НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Старкова Еліна Михайлівна

УДК 512.53+512.64

МАТРИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ПРЯМИХ ДОБУТКІВ СИМЕТРИЧНИХ НАПІВГРУП ДРУГОГО СТЕПЕНЯ

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Київ – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі алгебри та математичної логіки механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник доктор фізико-математичних наук, професор,
БОНДАРЕНКО Віталій Михайлович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу алгебри і топології.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник,
ШАВАРОВСЬКИЙ Богдан Зеновієвич,
Інститут прикладних проблем механіки і
математики імені Я. С. Підстригача
НАН України, в. о. провідного наукового
співробітника відділу алгебри;

кандидат фізико-математичних наук,
ДЯЧЕНКО Сергій Миколайович,
Національний університет
"Києво-Могилянська академія",
доцент кафедри математики
факультету інформатики.

Захист відбудеться 21 травня 2019 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 в Інституті математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

Автореферат розісланий 12 квітня 2019 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Є. О. Полулях

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена вивченню матричних зображень симетричних напівгруп та їх прямих добутків над полем K.

Матричні зображення скінченних напівгруп над полями вивчені не в такій мірі, як зображення груп. Зображення скінченних груп над полями вивчені достатньо добре; зокрема, повністю визначено зображувальний тип кожної із таких груп для поля довільної характеристики. У випадку, коли характеристика поля не ділить порядок скінченної групи (такий випадок називають класичним), група завжди має, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень (така група називається групою скінченного зображувального типу); до того ж в цьому випадку кожне нерозкладне зображення є незвідним прямим доданком регулярного зображення. У випадку, коли характеристика p ділить порядок групи (такий випадок називають модулярним), група має скінченний зображувальний тип лише тоді, коли її силовська p-підгрупа є циклічною. У модулярному випадку для більшості скінченних груп задача про опис їх зображень включає в себе задачу про класифікацію пар матриць з точністю до подібності. Такі групи називаються дикими, а групи, що допускають явний опис зображень, — ручними[1]. Ручні та дикі групи для цього випадку повністю описали В. М. Бондаренко і Ю. А. Дрозд[2].

Одним із основних методів вивчення матричних зображень скінченних груп (і особливо p-груп) в модулярному випадку є метод матричних задач (в даному випадку зведення до класифікаційних матричних задач без співвідношень). Зокрема, класифікація модулярних зображень четверної групи Клейна зводиться до відомої задачі про жмуток матриць (В. А. Башев[3]), класифікація модулярних зображень діедральних груп зводиться до зображень в'язки ланцюгів (В. М. Бондаренко[4]), класифікація модулярних зображень квазідіедральних груп та узагальнених груп кватерніонів зводиться до зображень в'язки напівланцюгів (В. М. Бондаренко[5,6]).

В теорії напівгруп найбільша кількість робіт присвячена темі, пов'язаній із вивченням незвідних зображень і, зокрема, з виділенням класів напівгруп, всі нерозкладні зображення яких є незвідними (див., напр., моно-

[1]Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах / Ю. А. Дрозд // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104-114.

[2]Бондаренко В. М. Представленческий тип конечных групп / В. М. Бондаренко, Ю. А. Дрозд // Модули и представления: Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1977. – **71**. – С. 24-41.

[3]Башев В. А. Представления группы $Z_2 \times Z_2$ в поле характеристики 2 / В. А. Башев // Докл. АН СССР. – 1961. – **141**, вып. 5. – С. 1015-1018.

[4]Бондаренко В. М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 / В. М. Бондаренко // Мат. сб. – 1975. – **96**, вып. 1. – С. 63-74.

[5]Бондаренко В. М. Представления связок полуцепных множеств и их приложения / В. М. Бондаренко // Алгебра и анализ. – 1991. – **3**, вып. 5. – С. 38-61.

[6]Бондаренко В. М. Про класифікацію модулярних зображень узагальнених груп кватерніонів / В. М. Бондаренко // Доповіді НАН України. – 2004. – № 12. – С. 3-9.

графії[7,8]), зі знаходженням зв'язків між незвідними зображеннями напівгрупи та її піднапівгруп, тощо. Слід виділити також деякі окремі результати про напівгрупи скінченного зображувального типу, а саме випадок скінченної цілком простої напівгрупи (І. С. Понізовський[9]) та випадок напівгрупи всіх перетворень скінченної множини (І. С. Понізовський[10], К. Рінгель[11]). Що стосується випадків, коли число нерозкладних зображень нескінченне, то найбільш відомими є результати з теорії зображень алгебр, які можна переформулювати в термінах зображень напівгруп: опис зображень алгебри $< a, b \,|\, ab = ba = 0 >$ (І. М. Гельфанд, В. А. Пономарьов[12], Л. О. Назарова, А. В. Ройтер, В. В. Сергейчук, В. М. Бондаренко[13]) та алгебри $< a, b \,|\, a^2 = b^2 = 0 >$ (В. М. Бондаренко[4], К. Рінгель[14]). Якщо ж говорити не про окремі напівгрупи, а про класи напівгруп, то слід відзначити роботи про зображення напівгруп, породжених ідемпотентами з частковим нульовим множенням (В. М. Бондаренко, О. М.Тертична[15,16,17]), а також про зображення напівгруп Рісса (С. М. Дяченко[18,19,20]), такі напівгрупи можуть мати як скіченне, так і нескінченне число нерозкладних зображень.

