

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Г. П. Пелюх
А. Н. Шарковский

**МЕТОД ИНВАРИАНТОВ
В ТЕОРИИ
ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ**

КИЕВ 2013

ПРАЦІ
Інституту математики
НАН України
Математика та її застосування
Том 95

Головний редактор

А. М. Самойленко

Редакційна рада:

Ю. М. Березанський, М. Л. Горбачук, А. А. Дороговцев, Ю. А. Дрозд,
Ю. Б. Зелінський, В. С. Королук, А. Н. Кочубей, І. О. Луковський,
В. Л. Макаров, А. Г. Нікітін, В. В. Новицький, М. В. Працьовитий,
О. А. Ребенко, А. С. Романюк, Ю. С. Самойленко, С. Г. Солодкий,
П. М. Тамразов, В. В. Шарко, О. М. Шарковський

Засновано в 1994 році

**Г. П. Пелюх
А. Н. Шарковский**

**МЕТОД ИНВАРИАНТОВ
В ТЕОРИИ
ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ**

УДК 517.949

Метод инвариантов в теории функциональных уравнений / Пелюх Г. П., Шарковский А. Н. // Праці інституту математики НАН України. Т. 95 – Киев: Ін-т математики НАН України, 2013. – 255 с.

В монографії излагається метод інваріантів применительно к класическим функціональним рівнянням. Изучаються як лінійні, так і нелінійні рівняння, приводяться типові приклади. Розглядаються також диференціально-функціональні рівняння.

Книга розрахована на студентів, аспірантів і широкий круг спеціалістів, інтересуються функціональними, різностними, диференціальними і диференціально-різностними рівняннями.

*Утверждено к печати ученым советом
Института математики НАН Украины*

ISBN 966-02-2571-7
ISBN 978-966-02-6530-1

© Інститут математики НАН України
© Г.П. Пелюх, А.Н. Шарковский, 2013

Содержание

Предисловие	5
Введение	7
Глава 1	
Основные понятия	10
Глава 2	
Линейные функциональные уравнения	29
§ 1. Уравнения с постоянными коэффициентами	29
§ 2. Уравнения с переменными коэффициентами	42
§ 3. Неоднородные уравнения с переменными коэффициентами	48
§ 4. Линейные уравнения с нелинейным отклонением аргумента	59
§ 5. Уравнения, у которых отклонение аргумента содержит неизвестную функцию	67
§ 6. Уравнения с несколькими отклонениями аргумента	87
§ 7. Линейные уравнения с многими независимыми переменными	102
Глава 3	
Нелинейные функциональные уравнения	109
§ 1. Общее решение некоторых классов нелинейных уравнений	109
§ 2. Линеаризация отображения в окрестности неподвижной точки	128
§ 3. Представление решений нелинейных уравнений в окрестности особой точки	135
§ 4. Характеризация элементарных функций	144
§ 5. Уравнения с отклонениями аргумента, зависящими от неизвестной функции	150
Глава 4	
Дифференциально-функциональные уравнения	158
§ 1. Вполне интегрируемые уравнения	159
§ 2. Линейные дифференциально-функциональные уравнения	171
§ 3. Дифференциально-функциональные уравнения с конечной группой преобразований аргумента	179

Список литературы	204
<i>Добавление (Е.Ю.Романенко, А.Н.Шарковский)</i>	
К теории разностных уравнений с непрерывным временем .	212
§ 1. Вступление	212
§ 2. Асимптотически разрывные решения	216
§ 3. Периодичность в асимптотической динамике решений . . .	218
§ 4. Специфические особенности решений	223
§ 5. Явление автостохастичности	226
§ 6. Пример: квадратичная нелинейность	232
§ 7. Коротко о приложениях	244
Предметный указатель	254

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга — это существенно расширенное переиздание книги, которая вышла в далеком 1974 году в издательстве “Наукова Думка” под названием “Введение в теорию функциональных уравнений”. С тех пор прошло почти 40 лет и она стала и практически недоступной, да и вообще мало известной современному читателю. Вместе с тем, с конструктивными методами, которые позволяют строить решения различных классов функциональных уравнений, желательно быть знакомым каждому, кому приходится иметь с ними дело, а уравнения такого типа сейчас встречаются нередко и в самых разных областях. Поэтому естественно и возникла идея нового издания книги с определенными дополнениями, которые расширили бы круг рассматриваемых вопросов. А поскольку главное место в книге отведено конструктивным методам построения решений функциональных уравнений, основанным на сведении задачи построения решений к задаче отыскания инвариантных множеств динамических систем, порождаемых этими уравнениями, то показалось разумным использовать новое название, которое более точно отражает содержание этой книги.

В книге представлены методы построения инвариантов функциональных уравнений — функций, инвариантных (сохраняющих свои значения) вдоль решений и, таким образом, являющихся аналогами первых интегралов для дифференциальных уравнений. Среди новых классов уравнений, которые можно найти в книге, — уравнения со многими отклонениями аргумента, уравнения со многими независимыми переменными, уравнения с дробно-линейными преобразованиями аргумента.

Отдельно следует сказать о списке литературы, который приведен в конце основного текста книги. Мы решили полностью сохранить список издания 1974 года и ничего в него не добавлять. Сейчас Интернет позволяет без особых усилий получить практически всю информацию о имеющейся в настоящий момент литературе.

Мы посчитали целесообразным включить в книгу Добавление “К теории разностных уравнений с непрерывным временем”. Эти уравнения можно рассматривать как специальный класс функциональных уравнений с простейшим отклонением аргумента — постоянным сдвигом. При исследовании таких уравнений основным становится вопрос об асимптотическом поведении решений (при $t \rightarrow \infty$), а не о явном их представлении, что для нелинейных уравнений обычно и нельзя сделать. Здесь кратко подытожены исследования по нелинейным разностным уравнениям с непрерывным временем, которые проводились в Институте математики НАН Украины на протяжении многих лет и позволили заложить основы качественной теории для такого класса уравнений. Внешняя простота разностных уравнений весьма обманчива: уже уравнения с квадратичной нелинейностью обладают широким набором решений от асимптотически постоянных до квазислучайных, свойства которых на больших временах описываются стохастическими процессами. И наша цель здесь, не вдаваясь в детали, показать исключительную сложность, скрытую в совсем простых, но нелинейных, разностных уравнениях, и дать самое общее представление о том, как эта сложность генерируется задающими нелинейностью отображениями. Конечно, этот раздел существенно отличается от текста основной части книги и своей тематикой, и стилем изложения результатов.

Авторы благодарят своих коллег Елену Юрьевну Романенко, Андрея Григорьевича Сивака и Абдывали Абдыгалиевича Акбергенова за разностороннюю помощь в подготовке к переизданию нашей книги.

Г.П.Пелюх
А.Н.Шарковский

ВВЕДЕНИЕ

История функциональных уравнений насчитывает более двух столетий. Впервые мы встречаем функциональные уравнения в работах д'Аламбера, Эйлера, Кондорсе, Лапласа. Многие крупные математики уделяли внимание функциональным уравнениям и в дальнейшем. Это объясняется не только внутренней привлекательностью функциональных уравнений, но и тем, что многие вопросы математики, механики, физики и т. д. сводятся к изучению функциональных уравнений. Знакомясь сейчас с различными разделами математики, мы сталкиваемся с уравнениями, носящими имена Коши, Абеля и других известных ученых.

В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных функциональным уравнениям. Если в первых работах содержатся лишь отдельные функциональные уравнения, то последние десятилетия характеризуются исследованиями целых классов уравнений в самых различных направлениях.

К классическим функциональным уравнениям относят уравнения, в которых все операции над аргументом и неизвестной функцией исчерпываются отображениями конечномерных пространств. При этом под функциональными уравнениями понимают обычно два существенно различающихся класса уравнений.

Пусть U, V — конечномерные пространства и $x(t): U \rightarrow V$ — неизвестная функция. Если аргумент неизвестной функции не подвергается никаким преобразованиям, то уравнение $\Phi(t, x(t)) = 0$, где $\Phi: U \times V \rightarrow V$, задает неявную функцию $x(t)$. Функциональные уравнения появляются в том случае, если над аргументом совершаются некоторые преобразования.

Пусть $f: U \rightarrow U$ — отображение, преобразующее область определения неизвестной функции в себя. В таком случае функция $\Phi: U \times V \times V \rightarrow V$ задает функциональное уравнение

$$\Phi(t, x(t), x(f(t))) = 0$$

с одним отклонением аргумента. Примером такого уравнения является уравнение Абеля

$$x(f(t)) = x(t) + 1.$$

Если имеется не одно, а несколько отображений $f_1, f_2, \dots, f_k: U \rightarrow U$, то

$$\Phi(t, x(t), x(f_1(t)), \dots, x(f_k(t))) = 0$$

представляет собой функциональное уравнение с несколькими отклонениями аргумента. Кроме того, отклонения аргумента сами могут зависеть от неизвестной функции, т. е. f (или f_i): $U \times V \rightarrow U$. Частным случаем таких уравнений являются уравнения в конечных разностях.

Преобразование аргумента можно строить иначе, беря в качестве области определения не один, а несколько экземпляров U . При этом, как говорят, появляются свободные переменные. Пусть f_1, f_2, \dots, f_k — отображения $U \times U \times \dots \times U \rightarrow U$. Тогда

$$\Phi(t_1, \dots, t_m, x(f_1(t_1, \dots, t_m)), \dots, x(f_k(t_1, \dots, t_m))) = 0$$

представляет собой функциональное уравнение со свободными переменными. Примером такого уравнения является уравнение Коши

$$x(t_1 + t_2) = x(t_1) + x(t_2).$$

Если $U = U' \times \dots \times U'$, то преобразование аргумента можно строить, используя не целое U , а его составляющие, как, например, в уравнении Пуассона

$$x(t_1, t_2) = x(t_2, t_3) x(t_3, t_1).$$

Эти два класса функциональных уравнений — без свободных переменных и со свободными переменными — существенно различаются как методами исследования, так и характером результатов. Основные положения теории и методы исследования функциональных уравнений отражены в ряде монографий. Отметим монографию М. Кучмы [30], посвященную функциональным уравнениям без свободных переменных, и монографию Я. Ацеля [8], в которой рассматриваются функциональные уравнения со свободными переменными.

В настоящей монографии изучаются, в основном, функциональные уравнения первого типа, без свободных переменных. Мы рассматриваем уравнения с одним отклонением аргумента. Методы, которые здесь излагаются, вообще говоря, неприменимы к исследованию уравнений с несколькими отклонениями аргумента. Наконец, мы ограничиваемся

уравнениями с одной независимой вещественной переменной, хотя вся теория без существенных изменений переносится на функциональные уравнения со многими независимыми переменными.

Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Мы будем рассматривать функциональные уравнения

$$x(f(t)) = G(t, x(t)), \quad (1)$$

где $x(t)$ — неизвестная функция $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $G: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — заданные однозначные функции.

Функция $f(t)$ задает сдвиг, или преобразование $t \mapsto f(t)$ и отклонение $\Delta = t - f(t)$ аргумента.

Наряду с уравнениями вида (1) будут рассматриваться и более сложные уравнения

$$x(f(t, x(t))) = G(t, x(t)), \quad (2)$$

в которых сдвиг аргумента сам зависит от неизвестной функции.

Будем говорить, что однозначная функция $w(t)$ является решением уравнения (1) при $t = t'$, если подстановка $x(t) = w(t)$ обращает уравнение (1) в равенство при $t = t'$. Функция $w(t)$ является решением уравнения (1) на некотором множестве, если она является решением уравнения (1) в каждой точке этого множества.

Область определения функции $w(t)$, задающей решение, и область определения самого решения, вообще говоря, не совпадают: если решение уравнения (1) определено при $t = t'$, то функция $w(t)$ должна быть определена как при $t = t'$, так и при $t = f(t')$.

Аналогично определяется решение уравнения (2).

Например, уравнение $x(2t) = 2x(t)$, $x(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет в качестве решений функции $x(t) = \alpha \cdot t$, α — произвольная постоянная. Уравнение $x(-t) = bx(t)$ при $|b| \neq 1$ имеет единственное решение $x(t) = 0$, определенное одновременно при $t = t'$ и $-t'$, каково бы ни было $t' \neq 0$; при $b = 1$ решением уравнения является любая четная, а при $b = -1$ — любая нечетная функции.

Пусть $x(t)$ — решение функционального уравнения (1) или (2), определенное на некотором множестве $U \subset \mathbb{R}$, и $\Gamma_{x(t)} = \{(t, x) : t \in U, x = x(t)\}$ — его график в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Если $t_0 \in U$ и $x_0 = x(t_0)$, то $(t_0, x_0) \in \Gamma_{x(t)}$. Если $t_1 = f(t_0, x_0)$ и $t_1 \in U$, то согласно (1) (или (2)) $x_1 = x(t_1) = G(t_0, x_0)$. Следовательно, точка $(f(t_0, x_0), G(t_0, x_0))$ также принадлежит $\Gamma_{x(t)}$. Это означает, что отображение

$$S: \begin{cases} t \mapsto f(t) & (\text{или } f(t, x)), \\ x \mapsto G(t, x), \end{cases} \quad (3)$$

действующее из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, отображает график решения $x(t)$, расположенный в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ в себя (точнее, образ графика $x(t)$ содержится при $t \in U$ в графике $x(t)$).

Отображение (3) будем называть характеристическим отображением функционального уравнения (1) или (2).

Мы будем иногда говорить, что график решения инвариантен относительно характеристического отображения, хотя, на самом деле,

$$S\Gamma_{x(t)} \cap (U \times \mathbb{R}^n) \subset \Gamma_{x(t)},$$

где U — область определения решения.

Например, уравнение $x(t^2) = x^2(t)$ имеет решение $x(t) = t$, $-\infty < t < \infty$; его график — прямая $\{x = t, t \in \mathbb{R}\}$, которую характеристическое отображение $t \mapsto t^2, x \mapsto x^2$ переводит в полупрямую $\{x = t, t \geq 0\}$. Уравнение $x(-t) = bx(t)$, $|b| \neq 1$ имеет решение, определенное при $t \geq 0$ и задаваемое функцией

$$w(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ -bt, & t < 0 \end{cases};$$

график решения — полупрямая $\{x = t, t \geq 0\}$, которую характеристическое отображение $t \mapsto -t, x \mapsto bx$ переводит в полупрямую $\{x = -bt, t \leq 0\}$, имеющую лишь одну общую точку $\{x = 0, t = 0\}$ с графиком решения.

В определение решения входит условие однозначности решения. Поэтому график любого решения как множество в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ обладает тем свойством, что со всякой гиперплоскостью $t = \text{const}$ он имеет не более одной общей точки. Всякое непустое множество в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, обладающее таким свойством, будем называть t -множеством и, в частности, всякую такую кривую — t -кривой. Каждое t -множество не более чем одномерно.

Всякому инвариантному относительно характеристического отображения t -множеству соответствует решение уравнения (1) в смысле данного выше определения.

В самом деле, всякое t -множество в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ является графиком некоторой однозначной функции $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Если t -множество инвариантно относительно характеристического отображения, то наряду с каждой точкой (t', x') этому множеству принадлежит и точка $(f(t', x'), G(t', x'))$. Таким образом, функция w определена не только при $t = t'$, где $w(t') = x'$, но также при $t = f(t', x')$, и при этом $w(f(t', x')) = G(t', x')$. Это означает, что функция w является решением уравнения (1) или (2) при $t = t'$.

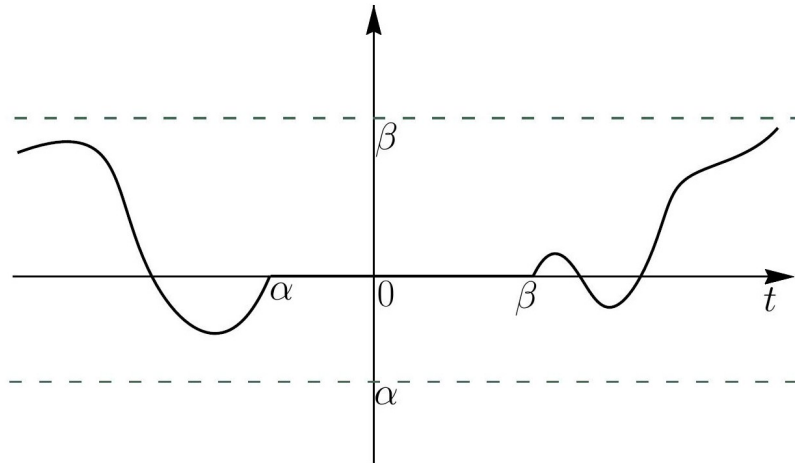
Рассмотрим, например, уравнение

$$x(x(t)) = 0. \quad (4)$$

Характеристическое отображение $t \mapsto x$, $x \mapsto 0$ всякую полосу $\{(t, x): \alpha \leq x \leq \beta\}$ в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ отображает на отрезок $\{(t, x): \alpha \leq t \leq \beta, x = 0\}$. Следовательно, t -кривая, лежащая в полосе $\{\alpha \leq x \leq \beta\}$, инвариантна относительно характеристического отображения, если 1) $\alpha \leq 0$, $\beta \geq 0$ и 2) кривая совпадает с осью t при $\alpha \leq t \leq \beta$. Каждая функция

$$x(t) = \begin{cases} p_1(t), & p_1 \text{ — произвольная функция,} \\ & \text{но } \alpha \leq p_1 \leq \beta \text{ при } t < \alpha, \\ 0, & \text{при } \alpha \leq t \leq \beta, \\ p_2(t), & p_2 \text{ — произвольная функция,} \\ & \text{но } \alpha \leq p_2 \leq \beta \text{ при } t > \beta \end{cases} \quad (5)$$

(при любых $\alpha \leq 0$, $\beta \geq 0$) является решением (и, более того, каждое решение имеет такой вид).



Таким образом, задача об отыскании решений функционального уравнения сводится к задаче об отыскании инвариантных относительно характеристического отображения множеств. Какие именно инвариантные множества при этом следует искать, зависит от того, какую область определения должны иметь решения, от условий регулярности, которым должны удовлетворять решения, и т. д. Пока мы не будем накладывать никаких условий регулярности как на функции, задающие уравнение, так и на решения.

Здесь уместно заметить, что функциональные уравнения, в отличие от дифференциальных, интегральных и т. п. уравнений, сами по себе не требуют никаких условий регулярности от функций, входящих в уравнение.

Задача об отыскании инвариантных относительно характеристического отображения множеств, вообще говоря, столь же трудна, как и задача об отыскании решений исходного функционального уравнения. Однако при таком подходе в ряде случаев можно указать эффективные методы построения решений. Так, для линей-

ных функциональных уравнений, когда характеристическое отображение линейно, задача об отыскании инвариантных множеств решается методами линейной алгебры (глава 2, § 1). Для нелинейных уравнений также можно предложить методы, пригодные для построения, по крайней мере, локальных (определенных в некоторой области из \mathbb{R}) решений функциональных уравнений.

Прежде чем ввести еще ряд понятий, необходимых в дальнейшем, рассмотрим простой пример.

Функциональное уравнение

$$x(t+a) = x(t) + b \quad (6)$$

имеет характеристическое отображение

$$\begin{cases} t \mapsto t + a \\ x \mapsto x + b. \end{cases}$$

Функция $\varphi(t, x) = ax - bt$ инвариантна при этом отображении, т. е. $\varphi(t+a, x+b) = \varphi(t, x)$. Поэтому множество $\{(t, x): ax - bt = c\}$ при любом c инвариантно относительно характеристического отображения. Это множество является t -множеством, и, следовательно, функция $x(t) = \frac{bt+c}{a}$, графиком которой является множество $\{ax - bt = c\}$, будет решением исходного уравнения.

Обобщая понятие инвариантной функции, определим инвариант характеристического отображения.

Функция $\varphi(t, x): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется инвариантом характеристического отображения $S: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, если

$$\varphi(S(t, x)) = \varphi(t, x).$$

Из определения следует, что $\varphi(S^n(t, x)) = \varphi(t, x)$, $n = 1, 2, \dots$, т. е. инвариант — это функция, принимающая постоянное значение на каждой траектории $\{S^n(t, x), n = 0, 1, 2, \dots\}$.

Инварианты в теории функциональных уравнений являются аналогом первых интегралов в теории дифференциальных уравнений (первый интеграл — это функция, постоянная вдоль траекторий дифференциальных уравнений).

Если $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ — инварианты характеристического отображения, то всякая функция $\Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ также является инвариантом характеристического отображения.

Всякому инварианту φ характеристического отображения функционального уравнения отвечает инвариантное относительно этого отображения соотношение $\varphi(t, x) = 0$. Более того, инвариантными являются также соотношения $\varphi(t, x) = c$, c — произвольная постоянная.

Всякому набору инвариантов $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ характеристического отображения отвечает семейство инвариантных соотношений $\Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_k) = 0$, где Φ — произвольная функция.

Будем рассматривать только невырожденные инварианты, не равные $const$ на всяком открытом в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ множестве. В таком случае каждому инвариантному соотношению $\varphi(t, x) = 0$ соответствует, вообще говоря, n -мерное инвариантное множество $\{(t, x) : \varphi(t, x) = 0\}$ в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Множество, являющееся пересечением инвариантных множеств, само является инвариантным. Если $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ — инварианты характеристического отображения, то инвариантные множества $\{\varphi_i(t, x) = 0\}$, $i = 1, \dots, k$, дают в пересечении, вообще говоря, $(n - k + 1)$ -мерное инвариантное множество (это пересечение может быть пустым). Если $k = n$, то при этом мы получим одномерное инвариантное множество, которое уже может быть t -множеством.

Отметим два важных частных случая, когда можно выписать инварианты характеристического отображения.

Если характеристическое отображение S является линейным, то инварианты легко строятся с помощью собственных функций и собственных чисел отображения S . Так, если λ_1, λ_2 — поло-

жителильные собственные числа $\neq 1$ и ψ_1, ψ_2 — соответствующие собственные функции, то

$$\frac{\ln \psi_i}{\ln \lambda_i} \xrightarrow{S} \frac{\ln \lambda_i \psi_i}{\ln \lambda_i} = \frac{\ln \psi_i}{\ln \lambda_i} + 1, \quad i = 1, 2,$$

и, следовательно, функция $\frac{\ln \psi_1}{\ln \lambda_1} - \frac{\ln \psi_2}{\ln \lambda_2}$ является инвариантом характеристического отображения; кроме того, любая периодическая функция γ периода 1 дает инвариант $\gamma\left(\frac{\ln \psi_i}{\ln \lambda_i}\right)$. Как строятся инварианты, когда собственные числа принимают всевозможные значения, мы рассмотрим в главе 2.

Если характеристическое отображение S является циклическим, т. е., существует такое $k \geq 1$, что S^k — тождественное отображение, то инварианты характеристического отображения можно построить с помощью симметрических функций. Действительно, если $p(t, x)$ — произвольная функция, то $p(t, x) = p(S^k(t, x))$ и вообще $p(S^i(t, x)) = p(S^{i+k}(t, x))$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Следовательно, всякая симметрическая функция $\eta(u_1, \dots, u_k)$ дает инвариант характеристического отображения, если положить $u_i = p(S^{i-1}(t, x))$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Так, функциональному уравнению

$$x(-t + a) = -x(t) + b \quad (7)$$

отвечает отображение

$$S: \begin{cases} t \mapsto -t + a \\ x \mapsto -x + b, \end{cases}$$

для которого S^2 — тождественное отображение. Если в качестве симметрической функции взять $\eta(u_1, u_2) = u_1 u_2$ и положить $p_1(t, x) = t$, $p_2(t, x) = x$, то инвариантами отображения S будут

$$\begin{aligned}\varphi_1(t, x) &= at - t^2, \\ \varphi_2(t, x) &= bx - x^2.\end{aligned}$$

Из инвариантного соотношения

$$\Phi(at - t^2, bx - x^2) = 0,$$

где Φ — произвольная функция, получаем

$$x^2 - bx + \gamma(at - t^2) = 0,$$

γ — произвольная функция. Таким образом, решение уравнения (7) имеет вид

$$x(t) = \frac{b}{2} + \begin{cases} \delta(at - t^2), & t < \frac{a}{2}, \\ -\delta(at - t^2), & t > \frac{a}{2}, \end{cases} \quad (8)$$

δ — произвольная функция ($\delta = \sqrt{\frac{b^2}{4} - \gamma}$; знак перед функцией δ в (8) определяется подстановкой в уравнение (7)).

Инварианты $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ называются независимыми, если ни один из них не может быть представлен в виде функции остальных инвариантов.

Характеристическое отображение, являющееся отображением $(n + 1)$ -мерного пространства, может иметь не более чем $n + 1$ независимый инвариант. Если отображение является линейным и невырожденным, то такое отображение, как будет показано в следующей главе, имеет в точности $n + 1$ независимый инвариант.

Из существования инвариантов характеристического отображения, вообще говоря, еще не следует существование решений функционального уравнения: соответствующие инвариантные множества могут не быть t -множествами. Например, характеристическое отображение

$$S: \begin{cases} t \mapsto -t + a \\ x \mapsto x + b \end{cases}$$

уравнения $x(-t+a) = x(t)+b$ имеет инварианты вида $\Phi\left(at-t^2, \frac{x}{b}\right)$, где Φ — произвольная периодическая по второму аргументу с периодом 1 функция. Тем не менее, отображение S не имеет инвариантных t -множеств, а само функциональное уравнение не имеет решений, определенных, по крайней мере, в каких-либо двух точках t' и $-t'+a$.

Непрерывные инварианты характеристического отображения так же, как и первые интегралы дифференциальных уравнений, существуют не всегда или не в таком количестве, чтобы всякое решение можно было выразить с помощью инвариантов.

Поэтому оказывается полезным еще одно понятие — квазиинвариант характеристического отображения.

Рассмотрим, например, функциональное уравнение

$$x\left(t^2 - 2x(t)\right) = x^2(t). \quad (9)$$

Соответствующее характеристическое отображение имеет вид

$$S: \begin{cases} t \mapsto t^2 - 2x \\ x \mapsto x^2. \end{cases} \quad (10)$$

В области $\left\{(t, x): 0 \leq \frac{t^2}{x} \leq 4\right\}$ отображение (10) не имеет непрерывных инвариантов, зависящих явно от t (это будет доказано в главе 3, где уравнение (9) будет исследоваться более подробно). Вместе с тем можно указать функции $\psi(t, x): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для которых $\psi(S(t, x)) = h(\psi(t, x))$, где h — некоторое отображение $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, отличное от тождественного. Например, если

$\psi(t, x) = \frac{t^2}{x}$, то

$$\psi(t, x) = \frac{t^2}{x} \xrightarrow{S} \frac{(t^2 - 2x)^2}{x^2} = \left(\frac{t^2}{x} - 2\right)^2 = [\psi(t, x) - 2]^2,$$

и, следовательно, $h(\psi) = (\psi - 2)^2$. Когда скоро известны такие функции $\psi(t, x)$ (их мы и будем называть квазиинвариантами), с помощью инвариантных множеств отображения h можно найти инвариантные множества характеристического отображения. Так, отображение $h: \psi \rightarrow (\psi - 2)^2$ имеет две неподвижные точки -1 и 4 . Первой из них отвечает инвариантная относительно характеристического отображения кривая $\left\{\frac{t^2}{x} = 1\right\}$, второй — кривая $\left\{\frac{t^2}{x} = 4\right\}$. Таким образом, мы получаем два решения исходного уравнения: $x(t) = t^2$ и $x(t) = \frac{t^2}{4}$. Кроме этих решений, в области $\left\{0 \leq \frac{t^2}{x} \leq 4\right\}$ существует еще только одно непрерывное решение, отвечающее периодической точке периода 2 отображения h .

Определим квазиинвариант характеристического отображения.

Если существуют пространство \mathbb{R}^k , $1 \leq k \leq n + 1$, и отображения $\psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ и $\tilde{S}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{S} & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ \psi \downarrow & & \psi \downarrow \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\tilde{S}} & \mathbb{R}^k \end{array}$$

коммулативна, т.е. $\psi S = \tilde{S}\psi$, то \tilde{S} называется фактором, а ψ — квазиинвариантом характеристического отображения S .

