НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Подолян Ірина Віталіївна

УДК 512.562

МАТРИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ПОСТІЙНОГО ЖОРДАНОВОГО ТИПУ АБЕЛЕВИХ ТА ДІЕДРАЛЬНИХ ГРУП

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Київ – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі алгебри та математичної логіки механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник доктор фізико-математичних наук, професор,
БОНДАРЕНКО Віталій Михайлович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу алгебри і топології.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор,
ОЛІЙНИК Богдана Віталіївна,
Національний університет
"Києво-Могилянська академія",
завідувач кафедри математики
факультету інформатики.

кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Рассадкіна Марина Валеріївна,
Житомирський національний
агроекологічний університет,
доцент кафедри вищої та прикладної
математики.

Захист відбудеться 21 травня 2019 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 в Інституті математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.‘

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

Автореферат розісланий 5 квітня 2019 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Є. О. Полулях

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертаційна робота пов'язана із сучасними аспектами теорії матричних зображень скінченних груп.

Матричні зображення (чи відповідні модулі) скінченних груп над полями та класичними кільцями досліджувались протягом багатьох десятиліть. Важливі результати за цей час отримали С. Д. Берман, В. М. Бондаренко, П. М. Гудивок, Ю. А. Дрозд, Л. О. Назарова, А. В. Ройтер, Ш. Бреннер, А. Джонс, Ж. М. Маранда, І. Райнер, А. Хеллер, Д. Г. Хігман та інші математики.

Якщо говорити про зображення скінченних груп над полем, то теорія зображень має 2 основні напрямки: класичний, коли характеристика поля не ділить порядок групи (зокрема, дорівнює нулю) і модулярний, коли характеристика поля ділить порядок групи.

У першому випадку кожне матричне зображення розкладається в пряму суму незвідних зображень, число яких скінченне (в інших термінах це означає, що групова алгебра є напівпростою).

У другому випадку завжди існують нерозкладні зображення, які не є незвідними і до того ж нерозкладних зображень, як правило, нескінченне число (з точністю до еквівалентності); в цьому випадку кажуть, що група має нескінченний зображувальний тип. До груп скінченного зображувального типу належать лише групи з циклічною силовською p-підгрупою (p – характеристика поля). В свою чергу група нескінченного типу може бути ручного або дикого зображувального типу. Група ручного типу — це така група, що (над алгебраїчним замиканням основного поля) в кожній розмірності всі її, з точністю до еквівалентності, нерозкладні зображення складаються із скінченного числа однопараметричних сімейств зображень і скінченного числа дискретних зображень (тобто, без параметру). Група дикого типу — це така група, у якої є двопараметричне сімейство нерозкладних зображень. В обох випадках мається на увазі, що при різних значеннях параметрів відповідні зображення нееквівалентні (строгі означення для матричних задач в загальному випадку, приведені Ю. А Дроздом, зокрема, в першій із багатьох його добре відомих статей про ручні та дикі задачі[1]). Зауважимо, що формально групи скінченного типу належать до ручних груп. Групи ручного та дикого зображувального типів часто називають просто ручними та дикими.

Із класифікаційних результатів В. М. Бондаренка (опису модулярних зображень діедральних та квазідіедральних груп[2, 3]) та добре відомих теорем

---

[1]Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах / Ю. А. Дрозд // Матричные задачи. – Киев: Ин–т математики АН УССР. – 1977. – С. 104–114.

[2]Бондаренко В. М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 / В. М. Бондаренко // Матем. сб. – 1975. – **96**, № 1. – С. 63–74.

[3]Бондаренко В. М. Модулярные представления квазидиэдральных групп / В. М. Бондаренко // Пятый Всесоюзный симпозиум по теории групп. Тезисы сообщений. – Новосибирск. – 1976. – С. 10–11.

Ю. А. Дрозда про ручні та дикі алгебри[1,4] маємо наступні теореми, отримані в 1977 р.[5].

Теорема 1. *Нециклічна скінченна p-група G є ручною над полем k характеристики p тоді і лише тоді, коли $(G : G') \leq 4$ (або, менш формально, $p = 2$ і $G/G' \cong (2, 2)$).*

Тут G' позначає, як звичайно, комутант групи G.

Теорема 2. *Скінченна група G є ручною над полем k характеристики p тоді і лише тоді, коли довільна її абелева p-підгрупа порядку більшого 4-х — циклічна.*

Ці теореми дали додатковий поштовх для вивчення зображень у модулярному випадку, особливо для не p груп.

У 2008 році Д. Ф. Карлсон, Е. М. Фрідлендер і Ю. Пєвцова[6], вивчаючи групові схеми, ввели (у модулярному випадку) поняття модулів постійного жорданового типу, а також установили низку важливих властивостей таких модулів. Цією тематикою займалися, зокрема, добре відомі алгебраїсти А. А. Суслін і Д. Бенсон. Як зазначив Д. Бенсон [7], одним із найважливіших випадків і, зокрема, з точки зору застосувань, є випадок елементарних абелевих груп (наприклад, існує глибокий зв'язок з векторними в'язками).

Нехай $G = G_r = (g_1, \dots, g_r) \cong (Z/p)^r$ — елементарна абелева p-група і λ — матричне зображення групи G над алгебраїчно замкнутим полем k характеристики p ($g_1, \dots, g_r$ — канонічні твірні). Тоді матриці $\lambda(g_1 - 1), \dots, \lambda(g_r - 1)$ є нільпотентними, а значить нільпотентною є будь-яка їх лінійна комбінація $a_1\lambda(g_1 - 1) + \cdots + a_r\lambda(g_r - 1)$. Матричне зображення λ називається зображенням постійного жорданового типу, якщо жорданова канонічна форма вказаної лінійної комбінації не залежить від вибору коефіцієнтів $a_1, \dots, a_r$ із поля k, серед яких принаймні один ненульовий. Якщо ця жорданова канонічна форма має жорданові блоки розміру $t_1, \dots, t_s$, тоді кажуть, що зображення λ має жордановий тип $JT(\lambda) = [t_1] \dots [t_s]$.