У дисертації вивчаються матричні зображення симетричних напівгруп другого степеня та їх прямих добутків над полем K. Основна увага приділяється вивченню зображень спеціального вигляду і опису напівгруп скінченного

[7]Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. – Т. 1 – Москва: "Мир", 1972. – 285 с.

[8]Okninski J. Linear representations of semigroups. – World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.

[9]Понизовский И. С. О конечности типа полугрупповой алгебры конечной вполне простой полугруппы / И. С. Понизовский // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 154-163.

[10]Понизовский И. С. Некоторые примеры полугрупповых алгебр конечного типа / И. С. Понизовский // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1987. – **160**. – С. 229–238.

[11]Ringel C. The representation type of the full transformation semigroup T_4 / C. Ringel // Semigroup Forum. – 2000. – № 3. – P. 429-434.

[12]Гельфанд И. М. Неразложимые представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, В. А. Пономарьов // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, вып. 2. – С. 3-60.

[13]Назарова Л. А. Применение модулей над диадой для классификации конечных p-групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p, и пар взаимно аннулирующих операторов / Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, В. В. Сергейчук, В. М. Бондаренко // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 69-92.

[14]Ringel C. The indecomposable representations of dihedral 2-groups / C. Ringel // Math. Ann. – 1975. – **214**, № 1. – P. 19-34.

[15]Бондаренко В. М. О бесконечности типа бесконечных полугрупп, порожденных идемпотентами с частичным нулевым умножением / В. М. Бондаренко, Е. Н. Тертичная // Проблеми топології та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 3. – С. 23-44.

[16]Бондаренко В. М., Тертичная Е. Н. О полугруппах, порожденных идемпотентами с частичным нулевым умножением / В. М. Бондаренко, Е. Н. Тертичная // Комплексний аналіз і течії з вільними границями : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 4. – С. 294-298.

[17]Bondarenko, V. M., Tertychna O. M. On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication / V. M. Bondarenko, O. M. Tertychna // Algebra Discrete Math. – 2008. – № 4. – P. 15-22.

[18]Дяченко С. М. Напівгрупи Рісса над циклічною групою третього порядку ручного нескінченного зображувального типу / С. М. Дяченко // Наукові записки НаУКМА (Фізико-математичні науки). – 2012. – **126**. – С. 3–6.

[19]Дяченко С. М. Напівгрупи Рісса над циклічною групою четвертого порядку скінченного зображувального типу / С. М. Дяченко // Наукові записки НаУКМА (Фізико-математичні науки). – 2014. – **152**. – С. 27-31.

[20]Дяченко С. М. Напівгрупи Рісса над циклічною групою простого порядку скінченного зображувального типу / С. М. Дяченко // Наукові записки НаУКМА (Фізико-математичні науки). – 2016. – **178**. – С. 23-26.

зображувального типу в модулярному випадку та їх зображень, що задовольняють природним з точки зору теорії зображень умовам. Друга задача є однією з основних традиційних задач в теоріях зображень різних алгебраїчних об'єктів. Важливість обох задач визначається тим, що в модулярному випадку задача про опис зображень прямого добутку симетричної напівгрупи другого степеня і симетричної групи другого степеня є дикою.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертаційної роботи пов'язана з науковими дослідженнями на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка — тема 11БФ038-03 "Застосування алгебро-геометричних методів в теоріях груп, напівгруп, кілець, зображень до задач прикладної алгебри та захисту інформації" (номер державної реєстрації 0111U005264).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дослідження є опис модулярних матричних зображень скінченних напівгруп над полем, пов'язаних із симетричними напівгрупами степеня 2 і обчислення їхніх категорних та комбінаторних характеристик.

Об'єктом дослідження є матричні зображення напівгруп над полем та алгебри Ауслендера.

Предметом дослідження є канонічні форми матричних зображень, нерозкладність матричних зображень та вигляд алгебр Ауслендера.

Методи дослідження. *Основними методами*, що використовуються у дослідженні, є класичні і сучасні методи лінійної алгебри і теорії зображень.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації автором отримано такі нові результати про матричні зображення напівгруп:

- Описана канонічна форма модулярних зображень симетричної напівгрупи другого степеня.
- Описана категорія модулярних нерозкладних зображень симетричної напівгрупи другого степеня.
- Описані абсолютно і сильно нерозкладні (немодулярні та модулярні) матричні зображення прямого добутку довільного числа симетричних напівгруп другого степеня; обчислено число класів еквівалентності таких зображень над скінченним полем.
- Доведена дикість задачі опису зображень прямого добутку симетричної напівгрупи і симетричної групи степенів 2 над полем характеристики 2.
- Отримано критерій ручності відносно модулярних зображень прямого добутку симетричних напівгруп і груп степенів 2.
- Для модулярних зображень прямого добутку симетричної напівгрупи і симетричної групи степеня 2 описано всі R-носії довільного порядку, для яких відповідна задача про опис модулярних зображень має скінченний тип; в кожному з таких випадків описано всі (з точністю до еквівалентності) нерозкладні зображення.

• У випадку R-носіїв порядку $m < 4$ із задачею скінченного типу обчислено відповідні алгебри Ауслендера.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Отримані в ній результати, а також методи, за допомогою яких вони отримані, можуть бути використані в теорії зображень різних об'єктів і в областях науки, які використовують у своїх дослідженнях матричні методи.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно. У спільних з науковим керівником роботах останньому належать постановки задач і загальні ідеї щодо методів їх розв'язання, а практична реалізація та ряд конкретних ідей належать здобувачеві. У статті з О. М. Тертичною здобувачеві належать всі результати, окрім тверджень про число зображень над скінченним полем.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи оприлюднено на:

— VIII Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (м. Луганськ, 5-12 липня 2011 р.);

— Чотирнадцятій Міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (м. Київ, 19-21 квітня 2012 р.);

— IX Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (м. Львів, 8-13 липня 2013 р.);

— Міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження Л. А. Калужніна (м. Київ, 7-12 липня 2014 р.);

— X Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 70-річчю Ю. А. Дрозда (м. Одеса, 20-27 серпня 2015 р.).

