Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Подолян Ірина Віталіївна

УДК 512.562

ДИСЕРТАЦІЯ

Матричні зображення постійного жорданового типу абелевих та діедральних груп

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ____________ І. В. Подолян

Науковий керівник
Бондаренко Віталій Михайлович,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Київ – 2019

АНОТАЦІЯ

Подолян І. В. Матричні зображення постійного жорданового типу абелевих та діедральних груп . – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України. — Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2019.

Дисертаційна робота пов'язана із сучасними аспектами теорії матричних зображень скінченних груп.

Матричні зображення (чи відповідні модулі) скінченних груп над полями та класичними кільцями досліджувались протягом багатьох десятиліть. Якщо говорити про зображення скінченних груп над полем, то теорія зображень має 2 основні напрямки: класичний, коли характеристика поля не ділить порядок групи (зокрема, дорівнює нулю) і модулярний, коли характеристика поля ділить порядок групи.

У першому випадку кожне матричне зображення розкладається в пряму суму незвідних зображень, число яких скінченне (в інших термінах це означає, що групова алгебра є напівпростою).

У другому випадку, нерозкладних зображень, як правило, нескінченне число (з точністю до еквівалентності); в цьому випадку кажуть, що група має нескінченний зображувальний тип. Група нескінченного типу може бути ручного або дикого зображувального типу (формально групи скінченного типу належать до ручних груп). Групи ручного та дикого

зображувального типів часто називають просто ручними та дикими.

Із класифікаційних результатів В. М. Бондаренка та добре відомих теорем Ю. А. Дрозда про ручні та дикі алгебри маємо наступні теореми, отримані ними в 1977 р.

Теорема 1. *Нециклічна скінченна p-група G є ручною над полем k характеристики p тоді і лише тоді, коли $(G : G') \leq 4$ (або, менш формально, $p = 2$ і $G/G' \cong (2, 2)$).*

Тут G' позначає, як звичайно, комутант групи G.

Теорема 2. *Скінченна група G є ручною над полем k характеристики p тоді і лише тоді, коли довільна її абелева p-підгрупа порядку більшого 4-x — циклічна.*

У 2008 році Д. Ф. Карлсон, Е. М. Фрідлендер і Ю. Пєвцова, вивчаючи групові схеми, ввели (у модулярному випадку) поняття модулів постійного жорданового типу, а також установили низку важливих властивостей таких модулів. Цією тематикою займаються, зокрема, добре відомі алгебраїсти А. А. Суслін і Д. Бенсон. Як зазначив Д. Бенсон, одним із найважливіших випадків і, зокрема, з точки зору застосувань, є випадок елементарних абелевих груп (наприклад, існує глибокий зв'язок з векторними в'язками).

У дисертації розглядається задача про опис зображень постійного жорданового типу для елементарних абелевих груп, а також, при деякому послабленні означення, для діедральних груп.

У першому розділі дисертаційної роботи викладено основні початкові відомості із теорії категорій, відомості з лінійної алгебри та сучасної теорії матричних зображень.

У другому розділі вивчаються матричні зображення четверної групи Клейна над алгебраїчно замкнутим полем характеристики 2.

Нехай маємо матричне зображення $\lambda : G_{2,2} \to GL_n(k)$ (розмірності

$n \geq 1$) четверної групи Клейна $G_{2,2}$ над алгебраїчно замкнутим полем k характеристики 2. Матричне зображення λ ототожнюється з парою матриць (A, B), де $A = \lambda(a)$, $B = \lambda(b)$ і, отже, довільне матричне зображення групи $G_{2,2}$ задається парою матриць (A, B) зі співвідношеннями $A^2 = E$, $B^2 = E$, $AB = BA$, де E — одинична матриця.

Оскільки $(A + E)^2 = 0$ і $(B + E)^2 = 0$ (бо поле має характеристику 2), то для довільних $x, y \in k$ пов'язана із зображенням λ матриця $\lambda_{xy} = (A, B)_{xy} := x(A + E) + y(B + E)$ у квадраті також дорівнює нулю. Матричне зображення $\lambda = (A, B)$ називається зображенням постійного жорданового типу, якщо жордановий тип матриці $(A, B)_{xy}$ (тобто її нормальна форма Жордана) не залежить від коефіцієнтів x, y, які одночасно не дорівнюють нулю. У цьому випадку вказаний жордановий тип називається жордановим типом зображення λ і позначається через $JT(\lambda) = JT(A, B)$.

В другому розділі описано зображення постійного жорданового типу для четверної групи Клейна. Має місце наступне твердження:

Матричні зображення групи $G_{2,2}$ (над алгебраїчно замкнутим полем k характеристики 2) вигляду

$$a) \qquad a \to (1), \quad b \to (1),$$

$$b) \qquad a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c) \qquad a \to \left(\begin{array}{c|cc} E_s & E_s & \overline{0} \\ \hline & & \\ 0 & & E_{s+1} \\ & & \end{array}\right), \qquad b \to \left(\begin{array}{c|cc} E_s & \overline{0} & E_s \\ \hline & & \\ 0 & & E_{s+1} \\ & & \end{array}\right),$$

$$d) \qquad a \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{array}{c} E_s \\ \widetilde{0} \end{array} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right), \qquad b \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{array}{c} \widetilde{0} \\ E_s \end{array} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right),$$

де s — натуральне число, утворюють повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних матричних зображень постійного жорданового типу.

Тут через E_s позначається одинична матриця порядку s. Клітина Жордана порядку m з власним числом c позначається через $J_m(c)$. Через $\overline{0}$ і $\widetilde{0}$ позначається відповідно нульовий стовпець і нульовий рядок довільної матриці.

Як наслідок показано, що в кожній розмірності є лише скінченна кількість нерозкладних, попарно нееквівалентних зображень постійного жорданового типу. Отримано узагальнення на матричні зображення локальних алгебр над полем довільної характеристики.

У третьому розділі описана категорія матричних зображень постійного жорданового типу для четверної групи Клейна. Для довільної фіксованої розмірності обчислено загальне число нерозкладних матричних зображень четверної групи Клейна над скінченним полем, які мають постійний жордановий тип.

У четвертому розділі отримано критерій ручності для елементарних абелевих груп відносно матричних зображень постійного жорданового типу. Описано матричні зображення постійного жорданового типу малих розмірностей для довільної дикої елементарної абелевої 2-групи.

У п'ятому розділі вивчаються матричні зображення скінченних діедральних 2-груп $G_{2^m} = \langle a, b \,|\, a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^{2^{m-1}} = 1\rangle$ $(m \geq 2)$ та нескінченної діедральної групи $G_\infty = \langle a, b \,|\, a^2 = 1, b^2 = 1\rangle$ над нескінченним полем k характеристики 2, які мають постійний ранг (відносно твірних a і b).

Доведено існування нескінченного числа розмірностей, в кожній із яких для всіх діедральних 2-груп існує нескінченне число нерозкладних попарно нееквівалентних зображень постійного рангу чи непостійного рангу. Якщо говорити про постійний ранг, то за матриці, які забезпечують вказане твердження, можна взяти наступні матриці:

$$a \to T_a = \begin{pmatrix} E_m & E_m & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m & E_m \end{pmatrix},$$

$$b \to T_b = \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 & J_m(\lambda) \\ 0 & E_m & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix},$$

де $J_m(\lambda)$ — клітина Жордана розмірності m з власним числом $\lambda \neq 0$.

Зображення, які задаються такими парами матриць, нерозкладні та попарно нееквівалентні.

Для нескінченної діедральної групи описана строго повна множина серій модулярних зображень відносно всіх зображень розмірності $n < 8$, які мають постійний ранг, та отримано наслідки для загальних серій, які вказують явний вигляд розмірностей, в яких існує нескінченне число нерозкладних (нееквівалентних) зображень постійного рангу.

Ключові слова: група, поле, матричне зображення, еквівалентність, нерозкладність, характеристика поля, четверна група Клейна, діедральна група, постійний жордановий тип, постійний ранг, скінченний тип, ручна і дика група.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. Бондаренко В. М. О некоторых ручных и диких матричных задачах постоянного ранга / В. М. Бондаренко, И. В. Литвинчук // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія матем. і інформ). – 2012. – вип. 23, №1. – С. 19–27.

2. Bondarenko V. M. The representation type of elementary abelian p-groups with respect to the modules of constant Jordan type / V. M. Bondarenko, I. V. Lytvynchuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2012. – vol. 14, no. 1. – P. 29–36.

3. Бондаренко В. М. О представлениях размерности $m < 4$ группы $(2, 2, ...2)$, имеющих постоянный ранг / В. М. Бондаренко, И. В. Литвинчук // Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – вип. 24, №2. – 2013. – С. 38-42.

4. Литвинчук И. В. Об одном свойстве представлений диедральной группы порядка 8 над полем характеристики 2 / И. В. Литвинчук // Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – вип. 29, №2. – 2016.– С. 55–58.

5. Литвинчук И. В. Об одном свойстве модулярных представлений диэдральных 2-групп / И. В. Литвинчук // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2017. – Том 15. – С. 24–28.

6. Бондаренко В. М. Описание категории представлений постоянного жорданового типа наименьшей нециклической группы / В. М. Бондаренко, І. В. Литвинчук // Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – вип. 31, №2. – 2017.– С. 37–47.

7. Литвинчук І. В. Про жордановий тип π-точок для елементарних абелевих груп / І. В. Литвинчук // Чотирнадцята міжнародна наукова

конференція імені академіка М. Кравчука: Київ, 19-21 квітня 2012: Матеріали конференції II (Алгебра. Геометрія. Математичний та чисельний аналіз). – Київ, 2012. – С. 149.

8. Bondarenko V. M. On the representation type of elementary abelian p-groups with respect to the modules of constant Jordan type / V. M. Bondarenko, I. V. Litvinchuk // International Conference on Algebra (dedicated to 100th anniversary of S. N. Chernikov): Kyiv, August 20-26, 2012: Book of abstracts. – Kyiv, 2012. – P. 35.

9. Bondarenko V. M. The representation type of groups with respect to the representations of constant Jordan type / V. M. Bondarenko, I. V. Lytvynchuk // 9th International Algebraic Conference in Ukraine: L'viv, July 8-13, 2013: Book of Abstracts. – L'viv, 2013. – P. 36.

10. Lytvynchuk I. V. On representations of constant Jordan type for elementary abelian 2-groups / I. V. Lytvynchuk // International Algebraic Conference dedicated to 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin: Kyiv, July 7-12, 2014: Book of Abstracts. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2014. – P. 60.

11. Lytvynchuk I. V. On representations of small dimensions of constant Jordan type / I. V. Lytvynchuk // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd: Odessa, August 20-27, 2015: abstracts. – Odessa, 2015. – P. 73.

12. Lytvynchuk I. V. On one property of modular representations of the dihedral group of order 8 / I. V. Lytvynchuk // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko: Kyiv, July 3-7, 2017: Abstracts. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017. – P. 81.

ABSTRACT

Podolian I. V. Matrix representations of constant Jordan type of abelian and dihedral groups. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.06 — "algebra and number theory". – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine. — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2019.

The dissertation is connected with modern aspects of the theory of matrix representations of finite groups.

Matrix representations (or the corresponding modules) of finite groups over fields and classical rings have been investigated for many decades. If we talk about the representations of finite groups over a field, then the theory of representations has 2 main directions: the classical one, when the field characteristic does not divide the order of the group (in particular, it is equal to zero) and modular, when the field characteristic divides the order of the group.

In the first case, each matrix representation is decomposed into a direct sum of irreducible representations whose numbers are finite (in other terms, this means that the group algebra is semisimple).

In the second case, the number of indecomposable representations (up to equivalence) is, as a rule, infinite; in this case one says that the group has an infinite representations type. A group of infinite type can be of tame or wild representation type (formally, groups of finite type belong to tame groups). Groups of tame or wild type are often referred to as tame and wild.

From the classification results of V. M. Bondarenko and the well-known theorems of Yu. A. Drozd, on tame and wild algebras, we have the following theorems obtained them in 1977.

Theorem 1. *A non-cyclic finite p-group G is tame over a field k of characteristic p if and only if $(G : G') \leq 4$ (or, less formally, $p = 2$ and $G/G' \cong (2, 2)$).*

Here G' denotes, as usual, the commutant of the group G.

Theorem 2. *The finite group G is tame over a field k of characteristic p if and only if its arbitrary abelian p-subgroup of order greater than 4 is cyclic.*

In 2008 D. F. Carlson, E. M. Friedlander and Yu. Pevsova, studying group schemes, introduced (in the modular case) the concept of modules of the constant Jordan type, and also established a number of important properties of such modules. This topic is concerned, in particular, with the well-known algebraists A. A. Suslin and D. Benson. As D. Benson has pointed out, one of the most important cases and, in particular, from the point of view of applications, is the case of elementary abelian groups (for example, there is a deep connection with vector bundles).

The dissertation deals with the classifications of the representations of a constant Jordan type for elementary abelian groups, as well as, with a certain easing of the definition, for dihedral groups.

In the first section of the dissertation, the basic initial information on the theory of categories, information from linear algebra and modern theory of matrix representations is presented.

In the second section we study the matrix representations of the fourth Klein group over an algebraically closed field of characteristic 2.

Let we have a matrix representation $\lambda : G_{2,2} \to GL_n(k)$ (of dimension $n \geq 1$) of the fourth Klein group $G_{2,2}$ over an algebraically closed field of characteristic 2. The matrix representation λ is identified with the pair of matrices (A, B), where $A = \lambda(a)$, $B = \lambda(b)$ and, thus, any matrix representation of the group $G_{2,2}$ is defined by the pair of the matrices (A, B) with the relation $A^2 = E$, $B^2 = E$, $AB = BA$, where E denotes the identity matrix.

Since $(A+E)^2 = 0$ i $(B+E)^2 = 0$ (hence the field has characteristic 2), the matrix $\lambda_{xy} = (A, B)_{xy} := x(A+E) + y(B+E)$ in power 2 is equal to zero for any $x, y \in k$. The representation $\lambda = (A, B)$ is called a representation of the constant Jordan type if the Jordan type of the matrix $(A, B)_{xy}$ (i. e. its normal Jordan form) does not depend on the coefficients x, y which at the same time do not equal to zero. In this case, the specified Jordan type is called the Jordan type of the representation λ and is denoted by $JT(\lambda) = JT(A, B)$.

In the second section we classify the representations of the constant Jordan type for the fourth Klein group. The following statement takes place:

The matrix representations of the group $G_{2,2}$ (over an algebraically closed field k of characteristic 2) of the form

$$a) \qquad a \to (1), \quad b \to (1),$$

$$b) \qquad a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c) \qquad a \to \left(\begin{array}{c|cc} E_s & E_s & \overline{0} \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{E_{s+1}} \end{array}\right), \qquad b \to \left(\begin{array}{c|cc} E_s & \overline{0} & E_s \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{E_{s+1}} \end{array}\right),$$

$$d) \qquad a \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} E_s \\ \widetilde{0} \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right), \qquad b \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} \widetilde{0} \\ E_s \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right),$$

where s is a natural number, form a complete system of indecomposable pairwise non-equivalent matrix representations of constant Jordan type.

Here by E_s is denoted the identity matrix of order s. The Jordan block of order m with its own number c is denoted by $J_m(c)$. By $\overline{0}$ i $\widetilde{0}$ is denoted respectively, a zero column and a zero string of an arbitrary matrix.

As a consequence, it is shown that in each dimension there is only a finite number of indecomposable, pairwise non-equivalent representations of a constant Jordan type. A generalization on the matrix representations of local algebras over a field of arbitrary characteristic is obtained.

In the third section we describes the category of permanent Jordan type matrix representations for the fourth Klein group. For an arbitrary fixed dimension, we calculate the total number of indecomposable matrix representations of the fourth Klein group over a finite field, which have constant Jordan type

In the fourth section a tameness criterion for elementary abelian groups is obtained for matrix representations of a constant Jordan type. The matrix representations of a constant Jordan type of small dimensions for an arbitrary wild elementary abelian 2-group are described.

In the fifth section we study matrix representations of finite dihedral 2-groups $G_{2^m} = \langle a, b \,|\, a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^{2^{m-1}} = 1\rangle$ $(m \geq 2)$ and an infinite dihedral group $G_\infty = \langle a, b \,|\, a^2 = 1, b^2 = 1\rangle$ over an infinite field k of characteristic 2, that have constant rank (with respect to the generating element a and b).

We prove the existence of an infinite number of dimensions, in each of which there exists an infinite number of indecomposable pairwise non-equivalent representations of constant rank or non-constant rank for all dihedral 2-group. If we talk about the constant rank, then as the matrices that provides the indicated statement we can take the following matrices:

$$a \to T_a = \begin{pmatrix} E_m & E_m & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m & E_m \end{pmatrix},$$

$$b \to T_b = \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 & J_m(\lambda) \\ 0 & E_m & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix},$$

where $J_m(\lambda)$ denotes the Jordan block of dimension m with its own number $\lambda \neq 0$.

The representations that are given by such pairs of matrices are indecomposable and non-equivalent.

For an infinite dihedral group a strictly complete set of series of modular representations is described for all representations of the dimension $n < 8$, which have a constant rank, and the consequences for the general series are received, which indicate explicit forms of dimensions in which there exists an infinite number of indecomposable pairwise non-equivalent representations of constant rank.

Keywords: group, field, matrix representation, equivalence, indecomposability, field characteristic, fourth Klein group, dihedral group, constant Jordan type, constant rank, finite type, tame and wild group.

List of publications on the topic of the thesis

1. Bondarenko V. M. On some tame and wild matrix problems of constant rank / V. M. Bondarenko, I. V. Lytvynchuk // Nauk. Visn. Uzhgorod Univ. Ser. Mat. Inform. – 2012. – vol. 23, №1. – P. 19–27.

2. Bondarenko V. M. The representation type of elementary abelian p-groups with respect to the modules of constant Jordan type / V. M. Bondarenko, I. V. Lytvynchuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2012. – vol. 14, no. 1. – P. 29–36.

3. Bondarenko V. M. On representations of dimension $m < 4$ of the group $(2, 2, ...2)$ having constant rank / V. M. Bondarenko, I. V. Lytvynchuk // Nauk. Visn. Uzhgorod Univ. Ser. Mat. Inform. – vol. 24, №2. – 2013. – P. 38-42.

4. Lytvynchuk I. V. On one property of representations of the dihedral group of order 8 over a field of characteristic 2 / I. V. Lytvynchuk // Nauk. Visn. Uzhgorod Univ. Ser. Mat. Inform. – vol. 29, №2. – 2016.– P. 55–58.

5. Lytvynchuk I. V. On one property of modular representations of the dihedral 2-groups / I. V. Lytvynchuk // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2017. – vol. 15. – P. 24–28.

6. Bondarenko V. M. Description of the category of representations of constant Jordan type of the smallest noncyclic group / V. M. Bondarenko, I. V. Lytvynchuk // Nauk. Visn. Uzhgorod Univ. Ser. Mat. Inform. – vol. 31, №2. – 2017.– P. 37–47.

7. Lytvynchuk I. V. On Jordan type of π-points для elementary abelian groups / I. V. Lytvynchuk // Fourteenth International Scientific Kravchuk Conference: Kyiv, April 19-21, 2012: Materials of the

conference II (Algebra. Geometry. Mathematical and numerical analysis). – Kyiv, 2012. – P. 149.

8. Bondarenko V. M. On the representation type of elementary abelian p-groups with respect to the modules of constant Jordan type / V. M. Bondarenko, I. V. Litvinchuk // International Conference on Algebra (dedicated to 100th anniversary of S. N. Chernikov): Kyiv, August 20-26, 2012: Book of abstracts. – Kyiv, 2012. – P. 35.

9. Bondarenko V. M. The representation type of groups with respect to the representations of constant Jordan type / V. M. Bondarenko, I. V. Lytvynchuk // 9th International Algebraic Conference in Ukraine: L'viv, July 8-13, 2013: Book of Abstracts. – L'viv, 2013. – P. 36.

10. Lytvynchuk I. V. On representations of constant Jordan type for elementary abelian 2-groups / I. V. Lytvynchuk // International Algebraic Conference dedicated to 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin: Kyiv, July 7-12, 2014: Book of Abstracts. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2014. – P. 60.

11. Lytvynchuk I. V. On representations of small dimensions of constant Jordan type / I. V. Lytvynchuk // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd: Odessa, August 20-27, 2015: abstracts. – Odessa, 2015. – P. 73.

12. Lytvynchuk I. V. On one property of modular representations of the dihedral group of order 8 / I. V. Lytvynchuk // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko: Kyiv, July 3-7, 2017: Abstracts. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017. – P. 81.

Зміст

ВСТУП

Актуальність теми. Дисертаційна робота пов'язана із сучасними аспектами теорії матричних зображень скінченних груп.

Матричні зображення (чи відповідні модулі) скінченних груп над полями та класичними кільцями досліджувались протягом багатьох десятиліть. Важливі результати за цей час отримали С. Д. Берман, В. М. Бондаренко, П. М. Гудивок, Ю. А. Дрозд, Л. О. Назарова, А. В. Ройтер, Ш. Бреннер, А. Джонс, Ж. М. Маранда, І. Райнер, А. Хеллер, Д. Г. Хігман та інші математики (див., зокрема, [1] – [46]).

Якщо говорити про зображення скінченних груп над полем, то теорія зображень має 2 основні напрямки: класичний, коли характеристика поля не ділить порядок групи (зокрема, дорівнює нулю) і модулярний, коли характеристика поля ділить порядок групи.

У першому випадку кожне матричне зображення розкладається в пряму суму незвідних зображень, число яких скінченне (в інших термінах це означає, що групова алгебра є напівпростою).

У другому випадку завжди існують нерозкладні зображення, які не є незвідними і до того ж нерозкладних зображень, як правило, нескінченне число (з точністю до еквівалентності); в цьому випадку кажуть, що група має нескінченний зображувальний тип. До груп скінченного зображувального типу належать лише групи з циклічною силовською p-підгрупою (p – характеристика поля). В свою чергу група нескінченного типу може бути ручного або дикого зображувального типу. Група ручного типу — це така група, що (над алгебраїчним замиканням основного поля) в кожній розмірності всі її, з точністю до еквівалентності, нерозкладні зображення складаються із скінченного числа однопараметричних сімейств зображень і скінченного числа дискретних зображень (тобто, без параметру). Група дикого типу — це така група, у якої є двопараметричне сімейство нерозкладних зображень. В обох випадках мається на увазі, що при різних значеннях параметрів відповідні зображення нееквівалентні (відносно строгих означень, для матричних задач в загальному випадку, див. [47]). Зауважимо, що формально групи скінченного типу належать до ручних груп. Групи ручного та дикого зображувального типів часто називають просто ручними та дикими.

Із класифікаційних результатів В. М. Бондаренка (опису модулярних зображень діедральних та квазідіедральних груп [8, 9]) та добре відомих теорем Ю. А. Дрозда про ручні та дикі алгебри [47, 48] маємо наступні теореми, отримані в 1977 р. [13].

Теорема 1. *Нециклічна скінченна p-група G є ручною над полем k характеристики p тоді і лише тоді, коли $(G : G') \leq 4$ (або, менш формально, $p = 2$ і $G/G' \cong (2, 2)$).*

Тут G' позначає, як звичайно, комутант групи G.

Теорема 2. *Скінченна група G є ручною над полем k характеристики p тоді і лише тоді, коли довільна її абелева p-підгрупа порядку більшого 4-х — циклічна.*

Ці теореми дали додатковий поштовх для вивчення зображень у модулярному випадку, особливо для не p-груп (див., наприклад, [49] – [57].)

У 2008 році Д. Ф. Карлсон, Е. М. Фрідлендер і Ю. Пєвцова [58], вивчаючи групові схеми, ввели (у модулярному випадку) поняття модулів постійного жорданового типу, а також установили низку важливих властивостей таких модулів. Цією тематикою займалися добре відомі алгебраїсти А. А. Суслін і Д. Бенсон, а також інші математики ([59] – [69]). Як зазначив Д. Бенсон, одним із найважливіших випадків і, зокрема, з точки зору застосувань, є випадок елементарних абелевих груп [64] (наприклад, існує глибокий зв'язок з векторними в'язками).

Нехай $G = G_r = (g_1, \dots, g_r) \cong (Z/p)^r$ елементарна — абелева p-група і λ — матричне зображення групи G над алгебраїчно замкнутим полем k характеристики p ($g_1, \dots, g_r$ — канонічні твірні). Тоді матриці $\lambda(g_1 - 1), \dots, \lambda(g_r - 1)$ є нільпотентними, а значить нільпотентною є будь-яка їх лінійна комбінація $a_1\lambda(g_1 - 1) + \dots + a_r\lambda(g_r - 1)$. Матричне зображення λ називається зображенням постійного жорданового типу, якщо жорданова канонічна форма вказаної лінійної комбінації не залежить від вибору коефіцієнтів $a_1, \dots, a_r$ із поля k, серед яких принаймні один ненульовий. Якщо ця жорданова канонічна форма має жорданові блоки розміру $t_1, \dots, t_s$, тоді кажуть, що зображення λ має жордановий тип $JT(\lambda) = [t_1] \dots [t_s]$.

У загальному випадку (якщо говорити на мові модулів) це поняття вводиться в [58] наступним чином.

Нехай G — довільна скінченна група і k — поле характеристики $p > 0$. Розглядаються модулі над кільцем $k[t]/(t^p)$, де $k[t]$ — кільце поліномів від змінної t і (t^p) — ідеал, породжений елементом t^p. Кожний модуль над цим кільцем задається оператором ступеня нільпотентності p в скінченновимірному векторному просторі (або, що еквівалентно, квадратною матрицею ступеня нільпотентності p), а значить для нього визначений жордановий тип (див. вище). Для модуля M над груповою алгеброю kG і гомоморфізму (алгебр) $\alpha : k[t]/(t^p) \to kG$ позначимо через M_α відповідний модуль над $k[t]/(t^p)$ (тобто, $M_\alpha = M$ як векторні простори і для довільних $\lambda \in k[t]/(t^p)$, $m \in M_\alpha$, маємо $\lambda m = \alpha(\lambda)m$). В цій ситуації кажуть, що жордановий тип модуля M_α є жордановим типом α на M.

Для групи G її π-точкою називається лівий плоский гомоморфізм (алгебр) $\alpha : k[t]/(t^p) \to kG$, який факторизується через групову алгебру $kC \subset kG$ деякої абелевої p-підгрупи $C \subset G$. Модуль M над kG називається модулем постійного жорданового типу, якщо жордановий тип модуля

M_α не залежить від вибору π-точки.

У роботах по цій тематиці, окрім вивчення загальних властивостей, розглядається питання про існування модулів (чи зображень) постійного жорданового типу з числами $t_1 \ldots t_s$, що задовольняють деякі природні, наперед задані, умови та питання про розподіл жорданових типів.

У дисертації розглядається задача про опис зображень постійного жорданового типу для елементарних абелевих груп, а також, при деякому послабленні означення, для діедральних груп.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертаційної роботи пов'язана з науковими дослідженнями кафедри алгебри та математичної логіки механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка — тема 11БФ038-03 "Застосування алгебро-геометричних методів в теоріях груп, напівгруп, кілець, зображень до задач прикладної алгебри та захисту інформації" (номер державної реєстрації 0111U005264).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дослідження є опис елементарних абелевих груп, які мають скінченний, ручний та дикий типи відносно зображень постійного жорданового типу, опис категорії таких зображень у випадку скінченного типу та побудову однопараметричних сімейств матричних зображень постійного жорданового типу для діедральних груп.

Об'єктом дослідження є матричні зображення і категорії.

Предмет дослідження — зображувальний тип скінченних груп відносно зображень постійного жорданового типу і нерозкладні об'єкти та морфізми категорій таких зображень.

Методи дослідження. *Основними методами*, що використовуються при дослідженнях, є методи теорії зображень та метод матричних задач.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації отримано нові теоретичні результати, основними із яких є такі:

- Описана категорія зображень постійного жорданового типу для четверної групи Клейна та вказано властивості множин морфізмів.

- Для довільної фіксованої розмірності обчислено загальне число нерозкладних матричних зображень четверної групи Клейна над скінченним полем, які мають постійний жордановий тип.

- Отримано критерій ручності для елементарних абелевих груп відносно матричних зображень постійного жорданового типу.

- Описані матричні зображення постійного жорданового типу малих розмірностей для довільної дикої елементарної абелевої 2-групи.

- Доведено існування нескінченного числа розмірностей, в кожній із яких для скінченних діедральних 2-груп існує нескінченне число нерозкладних попарно нееквівалентних зображень постійного (відповідно непостійного) рангу.

- Для нескінченної діедральної групи описана строго повна множина серій модулярних зображень відносно всіх зображень розмірності $n < 8$, які мають постійний ранг. Вказано наслідки для загальних серій нерозкладних зображень скінченних діедральних 2-груп.

- Узагальнено низку отриманих результатів для матричних задач над полем довільної характеристики.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Отримані в ній результати, а також методи, за допомогою яких вони отримані, можуть бути використані в теорії зображень і теорії матричних задач.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно. У спільних з науковим керівником роботах останньому належать, як правило, постановки задач та загальні ідеї щодо методів їх розв'язання, а практична реалізація та ряд конкретних ідей належать здобувачеві.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи оприлюднено на:

— Чотирнадцятій Міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (м. Київ, 19-21 квітня 2012 р.);

— Міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження С. М.Чернікова (м. Київ, 20-26 серпня 2012 р.);

— IX Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (м. Львів, 8-13 липня 2013 р.);

— Міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження Л. А. Калужніна (м. Київ, 7-12 липня 2014 р.);

— IX Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 70-річчю Ю. А. Дрозда (м. Одеса, 20-27 серпня 2015 р.).

— XI Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 75-річчю В. В. Кириченка (м. Київ, 3-7 липня 2017 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 6 наукових роботах ([70] – [75]), всі із яких опубліковані у фахових виданнях, одна із яких [71] — у виданні, що відображається в наукометричній базі Scopus, та шість — у тезах конференцій ([76] – [81]).

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із анотації, вступу, п'ятьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Загальний обсяг дисертації — 184 сторінки. Обсяг основного тексту дисертації — 153 сторінки. Список використаних джерел займає 11 сторінок (93 найменування).

Автор щиро вдячний своєму науковому керівнику професору В. М. Бондаренку за постановку задач, цінні поради та постійну увагу до роботи.

Розділ 1

Попередні відомості

1.1. Категорії над полем

Теорія категорій — одна із віток алгебри, яка застосовується в різних областях науки. Початкові її аспекти викладені, наприклад, в [82].

У цьому параграфі приведено основні означення та деякі твердження, які стосуються категорій над полем.

Множина об'єктів категорії Φ позначається через $\mathrm{Ob}\,\Phi$, а множина її морфізмів — через $\mathrm{Mor}\,\Phi$; множина морфізмів з об'єкта X в об'єкт Y позначається через $\mathrm{Hom}_{\Phi}(X,Y)$ або $\Phi(X,Y)$. Замість $X \in \mathrm{Ob}\,\Phi$ часто пишуть $X \in \Phi$; запис $X \cong Y$ означає, що X і Y ізоморфні. Ізоморфізм називають ще оборотним морфізмом; інакше кажучи, морфізм $\alpha \in \Phi(X,Y)$ оборотний, якщо існує морфізм $\beta \in \Phi(Y,X)$, такий, що $\alpha\beta = 1_X$ і $\beta\alpha = 1_Y$ (1_Z позначає одиничний морфізм об'єкта Z).

Скелетом категорії називається її повна підкатегорія, що складається з представників всіх класів ізоморфних об'єктів.

Категорією над полем k або просто k-категорією називається довільна категорія Φ, всі множини морфізмів якої є (не обов'язково скінченними) векторними просторами над k, такими, що композиція морфізмів k-білінійна; тоді множини $\Phi(X,X)$ є k-алгебрами. Якщо всі простори $\Phi(X,Y)$ є скінченновимірними, то категорія Φ називається скінченновимірною. Елемент $X \in \Phi$ називається нульовим, якщо $\Phi(X,X) = 0$ або, що те ж саме, $1_X = 0$ (зауважимо, що в k-категорії не завжди існують нульові об'єкти).

Кожній категорії Φ можна природно зіставити k-категорію $k\Phi$, що називається k-лінійною оболонкою або k-лінеаризацією Φ; вона має ті ж об'єкти, що і категорія Φ, а $k\Phi(X, Y)$ — це векторний k-простір з базисом $\Phi(X, Y)$.

Двостороннім ідеалом (або просто ідеалом) $\mathcal{I}$ k-категорії Φ називається набір підпросторів $\mathcal{I}(X, Y) \subseteq \Phi(X, Y)$, де $X, Y \in \Phi$, таких, що $\lambda\alpha\gamma \in \Phi(W, Z)$ щораз, коли $\alpha \in \mathcal{I}(X, Y)$, $\lambda \in \Phi(W, X)$, $\gamma \in \Phi(Y, Z)$. З кожним ідеалом $\mathcal{I}$ зв'язаний фактор-k-категорія $\Phi/\mathcal{I}$ з тими ж об'єктами, що і категорія Φ, і множинами морфізмів $(\Phi/\mathcal{I})(X, Y) = \Phi(X, Y)/\mathcal{I}(X, Y)$ для всіх $X, Y \in \Phi$. Зауважимо, що якщо $1_X \in \mathcal{I}$, то об'єкт X категорії $\Phi/\mathcal{I}$ є нульовим.