У загальному випадку (якщо говорити на мові модулів) це поняття вводиться наступним чином[6].

Нехай G — довільна скінченна група і k — поле характеристики $p > 0$. Розглядаються модулі над кільцем $k[t]/(t^p)$, де $k[t]$ — кільце поліномів від змінної t і (t^p) — ідеал, породжений елементом t^p. Кожний модуль над цим

[4]Дрозд Ю. А. Ручные и дикие матричные задачи / Ю. А. Дрозд // Представления и квадратичные формы. – Киев: Ин–т математики АН УССР. – 1979. – С. 39–74.

[5]Бондаренко В. М. Представленческий тип конечных групп / В. М. Бондаренко, Ю. А. Дрозд // Записки науч. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР. – 1977. – **71**, – С. 24–41.

[6]Carlson. J. F. Modules of constant Jordan type / J. F. Carlson, E. M. Friedlander, J. Pevtsova // J. Reine Angew. Math. – 2008. – **614**. – P. – 191-234.

[7]Benson D. J. A survey of modules of constant Jordan type and vector bundles on projective space / D. J. Benson // Advances in representation theory of algebras. – EMS Ser. Congr. Rep. Eur. Math. Soc. – Zurich. – 2013. – P. 39-63.

кільцем задається оператором ступеня нільпотентності p в скінченновимірному векторному просторі (або, що еквівалентно, квадратною матрицею ступеня нільпотентності p,), а значить для нього визначений жордановий тип (див. вище). Для модуля M над груповою алгеброю kG і гомоморфізму (алгебр) $\alpha : k[t]/(t^p) \to kG$ позначимо через M_α відповідний модуль над $k[t]/(t^p)$ (тобто, $M_\alpha = M$ як векторні простори і для довільних $\lambda \in k[t]/(t^p)$, $m \in M_\alpha$, маємо $\lambda m = \alpha(\lambda)m$). В цій ситуації кажуть, що жордановий тип модуля M_α є жордановим типом α на M.

Для групи G її π-точкою називається лівий плоский гомоморфізм (алгебр) $\alpha : k[t]/(t^p) \to kG$, який факторизується через групову алгебру $kC \subset kG$ деякої абелевої p-підгрупи $C \subset G$. Модуль M над kG називається модулем постійного жорданового типу, якщо жордановий тип модуля M_α не залежить від вибору π-точки.

У роботах по цій тематиці, окрім вивчення загальних властивостей, розглядається питання про існування модулів (чи зображень) постійного жорданового типу з числами $t_1 \dots t_s$, що задовольняють деякі природні, наперед задані, умови та питання про розподіл жорданових типів.

У дисертації розглядається задача про опис зображень постійного жорданового типу для елементарних абелевих груп, а також, при деякому послабленні означення, для діедральних груп. Задачі такого типу (як мета, до якої бажано прямувати) є традиційними в будь-якій теорії зображень.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертаційної роботи пов'язана з науковими дослідженнями на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка — тема 11БФ038-03 "Застосування алгебро-геометричних методів в теоріях груп, напівгруп, кілець, зображень до задач прикладної алгебри та захисту інформації" (номер державної реєстрації 0111U005264).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дослідження є опис елементарних абелевих груп, які мають скінченний, ручний та дикий типи відносно зображень постійного жорданового типу, опис категорії таких зображень у випадку скінченного типу та побудову однопараметричних сімейств матричних зображень постійного жорданового типу для діедральних груп.

Об'єктом дослідження є матричні зображення і категорії.

Предмет дослідження — зображувальний тип скінченних груп відносно зображень постійного жорданового типу і нерозкладні об'єкти та морфізми категорій таких зображень.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації отримано нові теоретичні результати, основними із яких є такі:

- Описана категорія зображень постійного жорданового типу для четверної групи Клейна та вказано властивості множин морфізмів.
- Для довільної фіксованої розмірності обчислено загальне число нероз-

кладних матричних зображень четверної групи Клейна над скінченним полем, які мають постійний жордановий тип.

• Отримано критерій ручності для елементарних абелевих груп відносно матричних зображень постійного жорданового типу.

• Описані матричні зображення постійного жорданового типу малих розмірностей для довільної дикої елементарної абелевої 2-групи.

• Доведено існування нескінченного числа розмірностей, в кожній із яких для скінченних діедральних 2-груп існує нескінченне число нерозкладних попарно нееквівалентних зображень постійного (відповідно не постійного) рангу.

• Для нескінченної діедральної групи описана строго повна множина серій модулярних зображень відносно всіх зображень розмірності $n < 8$, які мають постійний ранг. Вказано наслідки для загальних серій нерозкладних зображень скінченних діедральних 2-груп.

• Узагальнено низку отриманих результатів для матричних задач над полем довільної характеристики.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Отримані в ній результати, а також методи, за допомогою яких вони отримані, можуть бути використані в теорії зображень і теорії матричних задач.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно. У спільних з науковим керівником роботах останньому належать, як правило, постановки задач та загальні ідеї щодо методів їх розв'язання, а практична реалізація та ряд конкретних ідей належать здобувачеві.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи оприлюднено на:

— Чотирнадцятій Міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (м. Київ, 19-21 квітня 2012 р.);

— Міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження С. М.Чернікова (м. Київ, 20-26 серпня 2012 р.);

— IX Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (м. Львів, 8-13 липня 2013 р.);

— Міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження Л. А. Калужніна (м. Київ, 7-12 липня 2014 р.);

— IX Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 70-річчю Ю. А. Дрозда (м. Одеса, 20-27 серпня 2015 р.).

