Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Старкова Еліна Михайлівна

УДК 512.53+512.64

ДИСЕРТАЦІЯ

Матричні зображення прямих добутків симетричних напівгруп другого степеня

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело _____________ Е. М. Старкова

Науковий керівник
Бондаренко Віталій Михайлович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ – 2019

АНОТАЦІЯ

Старкова Е. М. Матричні зображення прямих добутків симетричних напівгруп другого степеня. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України, Київ, 2019.

Дисертаційна робота присвячена вивченню матричних зображень симетричних напівгруп та їх прямих добутків над полем K.

У першому розділі дисертаційної роботи викладено теоретичні відомості з теорії категорій, зображень сагайдаків і напівгруп.

У другому розділі вивчаються матричні зображення симетричної напівгрупи степеня 2, тобто напівгрупа всіх перетворень двоелементної множини. Позначається вона через T_2.

У напівгрупі T_2 можна вибрати твірні елементи e, a, b з такими визначальними співвідношеннями:

1) $ea = ae = a$, 2) $eb = be = b$,

3) $a^2 = e$, 4) $b^2 = b$,

5) $ab = b$.

Доведено, що якщо вважати, що одиничному елементу e напівгрупи T_2 відповідає одинична матриця (ця умова природна), то будь-яке матричне зображення напівгрупи T_2 над полем K характеристики 2 еквівалентне матричному зображенню вигляду

$$a \to A_0 = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|c|c}
E & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & E & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & E & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E
\end{array}\right),$$

$$b \to B_0 = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|c|c}
E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).$$

E позначає деякі одиничні матриці розмірності $n \geq 0$ (не обов'язково два різних блока, позначених через E, мають однакову розмірність).

З використанням цієї канонічної форми описуються, з точністю до еквівалентності, всі нерозкладні зображення напівгрупи T_2. А саме доведено, що нерозкладні матричні зображення напівгрупи T_2 над полем K характеристики 2 вичерпуються, з точністю до еквівалентності, наступними (попарно нееквівалентними) зображеннями:

1) $a \to 1, \quad b \to 0;$

2) $a \to 1, \quad b \to 1;$

3) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

5) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Обчислюється також матрична алгебра Аулендера (як одна із форм задання категорії зображень). А саме має місце таке твердження:

Якщо K — поле характеристики 2, то матрична алгебра Ауслендера для напівгрупи T_2 складається з усіх матриць вигляду

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{18} & 0 \\ 0 & x_{11} & x_{23} & 0 & x_{25} & 0 & x_{27} & 0 & x_{29} \\ 0 & 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{41} & 0 & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & x_{48} & 0 \\ 0 & 0 & x_{41} & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{62} & x_{63} & 0 & x_{65} & x_{66} & x_{67} & 0 & x_{69} \\ 0 & 0 & x_{62} & 0 & 0 & 0 & x_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{88} & 0 \\ 0 & 0 & x_{93} & 0 & x_{95} & 0 & x_{97} & 0 & x_{99} \end{pmatrix},$$

де x_{ij}– елементи поля K. Розмірність алгебри $Aus(T_2)$ дорівнює 20, її радикал $R(T_2)$ має ступінь нільпотентності 5 і $Aus(T_2)/R(T_2) = K \oplus K \oplus K \oplus K \oplus K$.

У третьому розділі вивчаються абсолютно і сильно нерозкладні (немодулярні та модулярні) матричні зображення прямого добутку довільного числа симетричних напівгруп другого степеня над полем K. Матричне зображення такої напівгрупи називається абсолютно нерозкладним, якщо його обмеження на кожний прямий співмножник є нерозкладним, і сильно нерозкладним, якщо нерозкладним є його обмеження хоча б на один прямий співмножник.

Описано абсолютно і сильно нерозкладні (немодулярні та модулярні) матричні зображення прямого добутку довільного числа симетричних напівгруп другого степеня; обчислено число класів еквівалентності таких зображень над скінченним полем.

Отримано критерій ручності відносно модулярних зображень прямого добутку симетричних напівгруп і груп степенів 2.

У четвертому розділі вивчаються модулярні зображення напівгруп з додатковими умовами.

R-носієм матричного зображення M прямого добутку $T \times S$ напівгруп T і S відносно T називатимемо набір нерозкладних попарно нееквівалентних зображень $R_1, \ldots, R_s$ такий, що обмеження M на T розкладається в пряму суму вказаних зображень (з деякою кратністю), причому кожне з них реально присутнє.

Розглядаються модулярні матричні зображення прямого добутку симетричної напівгрупи степеня 2 і симетричної групи степеня 2 з довільним фіксованим R-носієм (відносно напівгрупи T_2). Описано всі R-носії довільного порядку, для яких відповідна задача про опис модулярних зображень має скінченний тип; в кожному з таких випадків описано всі (з точністю до еквівалентності) нерозкладні зображення. Для R-носіїв порядку $m < 4$ із задачею скінченного типу обчислено відповідні алгебри Ауслендера.

Отже, в роботі містяться наступні нові наукові результати:

- Описана канонічна форма модулярних зображень симетричної напівгрупи другого степеня.

- Описана категорія модулярних нерозкладних зображень симетричної напівгрупи другого степеня.

- Описані абсолютно і сильно нерозкладні (немодулярні та модулярні) матричні зображення прямого добутку довільного числа симетричних напівгруп другого степеня; обчислено число класів еквівалентності таких зображень над скінченним полем.

- Доведена дикість задачі опису зображень прямого добутку симетричної напівгрупи і симетричної групи степенів 2 над полем характеристики 2.

- Отримано критерій ручності відносно модулярних зображень прямого добутку симетричних напівгруп і груп степенів 2.

- Для модулярних зображень прямого добутку симетричної напівгрупи і симетричної групи степеня 2 описано всі R-носії (відносно симетричної напівгрупи) довільного порядку, для яких відповідна задача про опис модулярних зображень має скінченний тип; в кожному з таких випадків описано всі (з точністю до еквівалентності) нерозкладні зображення.

- У випадку R-носіїв порядку $m < 4$ із задачею скінченного типу обчислено відповідні алгебри Ауслендера.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Отримані в ній результати, а також методи, за допомогою яких вони отримані, можуть бути використані в теорії зображень різних об'єктів і в областях науки, які використовують у своїх дослідженнях матричні методи.

Ключові слова: напівгрупа, поле, матричне зображення, еквівалентність, нерозкладність, характеристика поля, симетрична напівгрупа, скінченний тип, ручна і дика напівгрупа, алгебра Ауслендера, R-носій.

ABSTRACT

Starkova E. M. Matrix representations of direct products of symmetric semigroups of second degree. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.06 — "algebra and number theory". – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2019.

The thesis is devoted to the study of matrix representations of symmetric semigroups and their direct products over a field K.

In the first section of the dissertation, we give a theoretical information on the theory of categories, representations of quivers and semigroups.

In the second section we study the matrix representations of the symmetric semigroup of degree 2, that is, the semigroup of all transformations of a two-element set. It is denoted by T_2.

In semigroup T_2 we can choose generators elements e, a, b with such definition relations;

1) $ea = ae = a$, 2) $eb = be = b$,

3) $a^2 = e$, 4) $b^2 = b$,

5) $ab = b$.

It is proved that if the unit element e of the semigroup T_2 corresponds to a unit matrix (this condition is natural), then any matrix representation of the semigroup T_2 over a field K of the characteristic 2 equivalent to a matrix representation of the form

$$a \to A_0 = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|c|c}
E & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & E & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & E & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E
\end{array}\right),$$

$$b \to B_0 = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|c|c}
E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).$$

E denotes some unit matrices of the dimension $n \geq 0$ (not necessarily two different blocks, denoted by E, have the same dimension).

Using this canonical form, we describe, up to equivalence, all indecomposable representations of the semigroup T_2. Namely, it is proved that indecomposable matrix representations of the semigroup T_2 over the field K of characteristic 2 are exhausted, up to equivalence, the following (pairwise nonequivalent) representations:

1) $a \to 1, \quad b \to 0;$

2) $a \to 1, \quad b \to 1;$

3) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

5) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

We calculate also the matrix Aulander algebra (as one of the forms for assigning a category of representations). Namely, the following proposition holds.

If K is a field of characteristic 2, then the matrix Aulander algebra for the semigroup T_2 consist of all matrices of the form

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{18} & 0 \\ 0 & x_{11} & x_{23} & 0 & x_{25} & 0 & x_{27} & 0 & x_{29} \\ 0 & 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{41} & 0 & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & x_{48} & 0 \\ 0 & 0 & x_{41} & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{62} & x_{63} & 0 & x_{65} & x_{66} & x_{67} & 0 & x_{69} \\ 0 & 0 & x_{62} & 0 & 0 & 0 & x_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{88} & 0 \\ 0 & 0 & x_{93} & 0 & x_{95} & 0 & x_{97} & 0 & x_{99} \end{pmatrix},$$

where $x_{ij}-$ are elements of the field K. Dimension of the algebra $Aus(T_2)$ is equal to 20, its radical $R(T_2)$ has degree of nilpotency 5 and $Aus(T_2)/R(T_2) = K \oplus K \oplus K \oplus K \oplus K$.

In the third section we study absolutely and strongly indecomposable (non-modular and modular) matrix representations of the direct product of an arbitrary number of symmetric semigroups of second degree over a field K. The matrix representations of such a semigroup is called absolutely indecomposable if its restriction on each direct factor is indecomposable and strongly indecomposable if its restriction is indecomposable at least on one direct factor.

An absolutely and strongly indecomposable (non-modular and modular) matrix representations of the direct product of an arbitrary number of symmetric semigroups of the second degree are described and the number of classes of equivalence of such representations over a finite field is calculated.

A tameness criterion is obtained for the modular representations of the direct product of symmetric semigroups and groups of powers 2.

In the fourth section modular representations of semigroups with additional conditions are studied.

R-support of the matrix representation M of the direct product $T \times S$ of the semigroups T and S with respect to T we call the set of indecomposable pairwise non-equivalent representations $R_1, \ldots, R_s$ such that the restriction of M to T is decomposed into the direct sum of the indicated representations (with some multiplicity) and each of them is actually present.

We consider modular matrix representations of the direct product of symmetric semigroup of degree 2 and symmetric group of degree 2 with an arbitrary fixed R-support (concerning to the semigroup T_2). We describe all R-support of arbitrary order for which the corresponding problem of the description of modular representation has finite type; in each of these cases all (up to equivalence) indecomposable representations are described. For R-supports of order $m < 4$ with a finite-type problem, the corresponding Auslander algebras are calculated.

Consequently, the work contains the following new scientific results:

• The canonical form of modular representations of the symmetric semigroup of the second degree is described.

• The category of modular indecomposable representations of the symmetric semigroups of the second degree is described.

• An absolutely and strongly indecomposable (non-modular and modular) matrix representations of the direct product of an arbitrary number of symmetric semigroups of the second degree are described; the number of the classes of equivalence of such representations over a finite field is calculated.

• The wildness of the description of the direct product of the symmetric semigroup and the symmetric group of degree 2 over the field of characteristic 2 is proved.

• A criterion of tameness for modular representations of direct product of symmetric semigroups and groups of degree 2 is obtained.

• For modular representations of a direct product of a symmetric semigroup and a symmetric group of degree 2 one describes all R-supports (relative to the symmetric semigroup) of arbitrary order for which the corresponding problem of the description of modular representations has a finite type; in each of these cases all (up to equivalence) indecomposable representations are described.

• In the case of R-support of order $m < 4$ with a finite-type problem, the corresponding Auslander algebras are calculated.

The practical significance of the results. The results of the dissertation work are mainly theoretical. They (and also the corresponding methods) can be used in theory representations of various objects and in areas of mathematics which used in their research matrix methods.

Keywords: semigroup, field, matrix representation, equivalence, indecomposability, characteristic of a field, symmetric semigroup, finite type, tame and wild semigroup, Auslander algebra, R-support.

Список публікацій за темою дисертації

Статті у наукових виданнях

1. Бондаренко В. М. Модулярні зображення напівгрупи T_2 / В. М. Бондаренко, Е. М. Костишин // Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2011. – вип. 22, №1. – С. 26-34.

2. Костишин Э. М. Об абсолютно неразложимых немодулярных матричных представлениях полугрупп $T_2 \times T_2 \times \ldots \times T_2$ / Э. М. Костишин // Вісник Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка (серія: фізико-математичні науки). – 2011. – вип. 3. – С. 37-39.

3. Bondarenko V. M. On modular representations of semigroups $S_p \times T_p$ / V. M. Bondarenko, E. M. Kostyshyn // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – vol. 16, no. 1. – P. 16-19.

4. Костишин Е. М. Сильно нерозкладні матричні зображення для одного класу напівгруп / Е. М. Костишин, О. М. Тертична // Наукові записки НАУКМА (фізико-математичні науки). – 2013. – т. 139. – С. 14-17.

5. Костишин Е. М. Алгебра Ауслендера для напівгрупи всіх перетворень двоелементної множини / Е. М. Костишин // Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2017. – вип. 30, №1. – С. 53-60.

6. Бондаренко В. М. Модулярні зображення з додатковими умовами напівгрупи $T_2 \times S_2$ / В. М. Бондаренко, Е. М. Костишин // Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2017. – вип. 31, №2. – С. 28-38.

Тези наукових доповідей

1. Kostyshyn E. M. Matrix representations of small semigroups / E. M. Kostyshyn // 8th International Algebraic Conference in Ukraine: Lugansk, July 5-12, 2011: Book of abstracts. – Lugansk, 2011. – P. 168.

2. Костишин Е. М. Матричні зображення напівгрупи всіх перетворень множини із 2-х елементів над полем характеристики 2 / Е. М. Костишин // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука: Київ, 19-21 квітня 2012: Матеріали конференції II (Алгебра. Геометрія. Математичний та чисельний аналіз). – Київ, 2012. – С. 143.

3. Kostyshyn E. M. On tame and wild cases for matrix representations of the semigroup / E. M. Kostyshyn // 9th International Algebraic Conference in Ukraine: L'viv, July 8-13, 2013: Book of Abstracts. – L'viv, 2013. – P. 94.

4. Kostyshyn E. M. On strongly indecomposable modular representations of the semigroups $T_2 \times T_2 \times \ldots \times T_2$ / E. M. Kostyshyn // International Algebraic Conference dedicated to 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin: Kyiv, July 7-12, 2014: Book of Abstracts. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2014. – P. 47.

5. Kostyshyn E. M. On indecomposable modular matrix representations of the semigroups $T_2 \times T_2 \times \ldots \times T_2$ / E. M. Kostyshyn // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd: Odessa, August 20-27, 2015: abstracts. – Odessa, 2015. – P. 54.

6. Kostyshyn E. M. On Auslander algebra of the symmetric semigroup of degree 2 / E. M. Kostyshyn // 11th International Algebraic Conference

in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko: Kyiv, July 3-7, 2017: Abstracts. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017. – P. 61.

Зміст

ВСТУП

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена вивченню матричних зображень симетричних напівгруп та їх прямих добутків над полем K.

Матричні зображення скінченних напівгруп над полями вивчені не в такій мірі, як зображення груп. Зображення скінченних груп над полями вивчені достатньо добре; зокрема, повністю визначено зображувальний тип кожної із таких груп для поля довільної характеристики. У випадку, коли характеристика поля не ділить порядок скінченної групи (такий випадок називають класичним), група завжди має, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень (така група називається групою скінченного зображувального типу); до того ж в цьому випадку кожне нерозкладне зображення є незвідним прямим доданком регулярного зображення. У випадку, коли характеристика p ділить порядок групи (такий випадок називають модулярним), група має скінченний зображувальний тип лише тоді, коли її силовська p-підгрупа є циклічною. У модулярному випадку для більшості скінченних груп задача про опис їх зображень включає в себе задачу про класифікацію пар матриць з точністю до подібності. Такі групи називаються дикими, а групи, що допускають явний опис зображень, — ручними (точні формальні означення див. в [1]). Ручні та дикі групи для цього випадку повністю описали В. М. Бондаренко і Ю. А. Дрозд [2].

Одним із основних методів вивчення матричних зображень скінченних груп (і особливо p-груп) в модулярному випадку є метод матричних задач (в даному випадку зведення до класифікаційних матричних задач без співвідношень). Зокрема, класифікація модулярних зображень четверної групи Клейна зводиться до відомої задачі про жмуток матриць (В. А. Башев [3]), класифікація модулярних зображень діедральних груп зводиться до зображень в'язки ланцюгів (В. М.Бондаренко [4]), класифікація модулярних зображень квазідіедральних груп та узагальнених груп кватерніонів зводиться до зображень в'язки напівланцюгів (В. М.Бондаренко [5, 6]).

В теорії напівгруп найбільша кількість робіт присвячена темі, пов'язаній із вивченням незвідних зображень і, зокрема, з виділенням класів напівгруп, всі нерозкладні зображення яких є незвідними (див., напр., монографії [7, 8]), зі знаходженням зв'язків між незвідними зображеннями напівгрупи та її піднапівгруп тощо. Слід виділити також деякі окремі результати про напівгрупи скінченного зображувального типу, а саме випадок скінченної цілком простої напівгрупи (І. С. Понізовський [9]) та випадок напівгрупи всіх перетворень скінченної множини (І. С. Понізовський [10], К. Рінгель [11]). Що стосується випадків, коли число нерозкладних зображень нескінченне, то найбільш відомими є результати з теорії зображень алгебр, які можна переформулювати в термінах зображень напівгруп: опис зображень алгебри $< a, b \,|\, ab = ba = 0 >$ (І. М. Гельфанд, В. А. Пономарьов [12], Л. О. Назарова, А. В. Ройтер, В. В. Сергейчук, В. М. Бондаренко [13]) та алгебри $< a, b \,|\, a^2 = b^2 = 0 >$ (В. М. Бондаренко [4], К. Рінгель [14]). Якщо ж говорити не про окремі напівгрупи, а про класи напівгруп, то слід відзначити роботи про зображення напівгруп, породжених ідемпотентами з частковим нульовим множенням (В. М. Бондаренко, О. М. Тертична [15, 16, 17]), а також про зображення напівгруп Рісса (С. М. Дяченко [18, 19, 20]). Такі напівгрупи можуть мати як скіченне, так і нескінченне число нерозкладних зображень.

У дисертації вивчаються матричні зображення симетричних напівгруп другого степеня та їх прямих добутків над полем K. Основна увага приділяється вивченню зображень спеціального вигляду і опису напівгруп скінченного зображувального типу в модулярному випадку та їх зображень, що задовольняють природним з точки зору теорії зображень умовам. Друга задача є однією з основних традиційних задач в теоріях зображень різних алгебраїчних об'єктів (див., зокрема,[21] – [45]). Важливість обох задач визначається тим, що в модулярному випадку задача про опис зображень прямого добутку симетричної напівгрупи другого степеня і симетричної групи другого степеня є дикою.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертаційної роботи пов'язана з науковими дослідженнями на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка — тема 11БФ038-03 "Застосування алгебро-геометричних методів в теоріях груп, напівгруп, кілець, зображень до задач прикладної алгебри та захисту інформації" (номер державної реєстрації 0111U005264).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дослідження є опис модулярних матричних зображень скінченних напівгруп над полем, пов'язаних із симетричними напівгрупами степеня 2 і обчислення їхніх категорних та комбінаторних характеристик.

Об'єктом дослідження є матричні зображення напівгруп над полем та алгебри Ауслендера.

Предметом дослідження є канонічні форми матричних зображень, нерозкладність матричних зображень та вигляд алгебр Ауслендера.

Методи дослідження. *Основними методами*, що використовуються у дослідженні, є класичні і сучасні методи лінійної алгебри і теорії зображень.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації автором отримано такі нові результати про матричні зображення напівгруп:

- Описана канонічна форма модулярних зображень симетричної напівгрупи другого степеня.
- Описана категорія модулярних нерозкладних зображень симетричної напівгрупи другого степеня
- Описані абсолютно і сильно нерозкладні (немодулярні та модулярні) матричні зображення прямого добутку довільного числа симетричних напівгруп другого степеня; обчислено число класів еквівалентності таких зображень над скінченним полем.
- Доведена дикість задачі опису зображень прямого добутку симетричної напівгрупи і симетричної групи степенів 2 над полем характеристики 2.
- Отримано критерій ручності відносно модулярних зображень прямого добутку симетричних напівгруп і груп степенів 2.
- Для модулярних зображень прямого добутку симетричної напівгрупи і симетричної групи степеня 2 описано всі R-носії (відносно симетричної напівгрупи) довільного порядку, для яких відповідна задача про опис модулярних зображень має скінченний тип; в кожному з таких випадків описано всі (з точністю до еквівалентності) нерозкладні зображення.
- У випадку R-носіїв порядку $m < 4$ із задачею скінченного типу обчислено відповідні алгебри Ауслендера.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Отримані в ній результати, а також методи, за допомогою яких вони отримані, можуть бути використані в теорії зображень різних об'єктів і в областях науки, які використовують у своїх дослідженнях матричні методи.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно. У спільних з науковим керівником роботах останньому належать постановки задач і загальні ідеї щодо методів їх розв'язання, а практична реалізація та ряд конкретних ідей належать здобувачеві. У статті з О. М. Тертичною здобувачеві належать всі результати, окрім тверджень про число зображень над скінченним полем.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи оприлюднено на:

— VIII Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (м. Луганськ, 5-12 липня 2011 р.);

— Чотирнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (м. Київ, 19-21 квітня 2012 р.);

— IX Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (м. Львів, 8-13 липня 2013 р.);

— Міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження Л. А. Калужніна (м. Київ, 7-12 липня 2014 р.);

— X Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 70-річчю Ю. А. Дрозда (м. Одеса, 20-27 серпня 2015 р.).

— XI Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 75-річчю В. В. Кириченка (м. Київ, 3-7 серпня 2017 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в шести наукових роботах ([46] – [51]), всі з яких опубліковані у фахових виданнях із Переліку, затвердженого Міністерством освіти і науки України; одна з яких [48] — у виданні, що відображається у наукометричній базі Scopus. Шість робіт опубліковано в матеріалах наукових конференцій ([52] – [57]).

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Загальний обсяг дисертації — 111 сторінок. Обсяг основного тексту дисертації — 138 сторінок. Список використаних джерел

Автор щиро вдячний своєму науковому керівнику професору В. М. Бондаренку за постановку задач, цінні поради та постійну увагу до роботи.

Розділ 1

ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

Протягом цього розділу K позначає довільне поле, а всі векторні простори є скінченновимірними.

1.1. Зображення сагайдаків

При розгляді лінійних відображень ми притримуємося правого запису (тобто відображення записуються з правого боку від векторів і перемножуються зліва направо). Матеріал цього підрозділу викладено так, як в монографії [58].

Нехай $Q = (Q_0, Q_1)$ — сагайдак (орієнтований граф) з множиною вершин Q_0 і множиною стрілок Q_1. Будемо завжди вважати, що множини Q_0 і Q_1 скінченні. Як правило, будемо також вважати, що $Q_0 = \{1, 2, \ldots, q\}$. Початкову і кінцеву вершини стрілки λ будемо позначати $s(\lambda)$ і $t(\lambda)$ відповідно. Якщо λ — стрілка з початковою вершиною $s(\lambda) = x$ і кінцевою вершиною $t(\lambda) = y$, то будемо також писати $\lambda : x \to y$ або (якщо сагайдак не має кратних стрілок) $\lambda = (x, y)$.

Зображення сагайдака $Q = (Q_0, Q_1)$ над полем K були введені П. Габріелем у роботі [21]. Це пара $R = (U, \gamma)$, яка складається із сімейства

$$U = \{U_x \,|\, x \in Q_0\}$$

векторних K-просторів U_x і сімейства $\gamma = \{\gamma_\alpha\}$ лінійних відображень $\gamma_\alpha : U_{s(\alpha)} \to U_{t(\alpha)}$, де α пробігає множину всіх стрілок Q_1 сагайдака Q).

Вектор $\overline{d} = \overline{d}(R) = (d_x), x \in Q_0$, де $d_x = \dim_K U_x$, називається *вектор-розмірністю* зображення R, а сума $d = \sum_{x \in Q_0} d_x$ — його *розмірністю.*

Два зображення $R = (U, \gamma)$ і $R' = (U', \gamma')$ сагайдака $Q = (Q_0, Q_1)$ (над полем K) називаються *еквівалентними*, якщо існує сімейство

$$\lambda = \{\lambda_x \,|\, x \in Q_0\}$$

лінійних бієктивних відображень $\lambda_x : U_x \to U'_x$ таке, що для кожної стрілки $\alpha : x \to y$ із Q_1 діаграма

$$\begin{array}{ccc} U_x & \xrightarrow{\gamma_\alpha} & U_y \\ {\scriptstyle \lambda_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_y} \\ U'_x & \xrightarrow{\gamma'_\alpha} & U'_y \end{array}$$

є комутативною, тобто $\gamma_\alpha \lambda_y = \lambda_x \gamma'_\alpha$.

