему 4.10 [37], приходимо до висновку, що справедливі нерівності

$$r\left(B_k,a_k\right)\leqslant\left[\frac{r\left(L_k^{(1)},l_k^{(1)}\right)\cdot r\left(L_{k-1}^{(2)},l_{k-1}^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot\frac{1}{\alpha_{k-1}}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}},\quad k=\overline{1,n},\tag{3.2}$$

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant\left[\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha_k^2}\left(L_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}}.\tag{3.3}$$

Приймаючи до уваги нерівності (3.2) та (3.3), отримаємо наступне співвідношення

$$J_n(\gamma)\leqslant\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{|a_ka_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}\times\tag{3.4}$$

$$\times\left[\prod_{k=1}^{n}r^{\gamma\alpha_k^2}\left(L_k^{(0)},0\right)r\left(L_k^{(1)},l_k^{(1)}\right)r\left(L_k^{(2)},l_k^{(2)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Відомо (див. [58]), що наступний функціонал

$$Y_3(t_1,t_2,t_3,D_1,D_2,D_3,d_1,d_2,d_3)=\tag{3.5}$$

$$=\frac{r^{t_1}(D_1,d_1)r^{t_2}(D_2,d_2)r^{t_3}(D_3,d_3)}{|d_1-d_2|^{t_1+t_2-t_3}\cdot|d_1-d_3|^{t_1-t_2+t_3}\cdot|d_2-d_3|^{-t_1+t_2+t_3}}$$

є інваріантом відносно всіх конформних автоморфізмів розширеної комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$, $t_k\in\mathbb{R}^+$, де D_k — неперетинні області такі, що

$d_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}, k = 1,2,3$. З формули (3.4) після множення та ділення на таку величину

$$\left[\prod_{k=1}^{n} |l_k^{(1)} \cdot l_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2} |l_k^{(1)} - l_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

отримаємо наступну нерівність

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \times$$

$$\times \left\{\prod_{k=1}^{n} \frac{r^{\gamma\alpha_k^2}\left(L_k^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(L_k^{(1)}, l_k^{(1)}\right) \cdot r\left(L_k^{(2)}, l_k^{(2)}\right)}{|l_k^{(1)} \cdot l_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2} |l_k^{(1)} - l_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2}}\right\}^{\frac{1}{2}} \times \tag{3.6}$$

$$\times \left[\prod_{k=1}^{n} |l_k^{(1)} \cdot l_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2} |l_k^{(1)} - l_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

де $|l_k^{(1)}| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $|l_k^{(2)}| = |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $|l_k^{(1)} - l_k^{(2)}| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1,n}$.

Із співвідношення (3.6) маємо, що

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \times$$

$$\times \left\{\prod_{k=1}^{n} \frac{r^{\gamma\alpha_k^2}\left(L_k^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(L_k^{(1)}, l_k^{(1)}\right) \cdot r\left(L_k^{(2)}, l_k^{(2)}\right)}{|l_k^{(1)} \cdot l_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2} |l_k^{(1)} - l_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2}}\right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{|l_k^{(1)} l_k^{(2)}|}{|l_k^{(1)} - l_k^{(2)}|}\right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n} |l_k^{(1)} - l_k^{(2)}|\right).$$

Далі слідує, що

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \cdot \left\{\prod_{k=1}^{n} \frac{r^{\gamma\alpha_k^2}\left(L_k^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(L_k^{(1)}, l_k^{(1)}\right) \cdot r\left(L_k^{(2)}, l_k^{(2)}\right)}{|l_k^{(1)} \cdot l_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2} |l_k^{(1)} - l_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2}}\right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \left(|l_k^{(1)} - l_k^{(2)}|\right) \left(\frac{|l_k^{(1)} l_k^{(2)}|}{|l_k^{(1)} - l_k^{(2)}|}\right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}\right].$$

Тоді легко бачити, що

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}\left(\prod_{k=1}^{n}|l_k^{(1)}-l_k^{(2)}|\right)=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}\left(|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)=\prod_{k=1}^{n}|a_k|\left(|\frac{a_k}{a_{k+1}}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}+|\frac{a_{k+1}}{a_k}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)=$$

$$=2^n\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\left[|\frac{a_k}{a_{k+1}}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}+|\frac{a_{k+1}}{a_k}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right]\right)|a_k|=$$

$$=2^n\prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a_k|. \tag{3.7}$$

Аналогічно маємо, що

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{|l_k^{(1)}l_k^{(2)}|}{|l_k^{(1)}-l_k^{(2)}|}\right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}\right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}\right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}\left(|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}=$$

$$=2^{-\frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}{\alpha_k}^2}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}\right)^{-\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}\prod_{k=1}^{n}|a_k|^{\frac{\gamma\alpha_k}{4}}|a_{k+1}|^{\frac{\gamma\alpha_k}{4}}=$$

$$=2^{-\frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}{\alpha_k}^2}\left[\prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{-\frac{\gamma{\alpha_k}^2}{2}}\prod_{k=1}^{n}|a_k|^{\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}.$$

Підсумовуючи наведені вище співвідношення, ми отримуємо

$$J_n(\gamma)\leqslant 2^{n-\frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^2}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left\{\prod_{k=1}^{n}Y_3(\gamma\alpha_k^2,1,1,L_k^{(0)},L_k^{(1)},L_k^{(2)},0,l_k^{(1)},l_k^{(2)})\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(|\frac{a_k}{a_{k+1}}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}\prod_{k=1}^{n}|a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}. \tag{3.8}$$

Легко бачити, що для довільного $k=\overline{1,n}$ ми можемо вказати конформний автоморфізм $\zeta=T_k(z)$ площини комплексних чисел $\overline{\mathbb{C}}$

такий, що $T_k(0)=0$, $T_k\left(l_k^{(s)}\right)=(-1)^s\cdot i$, $E_k^{(q)}:=T_k\left(L_k^{(q)}\right)$, $k=\overline{1,n}$, $0\in E_k^{(0)}$, $-i\in E_k^{(1)}$, $i\in E_k^{(2)}$, $s=1,2$, $q=0,1,2$.

Використовуючи вид функціонала (3.5) маємо, що справедливі рівності

$$Y_3\left(\gamma\alpha_k^2,1,1,L_k^{(0)},L_k^{(1)},L_k^{(2)},0,l_k^{(1)},l_k^{(2)}\right)=$$
$$=Y_3\left(\gamma\alpha_k^2,1,1,E_k^{(0)},E_k^{(1)},E_k^{(2)},0,-i,i\right),$$

де $k=\overline{1,n}$, і справедлива наступна рівність

$$Y_3\left(\gamma\alpha_k^2,1,1,E_k^{(0)},E_k^{(1)},E_k^{(2)},0,-i,i\right)=$$
$$=\frac{r^{\alpha_k^2\gamma}\left(E_k^{(0)},0\right)r\left(E_k^{(1)},-i\right)r\left(E_k^{(2)},i\right)}{2^{2-\gamma\alpha_k^2}}.$$

Отже, використовуючи попередні рівності та формулу (3.8), приходимо до співвідношення

$$J_n(\gamma)\leqslant 2^{n-\frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^2}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\cdot\mathcal{N}^{(\gamma)}\left(A_n\right)\times$$
$$\times\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{r^{\alpha_k^2\gamma}\left(E_k^{(0)},0\right)r\left(E_k^{(1)},-i\right)r\left(E_k^{(2)},i\right)}{2^{2-\gamma\alpha_k^2}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Підсумовуючи всі попередні оцінки, отримаємо остаточну нерівність

$$J_n(\gamma)\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left[\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha_k^2\gamma}\left(E_k^{(0)},0\right)r\left(E_k^{(1)},-i\right)r\left(E_k^{(2)},i\right)\right]^{\frac{1}{2}}\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n).$$

Так як $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n)=1$, то ми маємо

$$J_n(\gamma)\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left[\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha_k^2\gamma}\left(E_k^{(0)},0\right)r\left(E_k^{(1)},-i\right)r\left(E_k^{(2)},i\right)\right]^{\frac{1}{2}},\qquad(3.9)$$

Таким чином, за допомогою розділяючого перетворення та формул (3.4) — (3.9), ми отримали оцінку функціонала $J_n(\gamma)$ через n функціоналів, заданих на трійках попарно неперетинних областей $E_k^{(0)},E_k^{(1)},E_k^{(2)}$ таких, що $0\in E_k^{(0)},-i\in E_k^{(1)},i\in E_k^{(2)}$.

Таким чином, із теореми (1.5.1) розділу 1 маємо, що при кожному $k=\overline{1,n}$ виконуються співвідношення

$$\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(E_k^{(0)},0\right) r\left(E_k^{(1)},-i\right) r\left(E_k^{(2)},i\right) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)},0\right) r\left(D_k^{(1)},-i\right) r\left(D_k^{(2)},i\right)$$

де $D_k^{(0)}$, $D_k^{(1)}$, $D_k^{(2)}$ — кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(4-\alpha_k^2\gamma)w^2-\alpha_k^2\gamma}{w^2(w^2+1)^2}\,dw^2$$

($0\in D_k^{(0)}$, $-i\in D_k^{(1)}$, $i\in D_k^{(2)}$).

Крім того,

$$\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)},0\right) r\left(D_k^{(1)},-i\right) r\left(D_k^{(2)},i\right) =$$

$$= 2^{\sigma^2+6}\cdot\sigma^{\sigma^2}\cdot(2-\sigma)^{-\frac{1}{2}(2-\sigma)^2}\cdot(2+\sigma)^{-\frac{1}{2}(2+\sigma)^2} = S(\sigma),\quad \sigma\in[0,2].$$

Тоді використовуючи всі попередні міркування, отримаємо остаточну нерівність

$$J_n(\gamma)\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left[\prod_{k=1}^{n} S\left(\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\right]^{1/2} = \gamma^{-n/2}\left[\prod_{k=1}^{n} P\left(\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$P(x) = 2^{x^2+6}\cdot x^{x^2+2}\cdot(2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}\cdot(2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2},\quad x\in[0,2].$$

Відмітимо, що права частина останньої нерівності містить величини, які залежать тільки від кутових параметрів задачі.

Розглянемо допоміжну екстремальну задачу

$$\prod_{k=1}^{n} P(x_k)\longrightarrow\max;\quad \sum_{k=1}^{n} x_k = 2\sqrt{\gamma},$$

$$x_k=\alpha_k\sqrt{\gamma},\quad 0<x_k\leqslant 2.$$

Нехай $F(x) = \ln(P(x))$ і $X^{(0)} = \left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ буде довільна екстремальна точка вище вказаної задачі. Аналогічним методом, який введений в роботі [54], приходимо до висновку, що справедливе наступне твердження: якщо $0 < x_k^{(0)} < x_j^{(0)} < 2$, $k \neq j$, то $F'(x_k^{(0)}) = F'(x_j^{(0)})$, і якщо деяке $x_j^{(0)} = 2$, то для довільного $x_k^{(0)} < 2$, справедлива нерівність $F'(x_k^{(0)}) \leqslant F'(x_j^{(0)}) = F'(2) = 1$, де $k, j = \overline{1, n}$, $k \neq j$, $F'(x) = 2x\ln 2x + (2-x)\ln(2-x) - (2+x)\ln(2+x) + \frac{2}{x}$ (див рис. 3.22). Далі нам необхідно показати, що виконується така умова

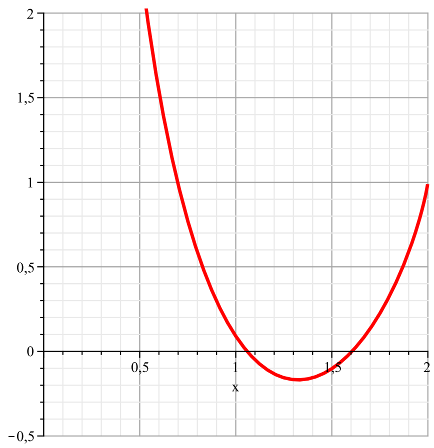


Рис. 3.22: Графік функції $F'(x)$

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}.$$

Нехай $F'(x) = t$, $y_0 \leqslant t \leqslant 1$, $y_0 \approx -0,17$. Розглянемо наступні величини t: $t_1 = 1$, $t_2 = 0,95$, $t_3 = 0,9$, $t_4 = 0,85$, $\cdots$, $t_{23} = -0,15$, $t_{24} = -0,17$. Знайдемо корені рівняння $F'(x) = t_k$, $k = \overline{1, 24}$. Оскільки $\forall t_k \in [y_0, 1)$, то звідси слідує, що рівняння має два корені $x_1(t) \in (0, x_0]$, $x_2(t) \in (x_0, 2]$, $x_0 \approx 1,324683$. Всі обчислення представлені в таблиці нижче.

k	t_k	$x_1(t_k)$	$x_2(t_k)$	$3x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$	$4x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$
1	1,00	0,697331	2,000000		
2	0,95	0,708144	1,992640	4,084633	4,781964
3	0,90	0,719344	1,983233	4,107666	4,815810
4	0,85	0,730957	1,972549	4,130581	4,849925
5	0,80	0,743014	1,960786	4,153657	4,884614
6	0,75	0,755550	1,948028	4,177071	4,920085
7	0,70	0,768602	1,934315	4,200964	4,956513
8	0,65	0,782217	1,919654	4,225462	4,994064
9	0,60	0,796446	1,904035	4,250687	5,032904
10	0,55	0,811347	1,887429	4,276766	5,073211
11	0,50	0,826991	1,869791	4,303831	5,115178
12	0,45	0,843462	1,851059	4,332032	5,159023
13	0,40	0,860858	1,831149	4,361534	5,204996
14	0,35	0,879304	1,809955	4,392531	5,253389
15	0,30	0,898950	1,787338	4,425249	5,304553
16	0,25	0,919989	1,763115	4,459964	5,358914
17	0,20	0,942675	1,737044	4,497012	5,417001
18	0,15	0,967348	1,708794	4,536819	5,479494
19	0,10	0,994487	1,677892	4,579935	5,547283
20	0,00	1,059462	1,604865	4,588325	5,582811
21	-0,05	1,100561	1,559491	4,737878	5,797340
22	-0,10	1,152868	1,502748	4,804430	5,904991
23	-0,15	1,234855	1,416172	4,874775	6,027642
24	-0,17	1,324683	1,324683	5,029248	6,264103

Із таблиці слідує, що на інтервалі $t \in (0,95;1)$ досягається мінімальне значення величин $(n-1)x_1(t_1)+x_2(t_2), n=4,5,$ яке відповідно дорівнює $4,0846$ і $4,7819$.

