

## ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу Вигівської Людмили Вячеславівни "Екстремальні задачі для областей, які не перетинаються, з вільними полюсами на колі", яка представлена на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

*Актуальність теми дисертаційного дослідження.* Класичним напрямком геометричної теорії функцій комплексної змінної є розділ, присвячений вивченню теорії екстремальних задач на класах систем багатозв'язних взаємно неперетинних областей. Багато результатів, отриманих при вивченні цього напрямку, знайшли своє застосування у різних розділах теорії функцій, а саме: теорії апроксимації (див. результати М. О. Лаврентьєва, П. М. Тамразова), викривлення при відображенні однолицими функціями, у голоморфній динаміці (W. Bergweiler) і у теорії класів аналітичних функцій.

У розвиток цього напрямку значний вклад внесли такі відомі математики, як М. О. Лаврентьєв, Г. Грьотц, Г. М. Голузін, М. А. Лебєдєв, П. П. Куфарев, А. Е. Фалес, Г. В. Кузьміна, Л. І. Колбіна, П. М. Тамразов, І. П. Мітюк, Ю. Є. Алєніцин, Дж. А. Дженкінс, М. Шиффер, П. Дюрєн, З. Нєхарі та інші. Відзначу, що 1939 року О. Тейхмюллер вперше відмітив зв'язок екстремальних задач геометричної теорії функцій комплексної змінної із теорією квадратичних диференціалів, а саме сформулював принцип: якщо у деякій екстремальній задачі вивчається максимум  $n$ -тої похідної аналітичної функції у деякій фіксованій точці  $z_0$ , то цій задачі відповідає деякий квадратичний диференціал із полюсом  $(n + 1)$ -порядку у точці  $z_0$ .

На початку 60-х років Дж. Дженкінс довів так звану "загальну теорему про коефіцієнти", яка, власне, і доводить принцип Тейхмюллєра не лише на розширеній комплексній площині, а і для випадку скінченних ріманових поверхонь.

Таким чином, більшості екстремальних задач про неперетинні області відповідають квадратичні диференціали, які мають полюси другого порядку.

До початку 70-х років у переважній більшості розглядали екстремальні задачі з

фіксованими полюсами. Але 1968 року П. М. Тамразов у роботі<sup>1</sup> висунув ідею про те, що дуже цікаво розглядати задачі, яким відповідають квадратичні диференціали із полюсами, які володіють певною свободою та надав приклад екстремальної проблеми з п'ятьма вільними полюсами, яку і розв'язав в цій роботі. Варто відзначити, що П. М. Тамразов не накладав жодних обмежень на кратність полюсів, але розглядав лише задачі, яким відповідали квадратичні диференціали тільки з простими полюсами.

1974 року учениця П. М. Тамразова Г. П. Бахтіна розглянула деякі екстремальні задачі на класах систем однозв'язних неперетинних областей, для функціоналів, які залежали від конформних радіусів. Цим задачам відповідають квадратичні диференціали із вільними полюсами другого порядку. Але на той час ще не було створено адекватних методів для розв'язку задач такого типу, тому вдалось отримати лише часткові результати. Методи досліджень, які були розроблені до початку 70-х років, зокрема, метод контурного інтегрування, варіаційні методи, метод симетризації, параметричний метод, натикались на великі труднощі при дослідженні задач про максимум добутку конформних радіусів неперетинних областей. Наприкінці 70-х років, базуючись на теорії симетризації, В. М. Дубінін розробив метод розділяючого перетворення, який адекватний для задач такого типу і тому широко використовується у дисертаційній роботі. Варто відзначити, що В. М. Дубінін узагальнив постановку задач Г. П. Бахтіної на випадок багатозв'язних областей і внутрішніх радіусів.

Дисертаційна робота Л. В. Вигівської присвячена дослідженню двох задач В. М. Дубініна, які він поставив у вигляді відкритих проблем ще 1994 року. Розглядаються також деякі узагальнені постановки даних задач для частково перетинних областей з вільними полюсами на колі, а також для взаємно неперетинних систем областей, полюси яких утворюють  $n$ -променевою систему точок.