Пряма сума $R' \oplus R''$ *зображень* $R' = (U', \gamma')$ і $R'' = (U'', \gamma'')$ сагайдака $Q = (Q_0, Q_1)$ вводиться природним чином:

$$R' \oplus R'' = (U' \oplus U'', \gamma' \oplus \gamma''),$$

де $\gamma' \oplus \gamma''$ позначає сімейство лінійних відображень

$$\{\gamma'_\alpha \oplus \gamma''_\alpha : U'_x \oplus U''_x \to U'_y \oplus U''_y\}.$$

Тут $\alpha : x \to y$ пробігає множину Q_1. Зображення R називається *розкладним*, якщо воно еквівалентне прямій сумі двох ненульових зображень, і *нерозкладним* у протилежному випадку (нульове зображення — це зображення розмірності 0). Для зображень сагайдаків справедлива теорема Крулля-Шмідта про однозначність розкладу довільного зображення в пряму суму нерозкладних зображень (див., напр., [59]).

Означення зображення сагайдака $Q = (Q_0, Q_1)$ та еквівалентності його зображень можна сформулювати на мові матриць. При цьому вважаємо, що сагайдак $Q = (Q_0, Q_1)$ не містить ізольованих вершин (тобто таких, що не є ні початковою, ні кінцевою вершиною якої-небудь стрілки). Число рядків і стовпців матриці A будемо позначати відповідно $r(A)$ і $c(A)$.

Матричне зображення сагайдака Q над полем K — це сімейство матриць

$$M = \{M_\alpha \,|\, \alpha : x \to y \ \text{ пробігає } \ Q_1\}$$

з елементами з поля K таке, що виконані наступні умови:

а) матриці M_α і M_β мають однакове число рядків, якщо початкова вершина стрілки α збігається з початковою вершиною стрілки β;

б) матриці M_α і M_β мають однакове число стовпців, якщо кінцева вершина стрілки α збігається з кінцевою вершиною стрілки β;

в) число рядків матриці M_α дорівнює числу стовпців матриці M_β, якщо початкова вершина стрілки α збігається з кінцевою вершиною стрілки β.

Для матричного зображення M і вершини $x \in Q_0$ покладемо $d_x(M) = r(M_\alpha)$, якщо існує стрілка $\alpha = \{x \to y\}$, і $d_x(M) = c(M_\alpha)$, якщо існує стрілка $\alpha = \{z \to x\}$.

Тоді *вектор-розмірність* матричного зображення M сагайдака Q — це вектор

$$\overline{d} = \overline{d}(M) = (d_x), x \in Q_0,$$

де $d_x = d_x(M)$, а *розмірність* — це число $d = \sum_{x \in Q_0} d_x$.

Два матричних зображення M і M' називаються *еквівалентними*, якщо існує сімейство оборотних матриць $N = \{N_x \,|\, x \in Q_0\}$, які задовольняють такі умови:

г) $r(N_x) = d_x(M)$ і $c(N_x) = d_x(M')$;

д) $M_\alpha N_y = N_x M'_\alpha$ для кожної стрілки $\alpha : x \to y$.

Дамо означення еквівалентності матричних зображень сагайдака в термінах елементарних перетворень рядків та стовпців матриць.

Нехай $M = \{M_\alpha \,|\, \alpha \in Q_1\}$ — деяке матричне зображення сагайдака Q. Вкажемо спочатку деяку множину перетворень матриць M_α, які назвемо *допустимими*:

1а) якщо α — стрілка з початковою вершиною a і кінцевою вершиною b, то з рядками матриці M_α можна робити довільне елементарне перетворення, але при цьому треба зробити таке ж саме перетворення з рядками кожної матриці M_β, $\beta = \{a \to c\} \neq \alpha$, та обернене перетворення зі стовпцями кожної матриці $M_{\beta'}$, $\beta' = \{d \to a\}$;

1б) якщо α — стрілка з початковою вершиною a і кінцевою вершиною b, то зі стовпцями матриці M_α можна робити довільне елементарне перетворення, але при цьому треба зробити таке ж саме перетворення зі стовпцями кожної матриці M_β, $\beta = \{c \to b\} \neq \alpha$, та обернене перетворення з рядками кожної матриці $M_{\beta'}$, $\beta' = \{b \to d\}$.

Два матричні зображення сагайдака, одне з яких можна отримати з іншого за допомогою допустимих перетворень, назвемо *еквівалентними*.

Рівнозначність двох означень еквівалентних матричних зображень випливає з загальних добре відомих тверджень про властивості елементарних перетворень.

Нагадаємо, що все вище викладене про матричні зображення стосується сагайдаків без ізольованих вершин. В загальному випадку (коли можуть бути і ізольовані вершини) означення матричних зображень запропоновано у книзі [58].

Отже, нехай $Q = (Q_0, Q_1)$ — довільний сагайдак. *Матричне зображення сагайдака* Q — це сімейство невід'ємних чисел

$$\overline{d} = (d_x), x \in Q_0,$$

разом із сімейством матриць

$$M = \{M_\alpha \,|\, \alpha : x \to y \ \text{ пробігає } \ Q_1\}$$

таких, що M_α має розмір $d_x \times d_y$ для кожної стрілки $\alpha : x \to y$.

Два таких зображення $(\overline{d}, M)$ і $(\overline{d'}, M')$ називаються *еквівалентними*, якщо існує сімейство оборотних матриць $N = \{N_x \,|\, x \in Q_0\}$ таких, що

а) N_x має розмір $d_x \times d'_x$ для довільної вершини x;

б) $M_\alpha N_y = N_x M'_\alpha$ для довільної стрілки $\alpha : x \to y$.

Очевидно, що в цьому випадку $\overline{d} = \overline{d'}$.

І ми бачимо, що якщо, наприклад, сагайдак складається з однієї ізольованої вершини, то його матричне зображення — це просто довільне ціле невід'ємне число.

Пряма сума зображень $(\overline{d}, M)$ і $(\overline{d'}, M')$ — це зображення

$$(\overline{d} + \overline{d'}, M \oplus M'),$$

де

$$M \oplus M' = \{M_\alpha \oplus M'_\alpha \,|\, \alpha : x \to y \ \text{ пробігає } \ Q_1\}.$$

У термінах зображень сагайдаків можна сформулювати ряд добре відомих матричних задач.

Розглянемо деякі приклади:

1) Задача про приведення однієї матриці елементарними перетвореннями рядків та стовпців — це задача про опис зображень сагайдака, що складається з двох вершин 1, 2 і однієї стрілки $\alpha : 1 \to 2$. Канонічна форма для цієї задачі добре відома, а саме нею є матриці A вигляду

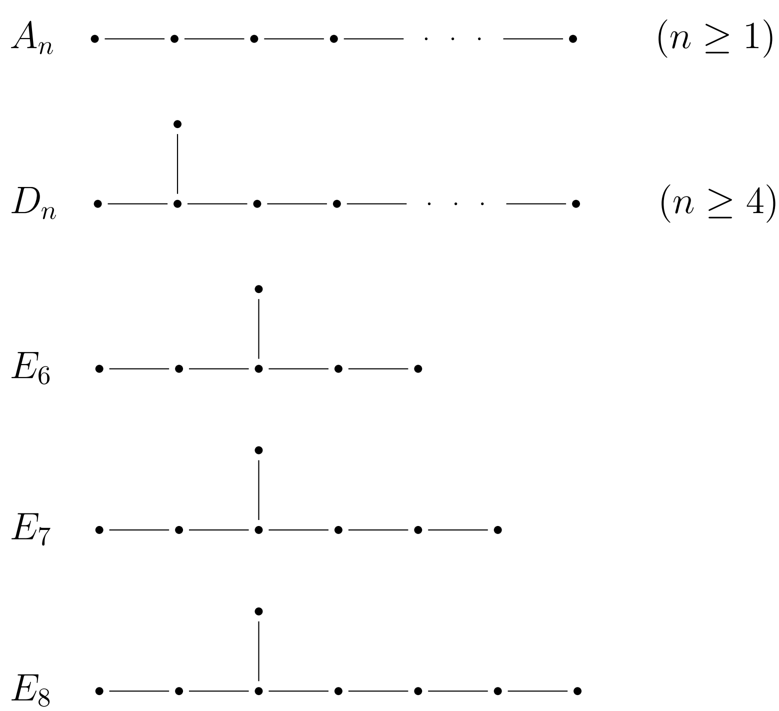
$$A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Задача про приведення однієї матриці перетвореннями подібності — це задача про опис зображень сагайдака, що складається з однієї вершини і однієї стрілки. Канонічна форма для цієї задачі добре відома (див., наприклад, [60, 61]).

3) Задача про приведення двох матриць одночасними елементарними перетвореннями рядків і одночасними елементарними перетвореннями стовпців — це задача про опис зображень сагайдака, що складається з двох вершин 1, 2 і двох кратних стрілок $\alpha_1, \alpha_2 : 1 \to 2$. Канонічна форма для цієї задачі отримана ще в позаминулому столітті Вейєрштрассом та Кронекером (див., наприклад, [62]).

Кажуть, що сагайдак Q має *скінченний (зображувальний) тип* над полем K, якщо він має, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень. Сагайдаки скінченного типу описав П. Габріель в роботі [21]. Сформулюємо відповідний результат.

Теорема 1.1. *Сагайдак має скінченний зображувальний тип над полем K тоді і лише тоді, коли відповідний йому неорієнтований граф є незв'язним об'єднанням діаграм Динкіна*



(графи A_n та D_n мають n вершин).

Кажуть, що сагайдак Q має *ручний* (відповідно *дикий*) *зображувальний тип* над полем K або є *ручним* (відповідно *диким*) над полем K, якщо задача про опис його зображень є ручною (відповідно дикою); точні означення ручних і диких матричних задач (як, зокрема, і зображення сагайдаків) та теореми про такі задачі приведені в роботах [1, 63]. Оскільки в подальшому ми будемо розглядати зображення в матричній формі, то нагадаємо означення ручних і диких сагайдаків саме в такій формі. Зауважимо, що означення ручних та диких напівгруп по суті не відрізняються від означень відповідних зображень для сагайдаків.

Перш за все зауважимо, що ми можемо розглядати матричні зображення сагайдака Q над довільним кільцем, і, зокрема, над кільцем $K_1 = K[x]$ поліномів від однієї змінної x та над кільцем $K_2 = K[x, y]$ некомутативних поліномів від двох змінних x і y (або, іншими словами, над вільною K-алгеброю з двома твірними). Якщо R — матричне зображення сагайдака Q над кільцем K_1 і A — квадратна матриця розміру $n \times n$, то через $R(A)$ будемо позначати матричне зображення сагайдака Q над полем K, яке отримано з R підстановкою замість x матриці A, а замість кожного скаляру $a \in K$ скалярної матриці aE розміру $n \times n$, де E — одинична матриця. Далі, якщо R — матричне зображення сагайдака Q над кільцем K_2 і (A, B) — пара квадратних матриць однакового розміру $n \times n$, то через $R(A, B)$ будемо позначати матричне зображення сагайдака Q над полем K, яке отримано з R підстановкою замість x матриці A, замість y матриці B, а замість кожного скаляру $a \in K$ скалярної матриці aE розміру $n \times n$.

Будемо говорити, що матричне зображення X сагайдака Q над полем K породжується матричним зображенням R сагайдака Q над кільцем K_1, якщо X еквівалентне зображенню вигляду $R(A)$ для деяких R, A.

Дамо тепер означення ручних та диких сагайдаків. Поле K вважаємо нескінченним (у випадку скінченного поля K його треба замінити нескінченним над полем). Сагайдак Q називається *ручним* над полем K, якщо для кожної вектор-розмірності $\overline{d}$ існує скінченне число матричних зображень R_i над кільцем K_1 таких, що, з точністю до еквівалентності, кожне нерозкладне матричне зображення сагайдака Q над полем K (векторрозмірності $\overline{d}$) породжується R_i для деякого i.

Очевидно, що згідно означень множина ручних сагайдаків включає в себе множину сагайдаків скінченного типу.

Сагайдак Q називається *диким* над полем K, якщо існує матричне зображення R над кільцем K_2 таке, що

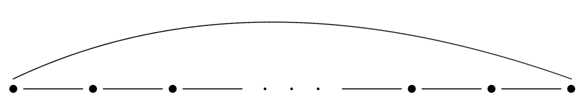
а) $R(A, B)$ та $R(A', B')$ не еквівалентні кожного разу, коли пари (A, B) і (A', B') не подібні;

б) $R(A, B)$ нерозкладне, якщо нерозкладна пара (A, B).

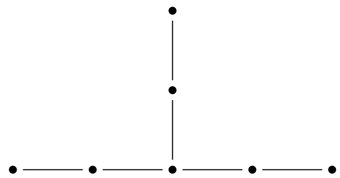
З основного результату роботи [1] (що стосується досить широкого класу матричних задач) випливає, що сагайдак не може бути одночасно ручним і диким, а з роботи [63] — що кожен сагайдак є або ручним, або диким (другий результат виконується при деяких обмеженнях на поле; зокрема, для алгебраїчно замкненого поля).

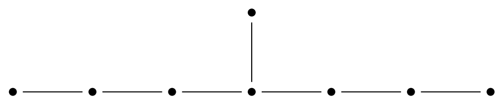
Ручні сагайдаки описано (одночасно та незалежно) в роботах [64] і [65]. Сформулюємо основний результат, отриманий у цих роботах.

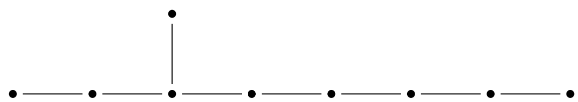
Теорема 1.2. *Зв'язний сагайдак нескінченного зображувального типу є ручним над полем K тоді і лише тоді, коли відповідний йому неорієнтований граф є розширеною діаграмою Динкіна, тобто має один із наступних виглядів:*

$\widehat{A}_n$  $(n \geq 1)$

$\widehat{D}_n$  $(n \geq 4)$

$\widehat{E}_6$ 

$\widehat{E}_7$ 

$\widehat{E}_8$ 

(*графи* $\widehat{A}_n$ *та* $\widehat{D}_n$ *мають* $n+1$ *вершину*).

1.2. Категорії над полем

У цьому підрозділі приводяться основні означення та деякі твердження, які стосуються категорій над полем.

Множина об'єктів категорії Φ позначається через $\operatorname{Ob}\Phi$, а множина її морфізмів — через $\operatorname{Mor}\Phi$; множина морфізмів з об'єкта X в об'єкт Y позначається через $\operatorname{Hom}_\Phi(X,Y)$ або $\Phi(X,Y)$. Замість $X \in \operatorname{Ob}\Phi$ часто пишуть $X \in \Phi$; запис $X \cong Y$ означає, що X і Y ізоморфні. Ізоморфізм — це оборотний морфізм (морфізм $\alpha \in \Phi(X,Y)$ називається оборотним, якщо існує морфізм $\beta \in \Phi(Y,X)$, такий, що $\alpha\beta = 1_X$ і $\beta\alpha = 1_Y$, де 1_Z позначає одиничний морфізм об'єкта Z).

Скелетом категорії називається її повна підкатегорія, що складається з представників всіх класів ізоморфних об'єктів.

Коваріантний функтор, як правило, називається просто функтором. Функтор $F : \Phi \to \Psi$ називається строгим, якщо для довільних об'єктів X, Y категорії Φ відображення

$$F(X,Y) : \operatorname{Hom}_\Phi(X,Y) \to \operatorname{Hom}_\Psi(XF, YF)$$

(яке визначається відображенням $F : \operatorname{Mor}\Phi \to \operatorname{Mor}\Psi$) ін'єктивне, і повним, якщо це відображення сюр'єктивне. Далі, фуктор $F : \Phi \to \Psi$ називається щільним, якщо для кожного $Y \in \Psi$ існує ізоморфний йому об'єкт виду XF, $X \in \Phi$.

Добре відома наступна теорема (див. наприклад, [66]).

Теорема 1.3. *Функтор $F : \Phi \to \Psi$ є еквівалентністю категорій тоді і лише тоді, коли він строгий, повний і щільний.*

Категорією над полем K або просто K-категорією називається довільна категорія Φ, всі множини морфізмів якої є векторними просторами над K, такими, що композиція морфізмів K-білінійна; тоді, очевидно, множини $\Phi(X, X)$ є K-алгебрами. Завжди вважаємо, що всі простори $\Phi(X, Y)$ є скінченновимірними. Елемент $X \in \Phi$ називається нульовим, якщо $\Phi(X, X) = 0$; це еквівалентно тому, що $1_X = 0$ (зауважимо, що в K-категорії не завжди існують нульові об'єкти).

Функтор $F : \Phi \to \Psi$ між K-категоріями Φ і Ψ називається K-лінійним, якщо всі відповідні йому відображення $F(X, Y)$ є K-лінійними; іноді такий функтор називають K-функтором.

Кожній категорії Φ можна природно зіставити K-категорію $K\Phi$, що називається K-лінійною оболонкою або K-лінеаризацією Φ; вона має ті ж об'єкти, що і категорія Φ, а $K\Phi(X, Y)$ — це векторний K-простір з базисом $\Phi(X, Y)$. Очевидно, що довільний функтор $F : \Phi \to \Psi$, де Ψ — K-категорія, однозначно продовжується до K-лінійного функтора $F^K : K\Phi \to \Psi$.

Двостороннім ідеалом (або просто ідеалом) $\mathcal{I}$ K-категорії Φ називається набір підпросторів $\mathcal{I}(X, Y) \subseteq \Phi(X, Y)$, де $X, Y \in \Phi$, таких, що $\lambda\alpha\gamma \in \Phi(W, Z)$ щораз, коли $\alpha \in \mathcal{I}(X, Y)$, $\lambda \in \Phi(W, X)$, $\gamma \in \Phi(Y, Z)$. З кожним ідеалом $\mathcal{I}$ зв'язаний фактор-K-категорія $\Phi/\mathcal{I}$ з тими ж об'єктами, що і категорія Φ, і множинами морфізмів $(\Phi/\mathcal{I})(X, Y) = \Phi(X, Y)/\mathcal{I}(X, Y)$ для всіх $X, Y \in \Phi$. Зауважимо, що якщо $1_X \in \mathcal{I}$, то об'єкт X категорії $\Phi/\mathcal{I}$ є нульовим. Канонічні проекції (просторів) $\Phi(X, Y) \to \Phi/\mathcal{I}(X, Y)$ задають функтор-проекцію $\Pi : \Phi \to \Phi/\mathcal{I}$.

Як важливий приклад, пов'язаний із цими поняттями, можна вказати наступний приклад. Нехай $F : \Phi \to \Psi$ — K-функтор між K-категоріями, що є повним і щільним. Позначимо через $\mathrm{Ker}F$ ядро функтора F, тобто множина всіх морфізмів α, таких, що $\alpha F = 0$; очевидно, що $\mathrm{Ker}F$ — ідеал в Φ. Тоді F індукує еквівалентність $\Phi/\mathrm{Ker}F \cong \Psi$.

Скінченна K-категорія Ψ називається спектроїдом, якщо її об'єкти попарно неізоморфні і всі алгебри ендоморфізмів $\Psi(X, X)$ локальні (локальна алгебра — це алгебра з $1 \neq 0$, всі необоротні елементи якої утворюють ідеал). Зауважимо, що умова про локальність всіх алгебр ендоморфізмів еквівалентна тому, що всі необоротні морфізми Ψ утворюють ідеал. Цей ідеал називається радикалом спектроїда Ψ; ми позначаємо його через $\mathcal{R}_\Psi$. Таким чином, ми маємо $\mathcal{R}_\Psi(X, Y) = \Psi(X, Y)$ для $X \neq Y$, а $\mathcal{R}_\Psi(X, X)$ — це максимальний ідеал (радикал) локальної алгебри $\Psi(X, X)$.

Якщо $\mathcal{I}$ — ідеал спектроїда Ψ і $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{R}_\Psi$, то, мабуть, $\Psi/\mathcal{I}$ також є спектроїдом; якщо ж $\mathcal{I}$ не належить $\mathcal{R}_\Psi$, то множина $P = \{X \in \Psi \,|\, 1_X \in \mathcal{I}\}$ непорожня і значить фактор-категорія $\Psi/\mathcal{I}$ не є спектроїдом (оскільки об'єкти $X \in P$ стають нульовими об'єктами $\Psi/\mathcal{I}$, алгебри ендоморфізмів $\Psi/\mathcal{I}(X, X)$ не є локальними). Однак у другому випадку спектроїдом є повна підкатегорія категорії $\Psi/\mathcal{I}$, що складається з ненульових об'єктів.

Адитивною K-категорією (або K-адитивною категорією) називається довільна K-категорія, що є адитивною (тобто має скінченні прямі суми і нульовий об'єкт). Відзначимо, що кожній K-категорії Φ можна природно зіставити адитивну K-категорію $\oplus\Phi$, що називається адитивною оболонкою Φ. Її об'єктами є скінченні послідовності $(X_1, \ldots, X_s)$ об'єктів з Φ, а морфізми $(X_1, \ldots, X_s) \to (Y_1, \ldots, Y_t)$ ототожнюються з "матрицями" $\mu = (\mu_{ij}) \in \bigoplus_{i,j} \Phi(X_i, Y_j)$; композиція морфізмів визначається правилом множення матриць.

Очевидно, що довільний K-лінійний функтор з Φ в Ψ, де Ψ — адитивна

K-категорія, можна природно продовжити до K-лінійного функтора з $\oplus\Phi$ в Ψ.

Скінченна адитивна K-категорія називається категорією Крулля-Шмідта, якщо кожний її об'єкт розкладається в пряму суму нерозкладних об'єктів з локальними алгебрами ендоморфізмів. Повну підкатегорію категорії Крулля-Шмідта Φ, що складається з представників всіх класів ізоморфізмів нерозкладних об'єктів, будемо позначати через Φ_0; очевидно, що категорія Φ_0 визначена однозначно з точністю до ізоморфізму категорій і є спектроїдом. Ми називаємо її головним спектроїдом категорії Φ.

Поняття радикала, що ми ввели вище для спектроїдів, можна ввести також і для категорій Крулля-Шмідта.

Нехай Φ — категорія Крулля-Шмідта. Морфізм $\alpha \in \Phi(X, Y)$ називається радикальним, якщо для кожного $\beta \in \Phi(Y, X)$ морфізми $1_X + \alpha\beta$ і $1_Y + \beta\alpha$ оборотні (насправді досить вимагати одну з цих умов). Всі радикальні морфізми утворюють ідеал, що називається радикалом категорії Φ; ми позначаємо його через $\mathcal{R}_\Phi$. Зауважимо, що між просторами $\mathcal{R}_\Phi(\oplus_i X_i, \oplus_j Y_j)$ і $\oplus_{i,j}\mathcal{R}_{\Phi_0}(X_i, Y_j)$ існує природний (канонічний) ізоморфізм.

Відносно викладеного в цьому підрозділі матеріалу див., наприклад, [67, 68].

1.3. Матричні зображення напівгруп

Матричним зображенням напівгрупи S розмірності n над полем K називається довільний гомоморфізм T із S в напівгрупу $M_n(K)$ (відносно множення) всіх матриць розміру $n \times n$ з елементами із поля K. Якщо напівгрупа задана твірними і співвідношеннями, то матричне зображення однозначно задається набором матриць, що відповідають твірним, та відповідними співвідношеннями між цими матрицями. Надалі будемо вважати, що напівгрупа є завжди скінченно породженою.

Еквівалентність матричних зображень T і T' напівгрупи S означає існування оборотної матриці C такої, що $T(x) = CT'(x)C^{-1}$ для всіх $x \in S$.

Сформулюємо означення еквівалентності матричних зображень напівгрупи S в термінах елементарних перетворень рядків та стовпців матриць.

Нехай G — скінченна система твірних напівгрупи S і нехай T — деяке її матричне зображення. *Допустимими перетвореннями* для зображення M будемо називати наступні перетворення з рядками і стовпцями матриць $T(g), g \in G$: з рядками матриць $T(g)$ одночасно можна робити довільне елементарне перетворення, але при цьому треба зробити (одночасно) обернене перетворення з їх стовпцями. Тоді еквівалентність двох матричних зображень напівгрупи S означає, що одне з цих зображень можна отримати з іншого за допомогою допустимих перетворень (це випливає з загальних добре відомих тверджень про властивості елементарних перетворень та елементарних матриць).