Тоді для $n=4$ маємо, що

$$\sum_{k=1}^{4} x_k > 3x_1(t_1)+x_2(t_2) = 4,0846 = 2\sqrt{\gamma_4}.$$

Звідси маємо, що $\gamma_4 = 4,1709$.

Аналогічно, для $n = 5$ маємо, що

$$\sum_{k=1}^{5} x_k > 4x_1(t_1) + x_2(t_2) = 4,7819 = 2\sqrt{\gamma_5}.$$

Таким чином, $\gamma_5 = 5,7116$.

Використовуючи вище наведену таблицю, маємо, що відповідний мінімум величин

$$(n-1)x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$$

при $n = 6, 7, 8$ дорівнює, відповідно, $\gamma_6 = 7,505$, $\gamma_7 = 9,5369$, $\gamma_8 = 11,8119$.

Із таблиці отримуємо, що для функції $F'(x)$ справедлива нерівність $(x_1 - 0,69)\,n + (x_2 - x_1) > 0$. Отже, $nx_1 + (x_2 - x_1) > 0,69\,n$. І, остаточно, отримаємо

$$(n-1)x_1 + x_2 > 0,69n = 2\sqrt{\gamma_n}, \quad \gamma_n = 0,1215\,n^2, \quad n \geqslant 9.$$

Таким чином, з вище наведених нерівностей випливає, що для довільного фіксованого $\gamma \in (1, \gamma_n]$, де γ_n задано в умовах теореми, виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^{(0)}(t) > 2\sqrt{\gamma_n}, \quad n \geqslant 4.$$

З іншого боку, необхідною умовою є рівність

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^{(0)}(t) = 2\sqrt{\gamma_n}, \quad n \geqslant 4.$$

З цього випливає, що всі точки $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ належать проміжку $(0,\, x_0]$.

Тобто ми маємо, що для екстремального набору $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ виконується рівність $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$, $k = \overline{1,n}$ для всіх $\gamma \in (1, \gamma_n]$, та $n \geqslant 4$.

Отже, підсумовуючи все вище наведене маємо, що справедлива нерівність

$$J_n(\gamma) \leqslant \gamma^{-n/2} \left[\prod_{k=1}^{n} P\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

З іншого боку,

$$\gamma^{-n/2} \left[\prod_{k=1}^{n} P\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = r^{\gamma}\left(D_0^{(0)}, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right),$$

де $a_k^{(0)}$ і $D_k^{(0)}$, $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

Відомо (див. [7]) , що

$$r^{\gamma}\left(D_0^{(0)}, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}} \right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Теорема 3.2.1 повністю доведена.

Висновки

У третьому розділі дисертаційної роботи отримано розв'язок задачі про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами, які утворюють так звані n-променеві системи точок. Ця теорема істотно узагальнює результати попередників [31, 54, 87, 16].

Результати розділу опубліковано в статті [88] та тезах конференцій [102].

РОЗДІЛ 4

ЗАДАЧА ПРО НЕПЕРЕТИННІ ОБЛАСТІ З ДОДАТКОВИМИ УМОВАМИ СИМЕТРІЇ

Даний розділ присвячений дослідженню екстремальної задачі про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей, частина з яких володіє симетрією відносно одиничного кола.

4.1. Постановка задачі та результати попередників

Застосовуючи загальну ідею П.М. Тамразова, запропоновану в роботі [78], до задач про неперетинні області, вперше в роботі Г.П. Бахтіної [19] були розглянуті задачі про екстремальне розбиття комплексної площини для симетричних відносно коло взаємно неперетинних областей. Зокрема, в цій роботі була поставлена наступна екстремальна задача: знайти максимум функціонала

$$I_n = \prod_{k=1}^{n} R(B_k, a_k)$$

при умові, що $B_1, ..., B_n$ — однозв'язні попарно неперетинні симетричні відносно одиничного кола області такі, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$. В роботі було одержано наступну оцінку

$$I_4 = \prod_{k=1}^{4} R(B_k, a_k) \leqslant 1,$$

причому рівність досягається у випадку, коли області B_k є круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{z^2}{(z^4-1)^2}\,dz^2.$$

В 1984 р. Г.П. Бахтіна у роботі [20] розглянула задачу про максимум функціонала

$$I_n = \prod_{k=0}^{n} R^{\alpha_k}(B_k, a_k), \tag{4.1}$$

де $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ — довільна система однозв'язних взаємно неперетинних областей таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset U$, $\quad a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $\quad \alpha_k \geqslant 0$, $\quad k = \overline{0,n}$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, області $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ симетричні відносно одиничного кола і отримала деякі часткові результати даної задачі.

В роботі [34] 1988 р. розглянуто частковий випадок функціонала (4.1), а саме:

$$J_n = r(B_0, a_0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

де $B_0, B_1, ..., B_n$ — довільні багатозв'язні взаємно неперетинні області, з яких області $B_1, ..., B_n$ володіють симетрією відносно одиничного кола, $|a_k| = 1$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\quad a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\quad k = \overline{1,n}$, $r(B_k, a_k)$ — внутрішній радіус області B_k відносно точки a_k. Таким чином, в цій роботі розглянуто випадок функціонала (4.1), коли $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_k = 1$, але у більш загальній ситуації для випадку багатозв'язних областей.

Наступну задачу в роботі [35] сформулювано у якості відкритої проблеми у списку невирішених задач (с. 68, № 9.3).

Проблема 2. Знайти максимум добутку

$$J_n = \prod_{k=0}^{n} r(B_k, a_k),$$

при умові, що B_0, B_1, $B_2, ..., B_n$, $(n \geqslant 2)$ — попарно неперетинні багатозв'язні області в $\overline{\mathbb{C}}$, причому області B_1, $B_2, ..., B_n$, $(n \geqslant 2)$ —

симетричні відносно точок одиничного кола, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_k, a_k)$ — внутрішній радіус області B_k в точці a_k $(a_k \in B_k)$, $k = \overline{0, n}$ (див. рис. 4.23).

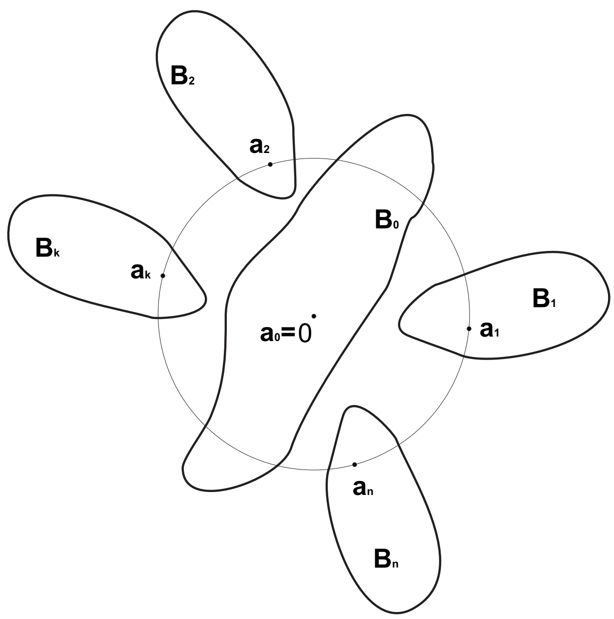


Рис. 4.23: Проблема 2.

Природним узагальненням проблеми 2 є наступна екстремальна задача.

Проблема 2′. Знайти максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k), \tag{4.2}$$

де $0 < \gamma \leqslant n$, області B_0, B_1, B_2,..., B_n, $(n \geqslant 2)$ — попарно неперетинні багатозв'язні в $\overline{\mathbb{C}}$, причому області B_1, B_2, ..., B_n, $(n \geqslant 2)$ — симетричні відносно одиничного кола, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_k, a_k)$ — внутрішній радіус області B_k в точці a_k $(a_k \in B_k)$, $k = \overline{0, n}$ та описати екстремалі цієї задачі.

Проблема $2'$ має розв'язок тільки при $0 < \gamma \leqslant n$, оскільки як тільки $\gamma = n + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ існує послідовність систем неперетинних областей $B_0^{(p)}, ..., B_n^{(p)}$, де $p \to \infty$ при якому $J_n(\gamma) \to \infty$.

Проблема 2 була розв'язана Л.В. Ковальовим у роботі [55] в 2000 році.

Відмітимо, що у порівнянні з проблемою 1, проблема $2'$ є зовсім іншою задачею, незважаючи на те, що вираз функціонала 4.2 в цих проблемах однаковий. Відмітимо, що після роботи Л.В. Ковальова до 2017 року у проблемі $2'$ при $\gamma \neq 1$ не було отримано жодних результатів. Завдяки вдосконаленню метода дослідження вдалося в 2017 р. у роботі [15] розв'язати важливу задачу у випадку трьох неперетинних областей, полюси яких містяться в точках $-1, 0, 1$.

Теорема 4.1.1. [15]. *Нехай* $\gamma \in (0, 2]$. *Для довільного фіксованого набору взаємно неперетинних областей* B_0, B_1, B_2, *таких, що* $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}, 1 \in B_1 \subset \mathbb{C}, -1 \in B_2 \subset \mathbb{C}$, *причому області* $B_k, \quad k \in 1, 2$, *володіють симетрією відносно одиничного кола, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\, r(B_1, 1)\, r(B_2, -1) \leqslant$$

$$(2)^{1-\gamma} \cdot \left[\frac{2^{2\gamma+6} \cdot (2\gamma)^{\gamma}}{(2-\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2-\sqrt{2\gamma})} \cdot (2+\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2+\sqrt{2\gamma})}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Знак рівності досягається коли $B_0, \quad B_1, \quad B_2$ є круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^4 + 2(4-\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2-1)^2}\, dw^2.$$

В даному розділі досліджено проблему $2'$ при $\gamma \neq 1$. А саме: повністю розв'язано задачу для всіх $\gamma \in (0,\, 1)$ та при $n \geqslant 2$, при $\gamma > 1$ отримано точну оцінку вказаного добутку, яка виконується, починаючи з деякого номера n, що залежить від γ, крім того отримано точну оцінку функціонала (4.2) при деяких обмеженнях на кутові параметри задачі.

4.2. Формулювання основних результатів розділу

Основними результатами даного розділу є наступні теореми.

Теорема 4.2.1. [51] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, 1)$. *Тоді для довільної системи різних точок* a_k *при умові, що* $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1, n}$ *і довільного набору взаємно неперетинних областей* B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, *причому області* B_k, $k = \overline{1, n}$ *симетричні відносно одиничного кола, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \cdot \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}. \tag{4.3}$$

Знак рівності досягається коли a_k *і* B_k, $k = \overline{0, n}$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2. \tag{4.4}$$

З теореми 4.2.1 випливають наступні наслідки.

Наслідок 1. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, 1)$. Тоді для довільної системи різних точок a_k при умові, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1, n}$ і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, причому області B_k, $k = \overline{1, n}$ симетричні відносно одиничного кола, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}\left(B_0^{(0)}, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right)$$

Знак рівності досягається коли $a_k = a_k^{(0)}$ і $B_k = B_k^{(0)}$, $k = \overline{0, n}$, і є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Наслідок 2. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0,1)$. Тоді для довільної системи різних точок a_k при умові, що $a_0 = 0$, $|a_k| = R$, $a_1 = R$, $k = \overline{1,n}$ і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, причому області B_k, $k = \overline{1,n}$ симетричні відносно кола радіуса R, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \cdot \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} \cdot R^{n+\gamma}.$$

Знак рівності досягається коли a_k і B_k, $k = \overline{0,n}$, і є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)R^n w^n + R^{2n}\gamma}{w^2(w^n - R^n)^2}\, dw^2.$$

Наслідок 3. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0,1)$. Тоді для довільної системи різних точок a_k при умові, що $a_0 = 0$, $|a_k| = R$, $a_1 = R$, $k = \overline{1,n}$ і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, причому області B_k, $k = \overline{1,n}$ симетричні відносно кола радіуса R, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r^{\gamma}\left(B_0^{(0)}, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right) \cdot$$

Знак рівності досягається коли $a_k = a_k^{(0)}$ і $B_k = B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$, і є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)R^n w^n + R^{2n}\gamma}{w^2(w^n - R^n)^2}\, dw^2.$$

Теорема 4.2.2. [25]. *Для довільного $\gamma > 1$ існує таке $n_0(\gamma) \in \mathbb{N}$, що для кожного $n \geqslant n_0(\gamma)$, для довільної системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $|a_k| = 1$ і для довільного набору попарно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, причому області*

$\{B_k\}_{k=1}^n$ *симетричні відносно одиничного кола, виконується нерівність*

$$r^\gamma(B_0,0)\prod_{k=1}^n r(B_k,a_k)\leqslant r^\gamma\left(B_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^n r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right), \qquad (4.5)$$

де $a_k^{(0)}$ *та* $B_k^{(0)}$, $k=\overline{0,n}$, *— полюси і кругові області квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{\gamma w^{2n}+2(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2, \qquad (4.6)$$

відповідно, причому $|a_k^{(0)}|=1$ *для* $k=\overline{1,n}$, $a_0^{(0)}=0$, $a_k^{(0)}\in B_k^{(0)}$, $k=\overline{0,n}$.

Знак рівності в цій нерівності досягається, якщо $a_k=a_k^{(0)}$, $B_k=B_k^{(0)}$, $k=\overline{0,n}$. З теореми 4.2.2 випливають наступні наслідки.