Скінченна k-категорія Ψ називається спектроїдом, якщо її об'єкти попарно неізоморфні і всі алгебри ендоморфізмів $\Psi(X, X)$ локальні (локальна алгебра — це алгебра з $1 \neq 0$, всі необоротні елементи якої утворюють ідеал). Зауважимо, що умова про локальність всіх алгебр ендоморфізмів еквівалентна тому, що всі необоротні морфізми Ψ утворюють ідеал. Цей ідеал називається радикалом спектроїда Ψ; позначається він через $\mathcal{R}_\Psi$. Таким чином, маємо $\mathcal{R}_\Psi(X, Y) = \Psi(X, Y)$ для $X \neq Y$, а $\mathcal{R}_\Psi(X, X)$ — це максимальний ідеал (радикал) локальної алгебри $\Psi(X, X)$.

Адитивною k-категорією (або k-адитивною категорією) називається довільна k-категорія, що є адитивною (тобто має скінченні прямі суми і нульовий об'єкт). Відзначимо, що кожній k-категорії Φ можна природно зіставити адитивну k-категорію $\oplus\Phi$, що називається адитивною оболонкою Φ. Її об'єктами є скінченні послідовності $(X_1, \ldots, X_s)$ об'єктів з Φ, а морфізми $(X_1, \ldots, X_s) \to (Y_1, \ldots, Y_t)$ ототожнюються з "матрицями" $\mu = (\mu_{ij}) \in \bigoplus_{i,j} \Phi(X_i, Y_j)$; композиція морфізмів визначається правилом множення матриць.

Скінченна адитивна k-категорія називається категорією Крулля-

Шмідта, якщо кожний її об'єкт розкладається в пряму суму нерозкладних об'єктів з локальними алгебрами ендоморфізмів. Повну підкатегорію категорії Крулля-Шмідта Φ, що складається з представників всіх класів ізоморфізмів нерозкладних об'єктів, будемо позначають через Φ_0; очевидно, що категорія Φ_0 визначена однозначно з точністю до ізоморфізму категорій і є спектроїдом. Його природно називать головним спектроїдом категорії Φ.

1.2. Зображення сагайдаків

Нехай Q — сагайдак, тобто орієнтований граф. Множину вершин сагайдака Q будемо позначати через Q_0, а множину його стрілок — через Q_1; сагайдак Q називають скінченним, якщо Q_0 і Q_1 скінченні. Надалі розглядаються тільки скінченні сагайдаки. Початкову вершину стрілки λ (тобто вершину з якої виходить λ) позначаємо через $s(\lambda)$ і кінцеву вершину стрілки λ (тобто вершину в яку входить λ) позначаємо через $t(\lambda)$. Запис $\lambda : x \to y$ означає, що λ є стрілкою, такою, що $s(\lambda) = x$ і $t(\lambda) = y$.

Нехай $x, y \in Q_0$. Шляхом довжини $n \geqslant 1$ з початковою вершиною x і кінцевою вершиною y називається послідовність $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ стрілок α_i, така, що $s(\alpha_1) = x$, $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ для будь-якого $1 \leqslant i < n$ і $t(\alpha_n) = y$. Крім того, є шлях $\alpha = 1_x$ довжини 0 (для якого початкова і кінцева вершини збігаються з x). Початкова і кінцева вершини шляху α позначаються відповідно через $s(\alpha)$ і $t(\alpha)$. Два шляхи α і β називаються паралельними, якщо $s(\alpha) = s(\beta)$ і $t(\alpha) = t(\beta)$.

Кожному сагайдаку Q можна природно зіставити категорію його шляхів PQ, об'єктами якої є вершини сагайдака, а множина морфізмів $PQ(x, y)$ складається з всіх шляхів з початковою точкою x і кінцевою точкою y; композиція шляхів визначається природно.

Лінійна оболонка kPQ категорії PQ називається k-категорією шляхів сагайдака Q; вона позначається просто через k. У випадку, коли Q скінченний, можна розглянути алгебру $\mathcal{A}(Q)$ його шляхів; це скінченна алгебра, базис якої складається із всіх шляхів.

Зображення $\overline{U}$ сагайдака $Q = (Q_0, Q_1)$ над полем k складається зі скінченновимірних векторних k-просторів $U_i, i \in Q_0$, і лінійних відображень $\gamma_\alpha : U_x \to U_y$, де $\alpha : x \to y$ пробігає Q_1. Вектор $\overline{d} = (d_x), x \in Q_0$, де $d_x = \dim U_x$ $(i = 1, \ldots, n)$, називається вектором-розмірністю зображення $\overline{U}$. Морфізм φ з $\overline{U}$ в $\overline{U'}$ складається з лінійних відображень $\varphi_x : U_x \to U'_x, x \in Q_0$, таких, що для кожної стрілки $\alpha : x \to y$ діаграма

$$\begin{array}{ccc} U_x & \xrightarrow{\gamma_\alpha} & U_y \\ {\scriptstyle \varphi_x}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi_y} \\ U'_x & \xrightarrow{\gamma'_\alpha} & U'_y \end{array}$$

комутативна.

Для зображення $\overline{U}$ сагайдака Q покладемо $U = \{U_x \,|\, x \in Q_0\}$ і $\gamma = \{\gamma_\alpha \,|\, \alpha \in Q_1\}$. Використовуючи ці набори, $\overline{U}$ можна записати в короткій формі: $\overline{U} = (U, \gamma)$.

Категорія зображень сагайдака Q (яка є категорією Крулля-Шмідта) позначається через $Rep_k\, Q$ або просто $Rep\, Q$ (якщо поле k фіксоване).

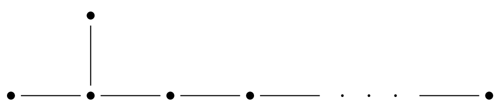
Очевидно, що між зображеннями сагайдака Q і k-категорії k є природна взаємно однозначна відповідність; більш того, їх категорії зображень ізоморфні. Звідси і зі сказаного в попередньому пункті випливає, що взаємно однозначна відповідність є між зображеннями скінченного сагайдака Q і зображеннями скінченної алгебри $\mathcal{A}(Q)$.

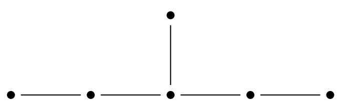
Кажуть, що сагайдак Q має скінченний тип над полем k, якщо категорія $Rep_k\, Q$ має, з точністю до ізоморфізму, скінченне число нерозкладних об'єктів, і ручного типу, якщо задача про опис об'єктів категорії $Rep_k\, Q$ є ручною (див. загальні означення в [47, 48]).

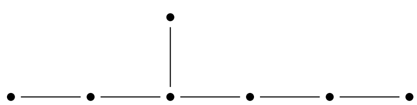
Сагайдаки скінченного типу описав П. Габріель у роботі [83]. Сформулюємо відповідний результат.

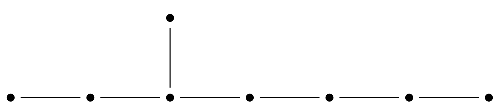
Теорема 1.1. *Сагайдак Q має скінченний тип над полем k тоді і лише тоді, коли він є неперетинним об'єднанням діаграм Динкіна (з довільним напрямком стрілок):*

A_n $(n \geq 1)$

D_n  $(n \geq 4)$

E_6 

E_7 

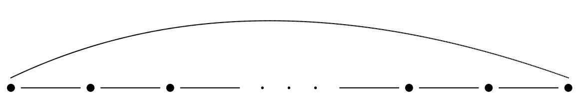
E_8 

(графи A_n та D_n мають n вершин).

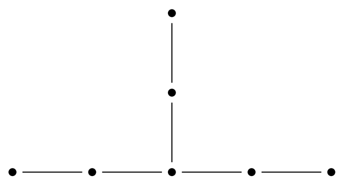
Отже, зв'язний сагайдак має скінченний тип лише тоді, коли він є діаграмою Динкіна (з довільним напрямком стрілок).

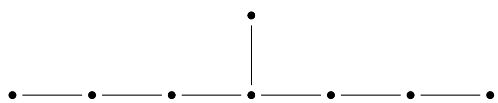
Критерій ручного типу для сагайдаків отримано в роботах [84], [85]. (зв'язний сагайдак нескінченного типу має ручний тип тоді і лише тоді, коли він є розширеною діаграмою Динкіна). Більш точно, має місце наступна теорема.

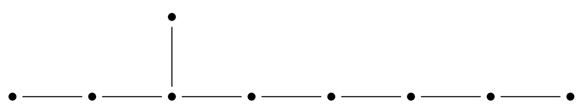
Теорема 1.2. *Зв'язний сагайдак нескінченного зображувального типу є ручним над полем k тоді і лише тоді, коли відповідний йому неорієнтований граф є розширеною діаграмою Динкіна, тобто має один із наступних виглядів:*

$\widehat{A}_n$  $(n \geq 1)$

$\widehat{D}_n$  $(n \geq 4)$

$\widehat{E}_6$ 

$\widehat{E}_7$ 

$\widehat{E}_8$ 

(*графи* $\widehat{A}_n$ *та* $\widehat{D}_n$ *мають* $n+1$ *вершину*).

Можна розглядати і зображення сагайдаків із співвідношеннями (див. загальний випадок [87, §14] і важливий природний випадок комутативних сагайдаків в [86]).

Зауважимо, що зображення скінченної групи над полем є частинним випадком зображень сагайдаків. А саме, потрібно розглянути сагайдак із однієї вершини і n петель, де n — порядок групи; якщо петлі занумерувати елементами групи, то співвідношення у групі автоматично переносяться на співвідношення сагайдака (замість всіх елементів групи можна взяти довільну систему твірних і повну систему співвідношень для них).

1.3. Елементарні перетворення матриць

При викладенні цього підрозділу притримуємося монографії [88].

Одиничну матрицю (довільного розміру) позначаємо через E; $E(d)$ позначає одиничну матрицю розміру $d \times d$. Ранг матриці M позначаємо $\operatorname{rank}(M)$, а транспоновану до M матрицю — M^T.

Нехай M — матриця розміру $m \times n$ над полем k. *Елементарними перетвореннями рядків* називають наступні перетворення:

i) множення i-го рядка на ненульовий елемент $x \in k$;

ii) додавання i-го рядка, помноженого на елемент $x \in k$, до j-го рядка ($i \neq j$);

iii) перестановка i-го та j-го рядків ($i \neq j$).

Перетворення типу i), ii) і iii) позначаємо відповідно $P_x(i)$, $P_x(i,j)$ і $P(i,j)$.

Аналогічним чином дають означення елементарних перетворень стовпців типу i), ii) і iii) (слово "рядок" потрібно замінити словом "стовпець"). Такі перетворення позначаємо відповідно $Q_x(i)$, $Q_x(i,j)$ і $Q(i,j)$.

Зауважимо, що перетворення типу iii) можна не розглядати, бо вони є композицією перетворень типу i) і ii).

Матрицю, отриману після застосування до M елементарного перетворення R, будемо позначати через M^R.

Лема 1.3. *Для кожного елементарного перетворення рядків (відповідно стовпців) R існує елементарне перетворення рядків (відповідно стовпців) R', таке, що*

$$(M^R)^{R'} = (M^{R'})^R = M;$$

перетворення R' називають оберненим до R і позначають R^{-1}.

Дійсно,

$$[P_x(i)]^{-1} = P_{1/x}(i), \qquad [Q_x(i)]^{-1} = Q_{1/x}(i),$$

$$[P_x(i,j)]^{-1} = P_{-x}(i,j), \qquad [Q_x(i,j)]^{-1} = Q_{-x}(i,j),$$

$$[P(i,j)]^{-1} = P(i,j), \qquad [Q(i,j)]^{-1} = Q(i,j).$$

Дві матриці однакового розміру називають *еквівалентними*, якщо від однієї з них можна перейти до другої за допомогою елементарних перетворень рядків і стовпців.

Добре відоме наступне твердження.

Твердження 1.4. *Довільна матриця M над полем k еквівалентна матриці*

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де E — одинична матриця розміру $r \times r$, $r = \operatorname{rank}(M)$. Якщо рядки (відповідно стовпці) матриці M лінійно незалежні, то достатньо застосовувати елементарні перетворення лише стовпців (відповідно рядків).

З елементарними перетвореннями рядків і стовпців пов'язані матриці спеціального вигляду, які називають елементарними.

Елементарними матрицями розміру $s \times s$ називають наступні матриці:

1) для довільного $i = 1, \ldots, s$ та $x \in k$ матриця

$$\mathcal{E}_x(i) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & x & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

де x стоїть на місці (i, i);

2) для довільних $i, j = 1, \ldots, s$, таких, що $i < j$, та $x \in k$ матриця

$$\mathcal{E}_x(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & x & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

де x стоїть на місці (i,j);

$2'$) для довільних $i,j = 1,\dots,s$, таких, що $i > j$, та $x \in k$ матриця

$$\mathcal{E}_x(i,j) = [\mathcal{E}_x(j,i)]^T \quad (\text{див. } 2));$$

3) для довільних $i,j = 1,\dots,s$, таких, що $i \neq j$, матриця

$$\mathcal{E}(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

де одиничні елементи, що перебувають поза межами головної діагоналі, стоять на місцях (i,j) і (j,i) (на головній діагоналі стоїть лише два нульових елемента).

Ми говоримо, що елементарна матриця $\mathcal{E}$ відповідає елементарному перетворенню рядків P (відповідно елементарному перетворенню стовпців Q) і навпаки, якщо відповідні їм додаткові символи в позначеннях збігаються, тобто коли має місце один із наступних випадків:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_x(i), \qquad P = P_x(i) \qquad (\text{відповідно } Q = Q_x(i));$$
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_x(i,j), \qquad P = P_x(i,j) \qquad (\text{відповідно } Q = Q_x(i,j));$$
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(i,j), \qquad P = P(i,j) \qquad (\text{відповідно } Q = Q(i,j)).$$

Безпосередньо з означень випливає наступна лема.

Лема 1.5. *Нехай R — елементарне перетворення матриці M і $\mathcal{E}$ — відповідна йому елементарна матриця. Тоді*

а) *якщо R — елементарне перетворення стовпців, то $M^R = M\mathcal{E}$;*

б) *якщо R — елементарне перетворення рядків, то $M^R = \mathcal{E}^T M$.*

Із лем 1.3, 1.5 і твердження 1.4 випливає наступна лема.

Лема 1.6. *Довільна оборотна матриця є добутком елементарних матриць.*

Із двох останніх лем і твердження 1.4 маємо наступне добре відоме твердження.

Твердження 1.7. *Матриця N еквівалентна матриці M тоді і лише тоді, коли існують оборотні матриці X і Y, такі, що $N = XMY$. При цьому у випадку, коли рядки (відповідно стовпці) матриці M лінійно незалежні, матрицю X (відповідно Y) можна вважати одиничною.*

Із леми 1.5 випливає, що взаємно оберненим елементарним перетворенням рядків (відповідно стовпців) відповідають взаємно обернені елементарні матриці. У випадку, коли M — квадратна матриця і P (відповідно Q) — елементарне перетворення її рядків (відповідно стовпців), ми називаємо перетворення P і Q *взаємно оберненими*, якщо взаємно оберненими є відповідні їм елементарні матриці. Легко побачити, що при цьому можливі такі варіанти:

$$P = P_x(i), \qquad Q = Q_{1/x}(i),$$

$$P = P_x(i,j), \qquad Q = Q_{-x}(j,i),$$

$$P = P(i,j), \qquad Q = Q(i,j).$$

1.4. Задача про пару самоанульовних операторів

Наведемо розв'язок задачі про класифікацію з точністю до подібності пар самоанульовних операторів $\mathcal{A}_1$ і $\mathcal{A}_2$ ($\mathcal{A}_1^2 = \mathcal{A}_2^2 = 0$), що діють у скінченновимірному векторному просторі над полем k (див. [91]).

При викладені цього результату ми притримуємося монографії [88].

Спочатку поле k вважаємо алгебраїчно замкненим.

Введемо пари операторів двох типів.

Позначимо через N_m ($m \geq 0$) множину послідовностей довжини m

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m),$$

де $\alpha_i \in \{-1, 1, -2, 2\}$ і до того ж парні і непарні числа чередуються. Покладемо

$$N = \bigcup_{m \in \mathbb{N} \cup 0} N_m.$$

Кожній послідовності

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) \in N_{n-1}\,(n > 0)$$

поставимо у відповідність пару взаємно анульовних операторів

$$P(\alpha) = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$$

наступним чином:

а) оператори $\mathcal{A}_1$ і $\mathcal{A}_2$ діють у векторному просторі $U = u_1k \oplus u_2k \oplus \ldots \oplus u_nk$;

б)

$$u_i\mathcal{A}_1 = \begin{cases} u_{i+1}, & \text{якщо} \;\; \alpha_i = 1, \\ u_{i-1}, & \text{якщо} \;\; \alpha_{i-1} = -1, \\ 0 & \text{в іншому разі,} \end{cases}$$

$$u_i\mathcal{A}_2 = \begin{cases} u_{i+1}, & \text{якщо} \;\; \alpha_i = 2, \\ u_{i-1}, & \text{якщо} \;\; \alpha_{i-1} = -2, \\ 0 & \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

Зауважимо, що N_0 містить лише порожню послідовність α_0 і $P(\alpha_0)$ складається з нульових операторів, що діють в одновимірному векторному просторі.

Розглянемо деякі приклади, в яких оператори записуємо в матричній формі.

Приклад 1. Якщо $\alpha = (1, 2, 1)$, то $P(\alpha)$ складається з операторів

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Якщо $\alpha = (2, -1, 2)$, то $P(\alpha)$ складається з операторів

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Якщо $\alpha = (1, 2, 1, 2, -1)$, то $P(\alpha)$ складається з операторів

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Якщо $\alpha = (1, 2, 1, -2, -1)$, то $P(\alpha)$ складається з операторів

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5. Якщо $\alpha = (1, 2, -1, -2, 1)$, то $P(\alpha)$ складається з операторів

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 6. Якщо $\alpha = (1, -2, 1, -2, 1)$, то $P(\alpha)$ складається з операторів

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 7. Якщо $\alpha = (1, -2, -1, -2, 1)$, то $P(\alpha)$ складається з операторів

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Переходимо до означення пар операторів другого типу.

Нехай $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — послідовність довжини $n = 2m$ із N_n ($m > 0$), $a \in k$ і $s \in \mathbb{N}$. Трійці (α, a, s) поставимо у відповідність пару самоанульовних операторів

$$P(\alpha, a, s) = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$$

наступним чином:

а) оператори $\mathcal{A}_1$ і $\mathcal{A}_2$ діють у векторному просторі $U = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_n$, де $U_i = u_i^1 k \oplus u_i^2 k \oplus \ldots \oplus u_i^s k$ $(1 \leq i \leq n)$;

б)

$$u_i^j \mathcal{A}_1 = \begin{cases} u_{i+1}^j, & \text{якщо } \ i \neq n, \ \alpha_i = 1, \\ a u_1^j + u_1^{j+1}, & \text{якщо } \ i = n, \ \alpha_n = 1, \ j \neq s, \\ a u_1^j, & \text{якщо } \ i = n, \ \alpha_n = 1, \ j = s, \\ u_{i-1}^j, & \text{якщо } \ i \neq 1, \ \alpha_{i-1} = -1, \\ a u_n^j + u_n^{j+1}, & \text{якщо } \ i = 1, \ \alpha_n = -1, \ j \neq s, \\ a u_n^j, & \text{якщо } \ i = 1, \ \alpha_n = -1, \ j = s, \\ 0 & \text{в іншому разі,} \end{cases}$$

$$u_i^j \mathcal{A}_2 = \begin{cases} u_{i+1}^j, & \text{якщо } \ i \neq n, \ \alpha_i = 2, \\ a u_1^j + u_1^{j+1}, & \text{якщо } \ i = n, \ \alpha_n = 2, \ j \neq s, \\ a u_1^j, & \text{якщо } \ i = n, \ \alpha_n = 2, \ j = s, \\ u_{i-1}^j, & \text{якщо } \ i \neq 1, \ \alpha_{i-1} = -2, \\ a u_n^j + u_n^{j+1}, & \text{якщо } \ i = 1, \ \alpha_n = -2, \ j \neq s, \\ a u_n^j, & \text{якщо } \ i = 1, \ \alpha_n = -2, \ j = s, \\ 0 & \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

Зауважимо, що якщо покласти $\alpha_0 = \alpha_n$, то $u_i^j \mathcal{A}_p = 0$ $(p = 1, 2)$ тоді і лише тоді, коли $\alpha_i \neq p$ і $\alpha_{i-1} \neq -p$.

Розглянемо деякі приклади (відносно додаткового поділу матриць див. відповідний випадок у пункті 1).

Приклад 8. Якщо $\alpha = (1, 2)$, то $P(\alpha, -1, 1)$ складається з операторів

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 9. Якщо $\alpha = (1, -2)$, то $P(\alpha, 2, 2)$ складається з операторів

$$\mathcal{A}_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \mathcal{A}_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Приклад 10. Якщо $\alpha = (2, 1)$, то $P(\alpha, -1, 3)$ складається з операторів

$$\mathcal{A}_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \mathcal{A}_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Приклад 11. Якщо $\alpha = (-1, -2)$, то $P(\alpha, 2, 3)$ складається з операторів

$$\mathcal{A}_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \mathcal{A}_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Приклад 12. Якщо $\alpha = (1, 2, 1, 2, 1, -2)$, то $P(\alpha, -1, 1)$ складається з операторів

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 13. Якщо $\alpha = (1, 2, -1, -2, -1, 2)$, то $P(\alpha, 3, 1)$ складається з операторів

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 14. Якщо $\alpha = (1, -2, 1, 2, -1, -2)$, то $P(\alpha, -2, 1)$ складається з операторів

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Введемо ще деякі означення і позначення.

Нехай $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in N_n$.

Через $-\alpha$ позначаємо послідовність із N_n

$$-\alpha_n, -\alpha_{n-1}, \ldots, -\alpha_1.$$

Якщо $n = 2m$, то означимо α_i для довільного цілого числа, вважаючи, що $\alpha_i = \alpha_j$ кожного разу, коли $i \equiv j (\mathrm{mod}\ n)$.

У цьому випадку для довільного $p \in \{1, 2, \ldots, 2m\}$ будемо позначати через $\alpha^{(p)}$ послідовність із N_n

$$(\alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{p+n-1}) = (\alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}),$$

а через $\tau(\alpha, p)$ — число $1 < i \leq p$, таких, що $\alpha_i \alpha_{i-1} < 0$. Послідовність α назвемо *періодичною*, якщо $\alpha^{(q)} = \alpha$ для деякого $q \neq 1$, і *неперіодичною* у супротивному випадку.

Множину всіх неперіодичних послідовностей із N_{2m} $(m > 0)$ позначимо через N_{2m}^0 і покладемо

$$N^0 = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} N_{2m}^0,$$

$$N_{2m}^{\circ}(k) = N_{2m}^0 \times (k \setminus 0) \times \mathbb{N},$$

$$N^{\circ}(k) = N^0 \times (k \setminus 0) \times \mathbb{N}.$$

Легко побачити, що

$$\mathrm{rank}(\mathcal{A}_1) + \mathrm{rank}(\mathcal{A}_2) = n - 1$$

для довільної пари операторів $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = P(\alpha)$, де

$\alpha \in N_{n-1}$, і

$$\mathrm{rank}(\mathcal{A}_1) + \mathrm{rank}(\mathcal{A}_2) = n$$

для довільної пари операторів $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = P(\alpha, a, s)$, де $(\alpha, a, s) \in N_n^0$, $n = 2m$.

Мають місце наступні теореми (для замкненого k).

Теорема 1.8. 1) *Нехай $P = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ — нерозкладна пара самоанульовних операторів, що діють в n-вимірному векторному просторі, і* *при цьому*

$$\mathrm{rank}(\mathcal{A}_1) + \mathrm{rank}(\mathcal{A}_2) < n.$$

Тоді P подібна парі операторів $P(\alpha)$ для деякої послідовності $\alpha \in N_{n-1}$.

2) *Пара операторів $P(\alpha)$ нерозкладна для будь-якої послідовності $\alpha \in N$.*

3) *Пари операторів $P(\alpha)$ і $P(\beta)$, де $\alpha, \beta \in N$, подібні тоді і лише тоді, коли $\alpha = \pm\beta$.*

Теорема 1.9. 1) *Нехай $P = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ — нерозкладна пара самоанульовних операторів, що діють в n-вимірному векторному просторі, і при цьому*

$$\mathrm{rank}(\mathcal{A}_1) + \mathrm{rank}(\mathcal{A}_2) = n.$$

Тоді P подібна парі операторів $P(\gamma)$ для деякої трійки $\gamma = (\alpha, a, s) \in N^\circ_{2m}(k)$, такої, що $2ms = n$.

2) *Пара операторів $P(\alpha, a, s)$ нерозкладна для будь-якої трійки $(\alpha, a, s) \in N^\circ(k)$.*

3) *Пари операторів $P(\gamma)$ і $P(\lambda)$, де $\gamma = (\alpha, a, s) \in N^\circ(k)$ і $\lambda = (\beta, b, t) \in N^\circ(k)$, подібні тоді і лише тоді, коли $s = t$, $\alpha = \beta^{(p)}$ або $\alpha^{(n)} = -\beta^{(p)}$ (n — довжина α) і при цьому $a = b$, якщо $\tau(\beta, p)$ парне, і $a = b^{-1}$, якщо $\tau(\beta, p)$ непарне.*

Нехай тепер k — довільне поле.

У цьому випадку введемо пари взаємно анульовних операторів

$$P(\alpha, f) = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2),$$

де $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — послідовність із T_n довжини $n = 2m > 0$ і $f = f(x) = x^s - a_{s-1}x^{s-1} - \ldots - a_0$ — поліном степеня $s > 0$ зі старшим коефіцієнтом 1 (щоб це означення було більш зрозумілим, див. відповідне місце в означенні пари $P(\alpha, f)$ у пункті 1):

а$'$) оператори $\mathcal{A}_1$ і $\mathcal{A}_2$ діють у векторному просторі $U = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_n$, де $U_i = u_i^1 k \oplus u_i^2 k \oplus \ldots \oplus u_i^s k$ $(1 \le i \le n)$;

б$'$)

$$u_i^j \mathcal{A}_1 = \begin{cases} u_{i+1}^j, & \text{якщо} \;\; i \ne n, \;\alpha_i = 1, \\ u_1^{j+1}, & \text{якщо} \;\; i = n, \;\alpha_n = 1, \; j \ne s, \\ \sum\limits_{r=0}^{s-1} a_r u_1^{r+1}, & \text{якщо} \;\; i = n, \;\alpha_n = 1, \; j = s, \\ u_{i-1}^j, & \text{якщо} \;\; i \ne 1, \;\alpha_{i-1} = -1, \\ u_n^{j+1}, & \text{якщо} \;\; i = 1, \;\alpha_n = -1, \; j \ne s, \\ \sum\limits_{r=0}^{s-1} a_r u_n^{r+1}, & \text{якщо} \;\; i = 1, \;\alpha_n = -1, \; j = s, \\ 0 & \text{в іншому разі,} \end{cases}$$

$$u_i^j \mathcal{A}_2 = \begin{cases} u_{i+1}^j, & \text{якщо} \;\; i \ne n, \;\alpha_i = 2, \\ u_1^{j+1}, & \text{якщо} \;\; i = n, \;\alpha_n = 2, \; j \ne s, \\ \sum\limits_{r=0}^{s-1} a_r u_1^{r+1}, & \text{якщо} \;\; i = n, \;\alpha_n = 2, \; j = s, \\ u_{i-1}^j, & \text{якщо} \;\; i \ne 1, \;\alpha_{i-1} = -2, \\ u_n^{j+1}, & \text{якщо} \;\; i = 1, \;\alpha_n = -2, \; j \ne s, \\ \sum\limits_{r=0}^{s-1} a_r u_n^{r+1}, & \text{якщо} \;\; i = 1, \;\alpha_n = -2, \; j = s, \\ 0 & \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

Розглянемо деякі приклади.

Приклад 15. Якщо $\alpha = (1, 2)$, то $P(\alpha, x+2)$ складається з операторів

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 16. Якщо $\alpha = (1, -2)$, то $P(\alpha, x^2 - 3)$ складається з операторів

$$\mathcal{A}_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \mathcal{A}_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Приклад 17. Якщо $\alpha = (2, 1)$, то $P(\alpha, x^3 + x^2 + x + 1)$ складається з операторів

$$\mathcal{A}_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \mathcal{A}_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Приклад 18. Якщо $\alpha = (1, 2, -1, -2)$, то $P(\alpha, x^2 - 5)$ складається з операторів

$$\mathcal{A}_1 = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \mathcal{A}_2 = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Легко побачити, що

$$\operatorname{rank}(\mathcal{A}_1) + \operatorname{rank}(\mathcal{A}_2) = n$$

для довільної пари операторів $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = P(\alpha, f)$, де $\alpha \in N_n$ $(n = 2m > 0)$ і $f(0) \neq 0$.

Як і в пункті 1, $k_0[x]$ позначає множину поліномів виду ψ^q, де $\psi = \psi(x)$ — незвідний над полем k поліном (зі старшим коефіцієнтом 1), відмінний від x, і $q \in \mathbb{N}$; для поліному $f(x) \in k_0[x]$ степеня d через $f^*(x)$ позначаємо поліном

$$[f(0)]^{-1}x^d f(x^{-1}).$$

Покладемо

$$\overline{N}_{2m}(k) = T_{2m}^0 \times k_0[x] \quad (m > 0),$$

$$\overline{N}(k) = N^0 \times k_0[x].$$

У випадку довільного поля k теорема 1.8 залишається справедливою, а замість теореми 1.9 має місце наступна теорема.

Теорема 1.10. 1) *Нехай $P = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ — нерозкладна пара самоанульовних операторів, що діють в n-вимірному векторному просторі, і при цьому*

$$\mathrm{rank}(\mathcal{A}_1) + \mathrm{rank}(\mathcal{A}_2) = n.$$

Тоді P подібна парі операторів $P(\gamma)$ для деякої двійки $\gamma = (\alpha, f) \in \overline{N}_{2m}(k)$, такої, що $2m\,\mathrm{deg} f = n$.

2) *Пара операторів $P(\alpha, f)$ нерозкладна для будь-якої двійки $(\alpha, f) \in \overline{N}(k)$.*

3) *Пари операторів $P(\gamma)$ і $P(\lambda)$, де $\gamma = (\alpha, f) \in \overline{N}(k)$ і $\lambda = (\beta, g) \in \overline{N}(k)$, подібні тоді і лише тоді, коли $\alpha = \beta^{(p)}$ або $\alpha^{(n)} = -\beta^{(p)}$ (n — довжина α) і при цьому $f = g$, якщо $\tau(\beta, p)$ парне, і $f = g^*$, якщо $\tau(\beta, p)$ непарне.*

Зауважимо, що коли $f(x) = (x - a)^s$, де $a \neq 0$, то пара $P(\alpha, f)$ подібна парі $P(\alpha, a, s)$.

1.5. Висновки до розділу

У цьому розділі викладено основні початкові відомості із теорії категорій, відомості з лінійної алгебри та сучасної теорії матричних зображень.

Розділ 2

Матричні зображення постійного жорданового типу четверної групи Клейна та їх зв'язок з іншими матричними задачами

У цьому розділі вивчаються матричні зображення постійного жорданового типу четверної групи Клейна. Виявлено зв'язок цієї задачі з іншими матричними задачами (як класичними, так і сучасними).

2.1. Основна теорема

2.1.1. Жордановий тип. Якщо нільпотентна матриця M над полем k складається із жорданових блоків порядку $t_1, t_2 \ldots, t_m > 0$, то будемо говорити, що вона має жордановий тип $JT(M) = [t_1][t_2] \ldots [t_m]$.

Наприклад, матриця

$$M_1 = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

має жордановий тип [3][2][1], а матриця

$$M_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

має жордановий тип $[3]^2[1]$.

Якщо нільпотентна матриця M не приведена до нормальної форми Жордана, то під жордановим типом M будемо розуміти жордановий тип її нормальної форми Жордана. Зрозуміло, що в запису $[t_1][t_2]\ldots[t_m]$ співмножники можна переставляти (як і клітини Жордана у відповідній нормальній формі). Зокрема, можна записати (див. вище матрицю M_1)

$$JT(M_1) = [3][2][1] = [3][1][2] = [2][3][1] = [2][1][3] = [1][3][2] = [1][2][3],$$

маючи на увазі, що нормальна форма визначається з точністю до перестановки жорданових блоків.

2.1.2. Формулювання теореми та наслідків із неї. Нехай

$$G_{2,2} := Z/2Z \times Z/2Z$$

— четверна група Клейна, тобто елементарна абелева 2-група з двома твірними. Позначимо ці твірні через a і b; тоді $a^2 = b^2 = 1, ab = ba$. Розглянемо матричне зображення

$$\lambda : G_{2,2} \to GL_n(k)$$

(розмірності $n \geq 1$) групи $G_{2,2}$ над алгебраїчно замкнутим полем k характеристики 2. Матричне зображення λ будемо ототожнювати з парою матриць (A, B), де $A = \lambda(a)$, $B = \lambda(b)$ і, отже, довільне матричне зображення групи $G_{2,2}$ задається парою матриць (A, B) зі співвідношеннями

$$A^2 = E,\ \ B^2 = E,\ \ AB = BA,$$

де E — одинична матриця.

Оскільки $(A+E)^2 = 0$ і $(B+E)^2 = 0$ (бо поле має характеристику 2), то для довільних $x, y \in k$ пов'язана із зображенням λ матриця

$$\lambda_{xy} = (A, B)_{xy} := x(A+E) + y(B+E)$$

у квадраті також дорівнює нулю. Матричне зображення $\lambda = (A, B)$ називається зображенням постійного жорданового типу, якщо жордановий тип матриці $(A, B)_{xy}$ не залежить від коефіцієнтів x, y, які одночасно не дорівнюють нулю (це наслідок означення зображень постійного жорданового типу для довільної скінченної групи [58]). У цьому випадку вказаний жордановий тип будемо називати жордановим типом зображення λ і позначатимемо його через $JT(\lambda) = JT(A, B)$.