Прямою сумою матричних зображень T і T' напівгрупи S називається зображення $T \oplus T'$, де

$$T \oplus T'(x) = \left(\begin{array}{c|c} T(x) & 0 \\ \hline 0 & T'(x) \end{array}\right)$$

для довільного $x \in S$.

Зображення T напівгрупи S називається *розкладним*, якщо воно еквівалентне прямій сумі двох ненульових зображень, і *нерозкладним* в іншому разі (нульове матричне зображення — це зображення розмірності 0).

Оскільки напівгрупа не обов'язково має нульовий чи одиничний елемент, то у випадку, коли нульовий (відповідно одиничний) елемент є, із загального означення матричного зображення не випливає, що нульвому (відповідно одиничному) елементу відповідає нульова (відповідно одинична) матриця. Але можна вимагати ці умови, по суті не обмежуючи загальності, про що говорять наступні два твердження, формулювання і доведення яких ми дослівно наводимо із дисертаційної роботи О. М. Тертичної [69, Розділ 1].

Твердження 1.4. *Якщо M — матричне зображення напівгрупи S з нулем, і ми не вимагаємо, щоб $M : 0 \to 0$, тоді єдиним нерозкладним зображенням, в якому нульовий елемент не переходить в нульову матрицю, буде наступне: $a \to 1$ для всіх $a \in S$.*

Доведення. Нехай M — довільне матричне зображення напівгрупи S. Оскільки ми не вимагаємо, щоб $M(0) = 0$, тоді нехай $M(0) = Q$, де Q — деяка матриця. Для всіх $a \in S$ виконуються рівності $a0 = 0$ і $0a = 0$ (зокрема, якщо $a = 0$, то маємо рівність $0^2 = 0$). Звідси (згідно означення матричного зображення) випливають наступні матричні рівності:

$$M(a)Q = Q, \tag{1.1}$$

$$QM(a) = Q, \tag{1.2}$$

$$Q^2 = Q. \tag{1.3}$$

Оскільки $Q^2 = Q$ (1.3), то із добре відомої теореми про канонічну форму Жордана безпосередньо випливає, що перетвореннями подібності матрицю Q можна привести до вигляду

$$Q_0 = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

де E — одинична матриця; тобто існує оборотна матриця C така, що

$$Q = C \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) C^{-1} = CQ_0C^{-1}.$$

Розглянемо матричне зображення $\widehat{M} : a \to C^{-1}M(a)C$ (зауважимо, що $\widehat{M}(0) = C^{-1}M(0)C = C^{-1}QC = C^{-1}(CQ_0C^{-1})C = Q_0$). Оскільки зображення M і $\widehat{M}$ еквівалентні, то з рівностей (1.1) – (1.2) випливають наступні рівності:

$$\widehat{M}(a)Q_0 = Q_0,$$

$$Q_0\widehat{M}(a) = Q_0$$

або (що те ж саме)

$$\left(\begin{array}{c|c} \widehat{M}(a)_{11} & \widehat{M}(a)_{12} \\ \hline \widehat{M}(a)_{21} & \widehat{M}(a)_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \tag{1.4}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \widehat{M}(a)_{11} & \widehat{M}(a)_{12} \\ \hline \widehat{M}(a)_{21} & \widehat{M}(a)_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right). \tag{1.5}$$

Після перемноження матриць із рівності (1.4) отримаємо $\widehat{M}(a)_{11} = E$, $\widehat{M}(a)_{21} = 0$, а з рівності (1.5) маємо $\widehat{M}(a)_{11} = E$, $\widehat{M}(a)_{12} = 0$.

Отже, для довільного ненульового $a \in S$

$$\widehat{M}(a) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & \widehat{M}(a)_{22} \end{array}\right),$$

а для нульового елемента

$$\widehat{M}(0) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Таким чином, $\widehat{M} = \widehat{M_1} \oplus \widehat{M_2}$, де $\widehat{M_1} : a \to E$ для всіх $a \in S$; $\widehat{M_2} : 0 \to 0$, $\widehat{M_2} : a \to \widehat{M}(a)_{22}$ для всіх ненульових $a \in S$, і до того ж зображення $\widehat{M_1}$ є прямою сумою зображення $a \to 1$ для всіх $a \in S$, звідки і випливає потрібне твердження.

Твердження 1.4 доведено.

Отже, припускаючи для напівгрупи з нулем, що нульовий елемент переходить у нульову матрицю, ми втрачаємо лише одне нерозкладне зображення $a \to 1$ для всіх $a \in S$.

Твердження 1.5. *Якщо M — матричне зображення напівгрупи S з одиницею, і ми не вимагаємо, щоб $M : 1 \to E$, тоді єдиним нерозкладним зображенням, в якому одиничний елемент не переходить в одиничну матрицю, буде наступне: $a \to 0$ для всіх $a \in S$.*

Доведення цього твердження проводиться повністю аналогічно доведенню твердження 1.4. Відмінність полягає лише в тому, що замість рівностей $a0 = 0$, $0a = 0$ і $0^2 = 0$ слід розглянути рівності $a1 = a$, $1a = a$ і $1^2 = 1$ (для всіх $a \in S$).

Напівгрупі з фіксованою (скінченною) системою твірних і фіксованою системою визначальних співвідношень можна зіставити сагайдак, який має одну вершину і кожному твірному напівгрупи відповідає стрілка (петля) сагайдака. Тоді співвідношення для твірних переносяться на співвідношення для стрілок і ми маємо сагайдак зі співвідношеннями. Це дає можливість переносити різні поняття і твердження для сагайдаків зі співвідношеннями і їх зображень на напівгрупи. Зокрема, таким чином переносяться поняття скінченності типу, ручності і дикості задач про опис зображень.

1.4. Алгебри Ауслендера

Якщо Λ — K-алгебра скінченного типу і $T_1, \ldots, T_m$ — повна система її нерозкладних попарно нееквівалентних зображень, то алгеброю Ауслендера алгебри Λ називається алгебра ендоморфізмів

$$End_K(T_1 \oplus \cdots \oplus T_m)$$

прямої суми зображень $T_1, \ldots, T_m$.

Розглянемо більш детально цю ситуацію для матричних зображень напівгруп.

Матричні зображення напівгрупи S над полем K утворюють K-категорію. Морфізмами між зображеннями T і T' є матриці X такі, що $T_aX = XT'_a$ для довільного $a \in S$. Очевидно, що для опису всіх морфізмів категорії зображень напівгрупи S достатньо описати морфізми її скелета (повної підкатегорії, що складається з представників всіх класів ізоморфних об'єктів), бо кожний об'єкт категорії ізоморфний деякому об'єкту скелета.

Далі, якщо A_1, A_2, B_1, B_2 — об'єкти категорії зображень, то будь-який морфізм $f : A_1 \oplus A_2 \to B_1 \oplus B_2$ однозначно задається індукованими морфізмами $f_{ij} : A_i \to B_j$ $(i, j = 1, 2)$. Значить, якщо напівгрупа має скінченне, з точністю до еквівалентності, число нерозкладних зображень над полем $K - T_1, \ldots, T_m$, то алгебра ендоморфізмів $End\,(T_1 \oplus \cdots \oplus T_m) = Hom\,(T_1 \oplus \cdots \oplus T_m, T_1 \oplus \cdots \oplus T_m)$ задається матрицею

$$\begin{pmatrix} Hom\,(T_1, T_1) & \ldots & Hom\,(T_1, T_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Hom\,(T_m, T_1) & \ldots & Hom\,(T_m, T_m) \end{pmatrix}.$$

При цьому сума і добуток конкретних морфізмів задається правилами додавання і множення морфізмів. Отже, ця алгебра ендоморфізмів повністю задає категорію зображень. Вона називається матричною алгеброю (або просто алгеброю) Ауслендера напівгрупи S і позначається $Aus_K(S)$ або просто $Aus(S)$, якщо поле K зафіксоване. Ця алгебра не залежить від вибору представників в класах ізоморфних об'єктів категорії зображень, тобто при різних виборах представників відповідні алгебри будуть ізоморфними (більш того, вони будуть спрядені в повній матричній алгебрі відповідного розміру $m \times m$).

Приведемо приклади обчислення матричної алгебри Ауслендера із [70].

Приклад 1. Розглянемо напівгрупу S_2^1, породжену одним елементом a таким, що $a^2 = a$. Оскільки матричне зображення цієї напівгрупи задається ідемпотентною матрицею A, то за повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних матричних зображень природно взяти таку, що складається із наступних двох зображень: 1) $T_1 : a \to 0$; 2) $T_2 : a \to 1$. Тоді матриця X належить алгебрі Аусллендера (за означенням, алгебрі ендоморфізмів зображення $T_1 \oplus T_2$) тоді і лише тоді, коли вона діагональна.

Приклад 2. Розглянемо напівгрупу S_2^0, породжену нульовим елементом 0 і елементом a такими, що $a^2 = 0$. Розглядаючи матричні зображення цієї напівгрупи, вважаємо (див. попередній підрозділ), що нульовому елементу відповідає нульова матриця. Тоді її матричне зображення задається матрицею A такою, що $A^2 = 0$. За повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних матричних зображень напівгрупи S_2^0 природно взяти таку, що складається із наступних двох зображень:

$$1)\ \ T_1 : a \to 0;$$

$$2)\ \ T_2 : a \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо пряму суму нерозкладних зображень

$$T = T_1 \oplus T_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Тоді матрична алгебра Аусллендера складається із матриць вигляду

$$X = \left(\begin{array}{c|cc} x_{11} & 0 & x_{13} \\ \hline x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{22} \end{array}\right).$$

Приклад 3. Розглянемо напівгрупу S_{22}^{11}, породжену нульовим елементом 0 і елементами a, b такими, що $a^2 = a$, $b^2 = b$, $ab = 0$. Як і в попередньому прикладі, розглядаючи матричні зображення цієї напівгрупи, вважаємо, що нульовому елементу відповідає нульова матриця. Тоді її матричне зображення задається матрицями A, B такими, що

$$A^2 = A,\ B^2 = B,\ AB = 0.$$

Повною системою нерозкладних попарно нееквівалентних матричних зображень напівгрупи S_{22}^{11} є, зокрема, наступна:

1) T_1: $\quad a \to 0, \quad b \to 0;$

2) T_2: $\quad a \to 0, \quad b \to 1;$

3) T_3: $\quad a \to 1, \quad b \to 0;$

4) T_4: $\quad a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Розглянемо пряму суму нерозкладних зображень

$T = \{A, B\} = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4$:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{c|c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Тоді матрична алгебра Ауслендера складається із матриць вигляду

$$X = \left(\begin{array}{c|c|c|cc} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_{44} & 0 \\ 0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{44} \end{array}\right).$$

Приклад 4. Розглянемо більш складний приклад обчислення алгебри Аусландера, а саме для напівгрупи

$$S_{32} =< a, b \,|\, a^3 = a, b^2 = b >,$$

коли в першу чергу використовується канонічна форма зображень.

Теорема 1.6. *Будь-яке матричне зображення напівгрупи S_{32}^0 над полем K характеристики $p \neq 2$ еквівалентне матричному зображенню вигляду*

$$
a \to A = \begin{pmatrix}
E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},
$$

$$
b \to B = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & E & 0 & 0 & E & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Ця теорема доведена в роботі [72] за схемою, запропонованою В. М. Бондаренком. Подальше викладення також слідує цій роботі.

З використанням цієї теореми вже легко отримати всі (з точністю до еквівалентності) нерозкладні матричні зображення напівгрупи S_{32}^{0}. Основним тут є те, що якщо в зображенні, вказаному в теоремі 1.6, всі одиничні матриці мають порядок 1, то воно є (з точністю до перестановки рядків і стовпців) прямою сумою всіх отриманих нерозкладних зображень.

Отже, для обчислення алгебри Ауслендера в цьому випадку можна взяти матричне зображення $a \to A_0$, $b \to B_0$, де A_0 і B_0 — це матриці A і B із теореми 1.6, в яких всі одиничні матриці мають порядок 1:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Матрична алгебра Ауслендера напівгрупи S_{32}^{0} — це (на матричній мові) множина всіх матриць X таких, що виконуються рівності

$$A_0X = XA_0, \quad B_0X = XB_0.$$

Нехай x_{ij} позначають елементи довільної такої матриці X (розмірності 11).

Із рівності $A_0X = XA_0$ маємо:

$$\begin{pmatrix}
x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} & x_{1,10} & x_{1,11} \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} & x_{27} & x_{28} & x_{29} & x_{2,10} & x_{2,11} \\
x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} & x_{37} & x_{38} & x_{39} & x_{3,10} & x_{3,11} \\
-x_{41} & -x_{42} & -x_{43} & -x_{44} & -x_{45} & -x_{46} & -x_{47} & -x_{48} & -x_{49} & -x_{4,10} & -x_{4,11} \\
-x_{51} & -x_{52} & -x_{53} & -x_{54} & -x_{55} & -x_{56} & -x_{57} & -x_{58} & -x_{59} & -x_{5,10} & -x_{5,11} \\
-x_{61} & -x_{62} & -x_{63} & -x_{64} & -x_{65} & -x_{66} & -x_{67} & -x_{68} & -x_{69} & -x_{6,10} & -x_{6,11} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}
x_{11} & x_{12} & x_{13} & -x_{14} & -x_{15} & -x_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & -x_{24} & -x_{25} & -x_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{31} & x_{32} & x_{33} & -x_{34} & -x_{35} & -x_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{41} & x_{42} & x_{43} & -x_{44} & -x_{45} & -x_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{51} & x_{52} & x_{53} & -x_{54} & -x_{55} & -x_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{61} & x_{62} & x_{63} & -x_{64} & -x_{65} & -x_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{71} & x_{72} & x_{73} & -x_{74} & -x_{75} & -x_{76} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{81} & x_{82} & x_{83} & -x_{84} & -x_{85} & -x_{86} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{91} & x_{92} & x_{93} & -x_{94} & -x_{95} & -x_{96} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{10,1} & x_{10,2} & x_{10,3} & -x_{10,4} & -x_{10,5} & -x_{10,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{11,1} & x_{11,2} & x_{11,3} & -x_{11,4} & -x_{11,5} & -x_{11,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},$$

тобто матриця X має наступний вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} & x_{45} & x_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} & x_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{64} & x_{65} & x_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{77} & x_{78} & x_{79} & x_{7,10} & x_{7,11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{87} & x_{88} & x_{89} & x_{8,10} & x_{8,11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{97} & x_{98} & x_{99} & x_{9,10} & x_{9,11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10,7} & x_{10,8} & x_{10,9} & x_{10,10} & x_{10,11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{11,7} & x_{11,8} & x_{11,9} & x_{11,10} & x_{11,11} \end{pmatrix}.$$

Із рівності $B_0X = XB_0$ (вважаючи, що матриця X уже має отриманий вигляд) маємо:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{77} & x_{78} & x_{79} & x_{7,10} & x_{7,11} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0 & 0 & 0 & x_{87} & x_{88} & x_{89} & x_{8,10} & x_{8,11} \\ 0 & 0 & 0 & x_{64} & x_{65} & x_{66} & x_{97} & x_{98} & x_{99} & x_{9,10} & x_{9,11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10,7} & x_{10,8} & x_{10,9} & x_{10,10} & x_{10,11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_{77} & x_{78} & 0 & x_{77} & x_{79} & x_{77} & x_{78} & x_{79} & x_{7,10} & 0 \\
0 & x_{87} & x_{88} & 0 & x_{87} & x_{89} & x_{87} & x_{88} & x_{89} & x_{8,10} & 0 \\
0 & x_{97} & x_{98} & 0 & x_{97} & x_{99} & x_{97} & x_{98} & x_{99} & x_{9,10} & 0 \\
0 & x_{10,7} & x_{10,8} & 0 & x_{10,7} & x_{10,9} & x_{10,7} & x_{10,8} & x_{10,9} & x_{10,10} & 0 \\
0 & x_{11,7} & x_{11,8} & 0 & x_{11,7} & x_{11,9} & x_{11,7} & x_{11,8} & x_{11,9} & x_{11,10} & 0
\end{pmatrix},
$$

а отже,

$$
X = \begin{pmatrix}
x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x_{44} & x_{45} & x_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & x_{22} & x_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{22} & x_{23} & x_{56} & x_{7,10} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{33} & 0 & x_{8,10} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{66} & x_{9,10} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10,10} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{11,11}
\end{pmatrix}.
$$

Алгебра таких матриць X і є матричною алгеброю Ауслендера.

1.5. Висновки до розділу

У цьому розділі викладено основні початкові відомості з теорії зображень сагайдаків, теорії категорій над полем та теорії матричних зображень напівгруп.

Розділ 2

Модулярні зображення симетричної напівгрупи степеня 2

Всі зображення розглядаються над полем K

Через T_2 позначається симетрична напівгрупа степеня 2, тобто напівгрупа всіх перетворень двоелементної множини.

2.1. Твірні та визначальні співвідношення напівгрупи T_2

Напівгрупа T_2 всіх перетворень (відображень в себе) двоелементної множини $\{1, 2\}$ складається із чотирьох елементів e, a, b, c:

$$\begin{aligned} e(1) &= 1, \quad e(2) = 2; \\ a(1) &= 2, \quad a(2) = 1; \\ b(1) &= 2, \quad b(2) = 2; \\ c(1) &= 1, \quad c(2) = 1. \end{aligned}$$

Таблиця Келі для неї має наступний вигляд:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	b	c
b	b	c	b	c
c	c	b	b	c

.

Підставививши в неї ba замість c (ми можемо це зробити, бо, як видно із таблиці, $ba = c$), маємо наступну таблицю:

	e	a	b	ba
e	e	a	b	ba
a	a	e	b	ba
b	b	ba	b	ba
ba	ba	b	b	ba

.

Отже, елементи e, a, b утворюють мінімальну систему твірних із визначальними співвідношеннями

1) $ea = ae = a$,

2) $eb = be = b$,

3) $a^2 = e$,

4) $b^2 = b$,

5) $ab = b$.

Подивимося, які двосторонні ідеали має напівгрупа T_2, тобто підмножини $I \subset T_2$ такі, що $xc \in I$ і $cx \in I$ для будь-яких $c \in I, x \in T_2$. Оскільки елемент a оборотний, то легко бачити, що єдиним двостороннім ідеалом є ідеал $I_0 = \{b, ba\}$. Фактор-напівгрупа T_2 по ідеалу I_0 є симетрична група S_2 степеня 2 (яка є циклічною групою порядку 2).

2.2. Про матричні зображення симетричної напівгрупи T_2

Матричне зображення розмірності n напівгрупи $T = T_2$ над полем K — це (згідно загального означення матричного зображення напівгрупи) довільний гомоморфізм

$$X : T \to M_n(K)$$

напівгрупи T в напівгрупу $M_n(K)$ всіх квадратних матриць порядку n над полем K (n — натуральне число). Зауважимо, що в загальному означенні нічого не говориться про одиничний елемент напівгрупи (бо його може і не бути), але у випадку, коли одиниця в напівгрупі є, практично можна вважати, що гомоморфізм переводить її у одиничну матрицю (див. наступний пункт); будемо розглядати лише такі зображення (якщо не сказано протилежне). Тоді зображення $X : T_2 \to M_n(K)$ напівгрупи $T = T_2$ однозначно задається парою матриць

$$R = \{A = X(a), B = X(b)\},$$

що задовольняють наступні рівності:

$$A^2 = E,\ B^2 = B,\ AB = B.$$

Еквівалентність матричних зображень $R = \{A, B\}$ і $R' = \{A', B'\}$ напівгрупи T_2 означає існування оборотної матриці C такої, що

$$A' = CAC^{-1},\ B' = CBC^{-1}$$

або, що те ж саме,

$$A'C = CA,\ B'C = CB,$$

що практично більш зручніше, бо маємо лінійні відносно C рівності. На мові елементарних перетворень це означає, що від зображення R до зображення R' можна перейти, зробивши спочатку деякі елементарні перетворення з рядками матриць A і B, а потім обернені перетворення зі стовпцями цих матриць (кожного разу потрібно робити одні і ті ж елементарні перетворення в обох матрицях).

Пряма сума матричних зображень $R = \{A, B\}$ і $R' = \{A', B'\}$ напівгрупи T_2 — це матричне зображення $R \oplus R' = \{A \oplus A', B \oplus B'\}$, де

$$A \oplus A' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix},$$

$$B \oplus B' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}.$$

Зображення R називається розкладним, якщо воно еквівалентне прямій сумі двох зображень, і нерозкладним в іншому разі. Для матричних зображень напівгрупи $T = T_2$ (як і для будь-якої скінченновимірної алгебри) має місце теорема Крулля-Шмідта про однозначність розкладу довільного матричного зображення в пряму суму нерозкладних.

Матричне зображення напігрупи $T = T_2$ називається модулярним, якщо характеристика поля K, над яким воно розглядається, дорівнює 2. Нагадаємо, що згідно загального означення зобараження напівгрупи над полем називається модулярним, якщо характеристика поля ділить порядок деякої скінченної піднапівгрупи; в нашому випадку напівгрупа T_2 має єдину нетривіальну підгрупу, породжену елементом a порядку 2. Зауважимо, що напівгрупа T_2 має і єдину нетривіальну фактор-групу $\widehat{T}_2$, яка є циклічною порядку 2 (див. попередній параграф). Оскільки кожне матричне зображення групи $\widehat{T}_2$ природним чином продовжується до матричного зображення напівгрупи T_2 (елементам відповідного ідеалу зіставляються нульові матриці), то таким чином отримане зображення будемо називати груповим зображенням напівгрупи T_2

2.3. Зауваження про матричні зображення напівгруп з одиницею

Вище говорилося, що у випадку, коли напівгрупа має одиничний елемент, практично можна вважати, що матричне зображення зіставляє йому одиничну матрицю.

Більш точно, має місце наступний факт.

Якщо $X : S \to M_n(K)$ — матричне зображення деякої напівгрупи S (див. вище відповідні позначення) і S містить одиничний елемент e, то зображення X еквівалентне прямій сумі зображень X_1 і X_2, таких що $X_1(e)$ — одинична матриця і $X_2(s) = 0$ для довільного $s \in S$. Іншими словами, якщо в означенні матричного зображення напігрупи з одиницею ми додатково будемо вимагати, щоб одиничному елементу відповідала одинична матриця, то ми втратимо лише одне нерозкладне зображення, а саме зображення, всі матриці якого є нульовими порядку 1.

Дійсно, оскільки матриця $Q = X_1(e)$ ідемпотентна, то із добре відомої теореми про канонічну форму Жордана безпосередньо випливає, що існує оборотна матриця C така, що $Q = CQ_0C^{-1}$, де

$$Q_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

тут і надалі E позначає одиничну матрицю довільного порядку $m \geq 0$ (не обов'язково дві різні клітини, позначені через E, мають однакову розмірність).

Розглянемо матричне зображення $\widehat{X} : s \to C^{-1}X(s)C$ (еквівалентне зображенню X), яке зіставляє одиничному елементу e матрицю Q_0. Із рівностей $\widehat{X}(e)\widehat{X}(s) = \widehat{X}(s)\widehat{X}(e) = \widehat{X}(s)$ (для довільного $s \in S$) і $\widehat{X}(e) = Q_0$ випливає, що в матриці

$$\widehat{X}(s) = \begin{pmatrix} \widehat{X}(s)_{11} & \widehat{X}(s)_{12} \\ \widehat{X}(s)_{21} & \widehat{X}(s)_{22} \end{pmatrix}$$

(розбитої на горизонтальні та вертикальні смуги таким же чином, як і матриця Q_0) блоки $\widehat{X}(s)_{12}$, $\widehat{X}(s)_{21}$, $\widehat{X}(s)_{22}$ є нульовими, звідки маємо, що зображення $\widehat{X}(s)$ є прямою сумою зображення $X_1 : s \to \widehat{X}(s)_{11}$, яке зіставляє одиничному елементу e одиничну матрицю $\widehat{X}(e)_{11}$, та зображення $X_2 : s \to \widehat{X}(s)_{22}$, для якого всі матриці $\widehat{X}(s)_{22}$ є нульовими.

2.4. Канонічна форма модулярних зображень напівгрупи T_2

Мета цього параграфа — установити канонічну форму модулярних зображень напівгрупи T_2.