Один пример квазиинварианта уже приводился. Еще одним примером квазиинварианта могут служить собственные функции линейного характеристического отображения.

В том случае, когда \tilde{S} — тождественное отображение и $k = 1$, квазиинвариант ψ является инвариантом характеристического отображения; если же $k \neq 1$, то любое отображение $p: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ порождает инвариант $p\psi$.

Если $\tilde{\varphi}$ — инвариант отображения \tilde{S} , т. е. функция $\tilde{\varphi}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что $\tilde{\varphi}(\tilde{S}y) = \tilde{\varphi}(y)$, то $\tilde{\varphi}\psi$ — инвариант отображения S .

Если \tilde{V} — инвариантное относительно \tilde{S} множество, то его прообраз $V = \psi^{-1}(\tilde{V})$ является инвариантным множеством отображения S .

Для нелинейного отображения пространства в себя обычно могут быть найдены эффективно только простейшие инвариантные множества — неподвижные точки (нульмерные инвариантные множества). Если же построен фактор этого отображения (корузмерности > 0), то инвариантные множества исходного отображения, соответствующие неподвижным точкам фактора, уже имеют размерность > 0 . Это мы имели возможность видеть на примере характеристического отображения уравнения (9).

Квазиинварианты, так же, как и инварианты, существуют не у всякого отображения. Можно построить примеры, достаточно сложные, когда отображение не имеет квазиинвариантов.

Исследование функциональных уравнений будет проводиться по следующей схеме :

- 1) по функциональному уравнению строится характеристическое отображение,
- 2) отыскиваются, по возможности, квазиинварианты и инварианты характеристического отображения,
- 3) по инвариантам и квазиинвариантам строятся решения функционального уравнения.

Проиллюстрируем это на ряде примеров.

$$1. \quad x(t+a) = x(t) + b. \quad (11)$$

Характеристическое отображение

$$S : \begin{cases} t \mapsto t+a \\ x \mapsto x+b \end{cases}$$

имеет инварианты

$$\varphi_1(t, x) = ax - bt,$$

$$\varphi_2(t, x) = \gamma\left(\frac{t}{a}\right),$$

$\gamma(t)$ — некоторая периодическая функция периода 1.

Если $\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольная функция, то $\Phi(\varphi_1, \varphi_2)$ — инвариант характеристического отображения. Инвариантное соотношение

$$\Phi\left(ax - bt, \gamma\left(\frac{t}{a}\right)\right) = 0$$

можно представить в виде $ax - bt = \Phi_1\left(\gamma\left(\frac{t}{a}\right)\right)$, где Φ_1 — произвольная функция. Следовательно,

$$x(t) = \frac{b}{a}t + \omega\left(\frac{t}{a}\right), \quad (12)$$

где $\omega(t)$ — произвольная периодическая функция периода 1, является решением уравнения (11).

Это решение является общим решением функционального уравнения (11), т. е. всякое решение функционального уравнения (11) имеет такой вид.

В самом деле, рассматривая (12) как замену переменной x новой переменной ω и подставляя (12) в (11), получаем

$$\frac{b}{a}(t+a) + \omega\left(\frac{t}{a} + 1\right) = \frac{b}{a}t + \omega\left(\frac{t}{a}\right) + b,$$

т. е. $\omega(t+1) = \omega(t)$.

В последующих примерах также будет строиться общее решение.

$$2. \quad x(t+a) = -x(t) + b. \quad (13)$$

Характеристическое отображение имеет вид

$$S : \begin{cases} t \mapsto t+a \\ x \mapsto -x+b. \end{cases}$$

Пусть $\gamma(t)$ — некоторая “антипериодическая” функция: $\gamma(t+1) = -\gamma(t)$. Так как

$$x - \frac{b}{2} \mapsto -\left(x - \frac{b}{2}\right),$$

то

$$\varphi(t, x) = \frac{x - \frac{b}{2}}{\gamma\left(\frac{t}{a}\right)}$$

является инвариантом характеристического отображения. Из инвариантного соотношения

$$\Phi\left(\frac{x - \frac{b}{2}}{\gamma\left(\frac{t}{a}\right)}, \gamma_1\left(\frac{t}{a}\right)\right) = 0,$$

где $\gamma_1(t)$ — некоторая периодическая функция периода 1 и Φ — произвольная функция, получаем

$$\frac{x - \frac{b}{2}}{\gamma\left(\frac{t}{a}\right)} = \Phi_1\left(\gamma_1\left(\frac{t}{a}\right)\right),$$

Φ_1 — произвольная функция. Следовательно, решения уравнения (13) имеют вид

$$x(t) = \frac{b}{a} + \omega\left(\frac{t}{a}\right), \quad (14)$$

$\omega(t)$ — произвольная “антипериодическая” функция: $\omega(t+1) = -\omega(t)$.

$$3. \quad x(-t+a) = -x(t) + b. \quad (7)$$

Это уравнение уже рассматривалось. Общее решение уравнения (7) может быть представлено в виде (8). Сейчас мы запишем решения уравнения (7) несколько иначе.

Уравнению (7) соответствует отображение

$$S: \begin{cases} t \mapsto -t+a \\ x \mapsto -x+b. \end{cases}$$

При этом

$$\begin{aligned} t - \frac{a}{2} &\mapsto -\left(t - \frac{a}{2}\right) \\ x - \frac{b}{2} &\mapsto -\left(x - \frac{b}{2}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, функция

$$\varphi_1(t, x) = \frac{x - \frac{b}{2}}{t - \frac{a}{2}},$$

а также функция

$$\varphi_2(t, x) = t(a-t)$$

являются инвариантами характеристического отображения. Разрешая инвариантное соотношение

$$\Phi\left(\frac{x - \frac{b}{2}}{t - \frac{a}{2}}, at - t^2\right) = 0,$$

получаем решение уравнения (7)

$$x(t) = \frac{b}{2} + \left(t - \frac{a}{2}\right)\omega(at - t^2), \quad (15)$$

$\omega(t)$ — произвольная функция.

$$4. \quad x(t+a) = |x(t)| + b, \quad a, b > 0. \quad (16)$$

Это — пример уравнения, имеющего непродолжимые решения. В данном случае непродолжимы все решения; решений, определенных при всех $t \in \mathbb{R}$, уравнение (16) не имеет.

Действительно, характеристическое отображение

$$\begin{cases} t \mapsto -t + a \\ x \mapsto |x| + b \end{cases}$$

отображает плоскость (t, x) в полуплоскость $\{x \geq b\}$. Каково бы ни было $x' \geq b$, для отображения $S_x: x \mapsto |x| + b$: 1) найдутся $m > 0$ и $x'' < b$ такие, что $S_x^i x'' \geq b$, $i = 1, \dots, m$, $S_x^m x'' = x'$ ($x' = x'' + bm$, m и x'' определяются по x' однозначно); 2) не существует x''' такое, что $S_x x''' = x''$.

Таким образом, если $x(t)$ — решение уравнения (16), $x(t') = x'$ при некотором t' и $x(t)$ определено при $t = t' - ai$, $i = 1, \dots, m-1$ (т. е. $x(t' - ai) = x' - bi$, $i = 0, \dots, m-1$), то при $t = t' - am$ решение $x(t)$ не определено (так как функция, задающая решение $x(t)$, не может быть определена при $t = t' - a(m+1)$).

Используя представление решений уравнения (11), всякое решение уравнения (16), определенное при $t \geq t_0$, можно записать так:

$$x(t) = \frac{b}{a}t + \omega\left(\frac{t}{a}\right), \quad (17)$$

ω — произвольная периодическая функция периода 1, но такая, что $\frac{b}{a}t + \omega\left(\frac{t}{a}\right) \geq b$ при $t_0 \leq t < t_0 + a$. При этом функция, задающая решение (17), при $t_0 - a \leq t < t_0$ есть $\frac{b}{a}t + \tilde{\omega}\left(\frac{t}{a}\right)$, где $\tilde{\omega}(t)$ при каждом t равна $\pm\omega(t)$.

$$5. \quad x(2t^2 - 1) = 2x(t). \quad (18)$$

В предыдущих примерах на решения не накладывалось никаких условий. Решения уравнения (18) будем искать в классе непрерывных функций.

Характеристическое отображение имеет вид

$$\begin{cases} t \mapsto 2t^2 - 1 \\ x \mapsto 2x. \end{cases}$$

Отображение $S_t: t \mapsto 2t^2 - 1$ таково, что

$$\begin{aligned} S_t(-\infty, -1] &= S_t[1, \infty) = [1, \infty), \\ S_t[-1, 1] &= [-1, 1]. \end{aligned}$$

При $t \in [-1, 1]$ имеется единственное непрерывное решение $x(t) \equiv 0$. В самом деле, если допустить, что существует $t_0 \in [-1, 1]$ и непрерывное решение $x(t)$ такие, что $x(t_0) = x_0 \neq 0$, то в этом случае $x(S_t^n t_0) = 2^n x_0 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, а $S_t^n t_0 \in [-1, 1]$ при всех n , что невозможно¹.

Если $t > 1$, то при отображении S_t

$$\operatorname{Ar ch} t \mapsto 2 \operatorname{Ar ch} t,$$

где $\operatorname{Ar ch} t = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})$ – обратный гиперболический косинус. Следовательно, функции

$$\begin{aligned} \varphi_1(t, x) &= \frac{x}{\operatorname{Ar ch} t}, \\ \varphi_2(t, x) &= \gamma\left(\frac{\ln \operatorname{Ar ch} t}{\ln 2}\right), \quad \gamma(t+1) = \gamma(t), \end{aligned}$$

являются инвариантами характеристического отображения. Отсюда вытекает, что при $t > 1$ решения уравнения (18) имеют вид $x(t) = \operatorname{Ar ch} t \cdot \omega\left(\frac{\ln \operatorname{Ar ch} t}{\ln 2}\right)$, ω – произвольная периодическая функция периода 1.

¹Отметим, что непрерывность решения уравнения (18) на интервале $[-1, 1]$ следует из непрерывности на любом открытом интервале, содержащемся в $[-1, 1]$ (см. стр. 122–123).

Зная решения при $t > 1$, можно найти решения и при $t < -1$: если $t' > 1$ и $t'' = -t'$, то $x(t'') = x(t')$ ввиду (18).

Итак

$$x(t) = \begin{cases} \operatorname{Ar ch} |t| \cdot \omega\left(\frac{\ln \operatorname{Ar ch} |t|}{\ln 2}\right), & t < -1, \\ 0, & -1 \leq t \leq 1, \\ \operatorname{Ar ch} t \cdot \omega\left(\frac{\ln \operatorname{Ar ch} t}{\ln 2}\right), & t > 1, \end{cases} \quad (19)$$

ω — произвольная непрерывная периодическая функция периода 1.

$$6. \quad \begin{cases} x_1(qt) = bx_1(t) + cx_2(t), \\ x_2(qt) = x_1(t). \end{cases} \quad (20)$$

Характеристическое отображение запишется так:

$$S: \begin{cases} t \mapsto qt \\ x_1 \mapsto bx_1 + cx_2 \\ x_2 \mapsto x_1. \end{cases}$$

Собственные числа отображения S равны

$$\lambda_0 = q, \\ \lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2}.$$

Собственные функции, соответствующие числам λ_1, λ_2 , имеют вид

$$\psi_i = \lambda_i x_1 + c x_2, \quad i = 1, 2.$$

Пусть для простоты $q, \lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$. Ограничимся $t > 0$.

Инвариантами отображения S являются функции

$$\varphi_i = \frac{\ln \psi_i}{\ln \lambda_i} - \frac{\ln t}{\ln q}, \quad i = 1, 2,$$

$$\gamma\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right),$$

γ — периодическая функция периода 1. Вместо инвариантов φ_i обычно удобнее использовать инварианты $e^{\varphi_i} = \frac{\psi_i^{\frac{1}{\ln \lambda_i}}}{t^{\frac{1}{\ln q}}}$ или $\lambda_i^{\varphi_i} = \frac{\psi_i}{t^{\frac{\ln \lambda_i}{\ln q}}}$, $i = 1, 2$. Итак, каковы бы ни были $\Phi_1, \Phi_2: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, функции

$$\Phi_i\left(\frac{\lambda_i x_1 + c x_2}{t^{\frac{\ln \lambda_i}{\ln q}}}, \gamma\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right), \quad i = 1, 2,$$

являются инвариантами отображения S .

Отсюда следует, что

$$\lambda_1 x_1(t) + c x_2(t) = t^{\frac{\ln \lambda_1}{\ln q}} \tilde{\omega}_1\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right),$$

$$\lambda_2 x_1(t) + c x_2(t) = t^{\frac{\ln \lambda_2}{\ln q}} \tilde{\omega}_2\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right),$$

где $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ — произвольные периодические функции периода 1. Общее решение системы (20) имеет вид

$$x_1(t) = t^{\frac{\ln \lambda_1}{\ln q}} \omega_1\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right) + t^{\frac{\ln \lambda_2}{\ln q}} \omega_2\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right),$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{c} \left[\lambda_2 t^{\frac{\ln \lambda_1}{\ln q}} \omega_1\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right) + \lambda_1 t^{\frac{\ln \lambda_2}{\ln q}} \omega_2\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right) \right], \quad (21)$$

ω_1, ω_2 — произвольные периодические функции периода 1.

$$7. \quad x(q^2 t) = b x(q t) + c x(t). \quad (22)$$

Это — функциональное уравнение с двумя отклонениями аргумента. Однако в данном случае отображения $t \mapsto q^2 t$ и $t \mapsto q t$, задающие

сдвиг аргумента, порождаются одним отображением $t \mapsto qt$. Если же в функциональном уравнении сдвиги аргумента задаются отображениями, которые являются итерациями какого-либо одного отображения, то такое функциональное уравнение можно свести к системе функциональных уравнений с одним отклонением аргумента (так же, как и дифференциальное уравнение порядка выше первого сводится к системе уравнений первого порядка).

Положив в (22)

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x(qt), \\x_2(t) &= x(t),\end{aligned}$$

получим систему функциональных уравнений

$$\begin{cases}x_1(qt) = bx_1(t) + cx_2(t), \\x_2(qt) = x_1(t).\end{cases}$$

Эту систему мы уже рассматривали. Используя полученный выше результат, можно записать

$$\begin{aligned}x(t) &= t^{\frac{\ln \lambda_1}{\ln q}} \omega_1\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right) + t^{\frac{\ln \lambda_2}{\ln q}} \omega_2\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \\ \lambda_{1,2} &= \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2},\end{aligned}$$

ω_1, ω_2 — произвольные периодические функции периода 1.

Нам хотелось бы еще раз обратить внимание на аналогию с дифференциальными уравнениями: произвольные постоянные, входящие в общее решение дифференциальных уравнений, для функциональных уравнений заменяются произвольными (периодическими) функциями.

Глава 2. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Функциональные уравнения

$$x(f(t)) = B(t)x(t) + G(t),$$

где $x(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, будем называть линейными функциональными уравнениями.

Если сдвиг аргумента $t \mapsto f(t)$ является линейным или, по крайней мере, монотонным, то с качественной точки зрения исследование таких уравнений не представляет трудностей: имеется, вообще говоря, $n + 1$ независимых инвариантов характеристического отображения, и общее решение уравнения зависит от произвольной периодической функции $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Задача, которая в этом случае представляет интерес, — построение решений в явном виде. Эта задача в основном и рассматривается в данной главе.

Если сдвиг аргумента не является монотонным, то ситуация значительно усложняется. При этом уже вопрос о существовании решения вызывает трудности, и ответы на него могут быть различными (например, при разных значениях t , как для уравнения $x(2t^2 - 1) = 2x(t)$).

§ 1. Уравнения с постоянными коэффициентами

Будем рассматривать систему линейных функциональных уравнений

$$x(qt) = Bx(t), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, B — постоянная вещественная $n \times n$ — матрица и $q \neq 0, \pm 1$. Функциональные уравнения с таким сдвигом аргумента часто называют q -разностными уравнениями.

Мы выбрали в качестве сдвига аргумента преобразование $t \mapsto qt$, хотя можно было использовать и преобразование более общего вида $t \mapsto qt + a$, но это приводит только к некоторому усложнению наших формул: очевидно, замена $t = \tilde{t} - \frac{a}{q-1}$ возвращает нас к преобразованию $\tilde{t} \mapsto q\tilde{t}$.

Если бы мы изначально имели сдвиг аргумента $t \mapsto t + 1$, то некоторые формулы выглядели бы даже проще, но мы остановились на “более стандартном” для функциональных уравнений преобразовании $t \mapsto qt$. Конечно, замена $t = \ln \tilde{t} / \ln q$ приводит сдвиг $t \mapsto t + 1$ к “стандартному” $\tilde{t} \mapsto q\tilde{t}$. Однако такая формальная замена, вообще говоря, существенно влияет на качественное поведение решений (которое в случае нелинейных уравнений может быть очень сложным (см. Добавление)).

Построение общего решения системы (1) сводится, как уже отмечалось, к построению инвариантов отображения

$$S: \begin{cases} t \mapsto qt \\ x \mapsto Bx \end{cases}$$

пространства $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ в себя.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы B , т. е. корни уравнения

$$\det \|B - \lambda E\| = 0,$$

где E — единичная матрица. Пока будем предполагать, что λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, отличны от нуля и попарно различны.

I. Пусть λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, вещественны. Тогда существует линейное (вещественное) преобразование

$$y = Hx, \tag{2}$$

где $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, H — невырожденная матрица, приводящее отображение S к виду

$$\begin{cases} t \mapsto qt \\ y \mapsto \Lambda y, \end{cases} \quad (3)$$

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{vmatrix}.$$

Функции $y_i = y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, являются собственными функциями отображения S и, согласно введенной нами терминологии, — квазиинвариантами отображения S . Если рассматривать (2) как замену неизвестных функций, то исследование системы (1) приводится к исследованию системы

$$y(qt) = \Lambda y(t). \quad (4)$$

Пусть $q > 0$. Кроме того, пока будем предполагать, что $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, и $t > 0$.

Положим $\mu = \frac{\ln \lambda_i}{\ln q}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Из (3) вытекает, что

$$t^{\mu_i} \mapsto \lambda_i t^{\mu_i}.$$

Следовательно, функции

$$\frac{y_i}{t^{\mu_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

являются инвариантами отображения S . Если γ — какая-либо периодическая функция периода 1, то $\gamma\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)$ также является инвариантом отображения S . Таким образом, мы имеем $n + 1$ независимых инвариантов $\frac{y_i}{t^{\mu_i}}$, $i = 1, 2, \dots, n$, и $\gamma\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)$.

Если $\Phi_i: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ — произвольные функции, то функции $\Phi_i\left(\frac{y_i}{t^{\mu_i}}, \gamma\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$ — инварианты характеристического отображения. Используя инвариантные соотношения

$$\Phi_i\left(\frac{y_i}{t^{\mu_i}}, \gamma\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right) = 0,$$

получаем решения

$$y_i(t) = t^{\mu_i} \omega_i\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

где ω_i — произвольные периодические функции периода 1.

Формулы (5) дают общее решение системы (4). В самом деле, рассматривая (5) как замену переменных и подставляя (5) в (4), получаем

$$\omega_i\left(\frac{\ln t}{\ln q} + 1\right) = \omega_i\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right).$$

Это означает, что система (4) накладывает на функции ω_i единственное условие: функции ω_i должны быть периодическими и иметь период 1.

Чтобы получить общее решение системы (4) не только при $q > 0$, $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $t > 0$, но и при любых вещественных q , λ_i и $t \neq 0$, вместо замены (5), которая определена только при $q > 0$, $\lambda_i > 0$, $t > 0$, используем замену переменных

$$y_i(t) = |t|^{\mu_i} \begin{cases} \omega_i^+\left(\frac{\ln t}{\ln |q|}\right), & \text{если } t > 0, \\ \omega_i^-\left(\frac{\ln |t|}{\ln |q|}\right), & \text{если } t < 0, \end{cases} \quad (6)$$

где $\mu_i = \frac{\ln |\lambda_i|}{\ln |q|}$, $i = 1, 2, \dots, n$, которая определена уже для всех $q \neq 0, \pm 1$, λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, и $t \neq 0$.

Из (6) следует

$$y_i(qt) = |\lambda_i| \cdot |t|^{\mu_i} \begin{cases} \omega_i^+ \left(\frac{\ln |t|}{\ln |q|} + 1 \right), & \text{если } q > 0, t > 0, \\ \omega_i^- \left(\frac{\ln |t|}{\ln |q|} + 1 \right), & \text{если } q > 0, t < 0, \\ \omega_i^- \left(\frac{\ln |t|}{\ln |q|} + 1 \right), & \text{если } q < 0, t > 0, \\ \omega_i^+ \left(\frac{\ln |t|}{\ln |q|} + 1 \right), & \text{если } q < 0, t < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в (4), получаем

$$\begin{cases} \omega_i^+(t+1) = \omega_i^+(t), \\ \omega_i^-(t+1) = \omega_i^-(t), & \text{если } \lambda_i > 0, q > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_i^+(t+1) = -\omega_i^+(t), \\ \omega_i^-(t+1) = -\omega_i^-(t), & \text{если } \lambda_i < 0, q > 0; \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \omega_i^-(t+1) = \omega_i^+(t), \\ \omega_i^+(t+1) = \omega_i^-(t), & \text{если } \lambda_i > 0, q < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_i^-(t+1) = -\omega_i^+(t), \\ \omega_i^+(t+1) = -\omega_i^-(t), & \text{если } \lambda_i < 0, q < 0. \end{cases}$$

Таким образом, общее решение системы (4) задается формулой (6), в которой $\omega_i^+, \omega_i^-, i = 1, 2, \dots, n$, — произвольные функции, удовлетворяющие условиям (8).

Общее решение системы (1) есть

$$x(t) = H^{-1}y(t),$$

где $y(t)$ — общее решение системы (4).

II. Если среди собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ имеются комплексные, то естественно комплексифицировать систему (1). Общее решение линейной системы над комплексным полем строится так же, как и линейной системы над вещественным полем, когда собственные числа положительны. Овеществляя решения линейной системы над комплексным полем, получаем решения исходной системы над вещественным полем.

Однако мы поступим иначе. Как и в случае вещественных λ , воспользуемся заменой переменных (6).

Так как матрица B является вещественной, то каждому комплексному λ_i соответствует комплексно-сопряженное $\bar{\lambda}_i \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Преобразование (2) можно подобрать так, чтобы каждому действительному λ_i соответствовали действительные y_i , а паре комплексно-сопряженных значений λ_j и $\bar{\lambda}_j$ — комплексно-сопряженные y_j и \bar{y}_j . Пусть $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$ при $i = 1, 2, \dots, k$ и $\lambda_{k+2j} = \bar{\lambda}_{k+2j-1}$ при $j = 1, 2, \dots, \frac{n-k}{2}$. Из (2) следует, что существует вещественная замена переменных

$$\tilde{y} = \tilde{H} x, \quad (9)$$

где $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)$, $\tilde{y}_i = y_i$ при $i = 1, 2, \dots, k$, $\tilde{y}_i = \operatorname{Re} y_i$ и $\tilde{y}_{i+1} = \operatorname{Im} y_i$ при $i = k+1, k+3, \dots, n-1$, \tilde{H} — невырожденная вещественная матрица, приводящая отображение S к виду

$$\begin{cases} t \mapsto qt \\ \tilde{y} \mapsto \tilde{\Lambda} \tilde{y}, \end{cases}$$

где

$$\tilde{\Lambda} = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_k & \\ & & & \alpha_1 & -\beta_1 \\ & & & \beta_1 & \alpha_1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \frac{\alpha_{n-k}}{2} & -\frac{\beta_{n-k}}{2} \\ & & & & & \frac{\beta_{n-k}}{2} & \frac{\alpha_{n-k}}{2} \end{array} \right\|,$$

$$\alpha_i = |\lambda_{k+2i-1}| \cos \delta_{k+2i-1},$$

$$\beta_i = |\lambda_{k+2i-1}| \sin \delta_{k+2i-1},$$

$$\delta_{k+2i-1} = \arg \lambda_{k+2i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n-k}{2}.$$

Таким образом, при помощи замены переменных (9) исследование системы (1) сводится к исследованию системы

$$\tilde{y}(qt) = \tilde{\Lambda} \tilde{y}(t). \quad (10)$$

Чтобы получить общее решение системы (10), сделаем, как и раньше, замену переменных

$$\tilde{y}_i(t) = |t|^{\mu_i} \begin{cases} \omega_i^+ \left(\frac{\ln t}{\ln |q|} \right), & \text{если } t > 0, \\ \omega_i^- \left(\frac{\ln |t|}{\ln |q|} \right), & \text{если } t < 0, \end{cases} \quad (6)$$

где $\mu_i = \frac{\ln |\lambda_i|}{\ln |q|}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Из (6) следует

$$\tilde{y}_i(qt) = |\lambda_i| \cdot |t|^{\mu_i} \begin{cases} \omega_i^+ \left(\frac{\ln |t|}{\ln |q|} + 1 \right), & \text{если } q > 0, t > 0, \\ \omega_i^- \left(\frac{\ln |t|}{\ln |q|} + 1 \right), & \text{если } q > 0, t < 0, \\ \omega_i^- \left(\frac{\ln |t|}{\ln |q|} + 1 \right), & \text{если } q < 0, t > 0, \\ \omega_i^+ \left(\frac{\ln |t|}{\ln |q|} + 1 \right), & \text{если } q < 0, t < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Если подставить (6) и (7) в (10), то получим соотношения (8) при $i = 1, 2, \dots, k$, а при $i = k+1, k+3, \dots, n-1$ — соотношения

$$\begin{cases} \omega_i^+(t+1) = \cos \delta_i \omega_i^+(t) - \sin \delta_i \omega_{i+1}^+(t), \\ \omega_{i+1}^+(t+1) = \cos \delta_i \omega_{i+1}^+(t) + \sin \delta_i \omega_i^+(t), \\ \omega_i^-(t+1) = \cos \delta_i \omega_i^-(t) - \sin \delta_i \omega_{i+1}^-(t), \\ \omega_{i+1}^-(t+1) = \cos \delta_i \omega_{i+1}^-(t) + \sin \delta_i \omega_i^-(t), & \text{если } q > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_i^-(t+1) = \cos \delta_i \omega_i^+(t) - \sin \delta_i \omega_{i+1}^+(t), \\ \omega_{i+1}^-(t+1) = \cos \delta_i \omega_{i+1}^+(t) + \sin \delta_i \omega_i^+(t), \\ \omega_i^+(t+1) = \cos \delta_i \omega_i^-(t) - \sin \delta_i \omega_{i+1}^-(t), \\ \omega_{i+1}^+(t+1) = \cos \delta_i \omega_{i+1}^-(t) + \sin \delta_i \omega_i^-(t), & \text{если } q < 0. \end{cases} \quad (11)$$

Соотношения (8), которым удовлетворяют произвольные функции в случае вещественных λ , являются, вообще говоря, частным

случаем соотношений (11); (8) следует из (11), если положить в (11) $\delta_i = 0$ при $\lambda_i > 0$ и $\delta_i = \pi$ при $\lambda_i < 0$.

Таким образом, общее решение системы (10) задается формулой (6), в которой ω_i^+ , ω_i^- , $i = 1, 2, \dots, n$, — произвольные функции, удовлетворяющие условиям (8) при $i = 1, 2, \dots, k$ и условиям (11) при $i = k + 1, k + 2, \dots, n$.

Общее решение системы (1) записывается в виде

$$x(t) = \tilde{H}^{-1} \tilde{y}(t),$$

где $\tilde{y}(t)$ — общее решение системы (10).

III. Рассмотрим теперь систему (1) в предположении, что среди собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ имеются кратные. Ограничимся случаем, когда кратные собственные числа являются вещественными.