Одиничну матрицю порядку s позначаємо через E_s. Через $\overline{0}$ і $\widetilde{0}$ позначаємо відповідно нульовий стовпець і нульовий рядок довільної матриці.

Теорема 2.1. *Матричні зображення групи $G_{2,2}$ (над алгебраїчно замкнутим полем k характеристики 2) вигляду*

a) $\quad a \to (1), \quad b \to (1),$

b) $$a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c) \qquad a \to \left(\begin{array}{c|cc} E_s & E_s & \overline{0} \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{E_{s+1}} \end{array}\right), \qquad b \to \left(\begin{array}{c|cc} E_s & \overline{0} & E_s \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{E_{s+1}} \end{array}\right),$$

$$d) \qquad a \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{array}{c} E_s \\ \widetilde{0} \end{array} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right), \qquad b \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{array}{c} \widetilde{0} \\ E_s \end{array} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right),$$

де s — натуральне число, утворюють повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних матричних зображень постійного жорданового типу.

Наслідок 2.2. *В кожній розмірності n група $G_{2,2}$ має, з точністю до еквівалентності, лише скінченне число $jt(n)$ нерозкладних зображень постійного жорданового типу. При цьому*

$jt(n) = 1$ для $n = 1$,

$jt(n) = 2$ для довільного непарного $n \neq 1$,

$jt(n) = 1$ для $n = 4$,

$jt(n) = 0$ для довільного парного $n \neq 4$.

Наслідок 2.3. *Жордановий тип $JT(A, B) = [t_1] \dots [t_m]$ нерозкладного зображення постійного жорданового типу групи $G_{2,2}$ може приймати лише значення $[1]$, $[2]^2$ і $[1][2]^s$, де s — натуральне число*

2.2. Пари повністю анульовних матриць постійного жорданового типу

Вважаємо поле k алгебраїчно замкнутим довільної характеристики.

2.2.1. Класична задача про пучок матриць. Задача про пучок матриць — це задача про приведення двох матриць A і B над k одного і того ж розміру $n \times m$ $(n, m \in \mathbb{N} \cup 0)$ одночасними елементарними перетвореннями рядків та стовпців; іншими словами, обидві матриці дозволяється множити зліва на оборотну матрицю X (розміру $n \times n$), а справа — на оборотну матрицю Y (розміру $m \times m$). Необхідно вказати канонічну форму відносно вказаного відношення еквівалентності. Аналогічно, як і у випадку про приведення однієї матриці перетвореннями подібності, це достатньо зробити для нерозкладної пари матриць, вказавши, при цьому, набір нерозкладних канонічних пар (тобто нерозкладних пар матриць найбільш простого вигляду, таких що між собою вони нееквівалентні, а будь-яка інша нерозкладна пара матриць еквівалентна одній з виділених).

Варто зазначити, що нерозкладність в цьому випадку визначається стандартним чином. Пара матриць (A, B) називається нерозкладною, якщо вона не є еквівалентною прямій сумі деяких пар матриць (A_1, B_1) і (A_2, B_2) відповідно розмірів $n_1 \times m_1$ і $n_2 \times m_2$, тобто парі вигляду $(A_1 \oplus A_2, B_1 \oplus B_2)$, де

$$A_1 \oplus A_2 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B_1 \oplus B_2 = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix};$$

при цьому, вважається, що $(n_1, m_1), (n_2, m_2) \neq (0, 0)$.

Нерозкладні канонічні пари матриць у цьому випадку добре відомі (див., наприклад, [92]).

1) $\quad A_1 = (E_s \ \overline{0}), \ \ B_1 = (\overline{0} \ E_s),$ де $s \geq 0$;

2) $\quad A_2 = \begin{pmatrix} E_s \\ \widetilde{0} \end{pmatrix}, \ \ B_2 = \begin{pmatrix} \widetilde{0} \\ E_s \end{pmatrix},$ де $s \geq 0$;

3) $\quad A_3 = E_s, \ \ B_3 = J_s(a),$ де $s > 0$;

4) $\quad A_4 = J_s(0), \ \ B_4 = E_s,$ де $s > 0$;

тут E_s означає одиничну матрицю розміру $s \times s$, $J_s(b)$, де $b \in k$, — клітина Жордана розміру $s \times s$ з власним числом b, а $\overline{0}$ і $\widetilde{0}$ — нульовий стовпець і нульовий рядок матриці, відповідно.

2.2.2. Опис пар повністю анульовних матриць постійного жорданового типу. Розглянемо задачу про описання з точністю до подібності пар матриць (A, B) над полем k таких, що

$$A^2 = B^2 = AB = BA = 0. \tag{2.1}$$

Виділивши (за допомогою допустимих перетворень рядків і стовпців матриць A і B) максимальне число нульових рядків в обох матрицях (тобто в матриці $(A \,|\, B)$) і використавши рівності 2.1 (враховуючи при цьому, що з матричної рівності $CD = 0$ з невиродженою по рядкам матрицею D випливає рівність $C = 0$), отримаємо, що пара матриць (A, B) подібна парі блочних матриць вигляду

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \overline{B} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

з лінійно незалежними рядками матриці $(A_0 \,|\, B_0)$.

Легко бачити, що пара матриць $(\overline{A}, \overline{B})$ подібна парі $(\overline{A}', \overline{B}')$ тоді і тільки тоді, коли пари матриць (A_0, B_0) і (A_0', B_0') еквівалентні (див. 2.1.1). Таким чином, наша задача зводиться до задачі про пучок матриць.

Теорема 2.4. *Пари матриць вигляду*

$\overline{0})$ $\quad \overline{A}_0 = (0), \quad \overline{B}_0 = (0),$

$\overline{1})$ $$\overline{A}_1 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_s \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad \overline{B}_1 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & J_s(a) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

$\overline{2})$ $$\overline{A}_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & J_s(0) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad \overline{B}_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_s \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\overline{3})\qquad \overline{A}_3 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & E_s & \overline{0} \\ \hline & & \\ 0 & 0 & \\ & & \end{array}\right), \quad \overline{B}_3 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & \overline{0} & E_s \\ \hline & & \\ 0 & 0 & \\ & & \end{array}\right),$$

$$\overline{4})\qquad \overline{A}_4 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} E_s \\ \widetilde{0} \end{matrix} \\ \hline & \\ 0 & 0 \\ & \end{array}\right), \quad \overline{B}_4 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} \widetilde{0} \\ E_s \end{matrix} \\ \hline & \\ 0 & 0 \\ & \end{array}\right),$$

де $s \geq 1$, *утворюють повну систему нерозкладних попарно неподібних пар матриць, що задовольняють рівностям* 2.1.

Вияснимо, які пари матриць, вказані в теоремі, мають постійний Жордановий тип. При доведенні подібності матриць будемо використовувати метод елементарних перетворень і нам знадобляться деякі позначення.

Нагадаємо, що *елементарними перетвореннями рядків* матриці M розміру $m \times n$ над полем k. називають наступні перетворення:

i) множення i-го рядка на ненульовий елемент $x \in k$;

ii) додавання i-го рядка, помноженого на елемент $x \in k$, до j-го рядка ($i \neq j$);

iii) перестановка i-го та j-го рядків ($i \neq j$).

Перетворення типу i), ii) і iii) позначаємо відповідно $P_x(i)$, $P_x(i,j)$ і $P(i,j)$.

Аналогічним чином дають означення елементарних перетворень стовпців типу i), ii) і iii) (слово “рядок” потрібно замінити словом “стовпець”). Такі перетворення позначаємо відповідно $Q_x(i)$, $Q_x(i,j)$ і $Q(i,j)$.

Пара матриць $\overline{0}$ має, очевидно, постійний жордановий тип, рівний [1].

Пара матриць $\overline{1}$ не є парою постійного жорданового типу, бо матриця $\overline{A}_1$ має жордановий тип $[2]^s$, а матриця $\overline{B}_1 - a\overline{A}_1$ має жордановий тип $[2]^{s-1}[1]^2$.

Пара матриць $\overline{2}$ не є парою постійного жорданового типу, бо матриця $\overline{A}_2$ має жордановий тип $[2]^{s-1}[1]^2$, а матриця $\overline{B}_2$ має жордановий тип $[2]^s$.

Доведемо тепер, що пара матриць $\overline{2}$ є парою постійного жорданового типу. Обидві матриці мають жордановий тип $[2]^s[1]$. Покажемо, що такий же жордановий тип має матриця $\overline{A}_3 + a\overline{B}_3$ при $a \neq 0$.

Розглянемо спочатку, для прикладу, випадки $s = 1, 2$.

У випадку $s = 1$

$$\overline{A}_3 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \overline{B}_3 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\overline{A}_3 + a\overline{B}_3 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & a \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Зробивши зі стовпцями останньої матриці елементарне перетворення $Q_{-a}(2,3)$ і обернене до нього елементарне перетворення $P_a(3,2)$ з її рядками, отримуємо матрицю $\overline{A}_3$. Це завершує доведення у випадку $s = 1$.

У випадку $s = 2$

$$\overline{A}_3 = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \overline{B}_3 = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\overline{A}_3 + a\overline{B}_3 = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Зробивши спочатку зі стовпцями останньої матриці елементарне перетворення $Q_{-a}(3,4)$ і обернене до нього елементарне перетворення $P_a(4,3)$ з її рядками, а потім (взаємно обернені) елементарні перетворення $Q_{-a}(4,5)$ і $P_a(5,4)$, отримуємо матрицю $\overline{A}_3$. Це завершує доведення у випадку $s = 2$.

Переходимо до загального випадку.

Покладемо $\overline{C}_3^{(0)} = \overline{A}_3 + a\overline{B}_3$. Маємо

$$\overline{C}_3^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|ccccccc} 0 & \ldots & 0 & 1 & a & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & a & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Зробивши зі стовпцями матриці $\overline{C}_3^{(0)}$ елементарне перетворення $Q_{-a}(s+1, s+2)$ і обернене до нього елементарне перетворення $P_a(s+2, s+1)$ з її рядками, отримуємо матрицю

$$\overline{C}_3^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|ccccccc} 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & a & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right),$$

яка відрізняється від матриці $\overline{C}_3^{(0)}$ лише відсутністю ненульового елемента на перетині 1-го рядка з $(s+2)$-им стовпцем. В матриці $\overline{C}_3^{(1)}$ $(s+2)$-ий рядок містить вже лише один ненульовий елемент (що є одиничним), а тому зробивши зі стовпцями цієї матриці елементарне перетворення $Q_{-a}(s+2, s+3)$ і обернене до нього елементарне перетворення $P_a(s+3, s+2)$ з її рядками, отримуємо матрицю, в якій уже нульовим є і елемент, що стоїть на перетині 2-го рядка з $(s+3)$-им стовпцем. Продовжуючи цей процес, після s-го кроку отримаємо матрицю $\overline{A}_3$. Це завершує доведення в загальному випадку.

Аналогічно доводиться, що парою постійного жорданового типу є пара матриць $\overline{4}$). При цьому основними елементарними перетвореннями, які перетворюють ненульові елементи матриці $\overline{A}_4 + a\overline{B}_4$ в нульові, є вже (на відміну вид випадку $\overline{3}$)), елементарні перетворення рядків, а обернені до них елементарні перетворення стовпців діють на нульових стовпцях.

Отже, доведена наступна теорема.

Теорема 2.5. *Парами матриць $\overline{0}$), $\overline{3}$) і $\overline{4}$) вичерпуються (з точністю до подібності) всі нерозкладні пари повністю анульовних матриць над алгебраїчно замкнутим полем k.*

2.3. Доведення теореми 2.1

Покладемо $A_0 - E$, $B_0 = B - E$. Тоді $A_0^2 = 0$, $B_0^2 = 0$ і $A_0B_0 = B_0A_0$.

Оскільки групова алгебра kG четверної групи Клейна $G = G_{2,2}$ над полем k характеристики 2 є фробеніусова і її єдиний мінімальний ідеал I, породжений елементом $ab + a + b + 1$, є ін'єктивним модулем, то для будь-якого нерозкладного зображення $a \to A, b \to B$ групи G, що не є регулярним, виконується рівність $A_0B_0 = 0$ (а значить і $B_0A_0 = 0$). Зображення групи $G_{2,2}$ над полем k (характеристики 2) вперше описано в роботі [1] (над алгебраїчно замкнутим полем) . А саме нерозкладні зображення, окрім регулярного, описані шляхом зведення до задачі про пучок матриць (таким чином, як це викладено в попередньому підрозділі для пари повністю анульовних матриць над полем довільної характеристики).

Отже, нерозкладні зображення четверної групи Клейна над полем k характеристики 2 вичерпуються, з точністю до ізоморфізму, такими зображеннями:

$$\hat{1})\qquad a \to (1), \quad b \to (1),$$

$$\hat{2})\qquad a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{3})\qquad a \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & E_s \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right), \quad b \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & \Psi_s(f) \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right),$$

$$\hat{4})\qquad a \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & J_s(0) \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array}\right), \quad b \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & E_s \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right),$$

$$\hat{5})\qquad a \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & E_s \quad \overline{0} \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array}\right), \qquad b \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & \overline{0} \quad E_s \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array}\right),$$

$$\hat{6})\qquad a \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} E_s \\ \widetilde{0} \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right), \qquad b \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} \widetilde{0} \\ E_s \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right),$$

де s — натуральне число, $\Psi_s(f)$ — клітина Фробеніуса розміру $s \times s$ з характеристичним поліномом $f = f(x)$, який дорівнює степені незвідного (над k) полінома $f_0 \neq x$.

Зауважимо, що зображення $\hat{2}$ — це регулярне зображення, а в зображенні $\hat{3}$ замість клітини Фробеніуса $\Psi_s(f)$ можна взяти довільну подібну їй матрицю. У випадку алгебраїчно замкнутого поля k замість матриць $\Psi_s(f)$ природно взяти клітини Жордана $J_s(a)$, де $a \neq 0$.

Саме цю класифікацію у випадку алгебраїчно замкнутого поля отримав В. А. Башев у роботі [1].

Отже, для доведення достатньої частини теореми 2.1 залишилося впевнитися, що регулярне зображення

$$a \to A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b \to B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

має постійний жордановий тип.

Матриці $A_0 = A - E$ і $B_0 = B - E$ мають жордановий тип $[2]^2$. Матриця

$$A_0 + aB_0 = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $a \neq 0$, також має жордановий тип $[2]^2$, бо зробивши з її стовпцями елементарне перетворення $Q_{-a}(3,2)$ і обернене до нього елементарне перетворення $P_a(3frm{-}e,3)$ з її рядками, отримуємо матрицю $\overline{A}_0$. Це завершує доведення.

2.4. Про опис зображень непостійного жорданового типу

Із сказаного в попередніх підрозділах випливає таке твердження (для алгебраїчно замкнутого поля характеристики 2):

Твердження 2.6. *Для четверної групи Клейна нерозкладні зображення непостійного жорданового типу вичерпуються, з точністю до еквівалентності, такими зображеннями:*

$$1)\qquad a \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & E_s \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right), \qquad b \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & J_s(\alpha) \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right),$$

$$2)\qquad a \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & J_s(0) \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array}\right), \qquad b \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & E_s \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right),$$

$J_s(\alpha)$ *— клітина Жордана розмірності s з власним числом α).*

Аналогічне твердження має місце і для пар повністю анульовних матриць.

2.5. Висновки до розділу

У цьому розділі вивчаються матричні зображення четверної групи Клейна над алгебраїчно замкнутим полем характеристики 2. Описано зображення постійного жорданового типу для цієї групи та отримано узагальнення на матричні зображення локальних алгебр над полем довільної характеристики. При отриманні цих результатів використовується класифікаційний результат про модулярні зображення четверної групи Клейна, отриманий В. А. Башевим в роботі [1].

Результати цього розділу опубліковані в роботах [70], [77], [78].

Розділ 3

cJ-зображувальний тип елементарних абелевих p-груп

Протягом всього розділу поле k вважається алгебраїчно замкнутим.

3.1. Зображення постійного жорданового типу

У розділі 2 говорилося про зображення постійного жорданового типу четверної групи Клейна. У цьому підрозділі приводиться загальне означення.

У 2008 році Д. Ф. Карлсон, Е. М. Фрідлендер і Ю. Певцова [58], вивчаючи групові схеми, ввели поняття модулів постійного жорданового типу, а також установили низку важливих властивостей таких модулів. Цією тематикою займалися добре відомі алгебраїсти А. А. Суслін і Д. Бенсон, а також інші математики ([59] – [69]). Як зазначив Д. Бенсон, одним із найважливіших випадків і, зокрема, з точки зору застосувань, є випадок елементарних абелевих груп [64] (наприклад, існує глибокий зв'язок з векторними в'язками).

Нехай $G = G_r = (g_1, \ldots, g_r) \cong (Z/p)^r$ елементарна абелева $p-$група і λ — матричне зображення групи G над алгебраїчно замкнутим полем k характеристики p. Тоді матриці $\lambda(g_1 - 1), \ldots, \lambda(g_r - 1)$ є нільпотентними, а значить нільпотентною є будь-яка їх лінійна комбінація $a_1\lambda(g_1 - 1) + \cdots + a_r\lambda(g_r - 1)$. Матричне зображення λ називається зображенням постійного жорданового типу, якщо жорданова канонічна форма вказаної лінійної комбінації не залежить від вибору коефіцієнтів $a_1, \ldots, a_r$ із поля k, серед яких принаймні один ненульовий. Якщо ця жорданова канонічна форма має жорданові блоки розміру $t_1, \ldots, t_s$, тоді кажуть, що зображення λ має жордановий тип $JT(\lambda) = [t_1] \ldots [t_s]$.

У загальному випадку (якщо говорити на мові модулів) це поняття вводиться в [58] наступним чином.

Нехай G — довільна скінченна група і k — поле характеристики $p > 0$. Розглядаються модулі над кільцем $k[t]/(t^p)$, де $k[t]$ — кільце поліномів від змінної t і (t^p) — ідеал, породжений елементом t^p. Кожний модуль над цим кільцем задається оператором ступеня нільпотентності p в скінченновимірному векторному просторі (або, що еквівалентно, квадратною матрицею ступеня нільпотентності p), а значить для нього визначений жордановий тип (див. вище). Для модуля M над груповою алгеброю kG і гомоморфізму (алгебр) $\alpha : k[t]/(t^p) \to kG$ позначимо через M_α відповідний модуль над $k[t]/(t^p)$ (тобто, $M_\alpha = M$ як векторні простори і для довільних $\lambda \in k[t]/(t^p)$, $m \in M_\alpha$ маємо $\lambda m = \alpha(\lambda)m$). В цій ситуації кажуть, що жордановий тип модуля M_α є жордановим типом α на M.

Для групи G її π-точкою називається лівий плоский гомоморфізм (алгебр) $\alpha : k[t]/(t^p) \to kG$, який факторизується через групову алгебру $kC \subset kG$ деякої абелевої p-підгрупи $C \subset G$. Модуль M над kG називається модулем постійного жорданового типу, якщо жордановий тип модуля M_α не залежить від вибору π-точки.

На завершення цього підрозділу нагадаємо деякі поняття, які використовувалися в основному означенні.

Модуль M над алгеброю A називається плоским, якщо із точності послідовності $E \to F \to G$ випливає точність послідовності

$$E \otimes_A \to F \otimes_A \to G \otimes_A .$$

Якщо B — A-алгебра, то кажуть, що B є плоскою алгеброю, якщо вона плоска як A-модуль. Гомоморфізм алгебр $f : C \to D$ називається плоским, якщо D як алгебра над C є плоскою.

3.2. Ручні та дикі групи

Кажуть, що група G має скінченний зображувальний тип над полем k, якщо число її нерозкладних зображень (з точністю до еквівалентності) скінченне. Згідно класичної теорії зображень такою є будь-яка скінченна група у випадку, коли характеристика поля не ділить порядок групи.

Нехай G – скінченна група і k – алгебраїчно замкнуте поле, характеристика p якого ділить порядок $|G|$ групи G (тоді $|G| > 1$ і $p > 0$). У цьому випадку зображення групи G над полем k називаються модулярними. Називається модулярним і сам цей випадок.

У модулярному випадку відома теорема Хігмана зводить вивчення зображень скінченної групи до вивчення зображень її силовської p-підгрупи. Циклічними p-групами вичерпуються всі p-групи скінченного зображувального типу (тобто, які мають, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень). В загальному випадку група має скінченний зображувальний тип лише тоді, коли її силовська p-підгрупа циклічна. В свою чергу група нескінченного зображувального типу може бути ручного або дикого зображувального типу. Група ручного типу — це така група, що в кожній розмірності всі її (з точністю до еквівалентності) нерозкладні зображення складаються із скінченного числа однопараметричних сімейств зображень і скінченного числа дискретних зображень (тобто, без параметру). Група дикого типу — це така група, у якої є двопараметричне сімейство нерозкладних зображень. В обох випадках мається на увазі, що при різних значеннях параметрів відповідні зображення нееквівалентні. Зауважимо, що формально групи скінченного типу належать до ручних груп. Групи ручного та дикого зображувального типів часто називають просто ручними та дикими. Згідно результатів, отриманих Ю. А. Дроздом роботах [47], [48], будь-яка група є або ручною, або дикою (причому одночасно бути ручною і дикою не може).

Приведемо строге означення дикої групи, користуючись означенням із [47]. Означення дається так, як це інтерпретовано в [71]).

Нагадаємо спочатку деякі класичні означення.

Тензорним добутком $A \otimes B$ двох матриць A і B (довільних розмірів) називається матриця, яка отримується із матриці A підстановкою замість кожного її елемента a_{ij} матриці $a_{ij}B$. Тензорним добутком $T \otimes B$ матричного зображення T групи G і квадратної матриці B називається таке зображення S групи G, що $S(g) = T(g) \otimes B$ для довільного $g \in G$.

Переходимо до більш сучасних означень.

Якщо A – матриця над кільцем поліномів $k[x]$, а B – матриця над k (яка однозначно задає матричне зображення кільця $k[x]$), то $A \otimes B$ позначає матрицю над k, яка отримується із матриці A заміною x на матрицю B, а скалярних елементів a_{ij} на $a_{ij}E$, де E – одинична матриця такого ж розміру, як і матриця B. Тензорним добутком $T \otimes B$ матричного зображення T групи G над $k[x]$ і квадратної матриці B над k називається таке зображення S групи G над k, що $S(g) = T(g) \otimes B$ для довільного $g \in G$. Як вже говорилося, матриця B задає деяке матричне зображення кільця $k[x]$. Якщо його позначити через φ_B, то природно $T \otimes B$ записувати як $T \otimes \varphi_B$.

Аналогічні позначення вводяться для матриць над вільною асоціативною k-алгеброю $k\langle x, y\rangle$ (або, іншими словами, кільцем некомутативних поліномів від змінних x, y).

Якщо A – матриця над кільцем $k\langle x, y\rangle$, а (B, C) – пара квадратних матриць однакового розміру над k (яка однозначно задає матричне зображення кільця $k\langle x, y\rangle$), то $A \otimes (B, C)$ позначає матрицю над k, яка отримується із матриці A заміною x на матрицю B, y на матрицю C а скалярних елементів a_{ij} на $a_{ij}E$, де E – одинична матриця такого ж розміру, як і матриці B і C. Тензорним добутком $T \otimes (B, C)$ матричного зображення T групи G над $k\langle x, y\rangle$ і пари квадратних матриць (B, C) над k називається таке зображення S групи G над k, що $S(g) = T(g) \otimes (B, C)$ для довільного $g \in G$. Як вже говорилося, пара матриць (B, C) задає деяке матричне зображення кільця $k\langle x, y\rangle$. Якщо його позначити через $\varphi_{(B,C)}$, то природно $T \otimes (B, C)$ записувати як $T \otimes \varphi_{(B,C)}$.

Переходимо безпосередньо до означення диких груп.

Будемо говорити, що матричне зображення γ групи G над алгеброю $\Sigma = k\langle x, y\rangle$ є *досконалим* якщо для будь-яких матричних зображень φ і φ' алгебри Σ над k, зображення $\gamma \otimes \varphi$ і $\gamma \otimes \varphi'$ групи G над k задовольняють наступні умови:

1) якщо $\gamma \otimes \varphi$ і $\gamma \otimes \varphi'$ еквівалентні, то φ і φ' еквівалентні;

2) $\gamma \otimes \varphi$ нерозкладне, якщо нерозкладним є φ

Зауважимо, що обидві умови в протилежному напрямку є очевидними.

Група G називається дикою над полем k, якщо вона має досконале зображення над алгеброю Σ. В цьому випадку також кажуть, що група має дикий зображувальний тип.

Аналогічним чином дається строге означення ручної групи.

Із класифікаційних результатів В. М. Бондаренка (опису модулярних зображень діедральних та квазідіедральних груп [8, 9]) та добре відомих теорем Ю. А. Дрозда про ручні та дикі алгебри [47, 48] маємо наступні теореми [13] (G' позначає комутант групи G).

Теорема 3.1. *Нециклічна скінченна p-група G є ручною над полем k характеристики p тоді і лише тоді, коли $(G : G') \leq 4$ (або, менш формально, $p = 2$ і $G/G' \cong (2, 2)$).*

Теорема 3.2. *Скінченна група G є ручною над полем k характери-*

стики p тоді і лише тоді, коли довільна її абелева p-підгрупа порядку більшого 4-х — циклічна.

На завершення цього підрозділу зауважимо, що інколи досконале зображення зручно брати (для спрощення його вигляду) над алгеброю $\widehat{\Sigma} = k\langle x, y, x^{-1}, y^{-1}\rangle$, а не $\Sigma = k\langle x, y\rangle$. Матричні зображення алгебри $\widehat{\Sigma}$ задаються не всіма парами квадратних матриць однакового розміру, а лише оборотними.

Таку заміну алгебр можна робити, бо алгебра $\widehat{\Sigma}$ є дикою, а саме зображення γ:

$$x \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; y \to \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

алгебри $\widehat{\Sigma}$ над Σ є досконалим (в такому ж сенсі, як вище викладено для груп).

3.3. Означення cJ-диких груп

Ми розглядаємо модулярні матричні зображення скінченних груп, тобто, поле k, над яким розглядаються зображення, має характеристику $p > 0$ і p ділить порядок групи. Будемо говорили, що група G є *cJ-дикою* (відповідно *cJ-ручною*), або має *cJ-дикий зображувальний тип* (відповідно *cJ-ручний зображувальний тип*), якщо задача про опис її матричних зображень постійного зображувального типу є дикою (відповідно ручною).

Строго кажучи, група G є *cJ-дикою*, якщо вона має досконале зображення γ над алгеброю $\Sigma = k\langle x, y\rangle$ таке, що виконується наступна умова:

3) зображення $\gamma \otimes \varphi$ (групи G над k) має постійний жордановий тип для довільного зображення φ алгебри Σ над k.

Досконале зображення, що задовольняє цій умові, називається cJ-досконалим . Частинним випадком cJ-ручних груп є групи cJ-скінченного (зображувального) типу, коли число нерозкладних зображень постійного зображувального типу взагалі скінченне.

3.4. Матричні зображення постійного жорданового типу елементарної абелевої групи порядку 2^n, $n > 2$

3.4.1. Початковий аналіз Нехай маємо елементарну абелеву групу $G = G_n = \mathbb{Z}/2 \times \cdots \times \mathbb{Z}/2$ ($n > 2$ разів). Природні твірні елементи групи G позначимо через $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Будемо розглядати матричні зображення групи G над полем характеристики 2, вважаючи, що $n > 2$ (випадок $n = 2$ розглянуто в розділі 2). За теоремою 1 із вступу (дисертації) група G в цьому випадку є дикою. Легко показати (користуючись методом попереднього підрозділу), що зображення

$$g_1 \to \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 \to \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_3 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \cdots, g_n \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

над алгеброю $\Sigma = k\langle x, y\rangle$ є досконалим. Але, очевидно, це зображення не є cJ-досконалим. Цей факт не виглядає дивним, бо не кожне зображення групи G над полем k має постійний жордановий тип.

Розглянемо ще матричні зображення малих розмірностей.

Матричне зображення групи G називається одиничним, якщо всі його матриці одиничні. Очевидно, що одиничне зображення будь-якої розмірності має постійний жордановий тип.

В розмірності 1 група G має, очевидно, лише одиничне зображення. В розмірності 2 група G має вже нескінченно багато зображень (навіть з точністю до еквівалентності). Це випливає із викладеного в розділі 2 (бо група G має фактор-групу, ізоморфну четверній групі Клейна). Більш того, група G має в розмірності 2 n-параметричне сімейство (попарно нееквівалентних) зображень:

$$g_1 \to \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; g_2 \to \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; g_3 \to \begin{pmatrix} 1 & a_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \cdots, \; g_n \to \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — довільні елементи поля k.

В розмірності 3 група G має ще більше зображень.

Переходимо до опису зображень постійного жорданового типу розмірності $m < 4$. З формальних міркувань в розгляд включається випадок $n = 2$.

Теорема 3.3. *Матричні зображення $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ розмірності $m < 4$ групи G_n, $n > 1$, над полем k характеристики 2, що мають постійний жордановий тип, вичерпуються (з точністю до еквівалентності) наступними зображеннями:*

1) *$n \geq 2$, $m = 1, 2, 3$ і $A_1 = E_m$, $A_2 = E_m, \ldots, A_n = E_m$, де E_m — одинична матриця розміру $m \times m$;*

2) *$n = 2$ $m = 3$ і*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

3) *$n = 2$ $m = 3$ і*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При цьому нерозкладними є всі зображення, окрім зображень вигляду 1) *при $m > 1$.*

Зауважимо, що випадок $n = 1$ не розглядається, оскільки всі зображення (циклічної) групи G_1 мають постійний жордановий тип.

Переходимо до доведення теореми.

Нам знадобиться наступний наслідок із теореми 2.1 (див. розділ 2).

Наслідок 3.4. *Матричні зображення розмірності $m < 4$ групи G_2 над полем k (характеристики 2), що мають постійний жордановий тип, вичерпуються, з точністю до еквівалентності, наступними зображеннями $A = (A_1, A_2)$:*

a') $m = 1, 2, 3$ і $A_1 = E_m$, $A_2 = E_m$;

b') $m = 3$ і

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

c') $m = 3$ і

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нам також знадобиться наступна лема (для матриць над довільним полем).

Лема 3.5. *Нехай*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad і \;\; C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

комутуючі між собою матриці, причому C — нільпотентна матриця рангу 1. Тоді

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 0 & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $c_{12}c_{23} = 0$.

Доведення. Позначимо через $(i.j)$ скалярну рівність, яка отримується із матричної рівності $BC = CB$ прирівнюванням елементів матриць BC і CB, які стоять на перетині i-го рядка і j-го стовпця.

Легко бачити, що ці рівності мають наступний вигляд:

$$\begin{array}{rrr} c_{31} = 0 \ (1.1); & c_{32} = 0 \ (1.2); & c_{33} = c_{11} \ (1.3); \\ 0 = 0 \ (2.1); & 0 = 0 \ (2.2); & 0 = c_{21} \ (2.3); \\ 0 = 0 \ (3.1); & 0 = 0 \ (3.2); & 0 = c_{31} \ (3.3). \end{array}$$

Звідси маємо

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{11} \end{pmatrix}.$$

Оскільки C — нільпотентна матриця, то $c_{11} = c_{22} = 0$, а оскільки ранг C дорівнює 1, то $c_{12}c_{23} = 0$. □

Переходимо тепер безпосередньо до доведення теореми 3.3.

Через $\overline{M}$, де M — матриця розміру $m \times m$, будемо позначати матрицю $M + E_m$.

Очевидно, що якщо матричне зображення групи G_n має постійний жордановий тип, то його обмеження на довільну неодиничну підгрупу $H \subset G_n$, породжену деякими g_i, також має постійний жордановий тип. Тоді за наслідком 3.4 для зображень групи G_n маємо:

1) якщо $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ — зображення постійного жорданового типу розмірності $m < 4$, то $m = 1$ або $m = 3$;

2) якщо $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ — зображення постійного жорданового типу розмірності $m < 4$ і при цьому $A_i = E_m$ для деякого i, то $A_i = E_m$ для всіх $i \in \{1, \ldots, n\}$;

3) якщо $n > 2$ і $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ — зображення постійного жорданового типу розмірності 3 таке, що його обмеження на підгрупу $G_{12} = \{g_1, g_2\}$ еквівалентне зображенню вигляду $b')$ (відповідно $c')$), то

обмеження A на довільну підгрупу $G_{ij} = \{g_i, g_j\}$, $i \neq j$, також еквівалентне зображенню вигляду $b')$ (відповідно $c')$).

Отже, для доведення теореми достатньо показати, що група G_3 не має матричного зображення постійного жорданового типу, обмеження якого на підгрупу $G_{12} = \{g_1, g_2\}$ має вигляд $b')$ або $c')$.

Припустимо протилежне і розглянемо спочатку випадок, коли існує зображення $A = (A_1, A_2, A_3)$ групи G_3 таке, що його обмеження (A_1, A_2) на підгрупу G_{12} має вигляд $b')$. Тоді

$$\overline{A_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{A_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{A_3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Із леми 3.5 при $B = \overline{A_2}$, $C = \overline{A_3}$ маємо, що

$$\overline{A_3} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $a_{12}a_{23} = 0$.

Далі, із рівності $\overline{A_1}\ \overline{A_3} = \overline{A_3}\ \overline{A_1}$ маємо (враховуючи новий вигляд матриці $\overline{A_3}$)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

звідки $a_{23} = 0$. Значить

$$\overline{A_3} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а тоді матриця $a_{12}\overline{A_1} + a_{13}\overline{A_2} + \overline{A_3}$ є нульовою, що протирічить тому, що зображення A має постійний жордановий тип.