Теорема 2.1. *Будь-яке матричне забраження напівгрупи T_2 над полем K характеристики 2 еквівалентне матричному зображенню вигляду*

$$a \to A_0 = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|c|c}
E & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & E & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & E & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E
\end{array}\right),$$

$$b \to B_0 = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|c|c}
E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).$$

Підкреслимо, що деякі (але не всі) одиничні клітини в матрицях, вказаних в теоремі, можуть бути "порожніми", тобто мати нульовий порядок.

Зауважимо ще, що як сказано вище, розглядаються лише такі матричні зображення напігрупи T_2, які зіставляють одиничному елементу напівгрупи одиничну матрицю. Якщо ж цього не вимагати, то в обох матрицях треба додати нульову горизонтальну та нульову вертикальну смуги (причому число рядків горизонтальної смуги дорівнює числу стовпців вертикальної смуги).

Щоб довести цю теорему ми сформулюємо її в дещо іншій формі, яка узгоджується з нашим методом доведення (вказані в обох теоремах канонічні зображення відрізняються лише порядком розташування горизонтальних та вертикальних смуг блокових матриць); щоб було ясно, які діагональні блоки мають завідомо однаковий розмір, ми індексуємо одиничні матриці (в першому випадку на це вказували горизонтальні та вертикальні поділи).

Теорема 2.2. *Будь-яке матричне забраження напівгрупи T_2 над полем K характеристики 2 еквівалентне матричному зображенню вигляду*

$$a \to A = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & E_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

$$b \to B = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $E_1, \ldots, E_5$ *— деякі одиничні матриці.*

Переходимо до доведення теореми 2.2.

Нехай $R = \{A, B\}$ — зображення напівгрупи T_2 над полем K. Нагадаємо, що $A^2 = E, AB = B, B^2 = B$ і поле K має характеристику 2. Очевидно, що без обмеження загальності можна вважати, що матриця B має жорданову нормальну форму, тобто

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо матрицю A у блоковому вигляді, що відповідає вигляду B:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Використаємо спочатку співвідношення $AB = B$:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо, що $A_{11} = E$, $A_{21} = 0$, а тоді

$$A = \begin{pmatrix} E & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Залишилося ще одне співвідношення $A^2 = E$, тобто

$$\begin{pmatrix} E & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} E & A_{12} + A_{12}A_{22} \\ 0 & A_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

З останньої рівності маємо

$$A_{12} = A_{12}A_{22} \tag{2.1}$$

$$A_{22}^2 = E \tag{2.2}$$

Отже, наше матричне зображення $R = \{A, B\}$ складається із матриць

$$A = \begin{pmatrix} E & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

і до того ж блоки A_{12} та A_{22} задовольняють рівності (2.1) і (2.2).

Дізнаємося тепер, які перетворення подібності ми можемо виконувати з A і B, щоб не змінювався їх загальний вигляд (тобто щоб не псувалися уже зроблені одиничні та нульові блоки). Якщо таке перетворення здійснює перехід від зображення R до зображення $\overline{R} = \{\overline{A}, \overline{B}\}$ такого ж самого вигляду, тобто

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} E & \overline{A_{12}} \\ 0 & \overline{A_{22}} \end{pmatrix}, \ \overline{B} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то воно задається за допомогою оборотної матриці X, такої що

$$\overline{A} = XAX^{-1}, \ \ \overline{B} = XBX^{-1}$$

або (в еквівалентній формі) $\overline{A}X = XA$, $\overline{B}X = XB$. Очевидно, що при цьому матриці $\overline{B}$ і B рівні (це випливає із їх подібності).

Використаємо спочатку співвідношення $\overline{B}X = XB$:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де блоки X_{ij} матриці X задані у відповідності з блоками матриць A та B. Звідси маємо

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

тобто $X_{12} = 0, X_{21} = 0$, а значить

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}.$$

Перейдемо тепер до співвідношення $\overline{A}X = XA$:

$$\begin{pmatrix} E & \overline{A}_{A_{12}} \\ 0 & \overline{A}_{A_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{pmatrix} X_{11} & \overline{A_{12}}X_{22} \\ 0 & \overline{A_{22}}X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{11}A_{12} \\ 0 & X_{22}A_{22} \end{pmatrix}.$$

З останньої рівності маємо, що

$$\overline{A}_{12}X_{22} = X_{11}A_{12}, \;\; \overline{A}_{22}X_{22} = X_{22}A_{22},$$

або (в еквівалентній формі)

$$\overline{A}_{12} = X_{11}A_{12}X_{22}^{-1} \tag{2.4}$$

$$\overline{A}_{22} = X_{22}A_{22}X_{22}^{-1} \tag{2.5}$$

Отже, доведено, що матричні зображення $R = \{A, B\}$ та $\overline{R} = \{\overline{A}, \overline{B}\}$ еквівалентні тоді і лише тоді, коли виконані рівності (2.4) і (2.5). Якщо ж говорити на мові елементарних перетворень, то із цихріностей і вигляду матриці X випливає, що допустимими перетвореннями для блоків A_{12} та

A_{22} зображення R (тобто які індукуються перетвореннями подібності з рядками та стовцями матриць A та B, які не псують їхнього вигляду) є лише наступні перетворення а), б) та їх композиції:

а) з рядками матриці A_{12} можна робити довільне елементарне перетворення;

б) з рядками матриці A_{22} можна робити довільне елементарне перетворення, але при цьому зі стовпцями матриць A_{12} і A_{22} треба зробити обернене елементарне перетворення.

Отже, задача про опис з точністю до еквівалентноті матричних зображень вигляду (3) напівгрупи T_2 , а значить і взагалі всіх її матричних зображень, еквівалентна задачі про опис пар матриць A_{12} і A_{22} з точністю до еквівалентності, яка задана рівностями (2.4) та (2.5) або ж перетвореннями а) та б).

Розглянемо цю задачу про матриці A_{12} і A_{22}.

Оскільки $A_{22}^2 = 0$ (див. рівність (2.2)), то перетвореннями вигляду а) і б) (або ж, що те саме, використовуючи рівність (2.5)) приведемо матрицю A_{22} до наступного вигляду

$$A_{22} = \begin{pmatrix} E & 0 & E \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

який легко отримати із жорданової нормальної форми (однаковою) перестановкою рядків і стовпців. Тоді, розбивши матрицю A_{12} на три вертикальні смуги у відповідності з розбиттям матриці A_{22} і скориставшись рівністю (2.1), маємо:

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & C & D \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

де C і D — деякі матриці (формально матриці A_{12} і A_{22} треба було б позначити іншими символами, наприклад A'_{12} і A'_{22}, але для зручності і по прийнятій в теорії матричних задач традиції ми залишили старі позначення).

Будемо тепер робити такі допустимі перетворення, які не змінюють загального вигляду матриць A_{12} і A_{22}, і подивимося, які перетворення з матрицями C і D при цьому індукуються.

По-перше, з рядками матриць C і D можна робити одне і те ж довільне елементарне перетворення (див. допустиме для A_{12} і A_{22} перетворення а)). По-друге, якщо перетворення вигляду б) зробити з рядками другої горизонтальної смуги матриці A_{22} та стовпцями другої вертикальної смуги матриць A_{12} і A_{22}, то загальний вигляд матриць A_{12} і A_{22} не зміниться, а зміниться лише матриця C, а саме з її стовпцями буде здійснено відповідне елементарне перетворення (що входить в б)). По-третє, якщо одне і те ж перетворення вигляду б) зробити одночасно з рядками першої та третьої горизонтальних смуг матриці A_{22} та стовпцями першої і третьої вертикальних смуг матриць A_{12} і A_{22}, то загальний вигляд матриць A_{12} і A_{22} не зміниться, а зміниться лише матриця D, а саме з її стовпцями буде здійснено відповідне елементарне перетворення (що входить в б)). І нарешті, по-четверте, якщо до j-го стовпця третьої вертикальної смуги додати i-ий стовпець другої вертикальної смуги, помножений на деякий елемент поля K одночасно в матрицях A_{12} і A_{22}, а із рядками матриці A_{22} зробити обернене елементарне перетворення (вказане перетворення з рядками та стовпцями є перетворенням вигляду б)), то загальний вигляд матриць A_{12} і A_{22} не зміниться, а зміниться очевидно зрозумілим чином лише матриця D.

Таким чином, допустимими для матриць C і D є довільні одночасні елементарні перетворення з їх рядками, незалежні елементарні перетворення з їх стовпцями та додавання стовпців матриці C до стовпців матриці D з деякими множниками із K; зрозуміло, що допустимими є і їх композиції.

Для нас неважливо є чи немає інших допустимих перетворень, але, розглядаючи матриці A_{22}, A_{12} вигляду (2.6), (2.7) та матриці $\overline{A}_{22}$, $\overline{A}_{12}$ такого ж вигляду, разом з перетвореннми (2.4), (2.5)(аналогічно, як для матричних зображнень R і $\overline{R}$), можна показати, що інших допустимих перетворень для матриць C і D немає.

Із (2.3), (2.6) і (2.7) випливає, що наше зображення R приведено до наступного вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & C & D \\ 0 & E & 0 & E \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

За лемою 1 роботи [22] матриці C і D (які утворюють зображення лінійно впорядкованої множини із двох елементів) можна привести за допомогою вказаних допустимих перетворень до наступного вигляду:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Підставляючи ці матриці у (2.8) та індексуючи одиничні матриці таким чином, щоб матриці завідомо однакового порядку мали один і той же індекс, маємо:

$$A = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & E_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2.2 доведена.

2.5. Нерозкладні матричні зображення напівгрупи T_2 над полем характеристики 2

Із теореми 2.1 випливає повний опис модулярних нерозкладних зображень напівгрупи T_2.

Теорема 2.3. *Нерозкладні матричні зображення напівгрупи T_2 над полем K характеристики 2 вичерпуються, з точністю до еквівалентності, наступними (попарно нееквівалентними) зображеннями:*

1) $a \to 1, \quad b \to 0;$

2) $a \to 1, \quad b \to 1;$

3) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

$$5)\quad a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дійсно, із теореми 2.1 випливає, що будь-яке матричне зображення напівгрупи T_2 над полем K характеристики 2 еквівалентне прямій сумі зображень вигляду 1)–5). До того ж, зображення 1)–5) попарно нееквівалентні (у випадку зображень однакової розмірності це випливає із того, що матриці, які зіставлені елементу b, мають різні ранги).

Залишилолся впевнитися в тому, що всі зображення 1)–5) нерозкладні. Якби існувало розкладне зображення R вигляду 1)–5), то згідно тільки що сказаного воно було б еквіваленним прямій сумі R_0 деяких зображень вигляду 1)–5) меншої розмірності. Якщо врахувати, що еквівалентні зображення мають подібні матриці, що відповідають елементу b, то можливі лише такі випадки:

а) зображення R вигляду 3) еквівалентне прямій сумі R_0 двох зображень вигляду 1);

б) зображення R вигляду 4) еквівалентне прямій сумі R_0 зображень вигляду 1) та 2);

в) зображення R вигляду 5) еквівалентне прямій сумі R_0 двох зображень вигляду 1) та зображення вигляду 2);

г) зображення R вигляду 5) еквівалентне прямій сумі R_0 зображень вигляду 1) та 4);

д) зображення R вигляду 5) еквівалентне прямій сумі R_0 зображень вигляду 2) та 3).

Але це неможливо, бо, як легко побачити, у кожному з перерахованих випадків матриці $R(a)$ та $R_0(a)$ не є подібними.

Як сказано вище, розглядаються лише такі матричні зображення напігрупи T_2, які зіставляють одиничному елементу напівгрупи одиничну матрицю. Якщо цього не вимагати, тоді в останній теоремі треба (згідно зауваженню до теореми 2.1) додати наступне зображення:

0) $a \to 0, \quad b \to 0.$

2.6. Алгебра Ауслендера напівгрупи T_2 відносно модулярних зображень

Алгеброю Ауслендера алгебри скінченного зображувального типу (тобто, яка має скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень) називається алгебра ендоморфізмів прямої суми всіх нерозкладних зображень (із кожного класу еквівалентності нерозкладних зображень треба взяти один представник). Якщо зображення розглядати в матричному вигляді, то алгебра Ауслендера буде реалізовуватись також в матричному вигляді і в цьому випадку природно називати її матричною алгеброю Ауслендера.

Нагадаємо, що ендоморфізм матричного зображення T алгебры Λ — це довільна матриця X така, що

$$T(y)X = XT(y)$$

для будь-якого $y \in \Lambda$.

Очевидно, що матрична алгебра Ауслендера не залежить від вибору представників в классах еквівалентності у тому сенсі, що всі отримані таким чином алгебри будуть спряжені як підалгебри відповідної повної матричної алгебри.

Оскільки між зображеннями напівгрупи та зображеннями її напівгрупової алгебри існує природна взаємно однозначна відповідність, то можна говорити про алгебру Ауслендера напівгруп.

Наступна теорема описує алгебру Ауслендера напівгрупи T_2 у випадку модулярних зображень.

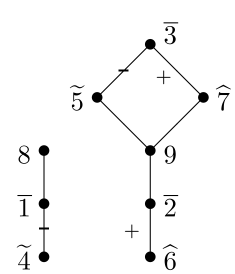
Теорема 2.4. *Якщо K — поле характеристики 2, то матрична алгебра Ауслендера для напівгрупи T_2 складається з усіх матриць вигляду*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{18} & 0 \\ 0 & x_{11} & x_{23} & 0 & x_{25} & 0 & x_{27} & 0 & x_{29} \\ 0 & 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{41} & 0 & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & x_{48} & 0 \\ 0 & 0 & x_{41} & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{62} & x_{63} & 0 & x_{65} & x_{66} & x_{67} & 0 & x_{69} \\ 0 & 0 & x_{62} & 0 & 0 & 0 & x_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{88} & 0 \\ 0 & 0 & x_{93} & 0 & x_{95} & 0 & x_{97} & 0 & x_{99} \end{pmatrix},$$

де x_{ij}— елементи поля K. Розмірність алгебри $Aus(T_2)$ дорівнює 20, її радикал $R(T_2)$ має ступінь нільпотентності 5 і $Aus(T_2)/R(T_2) = K \oplus K \oplus K \oplus K \oplus K$.

Перед доведенням теореми розглянемо один наслідок.

Відмітимо одну властивість цієї алгебри. Якщо на множині $N_9 = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$ ввести бінарне відношення ρ, вважаючи, що $i\rho j$ тоді і лише тоді, коли параметр x_{ij} матриці X не дорівнює нулю, то ρ — відношення часткового порядку, а саме діаграма Хассе $H(\overline{N})$ частково впорядкованої множини $\overline{N} = (N_9, \rho)$ має вигляд



Однаково позначені (зверху) номери вершин цього орієнтовного графа означають, що відповідні діагональні параметри матриці X рівні, а однаково позначені ребра — що рівними є відповідні позадіагональні параметри.

Якщо ототожнити вершини з однаковими верхніми позначками, а потім однаково позначені ребра, отримаємо деякий орієнтований граф — $\overline{H}(\overline{N})$. Його (орієнтовний) шлях вважаємо нульовим, якщо його не існує для діаграми Хассе (при будь-якому фіксованому виборі номерів склеєних вершин), а два шляхи між одними і тими ж різними вершинами вважаємо рівними, якщо в діаграмі існують обидва ці шляхи (при деякому виборі номерів склеєних вершин). Алгебра шляхів графа $\overline{H}(\overline{N})$ із вказаними співвідношеннями задає (згідно побудови) алгебру Ауслендера напівгрупи T_2. Більш точно, алгебра Ауслендера напівгрупи T_2 ізоморфна алгебрі шляхів сагайдаку

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"'] & \bullet \arrow[d, "\sigma"] & \\
\bullet \arrow[r, "\beta"'] & \bullet \arrow[ul, "\lambda"'] \arrow[r, "\delta"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

зі співвідношеннями $\alpha\beta = \gamma\sigma$, $\beta\delta = 0$, $\sigma\lambda = 0$, $\alpha\beta\lambda = 0$ (стрілки множаться зліва направо).

Переходимо тепер до доведення теореми.

Розглянемо наступну пряму суму нерозкладних зображень, вказаних в теоремі 2.3:

$$a \to A_0 = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|c|c}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right),$$

$$b \to B_0 = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|c|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).$$

Нехай X — елемент матричної алгебри Ауслендера, тобто матриця

$$X = \begin{pmatrix}
x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} & x_{27} & x_{28} & x_{29} \\
x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} & x_{37} & x_{38} & x_{39} \\
x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{46} & x_{47} & x_{48} & x_{49} \\
x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{57} & x_{58} & x_{59} \\
x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} & x_{65} & x_{66} & x_{67} & x_{68} & x_{69} \\
x_{71} & x_{72} & x_{73} & x_{74} & x_{75} & x_{76} & x_{77} & x_{78} & x_{79} \\
x_{81} & x_{82} & x_{83} & x_{84} & x_{85} & x_{86} & x_{87} & x_{88} & x_{89} \\
x_{91} & x_{92} & x_{93} & x_{94} & x_{95} & x_{96} & x_{97} & x_{98} & x_{99}
\end{pmatrix}$$

така, що $A_0X = XA_0$, $B_0X = XB_0$.

Розглянемо спочатку матричну рівність $B_0X = XB_0$. Скалярні рівності вигляду

$$(B_0X)_{ij} = (XB_0)_{ij}$$

будемо позначати $(1; i, j)$.

Випишемо всі відповідні скалярні рівності, окрім тотожних (тоді в сукупності вони еквівалентні взятій матричній рівності).

Спочатку випишемо скалярні рівності $(1; i, j)$ при $i = 1, 2, 3, 4, 5$:

Позначення рівності	Вигляд рівності
$(1; 1, 2)$	$x_{12} = 0$
$(1; 1, 3)$	$x_{13} = 0$
$(1; 1, 5)$	$x_{15} = 0$
$(1; 1, 6)$	$x_{16} = 0$
$(1; 1, 7)$	$x_{17} = 0$
$(1; 1, 9)$	$x_{19} = 0$
$(1; 2, 1)$	$0 = x_{21}$
$(1; 2, 4)$	$0 = x_{24}$
$(1; 2, 8)$	$0 = x_{28}$
$(1; 3, 1)$	$0 = x_{31}$
$(1; 3, 4)$	$0 = x_{34}$
$(1; 3, 8)$	$0 = x_{38}$
$(1; 4, 2)$	$x_{42} = 0$
$(1; 4, 3)$	$x_{43} = 0$
$(1; 4, 5)$	$x_{45} = 0$
$(1; 4, 6)$	$x_{46} = 0$
$(1; 4, 7)$	$x_{47} = 0$
$(1; 4, 9)$	$x_{49} = 0$
$(1; 5, 1)$	$0 = x_{31}$
$(1; 5, 4)$	$0 = x_{34}$
$(1; 5, 8)$	$0 = x_{38}$

Тепер випишемо скалярні рівності $(1; i, j)$ при $i = 6, 7, 8, 9$:

Позначення рівності	Вигляд рівності
$(1;6,1)$	$0 = x_{61}$
$(1;6,4)$	$0 = x_{64}$
$(1;6,8)$	$0 = x_{68}$
$(1;7,1)$	$0 = x_{71}$
$(1;7,4)$	$0 = x_{74}$
$(1;7,8)$	$0 = x_{78}$
$(1;8,2)$	$x_{82} = 0$
$(1;8,3)$	$x_{83} = 0$
$(1;8,5)$	$x_{85} = 0$
$(1;8,6)$	$x_{86} = 0$
$(1;8,7)$	$x_{87} = 0$
$(1;8,9)$	$x_{89} = 0$
$(1;9,1)$	$0 = x_{91}$
$(1;9,4)$	$0 = x_{94}$
$(1;9,8)$	$0 = x_{98}$

Отже, матриця X має наступний вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & x_{14} & 0 & 0 & 0 & x_{18} & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} & 0 & x_{25} & x_{26} & x_{27} & 0 & x_{29} \\ 0 & x_{32} & x_{33} & 0 & x_{35} & x_{36} & x_{37} & 0 & x_{39} \\ x_{41} & 0 & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & x_{48} & 0 \\ 0 & x_{52} & x_{53} & 0 & x_{55} & x_{56} & x_{57} & 0 & x_{59} \\ 0 & x_{62} & x_{63} & 0 & x_{65} & x_{66} & x_{67} & 0 & x_{69} \\ 0 & x_{72} & x_{73} & 0 & x_{75} & x_{76} & x_{77} & 0 & x_{79} \\ x_{81} & 0 & 0 & x_{84} & 0 & 0 & 0 & x_{88} & 0 \\ 0 & x_{92} & x_{93} & 0 & x_{95} & x_{96} & x_{97} & 0 & x_{99} \end{pmatrix}.$$

Тепер використаємо матричну рівність $A_0X = XA_0$ (скориставшись уже отриманим виглядом матриці X). Скалярні рівності вигляду

$$(A_0X)_{ij} = (XA_0)_{ij}$$

будемо позначати $(2; i, j)$.

Випишемо всі відповідні скалярні рівності, окрім тотожніх (тоді в сукупності вони еквівалентні взятій матричній рівності).

Спочатку випишемо скалярні рівності $(2; i, j)$ при $i = 1, 2, 3, 4, 5$:

Позначення рівності	Вигляд рівності
$(2; 1, 2)$	$x_{32} = 0$
$(2; 1, 3)$	$x_{33} = x_{11}$
$(2; 1, 6)$	$x_{36} = 0$
$(2; 1, 5)$	$x_{35} = x_{14}$
$(2; 1, 7)$	$x_{37} = 0$
$(2; 1, 9)$	$x_{39} = 0$
$(2; 2, 3)$	$x_{33} = x_{22}$
$(2; 2, 5)$	$x_{35} = 0$
$(2; 2, 7)$	$x_{37} = x_{26}$
$(2; 4, 2)$	$x_{52} = 0$
$(2; 4, 3)$	$x_{53} = x_{41}$
$(2; 4, 5)$	$x_{55} = x_{44}$
$(2; 4, 6)$	$x_{56} = 0$
$(2; 4, 7)$	$x_{57} = 0$
$(2; 4, 9)$	$x_{59} = 0$

Тепер випишемо скалярні рівності $(1; i, j)$ при $i = 6, 7, 8, 9$:

Позначення рівності	Вигляд рівності
$(2;6,2)$	$x_{72}=0$
$(2;6,3)$	$x_{73}=x_{62}$
$(2;6,5)$	$x_{75}=0$
$(2;6,6)$	$x_{76}=0$
$(2;6,7)$	$x_{77}=x_{66}$
$(2;6,9)$	$x_{79}=0$
$(2;8,3)$	$0=x_{81}$
$(2;8,5)$	$0=x_{84}$
$(2;9,3)$	$0=x_{92}$
$(2;9,7)$	$0=x_{96}$

Звідси маємо, що

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{18} & 0 \\ 0 & x_{11} & x_{23} & 0 & x_{25} & 0 & x_{27} & 0 & x_{29} \\ 0 & 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{41} & 0 & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & x_{48} & 0 \\ 0 & 0 & x_{41} & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{62} & x_{63} & 0 & x_{65} & x_{66} & x_{67} & 0 & x_{69} \\ 0 & 0 & x_{62} & 0 & 0 & 0 & x_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{88} & 0 \\ 0 & 0 & x_{93} & 0 & x_{95} & 0 & x_{97} & 0 & x_{99} \end{pmatrix}.$$

Теорема доведена.

2.7. Порівняння з класичним випадком

Аналогічно прийнятій в теорії зображень традиції, немодулярний випадок для напівгрупи T_2 (тобто, коли характеристика поля відмінна від двох) будемо називати класичним. В теорії зображень груп класичні випадки більш прості, ніж модулярні. Як буде видно із викладеного в цьому підрозділі (з урахуванням викладеного вище), і для напівгрупи T_2 класичний випадок простіший.

Скінченновимірні нерозкладні модулі над напівгруповою алгеброю KT_2 у класичному випадку описані (з точністю до ізоморфізму) в роботі [10]. Переформулюємо цей результат на мові матричних зображень самої напівгрупи T_2.

Теорема 2.5. *Нерозкладні матричні зображення напівгрупи T_2 над полем K характеристики $p \neq 2$ вичерпуються, з точністю до еквівалентності, наступними (попарно нееквівалентними) зображеннями:*

1) $a \to 1, \quad b \to 0$;

2) $a \to -1, \quad b \to 0$;

3) $a \to 1, \quad b \to 1$;

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Отже, у класичному випадку і число нерозкладних зображень (з точністю до еквівалентності) менше, і число одновимірних зображень більше, та і взагалі неодновимірне нерозкладне зображення всього одне. Зрозуміло, що і матрична алгебра Ауслендера буде простішою.