В этом случае существует неособое преобразование

$$y = Hx, \quad (12)$$

приводящее отображение S к виду

$$\begin{cases} t \mapsto qt \\ y \mapsto \Lambda y, \end{cases}$$

где

$$\Lambda = \left\| \begin{array}{cccc} \ddots & & & \\ & \ddots & & \\ & & \Lambda_i & \\ & & & \ddots \end{array} \right\|, \quad \Lambda_i = \left\| \begin{array}{ccccc} \lambda_i & 1 & . & . & 0 \\ . & \lambda_i & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 \\ 0 & . & . & . & \lambda_i \end{array} \right\|$$

Если рассматривать (12) как замену неизвестных функций, то исследование системы (1) приводится к исследованию системы

$$y(qt) = \Lambda y(t). \quad (13)$$

Система (13) распадается на независимые системы

$$y_j(qt) = \Lambda_i y_j(t), \quad j = 1, \dots, k, \quad i = i(j).$$

Таким образом, чтобы найти общее решение системы (1) нужно уметь строить общее решение системы вида

$$y(qt) = \bar{\Lambda} y(t), \quad (14)$$

где

$$y = (y_1, \dots, y_k),$$

$$\bar{\Lambda} = \left\| \begin{array}{cccccc} \lambda & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \lambda & 1 & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & & \lambda \end{array} \right\|$$

Системе (14) соответствует отображение

$$\begin{cases} t \mapsto qt \\ y \mapsto \bar{\Lambda} y \end{cases} \quad (15)$$

пространства $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ в себя. Инварианты отображения (15) можно найти следующим образом. Из (15) следует

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_1}{y_k} \mapsto \frac{y_1}{y_k} + \frac{1}{\lambda} \frac{y_2}{y_k} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{y_{k-2}}{y_k} \mapsto \frac{y_{k-2}}{y_k} + \frac{1}{\lambda} \frac{y_{k-1}}{y_k} \\ \frac{y_{k-1}}{y_k} \mapsto \frac{y_{k-1}}{y_k} + \frac{1}{\lambda} \\ y_k \mapsto \lambda y_k. \end{array} \right. \quad (16)$$

Положив в (16) $\nu = \frac{1}{\lambda}$ и

$$\frac{y_i}{y_k} = \sum_{1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_{k-i} \leq k} u_{s_1} u_{s_2} \dots u_{s_{k-i}}, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, \quad (17)$$

получим

$$\begin{aligned} u_1 u_2 \dots u_{k-1} + \dots + u_2 u_3 \dots u_k &\mapsto u_1 u_2 \dots u_{k-1} + \dots \\ &+ u_2 u_3 \dots u_k + \nu u_1 u_2 \dots u_{k-2} + \dots + \nu u_3 u_4 \dots u_k, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} u_1 u_2 + \dots + u_{k-1} u_k &\mapsto u_1 u_2 + \dots + u_{k-1} u_k + \nu u_1 + \dots + \nu u_k, \\ u_1 + u_2 + \dots + u_k &\mapsto u_1 + u_2 + \dots + u_k + \nu. \end{aligned}$$

Так как в (18) входят только симметрические функции переменных u_1, u_2, \dots, u_k (слева) и $u_1, u_2, \dots, u_k, \nu$ (справа), то

$$\begin{aligned} u_1^{k-1} + u_2^{k-1} + \dots + u_k^{k-1} &\mapsto \nu^{k-1} + u_1^{k-1} + u_2^{k-1} + \dots + u_k^{k-1}, \\ u_1^{k-2} + u_2^{k-2} + \dots + u_k^{k-2} &\mapsto \nu^{k-2} + u_1^{k-2} + u_2^{k-2} + \dots + u_k^{k-2}, \\ &\dots\dots\dots \\ u_1 + u_2 + \dots + u_k &\mapsto \nu + u_1 + u_2 + \dots + u_k. \end{aligned} \quad (19)$$

Остается заменить в (19), используя (17), u_1, u_2, \dots, u_k на y_1, y_2, \dots, y_k . Это делается с помощью известных формул Ньютона (см., например, [20]), выражающих суммы степеней корней полинома k -й степени через его коэффициенты. Так,

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \dots + u_k &= \frac{y_{k-1}}{y_k}, \\ u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_k^2 &= \left(\frac{y_{k-1}}{y_k}\right)^2 - 2\frac{y_{k-2}}{y_k}, \\ u_1^3 + u_2^3 + \dots + u_k^3 &= \left(\frac{y_{k-1}}{y_k}\right)^3 - 3\frac{y_{k-1}y_{k-2}}{y_k} + 3\frac{y_{k-3}}{y_k}, \\ &\dots \end{aligned}$$

и вообще, если положить $u_1^m + u_2^m + \dots + u_k^m = \sigma_m$, то при $m \leq k-1$

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{y_{k-1}}{y_k} \sigma_{m-1} + \frac{y_{k-2}}{y_k} \sigma_{m-2} + \dots + \\ &+ (-1)^{m+2} \frac{y_{k-m+1}}{y_k} \sigma_1 + (-1)^{m+1} m \frac{y_{k-m}}{y_k}. \end{aligned}$$

Следовательно, при отображении (15)

$$\begin{cases} t \mapsto qt \\ \sigma_i \mapsto \sigma_i + \frac{1}{\lambda^i}, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, \\ y_k \mapsto \lambda y_k. \end{cases} \quad (20)$$

Инварианты отображения (20) уже просто выписываются. Так, при $\lambda > 0$, $q > 0$ и $t > 0$ функции $\frac{y_k}{t^{\frac{\ln \lambda}{\ln q}}}$, $\sigma_i - \frac{1}{\lambda^i \ln q} \ln t$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, и $\gamma\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)$, где γ — некоторая периодическая функция периода 1, являются инвариантами отображения (20).

Это означает, что S^m отображает пространство $\mathbb{R}^n(x_1, \dots, x_n)$ в гиперплоскость $Q^{n-m} = \{y_i(x) = 0, i = 1, \dots, m\}$; каждая точка пространства $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ при отображении S не более чем за m шагов переходит в некоторую точку, принадлежащую $\mathbb{R} \times Q^{n-m}$. Отсюда вытекает, что график любого решения, определенного при всех t или при $t > 0$ ($t < 0$), принадлежит $\mathbb{R} \times Q^{n-m}$. В самом деле, если бы для некоторого решения $x(t)$ существовало $t = \bar{t}$, для которого $x(\bar{t}) \notin Q^{n-m}$, то тогда в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ существовала бы точка, а именно $(\bar{t}/q^m, x(\bar{t}/q^m))$, образ которой при отображении S^m не попал бы в $\mathbb{R} \times Q^{n-m}$, поскольку $x(\bar{t}/q^m)$ переходит в $x(\bar{t})$.

Таким образом, построение общего решения линейной системы n -го порядка, у которой имеется m нулевых собственных чисел, сводится к построению общего решения системы $(n - m)$ -го порядка.

Замечание Система (1) имеет также решения, определенные не при всех t , графики которых не принадлежат $\mathbb{R} \times Q^{n-m}$.

§ 2. Уравнения с переменными коэффициентами

Рассмотрим теперь систему линейных функциональных уравнений с переменными коэффициентами

$$x(f(t)) = B(t)x(t) + G(t), \quad (1)$$

где $f(t)$ — вещественная функция, $B(t)$ — вещественная $n \times n$ -матрица, $G(t)$ — вещественный n -столбец.

Исследование системы (1) сводится к исследованию отображения

$$S: \begin{cases} t \mapsto f(t), \\ x \mapsto B(t)x + G(t), \end{cases} \quad (2)$$

пространства $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$ в себя. Это отображение является, вообще говоря, нелинейным и сразу выписать его инварианты мы не можем. Желательно было бы, если это возможно, найти замену переменных, линеаризующую отображение (2) (инварианты линейного отображения мы умеем строить). В главе 3, § 2 будет показано, что в окрестности неподвижной точки отображения такая замена при некоторых предположениях существует и имеет ту же или меньшую гладкость, что и исходное отображение. Таким образом, в окрестности неподвижной точки мы можем выписать инварианты отображения (2) и, следовательно, построить общее решение системы (1). Необходимо, однако, подчеркнуть, что построенные таким путем решения определены лишь в некоторой окрестности неподвижной точки отображения (2) и, если сдвиг аргумента $t \mapsto f(t)$ является нелинейным, то эти решения, возможно, и непродолжимы на всю область, где определена система (1).

В этом и двух следующих параграфах мы рассмотрим систему (1) в предположении, что функции, задающие (1), являются аналитическими. Из упомянутых выше результатов о линеаризации отображения следует, что существует аналитическая замена переменных, линеаризующая исходную систему. Эту замену мы будем искать в виде сходящихся степенных рядов, что позволяет эффективно построить решения системы (1). Вместе с тем будут исследованы некоторые случаи, к которым неприменимы известные теоремы о линеаризации отображения.

Рассмотрим вначале систему линейных однородных уравнений

$$x(qt) = B(t)x(t), \quad (3)$$

$q \neq 0, \pm 1$, которой соответствует характеристическое отображение

$$S: \begin{cases} t \mapsto qt, \\ x \mapsto B(t)x. \end{cases} \quad (4)$$

Пусть $B_0 = B(0)$, $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, — собственные числа матрицы B_0 . Предположим, собственные числа λ_i попарно различны и отличны от нуля. Линеаризованное отображение (4) может быть представлено в виде

$$\begin{cases} t \mapsto qt, \\ y \mapsto \Lambda y, \end{cases}$$

где $\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix}$ и $y = H(t)x$, $H(t)$ — некоторая неособая $n \times n$ -матрица. Так как

$$\begin{array}{c} y \xrightarrow{S} \Lambda y = H(t)x \\ \parallel \\ H(t)x \xrightarrow{S} H(qt)B(t)x, \end{array}$$

то

$$H(qt)B(t) = \Lambda H(t). \quad (5)$$

Замена $y(t) = H(t)x(t)$ приводит уравнение (3) к виду

$$y(qt) = \Lambda y(t).$$

Если элементы матрицы $B(t)$ являются аналитическими функциями в некоторой окрестности $t = 0$ и

$$\frac{\lambda_i'}{\lambda_i''} \neq q^m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

то уравнение (5) имеет решение $H(t)$ такое, что элементы матрицы $H(t)$ также являются аналитическими функциями в окрестности $t = 0$. Доказательство этого утверждения при произвольном

n не имеет принципиальных отличий от случая $n = 1$, однако для произвольного n изложение слишком громоздкое, и поэтому мы проведем доказательство только при $n = 1$.

Уравнению

$$x(qt) = b(t)x(t), \quad (7)$$

$b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, соответствует отображение

$$S: \begin{cases} t \mapsto qt, \\ x \mapsto b(t)x. \end{cases}$$

Линеаризованное отображение S в данном случае должно иметь вид

$$\begin{cases} t \mapsto qt, \\ y \mapsto \lambda y, \end{cases} \quad (8)$$

где $\lambda = b(0) \neq 0$, $y = h(t)x$ и функция $h(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$h(qt)b(t) = \lambda h(t). \quad (9)$$

Пусть $b(t)$ — аналитическая функция, которая при $|t| \leq t_0$ представима в виде сходящегося ряда

$$b(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i, \quad (10)$$

$b_0 = \lambda$. Решение уравнения (9) будем искать в виде

$$h(t) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i t^i. \quad (11)$$

Подставляя (10), (11) в (9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t , получаем

$$\sum_{j=0}^i q^{i-j} b_j h_{i-j} = \lambda h_i, \quad i = 0, 1, \dots,$$

откуда

$$h_i = \frac{q^i}{\lambda(1-q^i)} \sum_{j=1}^i \frac{b_j}{q^j} h_{i-j}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

h_0 может быть произвольным, отличным от нуля.

Покажем, что ряд (11) с коэффициентами (12) сходится в некоторой окрестности точки $t = 0$.

Возьмем произвольное $\delta < t_0$. Пусть $M = \max_{|t| \leq \delta} |b(t)|$. Тогда

$$|b_i| \leq \frac{M}{\delta^i} \text{ и}$$

$$|h_i| = \frac{M}{|\lambda|} \left| \frac{q^i}{1-q^i} \right| \sum_{j=1}^i \frac{|h_{i-j}|}{|q\delta|^j}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Так как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{q^i}{1-q^i} \right| = \begin{cases} 0, & \text{если } |q| < 1, \\ 1, & \text{если } |q| > 1, \end{cases}$$

то существует L такое, что

$$\frac{M}{|\lambda|} \left| \frac{q^i}{1-q^i} \right| \leq L \quad \text{при всех } i \geq 1.$$

Утверждается, что

$$|h_i| \leq \left(\frac{1+L}{|q|\delta} \right)^i |h_0|, \quad i = 0, 1, \dots \quad (14)$$

Действительно, при $i = 0$ эта оценка имеет место. Если она справедлива при $i = 0, 1, \dots, n - 1$, то, согласно (13),

$$\begin{aligned} \frac{1}{|h_0|} |h_n| &\leq L \sum_{j=1}^n \left(\frac{1+L}{|q|\delta} \right)^{n-j} \left(\frac{1}{|q|\delta} \right)^j = \frac{L}{(|q|\delta)^n} \sum_{j=1}^n (1+L)^{n-j} = \\ &= \frac{L}{(|q|\delta)^n} \frac{(1+L)^n - 1}{1+L-1} \leq \left(\frac{1+L}{|q|\delta} \right)^n. \end{aligned}$$

Из (14) непосредственно следует, что ряд (11) сходится при $|t| < \frac{|q|\delta}{1+L}$.

Когда скоро функция $h(t)$ найдена, можно выписать и решение уравнения (7):

$$y(t) = h(t)x(t) = \begin{cases} t^{\frac{\ln|\lambda|}{\ln|q|}} \omega_1\left(\frac{\ln t}{\ln|q|}\right), & t > 0, \\ t^{\frac{\ln|\lambda|}{\ln|q|}} \omega_2\left(\frac{\ln|t|}{\ln|q|}\right), & t < 0, \end{cases} \quad (15)$$

и функции ω_1, ω_2 удовлетворяют условиям (8) из предыдущего параграфа.

Ввиду того, что $h(0) = h_0 \neq 0$ и $h(t)$ — аналитическая функция, то и функция $\frac{1}{h(t)}$ является аналитической в некоторой окрестности $t = 0$.

Приведем несколько примеров уравнений, для которых удастся записать общее решение в конечном виде

$$1. \quad x(qt) = \lambda e^{\alpha t} x(t), \quad (16)$$

q, λ, α — вещественные постоянные.

Согласно изложенному выше, существует замена $y = h(t)x$, приводящая уравнение (16) к виду

$$y(qt) = \lambda y(t)$$

и $h(t)$ находится из уравнения

$$h(qt)e^{\alpha t} = h(t). \quad (17)$$

Уравнение (17) имеет аналитическое решение $h(t) = e^{\frac{\alpha}{1-q}t}$. Следовательно, общее решение уравнения (16) записывается в виде (15), где $h(t) = e^{\frac{\alpha}{1-q}t}$. Например, при $q, \lambda > 0$ и $t > 0$

$$x(t) = t^{\frac{\ln \lambda}{\ln q}} e^{\frac{\alpha}{1-q}t} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \quad \omega(t+1) = \omega(t).$$

$$2. \quad x(2t) = \lambda \cos t x(t), \quad \lambda > 0. \quad (18)$$

Функция $h(t)$, с помощью которой (18) приводится к уравнению $y(2t) = \lambda y(t)$, должна удовлетворять уравнению

$$h(2t) = \frac{1}{\cos t} h(t). \quad (19)$$

Уравнение (19) имеет решение $h(t) = \frac{t}{\sin t}$, $t \neq \pm k\pi$. Таким образом, общее решение уравнения (18) имеет вид

$$x(t) = \begin{cases} t^{\frac{\ln \lambda}{\ln 2}-1} \sin t \omega_1\left(\frac{\ln t}{\ln 2}\right), & \text{при } t > 0, \\ |t|^{\frac{\ln \lambda}{\ln 2}-1} \sin t \omega_2\left(\frac{\ln |t|}{\ln 2}\right), & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

включая также и точки $t = \pm k\pi$, $k = 1, 2, \dots$, $\omega_1(\tau+1) = \omega_1(\tau)$, $\omega_2(\tau+1) = \omega_2(\tau)$.

Исследование уравнения (7), когда $\lambda = 0$, также не представляет особых трудностей. Однако в этом случае удобно перейти, используя замену $y(t) = \ln x(t)$, к неоднородному уравнению, которое будет рассмотрено в следующем параграфе.

§ 3. Неоднородные уравнения с переменными коэффициентами

В этом параграфе мы рассмотрим систему линейных неоднородных уравнений

$$x(qt) = B(t)x(t) + G(t), \quad (1)$$

$B(t)$ — вещественная $n \times n$ -матрица, $G(t)$ — n -вектор.

Если $\tilde{x}(t)$ — частное решение системы (1), то полагая

$$y(t) = x(t) - \tilde{x}(t),$$

получаем однородную систему

$$y(qt) = B(t)y(t),$$

которая изучалась в предыдущем параграфе.

В том случае, когда элементы $B(t)$ и $G(t)$ являются функциями, аналитическими в окрестности $t = 0$, и собственные числа матрицы $B(0)$ удовлетворяют условию $\lambda_{i'} \neq \lambda_{i''}$, если $i' \neq i''$, и $\lambda_i \neq q^m$, $m = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots, n$ уравнение (1) имеет аналитическое в окрестности $t = 0$ решение. Докажем это, как и в предыдущем параграфе, только для $n = 1$.

Предположим, что в уравнении

$$x(qt) = b(t)x(t) + g(t), \quad (2)$$

$$b(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i, \quad g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i t^i, \quad (3)$$

$b_0 = \lambda \neq q^m$, $m = 0, 1, 2, \dots$, и ряды (3) сходятся при $|t| \leq t_0$. Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i. \quad (4)$$

Подставляя (3), (4) в (2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t , получаем

$$q^i c_i = \sum_{j=0}^i b_{i-j} c_j + g_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

или

$$c_0 = \frac{1}{1-\lambda} g_0, \quad (6)$$

$$c_i = \frac{1}{q^i - \lambda} \left(\sum_{j=0}^{i-1} b_{i-j} c_j + g_i \right), \quad i = 1, 2, \dots$$

Если $\delta < t_0$ и $M = \max \left\{ \max_{|t| \leq \delta} |b(t)|, \max_{|t| \leq \delta} |g(t)| \right\}$, то $|b_i| \leq \frac{M}{\delta^i}$, $|g_i| \leq \frac{M}{\delta^i}$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Следовательно,

$$|c_0| \leq \frac{M}{|1-\lambda|},$$

$$|c_i| \leq \frac{1}{|q^i - \lambda|} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \frac{M}{\delta^{i-j}} |c_j| + \frac{M}{\delta^i} \right) =$$

$$= \frac{M}{\delta^i |q^i - \lambda|} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \delta^j |c_j| + 1 \right), \quad i = 1, 2, \dots$$

Поскольку

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{|q^i - \lambda|} = \begin{cases} \frac{1}{|\lambda|}, & \text{если } |q| < 1, \\ 0, & \text{если } |q| > 1, \end{cases}$$

то существует L такое, что

$$\frac{M}{|q^i - \lambda|} \leq L \quad \text{при всех } i \geq 0.$$

Таким образом,

$$|c_0| \leq L, \\ |c_i| \leq \frac{L}{\delta^i} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \delta^j |c_j| + 1 \right), \quad i = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Докажем, что

$$|c_i| \leq L \left(\frac{1+L}{\delta} \right)^i, \quad i = 0, 1, \dots \quad (8)$$

В самом деле, при $i = 0$ оценка (8) имеет место. Если эта оценка справедлива при $i = 0, 1, \dots, m-1$, то согласно (7),

$$|c_m| \leq \frac{L}{\delta^m} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \delta^j L \left(\frac{1+L}{\delta} \right)^j + 1 \right) = \\ = \frac{L}{\delta^m} \left(L \frac{(1+L)^m - 1}{1+L-1} + 1 \right) = L \left(\frac{1+L}{\delta} \right)^m.$$

Из (8) следует, что ряд (4) с коэффициентами (6) сходится при $|t| < \frac{\delta}{1+L}$ и, таким образом, дает аналитическое решение уравнения (2).

Всякое решение линейного неоднородного уравнения есть сумма частного решения неоднородного уравнения и некоторого решения соответствующего ему однородного уравнения. Общее решение однородного уравнения

$$y(qt) = b(t)y(t)$$

в предположении, что $\lambda \neq 0$, получено в § 2 и имеет вид

$$y(t) = \begin{cases} t^{\frac{\ln|\lambda|}{\ln|q|}} p(t) \omega_1 \left(\frac{\ln t}{\ln|q|} \right), & t > 0, \\ |t|^{\frac{\ln|\lambda|}{\ln|q|}} p(t) \omega_2 \left(\frac{\ln|t|}{\ln|q|} \right), & t < 0, \end{cases} \quad (9)$$

где $p(t)$ — некоторая аналитическая в окрестности $t = 0$ функция, а функции $\omega_1(t), \omega_2(t)$ удовлетворяют условиям (8) из § 1. Таким образом, всякое решение неоднородного уравнения (2) при $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq q^m, m = 0, 1, 2, \dots$, представимо в виде

$$x(t) = \tilde{p}(t) + y(t),$$

где $y(t)$ есть (9), а $\tilde{p}(t)$ — аналитическая в окрестности $t = 0$ функция, являющаяся частным решением уравнения (2).

Рассмотрим уравнение (2) в предположении, что $\lambda = q^m, m$ — целое неотрицательное (когда частное решение уравнения (2) нельзя искать в виде степенного ряда). В этом случае $\lambda \neq 0$, и тогда, как показано в § 2, существует аналитическая в окрестности $t = 0$ функция $h(t)$, удовлетворяющая уравнению $h(qt)b(t) = \lambda h(t)$. Если положить $y = h(t)x$, то уравнение (2) примет вид

$$y(qt) = \lambda y(t) + d(t), \quad (10)$$

где $d(t) = h(qt)g(t)$ — аналитическая в окрестности $t = 0$ функция.

Если мы попытаемся искать частное решение уравнения (10) в виде ряда

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i,$$

то для коэффициентов a_i получим соотношения (5)

$$q^i a_i = \lambda a_i + d_i, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (5')$$

где $\sum_{i=0}^{\infty} d_i t^i = d(t)$. Отсюда a_i могут быть найдены для всех $i \neq m$; при $i = m$ соотношение (5') может выполняться лишь тогда, когда $d_m = 0$ (и в таком случае a_m может быть любым). Коэффициент d_m можно сделать равным нулю следующим образом.

Если

$$\begin{aligned}\bar{y} &\mapsto \lambda \bar{y} + d_m t^m, \\ t &\mapsto qt,\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}t^m &\mapsto \lambda t^m, \\ \ln |t| &\mapsto \ln |t| + \ln |q|, \\ t^m \ln |t| &\mapsto \lambda t^m \ln |t| + \lambda \ln |q| t^m.\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\bar{y} - \frac{d_m}{\ln |q|} t^m \ln |t| \mapsto \bar{y} - \frac{d_m}{\ln |q|} t^m \ln |t|.$$

Таким образом, если положить $z = y - \frac{d_m}{\ln |q|} t^m \ln |t|$, то (10) можно переписать так:

$$z(qt) = \lambda z(t) + \tilde{d}(t), \quad (11)$$

где $\tilde{d}(t) = d(t) - d_m t^m$. Если решение уравнения (11) искать в виде $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$, то коэффициенты a_i будут удовлетворять соотношениям (5), т. е. $a_i = \frac{d_i}{q^i - \lambda}$, $i = 0, 1, 2, \dots, i \neq m$ и $q_m = 0$.

Поскольку существует L такое, что $\frac{1}{|q^i - \lambda|} < L$ при всех $i \neq m$, то ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ сходится в той же области, что и ряд $\sum_{i=0}^{\infty} d_i t^i$.

Итак, при $\lambda = q^m$ уравнение (11) имеет аналитическое в окрестности $t = 0$ решение; уравнение (10) имеет решение, представимое в виде суммы аналитической функции и функции $\alpha t^m \ln |t|$, $\alpha = \text{const}$; исходное уравнение (2) имеет решение вида $p_1(t) + t^m \ln |t| p_2(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ — аналитические в окрестности $t = 0$ функции (α и $p_2(t)$ могут быть, в частности, равны нулю).

Общее решение уравнения (2) при $\lambda = q^m$ имеет вид

$$x(t) = p_1(t) + t^m \ln |t| p_2(t) + y(t),$$

где $y(t)$ задается (9).

Займемся, наконец, представлением решений уравнения (2), когда $\lambda = 0$. Выше мы уже доказали, что уравнение (2) всегда, если только $\lambda \neq q^m$, имеет аналитическое решение, включая и тот случай, когда $\lambda = 0$. Следовательно, чтобы выписать общее решение уравнения (2) при $\lambda = 0$, нужно знать общее решение однородного уравнения

$$x(qt) = b(t)x(t), \quad (12)$$

когда $b(t) = t^m \tilde{b}(t)$, $\tilde{b}(0) \neq 0$ и $m > 0$.

Рассмотрим уравнение (12) только при $t > 0$, предполагая дополнительно, что $\tilde{b}(0) > 0$ и $x(t) > 0$ при $t > 0$. В общем случае требуются некоторые уточнения (см. ниже пример 2).

Полагая в (12) $y = \ln x$, получаем

$$y(qt) = y(t) + m \ln t + \beta + d(t), \quad (13)$$

$\beta = \ln \tilde{b}(0)$, $d(t) = \ln \tilde{b}(t) - \beta$ — аналитическая в окрестности $t = 0$ функция.

Если

$$\begin{aligned} \bar{y} &\mapsto \bar{y} + m \ln t + \beta, \\ t &\mapsto qt, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
\ln t &\mapsto \ln t + \ln q, \\
\ln^2 t &\mapsto \ln^2 t + 2 \ln q \ln t + \ln^2 q, \\
\ln^2 t - \ln q \ln t &\mapsto \ln^2 t + \ln q \ln t, \\
\frac{\ln t}{\ln q} &\mapsto \frac{\ln t}{\ln q} + 1, \\
\frac{\ln^2 t - \ln q \ln t}{2 \ln q} &\mapsto \frac{\ln^2 t - \ln q \ln t}{2 \ln q} + \ln t
\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\bar{y} - a(t) \mapsto \bar{y} - a(t),$$

когда

$$a(t) = \frac{m}{2 \ln q} (\ln^2 t - \ln q \ln t) + \beta \frac{\ln t}{\ln q}. \quad (14)$$

Таким образом, полагая в (12) $z = y - a(t)$, получаем

$$z(qt) = z(t) + d(t). \quad (15)$$

Так как $\lambda = 1$, т. е. $\lambda = q^m$ при $m = 0$, но $d(0) = 0$, то уравнение (15), как уже говорилось выше, имеет аналитическое решение, которое может быть найдено в виде сходящегося ряда. Следовательно, уравнение (13) имеет решение, представимое в виде суммы аналитической функции и функции $a(t)$; уравнение (12) имеет решение вида $p(t)e^{a(t)}$, а уравнение (2) — решение $\tilde{p}(t) + e^{a(t)}p(t)$, $p(t)$, $\tilde{p}(t)$ — аналитические в окрестности $t = 0$ функции.

Общее решение уравнения $z(qt) = z(t)$ есть $z(t) = \gamma\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)$, $\gamma(t+1) = \gamma(t)$ (при $t > 0$ и $q > 0$). Следовательно, общее решение уравнения (12) при $\lambda = 0$ имеет вид

$$x(t) = p(t)e^{a(t)}\omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \quad (16)$$

$\omega(t+1) = \omega(t)$, а общее решение неоднородного уравнения (2) есть

$$x(t) = \tilde{p}(t) + p(t)e^{a(t)}\omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right). \quad (17)$$

Приведем несколько простых примеров.

$$1. \quad x(qt) = \lambda x(t) + \sum_{i=0}^k d_i t^i, \quad q \neq \pm 1. \quad (18)$$

а) если $\lambda \neq q^m$, $0 \leq m \leq k$, то уравнение (18) имеет частное решение

$$p(t) = \sum_{i \neq m}^k \frac{d_i}{q^i - \lambda} t^i; \quad (18')$$

б) если $\lambda = q^m$, $0 \leq m \leq k$, частное решение при $t > 0$ есть

$$p(t) = \sum_{i=0, i \neq m}^k \frac{d_i}{q^i - \lambda} t^i + \frac{d_m}{\lambda \ln q} t^m \ln t. \quad (18'')$$

Общее решение уравнения (18), например при $q > 0$, $\lambda > 0$ и $t > 0$ есть

$$x(t) = p(t) + t^{\frac{\ln \lambda}{\ln q}} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \\ \omega(t+1) = \omega(t).$$

$$2. \quad x(qt) = t^m x(t), \quad q \neq \pm 1. \quad (19)$$

При $q, m > 0$ и $t > 0$

$$x(t) = e^{\frac{m}{2 \ln q} (\ln^2 t - \ln q \ln t)} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right),$$

$\omega(t+1) = \omega(t)$, как показано выше, есть решение уравнения (19).