Припустимо тепер, що існує зображення $A = (A_1, A_2, A_3)$ групи G_3 таке, що його обмеження (A_1, A_2) на підгрупу G_{12} має вигляд c'). Тоді

$$\overline{A_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{A_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{A_3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Із леми 3.5 при $B = \overline{A_1}$, $C = \overline{A_3}$ маємо, що

$$\overline{A_3} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $a_{12}a_{23} = 0$.

Далі, із рівності $\overline{A_2}\ \overline{A_3} = \overline{A_3}\ \overline{A_2}$ маємо

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{12} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

звідки $a_{12} = 0$. Значить

$$\overline{A_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а тоді матриця $a_{13}\overline{A_1} + a_{23}\overline{A_2} + \overline{A_3}$ є нульовою, що протирічить тому, що зображення A має постійний жордановий тип.

Друга частина теорем 3.3 випливає із теореми 2.1.

Із теореми 3.3 випливає, що для групи G_n при $n > 2$ зображеннями постійного жорданового типу розмірності $m < 4$ є лише одиничні зображення. Але незважаючи на те що для малих розмірностей, будова зображень постійного жорданового типу набагато простіша, в загальному випадку задача про опис таких зображень все одно є дикою (див. наступний пункт).

3.4.2. cJ-дикість Вважаємо, що k — поле характеристики 2.

Твердження 3.6. *Група* $G = \mathbb{Z}/2\times\cdots\times\mathbb{Z}/2$ *($n > 2$ разів) є* cJ*-дикою.*

Доведення. Розглянемо наступне матричне зображення γ групи G над алгеброю $\widehat{\Sigma} = k\langle x, y, x^{-1}, y^{-1}\rangle$:

$$\gamma(g_i - 1) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$1 \le i \le n$, з нульовими діагональними блоками розмірів 2×2 та $(n+1)\times(n+1)$, і

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0_i \; E \; 0'_i \end{pmatrix}$$

для $i \ne n$,

$$\gamma_n = \begin{pmatrix} 0_n \; 0'_n \; S \end{pmatrix},$$

де

$$S = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix};$$

тут E — одинична матриця розміру 2×2 і 0_i, 0_n (відповідно $0'_i$, $0'_n$) — нульові матриці розміру $2\times(i-1)$ (відповідно $2\times(n-i)$).

Доведемо, що γ є cJ-досконалим зображенням.

Легко бачити, що зображення $\gamma\otimes\varphi$, де φ — зображення алгебри $\widehat{\Sigma}$ розмірності s, має постійний жордановий тип $[2]^{2s}[1]^{(n-1)s}$ (приймаючи до уваги оборотність матриць $\varphi(x)$ і $\varphi(y)$).

Нехай φ, φ' — зображення алгебри $\widehat{\Sigma}$ однієї і тієї ж розмірності s і нехай $A_q = (\gamma\otimes\varphi)(g_q - 1)$, $A'_q = (\gamma\otimes\varphi')(g_q-1))$, де $q = 1, 2, \ldots, n$.

Розглянемо матричні рівності

$$A_qX = XA'_q, \;\; q = 1, 2, \ldots n,$$

з усіма їхніми матрицями як блоковими матрицями з блоками розміру $s\times s$. Рівність $(A_qX)_{ij} = (XA'_q)_{ij}$ відповідних блоків матриць A_qX і XA'_q позначається через $(q.ij)$; $q\in\{1, 2, \ldots, n\}, i, j \in \{1, 2, \ldots, n+3\}$.

Знову будемо писати $[ij]$ замість X_{ij}. Із рівностей

$(1.23) : [43] = [21], \quad (2.13) : [43] = 0,$

$(1.j3) : 0 = [j1]$ and $\quad (1.j4) : 0 = [j2]$ for $j = 3, \dots, n+3,$

$(i.1j) : [i+2, j] = 0$ for $i = 3, \dots, n-1, j = 3, \dots, i+1$ (if $n > 3$),

$(n-1.2j) : [n+2, j] = 0$ for $j = 3, \dots, n,$

$(n-1.2, n+1) : [n+2, n+1] = [21],$

$(n.2, n+2) : \varphi(y)[n+3, n+2] = 0$ ($\varphi(y)$ is invertible),

$(n.1j) : [n+3, j] + [n+2, j] = 0$ for $j = 3, \dots, n+1$

випливає, що X є блоковою верхньо-трикутною матрицею.

Далі, із рівностей

$(1.13) : [33] = [11], \;\; (1.24) : [44] = [22], \;\; (2.14) : [44] = [11],$

$(2.25) : [55] = [22], \;\; (n.1, n+3) : [n+3, n+3] = [11],$

$(i.2, i+3) : [i+3, i+3] = [22]$ for $i = 3, \dots, n-1$ (if $n > 3$)

випливає, що всі діагональні блоки матриці X рівні між собою.

Тоді рівності $(n.1, n+2) : \varphi(x)[n+2, n+2] + [n+3, n+2] = [11]\,\varphi'(x)$ і $(n.2, n+3) : \varphi(y)[n+3, n+3] = [21] + [22]\varphi'(y)$ будуть мати вигляд $\varphi(x)[11] = [11]\varphi'(x)$ і $\varphi(y)[11] = [11]\varphi'(y)$, і доведення завершується таким же чином, як і доведення твердження 3.8. $\square$

Враховуючи сказане в заключній частині підрозділу 3.2 та вигляд cJ-досконалого зображення над алгеброю $k\langle x, y, x^{-1}, y^{-1}\rangle$ (див. доведення останнього твердження), легко виписати cJ-досконале зображення над алгеброю $k\langle x, y\rangle$. Для $n = 3$ воно має наступний вигляд:

$$g_1 \to \begin{pmatrix} E_2 & M_1 \\ 0 & E_4 \end{pmatrix},$$

$$g_2 \to \begin{pmatrix} E_2 & M_2 \\ 0 & E_4 \end{pmatrix},$$

$$g_3 \to \begin{pmatrix} E_2 & M_3 \\ 0 & E_4 \end{pmatrix},$$

де

$$M_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ \hline 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right),$$

$$M_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ \hline 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \end{array}\right),$$

$$M_3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1 \\ \hline 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&x&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&y \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right).$$

Із доведеного твердження випливає наступний наслідок.

Наслідок 3.7. *Група $G = \mathbb{Z}/p \times \cdots \times \mathbb{Z}/p$ ($n > 2$ разів) є cJ-дикою для довільного $p > 2$.*

Дійсно, якщо проводити доведення по тій же схемі, що і при $p = 2$, то маємо нільпотентні матриці $A_q = (\gamma \otimes \varphi)(g_q - 1)$ ступеня нільпотентності p. Але оскільки для матриць ступеня нільпотентності 2 cJ-дикість доведена, то звідси випливає і cJ-дикість для матриць ступеня нільпотентності p (оскільки $p > 2$, то із $A_q^2 = 0$ випливає $A_q^p = 0$).

3.5. Матричні зображення постійного жорданового типу нециклічної групи порядку p^2, $p > 2$

Випадок $p = 2$ детально розглянуто в попередньому підрозділі. У цьому підрозділі розглядаємо випадок $p \neq 2$.

Твердження 3.8. *Група $G = \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$ є cJ-дикою для довільного $p > 2$.*

Нагадаємо, що $\mathbb{Z}/p \equiv \mathbb{Z}/pZ$ — циклічна група порядку p. Операцію задаємо мультиплікативно, тоді група задається твірним елементом g і визначальним співвідношенням $g^p = 1$.

Доведення. Позначимо природні твірні групи G через g_1, g_2, і розглянемо наступне матричне зображення γ групи G над $\Sigma = k\langle x, y\rangle$:

$$\gamma(g_1) = E_{10} + \begin{pmatrix} \gamma_{11(1)} & \gamma_{12(1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \gamma(g_2) = E_{10} + \begin{pmatrix} \gamma_{11(2)} & \gamma_{12(2)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де

$$\gamma_{11(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{12(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{11(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{12(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

і E_{10} — одинична матриця розміру 10×10.

Покажемо спочатку, що це зображення є досконалим.

Нехай φ, φ' матричні зображення алгебри Σ однакової розмірності s і нехай $B_q = (\gamma \otimes \varphi)(g_q)$, $B'_q = (\gamma \otimes \varphi')(g_q))$, де $q = 1, 2$.

Розглянемо матричні рівняння (відносно змінної X)

$$B_1 X = X B'_1\ , \quad B_2 X = X B'_2\ , \tag{3.1}$$

розглядаючи всі матриці (які входять в них) як блокові з блоками розміру $s \times s$.

Ці рівняння еквівалентні рівнянням

$$(B_1 - E_8)X = X(B'_1 - E_8)\ , \quad (B_2 - E_8)X = X(B'_2 - E_8)$$

або, після заміни $A_q = B_q - E_8$, $(q = 1, 2)$, — рівнянням

$$A_1 X = X A'_1\ , \quad A_2 X = X A'_2. \tag{3.2}$$

З формальних міркувань рівняння 3.2 зручніші початкових рівнянь 3.1 (в матрицях A_q, A'_q більше нульових блоків, ніж в матрицях B_q, B'_q).

Отже, якщо покласти

$$P = \varphi(x), \quad Q = \varphi(y), \quad P' = \varphi'(x), \quad Q' = \varphi'(y),$$

то

$$A_1 = \left(\begin{array}{c|cccc|ccccc}
0 & E & P & Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right),$$

$$
A_2 = \left(\begin{array}{c|cccc|ccccc}
0 & 0 & E & P & Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right),
$$

$$
A_1' = \left(\begin{array}{c|cccc|ccccc}
0 & E & P' & Q' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right),
$$

$$A_2' = \left(\begin{array}{c|cc|cccc|ccc}
0 & 0 & E & P' & Q' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).$$

Окрім того,

$$X = \left(\begin{array}{c|cccc|ccccc}
X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} & X_{17} & X_{18} & X_{19} & X_{1,10} \\
\hline
X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} & X_{25} & X_{26} & X_{27} & X_{28} & X_{29} & X_{2,10} \\
X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} & X_{35} & X_{36} & X_{37} & X_{38} & X_{39} & X_{3,10} \\
X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} & X_{45} & X_{46} & X_{47} & X_{48} & X_{49} & X_{4,10} \\
X_{51} & X_{52} & X_{53} & X_{54} & X_{55} & X_{56} & X_{57} & X_{58} & X_{59} & X_{5,10} \\
\hline
X_{61} & X_{62} & X_{63} & X_{64} & X_{65} & X_{66} & X_{67} & X_{68} & X_{69} & X_{6,10} \\
X_{71} & X_{72} & X_{73} & X_{74} & X_{75} & X_{76} & X_{77} & X_{78} & X_{79} & X_{7,10} \\
X_{81} & X_{82} & X_{83} & X_{84} & X_{85} & X_{86} & X_{87} & X_{88} & X_{89} & X_{8,10} \\
X_{91} & X_{92} & X_{93} & X_{94} & X_{95} & X_{96} & X_{97} & X_{98} & X_{99} & X_{9,10} \\
X_{10,1} & X_{10,2} & X_{10,3} & X_{10,4} & X_{10,5} & X_{10,6} & X_{10,7} & X_{10,8} & X_{10,9} & X_{10,10}
\end{array}\right).$$

Зауважимо, що розбиття матриць на додаткові блоки (за допомогою горизонтальних і вертикальних ліній) зроблено для більшої наглядності при перемноженні матриць. При цьому матриця X розбита на блоки таким же чином, як і решта матриць (це стосується всіх її блоків).

Рівність

$$(A_q X)_{ij} = (X A_q')_{ij}$$

відповідних блоків (розміру $s \times s$) матриць A_qX і XA'_q позначаємо через $(q.ij)$; $q \in \{1, 2\}, i, j \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. Для простоти будемо писати $[ij]$ X_{ij}, де X_{ij} — довільний блок (розміру $s \times s$) матриці X).

Випишемо ті рівності вигляду $(q.ij)$, які потрібні для доведення.

$$\begin{aligned}
&(1.12): \ [22] + \varphi(x)[32] + \varphi(y)[42] = [11], \\
&(1.13): \ [23] + \varphi(x)[33] + \varphi(y)[43] = [11]\varphi'(x), \\
&(1.14): \ [24] + \varphi(x)[34] + \varphi(y)[44] = [11]\varphi'(y), \\
&(1.22): \ [62] = [21], \quad (1.26): \ [66] = [22], \\
&(1.32): \ [72] = [31], \quad (1.36): \ [76] = [32], \\
&(1.37): \ [77] = [33], \quad (1.38): \ [78] = [34], \\
&(1.39): \ [79] = [35], \quad (1.42): \ [82] = [41], \\
&(1.46): \ [86] = [42], \quad (1.47): \ [87] = [43], \\
&(1.48): \ [88] = [44], \quad (1.49): \ [89] = [45], \\
&(1.4,10): \ [8,10] = 0, \quad (1.52): \ [92] = [51], \\
&(1.56): \ [96] = [52], \quad (1.57): \ [97] = [53], \\
&(1.58): \ [98] = [54], \quad (1.59): \ [99] = [55], \\
&(1.5,10): \ [9,10] = 0, \quad (1.62): \ 0 = [61], \\
&(1.66): \ 0 = [62], \quad (1.67): \ 0 = [63], \\
&(1.68): \ 0 = [64], \quad (1.69): \ 0 = [65], \\
&(1.72): \ 0 = [71], \quad (1.76): \ 0 = [72], \\
&(1.77): \ 0 = [73], \quad (1.78): \ 0 = [74], \\
&(1.79): \ 0 = [75], \quad (1.82): \ 0 = [81], \\
&(1.86): \ 0 = [82], \quad (1.87): \ 0 = [83], \\
&(1.88): \ 0 = [84], \quad (1.89): \ 0 = [85], \\
&(1.92): \ 0 = [91], \quad (1.96): \ 0 = [92], \\
&(1.97): \ 0 = [93], \quad (1.98): \ 0 = [94], \\
&(1.99): \ 0 = [95], \quad (1.10,2): \ 0 = [10,1], \\
&(1.10,6): \ 0 = [10,2], \quad (1.10,7): \ 0 = [10,3],
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
(1.10,8):\ 0=[10,4], & (1.10,9):\ 0=[10,5].\\
(2.26):\ [76]=0, & (2.27):\ [77]=[22],\\
(2.28):\ [78]=[23], & (2.29):\ [79]=[24],\\
(2.36):\ [86]=0, & (2.37):\ [87]=[32],\\
(2.38):\ [88]=[33], & (2.39):\ [89]=[34],\\
(2.3,10):[8,10]=[35], & (2.46):\ [96]=0,\\
(2.47):\ [97]=[42], & (2.48):\ [98]=[43],\\
(2.49):\ [99]=[44], & (2.4,10):[9,10]=[45],
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
(2.56):\ [10,6]=0, & (2.57):\ [10,7]=[52],\\
(2.58):\ [10,8]=[53], & (2.59):\ [10,9]=[54],\\
(2.5,10)\ [10,10]=[55]. &
\end{array}$$

Із виписаних рівностей маємо:

1) $(1.h2)$, $(1.h6)-(1.h9) \Rightarrow$
   $[h1]=[h2]=[h3]=[h4]=[h5]=0$
   для $h=6,7,8,9,10$;
2) $(1.h-4,2)$ і $[h2]=0 \Rightarrow$
   $[h-4,1]=0$ for $h=6,7,8,9$;
3) $(2.29),(1.39),(2.3,10),(1.4,10) \Rightarrow$
   $[24]=[79]=[35]=[8,10]=0$;
4) (2.28), (1.38), (2.39), (1.49), $(2.4,10)$, $(1.5,10) \Rightarrow$
   $[23]=[78]=[34]=[89]=[45]=[9,10]=0$;
5) (2.57), (1.56), $(2.46) \Rightarrow$
   $[10,7]=[52]=[96]=0$;
6) (2.59), (1.58), (2.48), (1.47), (2.37), (1.36), $(2.26) \Rightarrow$
   $[10,9]=[54]=[98]=[43]=[87]=[32]=[76]=0$;

7) (2.58), (1.57), (2.47), (1.46), (2.36) $\Rightarrow$

$[10, 8] = [53] = [97] = [42] = [86] = 0;$

8) (2.5, 10), (1.59), (2.49), (1.48), (2.38), (1.37), (2.27), (1.26) $\Rightarrow$

$[10, 10] = [55] = [99] = [44] = [88] = [33] = [77] = [22] = [66];$

9) (1.12) і $32 = 42 = 0$ (див. 6), 7)) $\Rightarrow$

$[22] = [11];$

10) (1.13) і $[23] = [43] = 0$ (див. 4),6)), $[33] = [22] = [11]$ (див. 8),9))

$\Rightarrow P[11] = [11]P';$

11) (1.14) і $[24] = [34] = 0$ (див. 3),4)), $[44] = [22] = [11]$ (див. 8),9))

$\Rightarrow Q[11] = [11]Q'.$

Із 1) – 9) (див. після символу $\Rightarrow$) і $[10, 6] = 0$ (див. (2.56)) маємо, що матриця X є блоково верхньо трикутною матрицею з рівними діагональними блоками:

$$X = \left(\begin{array}{c|cccc|ccccc}
X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} & X_{17} & X_{18} & X_{19} & X_{110} \\
\hline
0 & X_{11} & 0 & 0 & X_{25} & X_{26} & X_{27} & X_{28} & X_{29} & X_{210} \\
0 & 0 & X_{11} & 0 & 0 & X_{36} & X_{37} & X_{38} & X_{39} & X_{310} \\
0 & 0 & 0 & X_{11} & 0 & X_{46} & X_{47} & X_{48} & X_{49} & X_{410} \\
0 & 0 & 0 & 0 & X_{11} & X_{56} & X_{57} & X_{58} & X_{59} & X_{510} \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{11} & X_{67} & X_{68} & X_{69} & X_{6,10} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{11} & 0 & 0 & X_{7,10} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{11} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{11} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{11}
\end{array}\right). \qquad (3.3)$$

Тоді матриця X оборотна тоді і лише тоді, коли оборотний блок [11] і із 10) та 11) випливає, що пари матриць (P, Q) (P', Q') подібні, або (іншими словами), що матричні зображення φ і φ' еквівалентні

Отже, ми довели, що якщо зображення $\gamma \otimes \varphi$ і $\gamma \otimes \varphi'$. еквівалентні, то і зображення φ і φ 'еквівалентні. Перша умова означення досконалого зображення виконана.

Переходимо до другої умови.

Скористаємося добре відомим фактом, що (скінченновимірне) зображення скінченновимірної алгебри нерозкладне тоді і лише тоді, коли алгебра його ендоморфізмів локальна. Якщо зображення задане в матричній формі, то алгебра його ендоморфізмів — це множина всіх матриць, які комутують із всіма матрицями цього зображення.

Нехай тепер у приведеному вище доведенні (умови 1) означення досконалого зображення $\varphi' = \varphi$. Тоді $P' = P, Q' = Q$, $B_1' = B_1, B_2' = B_2$, $A_1' = A_1, A_2' = A_2$. Множина всіх матриць X, що задовольняють рівняння 3.2 задає алгебру ендоморфізмів матричного зображення $\gamma \otimes \varphi$. Припустимо, що це зображення розкладне. Тоді алгебра його ендоморфізмів не локальна, причому кожний ендоморфізм має вигляд 3.3 (при цьому, як це випливає із вигляду матриць в рівняннях (∗∗), додаткові співвідношення між його блоками можуть стосуватися лише недіагональних блоків). Тоді із 10), 11) і 3.3 випливає, що не локальною буде і алгебра всіх матриць X_{11}, що комутують із матрицями P і Q, а це алгебра ендоморфізмів. зображення φ. Отже, зображення φ розкладне, що і треба було довести.

Таким чином, зображення $\gamma \otimes \varphi$ є досконалим.

Залишилося довести, що зображення $\gamma \otimes \varphi$ має постійний жордановий тип, тобто виконується умова 3) (див. означення cJ-досконалого зображення). Для цього потрібно показати, що для елементів $a_1, a_2 \in k$ таких, що $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$, ранг матриці $a_1 A_1 + a_2 A_2$ не залежить від цих елементів. Оскільки $rank\,(A_1) = rank\,(A_2) = 5s$, то достатньо показати, що при $a_1 = 1$ і довільному a_2 ранг матриці $A_1 + a_2 A_2$ дорівнює $5s$.

Маємо

$$A_1{+}a_2A_2 = \left(\begin{array}{c|ccccc|ccccc} 0 & E & P+a_2E & Q+a_2P & a_2Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & a_2E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & a_2E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & a_2E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & a_2E \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Оскільки всі ненульові рядки, тобто рядки перших п'яти горизонтальних смуг, лінійно незалежні (бо після викреслюванні 1-ої, 3-ої, 4-ої і 5-ої вертикальних смуг та нульових горизонтальних смуг отримуємо квадратну трикутну матрицю з одиничними елементами на головній діагоналі), то ранг цієї матриці дорівнює $5s$ (незалежно від a_2), що і треба було довести.

Твердження доведено. □

3.6. Основна теорема

Як і раніше, матричні зображення розглядаються над алгебраїчно замкнутим полем характеристики $p > 0$.

Будемо говорити, що скінченна група G має *cJ-скінченний зображувальний тип* над полем k, якщо вона має, з точністю до еквівалентності, лише скінченне число нерозкладних зображень постійного зображувального типу, і *cJ-нескінченного зображувального типу* в іншому разі. В останньому випадку групу називатимемо cJ-дискретною або просто дискретною, якщо вона має скінченне число нерозкладних зображень (постійного жорданового типу) в кожній розмірності. В роботі [71] замість терміну “дискретна група” використано термін “група напівнескінченного типу”, але перший термін більш вживаний.

Теорема 3.9. *Елементарна абелева p-група $G = (\mathbb{Z}/p)^r$ має*
cJ-скінченний зображувальний тип, якщо $r = 1$ (для довільного p),
cJ-ручний зображувальний тип, якщо $r = p = 2$,
cJ-дикий зображувальний тип в інших випадках.
При цьому в ручному випадку вона є дискретною.

Доведення. За твердженнями 3.8, 3.6 і наслідком 3.7 група G має cJ-дикий зображувальний тип, якщо $r > 2$ або $r = 2, p > 2$. Отже залишилося розглянути такі випадки: a) $r = 1$; b) $r = 2, p = 2$. У випадку a) група G циклічна, а значить має (з точністю до еквівалентності) скінченне число нерозкладних зображень (навіть без додаткових обмежень). У випадку b) група G є четверною групою Клейна, а вона є дискретною за теоремою 2.1. □

3.7. Висновки до розділу

У цьому розділі вивчаються матричні зображення елементарних абелевих p-груп над алгебраїчно замкнутим полем характеристики p. Доведено, що групи $G = \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$ ($p > 2$) і $G = \mathbb{Z}/2 \times \cdots \times \mathbb{Z}/2$ ($n > 2$ разів) є cJ-дикими. Отримано повний опис cJ-диких груп і показано, що в інших випадках група є групою cJ–скінченного типу або cJ-дискретною групою. Вивчаються також зображення малих розмірностей.

Результати цього розділу опубліковані в роботах [70] – [72], [76] – [80].

Розділ 4

Категорні та комбінаторні властивості зображень постійного жорданового типу четверної групи Клейна

4.1. Опис категорії зображень постійного жорданового типу четверної групи Клейна

Мета цього підрозділу — описати категорію матричних зображень постійного жорданового типу четверної групи Клейна $G_{2,2}$ над алгебраїчно замкнутим полем k характеристики 2.

Згідно загального означення (для зображень довільної групи над довільним полем) множина морфізмів $Hom(S, S')$ матричних зображень

$$S : a \to A,\ b \to B, \quad S' : a \to A',\ b \to B'$$

групи $G_{2,2}$ над полем k складається з усіх матриць X (з елементами з k) таких, що $AX = XA'$ і $BX = XB'$. Множина морфізмів є, очевидно, векторним простором.

Для задання категорії достатньо в кожному класі еквівалентних нерозкладних зображень вказати по одному представнику (іншими словами, взяти нерозкладні об'єкти скелета категорії) і обчислити для них всі множини морфізмів. В якості таких представників будемо брати вказані в теоремі 2.1 нерозкладні зображення. При цьому зображення, вказані в пунктах a), b), c), d), будемо позначати відповідно через T_1, T_2, T_3^s, T_4^s.

Введемо деякі поняття.

Нехай $X = (x_{ij})$ — матриця розміру $n \times m$ над деяким полем. Її s^+-

ою діагоналлю, де s — ціле число, назвемо сукупність елементів вигляду $x_{i,i+s}$, а s^--ою діагоналлю — сукупність елементів вигляду $x_{i,m+1-s-i}$ (з формальних міркувань ми не виписуємо допустимі значення для індексів, вважаючи, що символ x з недопустимими індексами відсутній і як наслідок допускаючи пусті діагоналі). Такі діагоналі називаємо відповідно (+)-діагоналями і (−)-діагоналями.

Як приклад розглянемо схематично діагоналі з номерами

для матриць розміру 4×6:

$$\begin{pmatrix} 0^+ & 1^+ & 2^+ & 3^+ & 4^+ & 5^+ \\ (-1)^+ & 0^+ & 1^+ & 2^+ & 3^+ & 4^+ \\ (-2)^+ & (-1)^+ & 0^+ & 1^+ & 2^+ & 3^+ \\ (-3)^+ & (-2)^+ & (-1)^+ & 0^+ & 1^+ & 2^+ \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} (-5)^- & (-4)^- & (-3)^- & (-2)^- & (-1)^- & 0^- \\ (-4)^- & (-3)^- & (-2)^- & (-1)^- & 0^- & 1^- \\ (-3)^- & (-2)^- & (-1)^- & 0^- & 1^- & 2^- \\ (-2)^- & (-1)^- & 0^- & 1^- & 2^- & 3^- \end{pmatrix},$$

Назвемо (±)-діагональ скалярною, якщо всі її елементи рівні між собою (зокрема, нульовою, якщо всі елементи нульові).

Матрицю X будемо називати d^+-скалярною (відповідно d^--скалярною), якщо кожна її (+)-діагональ (відповідно (−)-діагональ) скалярна. Очевидно, що якщо матриця X є d^+-скалярною (відповідно d^--скалярною), то вона однозначно задається елементами першого рядка і першого стовпця (відповідно першого рядка і останнього стовпця). В цьому випадку вводимо відповідно позначення

$$X = S^+_{nm}(x_{11}, \ldots, x_{1m}; x_{21}, \ldots, x_{n1}),$$

$$X = S^-_{nm}(x_{11}, \ldots, x_{1m}; x_{2m}, \ldots, x_{nm}).$$

Матрицю X, яка є d^+-скалярною, називатимемо d_0-скалярною, якщо у випадку $n \leq m$ (відповідно $n \geq m$) s^+-а діагональ є нульовою при $s <$

0 і при $s > m - n$ (відповідно при $s > 0$ і при $s < m - n$); в цьому випадку вводимо позначення $X = S_{nm}(x_{11} \ldots, x_{1,m-n+1})$, якщо $n \leq m$ і $X = S_{nm}(x_{11} \ldots, x_{n-m+1,1})$, якщо $n \geq m$.

Покладемо $M^{\varnothing} = M$ для довільної матриці M. Тоді кожне канонічне нерозкладне зображення четверної групи Клейна (вказане в теоремі 2.1) має вигляд T_i^x, де $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $x = \varnothing$, якщо $i = 1, 2$ і x — натуральне число, якщо $i = 3, 4$.

Якщо $T_i^x : a \to A_1, b \to B_1$ і $T_j^y : a \to A_2, b \to B_2$ — канонічні нерозкладні зображення, то (згідно сказаного вище) множина морфізмів $Hom(T_i^x, T_j^y)$ в категорії зображень постійного жорданового типу четверної групи Клейна складається з усіх матриць X таких, що $A_1X = XA_2$ і $B_1X = XB_2$. В такому випадку скалярні рівності $(A_1X)_{pq} = (XA_2)_{pq}$ і $(B_1X_{pq}) = (XB_2)_{pq}$ позначаються відповідно через $[a; i, j; p, q]$ і $[b; i, j; p, q]$; у вказаному означенні через M_{pq} позначається елемент матриці M, який стоїть на перетині p-ого рядка і q-го стовпця (де M приймає значення $(A_1X), (XA_2), (B_1X, XB_2)$.

При обчисленні множин морфізмів матриці X позначаються традиційно — через x_{pq}. При цьому, для простоти, замість x_{pq} пишемо просто pq, використовуючи, якщо потрібно, круглі дужки (наприклад, замість $x_{s+1,1}$ пишемо $(s + 1)1$).

Випадок, коли обчислюється $Hom(T_i^x, T_j^y)$, будемо позначати через (i, j).

Переходимо до розгляду усіх можливих випадків.

У формулюваннях тверджень елемент параметричної матриці (що задає морфізми в конкретному випадку) позначається жирним шрифтом, якщо він зустрічається один раз.

4.1.1. Випадок (1,1). Множину морфізмів у цьому випадку описує наступне твердження.

Твердження 4.1. $Hom\,(T_1, T_1) = \{(\boldsymbol{x_{11}})\}$.

Доведення. Рівності $A_1X = XA_1$, $B_1X = XB_1$ мають вигляд

$$(1)X = X(1),\ (1)X = X(1).$$

Звідси маємо

$$X = (11).$$

4.1.2. Випадок (1,2). Множину морфізмів у цьому випадку описує наступне твердження.

Твердження 4.2. $Hom\,(T_1, T_2) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{x_{14}} \end{pmatrix}\right\}$.

Доведення. Рівності $A_1X = XA_2$, $B_1X = XB_2$ мають вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ці матричні рівності еквівалентні наступним скалярним рівностям:

$[a;1,2;1,1]: \ \ 0 = 0, \quad [b;1,2;1,1]: \ \ 0 = 0,$

$[a;1,2;1,2]: \ \ 0 = 0, \quad [b;1,2;1,2]: \ 0 = 11,$

$[a;1,2;1,3]: \ 0 = 11, \quad [b;1,2;1,3]: \ \ 0 = 0,$

$[a;1,2;1,4]: \ 0 = 12, \quad [b;1,2;1,4]: \ 0 = 13.$

Із цих рівностей маємо:

$[a;1,2;1,3] \Rightarrow 11 = 0,$

$[a;1,2;1,4] \Rightarrow 12 = 0,$

$[b;1,2;1,4] \Rightarrow 13 = 0.$

Отже, у випадку $(1,2)$ вигляд матриці X наступний:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}.$$

4.1.3. Випадок (2,1). Множину морфізмів у цьому випадку описує наступне твердження.

Твердження 4.3. $Hom\,(T_2, T_1) = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_{11}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

Доведення. Рівності $A_2X = XA_1$, $B_2X = XB_1$ мають вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 21 \\ 31 \\ 41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 21 \\ 31 \\ 41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 21 \\ 31 \\ 41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 21 \\ 31 \\ 41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

Ці матричні рівності еквівалентні наступним скалярним рівностям:

$[a; 2, 1; 1, 1]: \;\; 31 = 0, \;\; [b; 2, 1; 1, 1]: \;\; 21 = 0,$

$[a; 2, 1; 2, 1]: \;\; 41 = 0, \;\; [b; 2, 1; 2, 1]: \;\; 0 = 0,$

$[a; 2, 1; 3, 1]: \;\; 0 = 0, \;\; [b; 2, 1; 3, 1]: \;\; 41 = 0,$

$[a; 2, 1; 4, 1]: \;\; 0 = 0, \;\; [b; 2, 1; 1, 4]: \;\; 0 = 0.$

Із цих рівностей маємо:

$[a; 2, 1; 1, 1] \Rightarrow 31 = 0,$

$[a; 2, 1; 2, 1] \Rightarrow 41 = 0,$

$[b; 2, 1; 1, 1] \Rightarrow 21 = 0.$

Отже, у випадку $(2,1)$ вигляд матриці X наступний:

$$X = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4.1.4. Випадок (2,2). Множину морфізмів у цьому випадку описує наступне твердження.

Твердження 4.4. $Hom\,(T_2, T_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \boldsymbol{x_{14}} \\ 0 & x_{11} & 0 & x_{13} \\ 0 & 0 & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 & 0 & x_{11} \end{pmatrix} \right\}.$

Доведення. Рівності $A_2X = XA_2$, $B_2X = XB_2$ мають вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ці матричні рівності еквівалентні наступним скалярним рівностям:

$[a;2,2;1,1]:31=0,$ $[b;2,2;1,1]:21=0,$

$[a;2,2;1,2]:32=0,$ $[b;2,2;1,2]:22=11,$

$[a;2,2;1,3]:33=11,$ $[b;2,2;1,3]:23=0,$

$[a;2,2;1,4]:34=12,$ $[b;2,2;1,4]:24=13,$

$[a;2,2;2,1]:41=0,$ $[b;2,2;2,1]:0=0,$

$[a;2,2;2,2]:42=0,$ $[b;2,2;2,2]:0=21,$

$[a;2,2;2,3]:43=21,$ $[b;2,2;2,3]:0=0,$

$[a;2,2;2,4]:44=22,$ $[b;2,2;2,4]:0=23,$

$[a;2,2;3,1]:0=0,$ $[b;2,2;3,1]:41=0,$

$[a;2,2;3,2]:0=0,$ $[b;2,2;3,2]:42=31,$

$[a;2,2;3,3]:0=31,$ $[b;2,2;3,3]:43=0,$

$[a;2,2;3,4]:0=32,$ $[b;2,2;3,4]:44=33,$

$[a;2,2;4,1]:0=0,$ $[b;2,2;4,1]:0=0,$

$[a;2,2;4,2]:0=0,$ $[b;2,2;4,2]:0=41,$

$[a;2,2;4,3]:0=41,$ $[b;2,2;4,3]:0=0,$

$[a;2,2;4,4]:0=42,$ $[b;2,2;4,4]:0=43.$

Із цих рівностей маємо:

$[a;2,2;1,1]$, $[a;2,2;1,2]$, $[a;2,2;2,1]$, $[a;2,2;2,2]$, $[b;2,2;1,1]$, $[b;2,2;1,3]$, $[b;2,2;4,4]$ $\Rightarrow 31=0, 32=0, 41=0, 42=0, 21=0, 23=0, 43=0$;

$[a;2,2;1,3]$, $[b;2,2;1,2]$, $[a;2,2;2,4]$ $\Rightarrow 33=11=22=44$;

$[a;2,2;1,4]$, $[a;2,2;2,3]$, $[b;2,2;1,4]$ $\Rightarrow 12=34, 21=43, 24=13$.