Отже, тематика досліджень дисертаційної роботи є вельми актуальною. Відзначаю також, що дисертація виконана у відділі комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України в рамках наукової теми "Метричні та геометричні задачі теорії аналітичних і субгармонічних функцій та множин", номер державної

<sup>1</sup>Тамразов П.М. Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов / П.М. Тамразов // Известия АН СССР, серия мат. — 1968. — 32, № 5. — С. 1033 – 1043.

реєстрації 0116U003060.

*Ступінь обґрунтованості наукових положень, їх достовірність і новизна.* Дисертаційна робота складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел і додатку.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету і завдання дослідження, коротко викладено зміст основної частини роботи й показано наукову новизну одержаних результатів, а також їх апробація.

*Перший розділ* містить огляд літератури за темою дисертації, викладено основні ідеї методів дослідження даних проблем, наведено означення і теореми, необхідні для формулювання і доведення основних результатів дисертації.

Викладення основних результатів дисертації починається з *другого розділу*, у якому досліджується задача про максимум добутку внутрішніх радіусів  $n$ , ( $n \geq 2$ ) частково перетинних областей відносно точок одиничного кола і внутрішнього радіуса в степені  $\gamma$  області відносно початку координат.

1988 року в роботі В. М. Дубініна вдалося розв'язати цю задачу при  $n \geq 2$  лише для  $\gamma = 1$  та. У 1996 р. Л. В. Ковальов отримав розв'язок задачі при  $n \geq 5$  і досить суттєвих обмеженнях на геометрію розташування точок на одиничному колі, а саме при умові, що кути між сусідніми точками обмежені певними величинами, а саме  $0 < \alpha_k \leq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Зрозуміло, що ці умови є досить жорсткими умовами, суттєво звужуючи набір усіх можливих конфігурацій. У 2003 р. в роботі Г.В. Кузьміної у випадку однозв'язних областей ця проблема була розв'язана при  $\gamma \in (0, 1)$  іншим методом. Важливий результат, отриманий Г. П. Бахтіною, В. Є. В'юн, І. В. Денегою у роботі 2015 року, був узагальненням результату Л. В. Ковальова на клас областей, які задовольняють умову часткового перетину відносно точок одиничного кола.

Варто відзначити той факт, що при аналогічній умові на геометрію розташування точок на колі вперше у дисертаційній роботі вдалося отримати результат, який значно сильніший за результати попередників. Тобто, результат Л. В. Ковальова вдалося значно узагальнити для класу областей, які задовольняють умову часткового перетину відносно точок одиничного кола і покращити для  $\gamma \in (1, 0, 1215n^2]$ .



Зберігаючи ті самі обмеження на кутові параметри задачі, основний результат розділу є значним підсиленням та узагальненням результатів попередників, а саме показано, що інтервал параметру  $\gamma$ , для якого отримано точний розв'язок задачі, значно розширений.

Підкреслюю, що для того, щоб це реалізувати, потрібно було виконати велику та непросту роботу по вдосконаленню методів дослідження. Також відзначаю, що до теореми наведено таблицю, яка наочно демонструє перевагу отриманого результату із раніше отриманими. Крім того, сформульовано ряд важливих наслідків, які безпосередньо випливають з теореми. Варто відзначити, що саме в дисертаційній роботі було вперше відмічено існування екстремалі при додатковій умові на розміщення полюсів аж до  $n^2$ .

У *третьому розділі* розглянуто значне узагальнення задачі В. М. Дубініна, яке запропонував О. К. Бахтін, для взаємно неперетинних систем областей та вільних полюсів, які утворюють  $n$ -променевою систему точок. Також методи, розроблені в попередньому розділі, вдосконалено з огляду щодо застосування їх до  $n$ -променевої системи точок. Цей результат значно узагальнює і розширює результати попередників.

У *четвертому розділі* вивчається ще одна задача В. М. Дубініна, яка була сформульована для  $\gamma = 1$ . О. К. Бахтін розширив постановку задачі для довільного додатного  $\gamma > 0$ . Це задача про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних симетричних областей відносно точок одиничного кола і внутрішнього радіуса в степені  $\gamma$  області відносно початку координат. Відмічу, що умови симетрії, накладені на деякі області, значно ускладнюють розв'язування цієї задачі. У цьому розділі у теоремі 4.2.1 розв'язано задачу для всіх  $n \geq 2$  та  $\gamma \in (0, 1)$ . У теоремі 4.2.2 показано, що для довільного  $\gamma$  існує такий номер  $n$ , починаючи з якого максимум вище згаданого добутку досягається. Також вперше було отримано результат при більш жорстких обмеженнях на геометрію розташування точок на одиничному колі.