Функция

$$a(t) = \frac{m}{2 \ln |q|} (\ln^2 |t| - \ln |q| \ln |t|) \quad (20)$$

определена уже при всех $t \neq 0$ и q, m как положительных, так и отрицательных и

$$a(qt) = a(t) + m \ln |t|.$$

Поэтому

$$x(t) = e^{a(t)} \begin{cases} \omega_1 \left(\frac{\ln t}{\ln |q|} \right), & t > 0, \\ \omega_2 \left(\frac{\ln |t|}{\ln |q|} \right), & t < 0 \end{cases} \quad (21)$$

можно рассматривать как замену неизвестной функции $x(t)$ функцией ω .

В таком случае

$$x(qt) = e^{a(t)} |t|^m \begin{cases} \omega_1 \left(\frac{\ln |t|}{\ln |q|} + 1 \right), & t > 0, \quad q > 0, \\ \omega_2 \left(\frac{\ln |t|}{\ln |q|} + 1 \right), & t > 0, \quad q < 0, \\ \omega_2 \left(\frac{\ln |t|}{\ln |q|} + 1 \right), & t < 0, \quad q > 0, \\ \omega_1 \left(\frac{\ln |t|}{\ln |q|} + 1 \right), & t < 0, \quad q < 0, \end{cases} \quad (22)$$

и, подставляя (21), (22) в (19), будем иметь

$$\begin{aligned}
\omega_1(t+1) &= \omega_1(t), & \text{если } q > 0, \\
\omega_2(t+1) &= \omega_2(t), & m - \text{четное}, \\
\omega_1(t+1) &= \omega_1(t), & \text{если } q > 0, \\
\omega_2(t+1) &= -\omega_2(t), & m - \text{нечетное}, \\
\omega_2(t+1) &= \omega_1(t), & \text{если } q < 0, \\
\omega_1(t+1) &= \omega_2(t), & m - \text{четное}, \\
\omega_2(t+1) &= \omega_1(t), & \text{если } q < 0, \\
\omega_1(t+1) &= -\omega_2(t), & m - \text{нечетное}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Итак, (21) есть общее решение уравнения (19), если ω — произвольная функция, удовлетворяющая условиям (23).

$$3. \quad x(2t) = \cos t x(t) - \sin^2 t. \tag{24}$$

Функция $x(t) = \cos t$ является решением уравнения (24). Полагая $y(t) = x(t) - \cos t$, получаем уравнение

$$y(2t) = \cos t y(t),$$

которое было рассмотрено в предыдущем параграфе. Поэтому можно сразу выписать общее решение уравнения (24)

$$x(t) = \cos t + \frac{\sin t}{t} \omega\left(\frac{\ln |t|}{\ln 2}\right),$$

где

$$\omega\left(\frac{\ln |t|}{\ln 2}\right) = \begin{cases} \omega_1\left(\frac{\ln t}{\ln 2}\right), & t > 0 \text{ и } \omega_1(t+1) = \omega_1(t), \\ \omega_2\left(\frac{\ln |t|}{\ln 2}\right), & t < 0 \text{ и } \omega_2(t+1) = \omega_2(t). \end{cases}$$

§ 4. Линейные уравнения с нелинейным отклонением аргумента

В предыдущих параграфах мы рассматривали систему линейных уравнений

$$x(f(t)) = B(t)x(t) + G(t) \quad (1)$$

в предположении, что $f(t) = qt$. Если функция $f(t)$ является нелинейной, то в ряде случаев система (1) может быть сведена к системе с линейным отклонением аргумента.

1. Рассмотрим случай, когда $f(t)$ — дробно-линейная функция, т.е.,

$$f(t) = \frac{at + b}{ct + d}. \quad (2)$$

Положив $t = u/v$, отображение $t \mapsto f(t)$ можно переписать в виде

$$\frac{u}{v} \mapsto \frac{au + bv}{cu + dv}.$$

Этому отображению отвечает линейное двумерное отображение

$$\tilde{f}: \begin{cases} u \mapsto au + bv \\ v \mapsto cu + dv, \end{cases} \quad (3)$$

которое при $\Delta = (a - d)^2 + 4bc \neq 0$ можно представить в виде

$$\begin{cases} \psi_1(u, v) \mapsto \mu_1 \psi_1(u, v) \\ \psi_2(u, v) \mapsto \mu_2 \psi_2(u, v), \end{cases}$$

где $\mu_1 \neq \mu_2$ — собственные числа, $\psi_1(u, v) = \alpha u + \beta v$, $\psi_2(u, v) = \gamma u + \delta v$ — собственные функции отображения \tilde{f} . Отсюда следует, что при отображении \tilde{f}

$$\frac{\psi_1(u, v)}{\psi_2(u, v)} = \frac{\alpha u + \beta v}{\gamma u + \delta v} \mapsto \nu \frac{\alpha u + \beta v}{\gamma u + \delta v},$$

где $\nu = \mu_1 / \mu_2$. Если $\Delta > 0$, то и собственные числа, и собственные функции вещественны, что позволяет написать: при отображении f

$$\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \mapsto \nu \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}. \quad (4)$$

Таким образом, если в уравнении (1) сделать замену переменных

$$x(t) = y(\tau), \quad \tau = \eta(t) = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \quad \left(t = \frac{\delta \tau - \beta}{\alpha - \gamma \tau} \right), \quad (5)$$

получим уравнение

$$y(\nu \tau) = B \left(\frac{\delta \tau - \beta}{\alpha - \gamma \tau} \right) y(\tau) + G \left(\frac{\delta \tau - \beta}{\alpha - \gamma \tau} \right), \quad (6)$$

поскольку $x(t) = y \left(\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \right)$ и, следовательно, согласно (4)

$x(f(t)) = y \left(q \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \right) = y(q\tau)$. Уравнения вида (6) изучались нами в предыдущих параграфах.

Рассмотрим простейший пример —

$$x \left(\frac{at + b}{ct + d} \right) = \lambda x(t), \quad \lambda > 0, \quad (7)$$

в предположении, что $\Delta > 0$. Собственные числа отображения (3) в этом случае различны и вещественны, и мы можем переписать преобразование аргумента в виде (4) с $\nu \neq 1$, используя собственные функции отображения (3). Это означает, что характеристическое отображение уравнения (7) можно представить в виде

$$S: \begin{cases} \eta(t) \mapsto \nu \eta(t) \\ x \mapsto \lambda x. \end{cases}$$

Инвариантами этого отображения, если $\nu > 0$, являются $x / (\eta(t))^{\frac{\ln \lambda}{\ln \nu}}$ и $\tilde{\omega}(\ln \eta(t) / \ln \nu)$, где $\tilde{\omega}$ – какая-либо 1-периодическая функция. Общее решение уравнения (7) может быть представлено в виде

$$x(t) = [\eta(t)]^{\frac{\ln \lambda}{\ln |\nu|}} \omega\left(\frac{\ln \eta(t)}{\ln |\nu|}\right),$$

где ω – произвольная периодическая функция периода 1, если $\nu > 0$, и периода 2, как мы уже знаем, но такая, что $\omega(\tau + 1) = -\omega(\tau)$, если $\nu < 0$ и $\nu \neq -1$.

Остается добавить, если $\nu = -1$ ($a + d = 0$), то $f(f(t)) = t$ и подстановка $f(t)$ вместо t в уравнение (7) дает еще одно уравнение относительно $x(t)$ и $x(f(t))$; очевидно, в этом случае уравнение (7) имеет решения (и притом много) только тогда, когда $\lambda^2 = 1$.

Когда $\Delta = 0$, собственные числа отображения \tilde{f} равны, $\mu_{1,2} = \mu = \frac{a+d}{2}$, и тогда, как известно, это отображение представимо в виде

$$\begin{cases} \psi_1(u, v) \mapsto \mu \psi_1(u, v) + \psi_2(u, v) \\ \psi_2(u, v) \mapsto \mu \psi_2(u, v). \end{cases}$$

В таком случае

$$\frac{\psi_1(u, v)}{\psi_2(u, v)} \mapsto \frac{\psi_1(u, v)}{\psi_2(u, v)} + \frac{1}{\mu},$$

и если для собственных функций ψ_1, ψ_2 использовать те же обозначения, что и выше, то при отображении f

$$\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \mapsto \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} + \frac{1}{\mu}.$$

Таким образом, при отображении f

$$\frac{\zeta}{\gamma t + \delta} \mapsto \frac{\zeta}{\gamma t + \delta} + 1, \quad \zeta = \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)\mu}{\gamma},$$

и замена $x(t) = y(\tau)$, $\tau = \frac{\zeta}{\gamma t + \delta}$ приводит уравнение (1) к уравнению со сдвигом аргумента $\tau + 1$.

Если, например, мы имеем уравнение

$$x\left(\frac{at}{t+a}\right) = \lambda x(t), \quad \lambda > 0, \quad (8)$$

то оба собственных числа двумерного отображения, порожденного отображением $t \mapsto at/(t+a)$, равны a , и последнее, как легко видеть, приводится к виду $1/t \mapsto 1/t + 1/a$. Поэтому характеристическое отображение уравнения (8) можно переписать так :

$$S: \begin{cases} \frac{a}{t} \mapsto \frac{a}{t} + 1 \\ x \mapsto \lambda x, \end{cases}$$

его инвариантами являются $x/\lambda^{a/t}$ и $\tilde{\omega}(a/t)$, где $\tilde{\omega}$ – какая-либо 1-периодическая функция. Следовательно, общее решение уравнения (8) имеет вид:

$$x(t) = \lambda^{\frac{a}{t}} \omega(a/t),$$

где ω – произвольная периодическая функция периода 1.

Линейные уравнения с дробно-линейным отклонением аргумента, когда $\Delta < 0$, к сожалению, не поддаются такому относительно простому исследованию. Исключение составляют случаи, когда дробно-линейному отображению отвечает в плоскости u, v поворот на рациональный угол (с растяжением или сжатием) (собственные числа отображения f равны $\rho e^{\pm i\varphi}$, $\varphi = k/m$), так что $f^m(t) = \underbrace{f(f \dots f(t) \dots)}_m = t$.

Например, если $f(t) = \frac{at+b}{t-a}$, $b \neq -a^2$, то $f^2(t) = t$;
 – если $f(t) = \frac{at - (a^2 + ab + b^2)}{t+b}$, $b \neq -a$, то $f^3(t) = t$
 (и $\mu = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}(a+b)$);

— если $f(t) = \frac{at - (a^2 + b^2)/2}{t + b}$, $b \neq -a$, то $f^4(t) = t$
(и $\mu = \frac{1 \pm i}{2}(a + b)$).

В случае, если $f^m(t) = t$, $m > 1$, то подставляя $f(t)$ вместо t последовательно $m - 1$ раз в уравнение (1), получим систему из m линейных уравнений относительно m неизвестных — $x(t)$, $x(f(t))$, ..., $x(f^{m-1}(t))$, — так что в этом случае $x(t)$ определяется однозначно.

Например, если мы имеем уравнение

$$x(f(t)) = g(t)x(t) + h(t)$$

и $f^m(t) = t$, то несложно найти, что

$$x(t) = \frac{h(f^{m-1}(t)) + \sum_{j=0}^{m-2} \left\{ h(f^j(t)) \prod_{i=j+1}^{m-1} g(f^i(t)) \right\}}{1 - \prod_{i=0}^{m-1} g(f^i(t))},$$

если, конечно, знаменатель отличен от нуля (и даже вне зависимости от того, является ли функция $f(t)$ дробно-линейной или нет).

2. Если отображение $t \mapsto f(t)$ имеет неподвижную точку, во многих случаях система (1) сводится к системе с линейным отклонением аргумента, по крайней мере, в окрестности такой неподвижной точки. Сделать это можно с помощью уравнения Шредера

$$x(f(t)) = qx(t), \tag{9}$$

где $q = \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=\alpha}$ и $\alpha = f(\alpha)$.

Пусть $\gamma(t)$ — некоторое монотонное решение уравнения (9). Тогда, производя в (1) замену переменных

$$x(t) = y(\gamma(t)), \quad \gamma(t) = \tau,$$

получаем уравнение

$$y(q\tau) = \tilde{B}(\tau)y(\tau) + \tilde{G}(\tau),$$

где $\tilde{B}(\tau) = B(\gamma^{-1}(\tau))$, $\tilde{G}(\tau) = G(\gamma^{-1}(\tau))$.

Вопрос о существовании решений уравнения Шредера решается с помощью упомянутых выше теорем о линеаризации отображения (глава 3, § 2).

В том случае, когда $f(t)$ — аналитическая функция, решение уравнения (9) можно искать в виде ряда

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (t - \alpha)^k. \quad (10)$$

Если

$$f(t) = \alpha + \sum_{i=1}^{\infty} q_i (t - \alpha)^i, \quad q_1 = q \quad (11)$$

то, подставляя (10) и (11) в (9), получаем рекуррентные соотношения для определения коэффициентов c_k :

$$c_k = \frac{1}{q(1 - q^{k-1})} \sum_{m < k} \left(\sum_{i_1 + \dots + i_m = k} q_{i_1} \dots q_{i_m} \right) c_m, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (12)$$

c_1 — произвольно¹.

¹Так как $\left(\sum_{i=1}^{\infty} q_i t^i\right)^m = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i_1 + \dots + i_m = k} q_{i_1} \dots q_{i_m}\right) t^k$, то $\sum_{m=1}^{\infty} c_m \left(\sum_{i=1}^{\infty} q_i t^i\right)^m = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{m \leq k} c_m \sum_{i_1 + \dots + i_m = k} q_{i_1} \dots q_{i_m}\right) t^k$. Подставляя (10) и (11) в (9) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях t , будем иметь $\sum_{m \leq k} c_m \left(\sum_{i_1 + \dots + i_m = k} q_{i_1} \dots q_{i_m}\right) = q_1 c_k$, откуда и вытекает соотношение (12).

При $q \neq 0, \pm 1$ полученный ряд сходится в некоторой окрестности точки $t = \alpha$. Если $c_1 \neq 0$, то решение (10) будет монотонным, по крайней мере, в окрестности $t = \alpha$.

С уравнением Шредера тесно связано уравнение Абеля

$$x(f(t)) = x(t) + 1. \tag{13}$$

Положив в (9)

$$x(t) = e^{\frac{y(t)}{\ln q}},$$

получим для функции $y(t)$ уравнение Абеля. С помощью уравнения Абеля систему (1) можно свести к системе с постоянным отклонением аргумента.

3. Примеры функциональных уравнений, у которых отклонение аргумента является нелинейным, мы рассматривали и в предыдущей главе. Таким уравнением является, например, уравнение

$$x(2t^2 - 1) = 2x(t). \tag{14}$$

Однако это не уравнение Шредера (по нашему определению), так как для функции $f(t) = 2t^2 - 1$, $f'(t) = 4t \neq 2$ при $t = 1$ или $-1/2$, когда $f(t) = t$.

Рассмотрим уравнение

$$x(2t^2 - 1) = 4x(t), \tag{15}$$

аналогичное уравнению (14), но уже являющееся уравнением Шредера: $f'(t)|_{t=1} = 4$. Уравнение (15) в окрестности $t = 1$ имеет аналитические решения $x(t) = c\varphi(t)$, где

$$\varphi(t) = (t - 1) - \frac{1}{6}(t - 1)^2 + \frac{2}{45}(t - 1)^3 + \dots \tag{16}$$

(коэффициенты разложения можно найти по формулам (12)). При $|t - 1| < 1$ ряд (16) сходится и

$$\varphi(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\arccos t)^2, & 0 < t < 1, \\ 0 & t = 1, \\ \frac{1}{2}(\text{Arch } t)^2, & 1 < t < 2. \end{cases} \quad (17)$$

Построенные аналитические решения уравнения (15) не могут быть продолжены на все t . Если функция $x(t) = c(\text{Arch } t)^2$ является решением уравнения (15) при $t > 1$, т. е. вправо аналитические решения допускают продолжение, то функция $x(t) = c(\arccos t)^2$, определенная при $-1 \leq t \leq 1$, является решением уравнения (15) лишь при $0 \leq t \leq 1$, т. е. влево аналитические решения непродолжимы. Ситуация здесь такая же, как и с решениями уравнения (14): имеется единственное непрерывное решение, а именно $x(t) = 0$, определенное при всех $t \in [-1, 1]$.

Общее решение уравнения (15) (которое легко получается через инварианты характеристического отображения так же, как было получено общее решение уравнения (14)), определенное при всех $-\infty < t < \infty$, имеет вид

$$x(t) = \begin{cases} (\text{Arch}|t|)^2 \omega\left(\frac{\ln \text{Arch } |t|}{\ln 2}\right), & t < -1, \\ 0, & -1 \leq t \leq 1, \\ (\text{Arch}|t|)^2 \omega\left(\frac{\ln \text{Arch } t}{\ln 2}\right), & t > 1. \end{cases} \quad (18)$$

Рассмотрим еще один пример

$$x((t-a)^2 + a) = bx(t), \quad b > 0. \quad (19)$$

При $b = 2$ уравнение (19) есть уравнение Шредера. Характеристическое отображение уравнения (19) имеет вид

$$S: \begin{cases} t \mapsto (t-a)^2 + a, \\ x \mapsto bx. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\ln(t - a) \mapsto 2 \ln(t - a).$$

Ограничимся $t > a + 1$.

Инвариантами отображения S являются функции $\frac{x}{(\ln(t - a))^{\frac{\ln b}{\ln 2}}}$ и $\gamma\left(\frac{\ln \ln(t - a)}{\ln 2}\right)$, где $\gamma(t)$ — некоторая периодическая функция периода 1.

Общее решение уравнения (19) запишется следующим образом:

$$x(t) = (\ln(t - a))^{\frac{\ln b}{\ln 2}} \omega\left(\frac{\ln \ln(t - a)}{\ln 2}\right), \quad (20)$$

$\omega(t)$ — произвольная периодическая функция периода 1.

§ 5. Уравнения, у которых отклонение аргумента содержит неизвестную функцию

Исследование систем функциональных уравнений

$$x(f(t), x(t)) = G(t, x(t)), \quad (1)$$

$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $G: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, содержащих искомую функцию в отклонении аргумента, является уже более сложной задачей. Это связано с тем, что соответствующее характеристическое отображение

$$\begin{cases} t \mapsto f(t, x), \\ x \mapsto G(t, x), \end{cases} \quad (2)$$

в общем случае не имеет инвариантов, зависящих только от t .

В этом случае бывает полезно выразить инварианты и решения с помощью параметра. Параметр вводится путем расширения отображения (2): вместо отображения (2), действующего в \mathbb{R}^{n+1} , рассматривается отображение

$$\begin{cases} \tau \mapsto h(\tau), \\ t \mapsto f(t, x), \\ x \mapsto G(t, x), \end{cases} \quad (2')$$

пространства $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$. Функция $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выбирается так, чтобы инварианты отображения (2') выписывались по возможности наиболее просто; обычно h — линейная функция. Если, например, существует функция $\psi(t, x)$ такая, что при отображении (2) $\psi(t, x) \mapsto \lambda\psi(t, x)$, то удобно взять $h(\tau) = \lambda\tau$. Тогда $\frac{\psi(t, x)}{\tau}$ — инвариант отображения (2'), а $\psi(t, x) = \tau\omega\left(\frac{\ln \tau}{\ln 2}\right)$, $\tau > 0$, — инвариантное множество при любой функции $\omega(\tau)$, если только $\omega(\tau + 1) = \omega(\tau)$.

Введение параметра τ можно интерпретировать как повышение размерности системы (1): беря в качестве независимой переменной τ , мы переходим от системы (1) к системе

$$\begin{cases} t(h(\tau)) = f(t(\tau), x(\tau)), \\ x(h(\tau)) = G(t(\tau), x(\tau)). \end{cases} \quad (1')$$

В этой системе отклонение аргумента уже не зависит от неизвестной функции. Если, в частности, $h(\tau) = \tau + 1$, (1') представляет собой систему разностных уравнений.

Не останавливаясь более на возможности параметрического представления инвариантов и решений, займемся исследованием наиболее простых уравнений вида (1).

Если функции f, G являются линейными относительно совокупности переменных t, x , то характеристическое отображение (2) представляет собой линейное отображение $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ и, следовательно, его инварианты можно построить, как это показано в § 1.

Однако здесь мы не будем рассматривать произвольную линейную систему: хотя построение инвариантов и не представляет существенных трудностей, полный анализ решений такой системы все же достаточно сложен. Особенности линейных уравнений, у которых отклонение аргумента содержит искомую функцию, уже достаточно хорошо видны в самом простом случае — $n = 1$.

В этом параграфе, в отличие от предыдущих, исследование носит в основном качественный характер и направлено на то, чтобы выяснить, при каких условиях среди инвариантных кривых характеристического отображения имеются t -кривые, т. е. те, которым соответствуют решения уравнения.

Итак, рассмотрим уравнение

$$x(at + bx(t)) = ct + dx(t), \quad (3)$$

a, b, c, d — постоянные, $b \neq 0$. Нас будут интересовать определенные при всех $t \in R$ непрерывные решения уравнения (3).

В первой главе уже приводился пример такого уравнения — $x(x(t)) = 0$. Для него $\Delta = ad - bc = 0$. В этом параграфе мы еще возвратимся к уравнениям, для которых $\Delta = 0$, а пока будем предполагать, что $\Delta \neq 0$.

Характеристическое отображение

$$S: \begin{cases} t \mapsto at + bx, \\ x \mapsto ct + dx, \end{cases} \quad (4)$$

является линейным отображением плоскости (t, x) и притом взаимнооднозначным. Собственные числа λ равны $p \pm \sqrt{p^2 - \Delta}$, где $p = \frac{a+d}{2}$. Наша цель — выяснить, каким условиям должны удовлетворять собственные числа, чтобы уравнение (3) могло иметь решения.

При $t \neq 0$

$$\frac{x}{t} \xrightarrow{S} \frac{c + d\frac{x}{t}}{a + b\frac{x}{t}}$$

и, следовательно, каждая прямая $\frac{x}{t} = \mu$ при отображении S переходит в прямую $\frac{x}{t} = \frac{c + d\mu}{a + b\mu}$; прямая $t = 0$ переходит в прямую $\frac{x}{t} = \frac{d}{b}$. Более того, так как точка $O(0, 0)$ остается неподвижной при отображении S , то каждая полупрямая, выходящая из точки O , переходит в полупрямую, выходящую из точки O ; если φ — угол, образованный положительным направлением оси x и полупрямой, выходящей из O , то при отображении S

$$S_\varphi: \varphi \mapsto \theta(\varphi), \quad (5)$$

$\varphi = \varphi \bmod 2\pi$. Отображение S_φ можно интерпретировать как отображение окружности $\Phi(\varphi \in \Phi)$ в себя. Это отображение непрерывно, так как непрерывно исходное отображение S . Если $\mu = \operatorname{tg} \varphi$, то

$$S_\mu: \mu \mapsto \frac{c + d\mu}{a + b\mu} \quad (6)$$

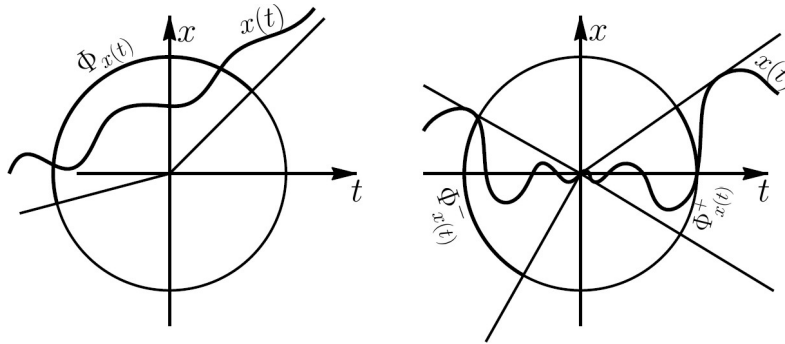
$\left(\operatorname{tg} \theta(\varphi) = \frac{c + d\varphi}{a + b\varphi}\right)$. Каждой неподвижной точке $\varphi = \varphi_0$ отображения S_φ отвечает неподвижная точка $\mu = \operatorname{tg} \varphi_0$ отображения S_μ . Неподвижные точки отображения S_μ (являющиеся вещественными корнями уравнения $\mu = \frac{c + d\mu}{a + b\mu}$) существуют лишь при условии, что $\frac{(a-d)^2}{4} + bc = p^2 - \Delta \geq 0$. Таким образом, отображение S_μ имеет неподвижные точки тогда и только тогда, когда собственные числа отображения S вещественны.

Предположим, уравнение (3) имеет непрерывное решение $x(t)$, $t \in R$. Покажем, что в этом случае отображение S_μ имеет неподвижные точки.

Пусть $\Phi_{x(t)} = \{\alpha \in \Phi: \text{полупрямая } \varphi = \alpha \text{ пересекает график решения } x(t)\}$.

Если $x(0) \neq 0$, то $\Phi_{x(t)}$ — интервал (открытый, полуоткрытый или замкнутый) на окружности Φ ; если $x(0) = 0$, то $\Phi_{x(t)}$ состоит из двух интервалов (открытых, полуоткрытых или замкнутых) $\Phi_{x(t)}^+$ и $\Phi_{x(t)}^-$, соответствующих графику решения $x(t)$ при $t > 0$ и $t < 0$.

Множество $\Phi_{x(t)}$ ($\Phi_{x(t)}^+, \Phi_{x(t)}^-$) так же, как и его дополнение $\Phi \setminus \Phi_{x(t)}$, не пусто; $S_\varphi \Phi_{x(t)} \subset \Phi_{x(t)}$ и, следовательно, $S_\varphi(\Phi \setminus \Phi_{x(t)}) \supset \Phi \setminus \Phi_{x(t)}$, так как график решения $x(t)$ инвариантен при отображении S .

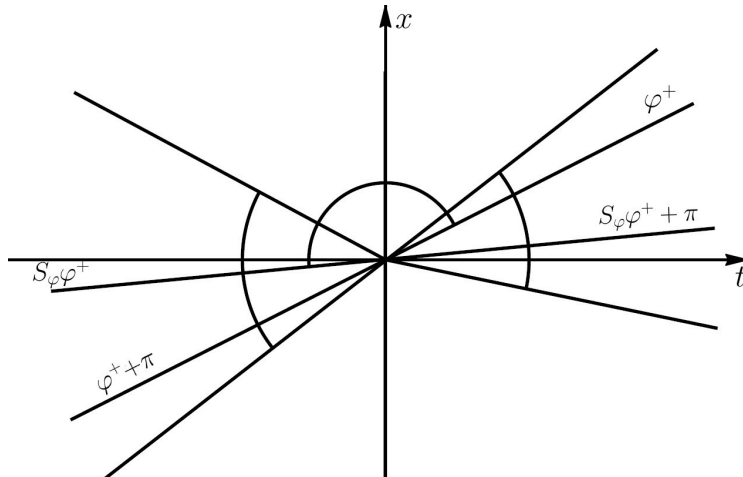


Если $\Phi_{x(t)}$ — интервал, то отображение S_φ имеет неподвижную точку, принадлежащую замыканию $\Phi_{x(t)}$ на окружности Φ ; в том случае, когда замыкание $\Phi_{x(t)}$ совпадает с Φ , т. е. $\Phi \setminus \Phi_{x(t)}$ состоит из одной точки (можно доказать, что это невозможно), уже сама эта точка является неподвижной. Следовательно, и отображение S_μ имеет неподвижную точку.