Теорема 2.6. *Якщо K — поле характеристики $p \neq 2$, то матрична алгебра Ауслендера для напівгрупи T_2 складається з усіх матриць вигляду*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} & 0 & 0 \\ 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} & 0 \\ 0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} \end{pmatrix},$$

де x_{ij} — елементи поля K. Розмірність алгебри $Aus(T_2)$ дорівнює 6, її радикал $R(T_2)$ має ступінь нільпотентності 2 і $Aus(T_2)/R(T_2) = K \oplus K \oplus K \oplus K$.

В цьому випадку алгебра Ауслендера напівгрупи T_2 ізоморфна алгебрі шляхів сагайдаку

$$\bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet \xrightarrow{\beta} \bullet \qquad\qquad \bullet \qquad (\alpha\beta = 0).$$

Переходимо до доведення теореми.

Розглянемо наступну пряму суму нерозкладних зображень, вказаних в теоремі 2.5:

$$a \to A_0 = \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

$$b \to B_0 = \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Нехай X — елемент матричної алгебри Ауслендера, тобто матриця

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix}$$

така, що $A_0X = XA_0$, $B_0X = XB_0$. Скалярні рівності вигляду

$$(A_0X)_{ij} = (XA_0)_{ij} \text{ і } (B_0X)_{ij} = (XB_0)_{ij}$$

будемо позначати відповідно $(3; i, j)$ і $(4; i, j)$.

Розглянемо спочатку рівність $A_0X = XA_0$. Вона еквівалентна наступним скалярним рівностям:

Позначення рівності	Вигляд рівності
$(3; 1, 2)$	$x_{12} = -x_{12}$
$(3; 1, 5)$	$x_{15} = -x_{15}$
$(3; 2, 1)$	$-x_{21} = x_{21}$
$(3; 2, 3)$	$-x_{23} = x_{23}$
$(3; 2, 4)$	$-x_{24} = x_{24}$
$(3; 3, 2)$	$x_{32} = -x_{32}$
$(3; 3, 5)$	$x_{35} = -x_{35}$
$(3; 4, 2)$	$x_{42} = -x_{42}$
$(3; 4, 5)$	$x_{45} = -x_{45}$
$(3; 5, 1)$	$-x_{51} = x_{51}$
$(3; 5, 3)$	$-x_{53} = x_{53}$
$(3; 5, 4)$	$-x_{54} = x_{54}$

Отже, матриця X має вигляд

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} & x_{14} & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & x_{25} \\ x_{31} & 0 & x_{33} & x_{34} & 0 \\ x_{41} & 0 & x_{43} & x_{44} & 0 \\ 0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} \end{pmatrix}.$$

Тепер використаємо рівність $B_0X = XB_0$:

Позначення рівності	Вигляд рівності
$(4;1,2)$	$x_{22} = x_{11}$
$(4;1,4)$	$x_{14} = 0$
$(4;1,5)$	$x_{25} = 0$
$(4;3,2)$	$0 = x_{31}$
$(4;3,4)$	$x_{34} = 0$
$(4;4,1)$	$0 = x_{41}$
$(4;4,3)$	$0 = x_{43}$

Звідси маємо, що

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} & 0 & 0 \\ 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} & 0 \\ 0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} \end{pmatrix}.$$

Теорема доведена.

2.8. Зауваження

При обчисленні алгебри Ауслендера в модулярному і класичному випадках не враховувалось нерозкладне одновимірне зображення, що складається із нульових матриць. Якщо ж його враховувати, алгебра Ауслендера, яку назвемо поповненою, буде дорівнювати прямій сумі отриманої алгебри Ауслендера і поля K. Більш точно,

1) якщо K — поле характеристики 2, то поповнена матрична алгебра Ауслендера для напівгрупи T_2 складається з усіх матриць вигляду

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{18} & 0 & 0 \\ 0 & x_{11} & x_{23} & 0 & x_{25} & 0 & x_{27} & 0 & x_{29} & 0 \\ 0 & 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{41} & 0 & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & x_{48} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{41} & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{62} & x_{63} & 0 & x_{65} & x_{66} & x_{67} & 0 & x_{69} & 0 \\ 0 & 0 & x_{62} & 0 & 0 & 0 & x_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{88} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{93} & 0 & x_{95} & 0 & x_{97} & 0 & x_{99} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10,10} \end{pmatrix};$$

2) якщо K — поле характеристики $p \neq 2$, то попопвнена матрична алгебра Ауслендера для напівгрупи T_2 складається з усіх матриць вигляду

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} & 0 & 0 \\ 0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{66} \end{pmatrix}.$$

В обох випадках “нові” матриці A_0 і B_0 відрізняються від “старих” лише наявністю нульового рядка і нульового стовпця, причому можна вважати, що вони стоять на останніх місцях.

Тоді обидва твердження випливають із оборотності нової матриці A_0 з врахуванням наступної леми.

Лема 2.7. *Якщо*

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— оборотна матриця, то довільна матриця Z така, що $AZ = ZA$, має вигляд

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & 0 \\ 0 & Z_{22} \end{pmatrix}$$

(розбиття матриці Z на блоки таке ж, як і розбиття матриці A).

Дійсно, нехай

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}.$$

Тоді маємо

$$AZ = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 Z_{11} & A_0 Z_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$ZA = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} A_0 & 0 \\ Z_{21} A_0 & 0 \end{pmatrix}$$

і з рівності $AZ = ZA$ випливає, що $A_0 Z_{12} = 0$, $Z_{21} A_0 = 0$, а значить $Z_{12} = 0$ і $Z_{21} = 0$ (бо матриця A_0 оборотна).

2.9. Висновки до розділу

У цьому розділі описана канонічна форма модулярних зображень симетричної напівгрупи другого степеня і категорія модулярних нерозкладних зображень симетричної напівгрупи другого степеня (а саме описані всі, з точністю до еквівалентності, нерозкладні зображення та відповідна алгебра Ауслендера).

Результати цього розділу опубліковані в роботах [46], [50], [53], [57].

Розділ 3

Модулярні зображення прямого добутку симетричних напівгруп степеня 2

У цьому розділі детально вивчаються матричні зображення прямого добутку симетричних напівгруп степеня 2. Всі зображення розглядаються над полем K. Зауважимо, що при вивченні вигляду зображень, для порівняння, розглядається також випадок немодулярних зображень.

3.1. Означення і позначення

Напівгрупу

$$T_2^m = T_2^{(1)} \times T_2^{(2)} \times \ldots \times T_2^{(m)},$$

де $T_2^{(1)} = T_2^{(2)} = \ldots = T_2^{(m)} = T_2$, будемо позначати через $T(m)$ (m — натуральне число). Напівгрупу $T_2^{(i)}$ можна вкласти в напівгрупу $T(m)$, поставивши у відповідність елементу $x \in T_2^{(i)}$ елемент $(e_1, \ldots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \ldots, e_m)$, де e_j — одиничний елемент напівгрупи $T_2^{(j)}$. Надалі будемо ототожнювати напівгрупу $T_2^{(i)}$ з її образом в напівгрупі $T(m)$. Твірні вигляду e, a, b піднапівгрупи $T_2^{(i)}$ будемо позначати через $e^{(i)}, a^{(i)}, b^{(i)}$. Тоді системою твірних напівгрупи $T(m)$ є система, яка складається із одиничного елемента e і елементів $a^{(i)}, b^{(i)}$, де i пробігає множину $\{1, 2 \ldots, m\}$. Визначальні співвідношення (для фіксованого i) — це визначальні співвідношення симетричної напівгрупи $T_2^{(i)} = T_2$, а визначальні співвідношення всієї напівгрупи $T(m)$ складаються із визначальних співвідношень піднапівгруп $T_2^{(1)}, T_2^{(2)}, \ldots, T_2^{(m)}$ і із співвідношень попарного комутування всіх твірних з різними верхніми індексами (тобто, які належать різним прямим співмножникам).

Матричне зображення порядку n напівгрупи $T(m)$ над полем k — це гомоморфізм $S : T(m) \to M_n(k)$ напівгрупи $T(m)$ в напівгрупу $M_n(k)$ (всіх квадратних матриць порядку n над полем k). Вважаємо, що одиничному елементу напівгрупи відповідає одинична матриця. Тоді зображення однозначно задається набором матриць

$$R(S) = \{E = S(e), A^{(i)} = S(a^{(i)}), B^{(i)} = S(b^{(i)}) \,|\, i = 1, \ldots, m\},$$

які задовольняють наступні рівності:

$$(A^{(i)})^2 = E,\ (B^{(i)})^2 = B^{(i)},\ A^{(i)}B^{(i)} = B^{(i)},$$
$$A^{(i)}A^{(j)} = A^{(j)}A^{(i)},\ B^{(i)}B^{(j)} = B^{(j)}B^{(i)},\ A^{(i)}B^{(j)} = B^{(j)}A^{(i)},$$

де $1 \leq i, j \leq m$, $i \neq j$. Ми будемо надалі ототожнювати матричне зображення S з відповідним йому набором матриць $R = R(S)$.

Еквівалентність та нерозкладність матричних зображень вводиться стандартним чином (як і для зображень напівгрупи T_2 в розділі 2).

Обмеження матричного зображення R напівгрупи $T(m)$ на співмножник $T_2^{(i)}$ будемо позначати через $R^{(i)}$.

Матричне зображення напівгрупи $T(m)$ над полем K називається абсолютно нерозкладним, якщо його обмеження на кожну напівгрупу $T_2^{(i)}$ є нерозкладним, і сильно нерозкладним, якщо його обмеження хоча б на одну напівгрупу $T_2^{(i)}$ є нерозкладним (ці поняття запропонував В. М. Бондаренко).

Зауважимо, що фактор-напівгрупа напівгрупи $T(m)$ по ідеалу

$$I_0 \times I_0 \times \ldots \times I_0$$

(m разів) ізоморфна групі

$$S(m) = S_2 \times S_2 \times \ldots \times S_2$$

(m разів), де S_2 — циклічна група порядку 2 (симетрична група степеня 2). Матричне зображення напівгрупи $T(m)$ назвемо груповим, якщо воно індукується зображенням фактор-напівгрупи $S(m)$.

3.2. Абсолютно нерозкладні зображення напівгрупи $T(m)$

Спочатку розглянемо немодулярний випадок, тобто коли характеристика поля K не дорівнює 2.

Нагадаємо (див. розділ 2, теорема 2.5), що нерозкладні матричні зображення напівгрупи T_2 над полем K характеристики $p \neq 2$ вичерпуються (якщо вважати, що одиничному елементу напівгрупи відповідає одинична матриця), з точністю до еквівалентності, наступними зображеннями:

1) $a \to 1, \quad b \to 0;$

2) $a \to -1, \quad b \to 0;$

3) $a \to 1, \quad b \to 1;$

4)
$$a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вказані нерозкладні зображення будемо позначати відповідно через R_1, R_2, R_3, R_4.

Переходимо до опису абсолютно нерозкладних зображень напівгрупи $T(m)$ при $m > 1$ (випадок $m = 1$ очевидний: будь-яке нерозкладне зображення є абсолютно нерозкладним).

Теорема 3.1. *Довільне абсолютно нерозкладне матричне зображення R напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ над полем K характеристики $p \neq 2$ має наступний вигляд:*

$$R^{(1)} = R_{p_1}, R^{(2)} = R_{p_2}, \ldots, R^{(m)} = R_{p_m},$$

де $1 \leq p_1, p_2, \ldots, p_m \leq 3$.

Наслідок 3.2. *Усі абсолютно нерозкладні зображення напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ над полем K мають розмірність 1.*

Для доведення теореми 3.1 нам знадобиться наступна лема.

Лема 3.3. *Нехай A та B — матриці вигляду*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а Y — така матриця, що

a) $AY = YA$,

b) $BY = YB$.

Тоді матриця Y є скалярною.

Доведення. Матриця Y має, очевидно, розмір 2×2:

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}.$$

Після множення матриць у лівій і правій частинах першої (відповідно другої) матричної рівності отримуємо чотири скалярні рівності, які будемо позначати $a(1,1)$, $a(1,2), a(2,1), a(2,2)$ (відповідно $b(1,1), b(1,2), b(2,1), b(2,2)$); тут пара (i,j) після символу a (відповідно b) означає, що відповідна скалярна рівність отримується множенням i-ого рядка матриці A (відповідно матриці B) на j-ий стовпець. Легко побачити, що вказані скалярні рівності мають наступний вигляд:

$$a(1,1): \;\; y_{11} = y_{11},$$

$$a(1,2): \;\; y_{12} = -y_{12},$$

$$a(2,1): \;\; -y_{21} = y_{21},$$

$$a(2,2): \;\; -y_{22} = -y_{22},$$

$$b(1,1): \;\; y_{11} + y_{21} = y_{11},$$

$$b(1,2): \;\; y_{12} + y_{22} = y_{11},$$

$$b(2,1): \;\; 0 = y_{21},$$

$$b(2,2): \;\; 0 = -y_{21}.$$

Так як характеристика поля k не рівна двом, то рівність $a(1,2)$ еквівалентна рівності $y_{12} = 0$, а рівність $a(2,1)$ еквівалентна рівності $y_{21} = 0$. Значить матриця Y є діагональною. Так як $y_{12} = 0$, то рівність $b(1,2)$ означає, що $y_{22} = y_{11}$, а значить діагональна матриця Y є скалярною, що і потрібно було довести. $\square$

Переходимо тепер безпосередньо до доведення теореми 3.1.

Усі вказані в умові теореми матричні зображення є одновимірними, а тому й абсолютно нерозкладними. При цьому очевидно, що ними вичерпуються усі одновимірні зображення напівгрупи $T(m)$.

Покажемо, що інших абсолютно нерозкладних зображень немає, що й доведе теорему. Припустимо супротивне, і нехай R деяке абсолютно нерозкладне зображення порядку $n > 1$. Із теореми 2.5) і означення абсолютно нерозкладних зображень випливає, що зображення R двовимірне, а обмеження $R^{(1)}$ зображення R на піднапівгрупу $T_2^{(1)}$ еквівалентне зображенню R_4. Без обмеження загальності можна вважати, що $R^{(1)} = R_4$ (оскільки зображення R можна замінити довільним еквівалентним йому зображенням). Покладемо

$$A^{(1)} = R(a^{(1)}),\ \ B^{(1)} = R(b^{(1)}),$$

$$A^{(2)} = R(a^{(2)}),\ \ B^{(2)} = R(b^{(2)}).$$

Оскільки в напівгрупі $T(m)$ елементи піднапівгруп $T_2^{(1)}$ та $T_2^{(2)}$ попарно комутують, то

$$A^{(1)}A^{(2)} = A^{(2)}A^{(1)},$$

$$B^{(1)}A^{(2)} = A^{(2)}B^{(1)},$$

$$A^{(1)}B^{(2)} = B^{(2)}A^{(1)},$$

$$B^{(1)}B^{(2)} = B^{(2)}B^{(1)}.$$

Отже, якщо покласти $A = A^{(1)}$, $B = B^{(1)}$ та $Y = A^{(2)}$ (відповідно $Y = B^{(2)}$), то із твердження леми 3.3 маємо, що матриця $A^{(2)}$ (відповідно $B^{(2)}$) є скалярною, а звідси обмеження $R^{(2)}$ зображення R на піднапівгрупу $T_2^{(2)}$ є розкладним зображенням, що суперечить абсолютній нерозкладності зображення R.

Теорема 3.1 доведена.

Тепер розглянемо модулярний випадок, тобто коли характеристика поля K дорівнює 2.

Нагадаємо (див. розділ 2, теорема 2.3), що нерозкладні матричні зображення напівгрупи T_2 над полем K характеристики 2 вичерпуються (якщо вважати, що одиничному елементу напівгрупи відповідає одинична матриця), з точністю до еквівалентності, наступними зображеннями:

1) $\quad a \to 1, \quad b \to 0;$

2) $\quad a \to 1, \quad b \to 1;$

3) $\quad a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

$$4)\quad a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$5)\quad a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вказані нерозкладні зображення будемо позначати відповідно через R_1, R_2, R_3, R_4, R_5.

Переходимо до опису абсолютно нерозкладних зображень напівгрупи $T(m)$.

Теорема 3.4. *Довільне абсолютно нерозкладне матричне зображення R напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ над полем K характеристики 2 має, з точністю до еквівалентності, один із наступних виглядів:*

1) *Одновимірні зображення R з обмеженнями на прямі співмножники $T_2^{(i)}$ $(1 \leq i \leq m)$*

$$R^{(1)} = R_{p_1}, R^{(2)} = R_{p_2}, \ldots, R^{(m)} = R_{p_m},$$

де $p_1, p_2, \ldots, p_m \in \{1, 2\}$.

2) *Двовимірні зображення R з обмеженнями на прямі співмножники $T_2^{(i)}$ $(1 \leq i \leq m)$*

$R^{(i)} =:$

$$a^{(i)} \to \begin{pmatrix} 1 & x_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b^{(i)} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $x_1 = 1$ і $x_2, \ldots, x_m \neq 0$.

При цьому всі вказані матричні зображення попарно нееквівалентні.

Наслідок 3.5. *Довільне двовимірне абсолютно нерозкладне зображення напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ над полем K (характеристики 2) є груповим.*

Переходимо до доведення теореми.

Вказані в умові теореми матричні зображення вигляду 1) є одновимірними, а тому й абсолютно нерозкладними. При цьому очевидно, що ними вичерпуються усі одновимірні зображення напівгрупи $T(m)$.

Вказані в умові теореми матричні зображення вигляду 2) також є абсолютно нерозкладними, бо зображення

$$a \to \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

напівгрупи T_2 при $x \neq 0$ еквівалентне зображенню

$$a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

А саме, оборотна матриця

$$C = \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

здійснює еквівалентність цих зображень.

Покажемо, що інших абсолютно нерозкладних зображень (тобто, окрім вигляду 1) і 2)) немає, що й доведе теорему. Припустимо супротивне, і нехай R — деяке абсолютно нерозкладне зображення розмірності n, відмінне від зображень вигляду 1) і 2). Із теореми 2.3 і означення абсолютно нерозкладних зображень випливає, що зображення R або двовимірне або тривимірне.

Нехай спочатку $n = 3$. Тоді обмеження $R^{(1)}$ зображення R на піднапівгрупу $T_2^{(1)}$ еквівалентне зображенню R_5. Без обмеження загальності можна вважати, що $R^{(1)} = R_5$ (оскільки зображення R можна замінити довільним еквівалентним йому зображенням). Покладемо

$$A^{(1)} = R(a^{(1)}),\ \ B^{(1)} = R(b^{(1)}),$$

$$A^{(2)} = R(a^{(2)}),\ \ B^{(2)} = R(b^{(2)}).$$

Оскільки в напівгрупі $T(m)$ елементи піднапівгруп $T_2^{(1)}$ та $T_2^{(2)}$ попарно комутують, то

$$B^{(1)}A^{(2)} = A^{(2)}B^{(1)},$$

$$B^{(1)}B^{(2)} = B^{(2)}B^{(1)}.$$

Якщо покласти $B = B^{(1)}$, $A' = A^{(2)}$, $B' = B^{(2)}$, то матричне зображення $R^{(2)}$ розкладне згідно наступної леми при $Y = A', B'$.

Лема 3.6. *Якщо*

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix}$$

— така матриця, що $BY = YB$, *то*

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & 0 & 0 \\ 0 & y_{22} & y_{23} \\ 0 & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix}.$$

Доведення просте і проводиться безпосереднім обчисленням.

Підставивши в рівність $BY = YB$ матриці B і Y, маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

або

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & 0 & 0 \\ y_{21} & 0 & 0 \\ y_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

звідки

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & 0 & 0 \\ 0 & y_{22} & y_{23} \\ 0 & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix}.$$

Нехай тепер $n = 2$ і обмеження $R^{(1)}$ зображення R на піднапівгрупу $T_2^{(1)}$ еквівалентне зображенню R_4. Без обмеження загальності можна вважати, що $R^{(1)} = R_4$ (оскільки зображення R можна замінити довільним еквівалентним йому зображенням).

Доведення неможливості цього випадку доводиться аналогічно випадку $n = 3$. А саме, покладемо

$$A^{(1)} = R(a^{(1)}),\ \ B^{(1)} = R(b^{(1)}),$$

$$A^{(2)} = R(a^{(2)}),\ \ B^{(2)} = R(b^{(2)}).$$

Оскільки в напівгрупі $T(m)$ елементи піднапівгруп $T_2^{(1)}$ та $T_2^{(2)}$ попарно комутують, то

$$B^{(1)}A^{(2)} = A^{(2)}B^{(1)},$$

$$B^{(1)}B^{(2)} = B^{(2)}B^{(1)}.$$

Якщо покласти $B = B^{(1)}$, $A' = A^{(2)}$, $B' = B^{(2)}$, то матричне зображення $R^{(2)}$ розкладне згідно наступної леми при $Y = A', B'$.

Лема 3.7. *Якщо*

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$$

— така матриця, що $BY = YB$, то

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & 0 \\ 0 & y_{22} \end{pmatrix}.$$

Лема доводиться так же, як і попередня лема (по суті ця лема є двовимірним аналогом попередньої).

Залишилося ще показати, що якщо $n = 2$ і обмеження $R^{(1)}$ зображення R на піднапівгрупу $T_2^{(1)}$ дорівнює R_3, то зображення R еквівалентне зображенню 2) (див. формулювання теореми).

Нам знадобиться така лема (для матриць над полем характеристики 2).

Лема 3.8. *Нехай*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

і нехай

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$$

— така матриця, що $Y^2 = E$ *і* $AY = YA$*. Тоді*

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & y_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дійсно, із $AY = YA$ випливає, що

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ 0 & y_{11} \end{pmatrix},$$

а оскільки характеристика поля дорівнює 2, то із $Y^2 = E$ маємо, що $y_{11} = 1$.

Використаємо цю лему, продовжуючи доведення теореми.

Розглянемо обмеження $R^{(i)}$ зображення R на піднапівгрупу $T_2^{(i)}$ для будь-якого фіксованого $i \neq 1$. Покладемо

$$A^{(1)} = R(a^{(1)}),\ \ B^{(1)} = R(b^{(1)}),$$

$$A^{(i)} = R(a^{(i)}),\ \ B^{(i)} = R(b^{(i)}).$$

Оскільки в напівгрупі $T(m)$ елементи піднапівгруп $T_2^{(1)}$ та $T_2^{(i)}$ попарно комутують, то, зокрема,

$$A^{(1)}A^{(i)} = A^{(i)}A^{(1)}.$$

Якщо покласти $A = A^{(1)}$, $Y = A^{(i)}$, то за лемою 3.8 матричне зображення $R^{(i)}$ матиме вигляд

$$a^{(i)} \to \begin{pmatrix} 1 & x_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b^{(i)} \to B^{(i)} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}.$$

Оскільки обмеження $R^{(i)}$ зображення R на піднапівгрупу $T_2^{(i)}$ еквівалентне зображенню R_3 (бо інакше, із міркувань розмірностей, воно еквівалентне R_4, а це, як доведено вище, неможливо), то $B^{(i)} = 0$ і, окрім того, $x_i \neq 0$ (інакше зображення $T_2^{(i)}$ буде розкладним). Оскільки i — довільний індекс, не рівний 1, то маємо, що зображення R має (вказаний в умові теореми) вигляд 2). Це завершує розгляд всіх випадків.

Той факт, що два різні зображення вигляду 2) нееквівалентні випливає із того, що якщо $X^{-1}MX = M$ для

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то $X^{-1}MX = M$ для

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де x — довільний елемент поля.

Теорема доведена.

3.3. Число класів еквівалентності абсолютно нерозкладних зображень

Із теореми 3.1 випливає, що в немодулярному випадку число класів еквівалентності абсолютно нерозкладних зображень напівгрупи T_m $(m > 1)$ дорівнює 3^m незалежно від поля. Із теореми 3.4 випливає, що в модулярному випадку для нескінченного поля число таких класів є нескінченним.

Розглянемо модулярний випадок над скінченним полем.

Зауважимо, що скінченне поле має порядок $q = p^s$, де p — просте число. Якщо характеристика поля дорівнює 2, то його порядок дорівнює $q = 2^s$ Із теореми 3.4 маємо наступне твердження.