— XI Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 75-річчю В. В. Кириченка (м. Київ, 3-7 серпня 2017 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в шести наукових роботах ([1]–[6]), які опубліковані у фахових виданнях із Переліку, затвердженого Міністерством освіти і науки України; одна з них ([3]) — у виданнях, що відображаються в наукометричній базі Scopus. Шість робіт опубліковано в матеріалах наукових конференцій ([7]–[12]).

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Загальний обсяг дисертації — 138 сторінок. Обсяг основного тексту дисертації — 111 сторінок. Список використаних джерел займає 9 сторінок (72 найменування).

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** наведено загальну характеристику та мету роботи, обґрунтовано її актуальність і наукову новизну.

У **першому розділі** дисертаційної роботи викладено теоретичні відомості з теорії категорій, зображень сагайдаків і напівгруп.

У **другому розділі** вивчаються матричні зображення симетричної напівгрупи степеня 2, тобто напівгрупа всіх перетворень двоелементної множини. Позначається вона через T_2.

У напівгрупі T_2 можна вибрати твірні елементи e, a, b з такими визначальними співвідношеннями:

1) $ea = ae = a$, 2) $eb = be = b$,
3) $a^2 = e$, 4) $b^2 = b$,
5) $ab = b$.

Нагадаємо, що матричним зображенням напівгрупи S розмірності n над полем K називається довільний гомоморфізм T із S в напівгрупу $M_n(K)$ (відносно множення) всіх матриць розміру $n \times n$ з елементами із поля K. Завжди вважаємо, що одиничний елемент напівгрупи переходить в одиничну матрицю. Зображення називається модулярним, якщо характеристика поля ділить порядок деякої піднапівгрупи, що є групою. У випадку напівгрупи T_2 модулярне зображення – це зображення над полем характеристики 2. Еквівалентність та нерозкладність зображень вводиться природним чином.

Переходимо до результатів, отриманих в розділі 2.

Якщо вважати, що одиничному елементу e напівгрупи T_2 відповідає одинична матриця, то має місце наступна теорема.

Теорема 2.2. *Будь-яке матричне зображення напівгрупи T_2 над полем K характеристики 2 еквівалентне матричному зображенню вигляду*

$$a \to A = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & E_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

$$b \to B = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $E_1, \ldots, E_5$ — деякі одиничні матриці.

З використанням цієї канонічної форми описуються, з точністю до еквівалентності, всі нерозкладні зображення напівгрупи T_2 і обчислюється матрична алгебра Аулендера (як одна із форм задання категорії зображень).

Теорема 2.3. *Нерозкладні матричні зображення напівгрупи T_2 над полем K характеристики 2 вичерпуються, з точністю до еквівалентності, наступними (попарно нееквівалентними) зображеннями:*

1) $a \to 1, \quad b \to 0;$

2) $a \to 1, \quad b \to 1;$

3) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

5) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Матричною алгеброю Ауслендера напівгрупи скінченного зображувального типу (тобто, яка має скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень) називається алгебра ендоморфізмів прямої суми всіх нерозкладних матричних зображень (із кожного класу еквівалентності нерозкладних зображень треба взяти один представник). Нагадаємо, що ендоморфізм матричного зображення T алгебры Λ — це довільна матриця X така, що

$$T(y)X = XT(y)$$

для будь-якого $y \in \Lambda$.

Очевидно, що матрична алгебра Ауслендера не залежить від вибору представників в класах еквівалентності у тому сенсі, що всі отримані таким чином алгебри будуть спряжені як підалгебри відповідної повної матричної алгебри.

Наступна теорема описує алгебру Ауслендера напівгрупи T_2 у випадку модулярних зображень.

Теорема 2.4. *Якщо K — поле характеристики 2, то матрична алгебра Ауслендера для напівгрупи T_2 складається з усіх матриць вигляду*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{18} & 0 \\ 0 & x_{11} & x_{23} & 0 & x_{25} & 0 & x_{27} & 0 & x_{29} \\ 0 & 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{41} & 0 & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & x_{48} & 0 \\ 0 & 0 & x_{41} & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{62} & x_{63} & 0 & x_{65} & x_{66} & x_{67} & 0 & x_{69} \\ 0 & 0 & x_{62} & 0 & 0 & 0 & x_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{88} & 0 \\ 0 & 0 & x_{93} & 0 & x_{95} & 0 & x_{97} & 0 & x_{99} \end{pmatrix},$$

де x_{ij}— елементи поля K. Розмірність алгебри $Aus(T_2)$ дорівнює 20, її радикал $R(T_2)$ має ступінь нільпотентності 5 і $Aus(T_2)/R(T_2) = K \oplus K \oplus K \oplus K \oplus K$.

У **третьому розділі** вивчаються абсолютно і сильно нерозкладні (немодулярні та модулярні) матричні зображення прямого добутку довільного числа симетричних напівгруп другого степеня над полем K. Матричне зображення такої напівгрупи називається абсолютно нерозкладним, якщо його обмеження на кожний прямий співмножник є нерозкладним, і сильно нерозкладним, якщо нерозкладним є його обмеження хоча б на один прямий співмножник.