— XI Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 75-річчю В. В. Кириченка (м. Київ, 3-7 липня 2017 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в шести наукових роботах ([1]–[6]), які опубліковані у фахових виданнях із Переліку, затвердженого Міністерством освіти і науки України; одна з них ([2]) — у виданні, що відображається в наукометричній базі Scopus. Шість робіт опубліковано в матеріалах наукових конференцій ([7]–[12]).

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із анотації, вступу, п'ятьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Загальний обсяг дисертації — 184 сторінки. Обсяг основного тексту дисертації — 153 сторінки. Список використаних джерел займає 11 сторінок (93 найменування).

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** наведено загальну характеристику та мету роботи, обгрунтовано її актуальність і наукову новизну.

У **першому розділі** дисертаційної роботи викладено основні початкові відомості з теорії категорій, відомості з лінійної алгебри та сучасної теорії матричних зображень. Зокрема, в останньому підрозділі наведемо отриманий В. М. Бондаренком[2] розв'язок задачі про класифікацію з точністю до подібності пар самоанульовних операторів $\mathcal{A}_1$ і $\mathcal{A}_2$ ($\mathcal{A}_1^2 = \mathcal{A}_2^2 = 0$), що діють у скінченновимірному векторному просторі над полем k.

У **другому розділі** вивчаються матричні зображення четверної групи Клейна $G_{2,2} := Z/2Z \times Z/2Z$, тобто елементарної абелевої 2-група з двома твірними. Позначимо ці твірні через a і b; тоді $a^2 = b^2 = 1, ab = ba$.

Матричне зображення $\lambda : G_{2,2} \to GL_n(k)$ (розмірності $n \geq 1$) групи $G_{2,2}$ над алгебраїчно замкнутим полем k характеристики 2 будемо ототожнювати з парою матриць (A, B), де $A = \lambda(a)$, $B = \lambda(b)$ і, отже, довільне матричне зображення групи $G_{2,2}$ задається парою матриць (A, B) зі співвідношеннями $A^2 = E,\ B^2 = E,\ AB = BA$, де E — одинична матриця.

Оскільки $(A + E)^2 = 0$ і $(B + E)^2 = 0$ (бо поле має характеристику 2), то для довільних $x, y \in k$ пов'язана із зображенням λ матриця

$$\lambda_{xy} = (A, B)_{xy} := x(A + E) + y(B + E)$$

у квадраті також дорівнює нулю. Матричне зображення $\lambda = (A, B)$ називається зображенням постійного жорданового типу, якщо жорданова тип матриці $(A, B)_{xy}$ (див. вступну частину автореферату) не залежить від коефіцієнтів x, y, які одночасно не дорівнюють нулю (це наслідок означення зображень постійного жорданового типу для довільної скінченної групи[6]). У цьому випадку вказаний жордановий тип будемо називати жордановим типом зображення λ і позначатимемо його через $JT(\lambda) = JT(A, B)$.

Одиничну матрицю порядку s позначаємо через E_s. Через $\overline{0}$ і $\widetilde{0}$ позначаємо відповідно нульовий стовпець і нульовий рядок довільної матриці.

Теорема 2.1. *Матричні зображення групи $G_{2,2}$ (над алгебраїчно замкнутим полем k характеристики 2) вигляду*

$$a)\qquad a\to(1),\quad b\to(1),$$

$$b)\qquad a\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad b\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$c)\qquad a\to\left(\begin{array}{c|c}E_s & E_s\ \ \bar{0}\\\hline 0 & E_{s+1}\end{array}\right),\qquad b\to\left(\begin{array}{c|c}E_s & \bar{0}\ \ E_s\\\hline 0 & E_{s+1}\end{array}\right),$$

$$d)\qquad a\to\left(\begin{array}{c|c}E_{s+1} & \begin{matrix}E_s\\ \widetilde{0}\end{matrix}\\\hline 0 & E_s\end{array}\right),\qquad b\to\left(\begin{array}{c|c}E_{s+1} & \begin{matrix}\widetilde{0}\\ E_s\end{matrix}\\\hline 0 & E_s\end{array}\right),$$

де s — натуральне число, утворюють повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних матричних зображень постійного жорданового типу.

Наслідок 2.2. *В кожній розмірності n група $G_{2,2}$ має, з точністю до еквівалентності, лише скінченне число $jt(n)$ нерозкладних зображень постійного жорданового типу. При цьому $jt(n)=1$ для $n=1$, $jt(n)=2$ для довільного непарного $n\neq 1$, $jt(n)=1$ для $n=4$, $jt(n)=0$ для довільного парного $n\neq 4$.*

Наслідок 2.3. *Жордановий тип $JT(A,B)=[t_1]\dots[t_m]$ нерозкладного зображення постійного жорданового типу групи $G_{2,2}$ може приймати лише значення $[1]$, $[2]^2$ і $[1][2]^s$, де s — натуральне число*

У другому розділі розглядається також деякий аналог цієї задачі для поля довільної характеристики.

У **третьому розділі** вивчаються матричні зображення елементарних абелевих p-груп над алгебраїчно замкнутим полем характеристики p.

У підрозділі 3.1 приводиться загальне означення для елементарних абелевих груп (див. вступну частину дисертації). У підрозділах 3.2 і 3.3 приведено означення груп ручного та дикого зображувального типів, які часто називають просто ручними і дикими групами. Згідно результатів, отриманих Ю. А. Дроздом[1,4], будь-яка група є або ручною, або дикою (причому одночасно бути ручною і дикою не може).

Приведено означення диких груп на матричній мові, яке використовується при доведенні тверджень. Через $k\langle x, y\rangle$ позначаємо кільце некомутативних поліномів від змінних x, y).