Наслідок 1. Для довільного $\gamma>1$ існує таке $n_0(\gamma)\in\mathbb{N}$, що для кожного $n\geqslant n_0(\gamma)$, для довільної системи точок $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k|=1$ і для довільного набору попарно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, $0\in B_0$, $a_k\in B_k$, $k=\overline{1,n}$, причому області $\{B_k\}_{k=1}^n$ симетричні відносно одиничного кола, виконується нерівність

$$r^\gamma(B_0,0)\prod_{k=1}^n r(B_k,a_k)\leqslant\left(\frac{4}{n}\right)^n\frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}}\left[\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right]^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Знак рівності досягається коли a_k та B_k, $k=\overline{0,n}$, — полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2=-\frac{\gamma w^{2n}+2(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2,$$

Наслідок 2. Для довільного $\gamma>1$ існує таке $n_0(\gamma)\in\mathbb{N}$, що для кожного $n\geqslant n_0(\gamma)$, для довільної системи точок $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k|=R$ і для довільного набору попарно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, $0\in B_0$, $a_k\in B_k$, $k=\overline{1,n}$, причому області $\{B_k\}_{k=1}^n$ симетричні відносно кола радіуса R, виконується нерівність

$$r^\gamma(B_0,0)\prod_{k=1}^n r(B_k,a_k)\leqslant\left(\frac{4}{n}\right)^n\frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}}\left[\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right]^{\sqrt{2\gamma}}\cdot R^{n+\gamma}.$$

Знак рівності досягається коли a_k та B_k, $k=\overline{0,n}$, — полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2=-\frac{\gamma w^{2n}+2(n^2-\gamma)R^n w^n+R^{2n}\gamma}{w^2(w^n-R^n)^2}\,dw^2.$$

Наслідок 3. Для довільного $\gamma>1$ існує таке $n_0(\gamma)\in\mathbb{N}$, що для кожного $n\geqslant n_0(\gamma)$, для довільної системи точок $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k|=R$ і для довільного набору попарно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, $0\in B_0$, $a_k\in B_k$, $k=\overline{1,n}$, причому області $\{B_k\}_{k=1}^n$ симетричні відносно кола радіуса R, виконується нерівність

$$r^\gamma(B_0,0)\prod_{k=1}^n r(B_k,a_k)\leqslant r^\gamma\left(B_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^n r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right).$$

Знак рівності досягається коли a_k та B_k, $k=\overline{0,n}$, — полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2=-\frac{\gamma w^{2n}+2(n^2-\gamma)R^n w^n+R^{2n}\gamma}{w^2(w^n-R^n)^2}\,dw^2.$$

В якості застосування вище наведених теорем до теорії однолистих функцій можна сформулювати наступне твердження.

Розглянемо клас $T=\{f_k\}_{k=0}^n$ систем однолистих функцій, які відображають одиничний круг $U=\{z:|z|<1\}$ на взаємно неперетинні області $\{B_k\}_{k=0}^n$ (причому області $\{B_k\}_{k=1}^n$ симетричні відносно одиничного кола) так, що

$$f_0(0)=0,\quad |f_k(0)|=1.$$

Тоді з теореми (4.2.2) для класа T справедливе наступне твердження.

Наслідок 4. Для довільної системи функцій $\{f_k\}_{k=0}^n\in T$ справедлива нерівність

$$|f_0'(0)|^\gamma\prod_{k=1}^n|f_k'(0)|\leqslant|f_0^{(0)'}(0)|^\gamma\prod_{k=1}^n|f_k^{(0)'}(0)|.$$

Знак рівності досягається для системи функцій $\{f_k\}_{k=0}^{n} \in T$, такої, що $f_k^{(0)}(U) = B_k^{(0)}$, $f_k^{(0)}(0) = a_k^{(0)}$, $a_0^{(0)} = 0$, ($B_k^{(0)}, a_k^{(0)}$ — кругові області та полюси квадратичного диференціала (4.6), відповідно.)

Нехай y_0 — корінь рівняння $\ln\left(\frac{x^2}{4-x^2}\right) - \frac{4}{x^2} = 0$, $y_0 \approx 1,76$, $x \in (0,2]$.

Теорема 4.2.3. [17] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = 0,38n^2$. Тоді для довільної $n-$променевої системи точок A_n, що належить одиничному колу і при умові, що $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{2\gamma}$, $k = \overline{1,n}$ і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, причому області B_k, $k = \overline{1,n}$ симетричні відносно одиничного кола, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left|1-\frac{2\gamma}{n^2}\right|^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \left|\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}. \qquad (4.7)$$

Знак рівності досягається коли a_k і B_k, $k = \overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2. \qquad (4.8)$$

З теореми 4.2.3 випливають наступні наслідки.

Наслідок 1. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = 0,38n^2$. Тоді для довільної $n-$променевої системи точок A_n, що належить одиничному колу і при умові, що $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{2\gamma}$, $y_0 \approx 1,76$, $k = \overline{1,n}$ і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, причому області B_k, $k = \overline{1,n}$ симетричні відносно одиничного кола $|w| = 1$, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leqslant r^{\gamma}\left(B_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right).$$

Знак рівності досягається коли $a_k = a_k^{(0)}$ і $B_k = B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Наслідок 2. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = 0,38n^2$. Тоді для довільної $n-$ променевої системи точок A_n, що належить колу радіуса R і при умові, що $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{2\gamma}$, $y_0 \approx 1,76$, $k = \overline{1,n}$ і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, причому області B_k, $k = \overline{1,n}$ симетричні відносно кола радіуса R, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left|1-\frac{2\gamma}{n^2}\right|^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \left|\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}} \cdot R^{n+\gamma}.$$

Знак рівності досягається коли a_k і B_k, $k = \overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)R^n w^n + R^{2n}\gamma}{w^2(w^n-R^n)^2}\,dw^2.$$

Наслідок 3. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = 0,38n^2$. Тоді для довільної $n-$ променевої системи точок A_n, що належить колу радіуса R і при умові, що $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{2\gamma}$, $y_0 \approx 1,76$, $k = \overline{1,n}$ і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, причому області B_k, $k = \overline{1,n}$ симетричні відносно кола радіуса R, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r^{\gamma}\left(B_0^{(0)}, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right).$$

Знак рівності досягається коли $a_k = a_k^{(0)}$ і $B_k = B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)R^n w^n + R^{2n}\gamma}{w^2(w^n-R^n)^2}\,dw^2.$$

4.3. Доведення теореми 4.2.1

При доведенні теореми 4.2.1 будемо спиратися на метод розділяючого перетворення, який розроблений в роботах [34, 35], та ідеї робіт [7, 15, 54, 55, 56].

Згідно з умовою теореми, точки a_k, відносно яких підраховуються внутрішні радіуси, розташовані на колі, тоді

$\{a_k\}_{k=1}^n = \exp(i\theta_k), k = \overline{1,n},\ \ 0 = \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < ... < \theta_n < 2\pi.$

Нехай $\alpha_k = \frac{1}{\pi}(\theta_{k+1} - \theta_k), \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2, \alpha_k > 0.$

Позначимо $\alpha_0 = \max\limits_k \alpha_k\,,\ k = \overline{1,n}\,.$

Розглянемо два можливих випадки: $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$ і $\alpha_0 < \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$.

Випадок 1. Нехай $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$. Відмітимо, що в цьому випадку нам досить розглядати лише такі γ, які задовольняють нерівність $\frac{1}{2} \leqslant \gamma \leqslant 1$.

Покажемо, що при умові $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, значення функціонала

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)$$

задовольняє співвідношення (4.3). Справедлива наступна рівність:

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) = \prod_{k=1}^{n} \left[r(B_0, 0) r(B_k, a_k)\right]^{\frac{\gamma}{n}} \left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Відмітимо, що в силу відомої нерівності М.О. Лаврентьєва [69], справедлива нерівність

$$r(B_0, 0) r(B_k, a_k) \leqslant |a_k|^2.$$

Тоді

$$\prod_{k=1}^{n} \left[r(B_0, 0) r(B_k, a_k)\right]^{\frac{\gamma}{n}} \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left[|a_k|^2\right]^{\frac{\gamma}{n}} = 1.$$

Підсумовуючи попередні міркування, маємо

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

З іншого боку, оскільки $B_k,\ k=\overline{1,n}$ система попарно неперетинних областей така, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, то для такої системи областей справедливе твердження роботи [7]

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

Тоді

$$J_n(\gamma) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} \leqslant \left[2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Припустимо, що $\alpha_0 = \alpha_{k_0}, 1 \leqslant k_0 \leqslant n.$

Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2,$ то із відомої нерівності Коші випливає наступне співвідношення

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha_k = \alpha_0 \prod_{k=1 k\neq k_0}^{n} \alpha_k \leqslant \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Тоді для функціонала $J_n(\gamma)$ маємо співвідношення

$$J_n(\gamma) \leqslant \left[2^n \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} = \left[2^n \alpha_0 (2-\alpha_0)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}, \tag{4.9}$$

де $\alpha_0 = \max\limits_{k} \alpha_k\,,\ k=\overline{1,n},\ \alpha_0 \geqslant \frac{2}{n}.$

Для подальшого дослідження важливо обчислити значення величини $J_n^0(\gamma) = r^\gamma\left(B_0^{(0)}, 0\right) \prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right),$ де $a_k^{(0)} \in B_k^{(0)},\ a_k^{(0)}$ і $B_k^{(0)}$ — полюсами і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

Для цього зробимо розділяюче перетворення системи кругових областей $B_k^{(0)}$ за допомогою функцій $\zeta = \{\pi_k(w)\}_{k=1}^{n} = \left(e^{-\frac{2\pi k i}{n}} w\right)^{\frac{n}{2}}$, де вибрана така вітка цієї багатозначної функції, яка реалізує однолисте відображення кута P_k на верхню півплощину.

Нехай D_1, $k=\overline{1,n}$, позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_k\bigcap\overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_k)=1$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Позначимо через D_2, $k=\overline{1,n}$, таку область площини $\mathbb{C}_\zeta$, яка отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_{k+1}\bigcap\overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_{k+1})=-1$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі, $B_{n+1}:=B_1$, $\pi_n(a_{n+1}):=\pi_n(a_1)$. Крім того, позначимо через D_0 таку область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_0\bigcap\overline{P}_k)$, яка містить точку $\zeta=0$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі.

З визначення функцій π_k, випливає, що

$$|\pi_k(w)|\sim|w_k|^{\frac{n}{2}},\quad w\to 0,\quad w\in\overline{P_k},$$
$$|\pi_k(w)-\pi_k(e^{\frac{2\pi ki}{n}})|\sim\frac{n}{2}\cdot|w-e^{\frac{2\pi ki}{n}}|,\quad w\to e^{\frac{2\pi ki}{n}},\quad w\in\overline{P_k},$$
$$|\pi_k(w)-\pi_k(e^{\frac{2\pi(k+1)i}{n}})|\sim\frac{n}{2}\cdot|w-e^{\frac{2\pi(k+1)i}{n}}|,\quad w\to e^{\frac{2\pi(k+1)i}{n}},\quad w\in\overline{P_k}.$$

Далі, використовуючи результати робіт [34],[35] та симетрію структури траєкторій квадратичного диференціала і $D_k^{(0)}=D_0$, $D_k^{(1)}=D_1$, $D_k^{(2)}=D_2$, маємо, що справедливі рівності

$$r\left(B_0,0\right)=\left[\frac{1}{4}r^{\frac{4}{n^2}}\left(D_0,0\right)\right]^{\frac{n}{2}},$$

$$r\left(B_k,a_k\right)=\left[2\frac{2}{n}r\left(D_1,1\right)\cdot 2\frac{2}{n}r\left(D_2,-1\right)\right]^{\frac{1}{2}},\quad k=\overline{1,n}.$$

Отже, обчислюючи значення функціонала $J_n^{(0)}(\gamma)$, отримаємо наступні рівності

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)=$$

$$=\left[\frac{1}{4}r^{\frac{4}{n^2}\gamma}\left(D_0,0\right)\right]^{\frac{n}{2}}\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{16}{n^2}r\left(D_1,1\right)\cdot r\left(D_2,-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$= \left[\frac{4}{n^2}\right]^{\frac{n}{2}} \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\gamma\frac{4}{n^2}}\left(D_0, 0\right) r\left(D_1, 1\right) r\left(D_2, -1\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.10)$$

Нехай

$$T_k := \{z : (-1)^{k+1} Im\, z > 0\}, \quad k \in \{1, 2\},$$

$$G_1 = \overline{T_1} \cap U_1, \quad G_2 = \overline{\mathbb{C}} \backslash U_1 \cap \overline{T_1}, \quad G_3 = \overline{T_2} \cap U_1, \quad G_4 = \overline{\mathbb{C}} \backslash U_1 \cap \overline{T_2},$$

$$\beta(z) = \frac{2z}{1 + z^2}.$$

З визначення функції $\beta(z)$, слідує, що

$$|\beta(z)| \sim 2|z|, \quad z \to 0, \quad z \in \overline{T_k},$$

$$|\beta(z) - 1| \sim \frac{1}{2}\left|z - 1\right|^2, \quad z \to 1, \quad z \in \overline{T_k},$$

$$|\beta(z) + 1| \sim \frac{1}{2}\left|z + 1\right|^2, \quad z \to -1, \quad z \in \overline{T_k}.$$

Знову застосуємо розділяюче перетворення до областей D_0, D_1, D_2. Результат розділяючого перетворення області D_0 відносно функції $\beta(z)$ та системи областей $\{\overline{G}_k\}_{k=1}^{4}$ позначимо через $\Omega_0^{(k)}$, $k = \overline{1,4}$; позначимо результат розділяючого перетворення областей D_j, $j \in \{1, 2\}$, відносно функції $\beta(z)$ та системи областей $\{\overline{G}_k\}_{k=1}^{4}$ через області $\Omega_1^{(k)}, \Omega_2^{(k)}$, $k = \overline{1,4}$.

