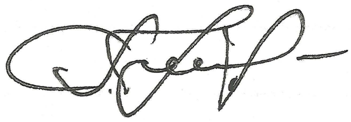
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ДМИТРИШИН Роман Іванович



УДК 517.5

ДЕЯКІ КЛАСИ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ І КРАТНІ СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2019

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано у ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника” Міністерства освіти і науки України.

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук, професор
Боднар Дмитро Ількович,
Тернопільський національний економічний університет,
професор кафедри економічної кібернетики та інформатики.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Голуб Анатолій Петрович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу обчислювальної математики;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Парфінович Наталія Вікторівна,
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
завідувач кафедри математичного аналізу і теорії функцій;

доктор фізико-математичних наук, професор
Чижиков Ігор Ельбертович,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
професор кафедри теорії функцій і теорії ймовірностей.

Захист відбудеться 11 червня 2019 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

Автореферат розісланий 3 травня 2019 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Романюк А. С.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В аналітичній теорії неперервних дробів одним із найрозвинутіших є напрям, пов'язаний із наближенням аналітичних функцій однієї змінної неперервними дробами. Дослідження у цьому напрямку постійно проводяться протягом останніх двох століть і тісно пов'язані із іншими важливими теоріями, зокрема, апроксимацій Паде, ортогональних поліномів, діофантових рівнянь, диференціальних рівнянь. Перші результати щодо зображення аналітичних функцій однієї змінної неперервними дробами отримані Йо. Х. Ламбертом, Ж. Лагранжем, Л. Ойлером і К. Ф. Гаусом. Потім ці дослідження продовжувалися і розвивалися в роботах Ч. Гуттона, М. А. Штерна, Йо. Б. Х. Хейлерманна, Х. Ханкеля, Т. Мура, Ґ. Фробеніуса, Т. Йо. Стільтьєса, О. Перрона, Г. С. Волла, В. Б. Джоунса, В. Йо. Трона та ін.

Побудова раціональних наближень ґрунтується на принципі відповідності між підхідними дробами неперервного дробу і формальним рядом Лорана, яким зображується задана аналітична функція однієї змінної. Хоча основні ідеї відповідності належать К. Ф. Гаусу, загальна теорія описана в роботах В. Б. Джоунса і В. Йо. Трона.

У 60-х роках XX століття для побудови раціональних наближень аналітичних функцій багатьох змінних В. Я. Скоробогатько запропонував багатовимірне узагальнення неперервних дробів — гіллясті ланцюгові дроби. Позаяк задача побудови гіллястих ланцюгових дробів, відповідних до заданих формальних кратних степеневих рядів, не має однозначного розв'язку, то використовуються два підходи: накладання додаткових умов на елементи гіллястого ланцюгового дробу або модифікація структури гіллястого ланцюгового дробу. Реалізація другого підходу сприяла появі різних конструкцій так званих "двовимірних неперервних дробів", які стали об'єктами досліджень в роботах Х. Й. Кучмінської, М. О'Доногое, Дж. Мерфі, Б. Вердонк, А. Кайт, В. Семашка, О. М. Сусь, Т. М. Антонової та ін. Проте конструкції цих гіллястих ланцюгових дробів із збільшенням числа змінних значно ускладнені.

У 1976 році Д. І. Боднаром уведено до розгляду гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними, які за структурою є аналогами кратних степеневих рядів. Першим результатом їх дослідження є необхідні і достатні умови збіжності (двовимірний аналог ознаки збіжності Зайделя – Штерна) для гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними із додатними елементами. Потім ці дослідження продовжувалися і розвивалися в роботах Д. І. Боднара, Х. Й. Кучмінської, В. Семашка, Т. М. Антонової, О. Є. Баран, М. М. Бубняк та ін.

У роботах Д. І. Боднара і О. Є. Баран побудовано алгоритми розвинення заданого формального кратного степеневого ряду у відповідні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними. Застосування гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними до задач інтерполяції функцій двох змінних розглянуто у роботах Х. Й. Кучмінської, а у загальному випадку — О. Є. Баран.

Незважаючи на значні досягнення у напрямі наближення аналітичних функцій багатьох змінних гіллястими ланцюговими дробами, ця тематика залишається однією із найважливіших в аналітичній теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів і такою, що має ще дуже багато відкритих задач, особливо щодо випадку трьох і більше змінних.

Однією з центральних задач є встановлення ознак збіжності для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними. На даний час існує досить багато теорем, які містять лише достатні умови або дуже громіздкі умови, що ускладнює їх застосування. Тому пошук ефективних ознак збіжності складає великий науковий інтерес.

Особливої уваги потребує опис загальної теорії відповідності, а разом із ним і задачі класифікації функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними та дослідження їх властивостей відповідності.

Добре відомо, що у порівнянні із степеневими рядами, функціональні неперервні дроби можуть мати ширші області збіжності й кращу швидкість збіжності. Ці властивості притаманні також і функціональним гіллястим ланцюговим дробам з нерівнозначними змінними. Тому встановлення найширших областей збіжності і знаходження оцінок похибок наближень для функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними є важливою науковою задачею.

З огляду на малу кількість робіт щодо застосувань гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, побудова ефективних алгоритмів розвинення заданих формальних кратних степеневих рядів у функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними із явними формулами обчислення коефіцієнтів функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними за коефіцієнтами заданих формальних кратних степеневих рядів і, як наслідок, побудова зображень аналітичних функцій багатьох змінних, які виникають у прикладних задачах математики, фізики та інженерії, функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними викликають безумовний науковий інтерес.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження виконувались у рамках науково-дослідних держбюджетних тем "Розробка аналітичних методів у нескінченновимірному комплексному аналізі та теорії операторів" (номер державної реєстрації 0113U000184) і "Проблеми нелінійного аналізу щодо продовження відображень, які належать до різних функціональних класів на топологічних і топологічних векторних просторах" (номер державної реєстрації 0118U000097) кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника".

Мета і задачі дослідження. Метою дослідження є означення деяких класів функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, встановлення умов їх збіжності та оцінок похибок наближень для них, побудова алгоритмів розвинення заданих формальних кратних степеневих рядів у функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними та застосування цих гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними до наближення деяких аналітичних функцій багатьох змінних.

Об'єктом дослідження є функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними.

Предметом дослідження є властивості та ознаки збіжності функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, відповідність між ними і формальними кратними степеневими рядами, алгоритми побудови функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними та наближення ними аналітичних функцій багатьох змінних.

Задачі дослідження:

— встановити багатовимірне узагальнення ознаки збіжності Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними;

— встановити ознаки збіжності для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні ланки яких мають вигляд $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$, а також вигляд $\frac{q_{i(k)}^{i_k}q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$;

— описати загальну теорію відповідності для послідовностей функцій багатьох змінних $\{R_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, мероморфних в точці $\mathbf{z}=\mathbf{0}$ (тобто у відкритому полікрузі, який містить початок координат), де $R_n(\mathbf{z})$ — функція багатьох змінних, для якої існує мультиіндекс $\mathbf{m}\in\mathbb{N}_{\mathbf{0}}^N$ такий, що $R_n(\mathbf{z})\mathbf{z}^{\mathbf{m}}$ є голоморфною в точці $\mathbf{z}=\mathbf{0}$ для кожного $n\geq 0$;

— провести класифікацію функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними;

— дослідити властивості відповідності для багатовимірних регулярних C-дробів з нерівнозначними змінними, для багатовимірних g-дробів з нерівнозначними змінними, для багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і для багатовимірних J-дробів з нерівнозначними змінними;

— побудувати і дослідити алгоритм розвинення заданого формального кратного степеневого ряду у багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними;

— побудувати і дослідити багатовимірний qd-алгоритм Рутісхаузера розвинення формального заданого кратного степеневого ряду у багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними;

— встановити необхідні і достатні умови існування багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними, відповідного до заданого формального кратного степеневого ряду;

— побудувати і дослідити багатовимірний g-алгоритм Бауера розвинення формального заданого кратного степеневого ряду у багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними;

— побудувати і дослідити алгоритм розвинення заданого формального кратного степеневого ряду у багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінним;

— дослідити збіжність багатовимірних регулярних C-дробів з нерівнозначними змінними, багатовимірних S-дробів з нерівнозначними змінними, багатовимірних g-дробів з нерівнозначними змінними, багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних J-дробів з нерівнозначними змінними;

— отримати оцінки похибок наближень для багатовимірних S-дробів з нерівнозначними змінними і для багатовимірних g-дробів з нерівнозначними змінними;

— побудувати і дослідити наближення деяких аналітичних функцій багатьох змінних функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними.

Методи дослідження. У роботі використано методи математичного і комплексного аналізу, а також аналітичної теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів.

Наукова новизна отриманих результатів. Усі результати дисертаційної роботи є новими і полягають у такому:

— встановлено нове багатовимірне узагальнення ознаки збіжності Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними;

— встановлено нові ефективні ознаки збіжності для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні ланки яких мають вигляд $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$, а також вигляд $\frac{q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$;

— описано загальну теорію відповідності для послідовностей функцій багатьох змінних $\{R_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, мероморфних в точці $\mathbf{z}=\mathbf{0}$ (тобто у відкритому полікрузі, який містить початок координат), де $R_n(\mathbf{z})$ — функція багатьох змінних, для якої існує мультиіндекс $\mathbf{m}\in\mathbb{N}_{\mathbf{0}}^N$ такий, що $R_n(\mathbf{z})\mathbf{z}^{\mathbf{m}}$ є голоморфною в точці $\mathbf{z}=\mathbf{0}$ для кожного $n\geq 0$;

— проведено класифікацію функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, які є багатовимірними узагальненнями відповідних класів функціональних неперервних дробів;

— досліджено властивості відповідності для багатовимірних регулярних C-дробів з нерівнозначними змінними, для багатовимірних g-дробів з нерівнозначними змінними, для багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і для багатовимірних J-дробів з нерівнозначними змінними;

— побудовано новий алгоритм розвинення заданого формального кратного степеневого ряду у багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними та встановлено необхідні і достатні умови існування цього алгоритму;

— побудовано багатовимірний qd-алгоритм Рутісхаузера розвинення заданого формального кратного степеневого ряду у багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними та встановлено необхідні і достатні умови існування цього алгоритму;

— встановлено нові необхідні і достатні умови існування багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними відповідного до заданого формального кратного степеневого ряду;

— побудовано багатовимірний g-алгоритм Бауера розвинення заданого формального кратного степеневого ряду у багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними та встановлено необхідні і достатні умови існування цього алгоритму;

— побудовано алгоритм розвинення заданого формального кратного степеневого ряду у багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними та встановлено необхідні і достатні умови існування цього алгоритму;

— доведено, що перетин параболічної і кругової областей є областю збіжності багатовимірного регулярного C-дробу з нерівнозначними змінними, а параболічна область — областю збіжності оберненого до нього багатовимірного регулярного C-дробу з нерівнозначними змінними;

— доведено, що об'єднання перетинів параболічних і кругових областей є областю збіжності багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними, а об'єднання параболічних областей — областю збіжності оберненого до нього багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними, і, як наслідки із цих результатів, отримано дві нові ознаки збіжності для S-дробів;

— отримано нові оцінки похибок наближень для багатовимірних S-дробів з нерівнозначними змінними в деяких обмежених областях із $\mathbb{C}^N$;

— показано, що багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними є парною частиною багатовимірного π-дробу з нерівнозначними змінними;

— доведено, що об'єднання параболічних областей є областю збіжності багатовимірного g-дробу з нерівнозначними змінними і різних його модифікацій та отримано оцінки похибок наближень для цих гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними в деяких обмежених областях із $\mathbb{C}^N$;

— доведено, що кругові і кутові області є областями збіжності багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних J-дробів з нерівнозначними змінними;

— доведено збіжність послідовностей парних і непарних підхідних дробів багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних J-дробів з нерівнозначними змінними у деяких підмножинах із $\mathbb{C}^N$ і їх рівномірну збіжність на компактних підмножинах областей із $\mathbb{C}^N$, які є внутрішностями цих підмножин, а також доведено, що умовою збіжності для багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних J-дробів з нерівнозначними змінними в підмножинах із $\mathbb{C}^N$ є розбіжність рядів, складених із коефіцієнтів елементів цих гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними;