Якщо A – матриця над кільцем $k\langle x, y\rangle$, а (B, C) – пара квадратних матриць однакового розміру над k (яка однозначно задає матричне зображення кільця $k\langle x, y\rangle$), то $A \otimes (B, C)$ позначає матрицю над k, яка отримується із матриці A заміною x на матрицю B, y на матрицю C а скалярних елементів a_{ij} на $a_{ij}E$, де E – одинична матриця такого ж розміру, як і матриці B і C. Тензорним добутком $T \otimes (B, C)$ матричного зображення T групи G над $k\langle x, y\rangle$ і пари квадратних матриць (B, C) над k називається таке зображення S групи G над k, що $S(g) = T(g) \otimes (B, C)$ для довільного $g \in G$. Як вже говорилося, пара матриць (B, C) задає деяке матричне зображення кільця $k\langle x, y\rangle$. Якщо його позначити через $\varphi_{(B,C)}$, то природно $T \otimes (B, C)$ записувати як $T \otimes \varphi_{(B,C)}$.

Будемо говорити, що матричне зображення γ групи G над алгеброю $\Sigma = k\langle x, y\rangle$ є *досконалим* якщо для будь-яких матричних зображень φ і φ' алгебри Σ над k, зображення $\gamma \otimes \varphi$ і $\gamma \otimes \varphi'$ групи G над k задовольняють наступні умови:

1) якщо $\gamma \otimes \varphi$ і $\gamma \otimes \varphi'$ еквівалентні, то φ і φ' еквівалентні;

2) $\gamma \otimes \varphi$ нерозкладне, якщо нерозкладним є φ

Зауважимо, що обидві умови в протилежному напрямку є очевидними.

Група G називається дикою над полем k, якщо вона має досконале зображення над алгеброю Σ. В цьому випадку також кажуть, що група має дикий зображувальний тип.

Зауважимо, що інколи досконале зображення зручно брати (для спрощення його вигляду) над алгеброю $\widehat{\Sigma} = k\langle x, y, x^{-1}, y^{-1}\rangle$, а не $\Sigma = k\langle x, y\rangle$. Матричні зображення алгебри $\widehat{\Sigma}$ задаються не всіма парами квадратних матриць однакового розміру, а лише оборотними.

Якщо розглядати модулярні матричні зображення скінченної групи, над полем k характеристики $p > 0$, то будемо говорити, що група G є cJ-дикою, або має cJ-дикий зображувальний тип, якщо вона має досконале зображення γ над алгеброю $\Sigma = k\langle x, y\rangle$ таке, що виконується наступна умова:

3) зображення $\gamma \otimes \varphi$ (групи G над k) має постійний жордановий тип для довільного зображення φ алгебри Σ над k.

Досконале зображення, що задовольняє цій умові, називається cJ-досконалим . У підрозділі 3.4 розглядаються матричні зображення елементарної абелевої групи $G = G_n = \mathbb{Z}/2 \times \cdots \times \mathbb{Z}/2$, $n > 2$ разів, над полем характеристики 2 (випадок $n = 2$ розглянуто в розділі 2). Природні твірні елементи групи G позначимо через $g_1, g_2, \ldots, g_n$. За теоремою 1 із вступу (дисертації) група G в цьому випадку є дикою. Найпростіше досконале зображення має вигляд

$$g_1 \to \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 \to \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_3 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \cdots, g_n \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Але, очевидно, це зображення не є cJ-досконалим. Цей факт не виглядає дивним, бо не кожне зображення групи G над полем k має постійний жордановий тип.

Розглянемо наступне матричне зображення γ групи G над алгеброю $\widehat{\Sigma} = k\langle x, y, x^{-1}, y^{-1}\rangle$:

$$\gamma(g_i - 1) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$1 \leq i \leq n$, з нульовими діагональними блоками розмірів 2×2 та $(n+1)\times(n+1)$, і

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0_i & E & 0'_i \end{pmatrix} \text{ для } i \neq n, \quad \gamma_n = \begin{pmatrix} 0_n & 0'_n & S \end{pmatrix}, \text{де } S = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix};$$

тут E — одинична матриця розміру 2×2 і 0_i, 0_n (відповідно $0'_i$, $0'_n$) — нульові матриці розміру $2 \times (i-1)$ (відповідно $2 \times (n-i)$).

Доведено, що γ є cJ-досконалим зображенням.

Отже, має місце таке твердження.

Твердження 3.6. *Група $G = \mathbb{Z}/2 \times \cdots \times \mathbb{Z}/2$ ($n > 2$ разів) є cJ-дикою.*

Наслідок 3.7. *Група $G = \mathbb{Z}/p \times \cdots \times \mathbb{Z}/p$ ($n > 2$ разів) є cJ-дикою для довільного $p > 2$.*

У підрозділі 3.4 описано також (з точністю до еквівалентності) всі нерозкладні зображення розмірності $m < 4$ довільної групи G_n, $n > 1$, над полем k характеристики 2, що мають постійний жордановий тип.

У підрозділі 3.5 розглядаються матричні зображення постійного жорданового типу нециклічної групи порядку p^2, $p > 2$. Випадок $p = 2$ розглянуто в попередньому підрозділі. У цьому підрозділі розглядаємо випадок $p \neq 2$.

Твердження 3.8. *Група $G = \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$ є cJ-дикою для довільного $p > 2$.*

Вкажемо схему доведення.

Позначимо природні твірні групи G через g_1, g_2, і розглянемо наступне матричне зображення γ групи G над $\Sigma = k\langle x, y\rangle$:

$$\gamma(g_1) = E_{10} + \begin{pmatrix} \gamma_{11(1)} & \gamma_{12(1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \gamma(g_2) = E_{10} + \begin{pmatrix} \gamma_{11(2)} & \gamma_{12(2)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де

$$\gamma_{11(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{12(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{11(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{12(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

і E_{10} — одинична матриця розміру 10×10.

Доведено, що це зображення є cJ-досконалим.

У підрозділі 3.5 сформульований і доведений основний результат розділу 3. Як і раніше, матричні зображення розглядаються над алгебраїчно замкнутим полем характеристики $p > 0$.