Використовуючи результати робіт [34],[35] та симетрію областей D_0, D_1, D_2, справедливі рівності

$$r\left(D_0, 0\right) = \left[\frac{1}{2} r\left(\Omega_0^{(1)}, 0\right) \cdot \frac{1}{2} r\left(\Omega_0^{(3)}, 0\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\left(D_1, 1\right) = \left[2r\left(\Omega_1^{(1)}, 1\right) 2r\left(\Omega_1^{(2)}, 1\right) 2r\left(\Omega_1^{(3)}, 1\right) 2r\left(\Omega_1^{(4)}, 1\right)\right]^{\frac{1}{8}},$$

$$r\left(D_2, -1\right) = \left[2r\left(\Omega_2^{(1)}, -1\right) 2r\left(\Omega_2^{(2)}, -1\right) 2r\left(\Omega_2^{(3)}, -1\right) 2r\left(\Omega_2^{(4)}, -1\right)\right]^{\frac{1}{8}}.$$

Звідси маємо

$$r^{\gamma\frac{4}{n^2}}\left(D_0, 0\right) r\left(D_1, 1\right) r\left(D_2, -1\right) = \left[\left(\frac{1}{2} r\left(\Omega_0^{(1)}, 0\right) \cdot \frac{1}{2} r\left(\Omega_0^{(3)}, 0\right)\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}}\right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left[2r\left(\Omega_1^{(1)},1\right)2r\left(\Omega_1^{(2)},1\right)2r\left(\Omega_1^{(3)},1\right)2r\left(\Omega_1^{(4)},1\right)\right]^{\frac{1}{8}}\times$$
$$\times\left[2r\left(\Omega_2^{(1)},-1\right)2r\left(\Omega_2^{(2)},-1\right)2r\left(\Omega_2^{(3)},-1\right)2r\left(\Omega_2^{(4)},-1\right)\right]^{\frac{1}{8}}.$$

Так як області Ω_j^1, симетричні відносно одиничного кола областям Ω_j^2, а області Ω_j^3 симетричні Ω_j^4, $j\in\{1,2\}$, то одержимо

$$r^{\gamma\frac{4}{n^2}}\left(D_0,0\right)r\left(D_1,1\right)r\left(D_2,-1\right)=\left[\frac{1}{2}r\left(\Omega_0^{(1)},0\right)\cdot\frac{1}{2}r\left(\Omega_0^{(3)},0\right)\right]^{\frac{2\gamma}{n^2}}\times$$
$$\times\left[\left(2r\left(\Omega_1^{(1)},1\right)\right)^2\left(2r\left(\Omega_1^{(3)},1\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{8}}\left[\left(2r\left(\Omega_2^{(1)},-1\right)\right)^2\left(2r\left(\Omega_2^{(3)},-1\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{8}}.$$

В силу симетрії областей $\Omega_j^{(1)}$ областям $\Omega_j^{(3)}$, $j\in\{0,1,2\}$, маємо

$$r^{\gamma\frac{4}{n^2}}\left(D_0,0\right)r\left(D_1,1\right)r\left(D_2,-1\right)=$$
$$=2^{1-\frac{4\gamma}{n^2}}\left\{\left[r^{\frac{8\gamma}{n^2}}\left(\Omega_0^{(1)},0\right)r\left(\Omega_1^{(1)},1\right)r\left(\Omega_2^{(1)},-1\right)\right]^{\frac{1}{4}}\right\}\times \tag{4.11}$$
$$\times\left\{\left[r^{\frac{8\gamma}{n^2}}\left(\Omega_0^{(3)},0\right)r\left(\Omega_1^{(3)},1\right)r\left(\Omega_2^{(3)},-1\right)\right]^{\frac{1}{4}}\right\},=$$
$$=2^{1-\frac{4\gamma}{n^2}}\left\{\left[r^{\frac{8\gamma}{n^2}}\left(\Omega_0,0\right)r\left(\Omega_1,1\right)r\left(\Omega_2,-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

де Ω_0, Ω_1, Ω_2 — кругові області квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2=-\frac{(n^2-\frac{8\gamma}{n^2})z^2+\frac{8\gamma}{n^2}}{z^2(z^2-1)^2}\,dz^2,$$

причому $0\in\Omega_0$, $1\in\Omega_1$, $-1\in\Omega_2$.

Оскільки при всіх $\gamma\in(0,n]$, величина $\frac{8\gamma}{n^2}\leqslant 4$, то з роботи [35] отримаємо, що справедлива рівність

$$r^{\frac{8\gamma}{n^2}}\left(\Omega_0,0\right)r\left(\Omega_1,-1\right)r\left(\Omega_2,1\right)=$$
$$=2^{\frac{8\gamma}{n^2}+6}\cdot\left(\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{8\gamma}{n^2}}\cdot\left(2-\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{-\frac{1}{2}(2-\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n})^2}\cdot\left(2+\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{-\frac{1}{2}(2+\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n})^2}.$$

Виконуючи необхідні перетворення маємо, що

$$2^{\frac{8\gamma}{n^2}+6}\cdot\left(\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{8\gamma}{n^2}}\cdot\left(2-\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{-\frac{1}{2}(2-\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n})^2}\cdot\left(2+\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{-\frac{1}{2}(2+\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n})^2}=$$

$$= 2^{\frac{8\gamma}{n^2}+6} \cdot \left(\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{8\gamma}{n^2}} \cdot 2^{-\frac{(2-\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n})^2}{2}-\frac{(2+\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n})^2}{2}} \left(1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{-\frac{1}{2}(4-\frac{8}{n}\sqrt{2\gamma}+\frac{8}{n^2}\gamma)} \times$$

$$\times \left(1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{-\frac{1}{2}(4+\frac{8}{n}\sqrt{2\gamma}+\frac{8}{n^2}\gamma)} =$$

$$= 2^{\frac{8\gamma}{n^2}+6} \cdot \left(\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{8\gamma}{n^2}} \cdot 2^{-4-\frac{8\gamma}{n^2}} \left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{-2-\frac{4\gamma}{n^2}} \left[\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right]^{\frac{4}{n}\sqrt{2\gamma}}.$$

Остаточно одержимо наступну рівність

$$r^{\frac{8\gamma}{n^2}}\left(\Omega_0,0\right) r\left(\Omega_1,-1\right) r\left(\Omega_2,1\right) =$$

$$= 2^2 \cdot \left(\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{8\gamma}{n^2}} \cdot \left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{-2-\frac{4\gamma}{n^2}} \left[\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right]^{\frac{4}{n}\sqrt{2\gamma}}.$$

Підставимо одержану величину в (4.11), маємо

$$r^{\gamma\frac{4}{n^2}}\left(D_0,0\right) r\left(D_1,1\right) r\left(D_2,-1\right) =$$

$$= 2^{2-\frac{4\gamma}{n^2}} \left(\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}} \cdot \left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{-1-\frac{2\gamma}{n^2}} \left[\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right]^{\frac{2}{n}\sqrt{2\gamma}}.$$

Тепер залишилось підставити праву частину в (4.10).

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) =$$

$$= \left[\frac{4}{n^2}\right]^{\frac{n}{2}} \left[2^{2-\frac{4\gamma}{n^2}} \left(\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}} \cdot \left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{-1-\frac{2\gamma}{n^2}} \left[\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right]^{\frac{2}{n}\sqrt{2\gamma}}\right]^{\frac{n}{2}} =$$

$$= \left[\frac{4}{n^2}\right]^{\frac{n}{2}} 2^{n-\frac{2\gamma}{n^2}} \left(\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{2\gamma}{n}} \cdot \left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{-\frac{n}{2}-\frac{\gamma}{n}} \left[\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right]^{\sqrt{2\gamma}} =$$

$$= \left[\frac{2}{n}\right]^{n} 2^{n} \left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{-\frac{n}{2}-\frac{\gamma}{n}} \left[\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right]^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Отже, остаточно отримаємо

$$J_n^0(\gamma) = r^\gamma\left(B_0^{(0)}, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right) =$$

$$= \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}, \qquad (4.12)$$

де $B_k^{(0)}$, $a_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0^{(0)} = 0$, — кругові області та полюси квадратичного диференціала (4.4), відповідно.

Для величини $J_n^0(\gamma)$ справедливе твердження.

Лема 4.3.1. *При кожному фіксованому* $n \geqslant 2$ *і* $\gamma \in [\frac{1}{2}, 1]$ *величина* $J_n^{(0)}$ *спадає.*

Доведення леми 4.3.1.

Безпосередні обчислення показують, що

$$\left[\ln J_n^0(\gamma)\right]'_\gamma = \frac{1}{n}\ln\frac{2\gamma}{n^2-2\gamma} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\gamma}}\ln|\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}|.$$

Покажемо, що при $\frac{1}{2} \leqslant \gamma \leqslant 1$, $\left[\ln J_n^0(\gamma)\right]'_\gamma < 0$.

Нехай $\frac{\sqrt{2\gamma}}{n} = x$, тоді $\frac{2\gamma}{n^2} = x^2$, $\gamma = \frac{1}{2}n^2x^2$, $\sqrt{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}}nx$ та $\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{n}$.

Використавши відомі формули

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - ... - \frac{x^n}{n} - ...$$

$$\ln\frac{1-x}{1+x} = -2x\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + ... + \frac{1}{2k+1}x^{2k} + ...\right)$$

отримаємо, що

$$\left[\ln J_n^0(\gamma)\right]'_\gamma = \frac{1}{n}\ln 2\gamma - \frac{1}{n}\ln(n^2)(1-\frac{2\gamma}{n^2}) + \frac{\sqrt{2}}{nx}\ln\frac{1-x}{1+x} =$$

$$= \frac{1}{n}\ln n^2 + \frac{1}{n}\ln x^2 - \frac{1}{n}\ln n^2 - \frac{1}{n}\ln(1-x^2) + \frac{\sqrt{2}}{nx}\ln\frac{1-x}{1+x} =$$

$$= \frac{2}{n}\ln x + \frac{1}{n}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}\right] - \frac{2\sqrt{2}}{n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k+1}\right) =$$

$$= \frac{2}{n}\ln x + \frac{1}{n}\left[x^2 + \frac{x^4}{2} + ... + \frac{x^{2n}}{n} + ...\right] -$$

$$-\frac{2\sqrt{2}}{n}\left[1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + ... + \frac{x^{2k}}{2k+1} + ...\right] =$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{n} + \frac{2}{n}\ln x + \frac{x^2}{n}\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \frac{x^4}{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{5}\right) + ...+$$

$$+\frac{x^{2k}}{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{2\sqrt{2}}{2k+1}\right) + ... \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{2\sqrt{2}}{n} + \frac{2}{n}\ln\frac{\sqrt{2}}{n} + \frac{x^2}{n}\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{3}\right) + \frac{x^4}{n}\left(\frac{5-4\sqrt{2}}{10}\right) + ...+$$

$$+\frac{x^{2k}}{n}\left(\frac{2k^2 + k - 2k\sqrt{2}}{k(2k+1)}\right) + ... \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{n}\left[(-\sqrt{2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{n}) + \frac{x^2}{1-x^2}\right] \leqslant \frac{2}{n}\left[(-\sqrt{2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{n}) + \frac{1}{2}\right] \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{2}{n}(1,414213562 - \ln\frac{\sqrt{2}}{n} - 0,5) < 0.$$

Таким чином, ми показали, що $J_n^0(\gamma)$ монотонно спадає по γ при всіх $n \geqslant 2$ на проміжку $\frac{1}{2} \leqslant \gamma \leqslant 1$.

Лема 4.3.1 доведена.

Надалі позначатимемо

$$\mathfrak{I}_n(\gamma) = \frac{J_n(\gamma)}{J_n^0(\gamma)} = \frac{r^{\gamma}(B_0, 0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)}{r^{\gamma}(B_0^{(0)}, 0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k^{(0)}, a_k^{(0)})}.$$

Із формули (4.9) і (4.12), випливає наступна нерівність:

$$
\mathfrak{I}_n(\gamma) \leqslant \frac{\left[4^n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}})^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}} \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{1}{4^\gamma} \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} \cdot n^{\gamma+1+\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} \times \tag{4.13}
$$

$$
\times \left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} \cdot \left(\frac{1}{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2n}}.
$$

Оцінимо даний вираз при $n \geqslant 6$. Випадки, коли $n = \overline{2,5}$ будуть розглянуті пізніше. Так як при $n \geqslant 6$ виконується нерівність

$$
\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} = \left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} < e.
$$

Очевидно, що $(1-\frac{2\gamma}{n^2})^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}} < 1$ і $\left(\frac{1}{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2n}} \leqslant 1$. Вираз $\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}$ спадає по n при фіксованому γ. Тоді $\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} \leqslant \left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{6}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{6}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} < 1.9728$. Таким чином, отримаємо нерівність

$$
J_n(\gamma) < 5.3627 \cdot \frac{1}{4^\gamma} \cdot n^{\gamma+1+\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}. \tag{4.14}
$$

Оскільки вираз $\frac{1}{4^\gamma} \cdot n^{\gamma+1+\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}$ зростає по γ при $\gamma \in (0.5;1]$, то отримаємо таку оцінку

$$
\frac{1}{4^\gamma} \cdot n^{\gamma+1+\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} < \frac{1}{4} \cdot n^{2+\frac{1}{n}} \cdot \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-2+\frac{1}{n}}.
$$

Приймаючи до уваги спадання останнього виразу по n при $n \geqslant 6$, маємо

$$
\frac{1}{4^\gamma} \cdot n^{\gamma+1+\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} \leqslant 0.0728.
$$

Враховуючи останню нерівність та нерівність (4.14) отримаємо, що при $\frac{1}{2} < \gamma \leqslant 1$ і $n \geqslant 6$, справедлива нерівність

$$\mathfrak{I}_n(\gamma) < 5.3627 \cdot 0.0728 < 0.3924 < 1$$

при $n \geqslant 6$ та $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$.