Предположим, $\Phi_{x(t)}$ состоит из двух интервалов Φ^+ и Φ^- . Если $S_\varphi \Phi^+ \subset \Phi^+$ или $S_\varphi \Phi^- \subset \Phi^-$, то на Φ^+ или Φ^- имеются неподвижные точки. Если $S_\varphi \Phi^+ \subset \Phi^-$, $S_\varphi \Phi^- \subset \Phi^+$ (так как $S_\varphi \Phi_{x(t)} \subset \Phi_{x(t)}$, то этим исчерпываются все возможности), то $S_\varphi^2 \Phi^+ \subset \Phi^+$ (и $S_\varphi^2 \Phi^- \subset \Phi^-$); замыкание Φ^+ содержит точку

$\varphi^+ : S_\varphi^2 \varphi^+ = \varphi^+$. Если $S_\varphi \varphi^+ = \varphi^+ + \pi$, то $\mu = \operatorname{tg} \varphi^+$ — неподвижная точка отображения S_μ . Если $S_\varphi \varphi^+ \neq \varphi^+ + \pi$, рассмотрим интервал $\tilde{\Phi} = [\varphi^+, S_\varphi \varphi^+]$ на окружности Φ , не содержащий точку $\varphi^+ + \pi$. Либо $S_\varphi \tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}$, либо $S_\varphi \tilde{\Phi}$ есть замыкание $\Phi \setminus \tilde{\Phi}$. При отображении S_φ диаметрально противоположные точки окружности Φ переходят в диаметрально противоположные (так как при отображении S прямые, проходящие через $O(0, 0)$, переходят в такие же прямые). Таким образом, $S_\varphi(\varphi^+ + \pi) = S_\varphi \varphi^+ + \pi$, т. е. $S_\varphi(\varphi^+ + \pi)$ также не принадлежит $\tilde{\Phi}$. Это означает, что $S_\varphi \tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}$ и на интервале $\tilde{\Phi}$ имеется неподвижная точка отображения S_φ . Следовательно, и отображение S_μ имеет неподвижную точку.

Итак, если собственные числа отображения S комплексные ($p^2 - \Delta < 0$), то уравнение (3) не имеет непрерывных решений.

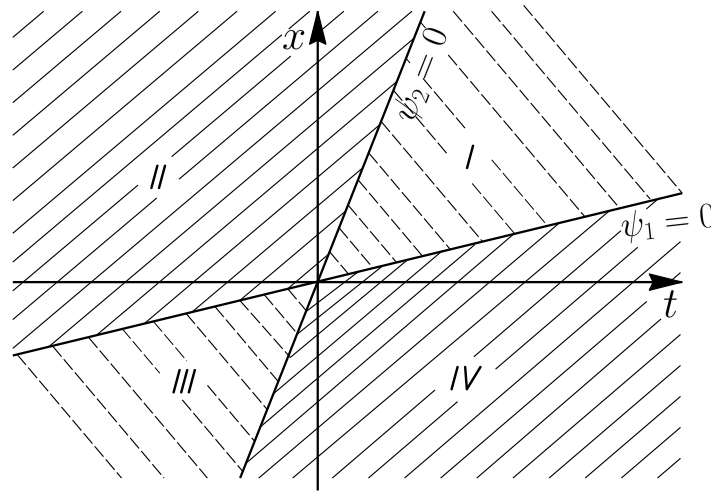


Предположим, собственные числа λ_1, λ_2 вещественны и различны ($p^2 - \Delta > 0$). В этом случае отображение S имеет собственные функции $\psi_i(t, x) = \alpha_i t - \beta_i x$, α_i, β_i — вещественные постоянные, $i = 1, 2$, так что

$$\psi_i(t, x) \xrightarrow{S} \lambda_i \psi_i(t, x). \quad (7)$$

Функции $x_i(t) = \frac{\alpha_i}{\beta_i} t$ ($\beta_i \neq 0$, когда $b \neq 0$), $i = 1, 2$, являются решениями уравнения (3). Однако может случиться, что других решений уравнение (3) не имеет. Существование решений, отличных от тех, которые выписаны, зависит от величины собственных чисел λ_1 и λ_2 .

Рассмотрим, как действует отображение S в плоскости (t, x) .



А.1. Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, то отображение S оставляет области на месте

$$I \xrightarrow{S} I, \quad II \xrightarrow{S} II, \quad III \xrightarrow{S} III, \quad IV \xrightarrow{S} IV.$$

2. Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, то

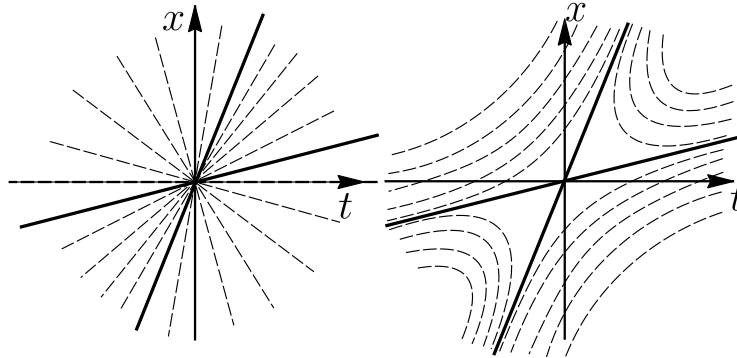
$$I \xrightarrow{S} IV \xrightarrow{S} I, \quad II \xrightarrow{S} III \xrightarrow{S} II.$$

3. Если $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, то

$$I \xrightarrow{S} II \xrightarrow{S} I, \quad III \xrightarrow{S} IV \xrightarrow{S} III.$$

4. Если $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, то

$$I \xrightarrow{S} III \xrightarrow{S} I, \quad II \xrightarrow{S} IV \xrightarrow{S} II.$$



$$\ln |\lambda_1| \cdot \ln |\lambda_2| > 0$$

$$\ln |\lambda_1| \cdot \ln |\lambda_2| < 0$$

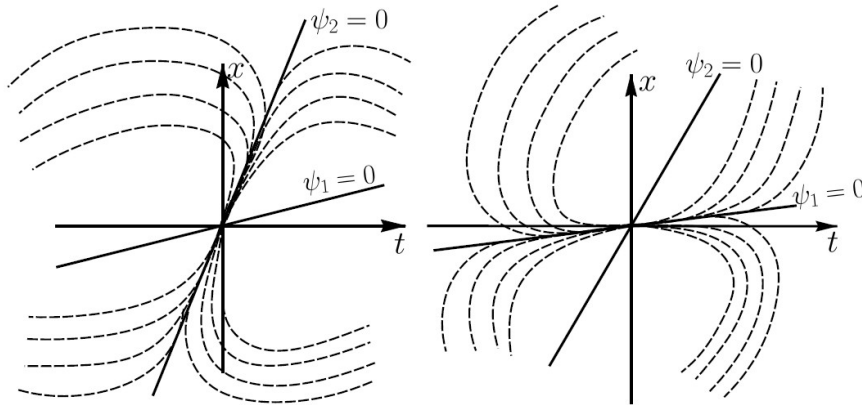
Б. Если $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$, то точка $(0, 0)$ — типа “устойчивый узел”, если $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| > 1$ — типа “неустойчивый узел”, если $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| > 1$ или $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| < 1$, то точка $(0, 0)$ — типа “седло”.

В. Из (7) следует

$$\frac{\psi_1(t, x)}{\psi_2(t, x)} \xrightarrow{S} \frac{\lambda_1 \psi_1(t, x)}{\lambda_2 \psi_2(t, x)}.$$

Пусть $p \neq 0$. Тогда $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$. Если, например, $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, то каждая прямая $\frac{\psi_1(t, x)}{\psi_2(t, x)} = \mu$, отличная от прямых $\psi_i(t, x) = 0$, $i = 1, 2$ (т. е. $\mu \neq 0, \infty$) под действием отображения S стремится к прямой $\psi_1(t, x) = 0$, а под действием отображения S^{-1} (обратного S) — к прямой $\psi_2(t, x) = 0$. Если $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, наоборот, каждая прямая под действием S стремится к прямой $\psi_2(t, x) = 0$, а под действием S^{-1} — к прямой $\psi_1(t, x) = 0$.

Принимая во внимание Б и В, можно заключить, что точки плоскости (t, x) под действием отображения S ведут себя следующим образом:



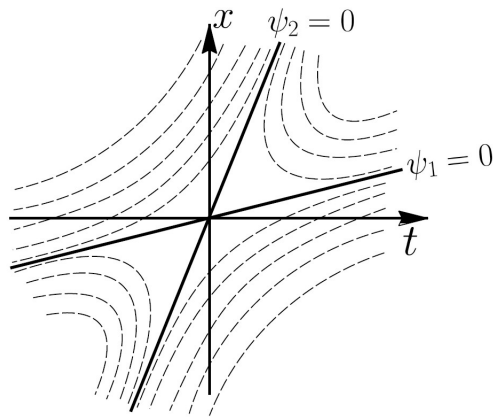
$$\ln |\lambda_1| \cdot \ln |\lambda_2| > 0$$

1а) $1 < |\lambda_1| < |\lambda_2|$

2а) $|\lambda_1| < |\lambda_2| < 1$

1б) $1 > |\lambda_1| > |\lambda_2|$

2б) $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 1$



$$\ln |\lambda_1| \cdot \ln |\lambda_2| < 0$$

При этом области I, II, III, IV преобразуются друг в друга, как это указано в А.

Таким образом, если $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ или $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, т. е. $\lambda_1 \lambda_2 = \Delta = ad - bc < 0$, то уравнение (3) не имеет непрерывных (однозначных) решений, отличных от $x_i(t) = \frac{\alpha_i}{\beta_i} t, i = 1, 2$.

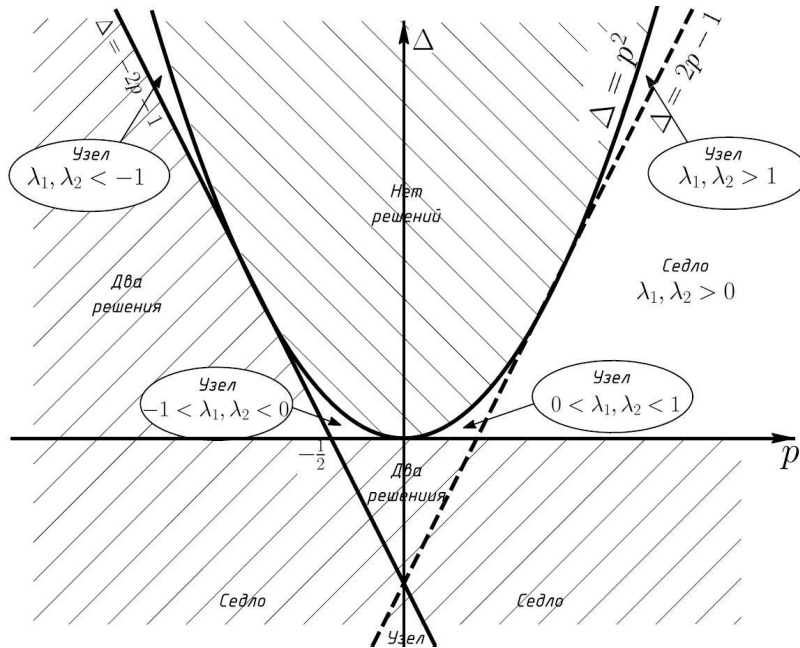
Если $\Delta > 0$, но $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, то при $\ln |\lambda_1| \ln |\lambda_2| < 0$ уравнение (3) также не имеет решений, отличных от $x_i(t) = \frac{\alpha_i}{\beta_i} t, i = 1, 2$.

Суммируя изложенное выше, получаем ($\Delta = ad - bc, p = \frac{a+d}{2}$):

- 1) $\Delta > p^2$ — уравнение (3) не имеет решений (λ_1, λ_2 — комплексные);
- 2) $\Delta < 0, p \neq 0$ — уравнение (3) имеет два решения ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ или $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$);
- 3) $p < 0, 0 < \Delta < -2p - 1$ — уравнение (3) имеет два решения ($\lambda_1 < -1 < \lambda_2 < 0$ или $\lambda_2 < -1 < \lambda_1 < 0$).

Отметим, что в случае комплексных λ использовалось поведение характеристического отображения лишь в окрестности неподвижной точки, так что эти исследования переносятся и на нелинейные уравнения. В случае вещественных λ использовалось поведение отображения и на бесконечности, поэтому полученные результаты непосредственно не переносятся на нелинейные уравнения.

В остальных случаях (а) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, б) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \ln |\lambda_1| \ln |\lambda_2| > 0$) уравнение (3) имеет и другие решения. При этом графики решений проходят только через две из областей I, II, III, IV. Если $\ln |\lambda_1| \ln |\lambda_2| > 0$ (“узел”), то графики решений проходят через те области, которые не содержат ось x ; если $\ln |\lambda_1| \ln |\lambda_2| < 0$ (“седло”), то графики решений проходят через области, которые, наоборот, содержат ось x . Множество решений в этих случаях зависит от произвольной периодической функции (или от двух таких функций).



Аналитически записать решения можно или с помощью параметров (что часто оказывается предпочтительнее), или в виде неявной функции. Каждая инвариантная кривая отображения S может быть представлена, например при $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, в виде

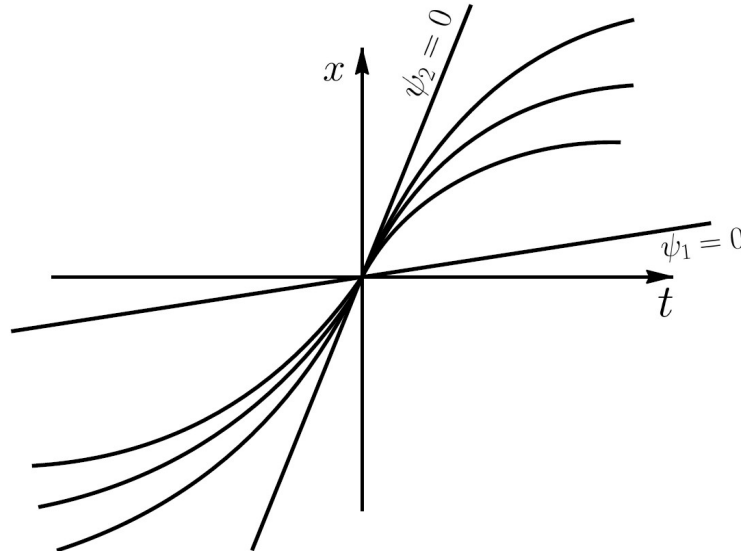
$$\Phi \left(\frac{|\psi_1|^{\frac{1}{\ln \lambda_1}}}{|\psi_2|^{\frac{1}{\ln \lambda_2}}}, \sin 2\pi \frac{\ln |\psi_1|}{\ln \lambda_1} \right) = 0,$$

где Φ — некоторая функция двух переменных.

Остается “выудить” из этого множества инвариантных кривых t -кривые, которым соответствуют (однозначные) решения уравнения (3).

Рассмотрим пример. Пусть $\psi_i(t, x) = \alpha_i t - \beta_i x, \alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$, — собственные функции характеристического отображения

и $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$. Пусть для определенности $\alpha_i, \beta_i > 0$ и $\frac{\alpha_1}{\beta_1} < \frac{\alpha_2}{\beta_2}$.



Инвариантные кривые могут быть представлены в виде

$$\frac{\psi_1^2}{\psi_2} = \begin{cases} \omega_1\left(\frac{\ln \psi_1}{\ln 2}\right), & t > 0 \quad (x > 0, \psi_1 > 0), \\ \omega_2\left(\frac{\ln |\psi_1|}{\ln 2}\right), & t < 0 \quad (x < 0, \psi_1 < 0), \end{cases}$$

где ω_1, ω_2 — произвольные периодические функции периода 1. Следовательно, решения уравнения удовлетворяют уравнению

$$\frac{[\alpha_1 t - \beta_1 x(t)]^2}{\alpha_2 t - \beta_2 x(t)} = \begin{cases} \omega_1\left(\frac{\ln(\alpha_1 t - \beta_1 x(t))}{\ln 2}\right), & t > 0, \\ \omega_2\left(\frac{\ln |\alpha_1 t - \beta_1 x(t)|}{\ln 2}\right), & t < 0, \end{cases}$$

Рассматривая ω как параметр и решая получаемое таким образом квадратное уравнение, будем иметь

$$x(t) = \frac{\alpha_1}{\beta_1}t - \frac{\beta_2}{2\beta_1^2}\omega \pm \sqrt{\omega \left[\omega \frac{\beta_2^2}{4\beta_1^4} + \frac{\beta_2}{2\beta_1^2} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2} - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) t \right]}.$$

Следовательно,

$$x(t) = \frac{\alpha_1}{\beta_1}t - \begin{cases} \beta_2\omega_1 - \sqrt{\omega_1 \left[\omega_1 \beta_2^2 + 4\beta_1^2 \beta_2 \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2} - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) t \right]}, & t > 0, \\ \omega_1(\tau) \geq 0, & \omega_1(\tau) = \omega_1(\tau + 1), \\ \beta_2\omega_2 - \sqrt{\omega_2 \left[\omega_2 \beta_2^2 + 4\beta_1^2 \beta_2 \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2} - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) t \right]}, & t < 0, \\ \omega_2(\tau) \leq 0, & \omega_2(\tau) = \omega_2(\tau + 1), \\ \tau = \frac{\ln |\alpha_1 t - \beta_1 x(t)|}{\ln 2}. \end{cases}$$

Функции ω_1, ω_2 могут быть, в частности, константами.

Возможны различного рода “вырождения” уравнения (3). Остановимся только на двух из них:

1) $p = 0, \Delta < 0$ и 2) $\Delta = 0$.

Если $p = \frac{a+d}{2} = 0$, то, исключая d из уравнения (3), будем иметь

$$x(at + bx(t)) = ct - ax(t). \quad (3')$$

Полагая $y(t) = a(t) + bx(t)$, получаем

$$y(y(t)) = (a^2 + bc)t.$$

Если $\Delta < 0$, то $a^2 + bc = -\Delta > 0$.

Итак, рассмотрим уравнение

$$y(y(t)) = ht, \quad (8)$$

$h > 0$. Характеристическое отображение имеет вид

$$S: \begin{cases} t \mapsto y, \\ y \mapsto ht, \end{cases} \quad (9)$$

Это отображение каждую прямую $t = \text{const}$ переводит в прямую $y = \text{const}$ и, наоборот, каждую прямую $y = \text{const}$ — в прямую $t = \text{const}$. Следовательно, всякое непрерывное решение уравнения (8) должно быть монотонной функцией.

Если $h = 1$, то каждая точка плоскости (t, y) при отображении S переходит в симметричную ей относительно прямой $y = t$ точку. Поэтому всякая функция, график которой симметричен относительно прямой $y = t$, и только такая функция является решением уравнения (8). Среди таких функций имеется только одна монотонно возрастающая: $y = t$, все остальные — монотонно убывающие.

Предположим, $h \neq 1$. Так как

$$\frac{y}{t} \xrightarrow{S} h \frac{1}{\frac{y}{t}}, \quad (10)$$

то каждая прямая $\frac{y}{t} = \mu$ при отображении S переходит в прямую $\frac{y}{t} = \frac{h}{\mu}$, а эта последняя — опять в прямую $\frac{y}{t} = \mu$. Отсюда, в частности, вытекает, что среди решений уравнения (8) имеется только два, а именно: $\frac{y(t)}{t} = \pm\sqrt{h}$ (соответствующих собственным функциям отображения S), для которых существует предел $\frac{y(t)}{t}$ при $t \rightarrow 0$.

Так как

$$S^2: \begin{cases} t \mapsto ht, \\ y \mapsto hy, \end{cases}$$

то всякое решение (8) является и решением уравнения

$$y(ht) = hy(t). \quad (11)$$

Общее решение уравнения (11) имеет вид

$$y(t) = \begin{cases} t\omega_1\left(\frac{\ln t}{\ln h}\right), & t > 0, \\ t\omega_2\left(\frac{\ln |t|}{\ln h}\right), & t < 0. \end{cases} \quad (12)$$

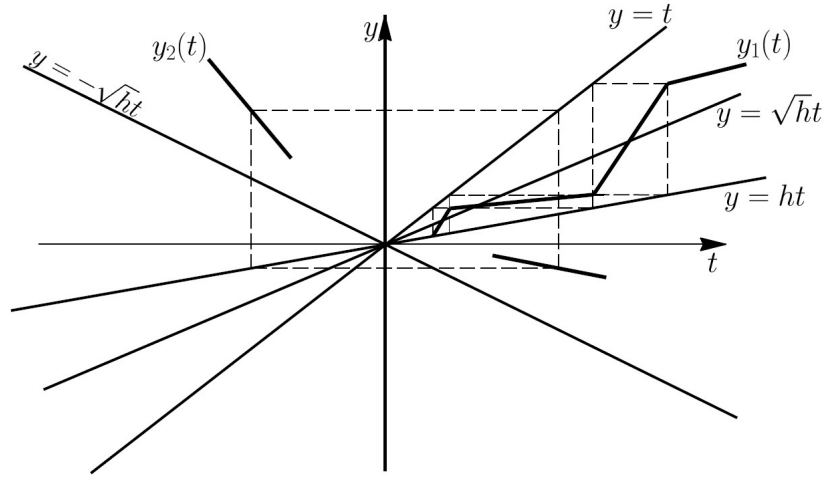
причем $\omega_1(t) = \omega_1(t+1)$, $\omega_2(t) = \omega_2(t+1)$. Остается подставить (12) в (8) и найти условия, которым должны удовлетворять функции ω .

Прежде всего отметим следующее. При отображении S прямая $t = 0$ переходит в прямую $y = 0$, а прямая $y = 0$ — в прямую $t = 0$.

Поэтому для всякой функции вида (12), являющейся решением уравнения (8), $\omega_1(t) \neq 0$, $\omega_2(t) \neq 0$ при всех t .

Каждая точка (t, t) плоскости (t, y) при отображении S переходит в точку (t, ht) , лежащую на той же вертикальной прямой. Следовательно, график любого (однозначного) решения уравнения (8) может пересекать прямую $y = t$ только при $t = 0$. Так как прямая $y = t$ отображается в прямую $y = ht$, то и прямую $y = ht$ график любого решения может пересекать только при $t = 0$.

Каждая точка (t, y) , для которой $0 < \frac{y}{t} < \sqrt{h}$, согласно (10), отображается в точку (t', y') , для которой $\sqrt{h} < \frac{y'}{t'} < \infty$. Поэтому всякое непрерывное решение уравнения (8), проходящее через



первый или третий квадрант, пересекает прямую $\frac{y}{t} = \sqrt{h}$ при $t \neq 0$. А эта прямая лежит между прямыми $y = t$ и $y = ht$.

Из сказанного следует, что график любого решения уравнения (8), проходящего через первый или третий квадрант, лежит между прямыми $y = t$ и $y = ht$, т. е.

при $h < 1$

$$t < y(t) < ht \quad \text{когда} \quad t < 0,$$

$$ht < y(t) < t \quad \text{когда} \quad t > 0, \quad \text{и}$$

при $h > 1$

$$ht < y(t) < t, \quad t < 0,$$

$$t < y(t) < ht, \quad t > 0.$$

Таким образом, для решений, проходящих через первый или третий квадрант,

$$h < \omega(t) < 1, \quad \text{если} \quad h < 1, \tag{13}$$

$$1 < \omega(t) < h, \quad \text{если} \quad h > 1.$$

Из (12) следует, что

$$y(y(t)) = \begin{cases} t \omega_1 \left(\frac{\ln t}{\ln h} \right) \omega_1 \left(\frac{\ln t}{\ln h} + \frac{\ln \omega_1 \left(\frac{\ln t}{\ln h} \right)}{\ln h} \right), \\ \text{если } t > 0, \quad \omega_1 > 0, \\ \\ t \omega_1 \left(\frac{\ln t}{\ln h} \right) \omega_2 \left(\frac{\ln t}{\ln h} + \frac{\ln \left| \omega_1 \left(\frac{\ln t}{\ln h} \right) \right|}{\ln h} \right), \\ \text{если } t > 0, \quad \omega_1 < 0, \\ \\ t \omega_2 \left(\frac{\ln |t|}{\ln h} \right) \omega_2 \left(\frac{\ln |t|}{\ln h} + \frac{\ln \omega_2 \left(\frac{\ln |t|}{\ln h} \right)}{\ln h} \right), \\ \text{если } t < 0, \quad \omega_2 > 0, \\ \\ t \omega_2 \left(\frac{\ln |t|}{\ln h} \right) \omega_1 \left(\frac{\ln |t|}{\ln h} + \frac{\ln \left| \omega_2 \left(\frac{\ln |t|}{\ln h} \right) \right|}{\ln h} \right), \\ \text{если } t < 0, \quad \omega_2 < 0. \end{cases}$$

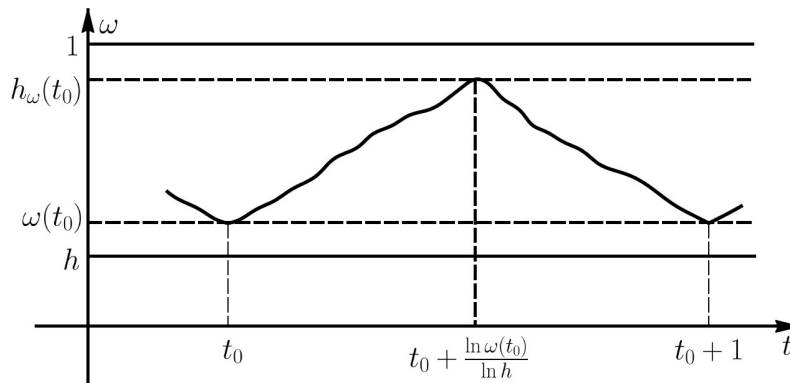
Подставляя это в (8), получаем

$$\begin{aligned} \omega_1(t) \omega_1 \left(t + \frac{\ln \omega_1(t)}{\ln h} \right) &= h, \quad \text{если } \omega_1 > 0, \\ \omega_2(t) \omega_2 \left(t + \frac{\ln \omega_2(t)}{\ln h} \right) &= h, \quad \text{если } \omega_2 > 0, \end{aligned} \tag{14}$$

и

$$\begin{aligned} \omega_1(t)\omega_2\left(t + \frac{\ln|\omega_1(t)|}{\ln h}\right) &= h, \\ \omega_2(t)\omega_1\left(t + \frac{\ln|\omega_2(t)|}{\ln h}\right) &= h, \quad \text{если } \omega_1, \omega_2 < 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Заменяя в (14) или (15) t на $t + \frac{\ln \omega(t)}{\ln h}$ и снова используя (14) или соответственно (15), можно убедиться, что условие $\omega(t) = \omega(t+1)$ выполнено.



Итак, всякое решение уравнения (8) представимо в виде (12) и функции ω удовлетворяют условиям (14), (13) или (15). Всякая монотонная функция вида (12), когда выполнены условия (14), (13) или (15), является решением уравнения (8).

Условия (14), (13) или (15) сами по себе еще не гарантируют монотонность функций (12). Если, например, функция $\omega > 0$ и дифференцируема, то для монотонности функций (12) необходимо, чтобы $\omega(t) + \frac{1}{\ln h}\omega'(t) \geq 0$, и достаточно, чтобы $\omega(t) + \frac{1}{\ln h}\omega'(t) > 0$.

Рассмотрим, наконец, уравнение (3), когда $\Delta = 0$, т. е., по крайней мере, одно из собственных чисел характеристического отображения равно нулю.