Отже, у випадку $(2,2)$ вигляд матриці X наступний:

$$X=\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 11 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

4.1.5. Випадок (1,3). Множину морфізмів у цьому випадку описує наступне твердження.

Твердження 4.5. $Hom\,(T_1, T_3^s) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0\,| & \boldsymbol{x_{1,s+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2s+1}} \end{pmatrix}\right\}.$

Доведення. Рівності $A_1X = XA_3$, $B_1X = XB_3$ мають вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & \dots & 1s & 1(s+1) & \dots & 1(2s+1) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 11 & \dots & 1s & 1(s+1) & \dots & 1(2s+1) \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} E_s & E_s \;\; \bar{0} \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array}\right),$$

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & \dots & 1s & 1(s+1) & \dots & 1(2s+1) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 11 & \dots & 1s & 1(s+1) & \dots & 1(2s+1) \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} E_s & \bar{0} \;\; E_s \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array}\right).$$

Ці матричні рівності еквівалентні наступним скалярним рівностям:

$[a;1,3;1,1]:$	$0=0,$	$[b;1,3;1,1]:$	$0=0,$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$[a;1,3;1,s]:$	$0=0,$	$[b;1,3;1,s]:$	$0=0,$
$[a;1,3;1,s+1]:$	$0=11,$	$[b;1,3;1,s+1]:$	$0=0,$
$[a;1,3;1,s+2]:$	$0=12,$	$[b;1,3;1,s+2]:$	$0=11,$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$[a;1,3;1,2s]:$	$0=1s,$	$[b;1,3;1,2s]:$	$0=1(s-1),$
$[a;1,3;1,2s+1]:$	$0=0.$	$[b;1,3;1,2s+1]:$	$0=1s.$

Із цих рівностей маємо:

$[a;1,3;1,s+l], l=1,\dots,s \Rightarrow 1l=0.$

Отже, у випадку $(1,3)$ вигляд матриці X наступний:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1(s+1) & \dots & 1(2s+1) \end{pmatrix}.$$

4.1.6. Випадок (3,1). Множину морфізмів у цьому випадку описує наступне твердження.

Твердження 4.6. $Hom\,(T_3^s, T_1) = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_{11}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_{s1}} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

Доведення. Рівності $A_3X = XA_1$, $B_3X = XB_1$ мають вигляд

$$\left(\begin{array}{c|cc} E_s & E_s & \bar{0} \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{E_{s+1}} \end{array}\right) \begin{pmatrix} 11 \\ \vdots \\ s1 \\ (s+1)1 \\ \vdots \\ (2s+1)1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ \vdots \\ s1 \\ (s+1)1 \\ \vdots \\ (2s+1)1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} E_s & \bar{0} & E_s \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{E_{s+1}} \end{array}\right) \begin{pmatrix} 11 \\ \vdots \\ s1 \\ (s+1)1 \\ \vdots \\ (2s+1)1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ \vdots \\ s1 \\ (s+1)1 \\ \vdots \\ (2s+1)1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

Ці матричні рівності еквівалентні наступним скалярним рівностям:

$$\begin{array}{llll} [a;3,1;1,1]: & (s+1)1 = 0, & [b;3,1;1,1]: & (s+2)1 = 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [a;3,1;s,1]: & (2s)1 = 0, & [b;3,1;s,1]: & (2s+1)1 = 0, \\ [a;3,1;s+1,1]: & 0 = 0, & [b;3,1;s+1,1]: & 0 = 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [a;3,1;2s+1,1]: & 0 = 0, & [b;3,1;2s+1,1]: & 0 = 0. \end{array}$$

Із цих рівностей маємо:

$[a;3,1;k,1], k = 1,\dots,s \Rightarrow (s+k)1 = 0;$

$[b;3,1;s,1] \Rightarrow (2s+1)1 = 0.$

Отже, у випадку $(3,1)$ вигляд матриці X наступний:

$$X = \begin{pmatrix} 11 \\ \vdots \\ s1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4.1.7. Випадок (1,4). Множину морфізмів у цьому випадку описує наступне твердження.

Твердження 4.7. $Hom\,(T_1, T_4^s) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \,| & \boldsymbol{x_{1,s+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2s+1}} \end{pmatrix} \right\}.$

Доведення. Рівності $A_1X = XA_4$, $B_1X = XB_4$ мають вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & \dots & 1(s+1) & 1(s+2) & \dots & 1(2s+1) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 11 & \dots & 1(s+1) & 1(s+2) & \dots & 1(2s+1) \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{array}{c} E_s \\ \tilde{0} \end{array} \\ \hline 0 & E_s \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & \dots & 1(s+1) & 1(s+2) & \dots & 1(2s+1) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 11 & \dots & 1(s+1) & 1(s+2) & \dots & 1(2s+1) \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{array}{c} \tilde{0} \\ E_s \end{array} \\ \hline 0 & E_s \end{array} \right)$$

Ці матричні рівності еквівалентні наступним скалярним рівностям:

$$
\begin{array}{llll}
[a;1,4;1,1]: & 0=0, & [b;1,4;1,1]: & 0=0, \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
[a;1,4;1,s+1]: & 0=0, & [b;1,4;1,s+1]: & 0=0, \\
[a;1,4;1,s+2]: & 0=11, & [b;1,4;1,s+2]: & 0=12, \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
[a;1,4;1,2s+1]: & 0=1s, & [b;1,4;1,2s+1]: & 0=1(s+1),
\end{array}
$$

Із цих рівнянь маємо:

$[a;1,4;1,s+1+l] : l=1,\dots,s \Rightarrow 1l=0;$

$[b;1,4;1,2s+1] \Rightarrow 1(s+1)=0.$

Отже, у випадку $(1,4)$ вигляд матриці X наступний:

$$
X = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1(s+2) & \dots & 1(2s+1) \end{pmatrix}.
$$

4.1.8. Випадок (4,1). Множину морфізмів у цьому випадку описує наступне твердження.

Твердження 4.8. *$Hom\,(T_4^s, T_1) =$* $\left\{ \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{x_{11}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_{s+1,1}} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \right\}.$

Доведення. Рівності $A_4X = XA_1$, $B_4X = XB_1$ мають вигляд

$$
\left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{array}{c} E_s \\ \tilde{0} \end{array} \\ \hline 0 & E_s \end{array} \right)
\begin{pmatrix} 11 \\ \vdots \\ (s+1)1 \\ (s+2)1 \\ \vdots \\ (2s+1)1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 11 \\ \vdots \\ (s+1)1 \\ (s+2)1 \\ \vdots \\ (2s+1)1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix},
$$

$$\left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{array}{c}\tilde{0}\\ E_s\end{array} \\ \hline 0 & E_t \end{array}\right)\begin{pmatrix} 11\\ \vdots\\ (s+1)1\\ (s+2)1\\ \vdots\\ (2s+1)1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11\\ \vdots\\ (s+1)1\\ (s+2)1\\ \vdots\\ (2s+1)1 \end{pmatrix}\Big(1\Big)$$

Ці матричні рівності еквівалентні наступним скалярним рівностям:

$$\begin{array}{llll} [a;4,1;1,1]: & (s+2)1=0, & [b;4,1;1,1]: & 0=0,\\ [a;4,1;2,1]: & (s+3)1=0. & [b;4,1;2,1]: & (s+2)1=0,\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ [a;4,1;s,1]: & (2s+1)1=0, & [b;4,1;s+1,1]: & (2s+1)1=0,\\ [a;4,1;s+1,1]: & 0=0 & [b;4,1;s+2,1]: & 0=0,\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ [a;4,1;2s+1,1]: & 0=0, & [b;4,1;2s+1,1]: & 0=0, \end{array}$$

Із цих рівностей маємо:

$[a;4,1;k,1], k=1,\dots,s \Rightarrow (s+1+k)1=0.$

Отже, у випадку $(4,1)$ вигляд матриці X наступний

$$X=\begin{pmatrix} 11\\ \vdots\\ (s+1)1\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix}.$$

4.1.9. Випадок (2,3). Множину морфізмів у цьому випадку описує наступне твердження.

Твердження 4.9. $Hom\,(T_2, T_3^s) =$

$$= \left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccccc} x_{11} & \dots & x_{1s} & \boldsymbol{x_{1,s+1}} & \boldsymbol{x_{1,s+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2s}} & \boldsymbol{x_{1,2s+1}} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & x_{11} & \dots & x_{1,s-1} & x_{1s} \\ 0 & \dots & 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1s} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) \right\}.$$

Доведення. Рівності $A_2X = XA_3$, $B_2X = XB_3$ мають вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 11 & \dots & 1s & 1(s+1) & \dots & 1(2s+1) \\ 21 & \dots & 2s & 2(s+1) & \dots & 2(2s+1) \\ 31 & \dots & 3s & 3(s+1) & \dots & 3(2s+1) \\ 41 & \dots & 4s & 4(s+1) & \dots & 4(2s+1) \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 11 & \dots & 1s & 1(s+1) & \dots & 1(2s+1) \\ 21 & \dots & 2s & 2(s+1) & \dots & 2(2s+1) \\ 31 & \dots & 3s & 3(s+1) & \dots & 3(2s+1) \\ 41 & \dots & 4s & 4(s+1) & \dots & 4(2s+1) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} E_s & E_s \quad \bar{0} \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array} \right),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 11 & \dots & 1s & 1(s+1) & \dots & 1(2s+1) \\ 21 & \dots & 2s & 2(s+1) & \dots & 2(2s+1) \\ 31 & \dots & 3s & 3(s+1) & \dots & 3(2s+1) \\ 41 & \dots & 4s & 4(s+1) & \dots & 4(2s+1) \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 11 & \dots & 1s & 1(s+1) & \dots & 1(2s+1) \\ 21 & \dots & 2s & 2(s+1) & \dots & 2(2s+1) \\ 31 & \dots & 3s & 3(s+1) & \dots & 3(2s+1) \\ 41 & \dots & 4s & 4(s+1) & \dots & 4(2s+1) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} E_s & \bar{0} \quad E_s \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array} \right).$$

Ці матричні рівності еквівалентні наступним скалярним рівностям:

$$\begin{array}{ll} [a;2,3;1,1]: & 31 = 0, \\ \dots & \dots \\ [a;2,3;1,s]: & 3s = 0, \\ [a;2,3;1,s+1]: & 3(s+1) = 11, \end{array}$$

$$
\begin{array}{lc}
[a;2,3;1,s+2]: & 3(s+2)=12, \\
\dots & \dots \\
[a;2,3;1,2s]: & 3(2s)=1s, \\
[a;2,3;1,2s+1]: & 3(2s+1)=0, \\
[a;2,3;2,1]: & 41=0, \\
\dots & \dots \\
[a;2,3;2,s]: & 4s=0, \\
[a;2,3;2,s+1]: & 4(s+1)=21, \\
[a;2,3;2,s+2]: & 4(s+2)=22, \\
\dots & \dots \\
[a;2,3;2,2s]: & 4(2s)=2s, \\
[a;2,3;2,2s+1]: & 4(2s+1)=0, \\
[a;2,3;3,1]: & 0=0, \\
\dots & \dots \\
[a;2,3;3,s]: & 0=0, \\
[a;2,3;3,s+1]: & 0=31, \\
[a;2,3;3,s+2]: & 0=32, \\
\dots & \dots \\
[a;2,3;3,2s]: & 0=3s, \\
[a;2,3;3,2s+1]: & 0=0, \\
[a;2,3;4,1]: & 0=0, \\
\dots & \dots \\
[a;2,3;4,s]: & 0=0, \\
[a;2,3;4,s+1]: & 0=41, \\
[a;2,3;4,s+2]: & 0=42, \\
\dots & \dots \\
[a;2,3;4,2s]: & 0=4s, \\
[a;2,3;4,2s+1]: & 0=0,
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&[b;2,3;1,1]: && 21=0,\\
&\ldots && \ldots\\
&[b;2,3;1,s]: && 2s=0,\\
&[b;2,3;1,s+1]: && 2(s+1)=0,\\
&[b;2,3;1,s+2]: && 2(s+2)=11,\\
&\ldots && \ldots\\
&[b;2,3;1,2s]: && 2(2s)=1(s-1),\\
&[b;2,3;1,2s+1]: && 2(2s+1)=1s,\\
&[b;2,3;2,1]: && 0=0,\\
&\ldots && \ldots\\
&[b;2,3;2,s]: && 0=0,\\
&[b;2,3;2,s+1]: && 0=0,\\
&[b;2,3;2,s+2]: && 0=21,\\
&\ldots && \ldots\\
&[b;2,3;2,2s]: && 0=2(s-1),\\
&[b;2,3;2,2s+1]: && 0=2s,\\
&[b;2,3;3,1]: && 41=0,\\
&\ldots && \ldots\\
&[b;2,3;3,s]: && 4s=0,\\
&[b;2,3;3,s+1]: && 4(s+1)=0,\\
&[b;2,3;3,s+2]: && 4(s+2)=31,\\
&\ldots && \ldots\\
&[b;2,3;3,2s]: && 4(2s)=3(s-1),\\
&[b;2,3;3,2s+1]: && 4(2s+1)=3s,\\
&[b;2,3;4,1]: && 0=0,\\
&\ldots && \ldots\\
&[b;2,3;4,s]: && 0=0,\\
&[b;2,3;4,s+1]: && 0=0,\\
&[b;2,3;4,s+2]: && 0=41,
\end{aligned}
$$

$\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots$

$[b;2,3;4,2s]: \qquad 0=4(s-1),$

$[b;2,3;4,2s+1]: \qquad 0=4s.$

Із цих рівностей маємо:

$[b;2,3;1,l], l=1,\ldots,s+1 \Rightarrow 2l=0;$

$[b;2,3;1,s+l], l=2,\ldots,s+1 \Rightarrow 2(s+l)=1(l-1);$

$[a;2,3;1,l], l=1,\ldots,s \Rightarrow 3l=0;$

$[a;2,3;1,s+l], l=1,\ldots,s \Rightarrow 3(s+l)=1l;$

$[a;2,3;1,2s+1] \Rightarrow 3(2s+1)=0;$

$[b;2,3;3,l], l=1,\ldots,s+1 \Rightarrow 4l=0;$

$[b;2,3;3,l], l=s+2,\ldots,2s+1 \Rightarrow 4l=0$ (враховуючи, що $3m=0$, $m=1,\ldots,s$).

Отже, у випадку $(2,3)$ вигляд матриці X наступний:

$$X=\left(\begin{array}{ccc|ccccc} 11 & \ldots & 1s & 1(s+1) & 1(s+2) & \ldots & 1(2s) & 1(2s+1) \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 11 & \ldots & 1(s-1) & 1s \\ 0 & \ldots & 0 & 11 & 12 & \ldots & 1s & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

4.1.10. Випадок (3,2). Множину морфізмів у цьому випадку описує наступне твердження.

Твердження 4.10. $Hom\,(T_3^s,T_2)=\left\{\left(\begin{array}{cccc} 0 & x_{12} & x_{22} & \boldsymbol{x_{14}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_{s-1,2} & x_{s2} & \boldsymbol{x_{s-1,4}} \\ 0 & x_{s2} & x_{s3} & \boldsymbol{x_{s4}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & x_{s2} \\ 0 & 0 & 0 & x_{s3} \end{array}\right)\right\}.$

Доведення. Рівності $A_3X=XA_2$, $B_3X=XB_2$ мають вигляд

$$\left(\begin{array}{c|cc} E_s & E_s & \bar{0} \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{E_{s+1}} \end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc} 11 & 12 & 13 & 14 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s1 & s2 & s3 & s4 \\ \hline (s+1)1 & (s+1)2 & (s+1)3 & (s+1)4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (2s+1)1 & (2s+1)2 & (2s+1)3 & (2s+1)4 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 11 & 12 & 13 & 14 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s1 & s2 & s3 & s4 \\ \hline (s+1)1 & (s+1)2 & (s+1)3 & (s+1)4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (2s+1)1 & (2s+1)2 & (2s+1)3 & (2s+1)4 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} E_s & \bar{0} & E_s \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{E_{s+1}} \end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc} 11 & 12 & 13 & 14 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s1 & s2 & s3 & s4 \\ \hline (s+1)1 & (s+1)2 & (s+1)3 & (s+1)4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (2s+1)1 & (2s+1)2 & (2s+1)3 & (2s+1)4 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 11 & 12 & 13 & 14 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s1 & s2 & s3 & s4 \\ \hline (s+1)1 & (s+1)2 & (s+1)3 & (s+1)4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (2s+1)1 & (2s+1)2 & (2s+1)3 & (2s+1)4 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ці матричні рівності еквівалентні наступним скалярним рівностям:

$$
\begin{array}{llll}
[a;3,2;1,1]: & (s+1)1=0, & [b;3,2;1,1]: & (s+2)1=0,\\
[a;3,2;1,2]: & (s+1)2=0, & [b;3,2;1,2]: & (s+2)2=11,\\
[a;3,2;1,3]: & (s+1)3=11, & [b;3,2;1,3]: & (s+2)3=0,\\
[a;3,2;1,4]: & (s+1)4=12, & [b;3,2;1,4]: & (s+2)4=13,\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
[a;3,2;s,1]: & (2s)1=0, & [b;3,2;s,1]: & (2s+1)1=0,\\
[a;3,2;s,2]: & (2s)2=0, & [b;3,2;s,2]: & (2s+1)2=s1,\\
[a;3,2;s,3]: & (2s)3=s1, & [b;3,2;s,3]: & (2s+1)3=0,\\
[a;3,2;s,4]: & (2s)4=s2, & [b;3,2;s,4]: & (2s+1)4=s3,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
[a;3,2;s+1,1]: & 0=0, & [b;3,2;s+1,1]: & 0=0,\\
[a;3,2;s+1,2]: & 0=0, & [b;3,2;s+1,2]: & 0=(s+1)1,\\
[a;3,2;s+1,3]: & 0=(s+1)1, & [b;3,2;s+1,3]: & 0=0,\\
[a;3,2;s+1,4]: & 0=(s+1)2, & [b;3,2;s+1,4]: & 0=(s+1)3,\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
[a;3,2;2s+1,1]: & 0=0, & [b;3,2;2s+1,1]: & 0=0,\\
[a;3,2;2s+1,2]: & 0=0, & [b;3,2;2s+1,2]: & 0=(2s+1)1,\\
[a;3,2;2s+1,3]: & 0=(2s+1)1, & [b;3,2;2s+1,3]: & 0=0,\\
[a;3,2;2s+1,4]: & 0=(2s+1)2, & [b;3,2;2s+1,4]: & 0=(2s+1)3.
\end{array}
$$

Проаналізуємо ці рівності.

$[a;3,2;k,3], k=s+1,\dots,2s+1 \Rightarrow k1=0;$

$[a;3,2;k,4], k=s+1,\dots,2s+1 \Rightarrow k2=0;$

$[b;3,2;k,4], k=s+1,\dots,2s+1 \Rightarrow k3=0.$

Враховуючи рівності $[a;3,2;k,3], k=1,\dots,s$, маємо $k1=(s+k)3=0$.

$[a;3,2;k,4], k=1,\dots,s \Rightarrow (s+k)4=k2.$

Порівнюючи рівняння $[a;3,2;k,4]$ та $[b;3,2;k-1,4], k=2,\dots,s$, маємо $(s+k)4=k2=(k-1)3$.

$[b;3,2;s,4] \Rightarrow (2s+1)4=s3.$

Отже, у випадку $(3,2)$ вигляд матриці X наступний:

$$X = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 12 & 22 & 14 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & (s-1)2 & s2 & (s-1)4 \\ 0 & s2 & s3 & s4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 12 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & s2 \\ 0 & 0 & 0 & s3 \end{array}\right).$$

4.1.11. Випадок (2,4). Множину морфізмів у цьому випадку описує наступне твердження.

Твердження 4.11. *$Hom\,(T_2, T_4^s) =$*

$$= \left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccc} x_{11} & \dots & x_{1,s+1} & \boldsymbol{x_{1,s+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2s+1}} \\ 0 & \dots & 0 & x_{12} & \dots & x_{1,s+1} \\ 0 & \dots & 0 & x_{11} & \dots & x_{1s} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \right\}.$$

Доведення. Рівності $A_2X = XA_4$, $B_2X = XB_4$ мають вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 11 & \dots & 1(s+1) & 1(s+2) & \dots & 1(2s+1) \\ 21 & \dots & 2(s+1) & 2(s+2) & \dots & 2(2s+1) \\ 31 & \dots & 3(s+1) & 3(s+2) & \dots & 3(2s+1) \\ 41 & \dots & 4(s+1) & 4(s+2) & \dots & 4(2s+1) \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 11 & \dots & 1(s+1) & 1(s+2) & \dots & 1(2s+1) \\ 21 & \dots & 2(s+1) & 2(s+2) & \dots & 2(2s+1) \\ 31 & \dots & 3(s+1) & 3(s+2) & \dots & 3(2s+1) \\ 41 & \dots & 4(s+1) & 4(s+2) & \dots & 4(2s+1) \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{array}{c} E_s \\ \tilde{0} \end{array} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right),$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc}11&\dots&1(s+1)&1(s+2)&\dots&1(2s+1)\\21&\dots&2(s+1)&2(s+2)&\dots&2(2s+1)\\31&\dots&3(s+1)&3(s+2)&\dots&3(2s+1)\\41&\dots&4(s+1)&4(s+2)&\dots&4(2s+1)\end{array}\right)=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}11&\dots&1(s+1)&1(s+2)&\dots&1(2s+1)\\21&\dots&2(s+1)&2(s+2)&\dots&2(2s+1)\\31&\dots&3(s+1)&3(s+2)&\dots&3(2s+1)\\41&\dots&4(s+1)&4(s+2)&\dots&4(2s+1)\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}E_{s+1}&\begin{array}{c}\tilde{0}\\E_s\end{array}\\\hline 0&E_s\end{array}\right).$$

$$\begin{array}{rc}
[a;2,4;1,1]: & 31=0,\\
\dots & \dots\\
[a;2,4;1,s+1]: & 3(s+1)=0,\\
[a;2,4;1,s+2]: & 3(s+2)=11,\\
\dots & \dots\\
[a;2,4;1,2s+1]: & 3(2s+1)=1s,\\
\\
[a;2,4;2,1]: & 41=0,\\
\dots & \dots\\
[a;2,4;2,s+1]: & 4(s+1)=0\\
[a;2,4;2,s+2]: & 4(s+2)=21,\\
\dots & \dots\\
[a;2,4;2,2s+1]: & 4(2s+1)=2s,\\
\\
[a;2,4;3,1]: & 0=0,\\
\dots & \dots\\
[a;2,4;3,s+1]: & 0=0,\\
[a;2,4;3,s+2]: & 0=31,\\
\dots & \dots
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&[a;2,4;3,2s+1]: && 0 = 3s,\\
&[a;2,4;4,1]: && 0 = 0,\\
&\dots && \dots\\
&[a;2,4;4,s+1]: && 0 = 0,\\
&[a;2,4;4,s+2]: && 0 = 41,\\
&\dots && \dots\\
&[a;2,4;4,2s+1]: && 0 = 4s,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[b;2,4;1,1]: && 21 = 0,\\
&\dots && \dots\\
&[b;2,4;1,s+1]: && 2(s+1) = 0,\\
&[b;2,4;1,s+2]: && 2(s+2) = 12,\\
&\dots && \dots\\
&[b;2,4;1,2s+1]: && 2(2s+1) = 1(s+1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[b;2,4;2,1]: && 0 = 0,\\
&\dots && \dots\\
&[b;2,4;2,s+1]: && 0 = 0,\\
&[b;2,4;2,s+2]: && 0 = 22,\\
&\dots && \dots\\
&[b;2,4;2,2s+1]: && 0 = 2(s+1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[b;2,4;3,1]: && 41 = 0,\\
&\dots && \dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
[b;2,4;3,s+1]: & 4(s+1)=0,\\
[b;2,4;3,s+2]: & 4(s+2)=32,\\
\dots & \dots\\
[b;2,4;3,2s+1]: & 4(2s+1)=3(s+1),\\
 & \\
[b;2,4;4,1]: & 0=0,\\
\dots & \dots\\
[b;2,4;4,s+1]: & 0=0,\\
[b;2,4;4,s+2]: & 0=42,\\
\dots & \dots\\
[b;2,4;4,2s+1]: & 0=4(s+1).
\end{array}
$$

Із цих рівностей маємо:

$[b;2,4;1,l], l=1,\dots,s+1 \Rightarrow 2l=0;$

$[b;2,4;1,s+l], l=2,\dots,s+1 \Rightarrow 2(s+l)=1l;$

$[a;2,4;1,l], l=1,\dots,s+1 \Rightarrow 3l=0;$

$[a;2,4;1,s+l], l=2,\dots,s+1 \Rightarrow 3(s+l)=1(l-1);$

$[a;2,4;1,l], l=1,\dots,s+1 \Rightarrow 4l=0;$

$[a;2,4;1,s+l], l=2,\dots,s+1 \Rightarrow 4(s+l)=2(l-1)=0.$

Отже, у випадку $(2,4)$ вигляд матриці X наступний

$$
X=\left(\begin{array}{ccc|ccc}
11 & \dots & 1(s+1) & 1(s+2) & \dots & 1(2s+1)\\
0 & \dots & 0 & 12 & \dots & 1(s+1)\\
0 & \dots & 0 & 11 & \dots & 1s\\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}\right).
$$

4.1.12. Випадок (4,2). Множину морфізмів у цьому випадку описує наступне твердження.

Твердження 4.12. $Hom\,(T_4^s, T_2) = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 0 & x_{12} & 0 & \boldsymbol{x_{14}} \\ 0 & x_{22} & x_{12} & \boldsymbol{x_{24}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_{s2} & x_{s-1,2} & \boldsymbol{x_{s4}} \\ 0 & 0 & x_{s2} & \boldsymbol{x_{s+1,4}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & x_{s2} \end{array} \right) \right\}$.

Доведення. Рівності $A_4X = XA_2$, $B_4X = XB_2$ мають вигляд

$$\left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} E_s \\ \tilde{0} \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc} 11 & 12 & 13 & 14 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (s+1)1 & (s+1)2 & (s+1)3 & (s+1)4 \\ \hline (s+2)1 & (s+2)2 & (s+2)3 & (s+2)4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (2s+1)1 & (2s+1)2 & (2s+1)3 & (2s+1)4 \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 11 & 12 & 13 & 14 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (s+1)1 & (s+1)2 & (s+1)3 & (s+1)4 \\ \hline (s+2)1 & (s+2)2 & (s+2)3 & (s+2)4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (2s+1)1 & (2s+1)2 & (2s+1)3 & (2s+1)4 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} \tilde{0} \\ E_s \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc} 11 & 12 & 13 & 14 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (s+1)1 & (s+1)2 & (s+1)3 & (s+1)4 \\ \hline (s+2)1 & (s+2)2 & (s+2)3 & (s+2)4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (2s+1)1 & (2s+1)2 & (2s+1)3 & (2s+1)4 \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{cccc}
11 & 12 & 13 & 14 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(s+1)1 & (s+1)2 & (s+1)3 & (s+1)4 \\
\hline
(s+2)1 & (s+2)2 & (s+2)3 & (s+2)4 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(2s+1)1 & (2s+1)2 & (2s+1)3 & (2s+1)4
\end{array}\right)
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$

Ці матричні рівності еквівалентні наступним скалярним рівностям:

$$\begin{array}{ll}
[a;4,2;1,1]: & (s+2)1=0, \\
[a;4,2;1,2]: & (s+2)2=0, \\
[a;4,2;1,3]: & (s+2)3=11, \\
[a;4,2;1,4]: & (s+2)4=12, \\
\\
[a;4,2;2,1]: & (s+3)1=0, \\
[a;4,2;2,2]: & (s+3)2=0, \\
[a;4,2;2,3]: & (s+3)3=21, \\
[a;4,2;2,4]: & (s+3)4=22, \\
\ldots & \ldots \\
[a;4,2;s,1]: & (2s+1)1=0, \\
[a;4,2;s,2]: & (2s+1)2=0, \\
[a;4,2;s,3]: & (2s+1)3=s1, \\
[a;4,2;s,4]: & (2s+1)4=s2, \\
\\
[a;4,2;s+1,1]: & 0=0, \\
[a;4,2;s+1,2]: & 0=0, \\
[a;4,2;s+1,3]: & 0=(s+1)1, \\
[a;4,2;s+1,4]: & 0=(s+1)2,
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&[a;4,2;s+2,1]: && 0=0,\\
&[a;4,2;s+2,2]: && 0=0,\\
&,[a;4,2;s+2,3]: && 0=(s+2)1,\\
&[a;4,2;s+2,4]: && 0=(s+2)2,\\
&\ldots && \ldots\\
&[a;4,2;2s+1,1]: && 0=0,\\
&[a;4,2;2s+1,2]: && 0=0,\\
&[a;4,2;2s+1,3]: && 0=(2s+1)1,\\
&[a;4,2;2s+1,4]: && 0=(2s+1)2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[b;4,2;1,1]: && 0=0,\\
&[b;4,2;1,2]: && 0=11,\\
&[b;4,2;1,3]: && 0=0,\\
&[b;4,2;1,4]: && 0=13,\\
\\
&[b;4,2;2,1]: && (s+2)1=0,\\
&[b;4,2;2,2]: && (s+2)2=21,\\
&[b;4,2;2,3]: && (s+2)3=0,\\
&[b;4,2;2,4]: && (s+2)4=23,\\
&\ldots && \ldots\\
&[b;4,2;s,1]: && (2s)1=0,\\
&[b;4,2;s,2]: && (2s)2=s1,\\
&[b;4,2;s,3]: && (2s)3=0,\\
&[b;4,2;s,4]: && (2s)4=s3,\\
\\
&[b;4,2;s+1,1]: && (2s+1)1=0,\\
&[b;4,2;s+1,2]: && (2s+1)2=(s+1)1,
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{ll}
[b;4,2;s+1,3]: & (2s+1)3=0,\\
[b;4,2;s+1,4]: & (2s+1)4=(s+1)3,\\
\\
[b;4,2;s+2,1]: & 0=0,\\
[b;4,2;s+2,2]: & 0=(s+2)1,\\
[b;4,2;s+2,3]: & 0=0,\\
[b;4,2;s+2,4]: & 0=(s+2)3,\\
\dots & \dots\\
[b;4,2;2s+1,1]: & 0=0,\\
[b;4,2;2s+1,2]: & 0=(2s+1)1,\\
[b;4,2;2s+1,3]: & 0=0,\\
[b;4,2;2s+1,4]: & 0=(2s+1)3.
\end{array}
$$

Із цих рівностей маємо:

$[a;4,2;k,1], k=1,\dots,s \Rightarrow (s+1+k)1=0;$

$[a;4,2;k,2], k=1,\dots,s \Rightarrow (s+1+k)2=0;$

$[b;4,2;k+1,3], k=1,\dots,s \Rightarrow (s+1+k)3=0;$

$[a;4,2;k,3], k=1,\dots,s \Rightarrow (s+1+k)3=k1 \Rightarrow k1=0$

(відносно останньої імплікації див.$[b;4,2;k+1,3]$);

$[b;4,2;s+1,2] \Rightarrow (s+1)1=(2s+1)2=0$

(відносно останньої рівності див.$[a;4,2;k,2]$ при $k=s$);

$[a;4,2;k,4],[b;4,2;k+1,4], k=1,\dots,s \Rightarrow (s+1+k)4=k2=(k+1)3;$

$[b;4,2;1,4] \Rightarrow 13=0;$

$[a;4,2;s+1,3] \Rightarrow (s+1)1=0;$

$[a;4,2;s+1,4] \Rightarrow (s+1)2=0.$

Отже, у випадку $(4,2)$ вигляд матриці X наступний:

$$X = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 12 & 0 & 14 \\ 0 & 22 & 12 & 24 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & s2 & (s-1)2 & s4 \\ 0 & 0 & s2 & (s+1)4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 12 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & s2 \end{array}\right)$$

4.1.13. Випадок (3,3). Множину морфізмів у цьому випадку описує наступне твердження.

Твердження 4.13. $Hom\,(T_3^s, T_3^t) =$

$$\left\{\left(\begin{array}{c|ccc} & \boldsymbol{x_{1,t+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ S_{st}(x_{11}, \dots, x_{t-s+1,1}) & \vdots & & \vdots \\ & \boldsymbol{x_{s,t+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{s,2t+1}} \\ \hline 0 & \multicolumn{3}{c}{S_{s+1,t+1}(x_{11}, \dots, x_{t-s+1,1})} \end{array}\right)\right\}$$

при $s \leq t$,

$$Hom\,(T_3^s, T_3^t) = \left\{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{x_{1,t+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{x_{s,t+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{s,2t+1}} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)\right\}$$

при $s > t$.