— побудовано наближення деяких аналітичних функцій багатьох змінних функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними і показано ефективність цих наближень.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Її результати можуть застосовуватися в аналітичній теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів до дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, а також можуть бути корисними для побудови і дослідження раціональних наближень аналітичних функцій багатьох змінних, які виникають у прикладних задачах математики, фізики та інженерії.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертації, що виносяться на захист, отримано автором самостійно. У статтях [2, 5, 6] Д. І. Боднару належать постановки задач та аналіз отриманих результатів. У спільній з О. С. Боднар праці [21] автору належать теореми 2–5 та наслідки 1 і 2.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на: Міжнародній конференції "VIII Білоруська математична конференція" (Мінськ, Білорусь, 19–24 червня 2000 р.); Конференції "Функціональні методи в теорії наближень, теорії операторів, стохастичному аналізі та статистиці" (Київ, 19–22 жовтня 2001 р.); Міжнародному конгресі з обчислювальної і прикладної математики (Левен, Бельгія, 22–26 липня, 2002 р.); Міжнародній школі-семінарі "Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування", присвяченої 75-річчю з дня народження проф. В. Я. Скоробогатька (Ужгород, 19–24 серпня 2002 р.); III всеукраїнській науковій конференції "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 9–12 вересня 2003 р.); X міжнародній конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 13–15 травня 2004 р.); Міжнародній конференції з чисельного аналізу і прикладної математики 2005 (Родос, Греція, 16–20 вересня 2005 р.); Міжнародній науковій конференції "Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування" (Ужгород, 18–23 вересня 2006 р.); Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 24–28 вересня 2007 р.); Дванадцятій міжнародній конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 15–17 травня 2008 р.); Тринадцятій міжнародній конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 13–15 травня 2010 р.); Міжнародній конференції з комплексного аналізу пам'яті А. А. Гольдберга (1930-2008) (Львів, 31 травня – 5 червня 2010 р.); Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 19–23 вересня 2011 р.); Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування", присвяченій 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942-2007) (Кам'янець-Подільський, 28 травня – 3 червня 2012 р.); Міжнародній математичній конференції "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування", з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка (Севастополь, 23–30 червня 2013 р.); Міжнародній науковій конференції "Теорія наближень і її застосування", з нагоди 75-річчя Віталія Павловича Моторного (Дніпропетровськ, 8–11 жовтня 2015 р.); Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.); Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування", присвяченій 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007) (Слов'янськ, 28 травня – 3 червня 2017 р.); Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 р.); Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки та математики", присвяченій 90-річчю від дня народження академіка НАН України Ярослава Степановича Підстригача та 40-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України (Львів, 22–25 травня 2018 р.); Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях", присвяченій 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (Чернівці, 17–19 вересня 2018 р.); VI всеукраїнській науковій конференції імені Б. В. Василишина "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ – Микуличин, 26–28 вересня 2018 р.); а також на: науковому семінарі з аналітичної теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (Львів, 2000-2018 рр., керівники семінару: д.ф.-м.н., проф. Д. І. Боднар, д.ф.-м.н., с.н.с. Х. Й. Кучмінська); науково-навчальному семінарі "Теорія потенціалу та її застосування" у Львівському національному університеті імені Івана Франка (Львів, 2 листопада 2017 р., керівники семінару: д.ф.-м.н., проф. О. Б. Скасків, д.ф.-м.н., проф. І. Е. Чижиков); науковому семінарі "Сучасний аналіз" у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (Київ, 29 листопада 2017 р., керівники семінару: д.ф.-м.н., проф. І. О. Шевчук, д.ф.-м.н., проф. О. О. Курченко, д.ф.-м.н., проф. В. М. Радченко); науковому семінарі кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова (Київ, 21 лютого 2018 р., керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. Г. М. Торбін); науковому семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України

(Київ, 2 березня 2018 р., керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. А. С. Романюк); науковому семінарі кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" (Івано-Франківськ, 5 вересня 2018 р., керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. А. В. Загороднюк).

Публікації. Результати дисертації опубліковано у 44 друкованих працях, серед яких: 22 статті у вітчизняних та закордонних фахових наукових виданнях [1–22], решта у матеріалах міжнародних наукових конференцій [23–44]; 8 статей опубліковано у виданнях, проіндексованих у базах даних Scopus та/або Web of Science Core Collection [3, 9, 12, 13, 15, 18, 19, 21].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із вступу, шести розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. Повний обсяг роботи становить 340 сторінок друкованого тексту. Список використаних джерел займає 25 сторінок і містить 226 найменувань. Додатки займають 9 сторінок і містять список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність дослідження, вказано на зв'язок дисертаційної роботи з науково-дослідними темами, сформульовано мету і завдання дослідження, відзначено наукову новизну, теоретичне і практичне значення отриманих результатів, виокремлено особистий внесок здобувача і вказано установи та організації, де доповідалися і обговорювалися результати дисертації.

У **першому розділі** наведено необхідний теоретичний матеріал про неперервні дроби та одне з їх багатовимірних узагальнень — гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними і зроблено огляд відомих результатів, що стосуються тематики дисертаційного дослідження.

Нехай $\mathbb{C}$ — комплексна площина, $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — розширена комплексна площина, символи $\mathbb{N}$ і $\mathbb{N}_0$ означають відповідно множини $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Нехай N — фіксоване натуральне число, $i(0) = 0$, $\mathcal{I}_0 = \{0\}$,

$$\mathcal{I}_k = \{i(k) : \ i(k) = (i_1, i_2, \ldots, i_k), \ 1 \le i_p \le i_{p-1}, \ 1 \le p \le k, \ i_0 = N\}, \ k \ge 1,$$

— множини мультиіндексів. За Д. І. Боднаром[1] для кожного $r \ge 1$ символ $\mathbf{u}^{(r)}$ означає вектор із $\mathbb{C}^p$, де $p = C_{N+r-1}^{N-1}$ (C_n^k — число сполучень з n елементів по k, $k \le n$), з компонентами $u_{j(r)}$, $j(r) \in \mathcal{I}_r$, та для кожних $r \ge 1$, $k \ge 1$ і кожного мультиіндексу $i(k) \in \mathcal{I}_k$ символ $\mathbf{u}_{i(k)}^{(r)}$ — вектор із $\mathbb{C}^p$, де $p = C_{i_k+r-1}^{i_k-1}$, з компонентами $u_{i(k),j(r)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \le j_s \le j_{s-1}$, $1 \le s \le r$, $j_0 = i_k$, з таким порядком слідування компонент:

1) $u_{n(r)} \prec u_{m(r)}$ ($u_{i(k),n(r)} \prec u_{i(k),m(r)}$), якщо $n(r) \prec m(r)$;

[1] Боднар Д. И. Ветвящиеся цепные дроби. — Киев: Наук. думка, 1986. — С. 15.

2) $n(r) \prec m(r)$, якщо $n_1 < m_1$ або існує такий індекс s, $1 \le s < r$, що $n_p = m_p$, $1 \le p \le s$, і $n_{s+1} < m_{s+1}$.

Нехай $\langle \{a_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}}, \{b_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0}\rangle$ — упорядкована пара послідовностей комплексних чисел таких, що $a_{i(k)} \neq 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, і, якщо для $k \ge 1$ існує мультиіндекс $i(k) \in \mathcal{I}_k$ такий, що $b_{i(k)} = 0$, то $b_{i(k-1),j} \neq 0$ для $1 \le j \le i_{k-1}$, $j \neq i_k$. Нехай $\{s_{i(k)}(\mathbf{w}^{(1)}_{i(k)})\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0}$, де $\mathbf{w}^{(1)}_0 = \mathbf{w}^{(1)}$, і $\{S_k(\mathbf{w}^{(k+1)})\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ — послідовності багатовимірних дробово-лінійних відображень

$$s_0(\mathbf{w}^{(1)}) = b_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_N,$$
$$\xi_{i(k)} = s_{i(k)}(\mathbf{w}^{(1)}_{i(k)}) = \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)} + w_{i(k),1} + w_{i(k),2} + \ldots + w_{i(k),i_k}}$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, і $S_0(\mathbf{w}^{(1)}) = s_0(\mathbf{w}^{(1)})$, $S_k(\mathbf{w}^{(k+1)}) = S_{k-1}(\boldsymbol{\xi}^{(k)})$ для $k \ge 1$. Крім цього, нехай $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ — послідовність із розширеної комплексної площини $\widehat{\mathbb{C}}$ визначена так: $f_k = S_k(\mathbf{0}^{(k+1)})$ для $k \ge 0$, де $\mathbf{0}^{(k+1)} = (0, 0, \ldots, 0)$ — вектор із $\mathbb{C}^p$, де $p = C^{N-1}_{N+k}$.

Упорядковану пару $\langle\langle \{a_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k, k\in\mathbb{N}}, \{b_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k, k\in\mathbb{N}_0}\rangle, \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}\rangle$ називають гіллястим ланцюговим дробом з нерівнозначними змінними[2] і позначають символом

$$b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i(1)}}{b_{i(1)} + \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} \cfrac{a_{i(2)}}{b_{i(2)} + \sum\limits_{i_3=1}^{i_2} \cfrac{a_{i(3)}}{b_{i(3)} + \ddots}}}.$$

Числа $a_{i(k)}$ і $b_{i(k)}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$ називають k-ми частинними чисельниками та знаменниками гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними відповідно або його елементами, число b_0 — вільним членом, величину f_k — k-им підхідним дробом.

Для зручності гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними $\langle\langle \{a_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}}, \{b_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0}\rangle, \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}\rangle$ позначатимемо символами

$$b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i(2)}}{b_{i(2)}} + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{a_{i(3)}}{b_{i(3)}} + \cdots \text{ або } b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}.$$

У **другому розділі** дисертації встановлено ознаки збіжності для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні знаменники яких дорівнюють одиниці. Так, у підрозділі 2.1 доведено багатовимірне узагальнення теореми Ворпіцького про найширший замкнений круг збіжності з центром у початку координат.

[2] Баран О. Є. Наближення функцій багатьох змінних гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014. — С. 67–69.

Теорема 2.1. *Нехай елементи $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними*

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1}, \tag{1}$$

задовольняють нерівність

$$|a_{i(k)}| \leq q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1} (1 - q_{i(k-1)}) \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1, \tag{2}$$

де $\{q_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0}$ — послідовність дійсних сталих таких, що $0 \leq q_{i(k)} < 1$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 0$, або $0 < q_{i(k)} \leq 1$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 0$. Тоді

1) *гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними* (1) *збігається абсолютно, і його значення та значення його підхідних дробів належать замкненому кругу $|z| \leq 1 - q_0^N$;*

2) *якщо в нерівності* (2) *$q_{i(k)} = 1/2$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 0$, то замкнений круг $|z| \leq 1 - 2^{-N}$ є "найкращою" множиною значень гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними* (1) *і його підхідних дробів.*

У теоремі 2.2 цього ж підрозділу встановлено ознаку збіжності для гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними, оберненого до (1), за додаткових обмежень на його елементи.

У підрозділі 2.2 доведено теореми про ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні ланки яких мають вигляд $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$.

Теорема 2.3. *Нехай $g_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, — дійсні сталі такі, що $0 \leq g_{i(k)} < 1$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, або $0 < g_{i(k)} \leq 1$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. Тоді*

1) *гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними*

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)} z_{i(1)}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)}) z_{i(k)}}{1} \tag{3}$$

збігається абсолютно і рівномірно для $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, таких, що

$$|z_{i(k)}| \leq 1/i_{k-1} \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1; \tag{4}$$

2) *значення гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними* (3) *і його підхідних дробів належать замкненому кругу $|z| \leq 1$.*

Теорема 2.4. *Нехай $g_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, — дійсні сталі такі, що $0 \leq g_{i(k)} < 1$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. Тоді гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними*

$$\frac{1}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)} z_{i(1)}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)}) z_{i(k)}}{1} \tag{5}$$

збігається для $z_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 1$, *що задовольняють нерівність* (4), *якщо існує мультиіндекс* $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 1$, *такий, що* $g_{i(k)}=0$ *або* $z_{i(k)}\ne -1/i_{k-1}$.

Теорема 2.5. *Нехай* $g_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 0$, *— дійсні сталі такі, що* $0<g_0\le 1$, $0\le g_{i(k)}<1$ *для всіх* $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 1$, *або* $0<g_0\le 1$, $0<g_{i(k)}\le 1$ *для всіх* $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 1$. *Тоді*

1) *гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними*

$$\frac{g_0}{1}+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{g_{i(1)}(1-g_0)z_{i(1)}}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}\tag{6}$$

збігається абсолютно і рівномірно для $z_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 1$, *що задовольняють нерівність* (4);

2) *значення гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними* (6) *і його підхідних дробів належать замкненому кругу* $|z-1/(2-g_0)|\le(1-g_0)/(2-g_0)$.