Будемо говорити, що скінченна група G має *cJ-скінченний зображувальний тип* над полем k, якщо вона має, з точністю до еквівалентності, лише скінченне число нерозкладних зображень постійного зображувального типу, і *cJ-нескінченний зображувальний тип* в іншому разі. В останньому випадку групу називатимемо cJ-дискретною або просто дискретною, якщо вона має скінченне число нерозкладних зображень (постійного жорданового типу) в кожній розмірності.

Теорема 3.9. *Елементарна абелева p-група $G = (\mathbb{Z}/p)^r$ має*

cJ-скінченний зображувальний тип, якщо $r = 1$ (для довільного p),

cJ-ручний зображувальний тип, якщо $r = p = 2$,

cJ-дикий зображувальний тип в інших випадках.

При цьому в ручному випадку вона є дискретною.

Отже, єдиною елементарною абелевою групою cJ-нескінченного, не cJ-дикого зображувального типу, є четверна група Клейна. Її матричні зображення детально вивчаються в наступному розділі з категорної та комбінаторної точок зору.

У **четвертому розділі** вивчається категорія матричних зображень постійного жорданового типу для четверної групи Клейна.

За загальним означенням (для зображень довільної групи над довільним полем) множина морфізмів $Hom(S, S')$ матричних зображень

$$S : a \to A,\ b \to B, \quad S' : a \to A',\ b \to B'$$

групи $G_{2,2}$ над полем k складається з усіх матриць X таких, що $AX = XA'$ і $BX = XB'$. Множина морфізмів є, очевидно, векторним простором. Для задання категорії зображень достатньо в кожному класі еквівалентних нерозкладних зображень вказати по одному представнику і обчислити для них всі множини морфізмів.

Отримано опис категорії зображень четверної групи Клейна постійного жорданового типу. При цьому в якості представників класів еквівалентності беруться вказані в теоремі 2.1 нерозкладні зображення. При цьому зображення, вказані в пунктах a), b), c), d), позначаються відповідно через T_1, T_2, T_3^s, T_4^s.

Наступна таблиця описує розмірності множин морфізмів (де на перетині рядка з номером X і стовпця з номером Y стоїть число $dim_k(X,Y)$):

	T_1	T_2	T_3^t	T_4^t
T_1	1	1	$t+1$	t
T_2	1	4	$2t+1$	$2t+1$
T_3^s	s	$2s+1$	$(s+1)t+1$ при $s \leq t$ $s(t+1)$ при $s > t$	$st+s+t$
T_4^s	$s+1$	$2s+1$	$(s+1)t$	$(s+1)t$ при $s < t$ $s(t+1)+1$ при $s \geq t$

Доведено також наступні твердження (нагадаємо, що згідно відомої теореми алгебра ендоморфізмів нерозкладного (скінченновимірного) зображення довільної алгебри є локальним).

Твердження 4.18. *Нехай T — довільне нерозкладне зображення постійного жорданового типу четверної групи Клейна. Тоді його алгебра ендоморфізмів комутативна і її радикал дорівнює в кубі нулю. Більш точно, ступінь нільпотентності n_T радикала алгебри $End\, T$ дорівнює:*

$$n_T = \begin{cases} 1 & \textit{при } dim_k T = 1, \\ 2 & \textit{при } dim_k T = 3, \\ 3 & \textit{при } dim_k T = 4, \\ 2 & \textit{при } dim_k T > 4. \end{cases}$$

Далі, порядок m_M мінімальної системи твірних алгебри $End\, M$ дорівнює:

$$m_M = \begin{cases} 1 & \textit{при} \;\; dim_k T = 1, \\ 3 & \textit{при} \;\; dim_k T = 3, 4 \\ s^2+s+1 & \textit{при} \;\; dim_k T = 2s+1 > 4. \end{cases}$$

Нагадаємо, що зображення T називається регулярним, якщо відповідний йому модуль є регулярним, тобто ізоморфний груповій алгебрі четверної групи Клейна (як модулю над собою).

Із останнього твердження маємо такий наслідок.

Наслідок 4.19. *Нехай T — довільне нерозкладне нерегулярне зображення постійного жорданового типу четверної групи Клейна розмірності $d \neq 1$ (у цьому випадку d непарне). Тоді $\operatorname{End} T$ — комутативна алгебра, радикал якої в квадраті дорівнює нулю. Порядок її мінімальної системи твірних дорівнює $\frac{d^2+3}{4}$.*

В заключній частині четвертого розділу розглядаються зображення четверної групи Клейна над скінченними полем.

Теорема 4.21. *Нехай поле K (характеристики 2) має порядок $q = 2^n$. Тоді число $N_K(m)$ всіх нерозкладних зображень постійного жорданового типу четверної групи Клейна в розмірності m дорівнює:*

$$N_K(m) = \begin{cases} 1, & \textit{якщо } m = 1; \\ q^3(q^4-1)(q^3-1)(q^2-1), & \textit{якщо } m = 2; \\ 2q^{s^2}(q^{2s+1}-1)(q^{2s}-1)\cdots(q^2-1), & \textit{якщо } m = 2s+1 \neq 1; \\ 0, & \textit{якщо } m = 2s \neq 2. \end{cases}$$

У **п'ятому розділі** вивчаються матричні зображення скінченних діедральних 2-груп

$$G_{2^m} = \langle a, b \,|\, a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^{2^{m-1}} = 1 \rangle \ (m \geq 2).$$

над алгебраїчно замкнутим полем k характеристики 2. Порядок групи G_{2^m} дорівнює 2^m. Випадок $m = 2$ виключається із розгляду, бо G_4 — четверна група Клейна, матричні зображення якої вивчалися в попередніх розділах.