Доведення. Покладемо

$$X = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right),$$

де A — матриця розміру $s \times t$, B — матриця розміру $(s+1) \times t$, C — матриця розміру $s \times (t+1)$, D — матриця розміру $(s+1) \times (t+1)$.

У свою чергу, матрицю D зобразимо у вигляді блочної матриці з блоками D_0, Q, S, T:

$$= D\left(\begin{array}{c|c} D_0 & Q \\ \hline S & T \end{array}\right),$$

де D_0 — матриця розміру $s \times t$, Q — вектор-стовпчик розміру $s \times 1$, S — вектор-рядок розміру $1 \times t$, T — матриця розміру 1×1.

Рівності $A_3 X = X A_3$, $B_3 X = X B_3$ мають вигляд

$$\left(\begin{array}{c|c} E_s & E_s \quad \bar{0} \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E_t & E_t \quad \bar{0} \\ \hline 0 & E_{t+1} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} E_s & \bar{0} \quad E_s \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E_t & \bar{0} \quad E_t \\ \hline 0 & E_{t+1} \end{array}\right)$$

Ці матричні рівності еквівалентні наступним скалярним рівностям:

$$\begin{array}{ll}
[a;3,3;1,1]: & (s+1)1 = 0 \\
\ldots & \ldots \\
[a;3,3;1,t]: & (s+1)t = 0 \\
[a;3,3;1,t+1]: & (s+1)(t+1) = 11 \\
\ldots & \ldots \\
[a;3,3;1,2t]: & (s+1)(2t) = 1t \\
[a;3,3;1,2t+1]: & (s+1)(2t+1) = 0 \\
\ldots & \ldots \\
[a;3,3;s,1]: & (2s)1 = 0 \\
\ldots & \ldots \\
[a;3,3;s,t]: & (2s)t = 0 \\
[a;3,3;s,t+1]: & (2s)(t+1) = s1 \\
\ldots & \ldots \\
[a;3,3;s,2t]: & (2s)(2t) = st \\
[a;3,3;s,2t+1]: & (2s)(2t+1) = 0
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&[a;3,3;s+1,1]: && 0=0\\
&\ldots && \ldots\\
&[a;3,3;s+1,t]: && 0=0\\
&[a;3,3;s+1,t+1]: && 0=(s+1)1\\
&\ldots && \ldots\\
&[a;3,3;s+1,2t]: && 0=(s+1)t\\
&[a;3,3;s+1,2t+1]: && 0=0\\
&\ldots && \ldots\\
&[a;3,3;2s+1,1]: && 0=0\\
&\ldots && \ldots\\
&[a;3,3;2s+1,t]: && 0=0\\
&[a;3,3;2s+1,t+1]: && 0=(2s+1)1\\
&\ldots && \ldots\\
&[a;3,3;2s+1,2t]: && 0=(2s+1)t\\
&[a;3,3;2s+1,2t+1]: && 0=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[b;3,3;1,1]: && (s+2)1=0\\
&\ldots && \ldots\\
&[b;3,3;1,t+1]: && (s+2)(t+1)=0\\
&[b;3,3;1,t+2]: && (s+2)(t+2)=11\\
&\ldots && \ldots\\
&[b;3,3;1,2t+1]: && (s+2)(2t+1)=1t\\
&\ldots && \ldots\\
&[b;3,3;s,1]: && (2s+1)1=0\\
&\ldots && \ldots\\
&[b;3,3;s,t+1]: && (2s+1)(t+1)=0\\
&[b;3,3;s,t+2]: && (2s+1)(t+2)=s1\\
&\ldots && \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lc}
[b;3,3;s,2t+1]: & (2s+1)(2t+1)=st \\
\\
[b;3,3;s+1,1]: & 0=0 \\
\ldots & \ldots \\
[b;3,3;s+1,t+1]: & 0=0 \\
[b;3,3;s+1,t+2]: & 0=(s+1)1 \\
\ldots & \ldots \\
[b;3,3;s+1,2t+1]: & 0=(s+1)t \\
\ldots & \ldots \\
[b;3,3;2s+1,1]: & 0=0 \\
\ldots & \ldots \\
[b;3,3;2s+1,t+1]: & 0=0 \\
[b;3,3;2s+1,t+2]: & 0=(2s+1)1 \\
\ldots & \ldots \\
[b;3,3;2s+1,2t+1]: & 0=(2s+1)t
\end{array}
$$

Із цих рівностей маємо:

$[a;3,3;k,t+l] \Rightarrow B=0$ $(k=s+1,\ldots,2s+1, l=1,\ldots,t)$;

$[a;3,3;k,l] \Rightarrow D_0=A$ $(k=1,\ldots,s, l=t+1,\ldots,2t)$;

$[a;3,3;k,2t+1] \Rightarrow Q=0$ $(k=1,\ldots,s)$;

$[b;3,3;s,l] \Rightarrow S=(0,s1,s2,...,s(t-1)), T=(st)$ $(l=t+1\ldots,2t+1)$.

Залишилося визначити вид матриці A.

$[a;3,3;k,t+1]$ і $[b;3,3;k-1,t+1] \Rightarrow (s+k)(t+1)=k1=0$ $(k=2,\ldots,s)$ і, отже, для елементів матриці A маємо:

$$k1=0 \text{ при } k=2,\ldots,s \qquad (*);$$

$[a;3,3;k,2t+1]$ і $[b;3,3;k-1,2t+1] \Rightarrow (s+k)(2t+1)=0=(k-1)t$ $(k=2,\ldots,s)$ і, отже, для елементів A маємо:

$$(k-1)t = 0 \text{ при } k = 2, \ldots, s \qquad (**);$$

$[a;3,3;k,t+l]$ і $[b;3,3;k-1,t+l] \Rightarrow (s+k)(t+l) = kl = (k-1)(l-1)$ $(k = 2, \ldots, s, l = 2, \ldots, t)$; тоді $(*) \Rightarrow$ всі елементи матриці A, що лежать під діагоналлю $11 = 22 = 33 = \ldots$, є нульовими. А якщо (додатково) $t < s$, то з $(**)$ випливає, що і сама ця діагональ нульова.

Отже, у випадку $(3,3)$ вигляд матриці X наступний:

$$X = \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc} & \boldsymbol{x_{1,t+1}} & \ldots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ S_{st}(x_{11}, \ldots, x_{t-s+1,1}) & \vdots & & \vdots \\ & \boldsymbol{x_{s,t+1}} & \ldots & \boldsymbol{x_{s,2t+1}} \\ \hline 0 & \multicolumn{3}{c}{S_{s+1,t+1}(x_{11}, \ldots, x_{t-s+1,1})} \end{array} \right) \right\}$$

при $s \le t$,

$$X = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \ldots & 0 & \boldsymbol{x_{1,t+1}} & \ldots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \boldsymbol{x_{s,t+1}} & \ldots & \boldsymbol{x_{s,2t+1}} \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right) \right\}$$

при $s > t$.

4.1.14. Випадок (3,4). Множину морфізмів у цьому випадку описує наступне твердження.

Твердження 4.14. $Hom\,(T_3^s, T_4^t) =$

$$= \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc} S^-_{s,t+1}(x_{11}, \ldots, x_{1,t+1}; & \boldsymbol{x_{1,t+2}} & \ldots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ x_{2,t+1}, \ldots, x_{s,t+1}) & \vdots & & \vdots \\ & \boldsymbol{x_{s,t+2}} & \ldots & \boldsymbol{x_{s,2t+1}} \\ \hline 0 & \multicolumn{3}{c}{S^-_{s+1,t}(x_{11}, \ldots, x_{1,t};} \\ & \multicolumn{3}{c}{x_{1,t+1}, \ldots, x_{s,t+1})} \end{array} \right) \right\}.$$

Доведення. Розглядаємо матрицю X розміру $(2s+1)\times(2t+1)$ як блочну матрицю (див. випадок $(3,3)$), де вже A — матриця розміру $s\times(t+1)$, B — матриця розміру $(s+1)\times(t+1)$, C — матриця розміру $s\times t$, D — матриця розміру $(s+1)\times t$.

Рівності $A_3X = XA_4$, $B_3X = XB_4$ мають вигляд

$$\left(\begin{array}{c|cc} E_s & E_s & \bar{0} \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{E_{s+1}} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E_{t+1} & \begin{array}{c} E_t \\ \tilde{0} \end{array} \\ \hline 0 & E_t \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} E_s & \bar{0} & E_s \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{E_{s+1}} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E_{t+1} & \begin{array}{c} \tilde{0} \\ E_t \end{array} \\ \hline 0 & E_t \end{array}\right)$$

Ці матричні рівності еквівалентні наступним скалярним рівностям:

$$\begin{array}{ll}
[a;3,4;1,1]: & (s+1)1 = 0 \\
\dots & \dots \\
[a;3,4;1,t+1]: & (s+1)(t+1) = 0 \\
[a;3,4;1,t+2]: & (s+1)(t+2) = 11 \\
\dots & \dots \\
[a;3,4;1,2t+1]: & (s+1)(2t+1) = 1t \\
\dots & \dots \\
[a;3,4;s,1]: & (2s)1 = 0 \\
\dots & \dots \\
[a;3,4;s,t+1]: & (2s)(t+1) = 0 \\
[a;3,4;s,t+2]: & (2s)(t+2) = s1 \\
\dots & \dots \\
[a;3,4;s,2t+1]: & (2s)(2t+1) = st
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
[a;3,4;s+1,1]: & 0=0 \\
\ldots & \ldots \\
[a;3,4;s+1,t+1]: & 0=0 \\
[a;3,4;s+1,t+2]: & 0=(s+1)1 \\
\ldots & \ldots \\
[a;3,4;s+1,2t+1]: & 0=(s+1)t \\
\ldots & \ldots \\
[a;3,4;2s+1,1]: & 0=0 \\
\ldots & \ldots \\
[a;3,4;2s+1,t+1]: & 0=0 \\
[a;3,4;2s+1,t+2]: & 0=(2s+1)1 \\
\ldots & \ldots \\
[a;3,4;2s+1,2t+1]: & 0=(2s+1)t
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
[b;3,4;1,1]: & (s+2)1=0 \\
\ldots & \ldots \\
[b;3,4;1,t+1]: & (s+2)(t+1)=0 \\
[b;3,4;1,t+2]: & (s+2)(t+2)=12 \\
\ldots & \ldots \\
[b;3,4;1,2t+1]: & (s+2)(2t+1)=1(t+1) \\
\ldots & \ldots \\
[b;3,4;s,1]: & (2s+1)1=0 \\
\ldots & \ldots \\
[b;3,4;s,t+1]: & (2s+1)(t+1)=0 \\
[b;3,4;s,t+2]: & (2s+1)(t+2)=s2 \\
\ldots & \ldots \\
[b;3,4;s,2t+1]: & (2s+1)(2t+1)=s(t+1)
\end{array}
$$

$$\begin{array}{ll}
[b;3,4;s+1,1]: & 0=0 \\
\dots & \dots \\
[b;3,4;s+1,t+1]: & 0=0 \\
[b;3,4;s+1,t+2]: & 0=(s+1)2 \\
\dots & \dots \\
[b;3,4;s+1,2t+1]: & 0=(s+1)(t+1) \\
\dots & \dots \\
[b;3,4;2s+1,1]: & 0=0 \\
\dots & \dots \\
[b;3,4;2s+1,t+1]: & 0=0 \\
[b;3,4;2s+1,t+2]: & 0=(2s+1)2 \\
\dots & \dots \\
[b;3,4;2s+1,2t+1]: & 0=(2s+1)(t+1)
\end{array}$$

Із цих рівностей маємо: $[a;3,4;k,l] \Rightarrow (s+k)l = 0$ $(k = 1,\dots,s, l = 1,\dots,t+1)$;

$[b;3,4;s,l] \Rightarrow (2s+1)l = 0$ $(l = 1,\dots,t+1)$. Отже, $B = 0$.

З рівностей $[a;3,4;k,l]$ при $k = 1,\dots,s, l = t+2,\dots,2t+1$ випливає, що матриця D без останнього рядка дорівнює матриці A без останнього стовпця.

$[a;3,4;p,q]$ і $[a;3,4;p-1,q]$ при $p = 2,\dots,s, q = t+2,\dots,2t+1 \Rightarrow$ $kl = (k+1)(l-1)$ при $k = 1,\dots,s-1, l = 1,\dots,t+1$;

$[a;3,4;s,l+1]$ і $[b;3,4;s,l] \Rightarrow (2s+1)l = (2s)(l+1)$, $(2s+1)(2t+1) = s(t+1)$ $(l = t+2,\dots,2t)$.

Отже, у випадку $(3,4)$ вигляд матриці X наступний:

$$X = \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc} S^{-}_{s,t+1}(x_{11},\ldots,x_{1,t+1}; & \boldsymbol{x_{1,t+2}} & \ldots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ x_{2,t+1},\ldots,x_{s,t+1}) & \vdots & & \vdots \\ & \boldsymbol{x_{s,t+2}} & \ldots & \boldsymbol{x_{s,2t+1}} \\ \hline 0 & \multicolumn{3}{c}{S^{-}_{s+1,t}(x_{11},\ldots,x_{1,t};} \\ & \multicolumn{3}{c}{x_{1,t+1},\ldots,x_{s,t+1})} \end{array} \right) \right\}$$

4.1.15. Випадок (4,3). Множину морфізмів у цьому випадку описує наступне твердження.

Твердження 4.15. $Hom\,(T_4^t, T_3^s) =$

$$= \left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \ldots & 0 & \boldsymbol{x_{1,s+1}} & \ldots & \boldsymbol{x_{1,2s+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \boldsymbol{x_{t+1,s+1}} & \ldots & \boldsymbol{x_{t+1,2s+1}} \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right) \right\}.$$

Доведення. Розглядаємо матрицю X розміру $(2s+1)\times(2t+1)$ як блочну матрицю (див. випадок $(3,3)$), де вже A — матриця розміру $(t+1)\times s$, B — матриця розміру $t\times s$, C — матриця розміру $(t+1)\times(s+1)$, D — матриця розміру $t\times(s+1)$. Рівності $A_4X = XA_3$, $B_4X = XB_3$ мають вигляд

$$\left(\begin{array}{c|c} E_{t+1} & \begin{array}{c} E_t \\ \tilde{0} \end{array} \\ \hline 0 & E_t \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} E_s & E_s \;\; \bar{0} \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} E_{t+1} & \begin{array}{c} \tilde{0} \\ E_t \end{array} \\ \hline 0 & E_t \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} E_s & \bar{0} \;\; E_s \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array} \right)$$

Ці матричні рівності еквівалентні наступним скалярним рівностям:

$$
\begin{array}{ll}
[a;4,3;1,1]: & (t+2)1=0 \\
\dots & \dots \\
[a;4,3;1,s]: & (t+2)s=0 \\
[a;4,3;1,s+1]: & (t+2)(s+1)=11 \\
[a;4,3;1,s+2]: & (t+2)(s+2)=12 \\
\dots & \dots \\
[a;4,3;1,2s]: & (t+2)(2s)=1s \\
[a;4,3;1,2s+1]: & (t+2)(2s+1)=0 \\
\dots & \dots \\
[a;4,3;t,1]: & (2t+1)1=0 \\
\dots & \dots \\
[a;4,3;t,s]: & (2t+1)s=0 \\
[a;4,3;t,s+1]: & (2t+1)(s+1)=t1 \\
[a;4,3;t,s+2]: & (2t+1)(s+2)=t2 \\
\dots & \dots \\
[a;4,3;t,2s]: & (2t+1)(2s)=ts \\
[a;4,3;t,2s+1]: & (2t+1)(2s+1)=0 \\
 & \\
[a;4,3;t+1,1]: & 0=0 \\
\dots & \dots \\
[a;4,3;t+1,s]: & 0=0 \\
[a;4,3;t+1,s+1]: & 0=(t+1)1 \\
[a;4,3;t+1,s+2]: & 0=(t+1)2 \\
\dots & \dots \\
[a;4,3;t+1,2s]: & 0=(t+1)s \\
[a;4,3;t+1,2s+1]: & 0=0 \\
\dots & \dots
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&[a;4,3;2t+1,1]: && 0=0\\
&\dots && \dots\\
&[a;4,3;2t+1,s]: && 0=0\\
&[a;4,3;2t+1,s+1]: && 0=(2t+1)1\\
&[a;4,3;2t+1,s+2]: && 0=(2t+1)2\\
&\dots && \dots\\
&[a;4,3;2t+1,2s]: && 0=(2t+1)s\\
&[a;4,3;2t+1,2s+1]: && 0=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[b;4,3;1,1]: && 0=0\\
&\dots && \dots\\
&[b;4,3;1,s+1]: && 0=0\\
&[b;4,3;1,s+2]: && 0=11\\
&\dots && \dots\\
&[b;4,3;1,2s+1]: && 0=1s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[b;4,3;2,1]: && (t+2)1=0\\
&\dots && \dots\\
&[b;4,3;2,s+1]: && (t+2)(s+1)=0\\
&[b;4,3;2,s+2]: && (t+2)(s+2)=21\\
&\dots && \dots\\
&[b;4,3;2,2s+1]: && (t+2)(2s+1)=2s\\
&\dots && \dots\\
&[b;4,3;t+1,1]: && (2t+1)1=0\\
&\dots && \dots\\
&[b;4,3;t+1,s+1]: && (2t+1)(s+1)=0\\
&[b;4,3;t+1,s+2]: && (2t+1)(s+2)=(t+1)1\\
&\dots && \dots
\end{aligned}
$$

$$[b;4,3;t+1,2s+1]: \quad (2t+1)(2s+1)=(t+1)s$$

$$\begin{array}{ll}
[b;4,3;t+2,1]: & 0=0 \\
\dots & \dots \\
[b;4,3;t+2,s+1]: & 0=0 \\
[b;4,3;t+2,s+2]: & 0=(t+2)1 \\
\dots & \dots \\
[b;4,3;t+2,2s+1]: & 0=(t+2)s \\
\dots & \dots \\
[b;4,3;2t+1,1]: & 0=0 \\
\dots & \dots \\
[b;4,3;2t+1,s+1]: & 0=0 \\
[b;4,3;2t+1,s+2]: & 0=(2t+1)1 \\
\dots & \dots \\
[b;4,3;2t+1,2s+1]: & 0=(2t+1)s
\end{array}$$

Із цих рівностей маємо: $[b;4,3;k,l] \Rightarrow (t+k)l=0$ $(k=2,\dots,t+1, l=1,\dots,s+1)$, тобто $B=0$ і нульовим є перший стовпець матриці D;

$[a;4,3;k,2s+1] \Rightarrow (t+1+k)(2s+1)=0$ $(k=1,\dots,t)$, тобто останній стовпець матриці D — нульовий;

$[a;4,3;t+1,s+l] \Rightarrow (t+1)l=0$ $(l=1,\dots,s)$, тобто останній рядок матриці A — нульовий;

$[a;4,3;1,l]$ при $l=s+2,\dots,2s+1 \Rightarrow 1k=0$ при $k=1,\dots,s$, тобто перший рядок матриці A — нульовий;

$[a;4,3;k,l]$ при $k=1,\dots,t, l=s+1,\dots,2s \Rightarrow$ матриця D без останнього стовпця дорівнює матриці A.

Далі, ліві частини рівностей $[a;4,3;k,s+l]$ і $[b;4,3;k+1,s+l]$ при $k=2,\dots,t, l=1,\dots,s+1$ рівні між собою, а саме дорівнюють $(k+t+1)(s+l)$. Прирівнюючи їх праві частини, одержуємо наступні рівності:

$k1 = 0$, $kp = (k+1)(p-1)$ при $p = 2, \ldots, s$, $(k+1)s = 0$. Враховуючи, що перший і останній рядки матриці A нульові, з цієї рівності маємо, що $A = 0$.

Отже, у випадку $(4,3)$ вигляд матриці X наступний:

$$X = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \ldots & 0 & \boldsymbol{x_{1,s+1}} & \ldots & \boldsymbol{x_{1,2s+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \boldsymbol{x_{t+1,s+1}} & \ldots & \boldsymbol{x_{t+1,2s+1}} \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right) \right\}$$

.

4.1.16. Випадок (4,4). Множину морфізмів у цьому випадку описує наступне твердження.

Твердження 4.16. *$Hom\,(T_4^s, T_4^t) =$*

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \ldots & 0 & \boldsymbol{x_{1,t+2}} & \ldots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \boldsymbol{x_{s+1,t+2}} & \ldots & \boldsymbol{x_{s+1,2t+1}} \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right) \right\}$$

при $s < t$,

$Hom\,(T_4^s, T_4^t)=$

$$\left\{ \left(\begin{array}{c|ccc} & \boldsymbol{x_{1,t+2}} & \ldots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ S_{s+1,t+1}(x_{11}, \ldots, x_{s-t+1,1}) & \vdots & & \vdots \\ & \boldsymbol{x_{s+1,t+2}} & \ldots & \boldsymbol{x_{s+1,2t+1}} \\ \hline 0 & \multicolumn{3}{c}{S_{st}(x_{11}, \ldots, x_{s-t+1,1})} \end{array} \right) \right\}$$

при $s \geq t$.

Доведення. Розглядаємо матрицю X розміру $(2s+1) \times (2t+1)$ як блочну матрицю (див. випадок $(3,3)$), де вже A — матриця розміру $(s+1)\times(t+1)$, B — матриця розміру $s\times(t+1)$, C — матриця розміру $(s+1)\times t$, D — матриця розміру $s\times t$. Рівності $A_4X = XA_4$, $B_4X = XB_4$ мають вигляд

$$\left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{array}{c} E_s \\ \tilde{0} \end{array} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} E_{t+1} & \begin{array}{c} E_t \\ \tilde{0} \end{array} \\ \hline 0 & E_t \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} E_{t_1+1} & \begin{array}{c} \tilde{0} \\ E_{t_1} \end{array} \\ \hline 0 & E_{t_1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} E_{t+1} & \begin{array}{c} \tilde{0} \\ E_t \end{array} \\ \hline 0 & E_t \end{array}\right)$$

Ці матричні рівності еквівалентні наступним скалярним рівностям:

$$\begin{array}{lc}
[a;4,4;1,1]: & (s+2)1 = 0 \\
\dots & \dots \\
[a;4,4;1,t+1]: & (s+2)(t+1) = 0 \\
[a;4,4;1,t+2]: & (s+2)(t+2) = 11 \\
\dots & \dots \\
[a;4,4;1,2t+1]: & (s+2)(2t+1) = 1t \\
\dots & \dots \\
[a;4,4;s,1]: & (2s+1)1 = 0 \\
\dots & \dots \\
[a;4,4;s,t+1]: & (2s+1)(t+1) = 0 \\
[a;4,4;s,t+2]: & (2s+1)(t+2) = s1 \\
\dots & \dots \\
[a;4,4;s,2t+1]: & (2s+1)(2t+1) = st \\
 & \\
[a;4,4;s+1,1]: & 0 = 0 \\
\dots & \dots
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
[a;4,4;s+1,t+1]: & 0=0 \\
[a;4,4;s+1,t+2]: & 0=(s+1)1 \\
\dots & \dots \\
[a;4,4;s+1,2t+1]: & 0=(s+1)t \\
\dots & \dots \\
[a;4,4;2s+1,1]: & 0=0 \\
\dots & \dots \\
[a;4,4;2s+1,t+1]: & 0=0 \\
[a;4,4;2s+1,t+2]: & 0=(2s+1)1 \\
\dots & \dots \\
[a;4,4;2s+1,2t+1]: & 0=(2s+1)t
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
[b;4,4;1,1]: & 0=0 \\
\dots & \dots \\
[b;4,4;1,t+1]: & 0=0 \\
[b;4,4;1,t+2]: & 0=12 \\
\dots & \dots \\
[b;4,4;1,2t+1]: & 0=1(t+1)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
[b;4,4;2,1]: & (s+2)1=0 \\
\dots & \dots \\
[b;4,4;2,t+1]: & (s+2)(t+1)=0 \\
[b;4,4;2,t+2]: & (s+2)(t+2)=22 \\
\dots & \dots \\
[b;4,4;2,2t+1]: & (s+2)(2t+1)=2(t+1) \\
\dots & \dots \\
[b;4,4;s+1,1]: & (2s+1)1=0 \\
\dots & \dots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
[b;4,4;s+1,t+1]: & (2s+1)(t+1)=0 \\
[b;4,4;s+1,t+2]: & (2s+1)(t+2)=(s+1)2 \\
\ldots & \ldots \\
[b;4,4;s+1,2t+1]: & (2s+1)(2t+1)=(s+1)(t+1)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
[b;4,4;s+2,1]: & 0=0 \\
\ldots & \ldots \\
[b;4,4;s+2,t+1]: & 0=0 \\
[b;4,4;s+2,t+2]: & 0=(s+2)2 \\
\ldots & \ldots \\
[b;4,4;s+2,2t+1]: & 0=(s+2)(t+1) \\
\ldots & \ldots \\
[b;4,4;2s+1,1]: & 0=0 \\
\ldots & \ldots \\
[b;4,4;2s+1,t+1]: & 0=0 \\
[b;4,4;2s+1,t+2]: & 0=(2s+1)2 \\
\ldots & \ldots \\
[b;4,4;2s+1,2t+1]: & 0=(2s+1)(t+1)
\end{array}
$$

Із цих рівностей маємо:

$[a;4,4;s+1,t+1+l] \Rightarrow (s+1)l=0\ (l=1,\ldots,t)$;

$[a;4,4;k,l] \Rightarrow (s+k+1)l=0\ (k=1,\ldots,s, l=1,\ldots,t+1)$, тобто $B=0$;

$[a;4,4;k,l]$ при $k=1,\ldots,s, l=t+2,\ldots,2t+1 \Rightarrow$ матриця D дорівнює матриці A без останнього рядка і останнього стовпця.

Отже, залишилося визначити елементи матриці A.

$[b;4,4;1,t+l] \Rightarrow 1l=0(l=2,\ldots,t+1)$;

$[a;4,4;s+1,t+1+l] \Rightarrow (s+1)l=0\ (l=1,\ldots,t)\ (***)$;

$[a;4,4;k,t+l+1]$ і $[b;4,4;k+1,t+l+1]$ (з однаковими лівими частинами)

$\Rightarrow kl = (k+1)(l+1)$ $(k = 1, \ldots, s, l = 1, \ldots, t)$; тоді $(***) \Rightarrow$ всі елементи матриці A, як лежать над діагоналлю $11 = 22 = 33 = \ldots$, є нульовими. А якщо (додатково) $s < t$, то і сама ця діагональ нульова.

Отже, у випадку $(4,4)$ вигляд матриці X наступний:

$$X = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \ldots & 0 & \boldsymbol{x_{1,t+2}} & \cdots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \boldsymbol{x_{s+1,t+2}} & \cdots & \boldsymbol{x_{s+1,2t+1}} \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right) \right\}$$

при $s < t$,

$$X = \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc} & \boldsymbol{x_{1,t+2}} & \cdots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ S_{s+1,t+1}(x_{11}, \ldots, x_{s-t+1,1}) & \vdots & & \vdots \\ & \boldsymbol{x_{s+1,t+2}} & \cdots & \boldsymbol{x_{s+1,2t+1}} \\ \hline 0 & \multicolumn{3}{c}{S_{st}(x_{11}, \ldots, x_{s-t+1,1})} \end{array} \right) \right\}$$

при $s \geq t$.

4.2. Загальні теореми

Із розглянутих в попередньому підрозділі випадків маємо наступну теорему про морфізми між канонічними нерозкладними зображеннями четверної групи Клейна (всі вказані в морфізмах елементи x_{ij} пробігають поле k)

Теорема 4.17. *Множини морфізмів наступні:*

$Hom\,(T_1, T_1) = \{(\boldsymbol{x_{11}})\}$;

$Hom\,(T_1, T_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{x_{14}} \end{pmatrix} \right\}$;

$$Hom\,(T_2, T_1) = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_{11}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$Hom\,(T_2, T_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \boldsymbol{x_{14}} \\ 0 & x_{11} & 0 & x_{13} \\ 0 & 0 & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 & 0 & x_{11} \end{pmatrix} \right\};$$

$$Hom\,(T_1, T_3^s) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \,| & \boldsymbol{x_{1,s+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2s+1}} \end{pmatrix} \right\};$$

$$Hom\,(T_3^s, T_1) = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_{11}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_{s1}} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$Hom\,(T_1, T_4^s) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \,| & \boldsymbol{x_{1,s+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2s+1}} \end{pmatrix} \right\};$$

$$Hom\,(T_4^s, T_1) = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_{11}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_{s+1,1}} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$Hom\,(T_2, T_3^s) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccccc} x_{11} & \dots & x_{1s} & \boldsymbol{x_{1,s+1}} & \boldsymbol{x_{1,s+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2s}} & \boldsymbol{x_{1,2s+1}} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & x_{11} & \dots & x_{1,s-1} & x_{1s} \\ 0 & \dots & 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1s} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) \right\};$$

$$Hom\,(T_3^s,T_2)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{22} & \boldsymbol{x_{14}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_{s-1,2} & x_{s2} & \boldsymbol{x_{s-1,4}} \\ 0 & x_{s2} & x_{s3} & \boldsymbol{x_{s4}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & x_{s2} \\ 0 & 0 & 0 & x_{s3} \end{pmatrix}\right\};$$

$$Hom\,(T_2,T_4^s)=\left\{\left(\begin{array}{ccc|ccc} x_{11} & \dots & x_{1,s+1} & \boldsymbol{x_{1,s+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2s+1}} \\ 0 & \dots & 0 & x_{12} & \dots & x_{1,s+1} \\ 0 & \dots & 0 & x_{11} & \dots & x_{1s} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)\right\};$$

$$Hom\,(T_4^s,T_2)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & x_{12} & 0 & \boldsymbol{x_{14}} \\ 0 & x_{22} & x_{12} & \boldsymbol{x_{24}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_{s2} & x_{s-1,2} & \boldsymbol{x_{s4}} \\ 0 & 0 & x_{s2} & \boldsymbol{x_{s+1,4}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & x_{s2} \end{pmatrix}\right\};$$

$$Hom\,(T_3^s,T_3^t)=\left\{\left(\begin{array}{c|ccc} & \boldsymbol{x_{1,t+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ S_{st}(x_{11},\dots,x_{t-s+1,1}) & \vdots & & \vdots \\ & \boldsymbol{x_{s,t+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{s,2t+1}} \\ \hline 0 & \multicolumn{3}{c}{S_{s+1,t+1}(x_{11},\dots,x_{t-s+1,1})} \end{array}\right)\right\}$$

при $s\leq t$,

$$Hom\,(T_3^s,T_3^t)=\left\{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{x_{1,t+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{x_{s,t+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{s,2t+1}} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)\right\}$$

при $s > t$;

$$Hom\,(T_3^s,T_4^t)=\left\{\left(\begin{array}{c|ccc} \begin{array}{c} S^-_{s,t+1}(x_{11},\dots,x_{1,t+1}; \\ x_{2,t+1},\dots,x_{s,t+1}) \end{array} & \begin{array}{ccc} \boldsymbol{x_{1,t+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{x_{s,t+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{s,2t+1}} \end{array} \\ \hline 0 & \begin{array}{c} S^-_{s+1,t}(x_{11},\dots,x_{1,t}; \\ x_{1,t+1},\dots,x_{s,t+1}) \end{array} \end{array}\right)\right\};$$

$$Hom\,(T_4^s,T_3^t)=\left\{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{x_{1,t+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{x_{s+1,t+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{s+1,2t+1}} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)\right\};$$

$$Hom\,(T_4^s,T_4^t)=\left\{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{x_{1,t+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{x_{s+1,t+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{s+1,2t+1}} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)\right\}$$

при $s < t$,

$Hom\,(T_4^s, T_4^t)=$

$$\left\{\left(\begin{array}{c|ccc} & \boldsymbol{x_{1,t+2}} & \cdots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ S_{s+1,t+1}(x_{11},\ldots,x_{s-t+1,1}) & \vdots & & \vdots \\ & \boldsymbol{x_{s+1,t+2}} & \cdots & \boldsymbol{x_{s+1,2t+1}} \\ \hline 0 & \multicolumn{3}{c}{S_{st}(x_{11},\ldots,x_{s-t+1,1})} \end{array}\right)\right\}$$

при $s \geq t$.

Зауважимо (із вигляду матриць це не завжди видно), що для матриці із $Hom\,(T_i^s, T_j^t)$ число рядків дорівнює розмірності зображення T_i^s, а число стовпців — розмірності зображення T_j^t.

Нагадаємо, що елемент параметричної матриці (що задає морфізми в конкретному випадку) позначаються жирним шрифтом, якщо він зустрічається один раз.

Переходимо тепер до наслідків із цієї теореми.

Множини морфізмів $Hom\,(M, N)$ для канонічних нерозкладних зображень мають таку розмірність як векторні простори над полем k.