Тепер розглянемо вираз (4.13) при $n = 5$. Тоді

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right)^{4-\gamma+\frac{\gamma}{5}} < 2.0423.$$

Далі, $\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}} < 1$ та $\left(\frac{1}{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{2\gamma}{n}} < 1$, $\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{5}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{5}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} < 2.2761$. Тоді $\frac{1}{4^\gamma} \cdot 5^{\gamma+1+\frac{\gamma}{5}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{4-\gamma+\frac{\gamma}{5}} < 0.1695.$

Із написаного вище виходить, що функціонал (4.13) обмежений одиницею, тобто

$$\mathfrak{I}_5(\gamma) < 2.0423 \cdot 2.2761 \cdot 0.1695 < 0.7880 < 1.$$

Нехай $n = 4$. Аналогічним чином отримаємо

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{3-\gamma+\frac{\gamma}{4}} < 1.9104.$$

Отже, $\left(1 - \frac{\gamma}{8}\right)^{2+\frac{\gamma}{4}} < 0.7405$ та $\left(\frac{1}{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2n}} < 0.6484$, $\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{4}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{4}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} < 2.8437$. А вираз $\frac{1}{4^\gamma} \cdot 4^{\gamma+1+\frac{\gamma}{4}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{3-\gamma+\frac{\gamma}{4}} < 0.3571.$

Отже, значення функціонала обмежено величиною

$$\mathfrak{I}_4(\gamma) < 1.9104 \cdot 0.7405 \cdot 2.8437 \cdot 0.3571 \cdot 0.6484 < 0.9315 < 1.$$

Нехай $n = 3$. Тоді функціонал спроститься до виду

$$\mathfrak{I}_3(\gamma) = \left(\prod_{k=0}^{3} r\left(B_k, a_k\right)\right)^{\gamma} \left(\prod_{k=1}^{3} r\left(B_k, a_k\right)\right)^{1-\gamma}.$$

Використовуючи роботу Г.В. Кузьміної [60] маємо, що для довільних чотирьох областей B_0, B_1, B_2, B_3 і точок $0, a_1, a_2, a_3$ таких, що $0 \in B_0, a_1 \in B_1, a_2 \in B_2, a_3 \in B_3,$ справедлива нерівність

$$\prod_{k=0}^{3} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant 4^{-\frac{8}{3}} \cdot 3^2 \left(\prod_{0 \leqslant k < l \leqslant 3} |a_k - a_l|\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Використовуючи попередню нерівність та теорему Г.М. Голузіна [27, с. 165], будемо мати

$$\mathfrak{I}_3(\gamma) \leqslant \left(\frac{9}{4^{\frac{8}{3}}}\right)^{\gamma} \left(\frac{64}{81\sqrt{3}}\right)^{1-\gamma} \left(|a_1 - a_2| \cdot |a_1 - a_3| \cdot |a_2 - a_3|\right)^{1-\frac{1}{3}\gamma}.$$

Оскільки $\alpha_k \geqslant \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, то

$$\mathfrak{I}_3(\gamma) \leqslant \left(\frac{9}{4^{\frac{8}{3}}}\right)^{\gamma} \left(\frac{64}{81\sqrt{3}}\right)^{1-\gamma} \left(8 \sin^2 \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right) \sin \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\right)^{1-\frac{1}{3}\gamma}.$$

Так як права частина попередньої нерівності зростає по γ при $\frac{1}{2} < \gamma \leqslant 1$, то функціонал буде обмежений при значенні $\gamma = 1$

$$\mathfrak{I}_3(\gamma) < 0.2595.$$

В цей же час $J_3^0(\gamma)$ спадає при $\frac{1}{2} < \gamma \leqslant 1$, а значить при данних γ маємо, що $J_3^0(\gamma) \geqslant J_3^0(1) > 0.5350$.

Тоді, при $n = 3$ та $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, справедлива нерівність

$$\mathfrak{I}_3(\gamma) < 1.$$

Аналогічно попереднім міркуванням маємо, що

$$\mathfrak{I}_2(\gamma) < 1.$$

Отже, при $n \geqslant 2$ та $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$ екстремальних конфігурацій немає.

Випадок 2. Залишилось розглянути випадок, коли $\alpha_k < \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, $k = \overline{1,n}$. Для цього будемо використовувати метод розділяючого перетворення, розроблений в роботах [7],[34],[35]. Аналогічно до роботи [7], зробимо розділяюче перетворення для кожної з набору області B_k за допомогою відповідної сім'ї функцій $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^n = -i\left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, яка конформно відображає області B_k на верхню півплощину відносно кутів $\{P_k\}_{k=1}^n$.

Нехай $G_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$, позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_k \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_k)$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Позначимо через $G_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, таку область площини $\mathbb{C}_\zeta$, яка отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_{k+1} \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_{k+1})$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі, $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Крім того, позначимо через $G_k^{(0)}$ таку область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_0 \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\zeta = 0$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі.

З визначення функцій π_k, випливає, що

$$|\pi_k(w) - \pi_k(a_k)| \sim \frac{1}{\alpha_k} \cdot |w - a_k|, \quad w \to a_k, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w) - \pi_k(a_{k+1})| \sim \frac{1}{\alpha_k} \cdot |w - a_{k+1}|, \quad w \to a_{k+1}, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k}.$$

Використовуючи результати робіт [34, 35], маємо нерівності

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k\right) \left[\prod_{k=1}^n r^{\alpha_k^2\gamma}\left(G_k^{(0)}, 0\right) r\left(G_k^{(1)}, 1\right) r\left(G_k^{(2)}, -1\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.15)$$

Приймаючи до уваги Теорему 1 роботи [15], отримаємо функцію

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right) \left[\prod_{k=1}^{n} 2^8 \cdot (\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\alpha_k^2\cdot 2\gamma+4}(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{-\frac{(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}{2}}\right]^{\frac{1}{4}} \times$$

$$\times \left[\prod_{k=1}^{n}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{-\frac{(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}{2}}\right]^{\frac{1}{4}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right) \cdot \left[\prod_{k=1}^{n} \Psi(x_k)\right]^{\frac{1}{4}},$$

де

$$\Psi(x) = 2^8 \cdot x^{x^2+4} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2} \cdot (2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2}, \quad x = \alpha_k\sqrt{2\gamma}, \quad x \in [0,2].$$

Розглянемо допоміжну екстремальну задачу

$$\prod_{k=1}^{n} \Psi(x_k) \longrightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = 2\sqrt{2\gamma},$$

$$x_k = \alpha_k\sqrt{2\gamma}, \quad 0 < x_k \leqslant 2.$$

Нехай $F(x) = \ln(\Psi(x))$ і $X^{(0)} = \left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ — довільна екстремальна точка вище наведеної задачі. Повторюючи міркування роботи [54], отримуємо твердження: якщо $0 < x_k^{(0)} < x_j^{(0)} < 2$, $k \neq j$, то має місце співвідношення

$$F'(x_k^{(0)}) = F'(x_j^{(0)}),$$

де $k,j = \overline{1,n}$, $k \neq j$, $F'(x) = 2x\ln x + (2-x)\ln(2-x) - (2+x)\ln(2+x) + \frac{4}{x}$ (див. Рис. 4.24).

Переконаємось, що вірне твердження: якщо функція $Z(x_1,\ldots,x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} F(x_k)$ досягає масимуму в точці $(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$ при умовах $0 < x_k^{(0)} < 2$, $k = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{(0)} = 2\sqrt{2\gamma}$, тоді

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}.$$

Нехай для простоти $x_1^{(0)} \leqslant x_2^{(0)} \leqslant \ldots \leqslant x_n^{(0)}$. Функція

$$F''(x) = \ln\left(\frac{x^2}{4-x^2}\right) - \frac{4}{x^2}$$

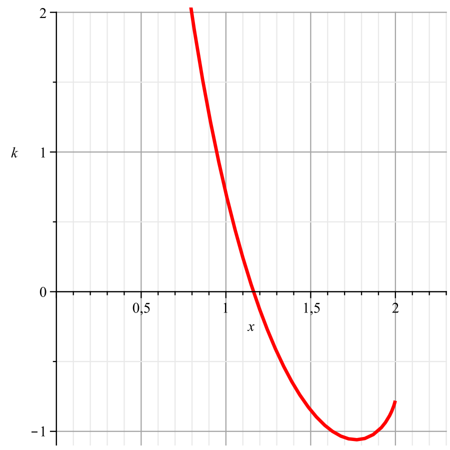


Рис. 4.24: Графік функції $F'(x)$

строго зростає на $(0,2)$ та існує $x_0 \approx 1,768828$ таке, що

$$signF''(x) \equiv sign(x - x_0).$$

Нехай $F'(x) = t$, $y_0 \leqslant t \leqslant -0,78$, $y_0 \approx -1,059$. Розглянемо наступні значення t: $t_1 = -0,78$, $t_2 = -0,80$, $t_3 = -0,85$, $t_4 = -0,90$, $\cdots$, $t_{11} = -1,05$, $t_{12} = -1,059$. Знайдемо розв'язок рівняння $F'(x) = t_k$, $k = \overline{1,12}$. Для $\forall t_k \in [y_0, -0,78)$ рівняння має два корені: $x_1(t) \in (0, x_0]$ та $x_2(t) \in (x_0, 2]$, $x_0 \approx 1,768828$. Безпосередні обчислення подані в наступній таблиці.

k	t_k	$x_1(t_k)$	$x_2(t_k)$	$x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$	$2x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$
1	-0,78	1,458417	1,998914		
2	-0,80	1,470034	1,994779	3,453196	4,911613
3	-0,85	1,501193	1,980165	3,450199	4,920233
4	-0,90	1,536275	1,959964	3,461157	4,962350
5	-0,95	1,577242	1,932788	3,469063	5,005338
6	-1,00	1,628755	1,894239	3,471481	5,048723
7	-1,01	1,641325	1,884177	3,512932	5,141687
8	-1,02	1,655169	1,872815	3,514140	5,155465
9	-1,03	1,670801	1,859641	3,514810	5,169979
10	-1,04	1,689217	1,843656	3,514457	5,185258
11	-1,05	1,712998	1,822285	3,511502	5,200719
12	-1,059	1,768589	1,769066	3,482064	5,195062

Враховуючи властивості функції $F'(x)$ та умови теореми, а також спраючись на метод, розроблений в [54], маємо, що для $F'(x)$ завжди виконується співвідношення $(x_1 - 1,45)\,n + (x_2 - x_1) > 0$ для $n \geqslant 2$. Звідси $nx_1 + (x_2 - x_1) > 1,45\,n$. Отже, якщо покласти $1,45n = 2\sqrt{2\gamma_n}$, то завжди виконується нерівність

$$(n-1)x_1 + x_2 > 2\sqrt{2\gamma_n}, \quad n \geqslant 2.$$

А це означає, що при даних γ точки $x_2(t) \in (x_0, 2]$ не існує.

Таким чином, всі точки $x_k(t) \in (0, x_0]$, а значить $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$. Для всіх $\gamma < 1$, $n \geqslant 2$, всі попередні міркування виконуються.

Отже, максимум $\prod_{k=1}^{n} \Psi(x_k)$ досягається лише за умови рівності всіх x_k. Таким чином, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^n \left[\Psi\left(\frac{2}{n}\sqrt{2\gamma}\right)\right]^{\frac{n}{4}}.$$

Використовуючи аналітичне вираження для $\Psi(x)$, отримаємо нерівність (4.3).

Теорема 4.2.1 повністю доведена.

4.4. Доведення теореми 4.2.2

Розглянемо випадок, коли кути між сусідніми точками можуть бути великі. Нехай $\alpha_0 \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}$, $\alpha_0 = \max\limits_{k} \alpha_k$, $k = \overline{1, n}$.

Проведемо наступні оцінки для внутрішніх радіусів.

Перетворимо ліву частину нерівності (4.5) таким чином

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) = \prod_{k=1}^{n} \left[r(B_0, 0) r(B_k, a_k)\right]^{\frac{\gamma}{n}} \left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}. \quad (4.16)$$

Перший множник оцінюється за допомогою відомої теореми М.О. Лаврентьєва [69], а саме завдяки нерівності

$$r(B_0,0)r(B_k,a_k) \leqslant |a_k|^2 = 1, \quad k = \overline{1,n}.$$

Таким чином, справедлива нерівність

$$\prod_{k=1}^{n} [r(B_0,0)r(B_k,a_k)]^{\frac{\gamma}{n}} \leqslant 1.$$

Другий множник виразу (4.16) оцінимо, використовуючи теорему В.М. Дубініна [7, 33]. Маємо оцінку

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

Таким чином, використовуючи рівність (4.16) і вище наведені міркування, отримаємо оцінку

$$J_n(\gamma) \leqslant \left[2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Далі, з нерівності Коші (про зв'язок між середнім арифметичним та середнім геометричним) маємо, що справедливе співвідношення

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Отже, остаточно маємо наступну нерівність

$$r^{\gamma}(B_0,0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant \left[2^n \alpha_0 (2-\alpha_0)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Раніше було доведено (див. теорему 4.2.1), що

$$J_n^0(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0^{(0)},0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right) =$$

$$= \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}},$$

де $B_k^{(0)}$, $a_k^{(0)}$, $k=\overline{0,n}$, $a_0^{(0)}=0$, — кругові області та полюси квадратичного диференціала (4.6), відповідно.

Введемо позначення. Нехай

$$\mathfrak{I}_n(\gamma)=\frac{J_n(\gamma)}{J_n^0(\gamma)}=\frac{r^\gamma(B_0,0)\prod\limits_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)}{r^\gamma(B_0^{(0)},0)\prod\limits_{k=1}^{n}r(B_k^{(0)},a_k^{(0)})},$$

де $B_0,...,B_n$ — довільна система областей та точок a_k, $k=\overline{1,n}$, які задовольняють умови теореми.

З усього вище наведеного слідує, що виконується наступний ланцюжок нерівностей:

$$\mathfrak{I}_n(\gamma)\leqslant\frac{\left[2^n\cdot\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{-\frac{n}{2}-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\left[2\cdot2^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}(2-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}})^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\cdot\left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{-\frac{n}{2}-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1}\cdot\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1}\cdot\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{2n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}\times$$

$$\times\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

Таким чином, ми отримали оцінку $\mathfrak{I}_n(\gamma)$ через добуток функцій вище наведеного вигляду. Подальше дослідження буде пов'язане з вивченням поведінки цих функцій. Для зручності досліджень, позначимо ці функції наступним чином:

$$f_1(\gamma,n)=\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}};\quad f_2(\gamma,n)=\left(\frac{2n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}};$$

$$f_3(\gamma,n)=\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}};\quad f_4(\gamma,n)=\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}};$$

$$f_5(\gamma,n)=\left(\frac{2}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}};\quad f_6(\gamma,n)=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}};$$

$$f_7(\gamma,n)=\left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1}\cdot\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1}.$$

Розглянемо функцію $f_1(\gamma,n)$. Для всіх $\gamma\in(1,n)$ очевидно, що

$$f_1(\gamma,n)\leqslant 1.$$

Для функції $f_2(\gamma,n)$ маємо наступне співвідношення

$$f_2(\gamma,n)<((2n)^{\frac{1}{n}})^{\gamma}.$$

Тоді оскільки $(2n)^{\frac{1}{n}}\searrow 1$ при $n\to\infty$, тоді для $n>n_2(\gamma)$ буде виконуватись нерівність

$$(2n)^{\frac{1}{n}}<3^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Очевидно, що

$$f_2(\gamma,n)<3$$

для кожного фіксованого γ при $n>n_2(\gamma)$.