Напівгрупу

$$T_2^m = T_2^{(1)} \times T_2^{(2)} \times \ldots \times T_2^{(m)},$$

де $T_2^{(1)} = T_2^{(2)} = \ldots = T_2^{(m)} = T_2$, будемо позначати через $T(m)$ (m — натуральне число). Напівгрупу $T_2^{(i)}$ можна вкласти в напівгрупу $T(m)$, поставивши у відповідність елементу $x \in T_2^{(i)}$ елемент $(e_1, \ldots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \ldots, e_m)$, де e_j — одиничний елемент напівгрупи $T_2^{(j)}$. Надалі будемо ототожнювати напівгрупу $T_2^{(i)}$ з її образом в напівгрупі $T(m)$. Твірні вигляду e, a, b піднапівгрупи $T_2^{(i)}$ будемо позначати через $e^{(i)}, a^{(i)}, b^{(i)}$. Тоді системою твірних напівгрупи $T(m)$ є система, яка складається із одиничного елемента e і елементів $a^{(i)}, b^{(i)}$, де i пробігає множину $\{1, 2 \ldots, m\}$ (бо, очевидно, $e^{(i)} = e$). Визначальні співвідношення (для фіксованого i) — це визначальні співвідношення симетричної напівгрупи $T_2^{(i)} = T_2$, а визначальні співвідношення всієї напівгрупи $T(m)$ складаються із визначальних співвідношень піднапівгруп $T_2^{(1)}, T_2^{(2)}, \ldots, T_2^{(m)}$ і із співвідношень попарного комутування всіх твірних з різними верхніми індексами (тобто, які належать різним прямим співмножникам).

Вказані в теоремі 2.3 нерозкладні зображення напівгрупи T_2 позначаємо R_1, R_2, R_3, R_4, R_5.

Зображення напівгрупи назвемо груповим, якщо воно є, по суті, зображенням фактор-напівгрупи, яка є групою.

Наступні твердження описують абсолютно та сильно нерозкладні модулярні зображення напівгрупи $T(m)$.

Теорема 3.4. *Довільне абсолютно нерозкладне матричне зображення R напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ над полем K характеристики 2 має, з точністю до еквівалентності, один із наступних виглядів:*

1) *Одновимірне зображення R з обмеженнями на прямі співмножники $T_2^{(i)}$ $(1 \le i \le m)$*

$$R^{(1)} = R_{p_1}, R^{(2)} = R_{p_2}, \dots, R^{(m)} = R_{p_m},$$

де $p_1, p_2, \dots, p_m \in \{1, 2\}$.

2) *Двовимірне зображення R з обмеженнями на прямі співмножники $T_2^{(i)}$ $(1 \le i \le m)$*

$R^{(i)} =:$

$$a^{(i)} \to \begin{pmatrix} 1 & x_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b^{(i)} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $x_1 = 1$ і $x_2, \dots, x_m$ — ненульові.

При цьому всі вказані матричні зображення попарно нееквівалентні.

Наслідок 3.5. *Довільне двовимірне абсолютно нерозкладне зображення напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ над полем K (характеристики 2) є груповим.*

Теорема 3.13. *Довільне сильно нерозкладне матричне зображення R напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ над полем K характеристики 2 має, з точністю до еквівалентності, один із наступних виглядів:*

I) *Одновимірне зображення R з обмеженнями на прямі співмножники $T_2^{(i)}$ $(1 \le i \le m)$*

$$R^{(1)} = R_{p_1}, R^{(2)} = R_{p_2}, \dots, R^{(m)} = R_{p_m},$$

де $p_1, p_2, \dots, p_m \in \{1, 2\}$.

II) *Двовимірне зображення R з обмеженнями на прямі співмножники $T_2^{(i)}$ $(1 \le i \le m)$*

$R^{(i)} =:$

$$a^{(i)} \to \begin{pmatrix} 1 & x_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b^{(i)} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де один із елементів x_i дорівнює 1, а решта елементів — довільні.

III) *Двовимірне зображення R з обмеженнями на прямі співмножники $T_2^{(i)}$ $(1 \leq i \leq m)$*

$R^{(s)} = R_4$ для деякого $1 \leq s \leq m$ і $R^{(i)} = R_{p_i} \oplus R_{p_i}$ для всіх $i \neq s$, де $p_1, \ldots, p_{s-1}, p_{s+1} \ldots, p_m \in \{1, 2\}$.

IV) *Тривимірне зображення R з обмеженнями на прямі співмножники $T_2^{(i)}$ $(1 \leq i \leq m)$*

$R^{(s)} = R_5$ для деякого $1 \leq s \leq m$ і $R^{(i)} = R_{p_i} \oplus R_{p_i} \oplus R_{p_i}$ для всіх $i \neq s$, де $p_1, \ldots, p_{s-1}, p_{s+1} \ldots, p_m \in \{1, 2\}$.

При цьому всі вказані матричні зображення попарно нееквівалентні.

Наслідок 3.15. *Нехай R – сильно нерозкладне матричне зображення напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ над полем K характеристики 2 і нехай воно не є абсолютно нерозкладним. Якщо R не групове, то воно має, з точністю до еквівалентності, один із наступних виглядів:*

1) *Двовимірне зображення R з обмеженнями на прямі співмножники $T_2^{(i)}$ $(1 \leq i \leq m)$*

$R^{(s)} = R_4$ для деякого $1 \leq s \leq m$ і $R^{(i)} = R_{p_i} \oplus R_{p_i}$ для всіх $i \neq s$, де $p_1, \ldots, p_{s-1}, p_{s+1} \ldots, p_m \in \{1, 2\}$.