Наслідок 4.18. *Розмірності множин морфізмів наступні:*

$dim_k Hom\,(T_1, T_1) = 1$;

$dim_k Hom\,(T_1, T_2) = 1$;

$dim_k Hom\,(T_2, T_1) = 1$;

$dim_k Hom\,(T_2, T_2) = 4$;

$dim_k Hom\,(T_1, T_3^s) = s + 1$;

$dim_k Hom\,(T_3^s, T_1) = s$;

$dim_k Hom\,(T_1, T_4^s) = s$;

$dim_k Hom\,(T_4^s, T_1) = s + 1$;

$dim_k Hom\,(T_2, T_3^s) = 2s + 1$;

$dim_k Hom\,(T_3^s, T_2) = 2s + 1$;

$dim_k Hom\,(T_2, T_4^s) = 2s+1;$

$dim_k Hom\,(T_4^s, T_2) = 2s+1;$

$dim_k Hom\,(T_3^s, T_3^t) = (s+1)t+1$ *при* $s \le t,$
$dim_k Hom\,(T_3^s, T_3^t) = s(t+1)$ *при* $s > t;$

$dim_k Hom\,(T_3^s, T_4^t) = st+s+t;$

$dim_k Hom\,(T_4^s, T_3^t) = (s+1)(t+1);$

$dim_k Hom\,(T_4^s, T_4^t) = (s+1)t$ *при* $s < t,$

$dim_k Hom\,(T_4^s, T_4^t) = s(t+1)+1$ *при* $s \ge t.$

Для наглядності запишемо цю теорему у вигляді таблиці (де на перетині рядка з номером X і стовпця з номером Y стоїть число $dim_k(X,Y)$):

	T_1	T_2	T_3^t	T_4^t
T_1	1	1	$t+1$	t
T_2	1	4	$2t+1$	$2t+1$
T_3^s	s	$2s+1$	$(s+1)t+1$ при $s \le t$ $s(t+1)$ при $s > t$	$st+s+t$
T_4^s	$s+1$	$2s+1$	$(s+1)(t+1)$	$(s+1)t$ при $s < t$ $s(t+1)+1$ при $s \ge t$

Нагадаємо, що згідно відомої теореми алгебра ендоморфізмів нерозкладного (скінченновимірного) зображення довільної алгебри є локальною.

Твердження 4.19. *Нехай T — довільне нерозкладне зображення постійного жорданового типу четверної групи Клейна. Тоді його алгебра ендоморфізмів комутативна і її радикал дорівнює в кубі нулю. Більш* *точно, ступінь нільпотентності n_T радикала алгебри $End\,T$ дорівнює:*

$$n_T = \begin{cases} 1 & \text{при } dim_k T = 1, \\ 2 & \text{при } dim_k T = 3, \\ 3 & \text{при } dim_k T = 4, \\ 2 & \text{при } dim_k T > 4. \end{cases}$$

Далі, порядок m_M мінімальної системи твірних алгебри $End\,M$ дорівнює:

$$m_M = \begin{cases} 1 & \text{при } \ dim_k T = 1, \\ 3 & \text{при } \ dim_k T = 3, 4 \\ s^2 + s + 1 & \text{при } \ dim_k T = 2s + 1 > 4. \end{cases}$$

Доведення проводиться за допомогою прямих нескладних обчислень.

Нагадаємо, що зображення T називається регулярним, якщо відповідний йому модуль є регулярним, тобто ізоморфний груповій алгебрі четверної групи Клейна (як модулю над собою).

Із останнього твердження маємо такий наслідок.

Наслідок 4.20. *Нехай T — довільне нерозкладне нерегулярне зображення постійного жорданового типу четверної групи Клейна розмірності $d \neq 1$ (у цьому випадку d непарне). Тоді $End\,T$ — комутативна алгебра, радикал якої в квадраті дорівнює нулю. Порядок її мінімальної системи твірних дорівнює $\frac{d^2+3}{4}$.*

4.3. Число нерозкладних зображень над скінченним полем.

Спочатку викладемо деякі прості факти, які випливають із властивостей дії групи на множині [93].

Нехай K — скінченне поле із q елементів (тоді q — степінь простого числа). Відомо, що число невироджених матриць розміру $n \times n$ над полем

K дорівнює

$$Q_n = (q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2)\dots(q^n - q^{n-1}).$$

Далі, якщо $A_1, \dots, A_m$ — деякі матриці розміру $n \times n$ над полем K, то число $N_K(A_1, \dots, A_m)$ всіх наборів матриць $B_1, \dots, B_m$, подібних даному набору матриць (тобто таких, що мають вигляд $C^{-1}A_1C, \dots, C^{-1}A_mC$), дорівнює числу Q_n, поділеному на число всіх невироджених матриць X, що належать стабілізатору $St(A_1, \dots, A_m)$ набору матриць $A_1, \dots, A_m$ (тобто таких, що $A_1X = XA_1, \dots, A_mX = XA_m$). Множину всіх невироджених матриць із $St(A_1, \dots, A_m)$ позначатимемо через $St_0(A_1, \dots, A_m)$. Покладемо $st(A_1, \dots, A_m) = |St(A_1, \dots, A_m)|$ і $st_0(A_1, \dots, A_m) = |St_0(A_1, \dots, A_m)|$. Із усього сказаного, зокрема, маємо, що

$$N_K(A_1, \dots, A_m) = \frac{Q_n}{st_0(A_1, \dots, A_m)}. \tag{4.1}$$

Надалі будемо писати $N_K(A)$ замість $N_K(A_1, \dots, A_m)$, $St(A)$ замість $St(A_1, \dots, A_m)$ і тому подібне, якщо набір матриць $A_1, \dots, A_m$ позначено через A.

Переходимо тепер до наступної матричної задачі. Розглядається матричне нерозкладне зображення постійного жорданового типу групи $(2, 2)$ над скінченним полем K характеристики 2. Добре відомо, що таке поле містить $q = 2^n$ елементів, де n — деяке натуральне число. Потрібно описати число всіх зображень над K, які еквівалентні цьому зображенню. Очевидно, що це число однакове для всіх еквівалентних зображень, тому достатньо розглянути наступні нерозкладні зображення, якими вичерпуються всі нерозкладні зображення з точністю до еквівалентності (див. вище):

$T_1)\quad a \to (1), \quad b \to (1),$

$$T_2)\qquad a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_3^s)\qquad a \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & E_s \ \ \overline{0} \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array}\right), \qquad b \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & \overline{0} \ \ E_s \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array}\right),$$

$$T_4^s)\qquad a \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} E_s \\ \widetilde{0} \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right), \qquad b \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} \widetilde{0} \\ E_s \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right),$$

Користуємося формулою 4.1 і теоремою 4.17.

1) Якщо $T = T_1 = (A, B)$, то, очевидно, $N_K(T) = 1$.

2) Якщо $T = T_2 = (A, B)$ то згідно теореми 4.17

$$X = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 11 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix},$$

а значить $st_0(T) = (q-1)q^3$ і згідно формули 4.1

$$N_K(T) = \frac{Q_4}{st_0(T)} = \frac{(q^4-1)(q^4-q)(q^4-q^2)(q^4-q^3)}{(q-1)q^3} = (q^4-1)(q^4-q)(q^4-q^2).$$

3) Якщо $T = T_3^s = (A, B)$, то згідно теореми 4.17 (відповідний випадок

при при $s = t$)

$$X = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 11 & \dots & 0 & 1(s+1) & \dots & 1(2s+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 11 & s(s+1) & \dots & s(2s+1) \\ \hline 0 & \dots & 0 & 11 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 11 \end{array}\right)$$

а значить $st_0(T) = (q-1)q^{s^2)}$ і згідно формули 4.1

$N_K(T) = \frac{Q_{2s+1}}{st_0(T)} = \frac{(q^{2s+1}-1)(q^{2s+1}-q)\cdots(q^{2s+1}-q^{2s-1})(q^{2s+1}-q^{2s})}{(q-1)q^{s(s+1)}} =$
$= \frac{(q^{2s+1}-1)(q^{2s}-1)\cdots(q^2-1)(q-1)q^{s(2s+1)}}{(q-1)q^{s(s+1)}} = q^{s^2}(q^{2s+1}-1)(q^{2s}-1)\cdots(q^2-1)$

4) Якщо $T = T_4^s = (A, B)$, то формули для чисел такі ж, як у попередньому випадку.

Враховуючи, що зображення T_3^s і T_4^s мають однакову розмірність, із проведених обчислень випливає наступна теорема.

Теорема 4.21. *Нехай поле K (характеристики 2) має порядок $q = 2^n$. Тоді число $N_K(m)$ всіх нерозкладних зображень постійного жорданового типу четверної групи Клейна в розмірності m дорівнює:*

$$N_K(m) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } m = 1; \\ q^3(q^4-1)(q^3-1)(q^2-1), & \text{якщо } m = 2; \\ 2q^{s^2}(q^{2s+1}-1)(q^{2s}-1)\cdots(q^2-1), & \text{якщо } m = 2s+1 \neq 1; \\ 0, & \text{якщо } m = 2s \neq 2. \end{cases}$$

4.4. Висновки до розділу

У цьому розділі описана категорія матричних зображень постійного жорданового типу для четверної групи Клейна. Для довільної фіксованої розмірності обчислено загальне число нерозкладних матричних зображень четверної групи Клейна над скінченним полем, які мають постійний жордановий тип.

Результати цього розділу опубліковані в роботах [70], [75] і [79].

Розділ 5

Матричні зображення діедральних груп постійного рангу

5.1. Постановка задачі

У цьому розділі вивчаються матричні зображення скінченних діедральних 2-груп

$$G_{2^m} = \langle a, b \,|\, a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^{2^{m-1}} = 1\rangle \ (m \geq 2)$$

та нескінченної діедральної групи

$$G_\infty = \langle a, b \,|\, a^2 = 1, b^2 = 1\rangle$$

над нескінченним полем k характеристики 2. Порядок групи G_{2^m} дорівнює 2^m. Випадок $m = 2$ виключається із розгляду, бо G_4 — четверна група Клейна (матричні зображення якої вивчалися в розділі 2).

Матричне зображення T групи G_∞ розмірності n задається парою матриць A, B розміру $n \times n$ таких, що $A^2 = E$, $B^2 = E$ (E — одинична матриця). Якщо ж при цьому $(AB)^{2^{m-1}} = E$, то T буде зображенням групи G_{2^m}.

По аналогії з четверною групою Клейна, матричне зображення T групи $G_{2^{m+1}}, m \in (\mathbb{N} \setminus 1) \cup \infty$ називається *зображенням постійного рангу відносно* a, b, якщо ранг матриці $\alpha(E + T_a) + \beta(E + T_b)$, де $\alpha, \beta \in k$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, не залежить від вибору α і β (E позначає одиничну матрицю). Але зауважимо, що на відміну від групи Клейна постійність рангу не забезпечує постійність жорданової форми.

5.2. Означення

Однопараметричним сімейством зображень діедральної групи G (параметр входить поліноміально) назвемо нескінченну сукупність зображень однієї розмірності, які отримані із одного зображення T над кільцем поліномів $k[\alpha]$ підстановкою замість α елементів деякої фіксованої підмножини k_0 поля k. Природно ототожнювати однопараметричне сімейство із зображенням T, вказавши при цьому множину k_0. Однопараметричне сімейство зображень (розмірності n) назвемо *серією* (розмірності n), якщо всі його зображення нерозкладні і попарно нееквівалентні. Дві серії назвемо *незалежними*, якщо не існує зображення із першої серії, яке еквівалентне зображенню із другої серії. Множину серій M розмірності n назвемо *повною*, якщо з точністю до еквівалентності існую лише скінченна кількість нерозкладних зображень розмірності n, які не належать ні одній серії, і *строго повною*, якщо додатково всі серії попарно незалежні. Якщо ж серії, які належать множині M, мають різні розмірності і N — множина цих розмірностей, то M назвемо *повною* (відповідно *строго повною*), якщо такою є кожна підмножина множини серій M, яка складається із усіх серій розмірності $n \in N$.

Всі означення легко переносяться на випадок зображень, що задовольняють природним додатковим умовам. Нас цікавить випадок, коли розглядаються зображення постійного рангу.

5.3. Однопараметричні сімейства зображень постійного рангу розмірності $n < 7$

Протягом цього підрозділу поле k характеристики 2 вважається алгебраїчно замкнутим.

Теорема 5.1. *Три серії матричних зображень діедральної групи* G_∞

1)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

2)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, „$$

3)

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де параметр α *належить* $k \backslash 0$*, утворюють строго повну множину серій відносно всіх зображень розмірності* $n < 8$*, які мають постійний ранг.*

Перед тим, як перейти до доведення теореми, приведемо деякі міркування та пояснення.

Будемо використовувати приведені в підрозділі 1.4 класифікаційні результати, враховуючи той факт, що якщо пара матриць задає зображення діедральної групи над полем характеристики 2, то матриці $A_0 = E + A$

$B_0 = E + B$ є парою самоанульовних матриць (а саме такі пари розглядаються в 1.4).

Зобразимо графічно послідовності із $N_m (m \geq 0)$ і N_{2m}^0 $(m > 0)$.

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m),$$

$\alpha = (\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\ )$, де $\alpha_i \in -1, 1, -2, 2$ і до того ж парні і непарні числа чергуються.

Домовимося, що числу 1 відповідає стрілка $\xrightarrow{a}$, числу -1 відповідає стрілка $\xleftarrow{a}$, числу 2 відповідає стрілка $\xrightarrow{b}$, числу -2 відповідає стрілка $\xleftarrow{b}$.

Тоді отримаємо деякий орієнтований граф, який є ланцюгом для послідовності із N_m і циклом для послідовності із N_{2m}^0. Наприклад, для послідовності $(1, -2, 1, 2)$ із N_4 граф матиме такий вигляд: $\overset{1}{\bullet} \xrightarrow{a} \overset{2}{\bullet} \xleftarrow{b} \overset{3}{\bullet} \xrightarrow{a} \overset{4}{\bullet} \xrightarrow{b} \overset{5}{\bullet}$.

Зауважимо, що підграфи
$\xrightarrow{a}\xrightarrow{a}$, $\xrightarrow{b}\xrightarrow{b}$, $\xleftarrow{a}\xleftarrow{a}$, $\xleftarrow{b}\xleftarrow{b}$, $\xrightarrow{a}\xleftarrow{a}$, $\xrightarrow{b}\xleftarrow{b}$, $\xleftarrow{a}\xrightarrow{a}$, $\xleftarrow{b}\xrightarrow{b}$

неможливі. Звідси випливає, що цикл завжди має парну довжину (число стрілок).

Матричне зображення виписується по графу наступним чином: всі діагональні елементи обох матриць одиничні, недіагональний елемент a_{ij} (відповідно b_{ij}) матриці A (відповідно матриці B) не дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли із i в j існує стрілка з позначкою a (відповідно b). При цьому у випадку ланцюга всі ненульові елементи матриць є одиничними, а у випадку циклу, всі елементи матриць, окрім одного (недіагонального), є одиничними, а виділений є параметром $\alpha \in k$, $\alpha \neq 0$.

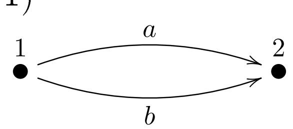
Отже, будемо розглядати різні цикли довжини 2, 4, 6 та відповідні їм матричні зображення (з одним параметром), які задаються парою матриць A, B і дивитися чи залежить, чи ні, ранг матриці $xA_0 + yB_0$ від $(x, y) \neq (0, 0)$, де $A_0 = E + A, B_0 = E + B$. Оскільки для будь-якого циклу ранг матриць A і B однаковий (випливає із означень), то можна вважати, що $y = 1$.

Цикли можна розглядати з точністю до еквівалентності (яка задається відповідними умовами на послідовності). Якщо зафіксовано якийсь цикл, то еквівалентними до нього є: 1) цикли, які отримуються обертанням за годинниковою стрілкою; 2) цикл, у якому всі стрілки взяті в протилежному напрямку; 3) цикли, які отримуються обертанням за годинниковою стрілкою циклу, вказаному в 2). Якщо нас цікавлять зображення з одним параметром, то потрібно розглядати лише неперіодичні цикли (бо періодичним циклам, за означенням, відповідають зображення його періоду як циклу плюс клітина Жордана з параметром α на головній діагоналі, а не такі, як для неперіодичних циклів), а якщо нас цікавлять серії взагалі,то треба враховувати і періодичні цикли.

Переходимо до доведення теореми. Спочатку виділимо (шляхом перебору) всі неперіодичні цикли, яким відповідають однопараметричні зображення постійного рангу.

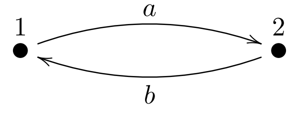
5.3.1. Цикли довжини 2. З точністю до еквівалентності маємо два цикли довжини 2:

1)



.

2)



Вияснимо, коли відповідні їм однопараметричні сімейства мають постійний ранг.

$$1)\ A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_0 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ xA_0 + B_0 = \begin{pmatrix} 0 & x+\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Це однопараметричне сімейство має непостійний ранг.

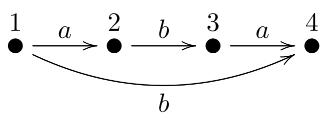
2) $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, $xA_0 + B_0 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$,

$rank(xA_0 + B_0) = 2 > rank(A_0) = rank(B_0)$.

Це однопараметричне сімейство має непостійний ранг.

5.3.2. Цикли довжини 4. Маємо з точністю до еквівалентності 4 цикли:

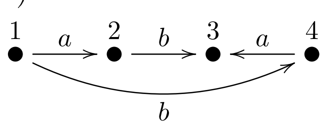
1)



$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ xA_0 + B_0 = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$rank(xA_0 + B_0) = 3 > rank(A_0) = rank(B_0) = 2$.

2)



$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ xA_0 + B_0 = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix},$$

$rank(xA_0 + B_0) = 2 = rank(A_0) = rank(B_0)$.

3)

$$\begin{tikzcd}
\overset{1}{\bullet} \arrow[r, "a"] & \overset{2}{\bullet} \arrow[r, "b"] & \overset{3}{\bullet} & \overset{4}{\bullet} \arrow[l, "a"'] \arrow[lll, bend left, "b"]
\end{tikzcd}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ xA_0 + B_0 = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & x & 0 \end{pmatrix},$$

$rank(xA_0 + B_0) = 3 > rank(A_0) = rank(B_0) = 2.$

5.3.3. Цикли довжини 6. Усього таких циклів 2^6. Враховуючи означення еквівалентності циклів, можна розглядати лише цикли, що починаються стрілкою $\overset{1}{\bullet}\xrightarrow{\alpha}\overset{2}{\bullet}$

Далі буде простіше не описувати спочатку всі неперіодичні цикли з точністю до еквівалентності, а скористатися ідеєю еквівалентності частково. Очевидно, що будь-який цикл довжини 6 або еквівалентний циклу, який починається з ланцюга $\xrightarrow{a}\xrightarrow{b}$, або дорівнює періодичному циклу

P^-

$$\begin{tikzcd}
\overset{1}{\bullet} \arrow[r, "a"] \arrow[rrrrr, bend right, "b"'] & \overset{2}{\bullet} & \overset{3}{\bullet} \arrow[l, "b"'] \arrow[r, "a"] & \overset{4}{\bullet} & \overset{5}{\bullet} \arrow[l, "b"'] \arrow[r, "a"] & \overset{6}{\bullet}
\end{tikzcd}$$

В першому ж випадку єдиним періодичним циклом є цикл

P^+

$$\begin{tikzcd}
\overset{1}{\bullet} \arrow[r, "a"] & \overset{2}{\bullet} \arrow[r, "b"] & \overset{3}{\bullet} \arrow[r, "a"] & \overset{4}{\bullet} \arrow[r, "b"] & \overset{5}{\bullet} \arrow[r, "a"] & \overset{6}{\bullet} \arrow[lllll, bend left, "b"]
\end{tikzcd}$$

Отже, розглядаємо неперіодичні цикли, які починаються з ланцюга $\xrightarrow{a}\xrightarrow{b}$. При цьому одночасно будемо перевіряти зображення для неперіодичних циклів на постійний ранг. А на останньому кроці із зображень постійного рангу вибрати ті, що відповідають нееквівалентним циклам.

1)

$$\begin{tikzcd}
\overset{1}{\bullet} \arrow[r, "a"] \arrow[rrrrr, bend right, "b"'] & \overset{2}{\bullet} \arrow[r, "b"] & \overset{3}{\bullet} \arrow[r, "a"] & \overset{4}{\bullet} \arrow[r, "b"] & \overset{5}{\bullet} \arrow[r, "a"] & \overset{6}{\bullet}
\end{tikzcd}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$xA_0 + B_0 = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$rank(xA_0 + B_0) = 5 > rank(A_0) = rank(B_0)$.

3)

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, "a"] \arrow[rrrrr, bend right, "b"'] & \overset{2}{\bullet} \arrow[r, "b"] & \overset{3}{\bullet} & \overset{4}{\bullet} \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "b"] & \overset{5}{\bullet} \arrow[r, "a"] & \overset{6}{\bullet} \end{tikzcd}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$
xA_0 + B_0 = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$rank(xA_0 + B_0) = 4 > rank(A_0) = rank(B_0)$. .

4)

$$
\begin{tikzcd}
\overset{1}{\bullet} \arrow[r, "a"] \arrow[rrrrr, bend right, "b"'] & \overset{2}{\bullet} \arrow[r, "b"] & \overset{3}{\bullet} \arrow[r, "a"] & \overset{4}{\bullet} & \overset{5}{\bullet} \arrow[l, "b"'] \arrow[r, "a"] & \overset{6}{\bullet}
\end{tikzcd}
$$

$$
A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
xA_0 + B_0 = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$rank(xA_0 + B_0) = 4 > rank(A_0) = rank(B_0)$.

5)

$$
\begin{tikzcd}
\overset{1}{\bullet} \arrow[r, "a"] \arrow[rrrrr, bend right, "b"'] & \overset{2}{\bullet} \arrow[r, "b"] & \overset{3}{\bullet} \arrow[r, "a"] & \overset{4}{\bullet} \arrow[r, "b"] & \overset{5}{\bullet} & \overset{6}{\bullet} \arrow[l, "a"']
\end{tikzcd}
$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$xA_0 + B_0 = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix},$$

$rank(xA_0 + B_0) = 4 > rank(A_0) = rank(B_0).$

7)

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a"] \arrow[rrrrr, bend right, "b"'] & 2 \arrow[r, "b"] & 3 & 4 \arrow[l, "a"'] & 5 \arrow[l, "b"'] \arrow[r, "a"] & 6 \end{tikzcd}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$xA_0 + B_0 = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$rank(xA_0 + B_0) = 3 = rank(A_0) = rank(B_0).$

8)

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, "a"] \arrow[rrrrr, bend right, "b"'] & \overset{2}{\bullet} \arrow[r, "b"] & \overset{3}{\bullet} \arrow[r, "a"] & \overset{4}{\bullet} & \overset{5}{\bullet} \arrow[l, "b"'] & \overset{6}{\bullet} \arrow[l, "a"'] \end{tikzcd}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$xA_0 + B_0 = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix},$$

$rank(xA_0 + B_0) = 4 > rank(A_0) = rank(B_0).$

10)

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, "a"] \arrow[rrrrr, bend right, "b"'] & \overset{2}{\bullet} \arrow[r, "b"] & \overset{3}{\bullet} & \overset{4}{\bullet} \arrow[l, "a"'] & \overset{5}{\bullet} \arrow[l, "b"'] & \overset{6}{\bullet} \arrow[l, "a"'] \end{tikzcd}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$xA_0 + B_0 = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix},$$

$rank(xA_0 + B_0) = 4 > rank(A_0) = rank(B_0)$.

15)

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, "a"] \arrow[rrrrr, bend right, "b"'] & \overset{2}{\bullet} \arrow[r, "b"] & \overset{3}{\bullet} & \overset{4}{\bullet} \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "b"] & \overset{5}{\bullet} & \overset{6}{\bullet} \arrow[l, "a"'] \end{tikzcd}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$xA_0 + B_0 = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix},$$

$rank(xA_0 + B_0) = 3 = rank(A_0) = rank(B_0)$.

19)

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[r, "b"] & 3 & 4 \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "b"] & 5 \arrow[r, "a"] & 6 \arrow[lllll, bend left, "b"] \end{tikzcd}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$xA_0 + B_0 = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$rank(xA_0 + B_0) = 5 > rank(A_0) = rank(B_0)$.

20)

$$\begin{tikzcd}
\overset{1}{\bullet} \arrow[r, "a"] & \overset{2}{\bullet} \arrow[r, "b"] & \overset{3}{\bullet} \arrow[r, "a"] & \overset{4}{\bullet} & \overset{5}{\bullet} \arrow[l, "b"'] \arrow[r, "a"] & \overset{6}{\bullet} \arrow[lllll, bend left, "b"]
\end{tikzcd}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$xA_0 + B_0 = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$rank(xA_0 + B_0) = 5 > rank(A_0) = rank(B_0).$

21)

$$\begin{tikzcd}
\overset{1}{\bullet} \arrow[r, "a"] & \overset{2}{\bullet} \arrow[r, "b"] & \overset{3}{\bullet} \arrow[r, "a"] & \overset{4}{\bullet} \arrow[r, "a"] & \overset{5}{\bullet} & \overset{6}{\bullet} \arrow[l, "a"'] \arrow[lllll, bend left, "b"]
\end{tikzcd}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$xA_0 + B_0 = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix},$$

$rank(xA_0 + B_0) = 5 > rank(A_0) = rank(B_0).$

23)

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, "a"] & \overset{2}{\bullet} \arrow[r, "b"] & \overset{3}{\bullet} & \overset{4}{\bullet} \arrow[l, "a"'] & \overset{5}{\bullet} \arrow[l, "b"'] \arrow[r, "a"] & \overset{6}{\bullet} \arrow[lllll, bend left, "b"] \end{tikzcd}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$xA_0 + B_0 = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$rank(xA_0 + B_0) = 4 > rank(A_0) = rank(B_0).$

24)

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, "a"] & \overset{2}{\bullet} \arrow[r, "b"] & \overset{3}{\bullet} \arrow[r, "a"] & \overset{4}{\bullet} & \overset{5}{\bullet} \arrow[l, "b"'] & \overset{6}{\bullet} \arrow[l, "a"'] \arrow[lllll, bend left, "b"] \end{tikzcd}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$xA_0 + B_0 = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix},$$

$rank(xA_0 + B_0) = 4 > rank(A_0) = rank(B_0).$

26)

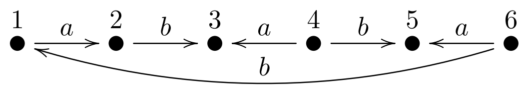
$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, "a"] & \overset{2}{\bullet} \arrow[r, "b"] & \overset{3}{\bullet} & \overset{4}{\bullet} \arrow[l, "a"'] & \overset{5}{\bullet} \arrow[l, "b"'] & \overset{6}{\bullet} \arrow[l, "a"'] \arrow[lllll, bend left, "b"] \end{tikzcd}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$xA_0 + B_0 = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix},$$

$rank(xA_0 + B_0) = 4 > rank(A_0) = rank(B_0).$

31)



$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$xA_0 + B_0 = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix},$$

$rank(xA_0 + B_0) = 4 > rank(A_0) = rank(B_0).$

Маємо, що ранг матриці $xA_0 + B_0$ зберігається у випадку циклів 7) і 15).

7)

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "a"] \arrow[rrrrr, bend right, "b"'] & 2 \arrow[r, "b"] & 3 & 4 \arrow[l, "a"'] & 5 \arrow[l, "b"'] \arrow[r, "a"] & 6
\end{tikzcd}$$

$rank(xA_0 + B_0) = 3 = rank(A_0) = rank(B_0)$.

15)

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "a"] \arrow[rrrrr, bend right, "b"'] & 2 \arrow[r, "b"] & 3 & 4 \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "b"] & 5 & 6 \arrow[l, "a"']
\end{tikzcd}$$

$rank(xA_0 + B_0) = 3 = rank(A_0) = rank(B_0)$.

Отже, з обчисленого випливає, що теорема 5.1 справедлива при умові, що розглядаються лише неперіодичні цикли. Але ж в теоремі говориться про серії взагалі, а тому треба додатково розглянути і періодичні цикли. Періодичні цикли з точністю до еквівалентності вичерпуються циклом довжини 4

$$\begin{tikzcd}
3 \arrow[r, "a"] & 4 \arrow[r, "b"] & 5 \arrow[r, "a"] & 6 \arrow[lll, bend left, "b"]
\end{tikzcd}$$

і циклами P^- і P^+.

В першому випадку пара матриць виписується (див. підрозділ 1.4) так як і у випадку 1) для циклів довжини 2, але елемент 1 треба замінити на одиничну матрицю розмірності 2, а елемент α на клітину Жордана розмірності 2 з власним числом α. У випадках P^- і P^+ пари матриць виписуються так як (відповідно) у випадках 1) і 2) для циклів довжини 2, але елемент 1 треба замінити на одиничну матрицю розмірності 3, а елемент α на клітину Жордана розмірності 3 з власним числом α. В усіх цих трьох випадках пари матриць не будуть мати постійний ранг (доведення аналогічне доведенням для циклів довжини 2).

Теорема 5.1 доведена.

5.4. Теореми про число зображень постійного та непостійного рангу скінченних діедральних груп

5.4.1. У цьому пункті розглядаються зображення діедральної групи

$$G_8 = \langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^4 = 1 \rangle$$

порядку 8 над нескінченним полем k характеристики 2. Довільне матричне зображення T групи G_8 задається парою квадратних матриць T_a, T_b (однакового розміру) таких, що $T_a^2 = E, T_b^2 = E$ і $(T_f T_b)^4 = E$. Зображення T називається точним, якщо $(T_a T_b)^2 \neq E$.

Теорема 5.2. *Нехай k — нескінченне поле характеристики 2 і n — натуральне число, яке ділиться на 4. Тоді в розмірності n група G_8 має нескінченно багато точних нерозкладних попарно нееквівалентних зображень постійного рангу.*

Підкреслимо (див. розділ 2), що для четверної групи Клейна (діедральної групи порядку 4) розмірностей з такою властивістю не існує.

Переходимо до доведення теореми. Нехай $n = 4m$. Для ненульового елемента $\lambda \in k$ розглянемо наступне зображення $T = T(n, \lambda)$ (розмірності n) групи D_8:

$$a \to T_a = \begin{pmatrix} E_m & E_m & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m & E_m \end{pmatrix},$$

$$b \to T_b = \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 & J_m(\lambda) \\ 0 & E_m & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix},$$

де $J_m(\lambda)$ — клітина Жордана розмірності m з власним числом λ. Той факт, що T є точним зображенням групи D_8, випливає із рівностей

$$(T_a T_b)^4 = \left[\begin{pmatrix} E_m & E_m & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 & J_m(\lambda) \\ 0 & E_m & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix} \right]^4 =$$

$$= \begin{pmatrix} E_m & E_m & E_m & J_m(\lambda) \\ 0 & E_m & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m & E_m \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} E_m & 0 & E_m + J_m(\lambda) & 0 \\ 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix}^2 = E_n.$$

Твердження 5.3. *Зображення $T(n, \lambda)$ нерозкладні та попарно нееквівалентні.*

Доведення. Твердження випливає із основного класифікаційного результату роботи [8] (див. також підрозділ 1.4). Приведемо явне доведення.

Розглянемо довільні зображення $T(n, \lambda)$ і $T(n, \overline{\lambda})$, де $\lambda \neq \overline{\lambda}$, і нехай

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix}$$

— оборотна блокова матриця розмірності $n = 4m$ з блоками X_{ij} розмірності m така, що

$$T_a(n, \lambda)X = XT_a(n, \overline{\lambda}), \quad T_b(n, \lambda)X = XT_b(n, \overline{\lambda})$$

або, в еквівалентній формі,

$$(E_n + T_a)X = X(E_n + T_a), \quad (E_n + T_b)X = X(E_n + T_b).$$

Отже, маємо рівності

$$\begin{pmatrix} 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & J_m(\lambda) \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & J_m(\overline{\lambda}) \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Після перемноження матриць отримуємо рівності:

$$\begin{pmatrix} X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X_{11} & X_{14} & 0 \\ 0 & X_{21} & X_{24} & 0 \\ 0 & X_{31} & X_{34} & 0 \\ 0 & X_{41} & X_{44} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} JX_{41} & JX_{42} & JX_{43} & JX_{44} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_{12} & X_{11}\overline{J} \\ 0 & 0 & X_{22} & X_{21}\overline{J} \\ 0 & 0 & X_{32} & X_{31}\overline{J} \\ 0 & 0 & X_{42} & X_{41}\overline{J} \end{pmatrix},$$

де $J = J_m(\lambda)$, $\overline{J} = J_m(\overline{\lambda})$. Із цих матричних рівностей випливає (з урахуванням оборотності J і $\overline{J}$), що матриця X має наступний вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & * & * & * \\ 0 & X_{11} & * & * \\ 0 & 0 & X_{11} & 0 \\ 0 & 0 & * & X_{11} \end{pmatrix}$$

і при цьому $J_m(\lambda)X_{11} = X_{11}J_m(\overline{\lambda})$. Оскільки матриця X однаковою перестановкою горизонтальних і вертикальних смуг приводиться до верхньо блоково-трикутного вигляду, то вона оборотна тоді і лише тоді, коли оборотна матриця X_{11}. Значить матриця X не оборотна, бо інакше $J_m(\lambda)$ і

$J_m(\overline{\lambda})$ були б подібними, а це (як добре відомо із лінійної алгебри) не так. Отже, зображення $T(n,\lambda)$ і $T(n,\overline{\lambda})$ не еквівалентні.

Нехай тепер $\lambda = \overline{\lambda}$. Із попередніх обчислень маємо, що в цьому випадку алгебра $\mathrm{End}(T)$ ендоморфізмів зображення $T = T(n,\lambda)$ (а згідно означення це алгебра, що складається із всіх матриць Z таких, що $TZ = ZT$) — це алгебра всіх матриць X вказаного вигляду разом із рівністю $J_m(\lambda)X_{11} = X_{11}J_m(\lambda)$. Оскільки з клітиною Жордана комутують лише матриці, що є поліномами від неї, то всі X_{11} такі, що $J_m(\lambda)X_{11} = X_{11}J_m(\lambda)$ утворюють локальну алгебру, а значить локальною є і алгебра $\mathrm{End}(T)$. А тоді за добре відомою теоремою зображення $T = T(n,\lambda)$ нерозкладне.

Твердження доведено.