У теоремах 2.6 і 2.7 доведено, що гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними (3) і (6) відповідно, за додаткових обмежень на їх елементи, збігаються абсолютно для $z_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 1$, таких, що

$$\sum_{i_1=1}^{N}|z_{i(1)}|\le 1,\ \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k}|z_{i(k+1)}|\le 1 \text{ для всіх } i(k)\in\mathcal{I}_k,\ k\ge 1.\tag{7}$$

Для формулювання наступної теореми із кожної множини мультиіндексів $\mathcal{I}_k$, $k\ge 1$, виділимо підмножини $\overline{\mathcal{I}}_1=\{i(1):\ i(1)\in\mathcal{I}_1,\ g_{i(1)}\ne 0\}$, $\overline{\mathcal{I}}_k=\{i(k):\ i(k)\in\mathcal{I}_k,\ i(k-1)\in\overline{\mathcal{I}}_{k-1},\ g_{i(k)}\ne 0\}$ для $k\ge 2$, і, крім цього, із множини індексів $\mathcal{I}=\{1,2,\ldots,N\}$ — підмножини $\widetilde{\mathcal{I}}_{i(k)}=\{i_{k+1}:\ i_{k+1}\in\mathcal{I},\ g_{i(k+1)}\ne 0,\ i(k)\in\overline{\mathcal{I}}_k\}$ для всіх $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 1$. Вважатимемо, що для $k\ge 2$ і для кожного $i(k-1)\in\overline{\mathcal{I}}_{k-1}$ множина $\overline{\mathcal{I}}_k$ порожня, якщо $g_{i(k)}=0$, $1\le i_k\le i_{k-1}$, а також, що для $k\ge 1$ підмножина $\widetilde{\mathcal{I}}_{i(k)}$ порожня, якщо $i(k)\notin\overline{\mathcal{I}}_k$ або $g_{i(k+1)}=0$, $1\le i_{k+1}\le i_k$.

Теорема 2.8. *Нехай* $g_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 1$, *— дійсні сталі такі, що* $0\le g_{i(k)}<1$ *для всіх* $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 1$. *Тоді гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними* (5) *збігається для* $z_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 1$, *що задовольняють нерівність* (7), *якщо виконується одна із умов:*

1) $\sum_{i_1\in\overline{\mathcal{I}}_1}z_{i(1)}\ne -1$ *або* $\sum_{i_1=1}^{N}g_{i(1)}=0$;

2) *існує мультиіндекс* $i(k)\in\overline{\mathcal{I}}_k$, $k\ge 1$, *такий, що* $\sum_{i_{k+1}\in\widetilde{\mathcal{I}}_{i(k)}}z_{i(k+1)}\ne -1$ *або* $\sum_{i_{k+1}=1}^{i_k}g_{i(k+1)}=0$.

У підрозділі 2.3 встановлено ознаки збіжності для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні ланки яких мають вигляд $\frac{q_{i(k)}^{i_k}q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$.

Теорема 2.9. *Нехай* $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 0$, — *дійсні сталі такі, що* $0 \leq q_{i(k)} < 1$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 0$, *або* $0 < q_{i(k)} \leq 1$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 0$. *Тоді*

1) *гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними*

$$\frac{q_0^N}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{q_{i(1)}^{i_1} q_0^{i_1-1}(1-q_0) z_{i(1)}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)}) z_{i(k)}}{1} \tag{8}$$

збігається абсолютно і рівномірно для $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *таких, що*

$$|z_{i(k)}| \leq 1 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1; \tag{9}$$

2) *значення гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними* (8) *і його підхідних дробів належать замкненому кругу* $|z| \leq \prod_{r=1}^{N}(1 - 1/S_r)$, *де*

$$S_r = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ i_p = r,\ 1 \leq p \leq k}} \frac{q_{i(k)}}{1 - q_{i(k)}}.$$

Теорема 2.10. *Нехай* $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, — *дійсні сталі такі, що* $0 \leq q_{i(k)} < 1$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *або* $0 < q_{i(k)} \leq 1$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *і нехай* $\sum_{i_1=1}^{N} \prod_{r=1}^{i_1}(1 - 1/S_r^{(i_1)}) < 1$, *де*

$$S_r^{(i_1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ i_p = r,\ 2 \leq p \leq k}} \frac{q_{i(k)}}{1 - q_{i(k)}},\ 1 \leq r \leq i_1,\ i_1 \in \mathcal{I}_1. \tag{10}$$

Тоді

1) *гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними*

$$\frac{1}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{q_{i(1)}^{i_1} z_{i(1)}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)}) z_{i(k)}}{1} \tag{11}$$

збігається абсолютно і рівномірно для $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *що задовольняють нерівність* (9);

2) *значення гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними* (11) *і його підхідних дробів належать замкненому кругу*

$$|z| \leq \left(1 - \sum_{i_1=1}^{N} \prod_{r=1}^{i_1} \left(1 - \frac{1}{S_r^{(i_1)}}\right)\right)^{-1}.$$

Наступна теорема є наслідком теореми 2.10.

Теорема 2.11. *Нехай* $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *— дійсні сталі такі, що* $0 \leq q_{i(k)} < 1$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *або* $0 < q_{i(k)} \leq 1$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *і нехай* $\sum_{i_1=1}^{N} \prod_{r=1}^{i_1} (1 - 1/S_r^{(i_1)}) = 1$, *де* $S_r^{(i_1)}$, $1 \leq r \leq i_1$, $i_1 \in \mathcal{I}_1$, *означені в* (10). *Тоді гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними* (11) *збігається абсолютно і рівномірно для* $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *що задовольняють нерівність* (9) *і таких, що* $|z_{i_1}| \leq l$ *принаймні для одного індексу* i_1 *із* $\mathcal{I}_1$ *для кожної сталої* l, $l < 1$.

Крім цього, правильні такі дві теореми:

Теорема 2.12. *Нехай* $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *— дійсні сталі такі, що* $0 \leq q_{i(k)} < 1$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *або* $0 < q_{i(k)} \leq 1$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *і нехай* $\sum_{i_1=1}^{N} q_{i(1)} < 1$. *Тоді гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними*

$$\frac{1}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{q_{i(1)}^{i_1+1} z_{i(1)}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1} (1 - q_{i(k-1)}) z_{i(k)}}{1} \tag{12}$$

збігається абсолютно і рівномірно для $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *що задовольняють нерівність* (9).

Теорема 2.13. *Нехай* $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *— дійсні сталі такі, що* $0 \leq q_{i(k)} < 1$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *або* $0 < q_{i(k)} \leq 1$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *і нехай* $\sum_{i_1=1}^{N} q_{i(1)} = 1$. *Тоді гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними* (12) *збігається абсолютно і рівномірно для* $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *що задовольняють нерівність* (9) *і таких, що* $|z_{i_1}| \leq l$ *принаймні для одного індексу* i_1 *із* $\mathcal{I}_1$ *для кожної сталої* l, $l < 1$.

Усі встановлені у підрозділах 2.2 і 2.3 ознаки збіжності для гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними є багатовимірними аналогами відповідних класичних результатів О. Перрона, А. Прінгсхайма, Е. Б. Ван Флека, Г. С. Волла і Дж. Ф. Пейдона для неперервних дробів.

Для формулювання подальших результатів введемо кілька позначень. Нехай $\widehat{\mathbb{C}}^N$ — розширений N-вимірний комплексний простір, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_N)$ означає елемент із $\mathbb{Z}^N$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N)$ — елемент із $\widehat{\mathbb{C}}^N$, для $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N$ і $\mathbf{z} \in \widehat{\mathbb{C}}^N$ $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + \ldots + k_N$, $\mathbf{z}^{\mathbf{k}} = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_N^{k_N}$, для $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N$ і $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^N$ $\mathbf{k} \geq \mathbf{m}$ означає, що $k_r \geq m_r$, $1 \leq r \leq N$.

Третій розділ дисертації присвячений зображенню аналітичних функцій функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними. Розглянуто підхід, у якому формальне розвинення у функціональний гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними отримується за умови, що розвинення Лорана кожного його n-го підхідного дробу збігається із заданим формальним кратним рядом Лорана $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ почленно до всіх однорідних членів зі степенем $(\nu_n - 1)$ включно і ν_n прямує до нескінченності із ростом n. Функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними, визначені у такий спосіб, назвемо відповідними до заданого формального кратного ряду Лорана $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$.

У підрозділі 3.1 описано загальну теорію відповідності для послідовностей функцій багатьох змінних $\{R_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, мероморфних в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ (під функцією багатьох змінних $R(\mathbf{z})$, мероморфною в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ (тобто у відкритому полікрузі, який містить початок координат) розуміємо таку функцію багатьох змінних, для якої існує мультиіндекс $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}^N$ такий, що $R(\mathbf{z})\mathbf{z}^{\mathbf{m}}$ є голоморфною в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$). Особливим випадком $R_n(\mathbf{z})$ може бути підхідний дріб функціонального гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними.

У підрозділі 3.2 проведено класифікацію деяких функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними.

Гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}, \tag{13}$$

де $a_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, називають багатовимірним регулярним C-дробом з нерівнозначними змінними[3]. Якщо $a_{i(k)} > 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, то гіллястий ланцюговий дріб (13) назвемо багатовимірним S-дробом з нерівнозначними змінними або багатовимірним дробом Стільтьєса з нерівнозначними змінними.

Гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними

$$\frac{s_0}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)}) z_{i_k}}{1}, \tag{14}$$

де $s_0 > 0$, $0 < g_{i(k)} < 1$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, назвемо багатовимірним g-дробом з нерівнозначними змінними.

Гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними

$$\frac{\pi_0}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} z_{i_1}} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{-z_{i_1}}{1} + \frac{\pi_{i(1)}}{1 + \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} z_{i_2}} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{-z_{i_2}}{1} + \frac{\pi_{i(2)}}{1 + \sum\limits_{i_3=1}^{i_2} z_{i_3}} + \cdots, \tag{15}$$

де $\pi_{i(k)} > 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 0$, назвемо багатовимірним π-дробом з нерівнозначними змінними.

[3] Баран О. Є. Наближення функцій багатьох змінних гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними. — С. 40–41.

Гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{p_{i(1)} z_{i_1}}{1 + q_{i(1)} z_{i_1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)} z_{i_{k-1}} z_{i_k}}{1 + q_{i(k)} z_{i_k}}, \tag{16}$$

де $p_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $q_{i(k)} \in \mathbb{C}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, назвемо багатовимірним приєднаним дробом з нерівнозначними змінними.

Гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)}}{d_{i(1)} + z_{i_1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} c_{i(k)}}{d_{i(k)} + z_{i_k}}, \tag{17}$$

де $c_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $d_{i(k)} \in \mathbb{C}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, назвемо багатовимірним J-дробом з нерівнозначними змінними або багатовимірним дробом Якобі з нерівнозначними змінними. Якщо $c_{i(k)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $d_{i(k)} \in \mathbb{R}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, то гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (17) назвемо багатовимірним дійсним J-дробом з нерівнозначними змінними.

У підрозділі 3.3 доведено такі дві теореми:

Теорема 3.1. *Кожний багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними*

$$b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}, \tag{18}$$

де $b_0 \in \mathbb{C}$, $a_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, із послідовністю підхідних дробів $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ є відповідним до однозначно визначеного формального кратного степеневого ряду

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \tag{19}$$

де $c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}$, $\mathbf{k} \geq \mathbf{0}$, в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Порядок відповідності n-го підхідного дробу $f_n(\mathbf{z})$ дорівнює $(n+1)$, $n \geq 0$, і тому формальний кратний ряд Тейлора в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ для $f_n(\mathbf{z})$ збігається із $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ почленно до всіх однорідних членів зі степенем n включно, тобто

$$f_n(\mathbf{z}) = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{n} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} + \sum_{|\mathbf{k}| \geq n+1} \gamma_{\mathbf{k}}^{(n)} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \ n \geq 0,$$

де $\gamma_{\mathbf{k}}^{(n)} \in \mathbb{C}$, $|\mathbf{k}| \geq n+1$, $n \geq 0$.

Теорема 3.2. *Нехай багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними* (18) *збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області D, яка містить початок координат, до функції багатьох змінних $f(\mathbf{z})$, голоморфної в D. Тоді сума формального кратного степеневого ряду* (19)*, відповідного до багатовимірного регулярного C-дробу з нерівнозначними змінними* (18) *в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, збігається зі значенням цього гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними в області D.*

Зауваження 3.1. *Область збіжності D багатовимірного регулярного C-дробу з нерівнозначними змінними* (18) *у теоремі* 3.2 *може бути більшою, ніж область збіжності кратного степеневого ряду* (19)*. Тоді цей гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними є аналітичним продовженням функції багатьох змінних $f(\mathbf{z})$ на D.*

У підрозділі 3.4 встановлено властивості відповідності для багатовимірного g-дробу з нерівнозначними змінними (теореми 3.3 і 3.4), а у підрозділі 3.5 — для тісно пов'язаних між собою багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (теореми 3.5 і 3.6) і багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (теореми 3.7 і 3.8).

У **четвертому розділі** дисертації будуються і досліджуються алгоритми розвинення заданих формальних кратних степеневих рядів у відповідні функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними.

Нехай $N \geq 2$, $e_0 = (0, 0, \ldots, 0)$, $e_k = (\delta_{k,1}, \delta_{k,2}, \ldots, \delta_{k,N})$ — мультиіндекс, де $1 \leq k \leq N$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Введемо множини мультиіндексів

$$\mathcal{E}_0 = \{e_0\},\ \mathcal{E}_k = \{e_{i(k)}:\ e_{i(k)} = e_{i_1} + e_{i_2} + \ldots + e_{i_k},\ i(k) \in \mathcal{I}_k\},\ k \geq 1,$$

і задамо відображення $\varphi : \mathcal{I}_k \to \mathcal{E}_k$ так $\varphi(i(k)) = e_{i(k)}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. Очевидно, що φ є бієктивне відображення.