2) *Тривимірне зображення R з обмеженнями на прямі співмножники $T_2^{(i)}$ $(1 \leq i \leq m)$*

$R^{(s)} = R_5$ для деякого $1 \leq s \leq m$ і $R^{(i)} = R_{p_i} \oplus R_{p_i} \oplus R_{p_i}$ для всіх $i \neq s$, де $p_1, \ldots, p_{s-1}, p_{s+1} \ldots, p_m \in \{1, 2\}$.

Наслідок 3.16. *Нехай R – нерозкладне матричне зображення напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ над полем K характеристики 2, яке не є абсолютно нерозкладним. Якщо R не групове, то воно сильно нерозкладне тоді і лише тоді, коли зображення $R^{(i)}$ нерозкладне для одного і лише для одного i, а всі матриці зображень $R^{(j)}$ при $j \neq i$ є скалярними.*

Сформулюємо деякі наслідки із класифікаційних тверджень.

Нехай K — скінченне поле, тоді його порядок дорівнює $q = p^s$, де p — просте число. Якщо характеристика поля дорівнює 2, то $q = 2^s$.

Теорема 3.9. *Для скінченного поля K характеристики 2 і порядку q число класів еквівалентності абсолютно нерозкладних зображень напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ дорівнює $2^m + (q-1)^{m-1}$.*

Теорема 3.18. *Для скінченного поля K характеристики 2 і порядку q число класів еквівалентності сильно нерозкладних зображень напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ дорівнює $(m+1)2^m + (q^m - 1)/(q-1)$.*

Для порівняння модулярного випадку з немодулярним подібні результати отримані і для поля характеристики $p \neq 2$, з використанням замість теореми 2.3 отриманий І. С. Понізовським опис нерозкладних немодулярних зображень напівгрупи T_2:

R_1: $a \to 1, \quad b \to 0;$

R_2: $a \to -1, \quad b \to 0;$

R_3: $a \to 1, \quad b \to 1;$

R_4:
$$a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доведено наступні твердження.

Теорема 3.1. *Довільне абсолютно нерозкладне матричне зображення R напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ над полем K характеристики $p \neq 2$ має наступний вигляд:*
$$R^{(1)} = R_{p_1}, R^{(2)} = R_{p_2}, \ldots, R^{(m)} = R_{p_m},$$
де $1 \leq p_1, p_2, \ldots, p_m \leq 3$.

Наслідок 3.2 *Усі абсолютно нерозкладні зображення напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ над полем K мають розмірність 1.*

Теорема 3.10. *Довільне сильно нерозкладне матричне зображення R напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ над полем K (характеристики $p \neq 2$) має, з точністю до еквівалентності, один із наступних виглядів:*

I) *Одновимірне зображення R з обмеженнями на прямі співмножники $T_2^{(i)}$ $(1 \leq i \leq m)$*

$R^{(1)} = R_{p_1}$, $R^{(2)} = R_{p_2}, \ldots, R^{(m)} = R_{p_m}$, *де*
$1 \leq p_1, p_2, \ldots, p_m \leq 3$.

II) *Двовимірне зображення R з обмеженнями на прямі співмножники $T_2^{(i)}$ $(1 \leq i \leq m)$*

$R^{(s)} = R_4$ *для деякого* $1 \leq s \leq m$ *і* $R^{(i)} = R_{p_i} \oplus R_{p_i}$ *для всіх* $i \neq s$, *де* $1 \leq p_1, \ldots, p_{s-1}, p_{s+1} \ldots, p_m \leq 3$.

При цьому всі вказані матричні зображення попарно нееквівалентні.

Теорема 3.12. *Нехай R – нерозкладне матричне зображення напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ над полем K характеристики $p \neq 2$, яке не є абсолютно нерозкладним. Тоді R сильно нерозкладне тоді і лише тоді, коли зображення $R^{(i)}$ нерозкладне для одного і лише для одного i, а всі матриці зображень $R^{(j)}$ при $j \neq i$ є скалярними.*

Підкреслимо, що останнє твердження виконується і в модулярному випадку, але лише для негрупових зображень (наслідок 3.16).

Для скінченного поля маємо таку теорему.

Теорема 3.17 *Для скінченного поля K характеристики $p \neq 2$ і порядку* *q число класів еквівалентності сильно нерозкладних зображень напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ дорівнює $(m + 3)3^{m-1}$.*

Серед них абсолютно нерозкладних 3^m.

В останній частині розділу 2 отримано критерій ручності прямого добутку симетричних груп та симетричних напівгруп степеня 2.

Нехай K — поле характеристики 2. Відомо, що група типу $(2, 2)$, тобто прямий добуток двох циклічних груп другого порядку є ручною (а сама циклічна група другого порядку має скінченний тип). Прямий добуток трьох (а значить і більше трьох) таких груп є вже диким. Якщо врахувати, що циклічна група другого порядку — це симетрична група степеня 2, то виникає природне питання, а що буде, якщо симетричні групи (степеня 2) замінити на симетричні напівгрупи степеня 2?

Це питання і розглядається в останньому підрозділі. Оскільки симетрична напівгрупа степеня 2 має фактор напівгрупу, що є циклічною другого порядку, то природно (як з точки зору напівгруп, так і з точки зору зображень) серед прямих співмножників розглядати і симетричні групи.