Матричне зображення T групи G_{2^m} розмірності n задається парою матриць A, B розміру $n \times n$ таких, що $A^2 = E_m$, $B^2 = E_m$, $(AB)^{2^{m-1}} = E_m$.

По аналогії з четверною групою Клейна, матричне зображення T групи G_{2^m} називається зображенням постійного рангу відносно a, b, якщо ранг матриці $\alpha(E + T_a) + \beta(E + T_b)$, де $\alpha, \beta \in k$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, не залежить від вибору α і β (E позначає одиничну матрицю). Зауважимо, що на відміну від групи Клейна постійність рангу не забезпечує постійність жорданової форми.

Інколи розглядається і нескінченне діедральна група $G_\infty = \langle a, b \,|\, a^2 = 1, b^2 = 1 \rangle$. Всі приведені вище означення для скінченних діедральних груп природним чином переносяться на G_∞.

Однопараметричне сімейство зображень над полем k розмірності n групи G (параметр входить поліноміально) назвемо серією (розмірності n), якщо всі її зображення (коли параметр пробігає поле) нерозкладні і попарно нееквівалентні. Дві серії назвемо незалежними, якщо не існує зображення із першої серії, яке еквівалентне зображенню із другої серії.

Серію зображень діедральної групи назвемо серією постійного рангу, якщо в полі k існує скінченна підмножина k_1 така, що при будь-якому значенні параметра із $k_0 = k \setminus k_1$ зображення має постійний ранг.

Множину серій M розмірності n постійного рангу назвемо повною, якщо з точністю до еквівалентності існує лише скінченна кількість нерозкладних зображень розмірності n, які не належать ні одній серії і мають постійний ранг, і строго повною, якщо додатково всі серії попарно незалежні. Якщо ж серії, які належать множині M, мають різні розмірності і N — множина цих розмірностей, то M назвемо повною (відповідно строго повною), якщо такою є кожна підмножина множини серій M, яка складається із усіх серій довільної фіксованої розмірності $n \in N$.

Надалі в усіх міркуваннях і твердженнях вважається, що $k_1 = \{0\}$, тобто k_0 — множина всіх оборотних елементів поля k.

Ці означення наведено в підрозділах 5.1 і 5.2.

У підрозділі 5.1 доведена наступна теорема.

Теорема 5.1. *Три серії матричних зображень діедральної групи* G_∞

1)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

2)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

3)

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де параметр α пробігає $k \setminus 0$, утворюють строго повну множину серій відносно всіх зображень розмірності $n < 8$, які мають постійний ранг.

У розділах 5.4 і 5.5 розглядається задача про число зображень чи серій нерозкладних зображень постійного і непостійного рангу скінченних діедральних груп.

Згідно результатів другого розділу четверна група Клейна має в кожній парній розмірності нескінченне число нерозкладних зображень непостійного рангу. Отримано наступне узагальнення для довільної скінченної діедральної 2-групи.

Теорема 5.2. *Нехай k — алгебраїчно замкнуте поле характеристики 2 і n — натуральне число, яке ділиться на 2^{m-1}. Тоді в розмірності n діедральна група G_{2^m} має нескінченно багато нерозкладних попарно нееквівалентних зображень непостійного рангу.*

Переходимо до загальних теорем про нерозкладні зображення постійного рангу.

Теорема 5.3. *Нехай k — нескінченне поле характеристики 2 і n — натуральне число, яке ділиться на 6. Тоді в розмірності n будь-яка діедральна група порядку $m > 8$ має нескінченно багато нерозкладних попарно нееквівалентних зображень непостійного рангу.*

Теорема 5.6. *Нехай k — алгебраїчно замкнуте поле характеристики 2 і n — натуральне число, яке ділиться на 6. Тоді в розмірності n довільна діедральна група має принаймні дві незалежні серії зображень постійного рангу.*

Теорема 5.7. *Нехай k — алгебраїчно замкнуте поле характеристики 2 і n — натуральне число, яке ділиться на 12. Тоді в розмірності n довільна діедральна група має принаймні три попарно незалежні серії зображень постійного рангу.*

За три вказані в останній теоремі серії можна взяти наступні:
серія А)

$$a \to T_a = \begin{pmatrix} E_{3m} & E_{3m} & 0 & 0 \\ 0 & E_{3m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{3m} & 0 \\ 0 & 0 & E_{3m} & E_{3m} \end{pmatrix},$$

$$b \to T_b = \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 & J_{3m}(\lambda) \\ 0 & E_{3m} & E_{3m} & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{3m} \end{pmatrix},$$

серія B)

$$a \to T_a = \begin{pmatrix} E_{2m} & E_{2m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{2m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{2m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{2m} & E_{2m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{2m} & E_{2m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{2m} \end{pmatrix},$$

$$b \to T_b = \begin{pmatrix} E_{2m} & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{2m}(\alpha) \\ 0 & E_{2m} & E_{2m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{2m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{2m} & E_{2m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{2m} \end{pmatrix},$$

серія C)

$$a \to T_a = \begin{pmatrix} E_{2m} & E_{2m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{2m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{2m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{2m} & E_{2m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{2m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{2m} & E_{2m} \end{pmatrix},$$

$$b \to T_b = \begin{pmatrix} E_{2m} & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{2m}(\alpha) \\ 0 & E_{2m} & E_{2m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{2m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{2m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{2m} \end{pmatrix}?$$

де m — натуральне число, E_i — одинична клітина розміру $i \times i$, $J_i(\lambda)$ — клітина Жордана розмірності i з власним числом $\lambda \neq 0$.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота пов'язана із сучасними аспектами теорії матричних зображень скінченних груп.

Вивчаються матричні зображення четверної групи Клейна над алгебраїчно замкнутим полем характеристики 2. Описано зображення постійного жорданового типу для цієї групи та отримано узагальнення на матричні зображення локальних алгебр над полем довільної характеристики.