Нехай $b_{e_{i(k)}} = a_{i(k)}$ для всіх $e_{i(k)} \in \mathcal{E}_k$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. Тоді багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними

$$c_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}, \tag{20}$$

де $c_0 \in \mathbb{C}$ $a_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, запишемо у вигляді

$$c_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{b_{e_{i(1)}} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{b_{e_{i(k)}} z_{i_k}}{1}, \tag{21}$$

де $b_{e_{i(k)}} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для всіх $e_{i(k)} \in \mathcal{E}_k$, $k \geq 1$.

У підрозділі 4.1 побудовано алгоритм розвинення заданого формального кратного степеневого ряду (19), де $c_{\mathbf{0}} = c_0$, у відповідний багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними (21), згідно з яким коефіцієнти

$b_{e_{i(k)}}$, $e_{i(k)} \in \mathcal{E}_k$, $k \geq 1$, можна обчислити за такими формулами: $b_{e_{i_1}} = H_{e_{i_1}}(1)$,

$$b_{2ne_{i_1}} = -\frac{H_{e_{i_1}}(n-1)H_{2e_{i_1}}(n)}{H_{e_{i_1}}(n)H_{2e_{i_1}}(n-1)},\ b_{(2n+1)e_{i_1}} = -\frac{H_{e_{i_1}}(n+1)H_{2e_{i_1}}(n-1)}{H_{e_{i_1}}(n)H_{2e_{i_1}}(n)},$$

де $1 \leq i_1 \leq N$, $n \geq 1$, $H_{e_{i_1}}(0) = H_{2e_{i_1}}(0) = 1$, $H_{e_{i_1}}(n)$ і $H_{2e_{i_1}}(n)$ для $n \geq 1$ визначаються за формулами

$$H_{le_{i_1}}(n) = \begin{vmatrix} c_{le_{i_1}} & c_{(l+1)e_{i_1}} & \cdots & c_{(l+n-1)e_{i_1}} \\ c_{(l+1)e_{i_1}} & c_{(l+2)e_{i_1}} & \cdots & c_{(l+n)e_{i_1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{(l+n-1)e_{i_1}} & c_{(l+n)e_{i_1}} & \cdots & c_{(l+2n-2)e_{i_1}} \end{vmatrix},\ l = 1, 2; \qquad (22)$$

$$b_{e_{i(k+1)}} = H^{e_{i(k)}}_{e_{i_{k+1}}}(1),\ b_{e_{i(k)}+2ne_{i_{k+1}}} = -\frac{H^{e_{i(k)}}_{e_{i_{k+1}}}(n-1)H^{e_{i(k)}}_{2e_{i_{k+1}}}(n)}{H^{e_{i(k)}}_{e_{i_{k+1}}}(n)H^{e_{i(k)}}_{2e_{i_{k+1}}}(n-1)},$$

$$b_{e_{i(k)}+(2n+1)e_{i_{k+1}}} = -\frac{H^{e_{i(k)}}_{e_{i_{k+1}}}(n+1)H^{e_{i(k)}}_{2e_{i_{k+1}}}(n-1)}{H^{e_{i(k)}}_{e_{i_{k+1}}}(n)H^{e_{i(k)}}_{2e_{i_{k+1}}}(n)},$$

де $2 \leq i_p \leq i_{p-1}$, $1 \leq p \leq k$, $1 \leq i_{k+1} \leq i_k - 1$, $k \geq 1$, $n \geq 1$, $H^{e_{i(k)}}_{e_{i_{k+1}}}(0) = H^{e_{i(k)}}_{2e_{i_{k+1}}}(0) = 1$, $H^{e_{i(k)}}_{e_{i_{k+1}}}(n)$ і $H^{e_{i(k)}}_{2e_{i_{k+1}}}(n)$ для $n \geq 1$ визначаються за формулами

$$H^{e_{i(k)}}_{le_{i_{k+1}}}(n) = \begin{vmatrix} c^{e_{i(k)}}_{le_{i_{k+1}}} & c^{e_{i(k)}}_{(l+1)e_{i_{k+1}}} & \cdots & c^{e_{i(k)}}_{(l+n-1)e_{i_{k+1}}} \\ c^{e_{i(k)}}_{(l+1)e_{i_{k+1}}} & c^{e_{i(k)}}_{(l+2)e_{i_{k+1}}} & \cdots & c^{e_{i(k)}}_{(l+n)e_{i_{k+1}}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c^{e_{i(k)}}_{(l+n-1)e_{i_{k+1}}} & c^{e_{i(k)}}_{(l+n)e_{i_{k+1}}} & \cdots & c^{e_{i(k)}}_{(l+2n-2)e_{i_{k+1}}} \end{vmatrix},\ l = 1, 2. \qquad (23)$$

Коефіцієнти $c^{e_{i_1}}_{\mathbf{k}}$, $|\mathbf{k}| \geq 1$, $k_j = 0$, $i_1 + 1 \leq j \leq N$, $2 \leq i_1 \leq N$, визначаються за рекурентною формулою $c^{e_{i_1}}_{\mathbf{k}} = -\sum_{|\mathbf{r}|=1}^{|\mathbf{k}|} c^{e_{i_1}}_{\mathbf{k}-\mathbf{r}} c_{\mathbf{r}+e_{i_1}}/c_{e_{i_1}}$, де $c^{e_{i_1}}_{\mathbf{0}} = 1$, при цьому $c^{e_{i_1}}_{\mathbf{k}} = 0$, якщо існує індекс j такий, що $1 \leq j \leq N$ і $k_j < 0$, а коефіцієнти $c^{e_{i(k)}}_{\mathbf{k}}$, $|\mathbf{k}| \geq 1$, $k_j = 0$, $i_k + 1 \leq j \leq N$, $k \geq 2$, $2 \leq i_p \leq i_{p-1}$, $1 \leq p \leq k$, — $c^{e_{i(k)}}_{\mathbf{k}} = -\sum_{|\mathbf{r}|=1}^{|\mathbf{k}|} c^{e_{i(k)}}_{\mathbf{k}-\mathbf{r}} c^{e_{i(k-1)}}_{\mathbf{r}+e_{i_k}}/c^{e_{i(k-1)}}_{e_{i_k}}$, де $c^{e_{i(k)}}_{\mathbf{0}} = 1$, при цьому $c^{e_{i(k)}}_{\mathbf{k}} = 0$, якщо існує індекс j такий, що $1 \leq j \leq N$ і $k_j < 0$.

Доведено таку теорему:

Теорема 4.1. *Багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними (20) є відповідним до заданого формального кратного степеневого ряду (19)в точці* $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ *тоді і лише тоді, коли для кожних* $1 \leq i_1 \leq N$ *і* $n \geq 1$ *виконуються нерівності* $H_{e_{i_1}}(n) \neq 0$, $H_{2e_{i_1}}(n) \neq 0$, *де* $H_{e_{i_1}}(n)$ *і* $H_{2e_{i_1}}(n)$ *визначаються за формулами* (22), *і для кожних* $1 \leq i_{k+1} \leq i_k - 1$, $2 \leq i_p \leq i_{p-1}$, $1 \leq p \leq k$, $k \geq 1$ *і* $n \geq 1$ *— нерівності* $H^{e_{i(k)}}_{e_{i_{k+1}}}(n) \neq 0$, $H^{e_{i(k)}}_{2e_{i_{k+1}}}(n) \neq 0$, *де* $H^{e_{i(k)}}_{e_{i_{k+1}}}(n)$ *і* $H^{e_{i(k)}}_{2e_{i_{k+1}}}(n)$ *визначаються за формулами* (23).

У підрозділі 4.2 побудовано багатовимірний qd-алгоритм Рутісхаузера розвинення заданого формального кратного степеневого ряду (19), де $c_{\mathbf{0}} = c_0$, у відповідний багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними

$$\frac{c_0}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1},$$

де $a_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, та встановлено необхідні і достатні умови існування цього алгоритму (теорема 4.2). Із багатовимірного qd-алгоритму Рутісхаузера випливає, що коефіцієнти $b_{e_{i(k)}}$, $e_{i(k)} \in \mathcal{E}_k$, $k \geq 1$, багатовимірного регулярного C-дробу з нерівнозначними змінними (21), відповідного до заданого формального кратного степеневого ряду (19) в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, можна обчислювати за формулами $b_{e_{i_1}} = c_{e_{i_1}}$, $b_{2le_{i_1}} = -q^{(1)}_{le_{i_1}}$, $b_{(2l+1)e_{i_1}} = -d^{(1)}_{le_{i_1}}$, $1 \leq i_1 \leq N$, $l \geq 1$, де числа $q^{(1)}_{le_{i_1}}$, $d^{(1)}_{le_{i_1}}$, $l \geq 1$, є діагональними елементами qd-таблиці

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & q^{(0)}_{e_{i_1}} & & & & & & & \\
d^{(1)}_{e_0} & & d^{(0)}_{e_{i_1}} & & & & & & \\
 & q^{(1)}_{e_{i_1}} & & q^{(0)}_{2e_{i_1}} & & & & & \\
d^{(2)}_{e_0} & & d^{(1)}_{e_{i_1}} & & d^{(0)}_{2e_{i_1}} & & & & \\
 & q^{(2)}_{e_{i_1}} & & q^{(1)}_{2e_{i_1}} & & q^{(0)}_{3e_{i_1}} & & & \\
d^{(3)}_{e_0} & \vdots & d^{(2)}_{e_{i_1}} & \vdots & d^{(1)}_{2e_{i_1}} & \vdots & d^{(0)}_{3e_{i_1}} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots &
\end{array},$$

які визначаються за правилами ромба

$$d^{(n)}_{le_{i_1}} = q^{(n+1)}_{le_{i_1}} - q^{(n)}_{le_{i_1}} + d^{(n+1)}_{(l-1)e_{i_1}},\ q^{(n)}_{(l+1)e_{i_1}} = d^{(n+1)}_{le_{i_1}} q^{(n+1)}_{le_{i_1}} / d^{(n)}_{le_{i_1}},\ l \geq 1,\ n \geq 0,$$

з початковими умовами $d^{(n+1)}_{e_0} = 0$, $q^{(n)}_{e_{i_1}} = c_{(n+1)e_{i_1}} / c_{ne_{i_1}}$, $n \geq 0$, і за формулами $b_{e_{i(k)}+e_{i_{k+1}}} = -q^{(0)}_{e_{i(k)}+e_{i_{k+1}}}$, $b_{e_{i(k)}+2le_{i_{k+1}}} = -q^{(1)}_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}}$, $b_{e_{i(k)}+(2l+1)e_{i_{k+1}}} = -d^{(1)}_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}}$, де $2 \leq i_p \leq i_{p-1}$, $1 \leq p \leq k$, $1 \leq i_{k+1} \leq i_k - 1$, $k \geq 1$, $l \geq 1$, і де числа $q^{(0)}_{e_{i(k)}+e_{i_{k+1}}}$ і $q^{(1)}_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}}$, $d^{(1)}_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}}$, $l \geq 1$, є діагональними елементами qd-таблиці

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & q^{(0)}_{e_{i(k)}+e_{i_{k+1}}} & & & & & & & \\
d^{(1)}_{e_{i(k)}} & & d^{(0)}_{e_{i(k)}+e_{i_{k+1}}} & & & & & & \\
 & q^{(1)}_{e_{i(k)}+e_{i_{k+1}}} & & q^{(0)}_{e_{i(k)}+2e_{i_{k+1}}} & & & & & \\
d^{(2)}_{e_{i(k)}} & & d^{(1)}_{e_{i(k)}+e_{i_{k+1}}} & & d^{(0)}_{e_{i(k)}+2e_{i_{k+1}}} & & & & \\
\vdots & q^{(2)}_{e_{i(k)}+e_{i_{k+1}}} & \vdots & q^{(1)}_{e_{i(k)}+2e_{i_{k+1}}} & \vdots & q^{(0)}_{e_{i(k)}+3e_{i_{k+1}}} & & & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & &
\end{array},$$

які визначаються за правилами ромба

$$d^{(n)}_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}} = q^{(n+1)}_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}} - q^{(n)}_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}} + d^{(n+1)}_{e_{i(k)}+(l-1)e_{i_{k+1}}},\ l \ge 1,\ n \ge 0,$$
$$q^{(n)}_{e_{i(k)}+(l+1)e_{i_{k+1}}} = d^{(n+1)}_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}} q^{(n+1)}_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}} / d^{(n)}_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}},\ l \ge 1,\ n \ge 0,$$

з початковими умовами $q^{(n)}_{e_{i(k)}+e_{i_{k+1}}} = c^{e_{i(k-1)}}_{e_{i(k)}+(n+1)e_{i_{k+1}}} / c^{e_{i(k-1)}}_{e_{i(k)}+ne_{i_{k+1}}}$, $d^{(n+1)}_{e_{i(k)}} = 0$, $n \ge 0$. Коефіцієнти $c^{e_0}_{\mathbf{k}}$, $|\mathbf{k}| \ge 1$, визначаються за рекурентною формулою $c^{e_0}_{\mathbf{k}} = -\sum_{|\mathbf{r}|=1}^{|\mathbf{k}|} c^{e_0}_{\mathbf{k}-\mathbf{r}} c_{\mathbf{r}} / c_0$, де $c^{e_0}_{\mathbf{0}} = 1$, при цьому $c^{e_0}_{\mathbf{k}} = 0$, якщо існує індекс j такий, що $1 \le j \le N$ і $k_j < 0$, а коефіцієнти $c^{e_{i(k)}}_{\mathbf{k}}$, $|\mathbf{k}| \ge 1$, $k_j = 0$, $i_k + 1 \le j \le N$, $k \ge 1$, $2 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$, – $c^{e_{i(k)}}_{\mathbf{k}} = -\sum_{|\mathbf{r}|=1}^{|\mathbf{k}|} c^{e_{i(k)}}_{\mathbf{k}-\mathbf{r}} c^{e_{i(k-1)}}_{\mathbf{r}+e_{i_k}} / c^{e_{i(k-1)}}_{e_{i_k}}$, де $c^{e_{i(k)}}_{\mathbf{0}} = 1$, при цьому $c^{e_{i(k)}}_{\mathbf{k}} = 0$, якщо існує індекс j такий, що $1 \le j \le N$ і $k_j < 0$.