Для напівгрупи S і натурального числа n через S^n позначається прямий добуток напівгруп S, взятих n разів. При цьому вважаємо, що для напівгрупи з одиницею S^0 — одинична напівгрупа.

Нагадаємо, що симетрична напівгрупа степеня 2 позначається через T_2. Симетричну групу степеня 2 позначаємо, як звичайно, через S_2.

Теорема 3.19. *Прямий добуток $(S_2)^n \times (T_2)^m$, де $n, m \geq 0$, є ручним над полем K характеристики 2 тоді і лише тоді, коли виконується одна із таких умов:*

1) $n < 3$, $m = 0$;

2) $n = 0$, $m < 2$.

При цьому у випадку нескінченного поля скінченне (з точністю до еквівалентності) число нерозкладних зображень мають лише групи S_2^0 (одинична група) і S_2 та напівгрупа T_2.

У **четвертому розділі** вивчаються зображення напівгруп з додатковими умовами.

R-носієм матричного зображення M прямого добутку $T \times S$ напівгруп T і S відносно T називатимемо (не порожній) набір нерозкладних попарно нееквівалентних зображень $N_0 = \{R_1, \ldots, R_s\}$ $(s \geq 0)$ такий, що обмеження M на T розкладається в пряму суму зображень із N_0 (з деякою кратністю), причому кожне з них реально присутнє. Очевидно, що заміна зображень із N_0 на еквівалентні змінює множину N_0, але нова множина зображень N_0' також буде R-носієм.

В четвертому розділі вивчаються модулярні матричні зображення прямого добутку $T_2 \times S_2$ симетричної напівгрупи T_2 і симетричної групи S_2 з довільним фіксованим R-носієм (відносно напівгрупи T_2). За теоремою 2.3 можна вважати, що R-носій належить множині $R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$. З формальних міркувань (для кращого формулювання теорем) нумерація зображень змінена, а саме переставлено місцями зображення R_1 і R_2 та R_3 і R_4.

Розглянемо наступну класифікаційну задачу для матричних зображень напівгрупи $T_2 \times S_2$ над довільним полем K характеристики 2. Зафіксуємо в множині $M = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$ всіх нерозкладних зображень напівгрупи T_2 деяку не порожню підмножину N_0 і будемо розглядати лише матричні зображення напівгрупи $T = T_2 \times S_2$ з носієм N_0. Але з точки зору теорії зображень (в якій розглядаються не лише точні, а й неточні зображення) природно при фіксованому R-носію розглядати одночасно і всі менші (в сенсі включення множин) R-носії. R-носії з такою властивістю будемо позначати через N.

Для пар (T, N) можна розглядати традиційні задачі теорії зображень. Одна із них, а саме задача про опис пар (T, N) скінченного типу, розглядається в дисертації ("скінченний тип" означає, що число нерозкладних зображень, з точністю до еквівалентності, скінченне).

Доведені наступні теореми.

Теорема 4.1. *Якщо $|N| = 1$, то (T, N) — пара скінченного типу тоді і лише тоді, коли $N \neq R_4, R_5$.*

Теорема 4.2.*Якщо $|N| = 2$, то (T, N) — пара скінченного типу тоді і лише тоді, коли $N = \{R_1, R_2\}$, $N = \{R_1, R_3\}$ або $N = \{R_2, R_3\}$.*

Теорема 4.3. *Якщо $|N| = 3$, то (T, N) — пара скінченного типу тоді і лише тоді, коли $N = \{R_1, R_2, R_3\}$.*

Теорема 4.4. *Якщо $|N| = 4, 5$, то (T, N) — пара нескінченного типу.*

Із теорем 4.1 – 4.4 випливає наступний загальний критерій.

Теорема 4.6. *Пара (T, N) має скінченний тип тоді і лише тоді, коли $N \cap \{R_5, R_6\} = \varnothing$.*

Випишемо повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних зображень напівгрупи $T = T_2 \times S_2$ з носієм N у випадках, коли пара (T, N) має скінченний тип.

У випадку $N = \{R_1, R_2\}$ маємо наступну повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних зображень:

1) $a \to 1, \quad b \to 1, \quad g \to 1;$

2) $a \to 1, \quad b \to 0, \quad g \to 1;$

3) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

У випадку $N = \{R_1, R_3\}$ маємо наступну повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних зображень:

1) $a \to 1, \quad b \to 1, \quad g \to 1;$

2) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

3) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

5) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

У випадку $N = \{R_2, R_3\}$ маємо наступну повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних зображень:

1) $a \to 1, \quad b \to 0, \quad g \to 1;$

2) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

3) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

5) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

У випадку $N = \{R_1, R_2, R_3\}$ маємо наступну повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних зображень:

1) $a \to 1, \quad b \to 1, \quad g \to 1;$

2) $a \to 1, \quad b \to 0, \quad g \to 1;$

3) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

5) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

6) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

7) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

8) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

9) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вивченню матричних зображень симетричних напівгруп та їх прямих добутків над полем K.

Описана канонічна форма модулярних зображень симетричної напівгрупи другого степеня і категорія модулярних нерозкладних зображень симетричної напівгрупи другого степеня (а саме описані всі, з точністю до еквівалентності, нерозкладні зображення та відповідна алгебра Ауслендера).

Описані абсолютно і сильно нерозкладні (немодулярні та модулярні) матричні зображення прямого добутку довільного числа симетричних напівгруп другого степеня; обчислено число класів еквівалентності таких зображень над скінченним полем. Отримано критерій ручності відносно модулярних зображень прямого добутку симетричних напівгруп і груп степенів 2.