Теорема 3.9. *Для скінченного поля K характеристики 2 і порядку q число класів еквівалентності абсолютно нерозкладних зображень напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ дорівнює $2^m + (q-1)^{m-1}$.*

3.4. Сильно нерозкладні матричні зображення напівгрупи $T(m)$

Розглянемо спочатку випадок, коли характеристика поля K не дорівнює 2.

Теорема 3.10. *Довільне сильно нерозкладне матричне зображення R напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ над полем K характеристики $p \neq 2$ має, з точністю до еквівалентності, один із наступних виглядів:*

I) *Одновимірні зображення R з обмеженнями на прямі співмножники $T_2^{(i)}$ $(1 \leq i \leq m)$*

$R^{(1)} = R_{p_1}$, $R^{(2)} = R_{p_2}, \ldots, R^{(m)} = R_{p_m}$, *де* $1 \leq p_1, p_2, \ldots, p_m \leq 3$.

II) *Двовимірні зображення R з обмеженнями на прямі співмножники $T_2^{(i)}$ $(1 \leq i \leq m)$*

$R^{(s)} = R_4$ *для деякого* $1 \leq s \leq m$ *і* $R^{(i)} = R_{p_i} \oplus R_{p_i}$ *для всіх* $i \neq s$, *де* $1 \leq p_1, \ldots, p_{s-1}, p_{s+1} \ldots, p_m \leq 3$.

При цьому всі вказані матричні зображення попарно нееквівалентні.

Доведення. Нехай R — сильно нерозкладне зображення напігрупи $T(m)$. Із теореми 2.5 і означення сильно нерозкладних зображень випливає, що зображення R одновимірне або двовимірне. Якщо R одновимірне, то воно абсолютно нерозкладне і згідно результатів попереднього підрозділу маємо випадок I).

Нехай тепер R двовимірне. Покажемо, що в цьому випадку зображення R еквівалентне одному із зображень, вказаних в II). Згідно означення сильно нерозкладних зображень обмеження $R^{(s)}$ зображення R

на деяку напівгрупу $T_2^{(s)}$ еквівалентне зображенню R_4. Можна вважати, що $R^{(s)} = R_4$ (інакше замінимо R на еквівалентне йому зображення, обмеження якого на $T_2^{(s)}$ дорівнює R_4). Оскільки довільний елемент $z \in T(m) \setminus T_2^{(s)}$ комутує з довільним елементом $y \in T_2^{(s)}$, то комутують і відповідні їм матриці R_z і R_y зображення R, а значить за лемою 3.3 для $A = R(a^{(s)})$, $B = R(b^{(s)})$ і $Y = R_z$ маємо, що матриця R_z є скалярною. І, таким чином, маємо випадок II).

Легко бачити, що всі вказані в I) та II) матричні зображення попарно нееквівалентні. Нетривіальним є лише випадок, коли маємо два різних зображення вигляду II). В цьому випадку нееквівалентність випливає із того, що матриця, яка комутує з усіма матрицями зображення R_4 є скалярною.

Теорема доведена. $\square$

Із даної теореми випливає наступний наслідок.

Наслідок 3.11. *Нехай R – сильно нерозкладне матричне зображення напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ над полем K характеристики $p \neq 2$ і нехай воно не є абсолютно нерозкладним. Тоді R має, з точністю до еквівалентності, наступний вигляд:*

$R^{(s)} = R_4$ для деякого $1 \leq s \leq m$ і $R^{(i)} = R_{p_i} \oplus R_{p_i}$ для всіх $i \neq s$, де $1 \leq p_1, \ldots, p_{s-1}, p_{s+1} \ldots, p_m \leq 3$.

Цей наслідок можна сформулювати в такій формі.

Наслідок 3.12. *Нехай R – нерозкладне матричне зображення напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ над полем K характеристики $p \neq 2$, яке не є абсолютно нерозкладним. Тоді R сильно нерозкладне тоді і лише тоді, коли зображення $R^{(i)}$ нерозкладне для одного і лише для одного i, а всі матриці зображень $R^{(j)}$ при $j \neq i$ є скалярними.*

Розглянемо тепер випадок, коли характеристика поля K дорівнює 2.

Теорема 3.13. *Довільне сильно нерозкладне матричне зображення R напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ над полем K характеристики 2 має, з точністю до еквівалентності, один із наступних виглядів:*

I) *Одновимірні зображення R з обмеженнями на прямі співмножники $T_2^{(i)}$ $(1 \leq i \leq m)$*

$$R^{(1)} = R_{p_1}, R^{(2)} = R_{p_2}, \ldots, R^{(m)} = R_{p_m},$$

де $p_1, p_2, \ldots, p_m \in \{1, 2\}$.

II) *Двовимірні зображення R з обмеженнями на прямі співмножники $T_2^{(i)}$ $(1 \leq i \leq m)$*

$R^{(i)} =$:

$$a^{(i)} \to \begin{pmatrix} 1 & x_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b^{(i)} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де один із елементів x_i дорівнює 1, а решта елементів — довільні.

III) *Двовимірні зображення R з обмеженнями на прямі співмножники $T_2^{(i)}$ $(1 \leq i \leq m)$*

$R^{(s)} = R_4$ для деякого $1 \leq s \leq m$ і $R^{(i)} = R_{p_i} \oplus R_{p_i}$ для всіх $i \neq s$, де $p_1, \ldots, p_{s-1}, p_{s+1} \ldots, p_m \in \{1, 2\}$.

IV) *Тривимірні зображення R з обмеженнями на прямі співмножники $T_2^{(i)}$ $(1 \leq i \leq m)$*

$R^{(s)} = R_5$ для деякого $1 \leq s \leq m$ і $R^{(i)} = R_{p_i} \oplus R_{p_i} \oplus R_{p_i}$ для всіх $i \neq s$, де $p_1, \ldots, p_{s-1}, p_{s+1} \ldots, p_m \in \{1, 2\}$.

При цьому всі вказані матричні зображення попарно нееквівалентні.

Переходимо до доведення теореми.

Розглянемо по черзі випадок одновимірних, двовимірних і тривимірних зображень.

Випадок одновимірних зображень очевидний.

Двовимірний випадок з умовою $R^{(s)} = R_3$ для деякого $1 \leq s \leq m$ досить (в силу симетрії) розглянути для $s = 1$. Це розглядається дослівно, як частина доведення теореми 3.4, коли $n = 2$ і обмеження $R^{(1)}$ зображення R на піднапівгрупу $T_2^{(1)}$ дорівнює R_3 (лише втрачає силу висновок, що $x_1 \neq 0$). Отже, в цьому випадку маємо II).

Двовимірний випадок з умовою $R^{(s)} = R_4$ для деякого $1 \leq s \leq m$ розглядається аналогічно, як і такий же випадок при доведенні теореми 3.10, з використанням замість леми 3.3 наступної леми.

Лема 3.14. *Нехай A та B — матриці вигляду*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а Y — така матриця, що

a) $AY = YA$,

b) $BY = YB$.

Тоді матриця Y є скалярною.

Ця лема випливає із леми 4.5 і доведення леми 3.8.

Отже, в цьому випадку маємо III).

Тривимірний випадок з умовою $R^{(s)} = R_5$ для деякого $1 \leq s \leq m$ розглядається аналогічно, як і такий же випадок при доведенні теореми 3.4, але при доведенні теореми 3.4 ми прийшли до протиріччя (що зображення не є абсолютно нерозкладним), а тут ми приходимо до висновку, що всі матриці зображень $R^{(i)}$ при $i \neq s$ є скалярними (цей факт легко довести, використовуючи лему 3.6). Отже, в цьому випадку маємо IV).

Теорема доведена.

Наслідок 3.15. *Нехай R – сильно нерозкладне матричне зображення напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ над полем K характеристики $p = 2$ і нехай* *воно не є абсолютно нерозкладним. Якщо R не групове, то воно має, з точністю до еквівалентності, один із наступних виглядів:*

1) *Двовимірні зображення R з обмеженнями на прямі співмножники $T_2^{(i)}$ $(1 \leq i \leq m)$*

$R^{(s)} = R_4$ *для деякого* $1 \leq s \leq m$ *і* $R^{(i)} = R_{p_i} \oplus R_{p_i}$ *для всіх* $i \neq s$, *де* $p_1, \dots, p_{s-1}, p_{s+1} \dots, p_m \in \{1, 2\}$.

2) *Тривимірні зображення R з обмеженнями на прямі співмножники $T_2^{(i)}$ $(1 \leq i \leq m)$*

$R^{(s)} = R_5$ *для деякого* $1 \leq s \leq m$ *і* $R^{(i)} = R_{p_i} \oplus R_{p_i} \oplus R_{p_i}$ *для всіх* $i \neq s$, *де* $p_1, \dots, p_{s-1}, p_{s+1} \dots, p_m \in \{1, 2\}$.

Цей наслідок можна сформулювати в такій формі.

Наслідок 3.16. *Нехай R – нерозкладне матричне зображення напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ над полем K характеристики $p = 2$, яке не є абсолютно нерозкладним. Якщо R не групове, то воно сильно нерозкладне тоді і лише тоді, коли зображення $R^{(i)}$ нерозкладне для одного і лише для одного i, а всі матриці зображень $R^{(j)}$ при $j \neq i$ є скалярними.*

3.5. Число класів еквівалентності сильно нерозкладних зображень

Із теореми 3.10 випливає, що в немодулярному випадку число класів еквівалентності сильно нерозкладних зображень T_m $(m > 1)$ є скінченним над довільним полем. Маємо таку теорему.

Теорема 3.17. *Для скінченного поля K характеристики $p \neq 2$ і порядку q число класів еквівалентності сильно нерозкладних зображень напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ дорівнює $(m + 3)3^{m-1}$.*

Дійсно, число одновимірних зображень дорівнює 3^m, а двовимірних — $m3^{m-1}$.

Із теореми 3.13 випливає, що в модулярному випадку для нескінченного поля число таких класів є нескінченним. Якщо ж поле скінченне порядку q ($q = 2^s$), то маємо таке твердження.

Теорема 3.18. *Для скінченного поля K характеристики 2 і порядку q число класів еквівалентності сильно нерозкладних зображень напівгрупи $T(m)$ $(m > 1)$ дорівнює $(m+1)2^m + (q^m - 1)/(q-1)$.*

Дійсно, число зображень виглядів I), II), III), IV) дорівнює відповідно 2^m, $(q^m - 1)/(q-1)$, $m2^{m-1}$, $m2^{m-1}$.

3.6. Критерій ручності прямого добутку симетричних груп та симетричних напівгруп степеня 2

Ми користуємося означеннями ручних і диких матричних задач, а також твердженнями про них, які приведені в розділі 1.

Нехай K — поле характеристики 2. Відомо, що група типу $(2,2)$, тобто прямий добуток двох циклічних груп другого порядку є ручною (а сама циклічна група другого порядку має скінченний тип). Прямий добуток трьох (а значить і більше трьох) таких груп є вже диким. Якщо врахувати, що циклічна група другого порядку — це симетрична група степеня 2, то виникає природне питання, а що буде, якщо симетричні групи (степеня 2) замінити на симетричні напівгрупи степеня 2?

Це питання і розглядається в цьому підрозділі. Оскільки симетрична напівгрупа степені 2 має фактор напівгрупу, що є циклічною другого порядку, то природно (як з точки зору напівгруп, так і з точки зору зображень) серед прямих співмножників розглядати і симетричні групи.

Для напівгрупи S і натурального числа n через S^n позначається прямий добуток напівгруп S, взятих n разів. При цьому вважаємо, що для напівгрупи з одиницею S^0 — одинична напівгрупа.

Нагадаємо, що симетрична напівгрупа степеня 2 позначається через T_2. Симетричну групу степеня 2 позначаємо, як звичайно, через S_2.

Теорема 3.19. *Прямий добуток $(S_2)^n \times (T_2)^m$, де $n, m \geq 0$, є ручним над полем K характеристики 2 тоді і лише тоді, коли виконується одна із таких умов:*

1) $n < 3$, $m = 0$*;*

2) $n = 0$, $m < 2$*.*

При цьому у випадку нескінченного поля скінченне (з точністю до еквівалентності) число нерозкладних зображень мають лише групи S_2^0 (одинична група), S_2 та напівгрупа T_2.

Переходимо до доведення теореми.

Випадок $n = 0, m = 0$ тривіальний (маємо одиничну групу).

Випадок $n = 1, m = 0$ – добре відомий (циклічна група S_2 має, з точністю до еквівалентності, два модулярних нерозкладних зображення).

Випадок $n = 0, m = 1$ розглянуто в другому розділі дисертації (напівгрупа T_2 має скінченний зображувальний тип).

Випадок $n = 2, m = 0$ – добре відомий (група $S_2 \times S_2$ є ручною, причому над нескінченним полем має нескінченне, з точністю до еквівалентності, число нерозкладних зображень [3]).

Враховуючи, що напівгрупа є дикою, якщо деяка її фактор-напівгрупа дика, залишилося довести, що вказана в умові теореми напівгрупа є дикою при $n = 1, m = 1$, тобто напівгрупа $S_2 \times T_2$ — дика. Зауважимо, що більш слабкий випадок, а саме випадок напівгрупи $T_2 \times T_2$ (фактор-напівгрупа якої є напівгрупа $S_2 \times T_2$) розглянуто в [71].

Вкажемо досконале зображення напівгрупи $S_2 \times T_2$ над k-алгеброю $\Lambda = k\Gamma$ шляхів сагайдака Γ з двома вершинами p_1, p_2 і двома стрілками $x : p_1 \to p_1$, $y : p_1 \to p_2$ (цей сагайдак є диким згідно роботи [64, 65] (див. підрозділ 1.1 дисертації).

Якщо через g позначити неодиничний елемент групи S_2, то напівгрупа $S_2 \times T_2$ породжується елементами g, a, b з додатковими співвідношеннями $g^2 = 1$, $ga = ag$, $gb = bg$

Розглянемо наступне матричне зображення γ напівгрупи $S_2 \times T_2$ над алгеброю $\Lambda = k\Gamma$:

$$g \to \gamma(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$a \to \gamma(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b \to \gamma(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

($\gamma(1)$ дорівнює одиничній матриці).

Доведемо, що γ є досконалим зображенням.

Нехай φ, φ' — зображення Λ над k, що мають однакову розмірність s і нехай $G = (\gamma \otimes \varphi)(g)$, $A = (\gamma \otimes \varphi)(a)$, $B = (\gamma \otimes \varphi)(b)$, $G' = (\gamma \otimes \varphi')(g)$, $A' = (\gamma \otimes \varphi')(a)$, $B' = (\gamma \otimes \varphi')(b)$. Розглянемо матричні рівняння (відносно змінної X)

$$GX = XG', \quad AX = XA', \quad BX = XB', \tag{$*$}$$

розглядаючи всі їхні матриці як $s \times s$ блочні.

Рівності (з $s \times s$ ij-блоками)

$$(GX)_{ij} = (XG')_{ij}, \quad (AX)_{ij} = (XA')_{ij}, \quad (BX)_{ij} = (XB')_{ij},$$

$i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ позначаються відповідно через $(1; ij)$, $(2; ij)$, $(3; ij)$.

Ми спочатку запишемо всі рівності вигляду $(2; ij)$ і $(3; ij)$, окрім тривіальних тотожностей $0 = 0$ і $X_{ii} = X_{ii}$:

Позначення рівності	Вигляд рівності
$(2; 1, 1)$	$X_{21} = 0$
$(2; 1, 2)$	$X_{22} = X_{11}$
$(2; 1, 3)$	$X_{23} = 0$
$(2; 1, 4)$	$X_{24} = X_{13}$
$(2; 2, 1)$	$0 = 0$
$(2; 2, 2)$	$0 = X_{21}$
$(2; 2, 3)$	$0 = 0$
$(2; 2, 4)$	$0 = X_{23}$
$(2; 3, 1)$	$X_{41} = 0$
$(2; 3, 2)$	$X_{42} = X_{31}$
$(2; 3, 3)$	$X_{43} = 0$
$(2; 3, 4)$	$X_{44} = X_{33}$
$(2; 4, 1)$	$0 = 0$
$(2; 4, 2)$	$0 = X_{41}$
$(2; 4, 3)$	$0 = 0$
$(2; 4, 4)$	$0 = X_{43}$
$(3; 1, 1)$	$X_{11} = X_{11}$
$(3; 1, 2)$	$X_{12} = 0$
$(3; 1, 3)$	$X_{13} = 0$
$(3; 1, 4)$	$X_{14} = 0$
$(3; 2, 1)$	$0 = X_{21}$

Позначення рівності	Вигляд рівності
$(3;2,2)$	$0=0$
$(3;2,3)$	$0=0$
$(3;2,4)$	$0=0$
$(3;3,1)$	$0=X_{31}$
$(3;3,2)$	$0=0$
$(3;3,3)$	$0=0$
$(3;3,4)$	$0=0$
$(3;4,1)$	$0=X_{41}$

Із цих рівностей випливає, що

$$X=\begin{pmatrix} X_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ 0 & 0 & 0 & X_{33} \end{pmatrix}.$$

Тоді із рівностей

$$(1;3,2):\varphi(y)X_{11}=X_{33}\varphi'(y),\quad (1;3,4):\varphi(x)X_{33}=X_{33}\varphi'(x) \qquad (**)$$

(єдині дві нетривіальні рівності вигляду $(1;ij)$ за модулем рівностей $(2;ij)$ і $(3;ij)$) маємо, що матричні k-зображення φ і φ' $\Lambda=k\Gamma$ еквівалентні, якщо такими є матричні k-зображення $\gamma\otimes\varphi$ і $\gamma\otimes\varphi'$ напівгрупи $S_2\times T_2$ (оскільки X_{11} і X_{33} є оборотними, якщо таким є X).

Таким чином, для зображення γ виконується умова 2) означення диких напівгруп.

З вигляду матриці X випливає, що алгебра ендоморфізмів $\gamma\otimes\varphi$ локальна тоді і лише тоді, коли такою є алгебра ендоморфізмів φ (ці алгебри визначаються відповідно $(*)$ та $(**)$, де $\varphi=\varphi'$). Тому $\gamma\otimes\varphi$ нерозкладне, якщо φ нерозкладне, і, отже, γ задовольняє умову 1) цього означення.

Теорема доведена.

Оскільки за досконале матричне зображення сагайдака Γ над алгеброю $K_2' = k < x', y' >$ можна взяти зображення

$$x \to \begin{pmatrix} 0 & x' \\ 1 & y' \end{pmatrix}, \quad y \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то із доведення нашої теореми випливає, що наступне зображення λ напівгрупи $S_2 \times T_2$ над K_2' є досконалим:

$$g \to \lambda(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & x' \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & y' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$a \to \lambda(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b \to \lambda(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.7. Висновки до розділу

У цьому розділі вивчаються модулярні зображення прямого добутку симетричних напівгруп степеня 2. Описані абсолютно і слабо нерозкладні (немодулярні та модулярні) матричні зображення прямого добутку довільного числа симетричних напівгруп другого степеня; обчислено число класів еквівалентності таких зображень над скінченним полем. Отримано критерій ручності відносно модулярних зображень прямого добутку симетричних напівгруп і груп степенів 2.

Результати цього розділу опубліковані в роботах [47], [48], [49], [52], [55].

Розділ 4

Модулярні зображення напівгрупи $S_2 \times T_2$ із заданим R-носієм

4.1. Постановка задачі

У цьому розділі розглядаються модулярні зображення напівгруп з додатковими умовами.

R-носієм матричного зображення M прямого добутку $T \times S$ напівгруп T і S відносно T називатимемо (не порожній) набір нерозкладних попарно нееквівалентних зображень $N_0 = \{R_1, \ldots, R_s\}$ $(s \geq 1)$ такий, що обмеження M на T розкладається в пряму суму зображень із N_0 (з деякою кратністю), причому кожне з них реально присутнє. Очевидно, що заміна зображень із N_0 на еквівалентні змінює множину N_0, але нова множина зображень N_0' також буде R-носієм.

В цьому розділі вивчаються модулярні матричні зображення прямого добутку симетричних напівгруп степеня 2 з довільним фіксованим R-носієм (відносно напівгрупи T_2).

За теоремою 2.3 нерозкладні матричні зображення напівгрупи T_2 над полем K характеристики 2 вичерпуються, з точністю до еквівалентності, наступними (попарно нееквівалентними) зображеннями:

1) $a \to 1, \quad b \to 1;$

2) $a \to 1, \quad b \to 0;$

$$3)\quad a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$4)\quad a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$5)\quad a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що з формальних міркувань нумерація зображень змінена, а саме переставлено місцями зображення 1) і 2) та 3) і 4).

Отже, можна вважати, що будь-який R-носій модулярного зображення напівгрупи $T_2 \times S_2$ складається із деяких зображень вигляду 1)–5). Значить порядок R-носія може бути рівним $1, 2, 3, 4, 5$.

Можна розглянути наступну класифікаційну задачу для довільного поля K характеристики 2. Зафіксуємо в множині $M = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$ всіх нерозкладних зображень напівгрупи T_2 деяку не порожню підмножину N_0 і будемо розглядати лише матричні зображення напівгрупи $T = T_2 \times S_2$ з носієм N_0. Але з точки зору теорії зображень (в якій розглядаються не лише точні, а й неточні зображення) природно при фіксованому R-носію розглядати одночасно і всі менші (в сенсі включення множин) R-носії. R-носії з такою властивістю будемо позначати через N.

Для пар (T, N) можна розглядати традиційні задачі теорії зображень. Одна із них, а саме задача про опис пар (T, N) скінченного типу, розглядається в розділі (“скінченний тип” означає, що число нерозкладних зображень, з точністю до еквівалентності, скінченне).

4.2. Випадок R-носіїв порядку 1 і 2

Теорема 4.1. *Якщо $|N| = 1$, то (T, N) — пара скінченного типу тоді і лише тоді, коли $N \neq R_4, R_5$.*

Теорема 4.2. *Якщо $|N| = 2$, то (T, N) — пара скінченного типу тоді і лише тоді, коли $N = \{R_1, R_2\}$, $N = \{R_1, R_3\}$ або $N = \{R_2, R_3\}$.*

Переходимо до доведення теорем. Ми ототожнюємо одноелементні множини із самими елементами.

Доведемо теорему 4.1

Необхідність. Легко показати, що у випадку $N = R_4$ трійки матриць $R_P = (A, B, G_P)$ і $R_Q = (A, B, G_Q)$, де

$$A = \begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_X = \begin{pmatrix} E & X \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

подібні тоді і лише тоді, коли подібні P і Q; окрім того, зображення R_X нерозкладне тоді і лише тоді, коли нерозкладна матриця X.

У випадку $N = R_5$ маємо подібну ситуацію, якщо покласти

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & E \\ 0 & E & E \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_X = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & X \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

Отже, пари (T, R_4) і (T, R_5) мають нескінченний тип.

Зауважимо, що в першому випадку трійка матриць R_X задає по суті зображення групи $S_2 \times S_2$ (бо $B = 0$), а тому сказане для $N = R_4$ випливає із результатів роботи [3].

Достатність випливає з теореми 4.2 (достатність), яка буде доведена нижче.

Доведемо тепер теорему 4.2. *Необхідність* випливає з теореми 4.1 (необхідність).

Достатність. Розглянемо послідовно випадки $N = \{R_1, R_2\}$, $N = \{R_1, R_3\}$, $N = \{R_2, R_3\}$, виписуючи на початку деякий загальний нормальний вигляд матричного зображення з відповідною додатковою умовою. Через E позначаємо, як звичайно, довільну одиничну матрицю (розмірності $n \geq 0$).

Випадок $N = \{R_1, R_2\}$:

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix},$$

Із співвідношення $BG = GB$ отримуємо $G_{12} = 0$, $G_{21} = 0$, а з $G^2 = E$: $G_{11}^2 = E$, $G_{22}^2 = E$. Значить кожна із матриць G_{11} і G_{22} подібна матриці вигляду

$$\begin{pmatrix} E & 0 & E \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \tag{1}$$

який легко отримати з жорданової нормальної форми одночасною перестановкою рядків та стовпців.

Оскільки ці подібності продовжуються до подібності трійок матриць (A, B, G) і (A, B, G'), де G' — деяка матриця така, що $G'_{12} = 0$, $G'_{21} = 0$, а G'_{11} і G'_{22} мають вигляд (1), то отримуємо наступну повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних зображень:

1) $\quad a \to 1, \quad b \to 1, \quad g \to 1;$

2) $\quad a \to 1, \quad b \to 0, \quad g \to 1;$

3) $\quad a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

4) $\quad a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Зауважимо, що зображення 3) і 4) нерозкладні, бо нерозкладні їх обмеження на підгрупу $\{e, g\}$ (порядку 2).