У теоремі 4.3 встановлено необхідні і достатні умови того, що для заданого формального кратного степеневого ряду (19) існує багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними (20), побудований за багатовимірним qd-алгоритмом Рутісхаузера.

Позаяк багатовимірний S-дріб з нерівнозначними змінними є особливим випадком багатовимірного регулярного C-дробу з нерівнозначними змінними, то теореми 4.1–4.3 можна застосовувати до багатовимірних S-дробів з нерівнозначними змінними. Крім цього, правильна така теорема:

Теорема 4.4. *Багатовимірний S-дріб з нерівнозначними змінними* (20), *де $c_0 \in \mathbb{R}$, $a_{i(k)} > 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, є відповідним до заданого формального кратного степеневого ряду $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\ge\mathbf{0}} c_{\mathbf{k}}(-\mathbf{z})^{\mathbf{k}}$, де $c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}$ для $\mathbf{k} \ge \mathbf{0}$ і $c_{\mathbf{0}} = c_0$, в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ тоді і лише тоді, коли для кожних $1 \le i_1 \le N$ і $n \ge 1$ виконуються нерівності $H_{e_{i_1}}(n) > 0$, $H_{2e_{i_1}}(n) > 0$, де $H_{e_{i_1}}(n)$ і $H_{2e_{i_1}}(n)$ визначаються за формулами* (22)*, і для кожних $1 \le i_{k+1} \le i_k - 1$, $2 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$ і $n \ge 1$ – нерівності $H^{e_{i(k)}}_{e_{i_{k+1}}}(n) > 0$, $H^{e_{i(k)}}_{2e_{i_{k+1}}}(n) > 0$, де $H^{e_{i(k)}}_{e_{i_{k+1}}}(n)$ і $H^{e_{i(k)}}_{2e_{i_{k+1}}}(n)$ визначаються за формулами* (23).

У підрозділі 4.3 побудовано багатовимірний g-алгоритм Бауера розвинення заданого формального кратного степеневого ряду $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\ge\mathbf{0}} s_{\mathbf{k}}(-\mathbf{z})^{\mathbf{k}}$, де $s_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}$ для $\mathbf{k} \ge 0$, у відповідний багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними (14) та встановлено необхідні і достатні умови існування цього алгоритму (теорема 4.5). У теоремі 4.6 встановлено необхідні і достатні умови того, що для заданого формального кратного степеневого ряду існує багатовимірний S-дріб з нерівнозначними змінними, побудований за багатовимірним g-алгоритмом Бауера.

У підрозділі 4.5 побудовано алгоритм розвинення заданого формального кратного степеневого ряду (19) у відповідний багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними

$$c_0+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{p_{i(1)}z_{i_1}}{1+q_{i(1)}z_{i_1}+}\mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}}p_{i(k)}z_{i_{k-1}}z_{i_k}}{1+q_{i(k)}z_{i_k}},$$

де $c_0 \in \mathbb{C}$, $p_{i(k)} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $q_{i(k)} \in \mathbb{C}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, та встановлено необхідні і достатні умови існування цього алгоритму (теорема 4.7).

У **п'ятому розділі** дисертації досліджується збіжність функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними.

Нехай $l(N) = (l_1, l_2, \ldots, l_N)$. У підрозділі 5.1 доведено таку теорему:

Теорема 5.1. *Нехай коефіцієнти* $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, *багатовимірного регулярного C-дробу з нерівнозначними змінними* (13) *лежать на промені* $\varphi = \arg(a_{i(k)})$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, $-\pi < \varphi < \pi$, *і задовольняють нерівність*

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{i_k}\frac{l_{i_{k+1}}|a_{i(k+1)}|}{g_{i(k)}(1-g_{i(k+1)})} \leq 1+\cos(\varphi) \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1,$$

де l_k, $1 \leq k \leq N$, — *додатні числа,* $\{g_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\,k\in\mathbb{N}}$ — *послідовність дійсних чисел таких, що* $0 < g_{i(k)} < 1$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. *Тоді багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними* (13) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області* $P_{l(N),M} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k) < l_k,\ |z_k| < M,\ 1 \leq k \leq N\}$ *для кожної сталої* $M > 0$, *при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $P_{l(N),M}$.

У теоремі 5.2 досліджено збіжність багатовимірного регулярного C-дробу з нерівнозначними змінними (13) в області

$$D_{l(N),M} = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N}\frac{|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k)}{l_k} < 1,\ \sum_{k=1}^{N}|z_k| < M\right\},$$

де l_k, $1 \leq k \leq N$, — додатні числа, $M > 0$. У теоремах 5.3. і 5.4 встановлено достатні умови збіжності багатовимірного регулярного C-дробу з нерівнозначними змінними, оберненого до (13), відповідно в областях $P_{l(N)} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k) < l_k,\ 1 \leq k \leq N\}$ і

$$D_{l(N)} = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N}\frac{|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k)}{l_k} < 1\right\},$$

де l_k, $1 \leq k \leq N$, — додатні числа. Крім цього, для розглянутих у цьому підрозділі багатовимірних регулярних C-дробів з нерівнозначними змінними на основі теорем 2.1 і 2.2 досліджено їх збіжність на множині $O = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_k| \leq 1,\ 1 \leq k \leq N\}$ (теореми 5.5 і 5.6).

У підрозділі 5.2 розглянуто багатовимірні S-дроби з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i(k)} z_{i_k}}{1} \tag{24}$$

де $c_{i(k)} > 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, і

$$\frac{1}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i(k)} z_{i_k}}{1}, \tag{25}$$

де $c_{i(k)} > 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$.

Теорема 5.7. *Нехай коефіцієнти $c_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними (24) задовольняють нерівність $\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} c_{i(k)} l_{i_k} \leq 1$ для всіх $i(k-1) \in \mathcal{I}_{k-1}$, $k \geq 2$, де l_k, $1 \leq k \leq N$, — додатні числа. Тоді багатовимірний S-дріб з нерівнозначними змінними (24) збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області*

$$P_{l(N),M} = \bigcup_{\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)} \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ \frac{|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha})}{l_k \cos^2(\alpha)} < \frac{1}{2}, \ |z_k| < M, \ 1 \leq k \leq N \right\}$$

для кожної сталої $M > 0$, при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $P_{l(N),M}$.

У теоремі 5.8 досліджено збіжність багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними (24) в області

$$D_{l(N),M} = \bigcup_{\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)} \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ \sum_{k=1}^{N} \frac{|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha})}{l_k \cos^2(\alpha)} < \frac{1}{2}, \ \sum_{k=1}^{N} |z_k| < M \right\},$$

де l_k, $1 \leq k \leq N$, — додатні числа, $M > 0$. При $N = 1$ із теореми 5.7 (або 5.8) випливає ознака збіжності для S-дробу

$$\frac{c_1 z}{1} + \frac{c_2 z}{1} + \frac{c_3 z}{1} + \ldots, \tag{26}$$

де $c_k > 0$ для $k \geq 1$.

Наслідок 5.1. *Нехай коефіцієнти c_k, $k \geq 2$, S-дробу (26) задовольняють нерівність $c_k l \leq 1$ для $k \geq 2$, де l — додатне число. Тоді S-дріб (26) збігається до функції, голоморфної в області $H_{l,M} = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z + l/4)| < \pi, \ |z| < M\}$ для кожної сталої $M > 0$, при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $H_{l,M}$.*

Доведено також таку теорему:

Теорема 5.9. *Нехай коефіцієнти* $c_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *багатовимірного* S*-дробу з нерівнозначними змінними* (25) *задовольняють нерівність* $\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} c_{i(k)} l_{i_k} \leq 1$ *для всіх* $i(k-1) \in \mathcal{I}_{k-1}$, $k \geq 1$, *де* l_k, $1 \leq k \leq N$, *— додатні числа. Тоді багатовимірний* S*-дріб з нерівнозначними змінними* (25) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області*

$$P_{l(N)} = \bigcup_{\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)} \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \frac{|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha})}{l_k \cos^2(\alpha)} < \frac{1}{2},\ 1 \leq k \leq N \right\},$$

при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $P_{l(N)}$.

У теоремі 5.10 досліджено збіжність багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними (25) в області $D_{l(N)} = \bigcup_{\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)} D_{l(N),\alpha}$, де l_k, $1 \leq k \leq N$, — додатні числа,

$$D_{l(N),\alpha} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N} \frac{|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha})}{l_k \cos^2(\alpha)} < \frac{1}{2} \right\}. \tag{27}$$

При $N = 1$ із теореми 5.9 (або 5.10) випливає ознака збіжності для S-дробу

$$\frac{1}{1} + \frac{c_1 z}{1} + \frac{c_2 z}{1} + \frac{c_3 z}{1} + \ldots, \tag{28}$$

де $c_k > 0$ для $k \geq 1$.

Наслідок 5.2. *Нехай коефіцієнти* c_k, $k \geq 1$, S*-дробу* (28) *задовольняють нерівність* $c_k l \leq 1$ *для* $k \geq 1$, *де* l *— додатне число. Тоді* S*-дріб* (28) *збігається до функції, голоморфної в області* $H_l = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z + l/4)| < \pi\}$, *при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* H_l.

Далі у підрозділі 5.2 на основі теореми 2.1 досліджено збіжність багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними (24) в області

$$P_M = \bigcup_{\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)} \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \frac{|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha})}{\cos^2(\alpha)} < 2,\ |z_k| < M, 1 \leq k \leq N \right\},$$

де $M > 0$, (теорема 5.11), а на основі теорем 2.9 і 2.12 — багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними (25) в області

$$D = \bigcup_{\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)} \{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha}) < 2\cos^2(\alpha),\ 1 \leq k \leq N \}$$

(теореми 5.12 і 5.13).

Наостанок у цьому підрозділі отримано оцінки похибок наближень для багатовимірних S-дробів з нерівнозначними змінними.

Теорема 5.15. *Багатовимірний S-дріб з нерівнозначними змінними* (24) *із послідовністю підхідних дробів* $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ *і коефіцієнтами* $c_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 1$, *що задовольняють нерівність* $c_{i(k)}l_{i_k}\le 1$ *для всіх* $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 1$, *де* l_k, $1\le k\le N$, *— додатні числа, збігається до функції* $f(\mathbf{z})$ *в області* $\bigcup_{\alpha\in(-\pi/2,\pi/2)}\left(D_{l(N),\alpha}\bigcap O_{l(N),\alpha}\right)$, *де* $D_{l(N),\alpha}$ *означене в* (27),

$$O_{l(N),\alpha}=\{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N:$$
$$\frac{|z_k|}{l_k\cos^2(\alpha)}<\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}-\sum_{r=1}^{k}\frac{|z_r|-\operatorname{Re}(z_re^{-2i\alpha})}{2l_r\cos^2(\alpha)}\right)^{1/2}\right)^2,\ 1\le k\le N\right\},$$

і для кожного $\mathbf{z}\in(D_{l(N),\alpha}\bigcap O_{l(N),\alpha})$ *виконуються оцінки*

$$|f(\mathbf{z})-f_n(\mathbf{z})|\le\cos^2(\alpha)\sum_{\substack{|\mathbf{n}|=n+1\\ \mathbf{n}\ge\mathbf{0}}}\prod_{r=1}^{N}\frac{\left(\dfrac{|z_r|}{l_r\cos^2(\alpha)}\right)^{n_r}}{\left(\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{4}-\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\frac{|z_k|-\operatorname{Re}(z_ke^{-2i\alpha})}{2l_k\cos^2(\alpha)}\right)^{1/2}\right)^{2n_r}}$$

для $n\ge 1$ *і для кожного* $\alpha\in(-\pi/2,\pi/2)$.