Досліджуються матричні зображення елементарних абелевих p-груп над алгебраїчно замкнутим полем характеристики p. Доведено, що групи $G = \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$ $(p > 2)$ і $G = \mathbb{Z}/2 \times \cdots \times \mathbb{Z}/2$ ($n > 2$ разів) є cJ-дикими. Отримано повний опис cJ-диких груп і показано, що в інших випадках група має cJ–скінченний тип або є cJ–дискретною. Вивчаються також зображення малих розмірностей.

Описана категорія матричних зображень постійного жорданового типу для четверної групи Клейна. Для довільної фіксованої розмірності обчислено загальне число нерозкладних матричних зображень четверної групи Клейна над скінченним полем, які мають постійний жордановий тип

Доведено існування нескінченного числа розмірностей, в кожній із яких для діедральних 2-груп існує нескінченне число нерозкладних попарно нееквівалентних зображень постійного чи непостійного рангу. Для нескінченної діедральної групи описана строго повна множина серій модулярних зображень відносно всіх зображень розмірності $n < 8$, які мають постійний ранг, та отримано наслідки для загальних серій. Для скінченних діедральних 2-груп доведено низку тверджень про серії нерозкладних зображень постійного рангу.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Бондаренко В. М. О некоторых ручных и диких матричных задачах постоянного ранга / В. М. Бондаренко, **И. В. Литвинчук** // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія матем. і інформ). – 2012. – вип. 23, №1. – С. 19–27.

2. Bondarenko V. M. The representation type of elementary abelian p-groups with respect to the modules of constant Jordan type / V. M. Bondarenko, **I. V. Lytvynchuk** // Algebra and Discrete Mathematics. – 2012. – vol. 14, no. 1. – P. 29–36.

3. Бондаренко В. М. О представлениях размерности $m < 4$ группы $(2, 2, ...2)$, имеющих постоянный ранг / В. М. Бондаренко, **И. В. Литвинчук** // Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – вип. 24, №2. – 2013. – С. 38-42.

4. Литвинчук И. В. Об одном свойстве представлений диедральной группы порядка 8 над полем характеристики 2 / **И. В. Литвинчук** // Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – вип. 29, №2. – 2016.– С. 55–58.

5. **Литвинчук И. В.** Об одном свойстве модулярных представлений диэдральных 2-групп / И. В. Литвинчук // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2017. – Том 15. – С. 24–28.

6. Бондаренко В. М. Описание категории представлений постоянного жорданового типа наименьшей нециклической группы / В. М. Бондаренко, **І. В. Литвинчук**// Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – вип. 31, №2. – 2017.– С. 37–47.

Тези конференцій:

7 Bondarenko V. M. On the representation type of elementary abelian p-groups with respect to the modules of constant Jordan type / V. M. Bondarenko, **I. V. Litvinchuk** // International Conference on Algebra (dedicated to 100th anniversary of S. N. Chernikov): Kyiv, August 20-26, 2012: Book of abstracts. – Kyiv, 2012. – P. 35.

8 Bondarenko V. M. The representation type of groups with respect to the representations of constant Jordan type / V. M. Bondarenko, **I. V. Lytvynchuk** // 9th International Algebraic Conference in Ukraine: L'viv, July 8-13, 2013: Book of Abstracts. – L'viv, 2013. – P. 36.

9 **Lytvynchuk I. V.** On representations of constant Jordan type for elementary abelian 2-groups / I. V. Lytvynchuk // International Algebraic Conference dedicated to 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin: Kyiv, July 7-12, 2014: Book of Abstracts. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2014. – P. 60.

10 **Lytvynchuk I. V.** On representations of small dimensions of constant Jordan type / I. V. Lytvynchuk // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd: Odessa, August 20-27, 2015: abstracts. – Odessa, 2015. – P. 73.

11 **Lytvynchuk I. V.** On one property of modular representations of the dihedral group of order 8 / I. V. Lytvynchuk // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko: Kyiv, July 3-7, 2017: Abstracts. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017. – P. 81.

АНОТАЦІЯ

Подолян І. В. *Матричні зображення постійного жорданового типу абелевих та діедральних груп.* – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України. — Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2019.

Дисертаційна робота пов'язана із сучасними аспектами теорії матричних зображень скінченних груп.

У модулярному випадку (коли характеристика поля ділить порядок групи) нерозкладних зображень (на відміну від класичного випадку), як правило, нескінченне число (з точністю до еквівалентності); в цьому випадку кажуть, що група має нескінченний зображувальний тип. Група нескінченного типу може бути ручною або дикою. В 1977 р. В. М. Бондаренко і Ю. А. Дрозд описали ручні і дикі групи в модулярному випадку.

У дисертації розглядається задача про опис зображень постійного жорданового типу для елементарних абелевих груп, а також, при деякому послабленні означення, для діедральних груп (такі зображення ввели Д. Ф. Карлсон, Е. М. Фрідлендер і Ю. Пєвцова).

У першому розділі дисертаційної роботи викладено основні початкові відомості.

У другому розділі вивчаються матричні зображення четверної групи Клейна над алгебраїчно замкнутим полем характеристики 2. Описано зображення постійного жорданового типу для цієї групи. Отримано узагальнення на матричні зображення локальних алгебр над полем довільної характеристики.

У третьому розділі описана категорія зображень постійного жорданового типу для четверної групи Клейна. Для довільної фіксованої розмірності обчислено загальне число нерозкладних матричних зображень четверної групи Клейна над скінченним полем, які мають постійний жордановий тип.

У четвертому розділі отримано критерій ручності для елементарних абелевих груп відносно зображень постійного жорданового типу. Описано такі зображення малих розмірностей для диких елементарних абелевих 2-груп.

У п'ятому розділі вивчаються однопараметричні сімейства нерозкладних зображень постійного рангу діедральних груп.

Ключові слова: група, поле, матричне зображення, еквівалентність, нерозкладність, характеристика поля, четверна група Клейна, діедральна група, постійний жордановий тип, неполіноміальний ріст, скінченний тип, ручна і дика група.