Випадок $N = \{R_1, R_3\}$:

$$A = \begin{pmatrix} E & E & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix},$$

Із співвідношення $BG = GB$ отримуємо $G_{12} = 0$, $G_{21} = 0$, $G_{23} = 0$, $G_{32} = 0$, а із $AG = GA$: $G_{31} = 0$, $G_{11} = G_{22}$. Отже,

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & 0 & G_{13} \\ 0 & G_{11} & 0 \\ 0 & 0 & G_{33} \end{pmatrix},$$

причому із $G^2 = E$ маємо наступні співвідношення:

$$G_{11}^2 = E, \quad G_{33}^2 = E, \quad G_{11}G_{13} + G_{13}G_{33} = 0. \tag{2}$$

Враховуючи перші дві рівності, аналогічно як у випадку $N = \{R_1, R_2\}$, можна вважати, що матриці G_{11} і G_{22} мають вигляд (1).

Розіб'ємо матриці A, B, G на блоки у відповідності до розбиття G_{11} та G_{33}. Зокрема, матимемо

$$G_{13} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{pmatrix}.$$

Із останньої рівності в (2) випливає, що $H_{11} = H_{33}$, $H_{21} = 0$, $H_{31} = 0$, $H_{32} = 0$. Тоді, як легко бачити, при

$$X = \begin{pmatrix} E & 0 & X_{13} \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \text{ де } X_{13} = \begin{pmatrix} H_{13} & 0 & 0 \\ H_{23} & 0 & 0 \\ H_{11} & H_{12} & 0 \end{pmatrix},$$

трійка матриць $(XAX^{-1}, XBX^{-1}, XGX^{-1})$ дорівнює трійці матриць (A, B, G'), де матриця G' відрізняється від матриці G лише блоком G'_{13}, який має наступний (більш простий) вигляд:

$$G'_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

І оскільки еквівалентність матриць $H_{22} \to PH_{22}Q^{-1}$ продовжується до подібності трійок матриць (A, B, G') і (A, B, G''), де G'' отримується із G' заміною H_{22} на $PH_{22}Q^{-1}$, то можна вважати, що

$$H_{22} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результаті маємо наступну повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних зображень:

1) $a \to 1, \quad b \to 1, \quad g \to 1;$

2) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

3) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

5) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Зауважимо, що зображення 2) (відповідно 3)) нерозкладне, бо нерозкладне його обмеження на підгрупу $\{e, a\}$ (відповідно $\{e, g\}$), а зображення 4) і 5) нерозкладні, бо нерозкладні (згідно [3]) їх обмеження на підгрупу $\{e, a, g, ag\} \cong S_2 \times S_2$.

Випадок $N = \{R_2, R_3\}$:

$$A = \begin{pmatrix} E & E & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix}.$$

Із співвідношення $BG = GB$ отримуємо $G_{12} = 0$, $G_{13} = 0$, $G_{21} = 0$, $G_{31} = 0$, а із $AG = GA$: $G_{23} = 0$, $G_{11} = G_{22}$. Отже,

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ 0 & G_{11} & 0 \\ 0 & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix},$$

причому із $G^2 = E$ маємо наступні співвідношення:

$$G_{11}^2 = E, \quad G_{33}^2 = E, \quad G_{32}G_{11} + G_{33}G_{32} = 0.$$

Далі доведення проводиться по тій же схемі, що у випадку $N = \{R_1, R_3\}$.

В результаті маємо наступну повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних зображень:

1) $\quad a \to 1, \quad b \to 0, \quad g \to 1;$

2) $\quad a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

3) $\quad a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

$$4)\quad a\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad b\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad g\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix};$$

$$5)\quad a\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad b\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad g\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що зображення 2) – 5) нерозкладні по тій же причині, що і зображення у випадку $N=\{R_1,R_3\}$.

Теорема 4.2 доведена.

4.3. Випадок R-носіїв порядку 3, 4 і 5

Теорема 4.3. *Якщо* $|N|=3$, *то* (T,N) *— пара скінченного типу тоді і лише тоді, коли* $N=\{R_1,R_2,R_3\}$.

Теорема 4.4. *Якщо* $|N|=4,5$, *то* (T,N) *— пара нескінченного типу.*

Теорема 4.4 випливає із теореми 4.1.

Переходимо до доведення теореми 4.3.

Введемо одне позначення. Якщо є рівність $P=Q$, позначена (m), де $P=(P_{ij})$ і $Q=(Q_{ij})$ — блокові матриці такі, що відповідні блоки мають одинакові розміри, то рівність $P_{ij}=Q_{ij}$ позначається через $(m;i,j)$.

Отже, маємо:

$$A=\begin{pmatrix}E&E&0&0\\0&E&0&0\\0&0&E&0\\0&0&0&E\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}E&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&E&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}G_{11}&G_{12}&G_{13}&G_{14}\\G_{21}&G_{22}&G_{23}&G_{24}\\G_{31}&G_{32}&G_{33}&G_{34}\\G_{41}&G_{42}&G_{43}&G_{44}\end{pmatrix},$$

Із рівності
$$BG = GB \tag{1}$$
отримуємо

$(1;1,2) : G_{12} = 0,\ \ (1;3,2) : G_{32} = 0,$

$(1;1,4) : G_{14} = 0,\ \ (1;3,4) : G_{34} = 0,$

$(1;2,1) : 0 = G_{21},\ \ (1;4,1) : 0 = G_{41},$

$(1;2,3) : 0 = G_{23},\ \ (1;4,3) : 0 = G_{43},$

а з рівності
$$(A-E)G = G(A-E) \tag{2}$$
отримуємо
$$(2;1,2) : G_{22} = G_{11}, \quad (2;1,4) : G_{24} = 0, \quad (2;3,2) : 0 = G_{31}.$$

В результаті маємо
$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & G_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{33} & 0 \\ 0 & G_{42} & 0 & G_{44} \end{pmatrix}.$$

Далі використаємо
$$G^2 = E, \tag{3}$$
отримаємо наступні співвідношення:
$$(3;1,1) : G_{11}^2 = E, \quad (3;1,3) : G_{11}G_{13} + G_{13}G_{33} = 0,$$
$$(3;3,3) : G_{33}^2 = E, \quad (3;4,2) : G_{42}G_{11} + G_{44}G_{42} = 0, \quad (3;4,4) : G_{44}^2 = E.$$

Вияснимо, коли подібні матричні зображення, які задаються матрицями (A, B, G) і (A', B', G'), де A', B', G' — матриці такого ж вигляду, як і матриці A, B, G.

Розглянемо матричні рівності:
$$GX = XG' \tag{4}$$

$AX = XA', \quad BX = XB'$. З останніх двох рівностей отримуємо

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & X_{13} & 0 \\ 0 & X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_{33} & 0 \\ 0 & X_{42} & 0 & X_{44} \end{pmatrix}.$$

З першої рівності матимемо наступні (нетривіальні) рівності:

$$(4;1,1) : G_{11}X_{11} = X_{11}G'_{11}, \quad (4;3,3) : G_{33}X_{33} = X_{33}G'_{33},$$

$$(4;4,4) : G_{44}X_{44} = X_{44}G'_{44}, (4;1,3) : G_{11}X_{13} + G_{13}X_{33} = X_{11}G'_{13} + X_{13}G'_{33},$$

$$(4;4,2) : G_{42}X_{11} + G_{44}X_{42} = X_{42}G'_{11} + X_{44}G'_{42}.$$

Нам знадобиться наступна лема.

Лема 4.5. *Нехай блокова матриця*

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & * \\ 0 & G_{22} \end{pmatrix}$$

з квадратними діагональними блоками задовольняє рівність $G^2 = E$. *Тоді існує оборотна матриця*

$$X = \left(\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{12} \\ \hline 0 & X_{22} \end{array}\right)$$

(з таким же поділом на смуги) така, що

$$X^{-1}GX = \left(\begin{array}{cccc|cccc} E & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{array}\right).$$

Доведення. Оскільки перетвореннями подібності матриця M із співвідношенням $M^2 = E$ приводиться до вигляду

$$M = \begin{pmatrix} E & 0 & E \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \qquad (1)$$

(нормальна жорданова форма з деякою перестановкою рядків та стовпців), то можна вважати, що матриці G_{11} і G_{22} мають вигляд (1), тобто

$$G = \left(\begin{array}{ccc|ccc} E & 0 & E & G_{14} & G_{15} & G_{16} \\ 0 & E & 0 & G_{24} & G_{25} & G_{26} \\ 0 & 0 & E & G_{34} & G_{35} & G_{36} \\ \hline 0 & 0 & 0 & E & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{array}\right),$$

причому із рівності $G^2 = E$ маємо, що $G_{14} = G_{36}$, $G_{24} = 0$, $G_{34} = 0$, $G_{35} = 0$. Тоді за матрицю X можна взяти наступну матрицю:

$$X = \left(\begin{array}{ccc|ccc} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_1 & 0 & G_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & G_{14} & G_{15}X_2 & G_{16} \\ \hline 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{array}\right),$$

де X_1, X_2 — такі оборотні матриці, що

$$X_1^{-1} G_{25} X_2 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Враховуючи сказане вище, застосовуємо доведену лему для матриць

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{13} \\ 0 & G_{33} \end{pmatrix}, \quad G' = \begin{pmatrix} G_{44} & G_{42} \\ 0 & G_{11} \end{pmatrix}.$$

Якби в цих матрицях не було однакової клітини G_{11}, то зображення напівгрупи $T_2 \times S_2$, яке розглядаємо, розщеплювалось би. А в даній ситуації матриця G подібна, очевидно, матриці

$$G_0 = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|ccc}
E & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & E \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P & Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E
\end{array}\right).$$

Легко бачити, що для матриць P, Q допустимими перетвореннями з рядками і стовпцями є перетворення, які визначаються зображенням частково впорядкованої множини, що складається із двох порівняльних матриць (меншому елементу відповідає матриця P): в зв'язку з цим див. роботу [22]. Допустимість означає, що такі перетворення можна природним чином продовжити до подібних перетворень з матрицею G_0, таких, що всі інші її клітини (окрім P, Q) не змінюються.

Згідно простого твердження із [22] можна вважати, що

$$(P,Q) = \left(\begin{array}{cc|cc} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Таким чином отримаємо деяку канонічну форму для зображення напівгрупи $T_2 \times S_2$. Легко побачити, що отримане зображення переставно еквівалентне прямій сумі наступних зображень (з деякою кратністю):

1) $a \to 1, \quad b \to 1, \quad g \to 1;$

2) $a \to 1, \quad b \to 0, \quad g \to 1;$

3) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

5) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

6) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

7) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

8) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

$$9)\ a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Покажемо, що матричні зображення 1)–7) нерозкладні. Матриці зображення вигляду i), які відповідають елементам a, b, g, позначаємо відповідно через A_i, B_i, G_i. Зображення 1), 2) нерозкладні, бо одновимірні, зображення 3) нерозкладне, бо нерозкладна матриця A_3, зображення 4) і 5) нерозкладні, бо нерозкладні матриці G_4 і G_5.

Покажемо, що зображення 6) нерозкладне, Припустимо протилежне. Тоді (за вже доведеним) це зображення еквівалентне прямій сумі зображень вигляду 1)–5). Оскільки ранг матриці $A_6 - E$ дорівнює 1, то серед вказаних прямих доданків є зображення 3), а оскільки ранг матриці $G_6 - E$ не дорівнює 0, то серед прямих доданків є зображення 4) або 5). А із міркувань розмірностей це неможливо. Це доведення дослівно переноситься на випадок зображення 7).

Покажемо, що зображення 8) нерозкладне. Припустимо протилежне. Нехай спочатку серед прямих доданків немає зображень 6) і 7). Оскільки ранг матриці $A_8 - E$ дорівнює 1, то тоді серед вказаних прямих доданків є зображення 3), а оскільки ранг матриці $G_8 - E$ не дорівнює 0, то серед прямих доданків є зображення 4) або 5). Отже, зображення 8) еквівалентне або зображенню $3) \oplus 4)$, або зображенню $3) \oplus 5)$. Тоді ранг матриці $G - E$ для обох прямих сум дорівнює 1, в той час, як ранг матриці $G_8 - E$ дорівнює 2. Прийшли до протиріччя. Тепер нехай серед прямих доданків є зображення 6) або 7). Із міркувань розмірностей залишається варіант, коли серед прямих доданків є ще лише одне одновимірне зображення. Але ж ранг матриці $G_8 - E$ дорівнює 2, а ранг матриці $G - E$ для вказаних прямих сум дорівнює 1.

Покажемо, що зображення 9) нерозкладне. Припустимо протилежне. Нехай спочатку серед прямих доданків немає зображень 6) і 7). Оскільки ранг матриці $A_9 - E$ дорівнює 2, то є лише одна можливість: зображення 7) еквівалентне зображенню 3) $\oplus$ 3). Ранг матриці $G - E$ для вказаної прямої суми дорівнює 0, в той час, як ранг матриці $G_9 - E$ дорівнює 2. Прийшли до протиріччя. Тепер нехай серед прямих доданків є зображення 6) або 7). Ранг матриці $G_9 - E$ дорівнює 2, а ранг матриці $G - E$ для довільної доступної (з точки зору розмірностей) прямої суми дорівнювати 2 не може.

Покажемо, що зображення 1)–9) попарно нееквівалентні. Очевидно, що еквівалентними можуть бути лише зображення однакової розмірності. Зображення 1) і 2) нееквівалентні, бо матриці $B_1 - E$, $B_2 - E$ мають різні ранги. Зображення 3), 4) і 5) попарно нееквівалентні, бо матриці B_3, B_4, B_5 мають різні ранги. Зображення 6) і 7) нееквівалентні, бо матриці $A_6 - E$, $A_7 - E$ мають різні ранги. Зображення 8) і 9) нееквівалентні, бо матриці $A_8 - E$, $A_9 - E$ мають різні ранги.

Таким чином, зображення 1)–9) утворюють повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних зображень напівгрупи $T_2 \times S_2$ для $N = \{R_1, R_2, R_3\}$.

4.4. Загальний критерій

Із теорем 4.1–4.4 випливає наступний загальний критерій.

Теорема 4.6. *Пара* (T, N) *має скінченний тип тоді і лише тоді, коли* $N \cap \{R_5, R_6\} = \varnothing$.

4.5. Алгебри Ауслендера напівгрупи $T_2 \times S_2$ з R-носієм скінченного типу

Нагадаємо деякі означення.

Алгеброю Ауслендера матричної задачі скінченного типу (пов'язаної із матричними зображеннями групи, напівгрупи, алгебри, тощо) називається алгебра ендоморфізмів прямої суми всіх нерозкладних зображень (із кожного класу еквівалентності нерозкладних зображень треба взяти один представник).

Нагадаємо, що ендоморфізм матричного зображення T — це довільна матриця X, яка комутує з кожною матрицею зображення.

Очевидно, що матрична алгебра Ауслендера не залежить від вибору представників в класах еквівалентності у тому сенсі, що всі отримані таким чином алгебри будуть спряжені як підалгебри відповідної повної матричної алгебри.

Ми обчислимо матричну алгебру Ауслендера для всіх задач скінченного типу, про які сказано в теоремі 4.2.

Теорема 4.7. *Для довільного поля характеристики* 2 *матрична алгебра Ауслендера у випадку* $N = \{R_1, R_2\}$ *складається із усіх матриць вигляду*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & x_{15} & 0 \\ 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & 0 & x_{36} \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 \\ 0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{64} & 0 & x_{66} \end{pmatrix},$$

де x_{ij} *— елементи поля.*

Доведення. Розглянемо пряму суму нерозкладних зображень, вказаних у випадку $N = \{R_1, R_2\}$ (див. попередній параграф).

$$a \to A = \left(\begin{array}{cc|cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad b \to B = \left(\begin{array}{cc|cc|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$g \to G = \left(\begin{array}{cc|cc|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Нехай $X = (x_{ij}), i, j = 1, ldots, 6,$ — елемент матричної алгебри Ауслендера, тобто $AX = XA$, $BX = XB$ і $GX = XG$. Перша рівність буде тотожністю, оскільки матриця A є одиничною.

Використаємо співвідношення $BX = XB$. Отримаємо наступні рівності (тотожності $0 = 0$ не вказуємо):

Позначення рівності	Вигляд рівності
$(1.1; 1, 3)$	$0 = x_{13}$
$(1.1; 1, 4)$	$0 = x_{14}$
$(1.1; 1, 6)$	$0 = x_{16}$
$(1.1; 2, 3)$	$0 = x_{23}$
$(1.1; 2, 4)$	$0 = x_{24}$
$(1.1; 2, 6)$	$0 = x_{26}$
$(1.1; 3, 1)$	$x_{31} = 0$
$(1.1; 3, 2)$	$x_{32} = 0$

Позначення рівності	Вигляд рівності
$(1.1; 3, 3)$	$x_{33} = x_{33}$
$(1.1; 3, 4)$	$x_{34} = x_{34}$
$(1.1; 3, 5)$	$x_{35} = 0$
$(1.1; 3, 6)$	$x_{36} = x_{36}$
$(1.1; 4, 1)$	$x_{41} = 0$
$(1.1; 4, 2)$	$x_{42} = 0$
$(1.1; 4, 3)$	$x_{43} = x_{43}$
$(1.1; 4, 4)$	$x_{44} = x_{44}$
$(1.1; 4, 5)$	$x_{45} = 0$
$(1.1; 4, 6)$	$x_{46} = x_{46}$
$(1.1; 5, 3)$	$0 = x_{53}$
$(1.1; 5, 4)$	$0 = x_{54}$
$(1.1; 5, 6)$	$0 = x_{56}$
$(1.1; 6, 1)$	$x_{61} = 0$
$(1.1; 6, 2)$	$x_{62} = 0$
$(1.1; 6, 3)$	$x_{63} = x_{63}$
$(1.1; 6, 4)$	$x_{64} = x_{64}$
$(1.1; 6, 5)$	$x_{65} = 0$
$(1.1; 6, 6)$	$x_{66} = x_{66}$

Враховуючи вже отримані рівності, використаємо тепер співвідношення $GX = XG$, записане в еквівалентній формі як $(G+E)X = X(G+E)$.

Отримаємо наступні рівності (тотожності $0 = 0$ не вказуємо):

Позначення рівності	Вигляд рівності
$(1.2; 1, 1)$	$x_{21} = 0$
$(1.2; 1, 2)$	$x_{22} = x_{11}$
$(1.2; 1, 5)$	$x_{25} = 0$

Позначення рівності	Вигляд рівності
$(1.2;2,2)$	$0=x_{21}$
$(1.2;3,3)$	$x_{43}=0$
$(1.2;3,4)$	$x_{44}=x_{33}$
$(1.2;3,6)$	$x_{46}=0$
$(1.2;4,4)$	$0=x_{43}$
$(1.2;5,2)$	$0=x_{51}$
$(1.2;6,4)$	$0=x_{63}$

Отже, відповідна матрична алгебра Ауслендера складається з усіх матриць, вказаних в умові теореми. □

Теорема 4.8. *Для довільного поля характеристики* 2 *матрична алгебра Ауслендера у випадку* $N=\{R_1,R_3\}$ *складається із усіх матриць вигляду*

$$X=\begin{pmatrix}
x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & x_{15} & 0 & x_{17} & x_{18} & 0 & x_{1\,10} & x_{1\,11} & x_{1\,12}\\
0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} & 0 & 0 & 0 & x_{1\,10} & 0\\
0 & 0 & x_{11} & x_{12} & 0 & x_{15} & 0 & 0 & x_{18} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} & 0 & x_{57} & x_{58} & 0 & x_{5\,10} & x_{5\,11} & x_{5\,12}\\
0 & 0 & 0 & x_{52} & 0 & x_{55} & 0 & 0 & x_{58} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55} & 0 & 0 & 0 & x_{5\,10} & 0\\
0 & x_{82} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{87} & x_{88} & 0 & 0 & x_{8\,11} & x_{8\,12}\\
0 & 0 & 0 & x_{82} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{88} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10\,7} & 0 & 0 & x_{10\,10} & x_{10\,11} & x_{10\,12}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10\,10} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{12\,7} & 0 & 0 & 0 & x_{12\,11} & x_{12\,12}
\end{pmatrix},$$

де x_{ij} — *елементи поля.*

Доведення. Розглянемо пряму суму нерозкладних зображень, вказаних у випадку $N = \{R_1, R_3\}$ (див. попередній параграф).

$$a \to A_0 = \left(\begin{array}{cccc|ccc|cc|cc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right),$$

$$b \to B_0 = \left(\begin{array}{cccc|ccc|cc|cc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right).$$

$$
g \to G_0 = \left(\begin{array}{cccc|ccc|cc|cc|c}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right).
$$

Далі доведення проводиться по тій же схемі, що і доведення теореми 4.7.

Із матричної рівності $BX = XB$ випливає, що

$$
X = \begin{pmatrix}
x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & x_{15} & 0 & x_{17} & x_{18} & 0 & x_{1\,10} & x_{1\,11} & x_{1\,12} \\
x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & x_{25} & 0 & x_{27} & x_{28} & 0 & x_{2\,10} & x_{2\,11} & x_{2\,12} \\
0 & 0 & x_{33} & x_{34} & 0 & x_{36} & 0 & 0 & x_{39} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_{43} & x_{44} & 0 & x_{46} & 0 & 0 & x_{49} & 0 & 0 & 0 \\
x_{51} & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} & 0 & x_{57} & x_{58} & 0 & x_{5\,10} & x_{5\,11} & x_{5\,12} \\
0 & 0 & x_{63} & x_{64} & 0 & x_{66} & 0 & 0 & x_{69} & 0 & 0 & 0 \\
x_{71} & x_{72} & 0 & 0 & x_{75} & 0 & x_{77} & x_{78} & 0 & x_{7\,10} & x_{7\,11} & x_{7\,12} \\
x_{81} & x_{82} & 0 & 0 & x_{85} & 0 & x_{87} & x_{88} & 0 & x_{8\,10} & x_{8\,11} & x_{8\,12} \\
0 & 0 & x_{93} & x_{94} & 0 & x_{96} & 0 & 0 & x_{99} & 0 & 0 & 0 \\
x_{10\,1} & x_{10\,2} & 0 & 0 & x_{10\,5} & 0 & x_{10\,7} & x_{10\,8} & 0 & x_{10\,10} & x_{10\,11} & x_{10\,12} \\
x_{11\,1} & x_{11\,2} & 0 & 0 & x_{11\,5} & 0 & x_{11\,7} & x_{11\,8} & 0 & x_{11\,10} & x_{11\,11} & x_{11\,12} \\
x_{12\,1} & x_{12\,2} & 0 & 0 & x_{12\,5} & 0 & x_{12\,7} & x_{12\,8} & 0 & x_{12\,10} & x_{12\,11} & x_{12\,12}
\end{pmatrix},
$$

а тоді із матричної рівності $BX = XB$ маємо:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & x_{15} & 0 & x_{17} & x_{18} & 0 & x_{1\,10} & x_{1\,11} & x_{1\,12} \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & x_{25} & 0 & x_{27} & x_{28} & 0 & x_{2\,10} & x_{2\,11} & x_{2\,12} \\ 0 & 0 & x_{11} & x_{12} & 0 & x_{15} & 0 & 0 & x_{18} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{21} & x_{22} & 0 & x_{25} & 0 & 0 & x_{28} & 0 & 0 & 0 \\ x_{51} & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} & 0 & x_{57} & x_{58} & 0 & x_{5\,10} & x_{5\,11} & x_{5\,12} \\ 0 & 0 & x_{51} & x_{52} & 0 & x_{55} & 0 & 0 & x_{58} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{77} & 0 & 0 & x_{7\,10} & x_{7\,11} & x_{7\,12} \\ x_{81} & x_{82} & 0 & 0 & x_{85} & 0 & x_{87} & x_{88} & 0 & x_{8\,10} & x_{8\,11} & x_{8\,12} \\ 0 & 0 & x_{81} & x_{82} & 0 & x_{85} & 0 & 0 & x_{88} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10\,7} & 0 & 0 & x_{10\,10} & x_{10\,11} & x_{10\,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{11\,7} & 0 & 0 & x_{11\,10} & x_{11\,11} & x_{11\,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{12\,7} & 0 & 0 & x_{12\,10} & x_{12\,11} & x_{12\,12} \end{pmatrix}.$$

Нарешті із $GX = XG$ маємо

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & x_{15} & 0 & x_{17} & x_{18} & 0 & x_{1\,10} & x_{1\,11} & x_{1\,12} \\ 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} & 0 & 0 & 0 & x_{1\,10} & 0 \\ 0 & 0 & x_{11} & x_{12} & 0 & x_{15} & 0 & 0 & x_{18} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} & 0 & x_{57} & x_{58} & 0 & x_{5\,10} & x_{5\,11} & x_{5\,12} \\ 0 & 0 & 0 & x_{52} & 0 & x_{55} & 0 & 0 & x_{58} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55} & 0 & 0 & 0 & x_{5\,10} & 0 \\ 0 & x_{82} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{87} & x_{88} & 0 & 0 & x_{8\,11} & x_{8\,12} \\ 0 & 0 & 0 & x_{82} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{88} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10\,7} & 0 & 0 & x_{10\,10} & x_{10\,11} & x_{10\,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10\,10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{12\,7} & 0 & 0 & 0 & x_{12\,11} & x_{12\,12} \end{pmatrix},$$

що і треба було довести. $\square$

Теорема 4.9. *Для довільного поля характеристики 2 матрична алгебра Ауслендера у випадку $N = \{R_2, R_3\}$ складається із усіх матриць вигляду*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & x_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{1\,10} & 0 & 0 \\ 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{11} & x_{12} & 0 & x_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{1\,10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{52} & 0 & x_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{52} & x_{74} & 0 & x_{76} & x_{55} & 0 & x_{79} & 0 & x_{7\,11} & x_{7\,12} \\ 0 & 0 & x_{83} & x_{84} & 0 & x_{86} & x_{87} & x_{88} & x_{89} & 0 & x_{8\,11} & x_{8\,12} \\ 0 & 0 & 0 & x_{83} & 0 & x_{87} & 0 & 0 & x_{88} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{10\,2} & 0 & 0 & x_{10\,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10\,10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{10\,2} & 0 & x_{10\,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10\,10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{12\,4} & 0 & x_{12\,6} & 0 & 0 & x_{12\,9} & 0 & x_{12\,11} & x_{12\,12} \end{pmatrix}.$$

де x_{ij} — елементи поля.