Вивчаються модулярні зображення прямого добутку симетричної напівгрупи степеня 2 і симетричної групи степеня 2 з довільним фіксованим R-носієм (відносно напівгрупи T_2). Описано всі R-носії довільного порядку, для яких відповідна задача про опис модулярних зображень має скінченний тип; в кожному з таких випадків описано всі (з точністю до еквівалентності) нерозкладні зображення. У випадку R-носіїв порядку $m < 4$ із задачею скінченного типу обчислено відповідні алгебри Ауслендера.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Бондаренко В. М. Модулярні зображення напівгрупи T_2 / В. М. Бондаренко, **Е. М. Костишин** // Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2011. – вип. 22, №1. – С. 26-34.

2. **Костишин Э. М.** Об абсолютно неразложимых немодулярных матричных представлениях полугрупп $T_2 \times T_2 \times \ldots \times T_2$ / Э. М. Костишин // Вісник Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка (серія: фізико-математичні науки). – 2011. – вип. 3. – С. 37-39.

3. Bondarenko V. M. On modular representations of semigroups $S_p \times T_p$ / V. M. Bondarenko, **E. M. Kostyshyn** // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – vol. 16, no. 1. – P. 16-19.

4. **Костишин Е. М.** Сильно нерозкладні матричні зображення для одного класу напівгруп / Е. М. Костишин, О. М. Тертична // Наукові записки НАУКМА (фізико-математичні науки). – 2013. – т. 139. – С. 14-17.

5. **Костишин Е. М.** Алгебра Ауслендера для напівгрупи всіх перетворень двоелементної множини / Е. М. Костишин // Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2017. – вип. 30, №1. – С. 53-60.

6. Бондаренко В. М. Модулярні зображення з додатковими умовами напівгрупи $T_2 \times S_2$ / В. М. Бондаренко, **Е. М. Костишин** // Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2017. – вип. 31, №2. – С. 28-38.

Тези конференцій:

7 **Kostyshyn E. M.** Matrix representations of small semigroups / E. M. Kostyshyn // 8th International Algebraic Conference in Ukraine: Lugansk, July 5-12, 2011: Book of abstracts. – Lugansk, 2011. – P. 168.

8 **Костишин Е. М.** Матричні зображення напівгрупи всіх перетворень множини із 2-х елементів над полем характеристики 2 / Е. М. Костишин // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка

М. Кравчука: Київ, 19-21 квітня 2012: Матеріали конференції II (Алгебра. Геометрія. Математичний та чисельний аналіз). – Київ, 2012. – С. 143.

9 **Kostyshyn E. M.** On tame and wild cases for matrix representations of the semigroup / E. M. Kostyshyn // 9th International Algebraic Conference in Ukraine: L'viv, July 8-13, 2013: Book of Abstracts. – L'viv, 2013. – P. 94.

10 **Kostyshyn E. M.** On strongly indecomposable modular representations of the semigroups $T_2 \times T_2 \times \ldots \times T_2$ / E. M. Kostyshyn // International Algebraic Conference dedicated to 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin: Kyiv, July 7-12, 2014: Book of Abstracts. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2014. – P. 47.

11 **Kostyshyn E. M.** On indecomposable modular matrix representations of the semigroups $T_2 \times T_2 \times \ldots \times T_2$ / E. M. Kostyshyn // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd: Odessa, August 20-27, 2015: abstracts. – Odessa, 2015. – P. 54.

12 **Kostyshyn E. M.** On Auslander algebra of the symmetric semigroup of degree 2 / E. M. Kostyshyn // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko: Kyiv, July 3-7, 2017: Abstracts. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017. – P. 61.

АНОТАЦІЯ

Старкова Е. М. *Матричні зображення прямих добутків симетричних напівгруп другого степеня.* – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України. – Інститут математики, Національна академія наук України, Київ, 2019.

Дисертаційна робота присвячена вивченню матричних зображень симетричних напівгруп та їх прямих добутків над полем K.

У першому розділі дисертаційної роботи викладено теоретичні відомості з теорії категорій, зображень сагайдаків і напівгруп.

У другому розділі вивчаються зображення симетричної напівгрупи степеня 2. Описана канонічна форма модулярних зображень симетричної напівгрупи

другого степеня і категорія модулярних нерозкладних зображень симетричної напівгрупи другого степеня (а саме описані всі, з точністю до еквівалентності, нерозкладні зображення та відповідна алгебра Ауслендера).

У третьому розділі вивчаються абсолютно і сильно нерозкладні (немодулярні та модулярні) матричні зображення прямого добутку довільного числа симетричних напівгруп другого степеня над полем K. Матричне зображення такої напівгрупи називається абсолютно нерозкладним, якщо його обмеження на кожний прямий співмножник є нерозкладним, і сильно нерозкладним, якщо нерозкладним є його обмеження хоча б на один прямий співмножник.

Описано абсолютно і сильно нерозкладні матричні зображення прямого добутку довільного числа симетричних напівгруп другого степеня; обчислено число класів еквівалентності таких зображень над скінченним полем.

Отримано критерій ручності відносно модулярних зображень прямого добутку симетричних напівгруп і груп степенів 2.

У четвертому розділі розглядаються модулярні матричні зображення прямого добутку симетричної напівгрупи степеня 2 і симетричної групи степеня 2 з довільним фіксованим R-носієм (відносно напівгрупи). Описано всі R-носії довільного порядку, для яких відповідна задача про опис модулярних зображень має скінченний тип; в кожному з таких випадків описано всі (з точністю до еквівалентності) нерозкладні зображення. Для R-носіїв порядку $m < 4$ із задачею скінченного типу обчислено відповідні алгебри Ауслендера.