Оцінки похибок наближень для багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними (25) отримано у теоремі 5.16.

У підрозділі 5.3 (теорема 5.17) показано, що парною частиною багатовимірного π-дробу з нерівнозначними змінними (15) є багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними (14), де $s_0=\pi_0$ і $g_{i(k)}=\pi_{i(k)}/(1+\pi_{i(k)})$ для всіх $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 1$, і на основі цього доведено таку теорему:

Теорема 5.18. *Багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними* (14) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області*

$$P=\bigcup_{\alpha\in(-\pi/2,\pi/2)}P_\alpha,\tag{29}$$

де

$$P_\alpha=\left\{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N:\ \sum_{k=1}^{N}\frac{|z_k|-\operatorname{Re}(z_ke^{-2i\alpha})}{\cos^2(\alpha)}<2\right\},\tag{30}$$

при цьому збігається рівномірною на кожній компактній підмножині області P.

Далі досліджено збіжність модифікованих багатовимірних g-дробів з нерівнозначними змінними: у теоремі 5.19 —

$$\frac{g_0}{1}+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{g_{i(1)}(1-g_0)z_{i_1}}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i_k}}{1},\tag{31}$$

де $0 < g_{i(k)} < 1$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 0$, в області (29), а у теоремі 5.20 —

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)}) z_{i_k}}{1}, \tag{32}$$

де $0 < g_{i(k)} < 1$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, в області $P \bigcap O_M$, де P означене в (29), $O_M = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N} |z_k| < M\}$, $M > 0$.

Наостанок у цьому підрозділі отримано оцінки похибок наближень для багатовимірних g-дробів з нерівнозначними змінними.

Теорема 5.21. *Багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними* (14) *із послідовністю підхідних дробів $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до функції $f(z)$ в області $\bigcup_{\alpha\in(-\pi/2,\pi/2)}(P_\alpha \bigcap O_\alpha)$, де P_α означене в* (30),

$$O_\alpha = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \; |z_k| < 4\cos^2(\alpha) - 2T \sum_{r=1}^{k} (|z_r| - \mathrm{Re}\,(z_r e^{-2i\alpha})), \; 1 \leq k \leq N \right\},$$

де

$$T = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(1 - \left(1 + \sum_{k=n}^{\infty} \prod_{r=n}^{k} \mu_r \right)^{-1} \right), \; \mu_r = \max_{i(r)\in\mathcal{I}_r} \frac{g_{i(r)}}{1-g_{i(r)}}, \; r \geq 1,$$

і для кожного $\mathbf{z} \in P_\alpha \bigcap O_\alpha$ виконуються оцінки

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \frac{16 s_0 \cos(\alpha) \sum\limits_{k=1}^{N} |z_k|}{\left(2\cos^2(\alpha) - T \sum\limits_{k=1}^{N} (|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha})) \right)^2} \times$$

$$\times \sum_{\substack{|\mathbf{n}|=n-1 \\ \mathbf{n}\geq\mathbf{0}}} \prod_{r=1}^{N} \frac{|z_r|^{n_r}}{\left(4\cos^2(\alpha) - 2T \sum\limits_{k=1}^{r} (|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha})) \right)^{n_r}}$$

для $n \geq 2$ і для кожного $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Оцінки похибок наближень для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними (31) і (32) отримано відповідно у теоремах 5.22 і 5.23.

В останньому підрозділі п'ятого розділу розглянуто багатовимірні приєднані дроби з нерівнозначними змінними і багатовимірні J-дроби з нерівнозначними змінними.

Теорема 5.24. *Нехай коефіцієнти* $p_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 2$, *багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (16) *задовольняють нерівність*

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{|p_{i(k)}| - \mathrm{Re}\,((-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)})}{l_{i_{k-1}} l_{i_k} g_{i(k-1)}(1 - g_{i(k)})} \le \frac{1}{2} \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \ge 2,$$

де l_k, $1 \le k \le N$, *— додатні числа,* $\{g_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}}$ *— послідовність дійсних чисел таких, що* $0 < g_{i(k)} < 1$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, *а коефіцієнти* $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, *— нерівність* $\mathrm{Re}\,(q_{i(k)}) \ge 0$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$. *Тоді багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними* (16) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області* $P_{l(N)} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : l_k|z_k| < 2\cos(\arg(z_k)),\ |\arg(z_k)| < \pi/2,\ 1 \le k \le N\}$, *якщо існує стала* $M > 0$ *така, що* $|p_{i(k)}| \le M$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, *при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $P_{l(N)}$.

У наслідку 5.3 із цієї теореми отримано умови збіжності багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (17) в області $R_{l(N)} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ \mathrm{Re}\,(z_k) > l_k/2,\ 1 \le k \le N\}$. Доведено таку теорему:

Теорема 5.25. *Нехай коефіцієнти* $p_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 2$, *багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (16) *задовольняють нерівність* $(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)} > 0$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 2$, *а коефіцієнти* $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, *— нерівність* $\mathrm{Re}\,(q_{i(k)}) \ge 0$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$. *Тоді багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними* (16) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області*

$$P = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ |\arg z_k| < \pi/2,\ 1 \le k \le N\right\}, \tag{33}$$

якщо існує стала $M > 0$ *така, що* $|p_{i(k)}| \le M$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, *при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* P.

Наслідком теореми 5.25 є наслідок 5.4 про збіжність багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (17) в області (33). У теоремі 5.26 досліджено збіжність багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (16) в області

$$D_{l(N)} = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ \sum_{k=1}^{N} \frac{l_k|z_k|}{\cos(\arg(z_k))} < 2,\ |\arg(z_k)| < \frac{\pi}{2},\ 1 \le k \le N\right\},$$

де l_k, $1 \le k \le N$, — додатні числа, а у наслідку 5.5 встановлено умови збіжності багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (17) в області

$$G_{l(N)} = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ \sum_{k=1}^{N} \frac{l_k}{\mathrm{Re}\,(z_k)} < 2,\ |\arg(z_k)| < \frac{\pi}{2},\ 1 \le k \le N\right\},$$

де l_k, $1 \le k \le N$, — додатні числа.

Далі у підрозділі 5.4 розглянуто багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{p_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)} z_{i_{k-1}} z_{i_k}}{1}, \tag{34}$$

де $p_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, і багатовимірний J-дріб з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)}}{z_{i_1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} c_{i(k)}}{z_{i_k}}, \tag{35}$$

де $c_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Нехай $\mathrm{Int}\,(D)$ — внутрішність зв'язної множини D в $\mathbb{C}^N$.

Теорема 5.27. *Нехай коефіцієнти* $p_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, *багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (34) *задовольняють нерівності*

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{|p_{i(1)}| - \mathrm{Re}\,(p_{i(1)})}{l_{i_1} g_0 (1 - g_{i(1)})} \le 1 - \varepsilon,$$

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{|p_{i(k)}| - \mathrm{Re}\,((-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)})}{l_{i_{k-1}} l_{i_k} g_{i(k-1)} (1 - g_{i(k)})} \le \frac{1-\varepsilon}{2} \ \text{\textit{для всіх}}\ \ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \ge 2,$$

де $0 < \varepsilon < 1$, l_k, $1 \le k \le N$, *— додатні числа,* $\{g_{i(k)}\}_{i(k) \in \mathcal{I}_k,\, k \in \mathbb{N}_0}$ *— послідовність дійсних чисел таких, що* $g_0 \ge 0$ *і* $0 \le g_{i(k)} \le 1 - \varepsilon$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$. *Тоді*

1) *для всіх* $\mathbf{z}$ *із множини*

$$P_{l(N),\varepsilon} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ \frac{l_k |z_k|}{\cos(\arg(z_k))} \le 2,\ |\arg(z_k)| < \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)},\ 1 \le k \le N \right\}$$

послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (34) *збігаються відповідно до скінченних значень* $g(\mathbf{z})$ *і* $h(\mathbf{z})$, *при цьому збігаються рівномірно на кожній компактній підмножині області* $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),\varepsilon})$, *а* $g(\mathbf{z})$, $h(\mathbf{z})$ *— голоморфні функції багатьох змінних в області* $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),\varepsilon})$;

2) *для кожного* $\mathbf{z} \in P_{l(N),\varepsilon}$ *багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними* (34) *збігається до скінченного значення* $f(\mathbf{z})$, *якщо ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\max_{i(k) \in \mathcal{I}_k} |p_{i(k)}| \Big)^{-1} \tag{36}$$

розбігається, при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),\varepsilon})$, *а* $f(\mathbf{z})$ *— голоморфна функція багатьох змінних в* $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),\varepsilon})$.

Із цієї теореми випливає наслідок 5.6 про збіжність багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (35) на множині $R_{l(N),\varepsilon} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ \mathrm{Re}\,(z_k) \geq l_k/2,\ |\arg(z_k)| < \pi/(2+2\varepsilon),\ 1 \leq k \leq N\}$, де $0 < \varepsilon < 1$, l_k, $1 \leq k \leq N$, — додатні числа. Далі доведено таку теорему:

Теорема 5.28. *Нехай коефіцієнти* $p_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (34) *задовольняють нерівності* $p_{i(1)} > 0$ *для всіх* $i(1) \in \mathcal{I}_1$ *і* $(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)} > 0$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$. *Тоді*

1) *послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (34) *збігаються до функцій багатьох змінних, голоморфних в області*

$$P_\varepsilon = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ |\arg(z_k)| < \pi/(2+2\varepsilon),\ 1 \leq k \leq N\right\}, \tag{37}$$

де $0 < \varepsilon < 1$, *при цьому збігаються рівномірно на кожній компактній підмножині області* P_ε;

2) *багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними* (34) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області* P_ε, *якщо ряд* (36) *розбігається, при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* P_ε.

Із теореми 5.28 випливає наслідок 5.7 про збіжність багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (35) в області (37). У теоремі 5.29 досліджено збіжність багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (34) на множині

$$D_{l(N),\varepsilon} = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ \sum_{k=1}^{N} \frac{l_k |z_k|}{\cos(\arg(z_k))} \leq 2,\ |\arg(z_k)| < \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)},\ 1 \leq k \leq N\right\},$$

де l_k, $1 \leq k \leq N$, — додатні числа, $0 < \varepsilon < 1$, а у наслідку 5.8 встановлено умови збіжності багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (35) на множині

$$G_{l(N),\varepsilon} = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ \sum_{k=1}^{N} \frac{l_k}{\mathrm{Re}\,(z_k)} \leq 2,\ |\arg(z_k)| < \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)},\ 1 \leq k \leq N\right\},$$

де l_k, $1 \leq k \leq N$, — додатні числа, $0 < \varepsilon < 1$.

Наостанок у цьому підрозділі розглянуто багатовимірний J-дріб з нерівнозначними змінними

$$-\sum_{i_1=1}^{N}\frac{c_{i(1)}^2}{d_{i(1)}+z_{i_1}}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{-c_{i(k)}^2}{d_{i(k)}+z_{i_k}}, \tag{38}$$

де $c_{i(k)}\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $d_{i(k)}\in\mathbb{C}$ для всіх $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$, і багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними

$$-\sum_{i_1=1}^{N}\frac{p_{i(1)}^2 z_{i_1}}{1+q_{i(1)}z_{i_1}}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{-p_{i(k)}^2 z_{i_{k-1}}z_{i_k}}{1+q_{i(k)}z_{i_k}}, \tag{39}$$

де $p_{i(k)}\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $q_{i(k)}\in\mathbb{C}$ для всіх $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$.

Теорема 5.30. *Нехай коефіцієнти* $c_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$, *багатовимірного* J*-дробу з нерівнозначними змінними* (38) *задовольняють нерівності*

$$\sum_{i_1=1}^{N}\frac{(\mathrm{Im}\,(c_{i(1)}))^2}{l_{i_1}g_0(1-g_{i(1)})}\leq 1-\varepsilon,$$

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{(\mathrm{Im}\,(c_{i(k)}))^2}{l_{i_{k-1}}l_{i_k}g_{i(k-1)}(1-g_{i(k)})}\leq 1-\varepsilon \text{ для всіх } i(k)\in\mathcal{I}_k,\ k\geq 2,$$

де $0<\varepsilon<1$, l_k, $1\leq k\leq N$, *— додатні числа,* $\{g_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\,k\in\mathbb{N}_0}$ *— послідовність дійсних чисел таких, що* $g_0\geq 0$ *і* $0\leq g_{i(k)}\leq 1-\varepsilon$ *для всіх* $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$, *а коефіцієнти* $d_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$, *такі, що* $\mathrm{Re}\,(d_{i(k)})=0$, $\mathrm{Im}\,(d_{i(k)})\geq 0$ *для всіх* $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$. *Тоді*

1) *для всіх* $\mathbf{z}$ *із множини* $P_{l(N),d,\varepsilon}=\{\mathbf{z}:\ \mathrm{Re}\,(d-iz_k)\geq l_k,\ |\arg(d-iz_k)|<\pi/(2+2\varepsilon),\ 1\leq k\leq N\}$, *де*

$$d=\inf_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\,k\in\mathbb{N}}\mathrm{Im}\,(d_{i(k)}), \tag{40}$$

послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного J*-дробу з нерівнозначними змінними* (38) *збігаються відповідно до скінченних значень* $g(\mathbf{z})$ *і* $h(\mathbf{z})$, *при цьому збігаються рівномірно на кожній компактній підмножині області* $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),d,\varepsilon})$, *а* $g(\mathbf{z})$ *і* $h(\mathbf{z})$ *— голоморфні функції багатьох змінних в* $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),d,\varepsilon})$;

2) *для кожного* $\mathbf{z}\in P_{l(N),d,\varepsilon}$ *багатовимірний* J*-дріб з нерівнозначними змінними* (38) *збігається до скінченного значення* $f(\mathbf{z})$, *якщо ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\max_{i(k)\in\mathcal{I}_k}|c_{i(k)}^2|\Big)^{-1} \tag{41}$$

розбігається, при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),d,\varepsilon})$, *а* $f(\mathbf{z})$ *— голоморфна функція багатьох змінних в* $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),d,\varepsilon})$.