Доведення. Розглянемо пряму суму нерозкладних зображень, вказаних у випадку $N = \{R_2, R_3\}$ (див. попередній параграф).

$$a \to A_0 = \left(\begin{array}{cccc|ccc|cc|cc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$b \to B_0 = \left(\begin{array}{cccc|ccc|cc|cc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right),$$

$$g \to G_0 = \left(\begin{array}{cccc|ccc|cc|cc|c}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right).$$

Далі доведення проводиться по тій же схемі, що і доведення теореми 4.7.

Із матричної рівності $BX = XB$ випливає, що

$$X = \begin{pmatrix}
x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & x_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{1\,10} & 0 & 0 \\
x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & x_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{2\,10} & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_{33} & x_{34} & 0 & x_{36} & x_{37} & x_{38} & x_{39} & 0 & x_{3\,11} & x_{3\,12} \\
0 & 0 & x_{43} & x_{44} & 0 & x_{46} & x_{47} & x_{48} & x_{49} & 0 & x_{4\,11} & x_{4\,12} \\
x_{51} & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{5\,10} & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_{63} & x_{64} & 0 & x_{66} & x_{67} & x_{68} & x_{69} & 0 & x_{6\,11} & x_{6\,12} \\
0 & 0 & x_{73} & x_{74} & 0 & x_{76} & x_{77} & x_{78} & x_{79} & 0 & x_{7\,11} & x_{7\,12} \\
0 & 0 & x_{83} & x_{84} & 0 & x_{86} & x_{87} & x_{88} & x_{89} & 0 & x_{8\,11} & x_{8\,12} \\
0 & 0 & x_{93} & x_{94} & 0 & x_{96} & x_{97} & x_{98} & x_{99} & 0 & x_{9\,11} & x_{9\,12} \\
x_{10\,1} & x_{10\,2} & 0 & 0 & x_{10\,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10\,10} & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_{11\,3} & x_{11\,4} & 0 & x_{11\,6} & x_{11\,7} & x_{11\,8} & x_{11\,9} & 0 & x_{11\,11} & x_{11\,12} \\
0 & 0 & x_{12\,3} & x_{12\,4} & 0 & x_{12\,6} & x_{12\,7} & x_{12\,8} & x_{12\,9} & 0 & x_{12\,11} & x_{12\,12}
\end{pmatrix},$$

а тоді із матричної рівності $AX = XA$ маємо:

$$X = \begin{pmatrix}
x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & x_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{1\,10} & 0 & 0 \\
x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & x_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{2\,10} & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_{11} & x_{12} & 0 & x_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{1\,10} & 0 \\
0 & 0 & x_{21} & x_{22} & 0 & x_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{2\,10} & 0 \\
x_{51} & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{5\,10} & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_{51} & x_{52} & 0 & x_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{5\,10} & 0 \\
0 & 0 & x_{73} & x_{74} & 0 & x_{76} & x_{77} & x_{78} & x_{79} & 0 & x_{7\,11} & x_{7\,12} \\
0 & 0 & x_{83} & x_{84} & 0 & x_{86} & x_{87} & x_{88} & x_{89} & 0 & x_{8\,11} & x_{8\,12} \\
0 & 0 & x_{93} & x_{94} & 0 & x_{96} & x_{97} & x_{98} & x_{99} & 0 & x_{9\,11} & x_{9\,12} \\
x_{10\,1} & x_{10\,2} & 0 & 0 & x_{10\,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10\,10} & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_{10\,1} & x_{10\,2} & 0 & x_{10\,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10\,10} & 0 \\
0 & 0 & x_{12\,3} & x_{12\,4} & 0 & x_{12\,6} & x_{12\,7} & x_{12\,8} & x_{12\,9} & 0 & x_{12\,11} & x_{12\,12}
\end{pmatrix}.$$

Нарешті використовуємо рівність $GX = XG$.

Отже, відповідна матрична алгебра Ауслендера складається з усіх матриць вигляду:

$$X = \begin{pmatrix}
x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & x_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{1\,10} & 0 & 0 \\
0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_{11} & x_{12} & 0 & x_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{1\,10} & 0 \\
0 & 0 & 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x_{52} & 0 & x_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_{52} & x_{74} & 0 & x_{76} & x_{55} & 0 & x_{79} & 0 & x_{7\,11} & x_{7\,12} \\
0 & 0 & x_{83} & x_{84} & 0 & x_{86} & x_{87} & x_{88} & x_{89} & 0 & x_{8\,11} & x_{8\,12} \\
0 & 0 & 0 & x_{83} & 0 & x_{87} & 0 & 0 & x_{88} & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_{10\,2} & 0 & 0 & x_{10\,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10\,10} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x_{10\,2} & 0 & x_{10\,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10\,10} & 0 \\
0 & 0 & 0 & x_{12\,4} & 0 & x_{12\,6} & 0 & 0 & x_{12\,9} & 0 & x_{12\,11} & x_{12\,12}
\end{pmatrix},$$

що і треба було довести. □

4.6. Висновки до розділу

У цьому розділі вивчаються модулярні зображення прямого добутку симетричної напівгрупи степеня 2 і симетричної групи степеня 2 з довільним фіксованим R-носієм (відносно напівгрупи T_2). Описано всі R-носії довільного порядку, для яких відповідна задача про опис модулярних зображень має скінченний тип; в кожному з таких випадків описано всі (з точністю до еквівалентності) нерозкладні зображення. У випадку R-носіїв порядку $m < 4$ із задачею скінченного типу обчислено відповідні алгебри Ауслендера.

Результати цього розділу опубліковані в роботах [46], [51], [53], [54], [56].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вивченню матричних зображень симетричних напівгруп та їх прямих добутків над полем K.

Описана канонічна форма модулярних зображень симетричної напівгрупи другого степеня і категорія модулярних нерозкладних зображень симетричної напівгрупи другого степеня (а саме описані всі, з точністю до еквівалентності, нерозкладні зображення та відповідна алгебра Ауслендера).

Описані абсолютно і сильно нерозкладні (немодулярні та модулярні) матричні зображення прямого добутку довільного числа симетричних напівгруп другого степеня; обчислено число класів еквівалентності таких зображень над скінченним полем. Отримано критерій ручності відносно модулярних зображень прямого добутку симетричних напівгруп і груп степенів 2.

Вивчаються модулярні зображення прямого добутку симетричної напівгрупи степеня 2 і симетричної групи степеня 2 з довільним фіксованим R-носієм (відносно напівгрупи T_2). Описано всі R-носії довільного порядку, для яких відповідна задача про опис модулярних зображень має скінченний тип; в кожному з таких випадків описано всі (з точністю до еквівалентності) нерозкладні зображення. У випадку R-носіїв порядку $m < 4$ із задачею скінченного типу обчислено відповідні алгебри Ауслендера.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах / Ю. А. Дрозд // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104-114.

2. Бондаренко В. М. Представленческий тип конечных групп / В. М. Бондаренко, Ю. А. Дрозд // Модули и представления: Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1977. – **71**. – С. 24-41.

3. Башев В. А. Представления группы $Z_2 \times Z_2$ в поле характеристики 2 / В. А. Башев // Докл. АН СССР. – 1961. – **141**, вып. 5. – С. 1015-1018.

4. Бондаренко В. М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 / В. М. Бондаренко // Мат. сб. – 1975. – **96**, вып. 1. – С. 63-74.

5. Бондаренко В. М. Представления связок полуцепных множеств и их приложения / В. М. Бондаренко // Алгебра и анализ. – 1991. – **3**, вып. 5. – С. 38-61.

6. Бондаренко В. М. Про класифікацію модулярних зображень узагальнених груп кватерніонів / В. М. Бондаренко // Доповіді НАН України. – 2004. – № 12. – С. 3-9.

7. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. – Т. 1 – Москва: “Мир”, 1972. – 285 с.

8. Okninski J. Linear representations of semigroups. – World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.

9. Понизовский И. С. О конечности типа полугрупповой алгебры конечной вполне простой полугруппы / И. С. Понизовский // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 154-163.

10. Понизовский И. С. Некоторые примеры полугрупповых алгебр конечного типа / И. С. Понизовский // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1987. – **160**. – С. 229–238.

11. Ringel C. The representation type of the full transformation semigroup T_4 / C. Ringel // Semigroup Forum. – 2000. – № 3. – P. 429-434.

12. Гельфанд И. М. Неразложимые представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, В. А. Пономарьов // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, вып. 2. – С. 3-60.

13. Назарова Л. А. Применение модулей над диадой для классификации конечных p-групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p, и пар взаимно аннулирующих операторов / Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, В. В. Сергейчук, В. М. Бондаренко // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 69-92.

14. Ringel C. The indecomposable representations of dihedral 2-groups / C. Ringel // Math. Ann. – 1975. – **214**, № 1. – P. 19-34.

15. Бондаренко В. М. О бесконечности типа бесконечных полугрупп, порожденных идемпотентами с частичным нулевым умножением / В. М. Бондаренко, Е. Н. Тертичная // Проблеми топології та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 3. – С. 23-44.

16. Бондаренко В. М., Тертичная Е. Н. О полугруппах, порожденных идемпотентами с частичным нулевым умножением / В. М. Бондаренко, Е. Н. Тертичная // Комплексний аналіз і течії з вільними границями : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 4. – С. 294-298.

17. Bondarenko, V. M., Tertychna O. M. On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication / V. M. Bondarenko, O. M. Tertychna // Algebra Discrete Math. – 2008. – № 4. – P. 15-22.

18. Дяченко С. М. Напівгрупи Рісса над циклічною групою третього порядку ручного нескінченного зображувального типу / С. М. Дяченко // Наукові записки НаУКМА (Фізико-математичні науки). – 2012. – **126**. – С. 3–6.

19. Дяченко С. М. Напівгрупи Рісса над циклічною групою четвертого порядку скінченного зображувального типу / С. М. Дяченко // Наукові записки НаУКМА (Фізико-математичні науки). – 2014. – **152**. – С. 27-31.

20. Дяченко С. М. Напівгрупи Рісса над циклічною групою простого порядку скінченного зображувального типу / С. М. Дяченко // Наукові записки НаУКМА (Фізико-математичні науки). – 2016. – **178**. – С. 23-26.

21. Gabriel P. Unzerlegbure Darstellungen, I / Pier Gabriel // Manus. Math. – 1972. – Vol. **6**, №1. – P. 71-103.

22. Назарова Л. А. Представления частично упорядоченных множеств / Л. А. Назарова, А. В. Ройтер // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1972. – Т. **28**. – С. 5-31.

23. Клейнер М. М. Частично упорядоченные множества конечного типа / М. М. Клейнер // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1972. – Т. **28**. – С. 32-41.

24. Клейнер М. М. О точных представлениях частично упорядоченных множеств конечного типа / М. М. Клейнер // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1972. – Т. **28**. – С. 42-59.

25. Дрозд Ю. А. Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств / Ю. А. Дрозд // Функц. анализ и его прил. – 1974. – Т. **8**. – С. 34-42.

26. Dlab V. On algebras of finite representation type / V. Dlab, C. Ringel // J. Algebra. – 1975. – **33**. – P. 306-394.

27. Завадский А. Г. Коммутативные колчаны и матричные алгебры конечного типа / А. Г. Завадский, А. С. Шкабара // Киев: Ин-т математики АН УССР. – Препр. – 1976. – № 3. – 52 с.

28. Шкабара А. С. Коммутативные колчаны ручного типа. / А. С. Шкабара // Киев: 1978. – 32 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 78.42).

29. Leszczynski Z. On triangular matrix rings of finite representation type / Z. Leszczynski, D. Simson // .J. London Math. Soc. (2). – 1979. – **20**, no. 3. – P. 396-402.

30. Назарова Л. А. Конечнопредставимые диадические множества / Л. А. Назарова, А. В. Ройтер // Укр. матем. журнал. – 2000. – **52**, №10. – С. 1363-1396.

31. Yamagata K. On algebras whose trivial extensions are of finite representation type. Representations of algebras (Puebla, 1980), pp. 364-371, Lecture Notes in Math., 903, Springer, Berlin-New York, 1981.

32. Bautista R. Classification of certain algebras of finite representation type / R. Bautista // An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autonoma Mexico. – 1982. – **22**. – P. 1-82..

33. Assem I. Gradings of B_n and C_n of finite representation type / I. Assem, O. Roldan // Trans. Amer. Math. Soc. – 1983. – **279**, no. 2. – P. 589-609.

34. Skowronski A. On triangular matrix rings of finite representation type / A. Skowronski // Bull. Polish Acad. Sci. Math. – 1983. – **31**, no. 5-8. – P. 227-233.

35. Bongartz K. A criterion for finite representation type / K. Bongartz // Math. Ann. – 1984. – **269**, no. 1. – P. 1-12.

36. Yamagata K. On algebras whose trivial extensions are of finite representation type. II / K. Yamagata // J. London Math. Soc. (2). – 1985. – **32**, no. 2. – P. 203-216.

37. Igusa K. Auslander algebras of finite representation type / K. Igusa, M. Platzeck, G. Todorov, D. Zacharia // Comm. Algebra – 1987. – **15**, no. 1-2. – P. 377-424.

38. Sato M. $QF-3$ algebras of finite representation type / M. Sato // J. Algebra. – 1995. – **177**, no. 1. – P. 186-198.

39. Farnsteiner R. On cocommutative Hopf algebras of finite representation type / R. Farnsteiner, D. Voigt // Adv. Math. – 2000. – **155**, no. 1, – P. 1-22.

40. Buan A. Cluster-tilted algebras of finite representation type / A. Buan, R. Marsh, I. Reiten // J. Algebra. – 2006. – **306**, no. 2. – P. 412-431.

41. Zhu X. The $N = 1$ quivers of types A_n and D_n have finite representation type / X. Zhu // Linear Algebra Appl. – 2008. – **428**, no. 4. – P. 919-929.

42. Fu Q. Finite representation type of infinitesimal q-Schur algebras / Q. Fu // Pacific J. Math. – 2008. – **237**, no. 1. – P. 57-76.

43. Liu G. Super cocommutative Hopf algebras of finite representation type / G. Liu // J. Algebra. – 2012. – **358**. – P. 128-142.

44. Blaszkiewicz M. On self-injective algebras of finite representation type / M. Blaszkiewicz, A. Skowronski // Colloq. Math. – 2012. – **127**, no. 1. – P. 111-126.

45. Arnold D. The class of $(1, 3)$-groups with a homocyclic regulator quotient of exponent p5 is of finite representation type / D. Arnold, A. Mader, O. Mutzbauer, E. Solak // Bull. Hellenic Math. Soc. – 2017. – **61**. – P. 55-72.

46. Бондаренко В. М. Модулярні зображення напівгрупи T_2 / В. М. Бондаренко, Е. М. Костишин // Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2011. – вип. 22, №1. – С. 26-34.

47. Костишин Э. М. Об абсолютно неразложимых немодулярных матричных представлениях полугрупп $T_2 \times T_2 \times \ldots \times T_2$ / Э. М. Костишин // Вісник Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка (серія: фізико-математичні науки). – 2011. – вип. 3. – С. 37-39.

48. Bondarenko V. M. On modular representations of semigroups $S_p \times T_p$ / V. M. Bondarenko, E. M. Kostyshyn // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – vol. 16, no. 1. – P. 16-19.

49. Костишин Е. М. Сильно нерозкладні матричні зображення для одного класу напівгруп / Е. М. Костишин, О. М. Тертична // Наукові записки НАУКМА (фізико-математичні науки). – 2013. – т. 139. – С. 14-17.

50. Костишин Е. М. Алгебра Ауслендера для напівгрупи всіх перетворень двоелементної множини / Е. М. Костишин // Науковий вісник Ужго-

родського ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2017. – вип. 30, №1. – С. 53-60.

51. Бондаренко В. М. Модулярні зображення з додатковими умовами напівгрупи $T_2 \times S_2$ / В. М. Бондаренко, Е. М. Костишин // Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2017. – вип. 31, №2. – С. 28-38.

52. Kostyshyn E. M. Matrix representations of small semigroups / E. M. Kostyshyn // 8th International Algebraic Conference in Ukraine: Lugansk, July 5-12, 2011: Book of abstracts. – Lugansk, 2011. – P. 168.

53. Костишин Е. М. Матричні зображення напівгрупи всіх перетворень множини із 2-х елементів над полем характеристики 2 / Е. М. Костишин // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука: Київ, 19-21 квітня 2012: Матеріали конференції II (Алгебра. Геометрія. Математичний та чисельний аналіз). – Київ, 2012. – С. 143.

54. Kostyshyn E. M. On tame and wild cases for matrix representations of the semigroup / E. M. Kostyshyn // 9th International Algebraic Conference in Ukraine: L'viv, July 8-13, 2013: Book of Abstracts. – L'viv, 2013. – P. 94.

55. Kostyshyn E. M. On strongly indecomposable modular representations of the semigroups $T_2 \times T_2 \times \ldots \times T_2$ / E. M. Kostyshyn // International Algebraic Conference dedicated to 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin: Kyiv, July 7-12, 2014: Book of Abstracts. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2014. – P. 47.

56. Kostyshyn E. M. On indecomposable modular matrix representations of the semigroups $T_2 \times T_2 \times \ldots \times T_2$ / E. M. Kostyshyn // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of

Yu. A. Drozd: Odessa, August 20-27, 2015: abstracts. – Odessa, 2015. – P. 54.

57. Kostyshyn E. M. On Auslander algebra of the symmetric semigroup of degree 2 / E. M. Kostyshyn // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko: Kyiv, July 3-7, 2017: Abstracts. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017. – P. 61.

58. Бондаренко В. М. Зображення гельфандових графів / В. М. Бондаренко // Видавництво Ін-ту математики НАН України. – 2005. – 228 с.

59. Клейнер М. М., Ройтер А. В. Представления дифференциальных градуированных категорий // Матричные задачи. - Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 5–70.

60. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. – М.: Из-во технико- теорет. литературы, 1956. – 340 с.

61. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. – М.: Наука,1984. – 416 с.

62. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука. – 1966, 576 с.

63. Дрозд Ю. А. Ручные и дикие матричные задачи // Представления и квадратичные формы. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1979. – С. 39–74.

64. Назарова Л. А. Представления колчанов бесконечного типа / Л. А. Назарова // Изв. АН СССР. – 1973. – Т. **37**, №4. – С. 752-791.

65. Donovan P. The representation theory of finite graphs and assosiated algebras / P. Donovan, M. R. Freislich // Carleton Lecture Notes. – 1973. – № 5. – P. 3-86.

66. MacLane S. An algebra of additive relations// Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1961. – Vol. 47. – P. 1043 – 1051.

67. Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. Москва: "Мир", 1972. – 259 с.

68. Gabriel P., Roiter A. V. Representations of finite-dimensional algebras, Algebra – 8, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., 73, VINITI, Moscow, 2003, 224 p.

69. Тертична О. М. Матричні зображення напівгруп, породжених ідемпотентами з частковим нульовим множенням. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2009.

70. Бондаренко В. М. Σ-функція числа параметрів для системи матричних зображень / В. М. Бондаренко, О. В. Зубарук // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – том. **12**, №3. – С. 56-64.

71. .Дяченко С. М. Зображення напівгрупи $T_2 \times T_2$ над полем характеристики два / С. М. Дяченко // Наукові записки НаУКМА, серія фізика та математика. – 2009. – №5. – С. 9–12.

72. Зубарук О. В. Про Алгебру Ауслендера однієї напівгрупи, породженої двома потентними елементами / О. В. Зубарук // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (серія 1. Фізико-математичні науки). – 2014, № 16. – С. 73-81.

ДОДАТОК

Список публікацій за темою дисертації

Праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Бондаренко В. М. Модулярні зображення напівгрупи T_2 / В. М. Бондаренко, Е. М. Костишин // Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2011. – вип. 22, №1. – С. 26-34.

2. Костишин Э. М. Об абсолютно неразложимых немодулярных матричных представлениях полугрупп $T_2 \times T_2 \times \ldots \times T_2$ / Э. М. Костишин // Вісник Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка (серія: фізико-математичні науки). – 2011. – вип. 3. – С. 37-39.

3. Bondarenko V. M. On modular representations of semigroups $S_p \times T_p$ / V. M. Bondarenko, E. M. Kostyshyn // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – vol. 16, no. 1. – P. 16-19.

4. Костишин Е. М. Сильно нерозкладні матричні зображення для одного класу напівгруп / Е. М. Костишин, О. М. Тертична // Наукові записки НАУКМА (фізико-математичні науки). – 2013. – т. 139. – С. 14-17.

5. Костишин Е. М. Алгебра Ауслендера для напівгрупи всіх перетворень двоелементної множини / Е. М. Костишин // Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2017. – вип. 30, №1. – С. 53-60.

6. Бондаренко В. М. Модулярні зображення з додатковими умовами напівгрупи $T_2 \times S_2$ / В. М. Бондаренко, Е. М. Костишин // Науковий

вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2017. – вип. 31, №2. – С. 28-38.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Kostyshyn E. M. Matrix representations of small semigroups / E. M. Kostyshyn // 8th International Algebraic Conference in Ukraine: Lugansk, July 5-12, 2011: Book of abstracts. – Lugansk, 2011. – P. 168.

2. Костишин Е. М. Матричні зображення напівгрупи всіх перетворень множини із 2-х елементів над полем характеристики 2 / Е. М. Костишин // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука: Київ, 19-21 квітня 2012: Матеріали конференції II (Алгебра. Геометрія. Математичний та чисельний аналіз). – Київ, 2012. – С. 143.

3. Kostyshyn E. M. On tame and wild cases for matrix representations of the semigroup / E. M. Kostyshyn // 9th International Algebraic Conference in Ukraine: L'viv, July 8-13, 2013: Book of Abstracts. – L'viv, 2013. – P. 94.

4. Kostyshyn E. M. On strongly indecomposable modular representations of the semigroups $T_2 \times T_2 \times \ldots \times T_2$ / E. M. Kostyshyn // International Algebraic Conference dedicated to 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin: Kyiv, July 7-12, 2014: Book of Abstracts. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2014. – P. 47.

5. Kostyshyn E. M. On indecomposable modular matrix representations of the semigroups $T_2 \times T_2 \times \ldots \times T_2$ / E. M. Kostyshyn // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd: Odessa, August 20-27, 2015: abstracts. – Odessa, 2015. – P. 54.

6. Kostyshyn E. M. On Auslander algebra of the symmetric semigroup of degree 2 / E. M. Kostyshyn // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko: Kyiv, July 3-7, 2017: Abstracts. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017. – P. 61.