Щоб завершити доведення теореми, впевнимося в тому, що зображення $T = T(n,\lambda)$ має постійний ранг. Матриця $\alpha(E+T_a)+\beta(E+T_b)$ дорівнює

$$\alpha\begin{pmatrix}0 & E_m & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & E_m & 0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & J_m(\lambda)\\ 0 & 0 & E_m & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \alpha E_m & 0 & \beta J_m(\lambda)\\ 0 & 0 & \beta E_m & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha E_m & 0\end{pmatrix}.$$

Оскільки ранги матриць $\alpha(E+T_a)$ і $\beta(E+T_b)$ дорівнюють $2m$, то достатньо показати, що ранг $2m$ має матриця $\alpha(E+T_a)+\beta(E+T_b)$ при $\alpha = 1, \beta \neq 0$, тобто матриця

$$E + T_a + \beta(E+T_b) = \begin{pmatrix}0 & E_m & 0 & \beta J_m(\lambda)\\ 0 & 0 & \beta E_m & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & E_m & 0\end{pmatrix}.$$

А це випливає із такої рівності:

$$\begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 & -\beta E_m \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_m & 0 & \beta J_m(\lambda) \\ 0 & 0 & \beta E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 & -\beta J_m(\lambda) \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \end{pmatrix}.$$

5.4.2. У цьому пункті розглядаються зображення діедральної групи

$$G_{16} = \langle a, b \,|\, a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^8 = 1 \rangle$$

порядку 16 над нескінченним полем k характеристики 2. Довільне матричне зображення T групи G_{16} задається парою квадратних матриць T_a, T_b (однакового розміру) таких, що $T_a^2 = E, T_b^2 = E$ і $(T_f T_b)^8 = E$. Зображення T називається точним, якщо $(T_a T_b)^4 \neq E$.

Наступна теорема показує, що нескінченне число розмірностей, в кожній з яких існує нескінченно багато точних нерозкладних зображень, має не лише четверна група Клейна.

Теорема 5.4. *Нехай k — нескінченне поле характеристики 2 і n — натуральне число, яке ділиться на 6. Тоді в розмірності n група G_{16} має нескінченно багато точних нерозкладних попарно нееквівалентних зображень непостійного рангу.*

Переходимо до доведення теореми.

Нехай $n = 6m$. Для ненульового елемента $\lambda \in k$ розглянемо наступне зображення $T = T(n, \lambda)$ (розмірності n) групи D_{16}:

$$a \to T_a = \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 & 0 & E_m \\ 0 & 0 & 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix},$$

$$b \to T_b = \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_m & 0 & E_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_m(\lambda) & 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_m & E_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix},$$

де $J_m(\lambda)$ — клітина Жордана розмірності m з власним числом λ.

Легко бачити (враховуючи оборотність матриці $J_m(\lambda)$), що це зображення не є зображенням постійного рангу.

Покажемо, що T є точним зображенням групи D_{16}:

$$T_aT_b = \begin{pmatrix} E_m & J_m(\lambda) & 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 & 0 & E_m & E_m \\ E_m & 0 & E_m & 0 & 0 & E_m \\ 0 & J_m(\lambda) & 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_m & E_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix},$$

$$(T_aT_b)^2 = \begin{pmatrix} E_m & J_m(\lambda) & 0 & 0 & J_m(\lambda) & J_m(\lambda) \\ 0 & E_m & 0 & 0 & 0 & E_m \\ 0 & J_m(\lambda) & E_m & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m & J_m(\lambda) & J_m(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix},$$

$$(T_aT_b)^4 = \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 & 0 & 0 & J_m(\lambda) \\ 0 & E_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 & J_m(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix}$$

і значить $(T_aT_b)^8 = E_{2m}$.

Твердження 5.5. *Зображення $T(n,\lambda)$ нерозкладні та попарно нееквівалентні.*

Доведення. Твердження випливає із основного класифікаційного результату роботи [8] (див. також підрозділ 1.4). Приведемо явне доведення.

Розглянемо довільні зображення $T(n,\lambda)$ і $T(n,\overline{\lambda})$, де $\lambda \neq \overline{\lambda}$. Нехай

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} & X_{25} & X_{26} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} & X_{35} & X_{36} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} & X_{45} & X_{46} \\ X_{51} & X_{52} & X_{53} & X_{54} & X_{55} & X_{56} \\ X_{61} & X_{62} & X_{63} & X_{64} & X_{65} & X_{66} \end{pmatrix}$$

— оборотна блокова матриця розмірності $n = 6m$ з блоками X_{ij} розмірності m така, що

$$T_a(n,\lambda)X = XT_a(n,\overline{\lambda}), \quad T_b(n,\lambda)X = XT_b(n,\overline{\lambda})$$

або, в еквівалентній формі,

$$(E_n + T_a)X = X(E_n + T_a), \quad (E_n + T_b)X = X(E_n + T_b).$$

Із першої рівності випливає, що

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} & X_{25} & X_{26} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} & X_{35} & X_{36} \\ 0 & 0 & 0 & X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ 0 & 0 & 0 & X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ 0 & 0 & 0 & X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix}.$$

Другу рівність запишемо в розгорнутому вигляді (підставивши і перемноживи матриці):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} \\ J_m(\lambda)X_{21} & J_m(\lambda)X_{22} & J_m(\lambda)X_{23} & J_m(\lambda)X_{24} & J_m(\lambda)X_{25} & J_m(\lambda)X_{26} \\ 0 & 0 & 0 & X_{31} & X_{32} & X_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} X_{13} & X_{14}J_m(\overline{\lambda}) & 0 & 0 & 0 & X_{15} \\ X_{23} & X_{24}J_m(\overline{\lambda}) & 0 & 0 & 0 & X_{25} \\ X_{33} & X_{34}J_m(\overline{\lambda}) & 0 & 0 & 0 & X_{35} \\ 0 & X_{11}J_m(\overline{\lambda}) & 0 & 0 & 0 & X_{12} \\ 0 & X_{21}J_m(\overline{\lambda}) & 0 & 0 & 0 & X_{22} \\ 0 & X_{31}J_m(\overline{\lambda}) & 0 & 0 & 0 & X_{32} \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо (з урахуванням оборотності J і $\overline{J}$), що

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & J_m(\lambda)X_{26} & 0 & 0 & 0 & X_{16} \\ 0 & X_{11} & 0 & 0 & 0 & X_{26} \\ 0 & 0 & X_{11} & J_m(\lambda)X_{26}J_m(\overline{\lambda})^{-1} & X_{16} & X_{36} \\ 0 & 0 & 0 & X_{11} & J_m(\lambda)X_{26} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{11} \end{pmatrix}.$$

і, окрім того, $J_m(\lambda)X_{11} = X_{11}J_m(\overline{\lambda})$.

Оскільки X як верхньо блоково-трикутна матриця оборотна тоді і лише тоді, коли оборотна X_{11}. Значить X не оборотна, бо інакше $J_m(\lambda)$ і $J_m(\overline{\lambda})$ були б подібними, а це (як добре відомо із лінійної алгебри) не так. Отже, зображення $T(n, \lambda)$ і $T(n, \overline{\lambda})$ не еквівалентні.

Нерозкладність матриці $T(n, \lambda)$ випливає із таких же міркувань, як при доведенні теореми в попередньому пункті.

5.4.3. Сформулюємо деякі наслідки із попередніх теорем.

Нагадаємо, що ми виключаємо із діедральних груп четверну групу Клейна.

Теорема 5.6. *Нехай k — нескінченне поле характеристики 2 і n — натуральне число, яке ділиться на 4. Тоді в розмірності n будь-яка скінченна діедральна група має нескінченно багато нерозкладних попарно нееквівалентних зображень постійного рангу.*

Ця теорема випливає із теореми 5.2, якщо врахувати, що кожна скінченна діедральна група є фактор-групою довільної діедральної групи більшого порядку.

Тепер перейдемо до зображень непостійного рангу.

Із твердження 2.6, доведеної ще в другому розділі, випливає таке твердження.

Теорема 5.7. *Нехай k — нескінченне поле характеристики 2 і n — парне натуральне число. Тоді в розмірності n будь-яка скінченна діедральна група має нескінченно багато нерозкладних попарно нееквівалентних зображень непостійного рангу.*

Ця теорема випливає із твердження 2.6, якщо врахувати, що четверна група Клейна є фактор-групою довільної діедральної групи.

Із теореми 5.4 інше твердження про зображення непостійного рангу.

Теорема 5.8. *Нехай k — нескінченне поле характеристики 2 і n — натуральне число, яке ділиться на 6. Тоді в розмірності n будь-яка діедральна група порядку $m > 8$ має нескінченно багато нерозкладних попарно нееквівалентних зображень непостійного рангу.*

Із доведень теорем 5.2, 5.4 та твердження 2.6 маємо, що в кожній теоремі цього пункту нескінченну множину нерозкладних зображень можна вважати серією.

5.5. Наслідок про загальні серії постійного рангу

Поле k характеристики 2 вважаємо алгебраїчно замкнутим.

За теоремою 5.2 для групи D_∞ (і навіть для D_8) маємо наступну серію зображень постійного рангу:
серія A)

$$a \to T_a = \begin{pmatrix} E_m & E_m & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m & E_m \end{pmatrix},$$

$$b \to T_b = \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 & J_m(\lambda) \\ 0 & E_m & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix},$$

де $J_m(\lambda)$ — клітина Жордана розмірності m з власним числом λ.

Якщо цю серію А) порівняти з 1-ою серією із теореми 5.1 (про серії розмірності $n < 8$), а саме

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то видно, що вона отримується із серії A_1, B_1 шляхом підстановки одиничної (відповідно нульової) матриці замість одиничного (відповідно нульового) елементу і клітини Жордана з власним числом λ замість параметру α.

Якщо проробити цю процедуру із зображеннями 2) і 3) теореми 5.1 тобто

2)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

3)

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то отримаємо наступні серії постійного зображувального типу:

серія B)

$$a \to T_a = \begin{pmatrix} E_m & E_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_m & E_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix},$$

$$b \to T_b = \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 & 0 & 0 & J_m(\alpha) \\ 0 & E_m & E_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix},$$

серія C)

$$a \to T_a = \begin{pmatrix} E_m & E_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_m & E_m \end{pmatrix},$$

$$b \to T_b = \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 & 0 & 0 & J_m(\alpha) \\ 0 & E_m & E_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix}.$$

З урахуванням теореми 5.1. Із сказаного випливає, що серії B), C), які пронизують всі розмірності, що діляться на 3, є незалежні в кожній розмірності.

Із сказаного випливають, зокрема, наступні тереми (в яких діедральна група може бути як скінченною, так і нескінченною).

Теорема 5.9. *Нехай k — алгебраїчно замкнуте поле характеристики 2 і n — натуральне число, яке ділиться на 6. Тоді в розмірності n довільна діедральна група має принаймні дві незалежні серії зображень постійного рангу.*

Теорема 5.10. *Нехай k — алгебраїчно замкнуте поле характеристики 2 і n — натуральне число, яке ділиться на 12. Тоді в розмірності n довільна діедральна група має принаймні три попарно незалежні серії зображень постійного рангу.*

Теорема 5.9 випливає із того, що серії B) і C) для нескінченної діедральної групи є по суті серією зображень діедральної групи порядку 8. Рівність $(T_a T_b)^4 = E$ легко перевірити безпосередніми обчисленнями (аналогічними тим, які проводились при доведенні теорем 5.2 і 5.4).

За вказані в теоремі 5.10 серії можна взяти серії A), B), C) (відповідної розмірності).

Із теореми 5.1 випливає, що якщо в теоремах 5.9, 5.10 число n взяти мінімальним, то число серій буде в точності таким, як в них указано.

5.6. Висновки до розділу

У цьому розділі для нескінченної діедральної групи описана строго повна множина серій модулярних зображень відносно всіх зображень розмірності $n < 8$, які мають постійний ранг. Доведено існування нескінченного числа розмірностей, в кожній із яких для діедральних 2-груп існує нескінченне число нерозкладних попарно нееквівалентних зображень постійного рангу чи непостійного рангу. Доведено низку тверджень про серії нерозкладних зображень постійного рангу.

Результати цього розділу опубліковані в роботах [73], [74], [81].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота пов'язана із сучасними аспектами теорії матричних зображень скінченних груп.

Вивчаються матричні зображення четверної групи Клейна над алгебраїчно замкнутим полем характеристики 2. Описано зображення постійного жорданового типу для цієї групи та отримано узагальнення на матричні зображення локальних алгебр над полем довільної характеристики.

Досліджуються матричні зображення елементарних абелевих p-груп над алгебраїчно замкнутим полем характеристики p. Доведено, що групи $G = \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$ $(p > 2)$ і $G = \mathbb{Z}/2 \times \cdots \times \mathbb{Z}/2$ $(n > 2$ разів) є cJ-дикими Отримано повний опис cJ-диких груп і показано, що в інших випадках група має cJ–скінченний тип або є cJ–дискретною. Вивчаються також зображення малих розмірностей.

Описана категорія матричних зображень постійного жорданового типу для четверної групи Клейна. Для довільної фіксованої розмірності обчислено загальне число нерозкладних матричних зображень четверної групи Клейна над скінченним полем, які мають постійний жордановий тип

Доведено існування нескінченного числа розмірностей, в кожній із яких для діедральних 2-груп існує нескінченне число нерозкладних попарно нееквівалентних зображень постійного чи непостійного рангу. Для нескінченної діедральної групи описана строго повна множина серій модулярних зображень відносно всіх зображень розмірності $n < 8$, які мають постійний ранг, та отримано наслідки для загальних серій. Для скінченних діедральних 2-груп доведено низку тверджень про серії нерозкладних зображень постійного рангу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Башев В. А. Представления группы $Z_2 \times Z_2$ в поле характеристики 2 / В. А. Башев // ДАН СССР. – 1961. – **141**, № 5. – С. 1015–1018.

2. Берман С. Д. О целочисленных представлениях конечных групп / С. Д. Берман // ДАН СССР. – 1963. – **152**, № 6. – С. 1286–1287.

3. Берман С. Д. Представления конечных групп над произвольным полем и над кольцом целых чисел / С. Д. Берман // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1966. – **30**, № 1. – С. 69–132.

4. Берман С.Д. Представления конечных групп / С. Д. Берман // сб. „Алгебра–1964“ (Итоги науки), М. – 1966. – С. 83–122.

5. Берман С. Д. О целочисленных представлениях конечных групп / С. Д. Берман, П. М. Гудивок // ДАН СССР. – 1962. – **145**, № 6. – С. 1–199–1201.

6. Берман С. Д. О целочисленных представлениях конечных групп / С. Д. Берман, П. М. Гудивок // Докл. и сообщ. Ужгородского ун-та, сер. физ.-матем. н. – 1962. – № 5. – С. 74–76.

7. Берман С. Д. Неразложимые представления конечных групп над кольцом целых p-адических чисел / С. Д. Берман, П. М. Гудивок // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1964. – **28**, № 4. – С. 875–910.

8. Бондаренко В. М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 / В. М. Бондаренко // Матем. сб. – 1975. – **96**, № 1. – С. 63–74.

9. Бондаренко В. М. Модулярные представления квазидиэдральных групп / В. М. Бондаренко // Пятый Всесоюзный симпозиум по теории групп. Тезисы сообщений. – Новосибирск. – 1976. – С. 10–11.

10. Бондаренко В. М. О подобии матриц над кольцами классов вычетов / В. М. Бондаренко // Матем. сб. Киев. "Наук. думка". – 1976. – С. 275–277.

11. Бондаренко В. М. Представления связок полуцепных множеств и их приложения / В. М. Бондаренко // Алгебра и анализ. – 1991.– **3**, №5. – С. 38–61.

12. Бондаренко В. М. О представлениях конечных p-групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми p-адическими коэффициентами / В. М. Бондаренко, П. М. Гудивок // Сб. „Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры“. – Киев. – Институт матем. НАН Украины. – 1993. – С. 5–14.

13. Бондаренко В. М. Представленческий тип конечных групп / В. М. Бондаренко, Ю. А. Дрозд // Записки науч. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР. – 1977. – **71**, – С. 24–41.

14. Brenner S. Modular representations of p-groups / S. Brenner // J. Algebra. – 1970. – **15**, № 1. – С. 89–102.

15. Green J. A. Blocks of modular representations / J. A. Green // Math. Z. – 1962. – **79**, – С. 100–115.

16. Гудивок П. М. О представлениях конечных групп над квадратичными кольцами / П. М. Гудивок // ДАН СССР. – 1964. – **159**, № 6. – С. 1210–1213.

17. Гудивок П. М. Представления конечных групп над числовыми кольцами / П. М. Гудивок // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1967. – **31**, № 4. – С. 799–834.

18. Гудивок П. М. О числе неразложимых целочисленных p-адических представлений скрещенных групповых колец / П. М. Гудивок // Матем. сб. – 1973. – **91**, № 1. – С. 27–49.

19. Гудивок П. М. О модулярных и целочисленных представлениях конечных групп / П. М. Гудивок // ДАН СССР. – 1974. 214. № 5. – С. 993–996.

20. Гудивок П. М. О представлениях конечных групп над полным дискретно нормированным кольцом / П. М. Гудивок // Труды Матем. ин-та АН СССР. – 1978. – **148**. – С. 96–105.

21. Gudivok P. M. On representations of finite groups over some factorial rings / P. M. Gudivok // Cont. Math. – 1992. – **131**. – C. 173–181.

22. Гудивок П. М. О представлениях конечных групп над кольцом классов вычетов по модулю m / П. М. Гудивок, В. С. Дроботенко, А. И. Лихтман // Укр. матем. ж.– 1964. – **16**, № 1. – С. 82–89.

23. Гудивок П.М. О представлениях конечных p-групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми p-адическими коэффициентами / П. М. Гудивок, В. М. Орос, А. В. Ройтер // Укр. матем. ж. – 1992. – **44**, № 6. – С. 753–765.

24. Гудивок П. М. Про p-адичні цілочислові зображення циклічної p-групи / П. М. Гудивок, В. П. Рудько // Доповіді АН УРСР. сер. А. – 1966. – № 9. – С. 1111–1113.

25. Гудивок П. М. Про незвідні модулярні зображення скінченних p-груп над комутативними локальними кільцями / П. М. Гудивок, О. А. Тилищак // Науковий вісник Ужгород. ун-ту, Сер. матем. – 1998. – № 3. – С. 78–83.

26. Gudivok P. M. On indecomposable matrix representations of the given degree of a finite p-group over commutative local ring of characteristic p^s / P. M. Gudivok, I. B. Chukhraj // AN. St. Univ. Ovidius Constanta. – 2000. – **8**. – P. 27–36.

27. Jones A. Groups with a finite number of indecomposable integral representations / A. Jones // Mich. Math. J. – 1963. – № 3. – P. 257–261.

28. Jones A. Integral representations of cyclic p-groups. / A. Jones // An. Acad. Brasil. Cienc. – 1982. – **54**, no. 1. – P. – 19–22.

29. Jones A. On representations of finite groups over valuation rings / A. Jones // Ill. J. Math. – **9**, № 2. 297–303.

30. Дроботенко В. С. Представления циклической группы простого порядка p над кольцом классов вычетов по модулю p^s / В. С. Дроботенко. Э. С. Дроботенко. З. П. Жилинская. Е. Я. Погориляк // Укр. матем. ж. – 1965. – **17**, № 5. – С. 28–42.

31. Кругляк С. А. О представлениях группы (p, p) над полем характеристики p / С. А. Кругляк // ДАН СССР. – 1963. – **153**, № 6. – С. 1253–1256.

32. Maranda J. M. On P–adic integral representations of finite groups / J. M. Maranda // Canad. J. Math. – 1953. – **5**, – P. 344–355.

33. Maranda J. M. On the equivalence of representations of finite groups by groups of automorhisms of modules over Dedekind rings / J. M. Maranda // Canad. J. Math. – 1955. – **7**. – P. 516–526.

34. Mitsuda T. Integral representations of cyclic groups of order pq / T. Mitsuda // Proceedings of the 14th Symposium on Ring Theory. Okayama Univ. Okayama. – 1981. – P. 85–92.

35. Назарова Л. А. Целочисленные представления четверной группы / Л. А. Назарова // ДАН СССР. – 1961. – **140**, N 5. – С. 1011–1014.

36. Назарова Л. А. Представления четвериады / Л. А. Назарова // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1967. – **31**. – С. 1361–1379.

37. Reiner I. Integral representations of cyclic groups of prime order / I. Reiner // Proc. Am. Math. Soc. – 1957. – **8** – P. 142–146.

38. Reiner I. Integral representations of cyclic groups of order p^2 / I. Reiner // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – **58**. – P. 8–12.

39. Ringel C. The indecomposable representations of dihedral 2-groups / C. Ringel // Math. Ann. – 1975. – **214**, N 1. – P. – 19–34.

40. Ройтер А.В. О представлениях циклической группы четвертого порядка целочисленными матрицами / А. В. Ройтер // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1960. – № 19. – С. 65–74.

41. Рудько В. П. О целочисленных неприводимых алгебраических представлениях конечных групп / В. П. Рудько // Доповіді АН УРСР. – 1991. – № 5. – С. 5–7.

42. Swan R. Induced representations and projektive modules / R. Swan // Ann. of Math. – 1960. – **71**. – С. 552–578.

43. Troy A. Integral representation of cyclic groups of order p: Ph. P / A. Troy // thesis. – Univ. of Illinois. – 1961.

44. Heller A. Representations of cyclic groups in rings of integrals. I / A. Heller, I. Reiner // Ann. Math. – 1962. – **76**. – P. 73–92.

45. Heller A. Representations of cyclic groups in rings of integrals. II / A. Heller, I. Reiner // Ann. Math. – 1963. – **77**. – P. 318–328.

46. Higman D.G. Indecomposable representations at characteristic p / D. G. Higman // Duke Math. J. – 1954. – **21**. – P. 377–381.

47. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах / Ю. А. Дрозд // Матричные задачи. – Киев: Ин–т математики АН УССР. – 1977. – С. 104–114.

48. Дрозд Ю. А. Ручные и дикие матричные задачи / Ю. А. Дрозд // Представления и квадратичные формы. – Киев: Ин–т математики АН УССР. – 1979. – С. 39–74.

49. Erdmann K. On 2-blocks with semidihedral defect groups / K. Erdmann // Trans. Amer. Math. Soc. 256. – 1979. – P. 267-287.

50. Erdmann K. Algebras and semidihedral defect groups. I / K. Erdmann // Proc. London Math. Soc. (3) 57. – 1988. – no. 1. – P. 109-150.

51. Erdmann K. Algebras and quaternion defect groups. I / K. Erdmann // Math. Ann. 281. – 1988. – no. 4. – P. 545-560.

52. Erdmann K. Algebras and quaternion defect groups. II / K. Erdmann // Math. Ann. 281. – 1988. – no. 4. – P. 561-582.

53. Erdmann K. Algebras and semidihedral defect groups. II / K. Erdmann // Proc. London Math. Soc. (3) 60. – 1990. – no. 1. – P. 123-165.

54. Holm T. Derived equivalences and Hochschild cohomology for blocks with quaternion defect groups / T. Holm // Darstellungstheorietage Jena. Sitzungsber. Math.– Naturwiss. Kl. 7. Akad. Gemein. Wiss. Erfurt. Erfurt. – 1996. – P. 75-86.

55. Holm T. Derived equivalence classification of algebras of dihedral, semidihedral, and quaternion type / T. Holm // J. Algebra 211. – 1999. – no. 1. – P. 159-205.

56. Holm T. Hochschild cohomology of tame blocks / T. Holm // J. Algebra 271. – 2004. – no. 2. – P. 798-826.

57. Holm T. Generalized Reynolds ideals and derived equivalences for algebras of dihedral and semidihedral type / T. Holm, A. Zimmermann // J. Algebra 320. – 2008. – no. 9. – P. 3425-3437.

58. Carlson. J. F. Modules of constant Jordan type / J. F. Carlson, E. M. Friedlander, J. Pevtsova // J. Reine Angew. Math. – 2008. – **614**. – P. – 191-234.

59. Friedlander E. M. Generic and maximal Jordan types / E. M. Friedlander, J. Pevtsova, A. Suslin // Invent. Math. 168 (2007). no. 3. – P. 485-522.

60. Benson D. J. Modules of constant Jordan type with one non-projective block / D. J. Benson // Algebr. Represent. Theory 13 (2010). no. 3. – P. 315-318

61. Baland S. Modules of constant Jordan type with two non–projective blocks / S. Baland // J. Algebra 346 (2011). – P. 343-350.

62. Benson D. A realization theorem for modules of constant Jordan type and vector bundles / D. Benson, J. Pevtsova // Trans. Amer. Math. Soc. 364. – 2012. – no. 12. – P. 6459-6478.

63. Baland S. On the generic kernel filtration for modules of constant Jordan type / S. Baland / Arch. Math. (Basel) 99. – 2012. – no. 4. – P. 305-314.

64. Benson D. J. A survey of modules of constant Jordan type and vector bundles on projective space / D. J. Benson // Advances in representation theory of algebras. – EMS Ser. Congr. Rep. Eur. Math. Soc. – Zurich. – 2013. – P. 39-63.

65. Benson D. J. Modules of constant Jordan type with small non-projective part / D. J. Benson // Algebr. Represent. Theory 16. – 2013. – no. 1. – P. 29-33.

66. Benson D. J. Modules of constant Jordan type and a conjecture of Rickard / D. J. Benson // J. Algebra 398. –2014. – P. 343-349.

67. Kaptanoglu S. O. Restricted modules and conjectures for modules of constant Jordan type / S. O. Kaptanoglu // Algebr. Represent. Theory 17. – 2014. no. 5. – P. 1437-1455.

68. Baland S., Chan K. Modules of constant Jordan type, pullbacks of bundles and generic kernel filtrations. / S. Baland, K. Chan // J. Algebra 462. – 2016. – P. 253-284.

69. Baland S., Chan K. Modules of constant Jordan type, pullbacks of bundles and generic kernel filtrations / S. Baland, K. Chan // J. Algebra 462. – 2016. – P. 253-284.

70. Бондаренко В. М. О некоторых ручных и диких матричных задачах постоянного ранга / В. М. Бондаренко, И. В. Литвинчук // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія матем. і інформ). – 2012. – вип. 23, №1. – С. 19–27.

71. Bondarenko V. M. The representation type of elementary abelian p-groups with respect to the modules of constant Jordan type / V. M. Bondarenko,

I. V. Lytvynchuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2012. – vol. 14, no. 1. – P. 29–36.

72. Бондаренко В. М. О представлениях размерности $m < 4$ группы $(2, 2, ...2)$, имеющих постоянный ранг / В. М. Бондаренко, И. В. Литвинчук // Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – вип. 24, №2. – 2013. – С. 38-42.

73. Литвинчук И. В. Об одном свойстве представлений диедральной группы порядка 8 над полем характеристики 2 / И. В. Литвинчук // Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – вип. 29, №2. – 2016.– С. 55–58.

74. Литвинчук И. В. Об одном свойстве модулярных представлений диэдральных 2-групп / И. В. Литвинчук // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2017. – Том 15. – С. 24–28.

75. Бондаренко В. М. Описание категории представлений постоянного жорданового типа наименьшей нециклической группы / В. М. Бондаренко, І. В. Литвинчук// Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – вип. 31, №2. – 2017.– С. 37–47.

76. Литвинчук І. В. Про жордановий тип π-точок для елементарних абелевих груп / І. В. Литвинчук // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука: Київ, 19-21 квітня 2012: Матеріали конференції II (Алгебра. Геометрія. Математичний та чисельний аналіз). – Київ, 2012. – С. 149.

77. Bondarenko V. M. On the representation type of elementary abelian p-groups with respect to the modules of constant Jordan type / V. M. Bondarenko, I. V. Litvinchuk // International Conference on Algebra (dedicated to 100th anniversary of S. N. Chernikov): Kyiv, August 20-26, 2012: Book of abstracts. – Kyiv, 2012. – P. 35.

78. Bondarenko V. M. The representation type of groups with respect to the representations of constant Jordan type / V. M. Bondarenko, I. V. Lytvynchuk // 9th International Algebraic Conference in Ukraine: L'viv, July 8-13, 2013: Book of Abstracts. – L'viv, 2013. – P. 36.

79. Lytvynchuk I. V. On representations of constant Jordan type for elementary abelian 2-groups / I. V. Lytvynchuk // International Algebraic Conference dedicated to 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin: Kyiv, July 7-12, 2014: Book of Abstracts. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2014. – P. 60.

80. Lytvynchuk I. V. On representations of small dimensions of constant Jordan type / I. V. Lytvynchuk // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd: Odessa, August 20-27, 2015: abstracts. – Odessa, 2015. – P. 73.

81. Lytvynchuk I. V. On one property of modular representations of the dihedral group of order 8 / I. V. Lytvynchuk // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko: Kyiv, July 3-7, 2017: Abstracts. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017. – P. 81.

82. MacLane S. An algebra of additive relations / S. MacLane // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1961. – Vol. 47. – P. 1043 – 1051.

83. Gabriel P. Unzerlegbare Darstellungen / P. Gabriel // Manuscripts Math. – 1972. – Vol. 6. – P. 71–103, 309.

84. Назарова Л. А. Представления колчанов бесконечного типа / Л. А. Назарова // Изв. АН СССР. – 1973. – **37**, № 4. – С. 752–791.

85. Donovan P. The representation theory of finite graphs and associated algebras / P. Donovan, M. R. Freislich / // Carleton Lecture Notes. – 1973. – № 5. – P. 3–86.

86. Завадский А. Г. Коммутативные колчаны и матричные алгебры типа / А. Г. Завадский, А. С. Шкабара // – Киев. – 1976. – 52 с. (Препр. / АН УССР. Ин–т математики; 76.3).

87. Gabriel P. Representations of finite-dimensional algebras / P. Gabriel, A. V. Roiter // – Encyclopaedia of Math. Sci. (Algebra Vlll). – Vol. 73. – Springer–Verlag. Berlin. – 1992. – P. 177.

88. Бондаренко В. М. Зображення гельфандових графiв / В. М. Бондаренко // Видавництво Iн-ту математики НАН України. – 2005. – С. 228.

89. Бондаренко В. М. Связки полуцепных множеств и их представления / В. М. Бондаренко // – Киев. – 1988. – Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 88.60. – С. 32

90. Бондаренко В. М. Представления связок полуцепных множеств и их приложения / В. М. Бондаренко // Алгебра и анализ. – 1991. – **3**, вып. 5. – С. 38–61.

91. Бондаренко В. М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 / В. М. Бондаренко // Матем. сб. – 1975. – **96**, вып. 1. – С. 63–74.

92. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер // М.: Наука. – 1966. – С. 576.

93. Ленг С. Алгебра / С. Ленг // М.: Мир, – 1968. – 564 с.

ДОДАТОК

Список публікацій за темою дисертації

Праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Бондаренко В. М. О некоторых ручных и диких матричных задачах постоянного ранга / В. М. Бондаренко, И. В. Литвинчук // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія матем. і інформ). – 2012. – вип. 23, №1. – С. 19–27.

2. Bondarenko V. M. The representation type of elementary abelian p-groups with respect to the modules of constant Jordan type / V. M. Bondarenko, I. V. Lytvynchuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2012. – vol. 14, no. 1. – P. 29–36.

3. Бондаренко В. М. О представлениях размерности $m < 4$ группы $(2, 2, ...2)$, имеющих постоянный ранг / В. М. Бондаренко, И. В. Литвинчук // Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – вип. 24, №2. – 2013. – С. 38-42.

4. Литвинчук И. В. Об одном свойстве представлений диедральной группы порядка 8 над полем характеристики 2 / И. В. Литвинчук // Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – вип. 29, №2. – 2016.– С. 55–58.

5. Литвинчук И. В. Об одном свойстве модулярных представлений диэдральных 2-групп / И. В. Литвинчук // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2017. – Том 15. – С. 24–28.

6. Бондаренко В. М. Описание категории представлений постоянного жорданового типа наименьшей нециклической группы / В. М. Бондаренко, І. В. Литвинчук// Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – вип. 31, №2. – 2017.– С. 37–47.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Литвинчук І. В. Про жордановий тип π-точок для елементарних абелевих груп / І. В. Литвинчук // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука: Київ, 19-21 квітня 2012: Матеріали конференції II (Алгебра. Геометрія. Математичний та чисельний аналіз). – Київ, 2012. – С. 149.

2. Bondarenko V. M. On the representation type of elementary abelian p-groups with respect to the modules of constant Jordan type / V. M. Bondarenko, I. V. Litvinchuk // International Conference on Algebra (dedicated to 100th anniversary of S. N. Chernikov): Kyiv, August 20-26, 2012: Book of abstracts. – Kyiv, 2012. – P. 35.

3. Bondarenko V. M. The representation type of groups with respect to the representations of constant Jordan type / V. M. Bondarenko, I. V. Lytvynchuk // 9th International Algebraic Conference in Ukraine: L'viv, July 8-13, 2013: Book of Abstracts. – L'viv, 2013. – P. 36.

4. Lytvynchuk I. V. On representations of constant Jordan type for elementary abelian 2-groups / I. V. Lytvynchuk // International Algebraic Conference dedicated to 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin: Kyiv, July 7-12, 2014: Book of Abstracts. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2014. – P. 60.

5. Lytvynchuk I. V. On representations of small dimensions of constant Jordan type / I. V. Lytvynchuk // X International Algebraic Conference

in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd: Odessa, August 20-27, 2015: abstracts. – Odessa, 2015. – P. 73.

6. Lytvynchuk I. V. On one property of modular representations of the dihedral group of order 8 / I. V. Lytvynchuk // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko: Kyiv, July 3-7, 2017: Abstracts. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017. – P. 81.