Полагая $y(t) = at + bx(t)$ и учитывая, что $ad - bc = 0$, уравнение (3) можно переписать

$$y(y(t)) = hy(t), \quad (16)$$

$$h = a + d.$$

Характеристическое отображение уравнения (16)

$$S: \begin{cases} t \mapsto y, \\ y \mapsto hy, \end{cases}$$

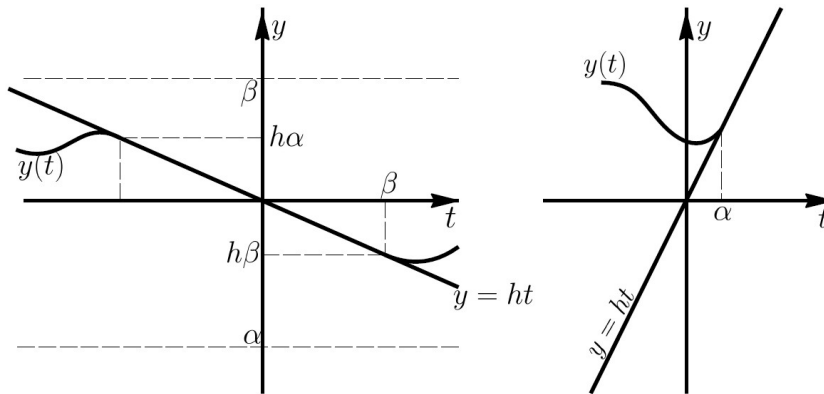
или

$$\begin{cases} y - ht \mapsto 0, \\ y \mapsto hy. \end{cases}$$

Это отображение каждую точку прямой $y = y_0$, а следовательно, и всю прямую переводит в точку (y_0, hy_0) , лежащую на прямой $y = ht$; каждая полоса $\{\alpha < y < \beta\}$ отображается в отрезок прямой $\{y = ht, \alpha < t < \beta\}$.

Предположим, $y(t)$ — непрерывное решение уравнения (16) и $\alpha = \inf_t y(t)$, $\beta = \sup_t y(t)$. График функции $y(t)$ пересекает каждую прямую $y = y_0$, если $\alpha < y_0 < \beta$. Следовательно, график $y(t)$ при отображении S переходит в множество, содержащее отрезок прямой $\{y = ht, \alpha < t < \beta\}$. Так как график всякого решения при отображении S переходит в себя, то, во-первых, график решения $y(t)$ содержит множество $\{y = ht, \alpha < t < \beta\}$ и, таким образом, $y(t) = ht$ при $\alpha \leq t \leq \beta$, во-вторых, α и β должны быть такими, чтобы множество $\{y = ht, \alpha \leq t \leq \beta\}$ отображалось в себя. На прямой $y = ht$ $t \xrightarrow{S} ht$. Поэтому множество $\{y = ht, \alpha \leq t \leq \beta\}$ отображается в себя, если

$$\begin{array}{ll}
 \alpha = -\infty, \quad \beta = +\infty & \text{при} \quad h < -1, \\
 \alpha, \beta - \text{любые, но } \alpha = -\beta & h = -1, \\
 \alpha \leq h\beta, \quad h\alpha \leq \beta & -1 < h \leq 0, \\
 \alpha \leq 0 \leq \beta & 0 \leq h < 1, \\
 \alpha, \beta - \text{любые} & h = 1, \\
 \alpha = -\infty, \quad \beta \leq 0 \quad \text{или} \quad \alpha \geq 0, \quad \beta = \infty & h > 1.
 \end{array} \quad (17)$$



Всякая функция

$$y(t) = \begin{cases} p_1(t), & p_1 - \text{любая непрерывная, но} \\ & p_1(\alpha) = h\alpha, \quad \alpha \leq p_1 \leq \beta, \quad t < \alpha, \\ h(t), & \alpha \leq t \leq \beta, \\ p_2(t), & p_2 - \text{любая непрерывная, но} \\ & p_2(\beta) = h\beta, \quad \alpha \leq p_2 \leq \beta, \quad t > \beta, \end{cases}$$

α, β — произвольные, удовлетворяющие условиям (17), и только такая функция является непрерывным решением уравнения (16).

При $h < -1$ уравнение (16) имеет единственное непрерывное решение $y = ht$.

§ 6. Уравнения с несколькими отклонениями аргумента

До сих пор шла речь о функциональных уравнениях с одним отклонением аргумента. Возникает естественный вопрос, могут ли методы, используемые в этом случае, оказаться полезными при наличии в уравнении более одного отклонения аргумента.

Конечно, в таком случае сразу же напрашивается более-менее тривиальная ситуация: все отклонения аргумента, входящие в уравнение, пусть это будут, например, f_1, f_2, \dots, f_n , являются итерациями одной функции f : $f_i = f^{m_i}$, $m_i \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. При этом естественно считать, что $m_1 < m_2 < \dots < m_n$. Если мы имеем какое-либо уравнение такого типа

$$F(t, x(t), x(f_1(t)), \dots, x(f_n(t))) = 0,$$

то полагая $y_i(t) = x(f^{i-1}(t))$, $i = 1, 2, \dots, m = m_n$, $f^0(t) = t$, получаем систему из m уравнений

$$y_i(f(t)) = y_{i+1}(t), \quad i = 1, \dots, m-1,$$

$$F(t, y_1(t), y_{m_1}(t), \dots, y_{m_{n-1}}(t), y_m(f(t))) = 0,$$

но с одним отклонением аргумента $f(t)$. Именно такие уравнения и системы уравнений, но простейшие – линейные, рассматриваются все время в этой главе. А примеры таких уравнений рассматривались нами еще в первой главе (примеры 6,7).

В каких еще ситуациях вопрос об уменьшении числа отклонений аргумента может решаться положительно? Весьма обнадеживающими кажутся случаи, когда среди отклонений аргумента есть коммутирующие и/или циклические, т.е., такие, для которых некоторая их итерация дает тождественное отображение.

Мы рассмотрим здесь наиболее простую ситуацию, когда в функциональное уравнение входят только два отклонения аргумента, т.е. мы имеем уравнение

$$F(t, x(t), x(f_1(t)), x(f_2(t))) = 0. \quad (1)$$

Теорема 1. Если функции f_1 и f_2 таковы, что $f_1^2 = id$ и

либо (а) $f_1 f_2 = f_2 f_1,$

либо (б) $[f_1(f_2)]^2 = id,$

либо (в) $f_2^2 = id,$ но $f_1 f_2 \neq f_2 f_1,$

то функциональное уравнение (1) приводится к системе из двух уравнений с одним отклонением аргумента; в первых двух случаях – с отклонением f_2 , в последнем – с отклонением $f_1 f_2$.

Примерами к случаю (а) могут быть пары функций

$$-t \quad \text{и} \quad at, \quad (2)$$

$$1/t \quad \text{и} \quad \frac{at+1}{t+a}, \quad (3)$$

к случаю (б) –

$$h-t \quad \text{и} \quad t+a, \quad (4)$$

$$h/t \quad \text{и} \quad at, \quad (5)$$

к случаю (в) –

$$h-t \quad \text{и} \quad a-t, \quad (6)$$

$$h-t \quad \text{и} \quad a/t. \quad (7)$$

Следует еще отметить, что когда $f_1^2 = f_2^2 = id$ и $f_1 f_2 = f_2 f_1$, как в случае функций

$$1/t \quad \text{и} \quad \frac{at-1}{t-a}, \quad (8)$$

$$a - t \quad \text{и} \quad \frac{at + b}{2t - a}, \quad (9)$$

то решение функционального уравнения (1) должно определяться однозначно из системы уравнений.

Остановимся на каждом из случаев (а), (б) и (в) теоремы 1 детально. При этом мы используем простейшее линейное уравнение с двумя отклонениями, а именно, уравнение

$$x(f(t)) = bx(t) + cx(f_1(t)), \quad (10)$$

где для удобства у f_2 опущен индекс. Проверка утверждений теоремы 1 для уравнения (1) проводится так же, как и для уравнения (10) (если не касаться возникающего здесь вопроса о разрешимости неявно заданных функций).

А. Итак, рассмотрим случай (а): пусть в уравнении (10) функции f_1 и f таковы, что $f_1^2 = id$ и $f_1 f = f f_1$.

Положим

$$\begin{cases} y_1(t) = x(t), \\ y_2(t) = x(f_1(t)). \end{cases} \quad (11)$$

Подставляя в (10) $f_1(t)$ вместо t и учитывая, что $x(f(f_1(t))) = x(f_1(f(t))) = y_2(f(t))$, сразу получаем систему уравнений с одним отклонением аргумента $f(t)$

$$\begin{cases} y_1(f(t)) = by_1(t) + cy_2(t), \\ y_2(f(t)) = cy_1(t) + by_2(t). \end{cases} \quad (12)$$

Характеристическое отображение для этой системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1 \mapsto by_1 + cy_2, \\ y_2 \mapsto cy_1 + by_2, \\ t \mapsto f(t). \end{cases} \quad (13)$$

Пусть функция $\varphi(t)$ такова, что

$$\varphi(f(t)) = \gamma \varphi(t), \quad (14)$$

т.е. она позволяет линеаризовать отображение $t \mapsto f(t)$. Тогда характеристическое отображение (13) можно переписать в виде

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \mapsto (b + c)(y_1 + y_2), \\ y_1 - y_2 \mapsto (b - c)(y_1 - y_2), \\ \varphi(t) \mapsto \gamma \varphi(t). \end{cases}$$

Ограничимся здесь случаем: $b > |c|$, $\gamma > 0$. Используя инварианты характеристического отображения, можем записать

$$y_1(t) + y_2(t) = 2 |\varphi(t)|^\alpha \Omega_1(\varphi(t)), \quad \alpha = \frac{\ln(b + c)}{\ln \gamma},$$

$$y_1(t) - y_2(t) = 2 |\varphi(t)|^\beta \Omega_2(\varphi(t)), \quad \beta = \frac{\ln(b - c)}{\ln \gamma},$$

где $\Omega_i, i = 1, 2$, – произвольные функции, удовлетворяющие условию $\Omega_i(\tau) = \Omega_i(\gamma \tau)$ (множитель 2 вставлен ради удобства). Таким образом, (общее) решение системы (12) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} y_1(t) &= |\varphi(t)|^\alpha \Omega_1(\varphi(t)) + |\varphi(t)|^\beta \Omega_2(\varphi(t)), \\ y_2(t) &= |\varphi(t)|^\alpha \Omega_1(\varphi(t)) - |\varphi(t)|^\beta \Omega_2(\varphi(t)). \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь, чтобы получить решения функционального уравнения (10), остается выделить из множества функций $x(t) = y_1(t)$ те, для которых $y_1(t) = y_2(f_1(t))$, т.е. должно выполняться равенство

$$\begin{aligned} |\varphi(t)|^\alpha \Omega_1(\varphi(t)) + |\varphi(t)|^\beta \Omega_2(\varphi(t)) = \\ |\varphi(f_1(t))|^\alpha \Omega_1(\varphi(f_1(t))) - |\varphi(f_1(t))|^\beta \Omega_2(\varphi(f_1(t))). \end{aligned} \quad (16)$$

Будем предполагать, что функция $\varphi(t)$ обладает свойством

$$\varphi(f_1(t)) = -\varphi(t); \quad (17)$$

обратим внимание на то, что, по крайней мере, в примерах, которые ниже приводятся для функций (2) и (3), это свойство имеет место. Должно ли оно выполняться в более общей ситуации, подробно анализируется ниже в случае (в), где показывается, что выполнение такого соотношения всегда может быть достигнуто.

Из (16) и (17) следует, что $\Omega_1(-\tau) = \Omega_1(\tau)$, $\Omega_2(-\tau) = -\Omega_2(\tau)$, и мы, наконец, можем написать

$$x(t) = |\varphi(t)|^\alpha \Omega_1(\varphi(t)) + |\varphi(t)|^\beta \Omega_2(\varphi(t)), \quad (18)$$

где Ω_i , $i = 1, 2$, – произвольные функции, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \Omega_1(\tau) &= \Omega_1(-\tau) = \Omega_1(\gamma\tau), \\ \Omega_2(\tau) &= -\Omega_2(-\tau) = \Omega_2(\gamma\tau). \end{aligned} \quad (19)$$

Формула (18) дает представление общего решения уравнения (10) в случае, когда $f_1^2 = id$, $f_1 f = f f_1$, а функция $\varphi(t)$ удовлетворяет (14) и (17), т.е., для любой функции $x = \Phi(t)$, обращающей уравнение (10) в тождество при ее подстановке вместо $x(t)$, найдутся функции $\tilde{\Omega}_i$, $i = 1, 2$, обладающие свойствами (19) и такие, что

$$\Phi(t) = |\varphi(t)|^\alpha \tilde{\Omega}_1(\varphi(t)) + |\varphi(t)|^\beta \tilde{\Omega}_2(\varphi(t)).$$

Чтобы найти функции $\tilde{\Omega}_i$, $i = 1, 2$, по решению $\Phi(t)$, на самом деле, достаточно использовать только половину их свойств из (19), например, четность $\tilde{\Omega}_1$ и нечетность $\tilde{\Omega}_2$.

Действительно, в таком случае, учитывая, что $\varphi(f_1(t)) = -\varphi(t)$, мы получаем

$$\Phi(f_1(t)) = |\varphi(t)|^\alpha \tilde{\Omega}_1(\varphi(t)) - |\varphi(t)|^\beta \tilde{\Omega}_2(\varphi(t)),$$

и следовательно,

$$\tilde{\Omega}_1(\varphi(t)) = \frac{1}{2} |\varphi(t)|^{-\alpha} [\Phi(t) + \Phi(f_1(t))],$$

$$\tilde{\Omega}_2(\varphi(t)) = \frac{1}{2} |\varphi(t)|^{-\beta} [\Phi(t) - \Phi(f_1(t))].$$

Теперь остается убедиться в том, что найденные нами функции $\tilde{\Omega}_i$, $i = 1, 2$, обладают свойствами (19). Так как $-\varphi(t) = \varphi(f_1(t))$, то

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_1(-\varphi(t)) &= \tilde{\Omega}_1(\varphi(f_1(t))) = \frac{1}{2} |\varphi(t)|^{-\alpha} [\Phi(f_1(t)) + \Phi(f_1^2(t))] = \\ &= \frac{1}{2} |\varphi(t)|^{-\alpha} [\Phi(t) + \Phi(f_1(t))] = \tilde{\Omega}_1(\varphi(t)). \end{aligned}$$

Так как $\gamma\varphi(t) = \varphi(f(t))$ и $\gamma^{-\alpha}(b+c) = 1$, то

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_1(\gamma\varphi(t)) &= \tilde{\Omega}_1(\varphi(f(t))) = \frac{1}{2} |\varphi(f(t))|^{-\alpha} [\Phi(f(t)) + \Phi(f_1(f(t)))] = \\ &= \frac{1}{2} |\varphi(t)|^{-\alpha} \gamma^{-\alpha} [b\Phi(t) + c\Phi(f_1(t)) + b\Phi(f_1(t)) + c\Phi(t)] = \\ &= \frac{1}{2} |\varphi(t)|^{-\alpha} [\Phi(t) + \Phi(f_1(t))] = \tilde{\Omega}_1(\varphi(t)), \end{aligned}$$

и следовательно, $\tilde{\Omega}_1(\gamma\tau) = \tilde{\Omega}_1(\tau)$. Проверка свойств (19) для $\tilde{\Omega}_2$ проводится аналогично.

Рассмотрим два конкретных примера.

А-1. Пусть $f(t) = at$ и $f_1(t) = -t$, т.е., это пара функций (2).

В этом случае, очевидно, $\varphi(t) = t$, $\gamma = a$, условие (17) выполняется: $\varphi(-t) = -\varphi(t)$. Таким образом, решение уравнения (10) имеет вид:

$$x(t) = |t|^\alpha \Omega_1(t) + |t|^\beta \Omega_2(t), \quad \alpha = \ln(b+c) / \ln a, \quad \beta = \ln(b-c) / \ln a,$$

и Ω_i , $i = 1, 2$, – произвольные функции, удовлетворяющие условиям (19) с $\gamma = a$.

Еще один пример.

А-2. Пусть $f(t) = \frac{at+1}{t+a}$, $f_1(t) = 1/t$, т.е., это функции из (3).

Используя метод, предложенный в §4 для дробно-линейных отображений, найдем, что $\varphi(t) = \frac{t+1}{t-1}$, $\gamma = \frac{a+1}{a-1}$, условие (17) также выполняется: $\varphi(1/t) = \frac{1/t+1}{1/t-1} = -\varphi(t)$, и следовательно, формула (18) позволяет выписать решение уравнения (10) и в этом случае. В частности, если $a = 3$, $b = 3$, $c = 1$, то $\gamma = 2$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$ и

$$x(t) = \left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2 \Omega_1\left(\frac{t+1}{t-1}\right) + \frac{t+1}{t-1} \Omega_2\left(\frac{t+1}{t-1}\right),$$

Ω_i , $i = 1, 2$, – произвольные функции, удовлетворяющие условиям $\Omega_i(\tau) = \Omega_i(-\tau) = \Omega_i(2\tau)$.

Б. Рассмотрим теперь случай (б), когда в уравнении (10) функции f_1 и f удовлетворяют условию: $f_1^2 = id$ и $(f_1 f)^2 = id$.

Положим снова

$$\begin{cases} y_1(t) = x(t), \\ y_2(t) = x(f_1(t)). \end{cases} \quad (20)$$

Подставляя в (10) $f_1(f(t))$ вместо t и учитывая, что $f f_1 f = f_1$, будем иметь:

$$x(f_1(t)) = b x(f_1(f(t))) + c x(f(t)),$$

или, снова используя (10),

$$x(f_1(t)) = b x(f_1(f(t))) + c [b x(t) + c x(f_1(t))],$$

так что для y_1, y_2 получаем систему уравнений

$$\begin{cases} y_1(f(t)) = b y_1(t) + c y_2(t), \\ y_2(f(t)) = -c y_1(t) + \frac{1-c^2}{b} y_2(t). \end{cases} \quad (21)$$

Характеристическое отображение для данной системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1 \mapsto by_1 + cy_2, \\ y_2 \mapsto -cy_1 + \frac{1-c^2}{b}y_2, \\ t \mapsto f(t). \end{cases} \quad (22)$$

Собственные числа $\lambda_{1,2}$ находятся из уравнения $\lambda^2 - \frac{1-c^2+b^2}{b}\lambda + 1 = 0$, так что $\lambda_1 = \lambda = \frac{1-c^2+b^2}{2b} + \sqrt{\left(\frac{1-c^2+b^2}{2b}\right)^2 - 1}$, и $\lambda_2 = 1/\lambda$.

Дальнейший анализ проводится аналогично случаю (а) и проделать это предоставляем читателю. А мы рассмотрим только один простой пример.

Б-1. Пусть $f(t) = t + a$ и $f_1(t) = h - t$, т.е., это пара функций (4), и мы имеем уравнение

$$x(t+a) = bx(t) + cx(h-t),$$

Полагая $y_1(t) = x(t)$, $y_2(t) = x(h-t)$, мы переходим к системе

$$\begin{aligned} y_1(t+a) &= by_1(t) + cy_2(t), \\ y_2(t+a) &= -cy_1(t) + \frac{1-c^2}{b}y_2(t) \end{aligned}$$

с одним преобразованием аргумента. Общее решение уравнения выписывается в явном виде; если, например, $|c^2 - b^2 - 1| > 2|b|$, то его можно записать в виде

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \omega_1(t)\lambda^t + \omega_2(t)\lambda^{h-t}, \\ y_2(t) &= \frac{\lambda-b}{c}\omega_1(t)\lambda^t + \frac{c}{\lambda-b}\omega_2(t)\lambda^{h-t}, \end{aligned}$$

где $\lambda = -\frac{c^2-b^2-1}{2b} + \sqrt{\left(\frac{c^2-b^2-1}{2b}\right)^2 - 1}$, $\omega_i(t)$, $i = 1, 2$, — произвольные периодические функции периода 1. Каждому решению $x(t) = w(t)$ уравнения соответствует решение $y_1(t) = w(t)$, $y_2(t) = w(-t)$ системы. Обратно, если $y_1(t) = w_0(t)$, $y_2(t) = w_1(t)$ — решение системы,

то для того, чтобы $x(t) = w_0(t)$ было решением исходного уравнения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $w_0(-t) = w_1(t)$. Поэтому выбирая среди решений системы те, которые удовлетворяют последнему условию, можем записать общее решение уравнения:

$$x(t) = \omega(t)\lambda^t + \frac{\lambda - b}{c}\omega(h-t)\lambda^{h-t},$$

$\omega(t)$ – произвольная периодическая функция периода a .

Обратим внимание на то, что в случае (б) общее решение зависит от одной произвольной функции, на которую накладывается одно условие – периодичность (по отклонению аргумента f), а в случае (а) общее решение зависит от двух произвольных функций, но каждая из которых удовлетворяет уже двум условиям – “ q -периодичности” (по f) и “четности” (относительно f_1).

В. Рассмотрим теперь во всех деталях последний случай (в): в уравнении (10) функции f_1 и f таковы, что $f^2 = f_1^2 = id$, но $ff_1 \neq f_1f$. В этом случае путь к цели несколько длиннее.

Подставляя в (10) вместо t поочередно $f(t)$ и $f_1(t)$, получаем

$$x(t) = bx(f(t)) + cx(f_1(f(t))), \quad (23)$$

$$x(f(f_1(t))) = bx(f_1(t)) + cx(t). \quad (24)$$

Из (10) и (23) вытекает

$$(1 - b^2)x(t) = bcx(f_1(t)) + cx(f_1(f(t))), \quad (25)$$

а из (24) и (25) –

$$cx(f(f_1(t))) - (1 - b^2 + c^2)x(t) + cx(f_1(f(t))) = 0. \quad (26)$$

Подставляя теперь в (27) $f(f_1(t))$ вместо t , получим

$$cx(g^2(t)) - (1 - b^2 + c^2)x(g(t)) + cx(t) = 0, \quad (27)$$

где $g = ff_1$.

Таким образом, если положить

$$\begin{cases} y_1(t) = x(t), \\ y_2(t) = x(g(t)), \end{cases} \quad (28)$$

мы получим систему уравнений с одним отклонением аргумента

$$\begin{cases} y_1(g(t)) = y_2(t), \\ y_2(g(t)) = -y_1(t) + 2dy_2(t), \end{cases} \quad (29)$$

где $d = (1 - b^2 + c^2) / 2c$.

Для преобразования

$$\begin{cases} y_1 \mapsto y_2, \\ y_2 \mapsto -y_1 + 2dy_2 \end{cases} \quad (30)$$

собственные числа $\lambda_{1,2}$ находятся из уравнения $\lambda^2 - 2d\lambda + 1 = 0$, так что $\lambda_1 = \lambda = d + \sqrt{d^2 - 1}$, и $\lambda_2 = 1/\lambda$. Мы ограничимся случаем $d \neq 1$. Тогда $\lambda \neq 1$ и, как легко увидеть, при преобразовании (30)

$$\begin{aligned} y_1 - \lambda y_2 &\mapsto \lambda(y_1 - \lambda y_2), \\ \lambda y_1 - y_2 &\mapsto 1/\lambda(\lambda y_1 - y_2). \end{aligned} \quad (31)$$

Пусть функция $\psi(t)$ такова, что

$$\psi(g(t)) = \psi(t) + 1, \quad (32)$$

и следовательно,

$$\lambda^{\psi(g(t))} = \lambda \lambda^{\psi(t)}. \quad (33)$$

Тогда из (31) и (33) мы находим, что

$$\begin{aligned} y_1(t) - \lambda y_2(t) &= \lambda^{\psi(t)} \tilde{\omega}_1(\psi(t)), \\ \lambda y_1(t) - y_2(t) &= \lambda^{-\psi(t)} \tilde{\omega}_2(\psi(t)), \end{aligned} \quad (34)$$

$\tilde{\omega}_i$, $i = 1, 2$, – произвольные функции, удовлетворяющие условиям $\tilde{\omega}_i(\tau + 1) = \tilde{\omega}_i(\tau)$, а это позволяет нам выписать решения системы (29). Однако сейчас перед нами стоит другая задача – найти решения уравнения (10). Из (34) мы находим

$$(\lambda^2 - 1)y_1(t) = -\lambda^{\psi(t)} \tilde{\omega}_1(\psi(t)) + \lambda \cdot \lambda^{-\psi(t)} \tilde{\omega}_2(\psi(t)), \quad (35)$$

а поскольку мы использовали замену $y_1(t) = x(t)$ при переходе к системе (29), то из (35) следует, что решения уравнения (10) принадлежат семейству

$$x(t) = y_1(t) = \lambda^{\psi(t)} \omega_1(\psi(t)) + \lambda^{-\psi(t)} \omega_2(\psi(t)), \quad (36)$$

где ω_i , $i = 1, 2$, – произвольные функции, удовлетворяющие условиям $\omega_i(\tau + 1) = \omega_i(\tau)$. Подставляя (36) в (10), получаем

$$\begin{aligned} \lambda \lambda^{\psi(t)} \omega_1(\psi(t)) + \lambda^{-1} \lambda^{-\psi(t)} \omega_2(\psi(t)) &= \\ c \lambda^{\psi(t)} \omega_1(\psi(t)) + c \lambda^{-\psi(t)} \omega_2(\psi(t)) + \\ b \lambda^{\psi(f_1(t))} \omega_1(\psi(f_1(t))) + b \lambda^{-\psi(f_1(t))} \omega_2(\psi(f_1(t))). \end{aligned} \quad (37)$$

Чтобы из (37) получить связь между (произвольными) функциями ω_i , $i = 1, 2$, необходимо выяснить, что представляет собой $\psi(f_1(t))$. Этот вопрос мы обсудим в конце параграфа в общей ситуации, а в примерах с функциями (6) и (7), которые приводятся ниже, функцию $\psi(t)$ легко выбрать так, что

$$\psi(f_1(t)) = -\psi(t). \quad (38)$$

В таком случае из (37), если приравнять коэффициенты при $\lambda^{\psi(t)}$ и $\lambda^{-\psi(t)}$, будет следовать, что

$$(\lambda - c) \omega_1(\psi(t)) = b \omega_2(-\psi(t)),$$

и

$$(\lambda^{-1} - c) \omega_2(\psi(t)) = b \omega_1(-\psi(t)).$$

Эти два соотношения, как легко проверить, эквивалентны и, таким образом, мы получаем

$$\omega_2(\tau) = \frac{\lambda - c}{b} \omega_1(-\tau),$$

а это означает, что решения уравнения (10) в случае (в) можно записать в виде

$$x(t) = \lambda^{\psi(t)} \omega(\psi(t)) + \frac{\lambda - c}{b} \lambda^{-\psi(t)} \omega(-\psi(t)), \quad (39)$$

где ω – произвольная функция, удовлетворяющая условию $\omega(\tau + 1) = \omega(\tau)$.

Рассмотрим два примера.

В-1. Возьмем пару функций (6), пусть $f(t) = a - t$, $f_1(t) = h - t$ и $a > h$.

Тогда $g(t) = f(f_1(t)) = t + (a - h)$ и в качестве функции ψ можно было бы взять функцию $\tilde{\psi}(t) = \frac{t}{a-h}$; однако в этом случае $\tilde{\psi}(f_1(t)) = \frac{h-t}{a-h} = -\tilde{\psi}(t) + \frac{h}{a-h}$. Чтобы исправить ситуацию, достаточно взять $\psi(t) = \tilde{\psi}(t) - \frac{h/2}{a-h} = \frac{t-h/2}{a-h}$. Подставив это значение $\psi(t)$ в (39) и заменив ω новой произвольной функцией, можно записать

$$x(t) = \lambda^{\frac{t}{a-h}} \bar{\omega}(t) + \frac{\lambda - c}{b} \lambda^{-\frac{t-h}{a-h}} \bar{\omega}(-t + h), \quad (40)$$

где $\bar{\omega}(t)$ – произвольная периодическая функция периода $a - h$.

В-2. Этот пример – с функциями (7): $f(t) = a/t$, $f_1(t) = h - t$ и $a > 0$, $h > 0$. В таком случае $g(t) = f(f_1(t)) = \frac{a}{h-t}$. Для линеаризации дробно-линейного отображения $t \mapsto g(t)$ и построения функции ψ следует воспользоваться методом, изложенным в §4, т.е. диагонализировать порождаемое $g(t)$ линейное отображение

$$\begin{cases} u \mapsto a v, \\ v \mapsto -u + h v. \end{cases}$$

Результат при этом, как мы знаем, существенно зависит от того, равны ли корни уравнения $\mu^2 - h\mu + a = 0$ (т.е. $h^2 = 4a$) или нет. Рассмотрим обе ситуации подробнее, но для конкретных числовых параметров 1) $a = 1$, $h = 2$ и 2) $a = 2$, $h = 3$.