Розглянемо наступну функцію

$$f_3(\gamma,n)=\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}.$$

Із вигляду функції $f_3(\gamma,n)$ очевидно, що при фіксованому γ і $n\to\infty$ слудує, що

$$f_3(\gamma,n)\leqslant 1.$$

При дослідженні функції $f_4(\gamma,n)$ припустимо, що при кожному фіксованому $\gamma>1$ $n\geqslant 3\gamma^2$. Отже,

$$\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} \leqslant \left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{3\gamma^2}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{3\gamma^2}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} = \left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{3\gamma^{\frac{3}{2}}}}{1-\frac{\sqrt{2}}{3\gamma^{\frac{3}{2}}}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} <$$

$$< \left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{3}}{1-\frac{\sqrt{2}}{3}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} < 2,79^{\sqrt{2\gamma}} < 3^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Тепер дослідимо поведінку функції $f_5(\gamma, n)$, для якої маємо наступне:

якщо $1 < \gamma < 2$, то $f_5(\gamma, n) < \left(\frac{2}{\gamma}\right) < 2$;

якщо $\gamma = 2$, то $f_5(\gamma, n) = 1$;

якщо $2 < \gamma < n$, то $f_5(\gamma, n) < \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\gamma}{n}\right)} < 1$.

Отже, остаточно маємо

$$f_5(\gamma, n) = \left(\frac{2}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} = \left(\sqrt{\frac{2}{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} < 2.$$

Для функції $f_6(\gamma, n)$ виконуються наступні співвідношення

$$f_6(\gamma, n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-\gamma\frac{n-1}{n}} =$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{\gamma\frac{n-1}{n}}} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \to e < 3.$$

Тепер розглянемо поведінку функції $f_7(\gamma, n)$ при довільному фіксованому $\gamma > 1$ та $n \to \infty$. Оскільки

$$\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2\gamma}}\right) < \left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) < 0,65.$$

Таким чином,

$$\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1} < 0,65^{n-1} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Із курсу математичного аналізу відомо, що при довільному фіксованому γ функція виду

$$\left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1}\cdot\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1}<\left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1}\cdot 0,65^{n-1}\to 0,\quad n\to\infty.$$

Отже, наш функціонал $\mathfrak{I}_n(\gamma)$ має наступну оцінку

$$\mathfrak{I}_n(\gamma)\leqslant 3\cdot 3^{\sqrt{2\gamma}}\cdot 2\cdot 3\cdot\left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1}\cdot 0,65^{n-1}\to 0,\quad n\to\infty.$$

Тоді існує номер $n_0(\gamma)$ такий, що $\mathfrak{I}_n(\gamma)<1$ при всіх номерах, які більші за $n_0(\gamma)$.

А це означає, що при $n\geqslant n_0(\gamma)$ та $\alpha_0\geqslant\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}$, для довільних систем попарно неперетинних областей та довільних наборів різних точок a_k, $|a_k|=1$, $k=\overline{1,n}$, $a_k\in B_k$, $a_0=0\in B_0$, виконується строга нерівність

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)<r^{\gamma}\left(B_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n}r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right),$$

яка доводить справедливість теореми для $\alpha_k\geqslant\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}$, $k=\overline{1,n}$, тобто в цьому випадку не існує екстремальної конфігурації.

Залишається розглянути випадок, коли кути між сусідніми точками обмежені величиною $\alpha_k<\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}$, $k=\overline{1,n}$. Для доведення теореми в цьому випадку застосуємо метод розділяючого перетворення, розроблений в роботах [7, 34, 35]. Розглянемо систему функцій $\zeta=\{\pi_k(w)\}_{k=1}^{n}=\left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$. Сім'я функцій $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^{n}$ називається допустимою для розділяючого перетворення областей B_k, $k=\overline{0,n}$ відносно кутів $\{P_k\}_{k=1}^{n}$.

Нехай $G_k^{(1)}$, $k=\overline{1,n}$, позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_k\bigcap\overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_k)=1$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Позначимо через $G_k^{(2)}$, $k=\overline{1,n}$, таку область площини

$\mathbb{C}_\zeta$, яка отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_{k+1}\bigcap\overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_{k+1})=-1$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі, $B_{n+1}:=B_1$, $\pi_n(a_{n+1}):=\pi_n(a_1)$. Крім того, позначимо через $G_k^{(0)}$ таку область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_0\bigcap\overline{P}_k)$, яка містить точку $\zeta=0$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі.

З визначення функцій π_k, випливає, що

$$|\pi_k(w)|\sim|\omega_k|^{\frac{1}{\alpha_k}},\quad w\to 0,\quad w\in\overline{P_k},$$
$$|\pi_k(w)-\pi_k(e^{-i\theta_k})|\sim\frac{1}{\alpha_k}\cdot|w-e^{-i\theta_k}|,\quad w\to e^{-i\theta_k},\quad w\in\overline{P_k},$$
$$|\pi_k(w)-\pi_k(e^{-i\theta_{k+1}})|\sim\frac{1}{\alpha_k}\cdot|w-e^{-i\theta_{k+1}}|,\quad w\to e^{-i\theta_{k+1}},\quad w\in\overline{P_k}.$$

Далі, використовуючи результати робіт [34, 35], отримаємо нерівності

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant\left[\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha_k^2}\left(G_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\left(B_k,a_k\right)\leqslant\left[\alpha_k r\left(G_k^{(1)},1\right)\cdot\alpha_{k-1}r\left(G_k^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}},\quad k=\overline{1,n}.$$

Використовуючи результати робіт [34, 35], маємо нерівності

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\leqslant$$
$$\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left[\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha_k^2\gamma}\left(G_k^{(0)},0\right)r\left(G_k^{(1)},1\right)r\left(G_k^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}},\tag{4.17}$$

де $G_k^{(0)}$, $G_k^{(1)}$, $G_k^{(2)}$ — неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$.

Тепер знову до областей $G_k^{(0)}$, $G_k^{(1)}$, $G_k^{(2)}$ застосуємо розділяюче перетворення за допомогою функції $\pi(w)=\frac{2w}{1+w^2}$, та, використовуючи методи робіт [7], [15], [55], отримаємо наступну оцінку для функціонала

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \left[\prod_{k=1}^{n} 2^{4(1-\alpha_k^2\gamma)} \left\{r^{2\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)}, 0\right) r\left(D_k^{(1)}, 1\right) r\left(D_k^{(2)}, -1\right)\right\}\right]^{\frac{1}{4}},$$

де $D_k^{(0)}$, $D_k^{(1)}$, $D_k^{(2)}$ кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-2\alpha_k^2\gamma)w^2 + 2\alpha_k^2\gamma}{w^2(w^2-1)^2}\, dw^2.$$

Приймаючи до уваги Теорему 1 роботи [15] та метод, розроблений в роботі [35], отримаємо функцію

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^n \left[\prod_{k=1}^{n} 2^8 \cdot (\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\alpha_k^2\cdot 2\gamma+4} (2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{-\frac{(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}{2}}\right]^{\frac{1}{4}} \times$$

$$\times \left[\prod_{k=1}^{n} (2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{-\frac{(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}{2}}\right]^{\frac{1}{4}} \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^n \cdot \left[\prod_{k=1}^{n} \Psi(x_k)\right]^{\frac{1}{4}},$$

де

$$\Psi(x) = 2^8 \cdot x^{x^2+4} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2} \cdot (2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2}, \quad x = \alpha_k\sqrt{2\gamma}, \quad x \in [0, 2].$$

Враховуючи логарифмічну випуклість функції $\Psi(x)$ на проміжку $x \in [0, 1]$, маємо нерівність

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln \Psi(x_k) \leqslant \ln \Psi\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}\right),$$

з якої випливає, що

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}\left(B_0^{(0)}, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right),$$

для всіх фіксованих $\gamma > 1$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n(\gamma)$, яке і доводить теорему.

Теорема 4.2.2 повністю доведена.

4.5. Доведення теореми 4.2.3

Аналогічно тому, як ми робили при доведенні теорем 4.2.1 і 4.2.2, розглянемо систему функцій $\pi_k(w) = \left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $\quad k = \overline{1,n}$. Сімейство функцій $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^{n}$ називається допустимим для розділяючого перетворення областей B_k, $k = \overline{0,n}$ відносно кутів $\{P_k\}_{k=1}^{n}$. Нехай $\Omega_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$, позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_k \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_k) = 1$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Позначимо через $\Omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, таку область площини $\mathbb{C}_\zeta$, яка отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_{k+1} \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_{k+1}) = -1$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Відмітимо, що $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Крім того, позначимо через $\Omega_k^{(0)}$ таку область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_0 \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\zeta = 0$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Позначимо

$$\pi_k(a_k) := \omega_k^{(1)} = 1, \quad \pi_k(a_{k+1}) := \omega_k^{(2)} = -1, \quad k = \overline{1,n}, \quad \pi_n(a_{n+1}) := \omega_n^{(2)}.$$

З визначення функцій π_k, випливає, що

$$|\pi_k(w) - 1| \sim \frac{1}{\alpha_k} \cdot |w - a_k|, \quad w \to a_k, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w) + 1| \sim \frac{1}{\alpha_k} \cdot |w - a_{k+1}|, \quad w \to a_{k+1}, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k}.$$

Використовуючи результати робіт [33, 34, 35] і формули (1.8) та (1.9), наведені в розділі 1, маємо нерівності

$$r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left[\frac{r\left(\Omega_k^{(1)}, 1\right) \cdot r\left(\Omega_k^{(2)}, -1\right)}{\frac{1}{\alpha_k} \cdot \frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{4.18}$$

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.19)$$

Використовуючи нерівності (4.18) і (4.19), отримуємо співвідношення

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{n}\left[r\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}} \prod_{k=1}^{n}\left[\alpha_{k-1}\cdot\alpha_k r\left(\Omega_k^{(2)}, -1\right) r\left(\Omega_k^{(1)}, 1\right)\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\alpha_k\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\gamma\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) r\left(\Omega_k^{(1)}, 1\right) r\left(\Omega_k^{(2)}, -1\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Спираючись на теорему 1 роботи [15], маємо оцінку

$$r^{\gamma\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) r\left(\Omega_k^{(1)}, 1\right) r\left(\Omega_k^{(2)}, -1\right) \leqslant$$

$$\leqslant r^{2\gamma\alpha_k^2}\left(D_k^{(0)}, 0\right) r\left(D_k^{(1)}, 1\right) r\left(D_k^{(2)}, -1\right) =$$

$$= 2^{1-\gamma\alpha_k^2}\left[\frac{2^{2\gamma\alpha_k^2+6}\cdot(\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{2\gamma\alpha_k^2}}{(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}\cdot(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.20)$$

де рівність досягається коли $D_k^{(0)}$, $D_k^{(1)}$, $D_k^{(2)}$ є круговими областями квадратичного диференціала

$$G(w)dw^2 = -\frac{(4-2\alpha_k^2\gamma)w^2 + 2\alpha_k^2\gamma}{w^2(w^2-1)^2}\,dw^2.$$

Таким чином, справедлива наступна нерівність

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{n}\alpha_k\left[\prod_{k=1}^{n} 2^{1-\gamma\alpha_k^2}\left[\frac{2^{2\gamma\alpha_k^2+6}\cdot(\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{2\gamma\alpha_k^2}}{(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}\cdot(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Звідси отримаємо, що

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n}\prod_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)\,2^{\frac{1-\gamma\alpha_k^2}{2}}\times$$

$$\times\left[\frac{2^{2\gamma\alpha_k^2+6}(\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{2\gamma\alpha_k^2}}{(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}}\right]^{\frac{1}{4}}=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n}\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{2^8\,(\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{2\gamma\alpha_k^2+4}}{(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}}\right]^{\frac{1}{4}}=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n}\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{2^8\,x_k^{x_k^2+4}}{(2-x_k)^{\frac{1}{2}(2-x_k)^2}(2+x_k)^{\frac{1}{2}(2+x_k)^2}}\right]^{\frac{1}{4}},$$

де $x_k=\alpha_k\sqrt{2\gamma}$, $x_k\in(0,y_0]$.

Розглянемо функцію

$$\Psi(x)=2^8\cdot x^{x^2+4}\cdot(2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}\cdot(2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2},\quad x\in(0,2]$$

(див. Рис. 4.25).

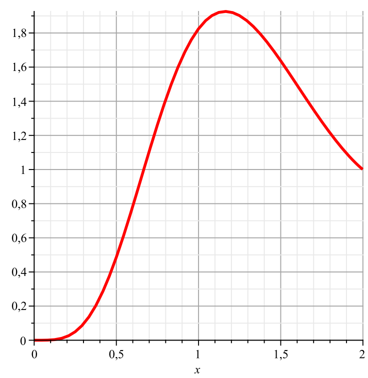


Рис. 4.25: Графік функції $\Psi(x)$

Нехай $F(x)=\ln(\Psi(x))$ (див. рис. 4.26), тоді $F'(x)=2x\ln x+(2-x)\ln(2-x)-(2+x)\ln(2+x)+\frac{4}{x}$ (див. рис. 4.27).

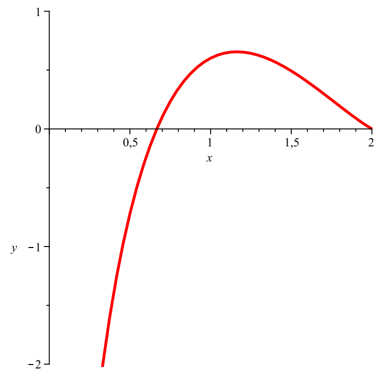


Рис. 4.26: Графік функції $F(x)$

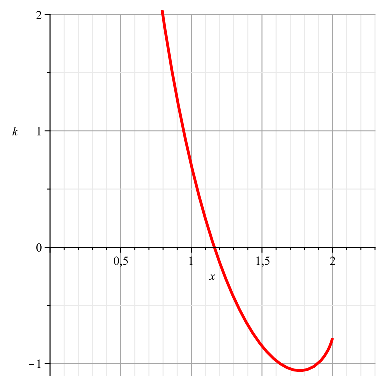


Рис. 4.27: Графік функції $F'(x)$

Функція

$$F''(x) = \ln\left(\frac{x^2}{4-x^2}\right) - \frac{4}{x^2}$$

строго зростає на $(0,2)$ та існує $y_0 \approx 1,76$ таке, що

$$signF''(x) \equiv sign(x-y_0).$$

Таким чином, функція $\Psi(x)$ логарифмічно випукла вгору на інтервалі $(0,y_0]$. Оскільки $x_k \in (0,y_0]$, $k=\overline{1,n}$, тоді справедливе співвідношення

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\Psi\left(x_k\right) \leqslant \ln\Psi\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{n}\right).$$

Це рівносильно наступному

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\Psi\left(x_k\right)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \ln\left(\Psi\left(\frac{2}{n}\sqrt{2\gamma}\right)\right).$$

Звідси маємо

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k) \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n}\prod_{k=1}^{n}[\Psi(x_k)]^{\frac{1}{4}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n}\left[\Psi\left(\frac{2}{n}\sqrt{2\gamma}\right)\right]^{\frac{n}{4}}.$$

Використовуючи конкретний вираз для $\Psi\left(x\right)$, отримаємо

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n}\left[\frac{2^8\left(\frac{2}{n}\sqrt{2\gamma}\right)^{\left(\frac{2}{n}\sqrt{2\gamma}\right)^2+4}}{(2-\frac{2}{n}\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2-\frac{2}{n}\sqrt{2\gamma})^2}(2+\frac{2}{n}\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2+\frac{2}{n}\sqrt{2\gamma})^2}}\right]^{\frac{n}{4}} =$$

$$= \left(\frac{4}{n}\right)^{n}\frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left|1-\frac{2\gamma}{n^2}\right|^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}}\left|\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Теорема 4.2.3 доведена.