Усі основні результати, які отримано в роботі, є новими, а саме:

1. Отримано узагальнення відомих результатів для задач про екстремальне розбиття неперетинних та частково перетинних областей комплексної площини з вільними полюсами на колі.

2. Розв'язано задачу про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами, які утворюють  $n$ -променеві системи точок.

3. Знайдено точну оцінку добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних симетричних областей відносно точок одиничного кола на деяку додатну степінь  $\gamma \in (0; 1)$  внутрішнього радіуса області відносно початку координат. При  $\gamma > 1$  отримано точну оцінку вказаного добутку, яка виконується, починаючи з деякого номера  $n$ , що залежить від  $\gamma$ . При додаткових обмеженнях на параметри цієї задачі, отримано точні оцінки добутків внутрішніх радіусів областей при  $\gamma \in (0; 0,38n^2)$ .

Усі основні наукові результати дисертації є чітко доведеними, тому їх достовірність не викликає сумнівів.

*Теоретичне і практичне значення одержаних результатів.* Результати дисертаційної роботи мають, насамперед, вагоме теоретичне значення, проте не має сумнівів, що розвинені в ній методи знайдуть застосування в комплексному аналізі, голоморфній динаміці, теорії апроксимації і для оцінок викривлення при конформному відображенні.

*Апробація і повнота викладу результатів в наукових фахових виданнях.* Результати дисертації опубліковано у 6 наукових роботах (причому 4 з них прореферовані наукометричною базою Scopus) та 7 тезах наукових конференцій (причому 3 з них — міжнародні). Результати мають достатньо широкую апробацію, оскільки доповідались на семінарах в наукових установах України та за кордоном.

У авторефераті достатньо повно відображені основні положення та висновки дисертації.

До дисертації є зауваження:

1. Вважаю, що деякі складні перетворення і спрощення розділу 4 можна було розписати більш детально, наприклад с. 106, 114 та 125.

2. У теоремі 4.2.3 варто вказати проміжок  $\gamma \in (1; 0,38n^2)$ , а не  $\gamma \in (0; 0,38n^2)$ , оскільки у теоремі 4.2.1 для  $\gamma \in (0, 1)$  було отримано повний результат.

3. На с. 66 функція  $P(x)$  не визначена.

4. На с. 79 при формулюванні наслідків 1 та 2 використовується величина  $R$ , але вона ні в теоремі 3.2.1, ні в цих наслідках не є введеною та не описана числова множина

якій ця величина належить.

5. Також у роботі є певні описки та русизми (наприклад с. 37 замість М.А. Лебедев написано М.А. Лебедев).

Проте усі наведені недоліки не впливають на загальну високу оцінку результатів дисертації, отриманих автором.

*Загальний висновок.*

Дисертаційна робота Вигівської Л. В. є завершеною науковою працею, в якій отримано нові, науково обґрунтовані результати, що в сукупності є істотним внеском у розвиток екстремальних задач з вільними полюсами геометричної теорії функцій комплексної змінної.

Вважаю, що дисертаційна робота Вигівської Л. В. "Екстремальні задачі для областей, які не перетинаються, з вільними полюсами на колі", за рівнем наукових досліджень, їх науковою повизною, актуальністю, кількістю публікацій у наукових фахових виданнях і рівнем апробації відповідає вимогам пп. 9, 11–13 "Порядку присудження наукових ступенів" (Постанова Кабінету міністрів України № 567 від 24.07.2013), щодо кандидатських дисертацій, а її автор Вигівська Людмила Вячеславівна заслуговує присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Офіційний опонент

Таргонський А. Л.

кандидат фізико-математичних наук, доцент,

доцент кафедри математичного аналізу

фізико-математичного факультету

Житомирського державного університету ім. Івана Франка

Проректор з наукової і міжнародної роботи



Сейко Н. А.

доктор педагогічних наук, професор

Житомирського державного університету ім. Івана Франка

Надійшло до спеціалізованої

Секретар

ради



вченої ради Д26.206.01 12.03.2019р.  
/Сатур О.Р./