При $a = 1$, $h = 2$ $g(t) = \frac{1}{2-t}$ и $\mu_{1,2} = 1$, так что линеаризация отображения $t \mapsto g(t)$ приводит к отображению $\frac{1}{1-t} \mapsto \frac{1}{1-t} + 1$. Это означает, что мы можем взять $\psi(t) = \frac{1}{1-t}$. При этом $\psi(g(t)) = \psi(t) + 1$, а $\psi(f_1(t)) = \frac{1}{1-(2-t)} = -\frac{1}{1-t} = -\psi(t)$. Следовательно, решения уравнения (10) при данных значениях параметров должны иметь вид

$$x(t) = \lambda^{\frac{1}{1-t}} \omega(1/(1-t)) + \frac{\lambda - c}{b} \lambda^{-\frac{1}{1-t}} \omega(-1/(1-t)), \quad (41)$$

где $\lambda = d + \sqrt{d^2 - 1}$, $d = (1 - b^2 + c^2)/2c$ и ω – произвольная 1-периодическая функция.

При $a = 2$, $h = 3$ $g(t) = \frac{2}{3-t}$ и $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$. Линеаризация отображения $t \mapsto g(t)$ дает отображение $\frac{t-2}{t-1} \mapsto 2 \frac{t-2}{t-1}$. В таком случае для функции $\varphi(t) = \frac{t-2}{t-1}$ мы получаем $\varphi(g(t)) = 2\varphi(t)$, $\varphi(f_1(t)) = \varphi(3-t) = \frac{(3-t)-2}{(3-t)-1} = 1/\varphi(t)$, и следовательно, для функции $\psi(t) = \ln|\varphi(t)| = \ln\left|\frac{t-2}{t-1}\right|/\ln 2$ мы будем иметь: $\psi(g(t)) = \psi(t) + 1$, $\psi(f_1(t)) = -\psi(t)$. Чтобы выписать решения уравнения (10), остается подставить значения функции $\psi(t)$ в (39), так что

$$\begin{aligned} x(t) = & \lambda^{\ln\left|\frac{t-2}{t-1}\right|/\ln 2} \omega\left(\ln\left|\frac{t-2}{t-1}\right|/\ln 2\right) + \\ & \frac{\lambda - c}{b} \lambda^{-\ln\left|\frac{t-2}{t-1}\right|/\ln 2} \omega\left(-\ln\left|\frac{t-2}{t-1}\right|/\ln 2\right), \end{aligned} \quad (42)$$

где ω – произвольная 1-периодическая функция. Вероятно, имеет смысл в (42) по возможности избавиться от избытка логарифмов и переписать (42) таким образом

$$x(t) = \left| \frac{t-2}{t-1} \right|^{\frac{\ln \lambda}{\ln 2}} \Omega \left(\left| \frac{t-2}{t-1} \right| \right) + \frac{\lambda - c}{b} \left| \frac{t-2}{t-1} \right|^{-\frac{\ln \lambda}{\ln 2}} \Omega \left(- \left| \frac{t-2}{t-1} \right| \right), \quad (43)$$

$\lambda = d + \sqrt{d^2 - 1}$, $d = (1 - b^2 + c^2) / 2c$ и Ω – произвольная функция, удовлетворяющая условию $\Omega(\tau) = \Omega(2\tau)$.

Возвратимся к вопросу о том, как из формулы (37) извлечь нужную нам информацию в общей ситуации, когда известно только, что $f^2 = f_1^2 = id$. Что можно при этом сказать о функции $\psi(f_1(t))$, для которой имеет место (32), т.е. $\psi(f(f_1(t))) = \psi(t) + 1$?

Лемма 1. *Функция $\Psi(t) = \psi(t) + \psi(f_1(t))$ обладает свойствами :*

$$\Psi(t) = \Psi(f(t)) = \Psi(f_1(t)) = \Psi(f(f_1(t))) = \Psi(f_1(f(t))). \quad (44)$$

Действительно, $\Psi(t) = \Psi(f_1(t))$, так как $f_1^2 = id$; поэтому также $\Psi(f(t)) = \Psi(f_1(f(t)))$. Так как $\psi(f(f_1(t))) = \psi(t) + 1$, то

$$\psi(f(t)) = \psi(f_1(t)) + 1; \quad (45)$$

поскольку $f^2 = id$, то

$$\psi(f_1(f(t))) = \psi(t) - 1. \quad (46)$$

Так как $\Psi(f(t)) = \psi(f(t)) + \psi(f_1(f(t)))$, то учитывая (46), получаем

$$\Psi(f(t)) = \psi(f(t)) + \psi(t) - 1, \quad (47)$$

так что $\Psi(f(t)) = \Psi(t)$, и следовательно, $\Psi(f(f_1(t))) = \Psi(t)$, что и завершает доказательство соотношений (44).

Формально соотношения (44) можно интерпретировать, как “четность” функции $\Psi(t)$ относительно (отображений) как f , так и f_1 , а также ее “периодичность” относительно ff_1 (и естественно, относительно $f_1f = (ff_1)^{-1}$). Полезно помнить, что f и f_1 — монотонно убывающие, а ff_1 и f_1f — монотонно возрастающие функции.

Лемма 2. *Если существует (по крайней мере одно) $t = \alpha$, при котором $f(\alpha) = f_1(\alpha)$, то на множестве непрерывных функций соотношениям (44) удовлетворяют только функции $\Psi(t) \equiv \text{const}$.*

Если $f(t) > f_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$, то соотношениям (44) удовлетворяет множество непрерывных функций, зависящее от произвольной функции; более точно, если β, β_1 таковы, что $f(\beta) = \beta$, $f_1(\beta_1) = \beta_1$, то каждая непрерывная функция $\xi(t)$, заданная на интервале $[\beta_1, \beta]$ и такая, что $\xi(\beta) = \xi(\beta_1)$, определяет однозначно непрерывную функцию $\Psi(t)$, заданную на \mathbb{R} .

Если $f(\alpha) = f_1(\alpha)$, то тогда $f(f_1(\alpha)) = \alpha$, т.е. α — неподвижная точка отображения $t \mapsto g(t) = f(f_1(t))$. Если, например, на некотором интервале $(\alpha, \gamma]$ у отображения g нет неподвижных точек и $\Psi(\gamma) = \delta$, то поскольку $\Psi(g(t)) = \Psi(t)$, а при любом $t \in (\alpha, \gamma]$ и $n \rightarrow \infty$ либо $g^n(t)$, либо $g^{-n}(t)$ сходится к α , то $\Psi(t) \equiv \delta$ на всем интервале $[\alpha, \gamma]$ в виду непрерывности функции Ψ , в частности, в точке $t = \alpha$. И т.д.

Случай $f(t) > f_1(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ — простая проверка однозначной продолжимости функции $\psi(t)$, задаваемой произвольно на $[\beta_1, \beta_2]$, на всю прямую \mathbb{R} с помощью соотношений (44).

Лемма 2 говорит о том, что из (32) никак не следует (38). Однако “на выручку” приходит лемма 3.

Лемма 3. *Если функция ψ такова, что $\psi(f(f_1(t))) = \psi(t) + 1$, но $\Psi(t) = \psi(t) + \psi(f_1(t)) \neq 0$, то для функции $\tilde{\psi}(t) = \psi(t) - \frac{\Psi(t)}{2}$ выполняются как (32), так и (38).*

Доказательство — простая проверка выполнения (32) и (38) для $\tilde{\psi}$.

Таким образом, если для функций f и f_1 удастся (явно) подобрать функцию ψ такую, что выполняется соотношение (32), то тогда можно (явно) выписать и общее решение уравнения (10).

§ 7. Линейные уравнения с многими независимыми переменными

До сих пор мы рассматривали функциональные уравнения только с одной независимой переменной. Настоящий параграф — исключение, здесь мы рассматриваем простейшее линейное уравнение с несколькими независимыми переменными. Методы, развитые в предыдущих параграфах, без особых усилий переносятся и на такие уравнения.

Мы можем рассмотреть систему линейных функциональных уравнений общего вида

$$x(Qt) = Bx(t), \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $t = (t_1, \dots, t_m)$, Q , B — постоянные вещественные $m \times m$ и $n \times n$ -матрицы соответственно. Построение решений такой системы, как и в случае одного независимого переменного, сводится к построению инвариантов отображения

$$\begin{cases} t \mapsto Qt \\ x \mapsto Bx \end{cases} \quad (2)$$

пространства $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ в себя. Чтобы увидеть особенности, приносимые наличием нескольких независимых переменных, представляется разумным начать с рассмотрения не системы, а одного уравнения

$$x(Qt) = \lambda x(t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^m. \quad (3)$$

Сразу следует обратить внимание на то, что в многомерном случае вопрос, даёт ли какая-то формула представление общего решения, т.е. любое ли решение можно из неё извлечь, не столь уж тривиален и требует отдельного анализа. Поэтому применительно к формулам, получаемым ниже для решений, слова “общее решение” мы не будем использовать.

Рассмотрим простейший пример :

$$x(q_1 t_1, q_2 t_2) = \lambda x(t_1, t_2), \quad t_1, t_2 > 0, \quad (4)$$

и $q_1, q_2, \lambda > 0$. Характеристическое отображение имеет вид

$$S : \begin{cases} t_1 \mapsto q_1 t_1, \\ t_2 \mapsto q_2 t_2, \\ x \mapsto \lambda x, \end{cases}$$

и его инвариантами являются, в частности, функции

$$\frac{t_1}{t_2^\mu}, \quad \frac{x}{t_2^\nu}, \quad \omega_i(\ln t_i / \ln q_i), \quad i = 1, 2,$$

где $\mu = \ln q_1 / \ln q_2$, $\nu = \ln \lambda / \ln q_2$ и ω_i – какие-либо 1-периодические функции. Таким образом, функции, представимые в виде

$$x(t_1, t_2) = t_2^\nu \cdot \Phi\left(\frac{t_1}{t_2^\mu}, \frac{\ln t_1}{\ln q_1}, \frac{\ln t_2}{\ln q_2}\right),$$

где Φ – произвольная функция трёх аргументов, 1-периодическая по второму и третьему аргументу, являются решениями функционального уравнения (4).

Этот пример подсказывает нам, что каких-либо принципиальных трудностей, новых проблем в общей ситуации, т.е., как для уравнения (3), так и для системы уравнений (1), по сравнению со случаем двух независимых переменных не должно встретиться.

Рассмотрим уравнение (3). Пусть q_1, \dots, q_m – собственные числа матрицы Q , т.е. корни уравнения $\det \|Q - qE\| = 0$, где

E – единичная матрица. Ограничимся случаем, когда λ и все q_i , $i = 1, \dots, m$, положительны и попарно различны.

Если Q – диагональная матрица и, следовательно, характеристическое отображение для уравнения (3) имеет вид

$$S : \begin{cases} t_1 \mapsto q_1 t_1, \\ \dots\dots\dots \\ t_m \mapsto q_m t_m, \\ x \mapsto \lambda x, \end{cases}$$

то инвариантами характеристического отображения (аналогично приведенному выше примеру) являются функции

$$\frac{t_i}{t_m^{\mu_i}}, \quad i = 1, \dots, m-1,$$

а также

$$\frac{x}{t_m^\nu} \quad \text{и} \quad \omega_i(\ln t_i / \ln q_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

где $\nu = \ln \lambda / \ln q_m$, $\mu_i = \ln q_i / \ln q_m$ и ω_i – какие-либо 1-периодические функции. Следовательно, любая функция, представляемая в виде

$$x(t_1, \dots, t_m) = t_m^\nu \cdot \Phi \left(\frac{t_1}{t_m^{\mu_1}}, \dots, \frac{t_{m-1}}{t_m^{\mu_{m-1}}}, \frac{\ln t_1}{\ln q_1}, \dots, \frac{\ln t_m}{\ln q_m} \right), \quad (5)$$

где Φ – произвольная функция $2m-1$ аргумента, 1-периодическая по последним m аргументам, является решением функционального уравнения (4).

Если же матрица Q недиагональная, необходимо найти для отображения $t \mapsto Qt$ собственные функции $u_i(t_1, \dots, t_m)$, $i = 1, \dots, m$, и тогда при отображении $t \mapsto Qt$ мы будем иметь

$$u_i(t_1, \dots, t_m) \mapsto q_i u_i(t_1, \dots, t_m), \quad i = 1, \dots, m,$$

а это означает, для того чтобы получить представление решений функционального уравнения (4), достаточно в (5) подставить $u_i(t_1, \dots, t_m)$ вместо t_i . Таким образом, решения функционального уравнения (4) могут быть представлены в виде

$$x(t_1, \dots, t_m) = u_m^\nu(t_1, \dots, t_m) \times \quad (6)$$

$$\times \Phi \left(\frac{u_1(t_1, \dots, t_m)}{u_m^{\mu_1}(t_1, \dots, t_m)}, \dots, \frac{u_{m-1}(t_1, \dots, t_m)}{u_m^{\mu_{m-1}}(t_1, \dots, t_m)}, \right.$$

$$\left. \frac{\ln u_1(t_1, \dots, t_m)}{\ln q_1}, \dots, \frac{\ln u_m(t_1, \dots, t_m)}{\ln q_m} \right),$$

где Φ – произвольная функция $2m-1$ аргумента, 1-периодическая по последним m аргументам.

Остальные случаи, связанные с собственными числами матриц, можно проанализировать аналогично тому, как это проделано в первом параграфе для уравнений с одной независимой переменной. Мы здесь ограничимся тем, что рассмотрим простой пример, когда имеются совпадающие собственные числа.

Для уравнения

$$x(qt_1 + t_2, qt_2) = \lambda x(t_1, t_2), \quad t_1, t_2 > 0, \quad a, \lambda > 0, \quad (7)$$

характеристическое отображение имеет вид

$$S : \begin{cases} t_1 \mapsto qt_1 + t_2, \\ t_2 \mapsto qt_2, \\ x \mapsto \lambda x. \end{cases}$$

Следовательно, $\frac{t_1}{t_2} \mapsto \frac{t_1}{t_2} + \frac{1}{q}$ и отображение S можно переписать так

$$\begin{cases} \frac{qt_1}{t_2} \mapsto \frac{qt_1}{t_2} + 1, \\ t_2 \mapsto qt_2, \\ x \mapsto \lambda x. \end{cases}$$

Легко убедиться, что инвариантами отображения S являются функции

$$x / t_2^{\frac{\ln \lambda}{\ln q}}, \quad \frac{qt_1}{t_2} - \frac{\ln t_2}{\ln q}, \quad \omega_1 \left(\frac{qt_1}{t_2} \right), \quad \omega_2 \left(\frac{\ln t_2}{\ln q} \right),$$

где $\omega_i(t)$, $i = 1, 2$, – любые 1-периодические функции.

Таким образом, решение уравнения (7) запишется в виде

$$x(t_1, t_2) = t_2^{\frac{\ln \lambda}{\ln q}} \Phi \left(\frac{qt_1}{t_2} - \frac{\ln t_2}{\ln q}, \frac{qt_1}{t_2}, \frac{\ln t_2}{\ln q} \right),$$

где Φ – произвольная функция трёх аргументов, 1-периодическая относительно второго и третьего аргументов.

Теперь уже понятно, что решения системы уравнений (1) могут быть получены аналогично тому, как построены решения уравнения (3). Во-первых, необходимо найти собственные числа b_1, \dots, b_n матрицы B (т.е., корни уравнения $\det \|B - bE\| = 0$) и собственные функции $h_j(x_1, \dots, x_n)$, $j = 1, \dots, n$, отображения $x \mapsto Bx$. Если, как и раньше, предполагать для простоты, что все собственные числа матриц Q , B , т.е., q_1, \dots, q_m , b_1, \dots, b_n , попарно различны и, более того, положительны, тогда для характеристического отображения (2) системы (1) мы будем иметь

$$u_i(t_1, \dots, t_m) \mapsto q_i u_i(t_1, \dots, t_m), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$h_j(x_1, \dots, x_n) \mapsto b_j h_j(x_1, \dots, x_n), \quad j = 1, \dots, n.$$

Это позволяет нам выписать инварианты отображения (2), например, таким образом:

$$\frac{u_i}{|u_m|^{\mu_i}}, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad \omega_i(\ln |u_i| / \ln q_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

а также

$$\frac{h_j(x_1, \dots, x_n)}{|u_m|^{\nu_j}}, \quad j = 1, \dots, n,$$

где $\mu_i = \ln q_i / \ln q_m$, $\nu_j = \ln b_j / \ln q_m$ и ω_i – какие-либо 1-периодические функции.

Следовательно, для отыскания решений уравнения (1) мы получаем систему n линейных уравнений относительно x_1, x_2, \dots, x_n

$$h_j(x_1, \dots, x_n) = \\ = |u_m(t_1, \dots, t_m)|^{\nu_j} \cdot \Phi_j \left(\frac{u_1}{|u_m|^{\mu_1}}, \dots, \frac{u_{m-1}}{|u_m|^{\mu_{m-1}}}, \frac{\ln |u_1|}{\ln q_1}, \dots, \frac{\ln |u_m|}{\ln q_m} \right), \\ j = 1, \dots, n,$$

где Φ_j , $j = 1, \dots, n$, – произвольные функции всех своих аргументов, но 1-периодические относительно последних m аргументов.

Рассмотрим еще один пример

$$\begin{aligned} x_1(q_1 t_1, q_2 t_2) &= \lambda x_1(t_1, t_2), \\ x_2(q_1 t_1, q_2 t_2) &= x_1(t_1, t_2) + \lambda x_2(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (8)$$

Соответствующее этой системе характеристическое отображение имеет вид

$$S : \begin{cases} t_1 \mapsto q_1 t_1, \\ t_2 \mapsto q_2 t_2, \\ x_1 \mapsto \lambda x_1, \\ x_2 \mapsto x_1 + \lambda x_2, \end{cases}$$

из которого следует

$$\begin{aligned} \frac{\ln t_2}{\ln q_2} &\mapsto \frac{\ln t_2}{\ln q_2} + 1, \\ \lambda \frac{x_2}{x_1} &\mapsto \lambda \frac{x_2}{x_1} + 1, \end{aligned}$$

так что инвариантами отображения S будут, например, функции

$$\frac{x_1}{\frac{\ln \lambda}{\ln q_2} t_2}, \quad \lambda \frac{x_2}{x_1} - \frac{\ln t_2}{\ln q_2}, \quad \frac{t_1^{\ln q_2}}{t_2^{\ln q_1}}, \quad \omega_1\left(\frac{\ln t_1}{\ln q_1}\right), \quad \omega_2\left(\frac{\ln t_2}{\ln q_2}\right),$$

где $\omega_i(\tau)$, $i = 1, 2$, – 1-периодические функции.

Следовательно, решения системы уравнений (8) запишутся в виде

$$x_1(t_1, t_2) = t_2^{\frac{\ln \lambda}{\ln q_2}} \Phi_1 \left(\frac{t_1^{\ln q_2}}{t_2^{\ln q_1}}, \frac{\ln t_1}{\ln q_1}, \frac{\ln t_2}{\ln q_2} \right),$$

$$x_2(t_1, t_2) = \lambda^{-1} \left[t_2^{\frac{\ln \lambda}{\ln q_2}} \cdot \frac{\ln t_2}{\ln q_2} \cdot \Phi_1 \left(\frac{t_1^{\ln q_2}}{t_2^{\ln q_1}}, \frac{\ln t_1}{\ln q_1}, \frac{\ln t_2}{\ln q_2} \right) + \right. \\ \left. + t_2^{\frac{\ln \lambda}{\ln q_2}} \Phi_2 \left(\frac{t_1^{\ln q_2}}{t_2^{\ln q_1}}, \frac{\ln t_1}{\ln q_1}, \frac{\ln t_2}{\ln q_2} \right) \right],$$

где Φ_1, Φ_2 — произвольные функции, 1-периодические относительно второго и третьего аргументов.

Глава 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Общее решение некоторых классов нелинейных уравнений

Инварианты нелинейных отображений, если они и существуют, чаще всего не могут быть записаны с помощью одних только элементарных функций. Например, уже характеристическое отображение линейного функционального уравнения $x(t+1) = tx(t)$ не имеет таких инвариантов. Общее решение этого уравнения есть $x(t) = \Gamma(t)\omega(t)$, где $\Gamma(t)$ — гамма-функция и $\omega(t)$ — произвольная периодическая функция периода 1.

Мы умеем строить инварианты линейных отображений. Нелинейному уравнению или системе уравнений

$$x(f(t, x(t))) = G(t, x(t))$$

соответствует нелинейное характеристическое отображение

$$S: \begin{cases} t \mapsto f(t, x) \\ x \mapsto G(t, x). \end{cases}$$

Инварианты такого отображения удастся построить в том случае, если с помощью некоторого преобразования (определенного во всем пространстве или на части пространства) отображение S можно линеаризовать. Другими словами, это возможно, если существует отображение $H: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ и линейное отображение $\tilde{S}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ такие, что $S = H^{-1}\tilde{S}H$, т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^m & \xrightarrow{S} & \mathbb{R}^m \\
 H \downarrow & & \downarrow H \\
 \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\tilde{S}} & \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

коммутативна. Функции $h_i, i = 1, 2, \dots, m$, где $(h_1, \dots, h_m) = H$, являются квазиинвариантами отображения S .

Если $\tilde{\varphi}(t, x)$ является инвариантом отображения \tilde{S} , то $\varphi(t, x) = \tilde{\varphi}(H(t, x))$ — инвариант отображения S . Действительно,

$$\varphi(S(t, x)) = \tilde{\varphi}(HS(t, x)) = \tilde{\varphi}(\tilde{S}H(t, x)) = \tilde{\varphi}(H(t, x)) = \varphi(t, x).$$

В этом параграфе мы рассмотрим несколько типов нелинейных уравнений, для которых можно указать линеаризующее отображение H , выражающееся через элементарные функции, и тем самым выписать общее решение исходных уравнений.

1. Мы начнем с дробно-линейных нелинейностей. В § 2.4 рассматривались линейные уравнения с дробно-линейным отклонением аргумента и было показано, что такие нелинейности могут быть линеаризованы относительно легко. Таким же способом, очевидно, можно линеаризовать и правую часть функционального уравнения, если она является дробно-линейной.

Рассмотрим уравнение

$$x(qt) = \frac{ax(t) + b}{cx(t) + d}, \quad q > 0, \quad (1)$$

в предположении, что $\Delta = (a - d)^2 + 4bc > 0$.

Чтобы построить решения этого уравнения, необходимо линеаризовать отображение $g : x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$. Для этого целесообразно поступить подобно тому, как мы решали аналогичную задачу в § 2.4 для дробно-линейного преобразования аргумента t . Подставляя в отображении g вместо x u/v , можем выписать

линейное двумерное отображение

$$\tilde{g}: \begin{cases} u \mapsto au + bv \\ v \mapsto cu + dv. \end{cases}$$

При $\Delta > 0$ собственные числа этого отображения $\mu_{\pm} = (a + d \pm \sqrt{\Delta})/2$ вещественны и различны и им отвечают две собственные функции $\psi_{\pm}(u, v) = 2cu + (d - a \pm \sqrt{\Delta})v$. Поэтому при отображении \tilde{g}

$$\frac{\psi_+(u, v)}{\psi_-(u, v)} \mapsto \mu \frac{\psi_+(u, v)}{\psi_-(u, v)},$$

где $\mu = \mu_+ / \mu_-$, и, следовательно, при отображении g

$$\frac{cx + \beta_+}{cx + \beta_-} \mapsto \mu \frac{cx + \beta_+}{cx + \beta_-}.$$

где $\beta_{\pm} = (-a + d \pm \sqrt{\Delta})/2$.

Теперь мы можем выписать инварианты характеристического отображения уравнения (1), например, при $\mu > 0$, $t > 0$:

$$\frac{cx + \beta_+}{cx + \beta_-} / t^{\nu} \quad \text{и} \quad \bar{\omega}(\ln t / \ln q),$$

где $\nu = \ln \mu / \ln q$, а $\bar{\omega}(\cdot)$ — периодическая функция периода 1.

Следовательно,

$$\frac{cx(t) + \beta_+}{cx(t) + \beta_-} = t^{\nu} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)$$

и решения уравнения (1) могут быть представлены в виде

$$x(t) = \frac{-\beta_+ + \beta_- t^{\nu} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)}{c \left(1 - t^{\nu} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)},$$

где $\omega(\tau)$ — произвольная 1-периодическая функция.

Можно было бы аналогично проанализировать уравнение общего вида, в котором дробно-линейным является как преобразование аргумента, так и правая часть уравнения. Мы этого делать не будем, а ограничимся самым простым примером.

Рассмотрим уравнение

$$x\left(\frac{3t-2}{t}\right) = \frac{3x(t)-1}{2x(t)}.$$

Характеристическое отображение для этого уравнения имеет вид

$$\begin{cases} f : t \mapsto \frac{3t-2}{t} \\ g : x \mapsto \frac{3x-1}{2x}. \end{cases}$$

Линеаризацию отображений f и g можно осуществить, как описано в § 2.4. Полагая, например, $t = u/v$ в отображении f , получим линейное двумерное отображение

$$\begin{cases} u \mapsto 3u - 2v \\ v \mapsto u, \end{cases}$$

для которого собственные числа равны 2 и 1, а собственными функциями являются, соответственно, $u - v$ и $u - 2v$; так что, возвращаясь к t , найдем, что при отображении f

$$\frac{t-1}{t-2} \mapsto 2 \frac{t-1}{t-2}.$$

Поступая аналогично с отображением g , для соответствующего ему линейного двумерного отображения

$$\begin{cases} u \mapsto 3u - v \\ v \mapsto 2u, \end{cases}$$

найдем собственные числа – снова 2 и 1 – и собственные функции – $2u - v$ и $u - v$, так что при отображении g

$$\frac{2x-1}{x-1} \mapsto 2 \frac{2x-1}{x-1}.$$

Следовательно, инвариантами характеристического отображения являются функции

$$\frac{2x-1}{x-1} / \frac{t-1}{t-2}, \quad \Omega\left(\frac{t-1}{t-2}\right),$$

где $\Omega(\tau)$ – произвольная функция, но такая, что $\Omega(2\tau) = \Omega(\tau)$, и решения функционального уравнения могут быть найдены из соотношения

$$\frac{2x(t)-1}{x(t)-1} = \frac{t-1}{t-2} \Omega\left(\frac{t-1}{t-2}\right).$$

Таким образом мы получаем

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{t-2 - (t-1)\Omega\left(\frac{t-1}{t-2}\right)}{2(t-2) - (t-1)\Omega\left(\frac{t-1}{t-2}\right)} = \\ &= 1 - \frac{t-2}{2(t-2) - (t-1)\Omega\left(\frac{t-1}{t-2}\right)}, \end{aligned}$$

и окончательно,

$$x(t) = 1 + \frac{t-2}{(t-1)\tilde{\Omega}\left(\frac{t-1}{t-2}\right) + 2},$$

где $\tilde{\Omega}(\tau)$ ($= \Omega(\tau) - 2$) – произвольная функция, такая, что $\tilde{\Omega}(\tau) = \tilde{\Omega}(2\tau)$.

Рассмотрим еще ряд примеров, для которых можно сравнительно просто построить общее решение.

$$2. \quad x(qt) = b[x(t)]^\beta, \quad b \neq 0, \quad \beta \neq 1. \quad (2)$$

Уравнению соответствует отображение

$$\begin{cases} t \mapsto qt, \\ x \mapsto bx^\beta. \end{cases} \quad (3)$$

Из (3) следует, что

$$\ln x \mapsto \beta \ln x + \ln b$$

или

$$\ln x + \frac{\ln b}{\beta - 1} \mapsto \beta \left(\ln x + \frac{\ln b}{\beta - 1} \right).$$

Инвариантами отображения (3) являются функции

$$\frac{\ln x + \frac{\ln b}{\beta - 1}}{\frac{\ln \beta}{t \ln a}} \quad \text{и} \quad \omega \left(\frac{\ln t}{\ln q} \right), \quad \omega(t+1) = \omega(t).$$

Общее решение уравнения (2) при $q, b, \beta > 0$ и $t > 0$ есть

$$x(t) = b^{\frac{1}{1-\beta}} e^{\frac{\ln \beta}{t \ln q}} \cdot \omega \left(\frac{\ln t}{\ln q} \right), \\ \omega(t+1) = \omega(t).$$

Аналогично можно выписать общее решение уравнения (2) при $t < 0$, а также при других значениях параметров q, b, β .