Висновки

В четвертому розділі дисертаційної роботи вивчається задача про максимізацію добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних симетричних областей відносно точок на одиничному колі і внутрішнього радіуса в деякій додатній степені γ області відносно початку координат з вільними полюсами на колі. При $\gamma \in (0, 1)$ ця задача повністю розв'язана. При $\gamma > 1$ отримано точну оцінку вказаного добутку, яка виконується, починаючи з деякого номера $n_0(\gamma)$. При додаткових обмеженнях на параметри цієї задачі, отримано точні оцінки добутку внутрішніх радіусів областей при $\gamma \in (0; 0,38n^2]$.

Результати розділу опубліковано в тезах [104, 105] та статтях [51, 25, 17].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі отримано нові результати у класичному напрямку геометричної теорії функцій комплексної змінної, який пов'язаний із задачами про екстремальне розбиття комплексної площини. Запропоновано підхід, який базується на методах розділяючого перетворення, квадратичних диференціалів, «керуючих» функціоналів, що дозволило узагальнити й посилити низку відомих результатів щодо екстремальних задач на класах неперетинних і частково перетинних областей.

У дисертації послаблено умови, що стосуються геометрії розташування вільних полюсів квадратичних диференціалів, асоційованих із екстремальними задачами про неперетинні області.

У роботі проведено дослідження стосовно двох задач, які 1994 року В. М. Дубінін окреслив як відкриті проблеми.

У дисертаційній роботі отримано такі результати:

1. Отримано узагальнення відомих результатів для задач про екстремальне розбиття неперетинних і частково перетинних областей комплексної площини з вільними полюсами на колі.

2. Розв'язано задачу про екстремальне розбиття з вільними полюсами, які утворюють n-променеві системи точок.

3. Знайдено точну оцінку максимуму добутку внутрішніх радіусів n взаємно неперетинних симетричних областей відносно точок одиничного кола і внутрішнього радіуса в степені $\gamma \in (0,1)$ області відносно початку координат. Для $\gamma > 1$ вказано максимум такого добутку, який справджується, починаючи з деякого номера n, залежного від γ; а за додаткових умов щодо розміщення точок на колі отримано точні оцінки при $\gamma \in (1; 0,38n^2), \quad n \geqslant 2$.

Одержані результати і методика їх доведення можуть бути використані при вивченні питань комплексного аналізу, голоморфної динаміки, в теорії апроксимацій і для оцінок викривлення при конформному відображенні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций / И.А. Александров. — М.: Наука. — 1976. — 343 с.

2. Аленицын Ю.Е. Об однолистных функциях без общих значений в многосвязной области / Ю.Е. Аленицын // Труды мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1968. — **94**. — С. 4 – 18.

3. Аленицын Ю.Е. О функциях без общих значений и внешней границе области значений функции / Ю.Е. Аленицын // Мат. сборник. — 1988. — **46**, № 4. — С. 373 – 388.

4. Бахтин А.К. Некоторые задачи в теории неналегающих областей / А.К. Бахтин // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 6. — С. 723 – 731.

5. Бахтин А.К. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности / А.К. Бахтин // Доп. Нац. Акад. наук України. — 2004. — № 8. — С. 7 – 15.

6. Бахтин А.К. Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы в геометрической теории функций комплексного переменного: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.01 / А.К. Бахтин. — К. — 2007. — 294 с.

7. Бахтин А., Бахтина Г., Зелинский Ю. Тополого-алгебраические структуры и методы в комплексном анализе // Праці ін-ту мат-ки НАН Укр. — 2008. — 308 с.

8. Бахтин А.К. Некоторые оценки функционалов для N-лучевых систем точек / А.К. Бахтин, И.В. Денега // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — К.: Ін-т матем. НАН України. — 2011. — Т.8, №1. — С. 12 – 21.

9. Бахтин А.К., Денега И.В. Об одной проблемме В.Н. Дубинина / А.К. Бахтин, И.В. Денега // Зб. пр. Ін-ту мат. України — 2013. — Т.10, №4-5. — С. 396 – 406.

10. Бахтін О.К., Заболотний Я.В. Оцінки добутку внутрішніх радіусів трьох неперетинних областей / О.К. Бахтін, Я.В. Заболотний // Доп. Нац. Акад. наук України. — 2013. — № 10. — С. 7 – 10.

11. Бахтин А.К., Заболотный Я.В. Оценки произведения внутренних радиусов неналегающих областей / А.К. Бахтин, Я.В. Заболотный // Український математичний вісник. — 2016. — Т.13, № 2. — С. 148 – 156.

12. Бахтин А.К. Оценки внутренних радиусов для взаимно непересекающихся областей / А.К. Бахтин // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2017. — Т.14, №1. — С. 25 — 33.

13. Бахтин А.К., Вьюн В.Е., Таргонский А.Л. Неравенства для внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей / А.К. Бахтин, В.Е. Вьюн, А.Л. Таргонский // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2014. – Т. 11, №1. — С. 1 — 9.

14. Бахтин А.К., Вьюн В.Е., Таргонский А.Л. Неравенства для внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей / А.К. Бахтин, В.Е. Вьюн, А.Л. Таргонский // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2015. — Т. 12, №3. — С. 38 — 46.

15. Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Денега И.В. Экстремальное разбиение комплексной плоскости с фиксированными полюсами // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2017. — Т. 14, №1. — С. 34 — 38.

16. Бахтин А.К., Выговская Л.В., Денега И.В. Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей // Український математичний вісник. — 2016. — Т. 13, № 1. — С. 68 – 75.

(Переклад англійською: Bakthin A., Vyhivska L., Denega I. Inequalities for the internal radii of non-overlapping domains // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 220, No. 5. — P. 584 – 590.)

17. Бахтин А.К., Денега И.В., Выговская Л.В. Неравенства для внутренних радиусов симметричных неналегающих областей // Український математичний журнал. — 2018. — Т. 70, № 9. — С. 1282 – 1288.

18. Бахтин А.К. Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы / А.К. Бахтин, А.Л. Таргонский // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 3. — С. 298 – 303.

19. Бахтина Г.П. Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: спец. 01.01.01 "Теория функций и функциональный анализ"/ Г.П. Бахтина. — Киев, 1975. — 11 с.

20. Бахтина Г. П. О конформных радиусах симметричных неналегающих областей / Г.П. Бахтина // Современ. вопр. веществен. и комплексн. анализа. — Киев: Ин–т матем. АН УССР. — 1984. — С. 21–27.

21. Бахтина Г.П. Разделяющее преобразование и задачи о неналегающих областях / Г.П. Бахтина, А.К. Бахтин // Комплексний аналіз і течії з вільними границями / Збірник праць Ін-ту мат-ки НАН Укр. — Київ: Ін-т матем. НАН України. — 2006. — Т.3, № 4. — С. 273 – 281.

22. Бахтина Г.П., Вьюн В.Е., Денега И.В. Задачи об экстремальном разбиении для частично неналегающих областей / Г.П. Бахтина, В.Е. Вьюн, И.В. Денега // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2015. — Т. 11, №1. — С. 1 — 7.

23. В'юн В.Є. Розділяюче перетворення і квадратичні диференціали в геометричній теорії функцій комплексної змінної: автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук: спец. 01.01.01 – математичний аналіз / В.Є. В'юн . — Київ, 2007. — 20 с.

24. Вигівська Л.В. Оцінки внутрішніх радіусів симетричних взаємно неперетинних областей // Науково-технічна конференція молодих вчених та спеціалістів Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України (до 100-річчя Національної академії наук України), 16 травня, 2018, Київ, Україна. — ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України. — С. 56 – 57.

25. Выговская Л.В. О проблемме В.Н. Дубинина для симметричных многосвязных областей // Український математичний вісник. — 2017. — Т. 14, № 2. — С. 295 – 302.

(Переклад англійською: Vyhivska L. On the problem of V.N. Dubinin for symmetric multiply connected domains // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 229, No. 1. — P. 108 – 113.)

26. Голузин Г.М. Метод вариаций в конформном отображении. I, II, III, IV / Г.М. Голузин // Мат. сб. – 1946. – **19** (61), № 2. – С. 203 – 236. — 1947. – **21** (63), № 1. – С. 83 – 117; № 2. – С. 119 – 132. — 1951. – **29** (71), № 2. – С. 455 – 468.

27. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г.М. Голузин. — М.: Наука. — 1966. — 628 с.

28. Громова Л.Л. О неналегающих областях, лежащих в круге. II / Л.Л. Громова, Н. А. Лебедев // Вест. Ленинград. гос. ун-та. — 1973. — № 1. — С. 25 – 36.

29. Гутлянский В.Я. Параметрическое представление однолистных функций / В.Я. Гутлянский // Докл. АН СССР. Серия мат. — 1970. — **194**, № 4. — С. 750 – 753.

30. Дженкинс Дж.А. Однолистные функции и конформные отображения / Дж. Дженкинс — М.: Изд-во иностр. лит. — 1962. — 256 с.

31. Денега И.В. Квадратичные дифференциалы и разделяющее преобразование в экстремальных задачах о неналегающих областях / И.В. Денега // Доп. НАН України. — 2012. — №4. — С. 15 – 19.

32. Денега И.В. Некоторые неравенства для внутренних радиусов частично неналегающих областей / И.В. Денега // Доп. НАН України. — 2012. — №5. — С. 19 – 22.

33. Дубинин В.Н. О произведении внутренних радиусов "частично неналегающих" областей / В.Н. Дубинин // Вопросы метрической теории отображений и ее применение. — Киев: Наук. думка. — 1978. — С. 24 – 31.

34. Дубинин В.Н. Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении / В.Н. Дубинин // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — **168**. — С. 48 – 66.

35. Дубинин В.Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного / В.Н. Дубинин // Успехи мат. наук. — 1994. — **49** (295), № 1. — С. 3 – 76.

36. Дубинин В.Н. Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного / В.Н. Дубинин. — Владивосток: "Дальнаука"ДВО РАН. — 2009. — 401 с.

37. V. Dubinin Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory / Birkhäuser/Springer, Basel. — 2014. — 344 p.

38. Дубинин В.Н. Некоторые применения экстремальных разбиений в геометрической теории функций / В.Н. Дубинин, Д.А. Кириллова // Дальневост. мат. журн. — 2010. — Т.10, №2. — С. 130 – 152.

39. Дубинин В.Н. Экстремальные задачи теории функций, связанные с n-кратной симметрией / В.Н. Дубинин, Е.В. Костюченко // Зап. науч. семин. ПОМИ. — 2001. — Т. 276. — С. 83 – 111.

40. Дубинин В.Н. Об экстремальном разбиении пространственных областей / В.Н. Дубинин, Е.Г. Прилепкина // Зап. науч. семин. ПОМИ. — 1998. — Т.254. — С. 95 – 107.

41. Емельянов Е.Г. К задачам об экстремальном разбиении / Е.Г. Емельянов // Зап. научн. семин. ЛОМИ. — 1986. — **154.** — С. 76 – 89.

42. Емельянов Е.Г. О связи двух задач об экстремальном разбиении / Е.Г. Емельянов // Зап. научн. семин. ЛОМИ. — 1987. — **160.** — С. 91 – 98.

43. Емельянов Е.Г. К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей / Е.Г. Емельянов // Зап. науч. семин. ПОМИ. — 2002. — Т.286. — С. 103 – 114.

44. Емельянов Е.Г. Теоремы об экстремальном разбиении в семействах систем областей различных типов / Е.Г. Емельянов, Г.В. Кузьмина // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 1997. — Т.237. — С. 74 – 104.

45. Заболотний Я.В. Застосування розділяючого перетворення в задачах про неперетинні області / Я.В. Заболотний // Доп. НАН України. — 2011. — №4. — С. 20 – 23.

46. Заболотний Я.В. Застосування розділяючого перетворення в одній задачі про неперетинні області / Я.В. Заболотний // Доп. НАН України. — 2011. — №9. — С. 11 – 14.

47. Заболотний Я.В. Про одну екстремальну задачу В.М. Дубініна / Я.В. Заболотний // Укр. мат. журн. — 2011. — Т. 64, №1. — С. 24 – 31.

48. Заболотний Я.В. Задача про обчислення максимуму добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей на комплексній площині / Я.В. Заболотний // Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування / Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. - К.: Ін-т матем. НАН України. — 2013. — Т.10. — С. 4–5.

49. Заболотний Я.В. Знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей / Я.В. Заболотний // Доп. Нац. Акад. наук України. — 2016. — № 3. — С. 7 – 13.

50. Заболотний Я.В. Оцінки максимума добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей на $\mathbb{C}$ / Я.В. Заболотний // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України. — 2017. — Т. 14, № 1. — С. 156 – 162.

51. Заболотный Я.В., Выговская Л.В. О произведении внутренних радиусов симметричных многосвязных областей // Український математичний вісник. — 2017. — Т. 14, № 3. — С. 441 – 452.

(Переклад англійською: Zabolotnii Ya.V., Vyhivska L.V. On a product of the inner radii of symmetric multiply connected domains // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 231, No. 1. — P. 101 – 109.)

52. Келдыш М.В. Приложения теории функций комплексного переменного к гидродинамике и аэродинамике / М.В. Келдыш, Л.М. Седов // Обзор некоторых работ Московской школы. — Москва. — 1964. — 45 с.