Із цієї теореми отримано наслідок 5.9 про збіжність багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (39) на множині $P_{l(N),q,\varepsilon} = \{z \in \mathbb{C}^N : \operatorname{Re}(q - i/z_k) \geq l_k, |\arg(q - i/z_k)| < \pi/(2+2\varepsilon), 1 \leq k \leq N\}$, де l_k, $1 \leq k \leq N$, — додатні числа,

$$q = \inf_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}} \operatorname{Im}(q_{i(k)}), \tag{42}$$

$0 < \varepsilon < 1$. Доведено також таку теорему:

Теорема 5.31. *Нехай коефіцієнти* $d_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *багатовимірного* J*-дробу з нерівнозначними змінними* (38) *такі, що* $\operatorname{Re}(d_{i(k)}) = 0$, $\operatorname{Im}(d_{i(k)}) \geq 0$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *а* $c_{i(k)} > 0$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. *Тоді*

1) *послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного* J*-дробу з нерівнозначними змінними* (38) *збігаються до функцій багатьох змінних, голоморфних в області* $P_{d,\varepsilon} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |\arg(d - iz_k)| < \pi/(2+2\varepsilon), 1 \leq k \leq N\}$, *де* d *означене в* (40), $0 < \varepsilon < 1$, *при цьому збігаються рівномірно на кожній компактній підмножині області* $P_{d,\varepsilon}$;

2) *багатовимірний* J*-дріб з нерівнозначними змінними* (38) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області* $P_{d,\varepsilon}$, *якщо ряд* (41) *розбігається, при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $P_{d,\varepsilon}$.

Із цієї теореми випливає наслідок 5.10 про збіжність багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (39) в області $P_{q,\varepsilon} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |\arg(q - i/z_k)| < \pi/(2+2\varepsilon),\ 1 \leq k \leq N\}$, де q означене в (42), $0 < \varepsilon < 1$. У теоремі 5.32 досліджено збіжність багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (38) на множині

$$D_{l(N),d,\varepsilon} =$$
$$= \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ \sum_{k=1}^{N} \frac{l_k}{\operatorname{Re}(d - iz_k)} \leq 1,\ |\arg(d - iz_k)| < \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)},\ 1 \leq k \leq N\right\},$$

де l_k, $1 \leq k \leq N$, — додатні числа, d означене в (40), $0 < \varepsilon < 1$, а у наслідку 5.11 встановлено умови збіжності багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (39) на множині

$$D_{l(N),q,\varepsilon} =$$
$$= \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ \sum_{k=1}^{N} \frac{l_k}{\operatorname{Re}(q - i/z_k)} \leq 1,\ \left|\arg\left(q - \frac{i}{z_k}\right)\right| < \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)},\ 1 \leq k \leq N\right\},$$

де l_k, $1 \leq k \leq N$, — додатні числа, q означене в (42), $0 < \varepsilon < 1$.

У **шостому розділі** розглядається наближення деяких аналітичних функцій багатьох змінних функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними за допомогою алгоритмів, побудованих в четвертому розділі цієї дисертації. Зокрема побудовано зображення експоненціальної і степеневої функцій багатьох змінних багатовимірними регулярними C-дробами з нерівнозначними змінними. На числових прикладах показано ефективність побудованих наближень.

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено класичним задачам дослідження збіжності функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, деяким питанням відповідності, побудові алгоритмів розвинення заданих формальних кратних степеневих рядів у функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними, а також застосуванню цих гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними до наближення деяких аналітичних функцій багатьох змінних. У роботі отримано такі наукові результати:

1. Встановлено нове багатовимірне узагальнення ознаки збіжності Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними і нові ефективні ознаки збіжності для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні ланки яких мають вигляд $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$, а також вигляд $\frac{q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$.

2. Описано загальну теорію відповідності для послідовностей функцій багатьох змінних $\{R_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, мероморфних в точці $\mathbf{z}=\mathbf{0}$ (тобто у відкритому полікрузі, який містить початок координат), де $R_n(\mathbf{z})$ — функція багатьох змінних, для якої існує мультиіндекс $\mathbf{m}\in\mathbb{N}_\mathbf{0}^N$ такий, що $R_n(\mathbf{z})\mathbf{z}^\mathbf{m}$ є голоморфною в точці $\mathbf{z}=\mathbf{0}$ для кожного $n\geq 0$.

Означено класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, які є багатовимірними узагальненнями відповідних класів функціональних неперервних дробів.

Досліджено властивості відповідності для багатовимірних регулярних C-дробів з нерівнозначними змінними, для багатовимірних g-дробів з нерівнозначними змінними, для багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і для багатовимірних J-дробів з нерівнозначними змінними.

3. Побудовано алгоритми розвинення заданого формального кратного степеневого ряду у багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними і у багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними та встановлено необхідні і достатні умови існування цих алгоритмів. Побудовано багатовимірний qd-алгоритм Рутісхаузера розвинення заданого формального кратного степеневого ряду у відповідний багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними та встановлено необхідні і достатні умови існування цього алгоритму.

Встановлено нові необхідні і достатні умови існування багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними, відповідного до заданого формального кратного степеневого ряду.

Побудовано багатовимірний g-алгоритм Бауера розвинення формального кратного степеневого ряду у багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними та встановлено необхідні і достатні умови існування цього алгоритму.

4. Доведено, що перетин параболічної і кругової областей є областю збіжності багатовимірного регулярного C-дробу з нерівнозначними змінними, а параболічна область — областю збіжності оберненого до нього багатовимірного регулярного C-дробу з нерівнозначними змінними.

Доведено, що об'єднання перетинів параболічних і кругових областей є областю збіжності багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними, а об'єднання параболічних областей — областю збіжності оберненого до нього багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними, і, як наслідки із цих результатів, отримано дві нові ознаки збіжності для S-дробів.

Отримано нові оцінки похибок наближень для багатовимірних S-дробів з нерівнозначними змінними в деяких обмежених областях із $\mathbb{C}^N$.

Доведено, що об'єднання параболічних областей є областю збіжності багатовимірного g-дробу з нерівнозначними змінними і різних його модифікацій та отримано оцінки похибок наближень для цих гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними в деяких обмежених областях із $\mathbb{C}^N$.

Доведено, що кругові і кутові області є областями збіжності багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних J-дробів з нерівнозначними змінними.

Доведено збіжність послідовностей парних і непарних підхідних дробів багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних J-дробів з нерівнозначними змінними в деяких підмножинах із $\mathbb{C}^N$ і їх рівномірну збіжність на компактних підмножинах областей із $\mathbb{C}^N$, які є внутрішностями цих підмножин, а також доведено, що умовою збіжності для багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних J-дробів з нерівнозначними змінними в підмножинах із $\mathbb{C}^N$ є розбіжність рядів, складених із коефіцієнтів елементів цих гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними.

5. Побудовано наближення деяких аналітичних функцій багатьох змінних функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними і показано ефективність цих наближень.

Результати дисертаційної роботи є внеском в аналітичну теорію неперервних та гіллястих ланцюгових дробів. Встановлені ознаки збіжності для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні знаменники яких дорівнюють одиниці, та запропоновані підходи до дослідження збіжності функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними можна використати для дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів загального вигляду, а побудовані алгоритми розвинення заданих формальних кратних степеневих рядів у функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними можна застосувати до наближення аналітичних функцій багатьох змінних, які виникають у прикладних задачах математики, фізики та інженерії.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Дмитришин Р. І. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів із частинними ланками вигляду $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i_k}}{1}$ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2000. — Т. 43, № 4. — С. 31–36.

2. Bodnar D. I., Dmytryshyn R. I. On the convergence of multidimensional g-fraction // Mat. Stud. — 2001. — Vol. 15, No. 2. — P. 115–126.

3. Dmytryshyn R. I. The multidimensional generalization of g-fractions and their application // J. Comput. Appl. Math. — 2004. — Vol. 164–165. — P. 265–284.

4. Дмитришин Р. І. Про збіжність багатовимірного g-дробу з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2005. — Т. 48, № 4. — С. 121–127.

5. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Двовимірне узагальнення g-алгоритму Бауера // Доп. НАН України. — 2006. — № 2. — С. 13–18.

6. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Про деякі ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Вісн. Львівського ун-ту, Сер. “Мех.-мат.”. — 2008. — Вип. 68. — С. 28–36.

7. Дмитришин Р. І. Ефективна ознака збіжності деякого гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту, Сер. “Матем.”. — 2008. — Вип. 374. — С. 44–49.

8. Dmytryshyn R. I. The multidimensional g-fraction with nonequivalent variables corresponding to the formal multiple power series // Carpathian Math. Publ. — 2009. — Vol. 1, № 2. — P. 145–151.

9. Дмитришин Р. І. Про розвинення деяких функцій у двовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2010. — Т. 53, № 4. — С. 28–34. (Те саме: Dmytryshyn R. I. On the expansion of some functions in a two-dimensional g-fraction with independent variables // J. Math. Sci. — 2012. — Vol. 181, № 3. — P. 320–327.)

10. Дмитришин Р. І. Про деякі області збіжності багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними // Матем. вісник НТШ. — 2011. — Т. 8. — С. 69–77.

11. Дмитришин Р. І. Багатовимірне узагальнення g-алгоритму Бауера // Карпатські матем. публ. — 2012. — Т. 4, № 2. — С. 247–260.

12. Dmytryshyn R. I. The two-dimensional g-fraction with independent variables for double power series // J. Approx. Theory. — 2012. — Vol. 164, Iss. 12. — P. 1520–1539.

13. Дмитришин Р. І. Двовимірне узагальнення qd-алгоритму Рутисхаузера // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2013. — Т. 56, № 4. — С. 6–11. (Те саме: Dmytryshyn R. I. Two-dimensional generalization of the Rutishauser qd-algorithm // J. Math. Sci. — 2015. — Vol. 208, Iss. 3. — P. 301–309.)

14. Дмитришин Р. І. Регулярний двовимірний C-дріб з нерівнозначними змінними для подвійного степеневого ряду // Буковинський мат. журн. — 2013. — Т. 1, № 1–2. — С. 55–57.

15. Дмитришин Р. І. Приєднані гіллясті ланцюгові дроби з двома нерівнозначними змінними // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, № 9. — С. 1175–1184. (Те саме: Dmytryshyn R. I. Associated branched continued fractions with two independent variables // Ukr. Math. J. — 2015. — Vol. 66, No. 9. — P. 1312–1323.)

16. Dmytryshyn R. I. A multidimensional generalization of the Rutishauser qd-algorithm // Carpathian Math. Publ. — 2016. — Vol. 8, № 2. — P. 230–238.

17. Дмитришин Р. І. Про збіжність багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними // Буковинський мат. журн. — 2017. — Т. 5, № 3–4. — С. 71–76.

18. Dmytryshyn R. I. Convergence of some branched continued fractions with independent variables // Mat. Stud. — 2017. — Vol. 47, No. 2. — P. 150–159.

19. Dmytryshyn R. I. On the convergence criterion for branched continued fractions with independent variables // Carpathian Math. Publ. — 2017. — Vol. 9, № 2. — P. 120–127.

20. Дмитришин Р. І. Оцінки похибок наближень для багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними // Буковинський мат. журн. — 2018. — Т. 6, № 1–2. — С. 56–59.

21. Bodnar O. S., Dmytryshyn R. I. On the convergence of multidimensional S-fractions with independent variables // Carpathian Math. Publ. — 2018. — Vol. 10, № 1. — P. 58–64.

22. Dmytryshyn R. I. On the convergence of multidimensional regular C-fractions with independent variables // Visn. Dnipro univ., Ser. Mat. — 2018. — Vol. 26. — P. 18–24.

23. Dmytryshyn R. I. On the convergence of multidimensional g-fraction // Междунар. конф. "VIII Белорусская математическая конференция" (Минск, Беларусь, 19–24 июня 2000 г.): тезисы докл. — В 2 ч.: ч. 1. — Минск, 2000. — С. 4.

24. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Дослідження збіжності різних типів гіллястих ланцюгових дробів // Конф. "Функціональні методи в теорії наближень, теорії операторів, стохастичному аналізі та статистиці" (Київ, 19–22 жовтня 2001 р.): тези доп. — Київ, 2001. — С. 7–8.

25. Bodnar D. I., Dmytryshyn R. I. On the convergence speed of multidimensional g-fraction in the some domain of the space $\mathbb{C}^N$ // International Congress on Computational and Applied Mathematics (Leuven, Belgium, 22–26 July, 2002): Abstracts of talks ICCAM-2002. — Leuven, 2002. — P. 35.

26. Dmytryshyn R. I. The multidimensional generalization of g-fractions // Міжнар. школа-семінар "Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування", присвячена 75-річчю з дня народження проф. В. Я. Скоробогатька (Ужгород, 19–24 серпня 2002 р.): тези доп. — Ужгород, 2002. — С. 15–16.

27. Дмитришин Р. І. Про область збіжності багатовимірного J-дробу // III всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 9–12 вересня 2003 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2003. — С. 32.

28. Дмитришин Р. І. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів із частинними ланками вигляду $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i_k}}{1}$ // X міжнар. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 13–15 травня 2004 р.): матеріали конф. — Київ: ТОВ "Задруга", 2004. — С. 368.

29. Dmytryshyn R. I. The two-dimensional g-fraction with nonequivalent variables for double power series // International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2005 (Rhodes, Greek, 16–20 September 2005): Proc. of ICNAAM 2005. — Weinheim: Wiley-VCH, 2005. — P. 156–159.

30. Дмитришин Р. І. Про ознаку збіжності гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними // Міжнар. наук. конф. "Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування" (Ужгород, 18–23 вересня 2006 р.): тези доп. — Київ: Ін-т матем. НАН України, 2006. — С. 186–187.

31. Dmytryshyn R. I. One example of the two-dimensional g-fraction with nonequivalent variables expansion for the double power series // Міжнар. матем. конф. ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 24–28 вересня 2007 р.): тези доп. — Львів, 2007. — С. 92.

32. Дмитришин Р. І. Про одиничну полікругову область збіжності багатовимірного g-дробу з нерівнозначними змінними // Дванадцята міжнар. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 15–17 травня 2008 р.): матеріали конф. — Київ: ТОВ "Задруга", 2008. — С. 604.

33. Dmytryshyn R. I. The correspondence between the formal multiple power series and multidimensional g-fraction with nonequivalent variables // Тринадцята міжнар. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 13–15 травня 2010 р.): матеріали конф. — В 2 т.: т. 2. — Київ: НТУУ "КПІ", 2010. — С. 14.

34. Дмитришин Р. І. Про багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними // Міжнар. конф. з комплексного аналізу пам'яті А. А. Гольдберга (1930-2008) (Львів, 31 травня – 5 червня 2010 р.): тези доп. — Львів, 2010. — С. 91–92.

35. Дмитришин Р. І. Про деякі області збіжності багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними // Міжнар. матем. конф. ім. В. Я. Скоробогатька

(Дрогобич, 19–23 вересня 2011 р.): тези доп. — Львів, 2011. — С. 65.

36. Dmytryshyn R. I. The correspondence between the formal multiple power series and multidimensional g-fraction with independent variables // Міжнар. конф. "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942-2007) (Кам'янець-Подільський, 28 травня – 3 червня 2012 р.): тези доп. — Київ: Ін-т матем. НАН України, 2012. — С. 121–122.

37. Дмитришин Р. І. Приєднаний ГЛД з двома нерівнозначними змінними для ФПСР // Міжнар. матем. конф. "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування", з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка (Севастополь, 23–30 червня 2013 р.): тези доп. — Київ: Ін-т матем. НАН України, 2013. — С. 233.

38. Дмитришин Р. І. Двовимірний C-дріб з нерівнозначними змінними для формального подвійного степеневого ряду // Міжнар. наук. конф. "Теорія наближень і її застосування", з нагоди 75-річчя Віталія Павловича Моторного (Дніпропетровськ, 8–11 жовтня 2015 р.): тези доп. — Дніпропетровськ, 2015. — С. 35.

39. Дмитришин Р. І. Про відповідність регулярного багатовимірного C-дробу з нерівнозначними змінними // Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2017. — С. 76–77.

40. Дмитришин Р. І. Про приєднаний багатовимірний дріб з нерівнозначними змінними // Міжнар. конф. "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007) (Слов'янськ, 28 травня – 3 червня 2017 р.): тези доп. — Слов'янськ: ДДПУ, 2017. — С. 56.

41. Дмитришин Р. І. Про збіжність регулярних багатовимірних C-дробів з нерівнозначними змінними // Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2018. — С. 52–54.

42. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Про збіжність багатовимірних S-дробів з нерівнозначними змінними // Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях", присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (Чернівці, 17–19 вересня 2018 р.): матеріали конф. — Чернівці, 2018. — С. 166–167.

43. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Послідовність мероморфних функцій багатьох змінних відповідна до формального кратного ряду Лорана // VI всеукр. наук. конф. імені Б. В. Василишина "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ – Микуличин, 26–28 вересня 2018 р.): тези доп. — Івано-Франківськ,

2018. — С. 9–11.

44. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Про збіжність деяких класів гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Сучасні проблеми механіки та математики: зб. наук. праць у 3-х т. — Електрон. текст. дані. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2018. — Т. 1. — С. 25-27. — URL: http://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018 (дата звернення: 26.12.2018).

АНОТАЦІЇ

Дмитришин Р. І. Деякі класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними і кратні степеневі ряди. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Інститут математики НАН України, Київ, 2019.

У дисертаційній роботі встановлено ознаки збіжності для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні знаменники яких дорівнюють одиниці. Описано загальну теорію відповідності для послідовностей функцій багатьох змінних, мероморфних в початку координат. Проведено класифікацію функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними і для деяких із них досліджено властивості відповідності. Побудовано і досліджено алгоритми розвинення заданого формального кратного степеневого ряду у багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними і багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними, а також побудовано і досліджено багатовимірний qd-алгоритм Рутісхаузера і багатовимірний g-алгоритм Бауера. Досліджено збіжність функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними. Встановлено ознаки збіжності для S-дробів. Отримано оцінки похибок наближень для багатовимірних S-дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних g-дробів з нерівнозначними змінними в деяких обмежених областях із $\mathbb{C}^N$. Побудовано розвинення деяких аналітичних функцій багатьох змінних, зображених формальними кратним степеневими рядами, у відповідні функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними і на числових прикладах показано ефективність побудованих наближень.

Ключові слова: гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними, класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, формальні кратні ряди Лорана, формальні кратні степеневі ряди, збіжність, абсолютна збіжність, рівномірна збіжність, відповідність, алгоритми побудови функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, відповідних до формальних кратних степеневих рядів, оцінки похибок наближень, наближення аналітичних функцій багатьох змінних функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними.

Дмитришин Р. И. Некоторые классы функциональных ветвящихся цепных дробей с неравнозначными переменными и кратные степенные ряды. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2019.

В диссертационной работе установлены признаки сходимости для ветвящихся цепных дробей с неравнозначными переменными, частные знаменатели которых равны единице. Описана общая теория соответствия последовательностей функций многих переменных, мероморфных в начале координат. Проведена классификация функциональных ветвящихся цепных дробей с неравнозначными переменными и для некоторых из них исследованы свойства соответствия. Построены и исследованы алгоритмы разложения заданного формального кратного степенного ряда в многомерную регулярную C-дробь с неравнозначными переменными и многомерную присоединенную дробь с неравнозначными переменными, а также построены и исследованы многомерный qd-алгоритм Рутисхаузера и многомерный g-алгоритм Бауэра. Исследована сходимость функциональных ветвящихся дробей с неравнозначными переменными. Установлены признаки сходимости для S-дробей. Установлены оценки погрешностей приближений для многомерных S-дробей с неравнозначными переменными и многомерных g-дробей с неравнозначными переменными в некоторых ограниченных областях из $\mathbb{C}^N$. Построены разложения некоторых аналитических функций многих переменных, представленных формальными кратными степенными рядами, в соответствующие функциональные ветвящиеся цепные дроби с неравнозначными переменными и на численных примерах показана эффективность построенных приближений.

Ключевые слова: ветвящиеся цепные дроби с неравнозначными переменными, классы функциональных ветвящихся цепных дробей с неравнозначными переменными, формальные кратные ряды Лорана, формальные кратные степенные ряды, сходимость, абсолютная сходимость, равномерная сходимость, соответствие, алгоритмы построения функциональных ветвящихся цепных дробей с неравнозначными переменными, соответсвующих формальным кратным степенным рядам, оценки погрешностей приближений, приближения аналитических функций многих переменных функциональными ветвящимися цепными дробями с неравнозначными переменными.

Dmytryshyn R. I. Some classes of functional branched continued fractions with independent variables and multiple power series. — Qualifying scientific work on rights of manuscript.

The thesis for obtaining the Doctor of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.01 — mathematical analysis. — Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2019.

The thesis is related to the classical problems of investigation of the convergence of certain classes of functional branched continued fractions with independent variables, to some questions of correspondence, to construction of algorithms for the expansion of given formal multiple power series into the functional branched continued fractions with independent variables, and to application of these branched continued fractions with independent variables to the approximation of some analytic multivariable functions.

The multidimensional generalization of the classical Worpitzky's criterion of convergence for a branched continued fractions with independent variables is established. The effective criterions of convergence are established for branched continued fractions with independent variables, whose partial denominators are equal to units.

We describe the general theory of correspondence for the sequences of multivariable functions meromorphic at the origin. A classification of functional branched continued fractions with independent variables, which are multidimensional generalizations of the corresponding classes of functional continued fractions, is carried out. The correspondence properties are investigated for the multidimensional regular C-fractions with independent variables and for their special case of multidimensional g-fractions with independent variables, as well as for closely connected multidimensional associated fractions with independent variables and multidimensional J-fractions with independent variables.

The algorithms for the expansion of given formal multiple power series into a multidimensional regular C-fraction with independent variables and a multidimensional associated fraction with independent variables have been constructed. And also a multidimensional Rutishauser qd-algorithm and a multidimensional Bauer g-algorithm are constructed. For each algorithm, the necessary and sufficient conditions for its existence are established. In addition, the necessary and sufficient conditions for the existence of a multidimensional S-fraction with independent variables corresponding to given formal multiple power series are established.

The convergence of multidimensional regular C-fractions with independent variables and multidimensional S-fractions with independent variables are investigated. In particular, it is proved that the union of the intersections of the parabolic and circular domains is the domain of convergence of the multidimensional S-fractions with independent variables, and the union of parabolic domains is the domain of convergence of the branched continued fractions with independent variables, reciprocal to it. The criterions of convergence for S-fractions are established. The truncation error bounds for the multidimensional S-fractions with independent variables are obtained in some constrained domains of $\mathbb{C}^N$.

It is shown that a multidimensional g-fraction with independent variables is an even part of multidimensional π-fraction with independent variables. On the basis of this, it is proved that the union of parabolic domains is the domain of convergence of a multidimensional g-fractions with independent variables and its various modifications, and the truncation error bounds for these branched continued fractions with independent variables are obtained in some constrained domains of $\mathbb{C}^N$.

It was proved that the circular and angular domains are domains of convergence of multidimensional associated fractions with independent variables and multidimensional J-fractions with independent variables. Also, the convergence of sequences of even and odd approximants of these branched continued fractions with independent variables are proved in some subsets of $\mathbb{C}^N$ and their uniform convergence are proved on compact subsets of domains of $\mathbb{C}^N$, which are the interiors of these subsets. In addition, it is proved that the divergent of the series composed of the coefficients of elements of multidimensional associated fractions with independent variables and multidimensional J-fractions with independent variables are a condition of convergence for these branched continued fractions with independent variables in some subsets of $\mathbb{C}^N$.

The expansions of some analytic multivariable functions, represented by formal multiple power series, into corresponding functional branched continued fractions with independent variables are constructed. The numerical examples show the efficiency of constructed approximations.

Key words: branched continued fractions with independent variables, classes of functional branched continued fractions with independent variables, formal multiple Laurent series, formal multiple power series, convergence, absolutely convergence, uniform convergence, correspondence, algorithms of constructing functional branched continued fractions with independent variables that correspond to formal multiple power series, truncation error bounds, approximation of analytic multivariable functions by functional branched continued fractions with independent variables.

Підписано до друку 11.04.2019.
Формат 60 × 84/16. Папір офсетний. Друк цифровий.
Умовн. друк. арк. 1,86.
Наклад 100 примірників. Зам № 015/04/19

ВИДАВНИЦТВО “НАІР”
76014, м. Івано-Франківськ, вул. Височана, 18, тел. (034) 250-57-82

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виробників і розповсюджувачів видавничої продукції № 4191 від 12.11.2011 р.