Подолян И. В. *Матричные представления постоянного жорданового типа абелевых и диэдральных групп.* – Квалификационный научный труд на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – алгебра и теория чисел. – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Министерство образования и науки Украины. — Институт математики Национальной академии наук Украины, Киев, 2019.

Диссертационная работа связана с современными аспектами теории матричных представлений конечных групп.

В модулярном случае (когда характеристика поля делит порядок группы) неразложимых представлений (в отличие от классического случая), как правило, бесконечное число (с точностью до эквивалентности) в этом случае говорят, что группа имеет бесконечный представленческий тип. Группа бесконечного типа может быть ручной или дикой. В 1977 В. М. Бондаренко и Ю. А. Дрозд описали ручные и дикие группы в модулярном случае.

В диссертации рассматривается задача об описании представлений постоянного жорданового типа для элементарных абелевых групп, а также, при некотором ослаблении определения, для диэдральных групп (такие представления ввели Д. Ф. Карлсон, Е. М. Фридлендер и Ю. Певцова).

В первом разделе диссертационной работы изложены основные начальные сведения.

Во втором разделе изучаются матричные представления четверной группы Клейна над алгебраически замкнутым полем характеристики 2. Описаны представления постоянного жорданова типа для этой группы. Получены обобщение для локальных алгебр над произвольным полем.

В третьем разделе описана категория представлений постоянного жорданова типа для четверной группы Клейна. Для фиксированной размерности вычислено общее число неразложимых матричных представлений четверной группы Клейна над конечным полем, которые имеют постоянный жордановый тип.

В четвертом разделе получен критерий ручности для элементарных абелевых групп относительно представлений постоянного жорданова типа. Описаны такие представления малых размерностей для диких элементарных абелевых 2-групп.

В пятом разделе изучаются однопараметрические семейства неразложимых представлений постоянного ранга диэдральных групп.

Ключевые слова: группа, поле, матричное представление, эквивалентность, неразложимости, характеристика поля, четверная группа Клейна, диэдральная группа, постоянный жордановый тип, неполиномиальний рост, конечный тип, ручная и дикая группа.

Podolyan I. V. *Matrix representations of constant Jordan type of abelian and dihedral groups.* – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.06 — "algebra and number theory". – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine. — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Kyiv, 2019.

The dissertation is connected with modern aspects of the theory of matrix representations of finite groups.

Matrix representations (or corresponding modules) of finite groups over fields and classical rings have been investigated for many decades. If we talk about the representations of finite groups over a field, then the theory of representations has 2 main directions: the classical one, when the field characteristic does not divide the order of the group (in particular, it is zero) and modular, when the field characteristic divides the order of the group.

In the first case, each matrix representation is decomposed into a direct sum of irreducible representations whose numbers are finite (in other terms, this means that the group algebra is semisimple).

In the second case, indecomposable representations, as a rule, are of an infinite number (up to equivalence); in this case one says that the group has an infinite representations type. A group of infinite type can be of tame or wild representation type (formally, groups of finite type belong to tame groups). Groups of tame or wild type are often referred to as tame and wild.

From the classification results of V. M. Bondarenko and the well-known theorems of Yu. A. Drozd, on tame and wild algebras, we have the following theorems obtained in 1977.

Theorem 1. *A non-cyclic finite p-group G is manual over a field k of the characteristics p if and only if $(G : G') \leq 4$ (or, less formally, $p = 2$ and $G/G' \cong (2, 2)$).*

Here G' denotes, as usual, the commutant of the group G.

Theorem 2. *The finite group G is manual over the field k of the characteristics p if and only if its arbitrary abelian p-subgroup of order greater than 4 is — cyclic.*

In 2008 D. F. Carlson, E. M. Friedlander and Yu. Pevsova, studying group schemes, introduced (in the modular case) the concept of modules of the constant Jordan type, and also established a number of important properties of such modules. This topic is concerned, in particular, with the well-known algebraists A. A. Suslin and D. Benson. As D. Benson has pointed out, one of the most important cases and, in particular, from the point of view of applications, is the case of elementary Abelian groups (for example, there is a deep connection with vector bundles).

The dissertation deals with the description of the representations of a constant Jordan type for elementary Abelian groups, as well as, with a certain easing of the definition, for dihedral groups.

In the first section of the dissertation, the basic initial information on the theory of categories, information from linear algebra and modern theory of matrix representations is presented.

In the second section we study the matrix representations of the Klein four-group over an algebraically closed field of characteristic 2. The representations of a constant Jordan type for this group are described. In particular, it is shown that in each dimension there is only a finite number of indecomposable, pairwise non-equivalent representations of a constant Jordan type. A generalization of matrix representations of local algebras over a field of arbitrary characteristic is obtained.

In the third section we describe the category of permanent Jordan type matrix representations for the Klein four-group. For an arbitrary fixed dimension, we calculate the total number of indecomposable matrix representations of the Klein four-group over a finite field, which have constant Jordan type.

In the fourth section a tameness criterion for elementary Abelian groups is obtained for matrix representations of a constant Jordan type. The matrix representations of a constant Jordan type of small dimensions for an arbitrary wild elementary Abelian 2 -group are described.

In the fifth section we prove the existence of an infinite number of dimensions, in each of which there exists an infinite number of indecomposable pairwise non-equivalent representations of constant rank for any finite dihedral 2 -group. It is proved that the number of one-parameter families of indeterminate representations of a constant rank. For an infinite dihedral group a strictly complete set of series of modular representations is described for all representations of the dimension $n < 8$, which have a constant rank, and the consequences for the general series are received.

Keywords: group, field, matrix representation, equivalence, indecomposebility, field characteristic, Klein four-group, dihedral group, constant Jordan type, non-polynomial growth, finite type, tame and wild group.