53. Кириллова Д.А. О максимуме мебиусова инварианта в задаче с четырьмя неналегающими областями / Д.А. Кириллова // Дальневост. мат. журн. — 2010. — Т.10, №1. — С. 41 – 49.

54. Ковалев Л.В. К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности / Л.В. Ковалев // Дальневосточный матем. сборник. — 1996. — **2**. — С. 96 – 98.

55. Ковалев Л.В. О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей / Л.В. Ковалев // Изв. вузов. Матем. — 2000, № 6. — С. 82 – 87.

56. Ковалев Л.В. О трех непересекающихся областях / Л.В. Ковалев // Дальневосточный математический журнал. — 2000. — **1,** № 1. — С. 3 – 7.

57. Колбина Л.И. Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении / Л.И. Колбина // Доклады Академии Наук СССР, серия мат. — 1952. — **84**, № 5. — С. 865 — 868.

58. Колбина Л.И. Конформное отображение единичного круга на неналегающие области / Л.И. Колбина // Вестник Ленингр. ун-та. — 1955. — **5**. — С. 37 – 43.

59. Кузьмина Г.В. Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы / Г.В. Кузьмина. — Л.: Наука. — 1980. — 241 с.

60. Кузьмина Г.В. К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей / Г.В. Кузьмина // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 1980. – **100.** – С. 131 – 145.

61. Кузьмина Г.В. К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей в круге / Г.В. Кузьмина // Зап. научн. семин. ЛОМИ. — 1983. — **125.** — С. 99 – 113.

62. Кузьмина Г.В. К задаче об экстремальном разбиении n-связной области / Г.В. Кузьмина // Зап. научн. семин. ЛОМИ. — 1990. — **185.** — С. 96 – 110.

63. Кузьмина Г.В. Методы геометрической теории функций. I, II / Г.В. Кузьмина // Алгебра и анализ. — 1997. — **9**, № 3. — С. 41 – 103; № 5. — С. 1 – 50.

64. Кузьмина Г.В. О связи различных задач об экстремальном разбиении / Г.В. Кузьмина // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 1998. — **254**. — С. 116 – 131.

65. Кузьмина Г.В. Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы / Г.В. Кузьмина // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2001. — **276**. — С. 253 – 275.

66. Кузьмина Г.В. Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы. II, III // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2002. — **286.** — С. 126 – 147; 2004. — **314.** — С. 124 – 141.

67. Кузьмина Г.В. Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров / Г.В. Кузьмина // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2003. — **302**. — С. 52 – 67.

68. Куфарев П.П. Об одной экстремальной задаче для дополнительных областей / П.П. Куфарев, А.Э. Фалес // Доклады Академии Наук СССР, серия мат. — 1951. — **81**, № 6. — С. 995 – 998.

69. Лаврентьев М.А. К теории конформных отображений / М.А. Лаврентьев // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — **5**. — С. 159 – 245.

70. Лебедев Н.А. Принцип площадей в теории однолистных функций / Н.А. Лебедев. — М.: Наука. — 1975. — 336 с.

71. Лебедев Н.А. К теории конформных преобразований круга на неналегающие области / Н.А. Лебедев // Доклады Академии Наук СССР, серия мат. — 1955. — **103**, № 4. — С. 553 – 555.

72. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций (в 2-х томах) / А.И. Маркушевич — М.:«Наука». — 1967. — 491 с; М.:«Наука», 1968. — 628 с.

73. Митюк И.П. Принцип симметризации для многосвязных областей и некоторые его применения / И.П. Митюк // Укр. мат. журн. — 1965. — **17**, №4. — С. 46 – 54.

74. Митюк И.П. Оценка сверху для произведения внутренних радиусов областей и теоремы покрытия / И.П. Митюк // Изв. вузов. Математика. — 1987. — № 8. — С. 39 – 47.

75. Солынин А.Ю. Модули двухсвязных областей и конформно-инвариантные метрики / А.Ю. Солынин // Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1991. — **196**. — С. 122 – 131.

76. Солынин А.Ю. Модули и экстремально-метрические проблемы / А.Ю. Солынин // Алгебра и анализ. — 1999. — **11**, № 1. — С. 3 – 86.

77. Тамразов П.М. Теоремы покрытия линий при конформном отображении / П.М. Тамразов // Мат. сборник. — 1965. — **66** (108), № 4. — С. 502 – 524.

78. Тамразов П.М. Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов / П.М. Тамразов // Известия АН СССР, серия мат. — 1968. — **32**, № 5. — С. 1033 – 1043.

79. Таргонский А.Л. Оценки некоторых функционалов на классе неналегающих областей / А.Л. Таргонский // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України. — 2004. – **1,** № 3. – С. 305 – 317.

80. Таргонский А.Л. Некоторые экстремальные задачи на лучевых системах / А.Л. Таргонский // Комплексний аналіз і течії з вільними границями / Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України. — 2006. — Т.3, № 4. — С. 465 – 473.

81. Таргонский А.Л. Екстремальні задачі теорії однолистих функцій: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 / А.Л. Таргонский. — К. — 2006. — 143 с.

82. Федоров С.И. О максимуме одного конформного инварианта в задаче о неналегающих областях / С.И. Федоров // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1981. — **112**. — С. 172 – 183.

83. Хейман В.К. Многолистные функции / В.К. Хейман. — М.: Изд-во иностр. лит. — 1960. — 180 с.

84. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, Ч. I,II / Б.В. Шабат. — М.:«Наука». — 1976. — 320 с; 1976. — 400 с.

85. Ahlfors L.V. Conformal invariants. Topics in geometric function theory / L.V. Ahlfors // McGraw-Hill Book Co., New York, 1973. — 160 p.

86. Bakhtin A. K. Inequalities in problems on non-overlapping domains / A.K. Bakhtin, G.P. Bakhtina, I.V. Denega // arXiv:1108.2383 [math. CV] 11 Aug 2011.

87. Bakhtin A.K., Denega I.V. Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane / A.K. Bakhtin, I.V. Denega // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations. — 2012. — V. LXII, no. 2. — P. 83–92.

88. Bakhtin A., Vyhivska L., Denega I. N-radial systems of points and problems for non-overlapping domains // Lobachevskii Journal of mathematics. — 2017. — Vol. 38, No. 2. — P. 229 – 235.

89. Bergweiler W. On the number of critical points in parabolic basins / W. Bergweiler // Ergod. Th. Dynam. Sys. — 2002. — P. 655 – 669.

90. Duren P. Conformal mappings onto non-overlapping regions / P. Duren, M.M. Schiffer // Complex analysis. Basel: Birkhauser Verlag. — 1988. — P. 27 – 39.

91. Duren P. Univalent Functions / P. Duren. — Haidelberg and New York: Springer-Verlag. — 1983. — 383 p.

92. GrötzschмH. Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung. I, II / H. Grötzsch // Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. — 1928. — **80,** № 6. — S. 367 – 376, 497 – 502.

93. Grötzsch H. Über ein Variationsprobleme der konformen Abbildung / H. Grötzsch // Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. — 1930. — **82,** № 4. — S. 251 – 263.

94. Jenkins J.A. Some uniqueness results in the theory of symmetrization / J.A. Jenkins // Ann. Math. — 1955. — **61**, № 1. — P. 106 – 115.

95. Jenkins J.A. Some uniqueness results in the theory of symmetrization II / J.A. Jenkins // Ibid. — 1962. — **75**, № 2. — P. 223 – 230.

96. Kühnau V. R. Schlichte konforme Abbildungen auf nichtüberlappende Gebiete mit gemeinsamer quasikonformer Fortsetzung / V. R. Kühnau // Math. Nachr. — 1978. — B. 86. — P. 175 – 180.

97. Nehari Z. Some inequalities in the theory of functions / Z. Nehari // Trans. Amer. Math. Soc. — 1953. — **75**, № 2. — P. 256 – 286.

98. Schaeffer A.C. Coefficient regions for schlicht functions / A.C. Schaeffer, D.C. Spencer. // New York: Amer. Math. Soc. Coll. Publ. — 1950. — **35**. — 311 p.

99. Schiffer M. Variation of the Green functions and the theory of p-valent functions / M. Schiffer // Amer. J. Math. — 1943. — **65**, № 2. — P. 341 – 360.

100. Teichmüller O. Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung / O. Teichmüller // Deutshe Math. — 1938. — **3**. — S. 621 – 678.

101. Vygivska L., Denega I. Sharp estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // International 11th Summer School «Algebra, Topology, Analysis», 1—14 August, 2016, Odessa, Ukraine. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2016. — P. 59 – 60.

102. Vygivska L. Some inequalities for the inner radii of non-overlapping domains // 5th International Conference for Young Scientists on Differential Equations and dedicated to Ya.B. Lopatynsky, 9 — 11 November, 2016, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Donetsk: Vasyl' Stus Donetsk National University, 2016. — P. 148 – 149.

103. Vyhivska L. Some inequalities for the inner radii of partially overlapping domains // Ukraine Scientific Conference «Modern Problems Theory of Probability and Mathematical Analysis», 22–25 February, 2017, Vorokhta, Ivano-Frankivsk Region, Ukraine. Abstracts. — Івано-Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника", 2017. — P. 61 – 63.

104. Vyhivska L. On the problem of product of inner radii symmetric non-overlapping domains // International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis», 31 May—5 June, 2017, Odessa, Ukraine. — P. 103.

105. Vyhivska L. On the inner radii of symmetric non-overlapping domains // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu.O. Mitropolskiy (1917–2008), 7—10 June, 2017,

Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — P. 39.

106. Vyhivska L. Inequalities for the inner radii of symmetric non-overlapping domains // Ukraine Scientific Conference «Modern Problems Theory of Probability and Mathematical Analysis», 27 February-02 March, 2018, Vorokhta, Ivano-Frankivsk Region, Ukraine. — P. 42 – 43.

107. Vyhivska L. Some inequalities for inner radii of partially overlapping domains // Zb. pr. Institute of mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine. — 2017. — Vol. 14, No. 1. — P. 82 – 89.

ДОДАТКИ

Цей додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Бахтин А.К., Выговская Л.В., Денега И.В. Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей // Український математичний вісник. — 2016. — Т. 13, № 1. — С. 68 – 75.

(Переклад англійською: Bakhtin A., Vyhivska L., Denega I. Inequalities for the internal radii of non-overlapping domains // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 220, No. 5. — P. 584 – 590.)

2. Bakthin A., Vyhivska L., Denega I. N-radial systems of points and problems for non-overlapping domains // Lobachevskii Journal of mathematics. — 2017. — Vol. 38, No. 2. — P. 229 -– 235.

3. Vyhivska L. Some inequalities for inner radii of partially overlapping domains // Zb. pr. Institute of mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine. — 2017. — Vol. 14, No. 1. — P. 82 — 89.

4. Выговская Л.В. О проблемме В.Н. Дубинина для симметричных многосвязных областей // Український математичний вісник. — 2017. — Т. 14, № 2. — С. 295 – 302.

(Переклад англійською: Vyhivska L. On the problem of V.N. Dubinin for symmetric multiply connected domains // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 229, No. 1. — P. 108 – 113.)

5. Заболотный Я.В., Выговская Л.В. О произведении внутренних радиусов симметричных многосвязных областей // Український математичний вісник. — 2017. — Т. 14, № 3. — С. 441 – 452.

(Переклад англійською: Zabolotnii Ya.V., Vyhivska L.V. On a product of the inner radii of symmetric multiply connected domains // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 231, No. 1. — P. 101 — 109.)

6. Бахтин А.К., Денега И.В., Выговская Л.В. Неравенства для внутренних радиусов симметричных неналегающих областей // Український математичний журнал. — 2018. — Т. 70, № 9. — С. 1282 – 1288.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Vygivska L., Denega I. Sharp estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // International 11th Summer School «Algebra, Topology, Analysis», 1—14 August, 2016, Odessa, Ukraine. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2016. — P. 59 – 60.

2. Vygivska L. Some inequalities for the inner radii of non-overlapping domains // 5th International Conference for Young Scientists on Differential Equations and dedicated to Ya.B. Lopatynsky, 9 — 11 November, 2016, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Donetsk: Vasyl' Stus Donetsk National University, 2016. — P. 148 – 149.

3. Vyhivska L. Some inequalities for the inner radii of partially overlapping domains // Ukraine Scientific Conference «Modern Problems Theory of Probability and Mathematical Analysis», 22 – 25 February, 2017, Vorokhta, Ivano-Frankivsk Region, Ukraine. Abstracts. — Івано-Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника", 2017. — P. 61 – 63.

4. Vyhivska L. On the problem of product of inner radii symmetric non-overlapping domains // International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis», 31 May — 5 June, 2017, Odessa, Ukraine. — P. 103.

5. Vyhivska L. On the inner radii of symmetric non-overlapping domains // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu.O. Mitropolskiy (1917 – 2008), 7 — 10 June, 2017, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — P. 39.

6. Vyhivska L. Inequalities for the inner radii of symmetric non-overlapping domains // Ukraine Scientific Conference «Modern Problems Theory of Probability and Mathematical Analysis», 27 February – 02 March, 2018, Vorokhta, Ivano-Frankivsk Region, Ukraine. — P. 42 – 43.

7. Вигівська Л.В. Оцінки внутрішніх радіусів симетричних взаємно неперетинних областей // Науково-технічна конференція молодих вчених та спеціалістів Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України (до 100-річчя Національної академії наук України), 16 травня, 2018, Київ, Україна. — ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України. — С. 56 – 57.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

– XI Літній школі "Алгебра, Топологія, Аналіз" (м. Одеса, 1 – 14 серпня 2016 року);

– V Міжнародній конференції молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я. Б. Лопатинського (м. Київ, 9 – 11 листопада 2016 року);

– Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Ворохта, 22 – 25 лютого 2017 року);

– Міжнародній науковій конференції "Алгебраїчні та геометричні методи аналізу" (м. Одеса, 31 травня – 5 червня 2017 року);

– Міжнародній конференції молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка Національної Академії Наук України Ю. О. Митропольського (м. Київ, 7 – 10 червня 2017 року);

– Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 року);

– Науково-технічній конференції молодих вчених та спеціалістів Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України (м. Київ, 16 травня 2018 року);

– Міжнародній науковій конференції "(Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications" (Бендлево, Польща, 22 липня – 29 липня 2018 року);

– семінарах відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор С. А. Плакса);

– семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор А. С. Романюк).