Ключові слова: напівгрупа, поле, матричне зображення, еквівалентність, нерозкладність, характеристика поля, симетрична напівгрупа, скінченний тип, ручна і дика напівгрупа, матрична алгебра Ауслендера, R-носій.

АННОТАЦИЯ

Старкова Э. М. *Матричные представления прямых произведений симметрических полугрупп второй степени.* – Квалификационный научный труд на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – алгебра и теория чисел. – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Министерство образования и науки Украины. – Институт математики, Национальная академия наук Украины, Киев, 2019.

Диссертационная работа посвящена изучению матричных представлений симметрических полугрупп и их прямых произведений над полем K.

В первом разделе диссертационной работы изложены теоретические сведения по теории категорий, изображений колчанов и полугрупп.

Во втором разделе изучаются изображения симметрической полугруппы степени 2. Описана каноническая форма модулярных представлений симметрической полугруппы второй степени и категория модулярных неразложимых представлений симметрической полугруппы второй степени (а именно описаны все, с точностью до эквивалентности, неразложимые изображения и соответствующая алгебра Аусклендера).

В третьем разделе изучаются абсолютно и сильно неразложимые (немодулярные и модулярные) матричные представления прямого произведения произвольного числа симметрических полугрупп второй степени.

Описаны абсолютно и сильно неразложимые матричные представления прямого произведения произвольного числа симметрических полугрупп второй степени; вычислено число классов эквивалентности таких изображений над конечным полем.

Получен критерий ручности относительно модулярных представлений прямого произведения симметрических полугрупп и групп степеней 2.

В четвертом разделе рассматриваются модулярные матричные представления прямого произведения симметрической полугруппы степени 2 и симметрической группы степени 2 с произвольным фиксированным R-носителем (относительно полугруппы). Описаны все R-носители произвольного порядка, для которых соответствующая задача об описании модулярных изображений имеет конечный тип, в каждом из таких случаев описаны все (с точностью до эквивалентности) неразложимые представления. Для R-носителей порядка $m < 4$ с задачей конечного типа вычислено соответствующие алгебры Аусклендера.

Ключевые слова: полугруппа, поле, матричное представление, эквивалентность, неразложимость, характеристика поля, симметрическая полугруппа, конечный тип, ручная и дикая полугруппа, матричная алгебра Аусклендера, R-носитель.

ABSTRACT

Starkova E. M. *Matrix representations of direct products of symmetric semigroups of second degree.* – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.06 — "algebra and number theory". – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine. – Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2019.

The thesis is devoted to the study of matrix representations of symmetric semigroups and their direct products over a field K.

In the first section of the dissertation, we give a theoretical information on the theory of categories, representations of quivers and semigroups.

In the second section we study the matrix representations of the symmetric semigroup of degree 2, that is, the semigroup of all transformations of a two-element set. It is denoted by T_2.

In semigroup T_2 we can choose generating elements e, a, b with such definition relations: 1) $ea = ae = a$, 2) $eb = be = b$, 3) $a^2 = e$, 4) $b^2 = b$, 5) $ab = b$.

It is proved that if the unit element e of the semigroup T_2 corresponds to a unit matrix (this condition is natural), then any matrix representation of the semigroup T_2 over a field K of the characteristics 2 is equivalent to a matrix representation of the form

$$a \to A = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & E_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

$$b \to B = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

where $E_1, \ldots, E_5$ are unit matrices.

Using this canonical form, we describe, up to equivalence, all indecomposable representations of the semigroup T_2

1) $a \to 1, \quad b \to 0;$

2) $a \to 1, \quad b \to 1;$

3) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

5) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

We also calculate the matrix Auslander algebra (as one of the forms for assigning a category of representations).

In the third section we study absolutely and strongly indecomposable (non-modular and modular) matrix representations of the direct product of an arbitrary number of symmetric semigroups of second degree over a field K.

The matrix representations of such a semigroup is called absolutely indecomposable if its restriction on each direct factor is indecomposable and strongly indecomposable if its restriction is indecomposable at least on one direct factor.

An absolutely and strongly indecomposable (non-modular and modular) matrix representations of the direct product of an arbitrary number of symmetric semigroups of the second degree are described and the number of classes of equivalence of such representations over a finite field is calculated.

A tameness criterion is obtained for the modular representations of the direct product of symmetric semigroups and groups of powers 2.

In the fourth section modular representations of semigroups with additional conditions are studied.

R-support of the matrix representation M of the direct product $T \times S$ of the semigroups T and S with respect to T we call the set of indecomposable pairwise non-equivalent representations $R_1, \ldots, R_s$ such that the restriction of M to T is decomposed into the direct sum of the indicated representations (with some multiplicity) and each of them is actually present.

We consider modular matrix representations of the direct product of symmetric semigroup of degree 2 with an arbitrary fixed R-support (concerning to the semigroup T_2). We describe all R-support of arbitrary order for which the corresponding problem of the description of modular representation has finite type; in each of these cases all (up to equivalence) indecomposable representations are described. For R-supports of order $m < 4$ with a finite-type problem, the corresponding Auslander algebras are calculated.

Keywords: semigroup, field, matrix representation, equivalence, indecomposability, characteristic of a field, symmetric semigroup, finite type, tame and wild semigroup, Auslander matrix algebra, R-support.