Функциональное уравнение

$$x(qt) = b[x(t) - c]^\beta + c \quad (4)$$

заменой $\tilde{x} = x - c$ приводится к уравнению (2). Общее решение уравнения (4) есть

$$x(t) = c + b^{\frac{1}{1-\beta}} e^{\frac{\ln \beta}{t \ln q}} \omega \left(\frac{\ln t}{\ln q} \right), \quad \omega(t+1) = \omega(t).$$

Если в (4) положить $\beta = 2$, $c = -\frac{1}{b}$, то получим уравнение

$$x(qt) = 2x(t) + bx^2(t),$$

не содержащее свободного члена. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = -\frac{1}{b} + b e^{t \frac{\ln 2}{\ln q}} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \quad \omega(t+1) = \omega(t).$$

3. Рассмотрим более общее, чем (2), уравнение

$$x(qt) = e^{p_m(t)} x^\beta(t), \quad (5)$$

где $p_m(t)$ — полином степени m , $\beta > 1$.

Если положить $y = \ln x$, то получим линейное неоднородное уравнение

$$y(qt) = \beta y(t) + p_m(t),$$

которое рассматривалось в § 3 главы 2, где было выписано также его общее решение. Таким образом, общее решение уравнения (5) при $t > 0$ есть

$$x(t) = e^{p(t)+t \frac{\ln \beta}{\ln q}} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right),$$

где $\omega(t+1) = \omega(t)$ и $p(t)$ есть функция (18') или (18'') из § 3 главы 2.

$$4. \quad x(2t) = 2x^2(t) - 1. \quad (6)$$

Это уравнение дает формулу удвоения косинуса. Его решениями, в частности, являются $x_1(t) = \cos t$ и $x_2(t) = \operatorname{ch} t$.

Мы будем искать непрерывные решения уравнения (6), определенные при $-\infty < t < \infty$.

Характеристическое отображение имеет вид

$$S: \begin{cases} t \mapsto 2t, \\ x \mapsto 2x^2 - 1. \end{cases}$$

Отображение $S_x: x \mapsto 2x^2 - 1$, как уже указывалось в главе 1, обладает свойством

$$S_x[-1, 1] = [-1, 1], \quad S_x(-\infty, -1] = S_x[1, \infty) = [1, \infty). \quad (7)$$

Таким образом, уравнение (6) может иметь решения трех типов:

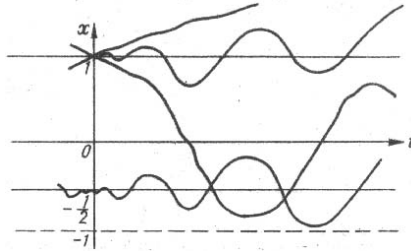
- 1) $|x(t)| \leq 1$ при всех t ,
- 2) $|x(t)| \geq 1$ при всех t ,
- 3) решения, не принадлежащие 1) и 2).

Из (7) следует, что для любого решения $x(t)$ уравнения (6), принадлежащего 3) при $t > 0$:

существует последовательность $t'_1 < t'_2 < \dots \rightarrow +\infty: |x(t'_i)| \leq 1$;

существует последовательность $t''_1 < t''_2 < \dots \rightarrow +\infty: |x(t''_i)| \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$;

и, наконец, $x(t) \geq -1$ при всех t .



Отображение S_x не является монотонным, так что линеаризовать его сразу для всех x нельзя. S_x имеет две неподвижные точки $-\frac{1}{2}$ и 1 . Следовательно, $x(0) = -\frac{1}{2}$ или 1 ; график каждого решения уравнения (6) проходит либо через точку $(0; -\frac{1}{2})$, либо через точку $(0, 1)$. Естественно попытаться линеаризовать отображение S_x в окрестности каждой из неподвижных точек. Тогда мы сможем построить общее решение в окрестности $t = 0$, а уже затем попробуем продолжить полученные решения на все t .

Обозначим B_1 множество решений уравнения (6), для которых $x(0) = 1$, и B_2 — множество решений, для которых $x(0) = -\frac{1}{2}$.

При отображении S_x

$$\begin{aligned} \arccos x &\mapsto 2\pi - 2 \arccos x, & \text{если } -1 \leq x \leq 0, \\ \arccos x &\mapsto 2 \arccos x, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ \text{Arch } x &\mapsto 2 \text{Arch } x, & \text{если } x \geq 1, \end{aligned}$$

и, таким образом, мы можем выписать решения уравнения (6).

Пусть $x(t) \in B_2$. Существует $t_0 > 0$ такое, что при $|t| < t_0$ $-1 < x(t) < 0$. Следовательно, при $|t| < t_0$ график $x(t)$ инвариантен относительно отображения

$$\begin{cases} t \mapsto 2t, \\ \arccos x \mapsto 2\pi - 2 \arccos x, \end{cases}$$

которое можно переписать

$$\begin{cases} t \mapsto 2t, \\ \arccos x - \frac{2\pi}{3} \mapsto -2 \left(\arccos x - \frac{2\pi}{3} \right). \end{cases}$$

Функция $\frac{\arccos x - \frac{2\pi}{3}}{t \cdot \gamma\left(\frac{\ln t}{\ln 2}\right)}$, где $\gamma(t+1) = \gamma(t)$, является инвариантом

этого отображения. Таким образом, при $|t| < t_0$

$$x(t) = \begin{cases} \cos \left[\frac{2\pi}{3} + t \omega_1 \left(\frac{\ln t}{\ln 2} \right) \right], & \omega_1(\tau + 1) = -\omega_1(\tau), \quad t > 0, \\ \cos \left[\frac{2\pi}{3} + t \omega_2 \left(\frac{\ln |t|}{\ln 2} \right) \right], & \omega_2(\tau + 1) = -\omega_2(\tau), \quad t < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Уравнение (6) позволяет единственным образом продолжить решение, определенное на интервале $[-t_0, t_0]$, на интервал $[-2t_0, 2t_0]$, $[-4t_0, 4t_0]$ и т. д. Функции (8) удовлетворяют уравнению (6)

при всех $t \neq 0$. Таким образом, всякое решение $x(t) \in B_2$ имеет вид (8).

Предположим, $x(t) \in B_1$. В этом случае могут представиться три возможности:

- 1) $|x(t)| \leq 1$ при всех t ;
- 2) $|x(t)| \geq 1$ при всех t ;
- 3) существуют t , для которых $x(t) < 1$, и t , для которых $x(t) > 1$.

Если $|x(t)| \leq 1$, то существует $t_0 > 0$ такое, что при $|t| < t_0$ $0 < x(t) < 1$. Следовательно, при $|t| < t_0$ график $x(t)$ инвариантен относительно отображения

$$\begin{cases} t \mapsto 2t, \\ \arccos x \mapsto 2 \arccos x. \end{cases}$$

Функция $\frac{\arccos x}{t}$ является инвариантом этого отображения, и поэтому при $|t| < t_0$

$$x(t) = \begin{cases} \cos \left[t \omega_1 \left(\frac{\ln t}{\ln 2} \right) \right], & \omega_1(\tau + 1) = \omega_1(\tau), \quad t > 0, \\ \cos \left[t \omega_2 \left(\frac{\ln |t|}{\ln 2} \right) \right], & \omega_2(\tau + 1) = \omega_2(\tau), \quad t < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Функции (9) удовлетворяют уравнению (6) при всех $t \neq 0$, так что всякое решение из B_1 , для которого $|x(t)| \leq 1$, имеет вид (9).

Если $x(t) > 1$, то график $x(t)$ инвариантен относительно отображения

$$\begin{cases} t \mapsto 2t, \\ \operatorname{Arch} x \mapsto 2 \operatorname{Arch} x, \end{cases}$$

и, следовательно, такое решение имеет вид

$$x(t) = \begin{cases} \operatorname{ch} \left[t \omega_1 \left(\frac{\ln t}{\ln 2} \right) \right], & \omega_1(\tau + 1) = \omega_1(\tau), \quad t > 0, \\ \operatorname{ch} \left[t \omega_2 \left(\frac{\ln |t|}{\ln 2} \right) \right], & \omega_2(\tau + 1) = \omega_2(\tau), \quad t < 0. \end{cases} \quad (10)$$

Несколько сложнее обстоит дело с решениями типа 3). Для того чтобы получить такие решения, а вместе с ними и уже полученные решения типа 1) и 2), предположим, что x является комплексным. Ограничимся $t > 0$. Рассуждая, как и в случае вещественных x , найдем, что всякое решение уравнения (6) имеет вид

$$x(t) = \cos \left[t \omega \left(\frac{\ln t}{\ln 2} \right) \right], \quad (11)$$

где $\omega = \omega' + i\omega''$, ω' , ω'' — произвольные вещественные периодические функции периода 1. Выделяя вещественную и мнимую части решения (11), получаем

$$x(t) = \cos t \omega' \cdot \operatorname{ch} t \omega'' - i \sin t \omega' \cdot \operatorname{sh} t \omega''.$$

Это решение будет вещественным тогда и только тогда, когда при каждом $t \neq 0$ либо $\omega'(t) = 0$, либо $\omega''(t) = 0$. Например, если $\omega''(t) \equiv 0$, то получим решения (9), если $\omega'(t) \equiv 0$ — решения (10). И, вообще, всякое (вещественное) решение уравнения (6) (типа 1), 2) и 3)), для которого $x(0) = 1$, можно представить в виде

$$x(t) = \cos \left[t \omega' \left(\frac{\ln t}{\ln 2} \right) \right] \cdot \operatorname{ch} \left[t \omega'' \left(\frac{\ln t}{\ln 2} \right) \right], \quad (12)$$

где произвольные периодические функции ω' , ω'' таковы, что $\omega'(t) \cdot \omega''(t) = 0$ при всех t . Чтобы подчеркнуть, что в данном случае по существу не две, а одна произвольная функция периода 1, заметим, что ω' , ω'' можно задавать так: если $\tilde{\omega}$ — произвольная периодическая функция периода 1, то

$$\omega'(t) = \begin{cases} \tilde{\omega}(t), & \text{если } \tilde{\omega}(t) \geq 0, \\ 0, & \text{если } \tilde{\omega}(t) \leq 0, \end{cases}$$

$$\omega''(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{\omega}(t) \geq 0, \\ \tilde{\omega}(t), & \text{если } \tilde{\omega}(t) \leq 0. \end{cases}$$

Используя представление решений уравнения (6), можно выписать решения уравнения

$$x(2t) = 2ax^2(t) + 4bx(t) + \frac{(2b+1)(b-1)}{a} \quad (13)$$

при любых $a \neq 0$ и b . Отображения

$$S_x^{a,b}: x \mapsto 2ax^2 + 4bx + \frac{(2b+1)(b-1)}{a}$$

и

$$S_x: x \mapsto 2x^2 - 1$$

связаны соотношением

$$S_x^{a,b} = h^{-1}S_x h,$$

где $h: x \rightarrow ax + b$. Поэтому, если $\varphi(t, x)$ — инвариант характеристического отображения уравнения (6), то $\varphi(t, ax + b)$ — инвариант характеристического отображения уравнения (13). Следовательно, решения $x(t)$ уравнения (6) и решения $x_{a,b}(t)$ уравнения (13) связаны соотношением

$$ax_{a,b}(t) + b = x(t). \quad (14)$$

5. Рассмотрим уравнение

$$x(t^2 - 2x(t)) = x^2(t), \quad (15)$$

исследование которого мы начали еще в главе 1¹.

Наряду с уравнением (15) можно было бы рассмотреть функциональное уравнение, зависящее от параметров: параметры можно ввести подобно тому, как это было сделано выше для уравнения (6).

Характеристическое отображение уравнения (15)

$$S: \begin{cases} t \mapsto t^2 - 2x, \\ x \mapsto x^2, \end{cases} \quad (16)$$

как отмечалось ранее, имеет квазиинвариант $\frac{t^2}{x}$:

$$\frac{t^2}{x} \xrightarrow{S} \left(\frac{t^2}{x} - 2 \right)^2.$$

Всякая функция от $\frac{t^2}{x}$ снова является квазиинвариантом отображения (16). В частности, если $\psi(t, x) = \frac{t^2}{2x} - 1$, то

$$\psi \xrightarrow{S} 2\psi^2 - 1. \quad (17)$$

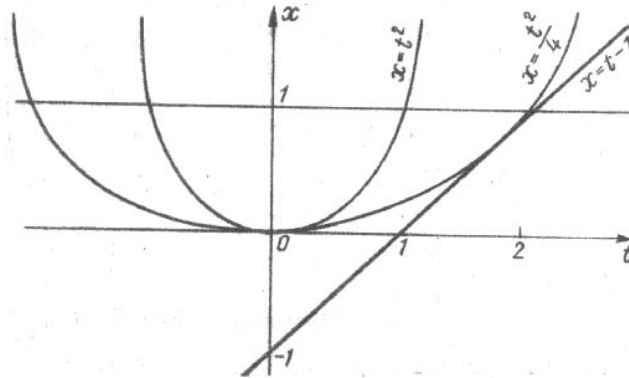
С отображением (17) мы уже неоднократно встречались.

При отображении S нижняя полуплоскость переходит в верхнюю, а верхняя отображается на себя. Следовательно, все решения должны проходить через верхнюю полуплоскость, и, может быть, некоторые из них могут быть продолжены в нижнюю полуплоскость.

Каждая прямая $x = a$ при отображении S переходит в прямую $x = a^2$. Следовательно, прямые $x = 0$ и $x = 1$ инвариантны

¹Уравнение (15) встретилось при изучении Г. Н. Саковичем инвариантов матриц.

при отображении S , а функции $x(t) = 0$ и $x(t) = 1$ являются решениями уравнения (15).



Каждая парабола $\psi(t, x) = a$, согласно (17), переходит в параболу $\psi(t, x) = 2a^2 - 1$. Следовательно, параболы $\psi(t, x) = 1$ и $\psi(t, x) = -\frac{1}{2}$, соответствующие неподвижным точкам отображения (17), дают решения $x(t) = \frac{t^2}{4}$ и $x(t) = t^2$.

Отображение (17) имеет также две периодические точки периода два $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$, переходящие друг в друга. Им соответствует решение

$$x(t) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{5}}{2} t^2, & t \leq 0, \\ \frac{3 + \sqrt{5}}{2} t^2, & t \geq 0. \end{cases}$$

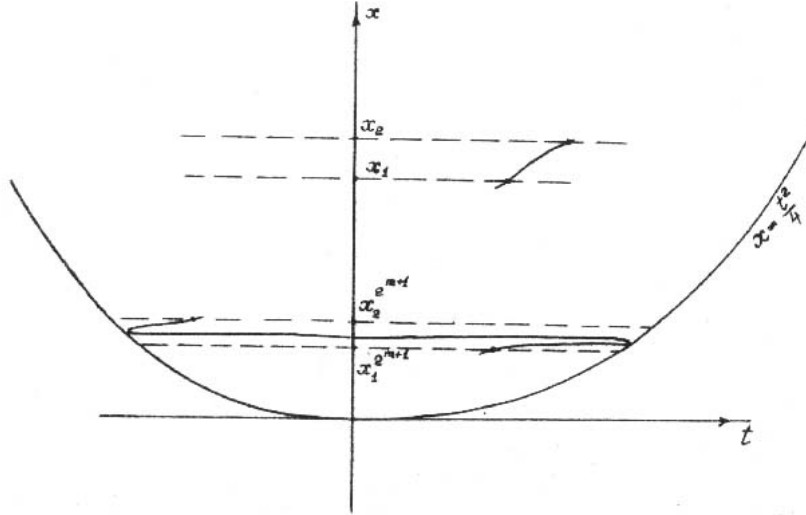
Кроме указанных, никакие другие решения через область $x \geq \frac{t^2}{4}$ ($-1 \leq \psi(t, x) \leq 1$) не проходят. Это вытекает из следующего свойства отображения (17): для любого открытого интервала $I \in [-1, 1]$ существует $m(I) > 0$ такое, что $S_\psi^m I = [-1, 1]$ (S_ψ —

отображение (17)). Свойство становится очевидным, если положить $y = \frac{\arccos \psi}{\pi}$, $|\psi| \leq 1$. Тогда при отображении (17)

$$y \rightarrow \begin{cases} 2y, & 0 \leq y \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-y), & \frac{1}{2} \leq y \leq 1. \end{cases}$$

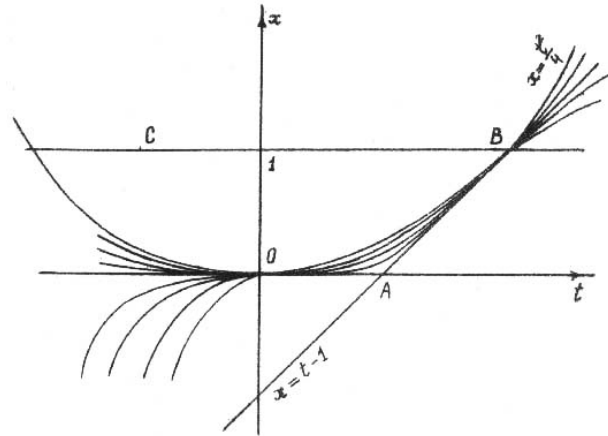
Из отмеченного свойства следует, что никакая инвариантная относительно отображения S непрерывная кривая, проходящая через область $x \geq \frac{t^2}{4}$ и отличная от указанных ранее, не может быть t -кривой.

Отсюда также следует, что в области $x \geq \frac{t^2}{4}$ отображение (17) не имеет непрерывных инвариантов, зависящих от t . В самом деле, допустим, что $\varphi(t, x)$ является таким инвариантом. Возьмем какие-либо две точки (t_1, x_1) и (t_2, x_2) , принадлежащие линии уровня $\varphi(t, x) = c_0$ вместе с некоторой непрерывной кривой, соединяющей эти точки. Так как $\varphi(t, x)$ зависит от t , можно считать, что $x_1 \neq x_2$ (пусть $x_1 < x_2$). Так как $\varphi(t, x) \neq \frac{t^2}{x}$ и, более того, $\varphi(t, x)$ не представима в виде невырожденной функции от $\frac{t^2}{x}$, то можно считать, что $\alpha_1 = \frac{t_1^2}{2x_1} - 1 \neq \alpha_2 = \frac{t_2^2}{2x_2} - 1$ (пусть $\alpha_1 < \alpha_2$). Существует $m > 0$ такое, что $S_\psi^m[\alpha_1, \alpha_2] = [-1, 1]$. Это означает, что линия уровня $\varphi(t, x) = c_0$ содержит непрерывную кривую, пересекающую прямые $x = x_1^{2^m}$ (в точке $S^m(t_1, x_1)$) и $x = x_2^{2^m}$ (в точке $S^m(t_2, x_2)$) и имеющую общие точки с параболой $x = \frac{t^2}{4}$ ($\psi(t, x) = 1$) и полупрямой $t = 0, x > 0$ ($\psi(t, x) = -1$) при $x_1^{2^m} \leq x \leq x_2^{2^m}$. При отображении S парабола $x = \frac{t^2}{4}$ отображается на полупараболу $x = \frac{t^2}{4}, t > 0$, а полупрямая $t = 0, x > 0$



— на полупараболу $x = \frac{t^2}{4}$, $t \leq 0$. Следовательно, линия уровня $\varphi(t, x) = c_0$ содержит непрерывную кривую, пересекающую прямые $x = x_1^{2^{m+1}}$ и $x = x_2^{2^{m+1}}$ и имеющую при $x_1^{2^{m+1}} \leq x \leq x_2^{2^{m+1}}$ общие точки с параболой $x = \frac{t^2}{4}$, когда $t < 0$ и когда $t > 0$. Линия уровня $\varphi(t, x) = c$ при любом c , достаточно близком к c_0 , пересекает прямые $x = x_1$ и $x = x_2$ (этого всегда можно добиться, сближая точки (t_1, x_1) и (t_2, x_2)), и часть этой линии уровня, лежащая между $x = x_1$ и $x = x_2$, есть непрерывная кривая. Но в таком случае линия уровня $\varphi(t, x) = c$ содержит непрерывную кривую, пересекающую прямые $x = x_1^{2^{m+1}}$ и $x = x_2^{2^{m+1}}$. Эта кривая лежит в области $x \geq \frac{t^2}{4}$ и с необходимостью должна пересекать линию уровня $\varphi(t, x) = c_0$, что невозможно.

В области $x \leq \frac{t^2}{4}$ уравнение (15) имеет много решений. Покажем это.



Неподвижными точками отображения S являются точки: $O(0, 0)$ — типа “устойчивый узел”, $A(1, 0)$ — типа “седло”, $B(2, 1)$ — типа “неустойчивый узел”, $C(-1, 1)$ — также типа “неустойчивый узел”. Через точку C , как мы выяснили, проходит только два решения (определенные при всех t). Через точку A , кроме $x(t) = 0$, проходит еще одно решение $x(t) = t - 1$. Других решений, проходящих через эту точку, нет (так как A — седло).

Через точки O и B проходит много решений. При $0 < t < 2$ графики этих решений лежат в области, ограниченной кривыми $x = 0$, $x = \frac{t^2}{4}$ и $x = t - 1$. Так как при $x > 0$ и $h > 1$

$$\ln x \mapsto 2 \ln x,$$

$$\ln(h + \sqrt{h^2 - 1}) \mapsto 2 \ln(h + \sqrt{h^2 - 1})$$

($\text{Arch } h = \ln(h + \sqrt{h^2 - 1})$), то для отображения S

$$\frac{\ln(h + \sqrt{h^2 - 1})}{\ln x} \quad \text{и} \quad \frac{\ln x}{\ln 2}$$

являются инвариантами. Решения, проходящие через точку 0 при $t > 0$, задаются неявной функцией

$$h + \sqrt{h^2 - 1} = x^{\omega\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)}, \quad h = \frac{t^2}{2x} - 1, \quad (18)$$

ω — произвольная периодическая функция периода 1.

Аналогично, хотя и несколько сложнее, можно было бы выписать решения, проходящие через точку B .

Каждое решение, определенное при $t > 0$, можно продолжить на $t < 0$. Ввиду неоднозначности отображения, обратного S , имеется две возможности для такого продолжения: либо в область $0 < x < \frac{t^2}{4}$, либо в область $x < 0$.

$$6. \quad x(f(x(t))) = g(t). \quad (19)$$

В § 5 главы 2 рассматривалось линейное уравнение такого типа

$$x(x(t)) = \Delta t. \quad (20)$$

Мы сейчас покажем, каким образом уравнение (19) может быть приведено к уравнению (20), общее решение которого известно.

Предположим для простоты, что $f(0) = g(0) = 0$, а также, что $f'(0) = a \neq 0$ и $g'(0) = b \neq 0$. Рассмотрим уравнение

$$h(\varphi(u)) = \Delta \cdot h(u), \quad (21)$$

где $\Delta = ab$, $\varphi(u) = g(f(u))$. Это обычное уравнение Шредера; $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(0) = \Delta$. Если g, f — аналитические или C^k -функции, то уравнение (21) имеет соответственно аналитические или C^k -решения.

Пусть $h(u)$ — какое-либо решение уравнения (21). Положим $y = h(x)$ и $\tau = \frac{1}{\Delta} h(g(t))$. Так как, согласно (19),

$$\begin{cases} t \mapsto f(x), \\ x \mapsto g(t), \end{cases}$$

то

$$\begin{aligned} y = h(x) &\mapsto h(g(t)) = \Delta \cdot \tau, \\ \tau = \frac{1}{\Delta} h(g(t)) &\mapsto \frac{1}{\Delta} h(g(f(x))) = h(x) = y, \end{aligned}$$

т. е. в переменных y, τ уравнение (19) принимает вид (20).

Рассмотрим конкретный пример:

$$x(x(t)) = 2t + ct^2, \quad c \neq 0. \quad (22)$$

Уравнение (20) в данном случае запишется

$$h(2u + cu^2) = 2h(u) \quad (23)$$

$$\left(f(u) = 1, \quad g(u) = 2u + cu^2 = c \left(u + \frac{1}{c} \right)^2 - \frac{1}{c} \right).$$

Характеристическое отображение

$$\begin{cases} u \mapsto 2u + cu^2, \\ h \mapsto 2h \end{cases}$$

можно представить в виде (см. пример 2)

$$\begin{cases} \ln \left(u + \frac{1}{c} \right) \mapsto 2 \ln \left(u + \frac{1}{c} \right), \\ h \mapsto 2h, \end{cases}$$

так что $\frac{h}{\ln(u + 1/c)}$ есть инвариант и $\frac{h(u)}{\ln(u + 1/c)} = 1$ — решение уравнения (3). Следовательно, замена, приводящая уравнение (22) к уравнению (20), может быть такой:

$$\begin{aligned} y &= \ln \left(x + \frac{1}{c} \right), \\ \tau &= 2 \ln \left(t + \frac{1}{c} \right) + \ln c. \end{aligned}$$

§ 2. Линеаризация отображения в окрестности неподвижной точки

В этом параграфе мы приведем некоторые результаты, касающиеся линеаризации нелинейных отображений. Они потребуются нам в дальнейшем для построения решений нелинейных функциональных уравнений.

Пусть U — окрестность начала координат $O(0, 0, \dots, 0)$ в \mathbb{R}^n и $\text{Diff}^k(U)$ — множество всех определенных в U диффеоморфизмов класса C^k (C^k -гомеоморфизмов, имеющих неособый якобиан), для которых точка 0 является неподвижной.

Рассмотрим отображение

$$S: x \mapsto S(x), \quad (1)$$

$S \in \text{Diff}^k(U)$.

Пусть $J(x) = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)$ — якобиан отображения S и $B = J(0)$.

Предположим, корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ уравнения $\det \|B - \lambda E\| = 0$, где E — единичная матрица, вещественны и попарно различны. В таком случае, не ограничивая общности, можно считать, что матрица B диагональная (этого всегда можно добиться с помощью линейного преобразования координат).

Пусть \mathfrak{B}^k — множество вектор-функций $H = (h_1, \dots, h_n)$ таких, что

- 1) $h_i, i = 1, 2, \dots, n$, — полиномы от n переменных степени $\leq k$ без постоянных членов;
- 2) матрица линейных членов H неособая.

Лемма 1. Если $S \in \text{Diff}^k(U)$ и

$$\lambda_i \neq \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \dots \lambda_n^{m_n}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

при любых целых $m_j \geq 0$, для которых $\sum_{j=1}^n m_j > 1$, то существует преобразование $H \in \mathfrak{B}^k$ такое, что

$$HSH^{-1} = B + Q, \quad (3)$$

где $Q = (q_1, \dots, q_n)$, $q_i(x) = O(\|x\|^k)$ при $\|x\| \rightarrow 0$.

Доказательство. Соотношение (3) эквивалентно соотношению

$$HS = BH + QH. \quad (4)$$

Отображение S может быть представлено в виде

$$x_i \mapsto \lambda_i x_i + \sum_{j_1 + \dots + j_n \leq k} g_{j_1 \dots j_n}^i x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} + r_i(x), \quad (5)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

где $r_i(x) = O(\|x\|^k)$ при $\|x\| \rightarrow 0$, $i = 1, \dots, n$.

Если $H = (h_1, \dots, h_n)$ и

$$h_i(x) = x_i + \sum_{j_1 + \dots + j_n \leq k} h_{j_1 \dots j_n}^i x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

где $h_{j_1 \dots j_n}^i$ — некоторые пока неопределенные постоянные, то, подставляя (5) и (6) в (4), будем иметь

$$\begin{aligned} & \lambda_i x_i + \sum_{j_1 + \dots + j_n \leq k} g_{j_1 \dots j_n}^i x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} + \\ & + \sum_{j_1 + \dots + j_n \leq k} h_{j_1 \dots j_n}^i \left(\lambda_1 x_1 + \sum_{s_1 + \dots + s_n \leq k} g_{s_1 \dots s_n}^1 x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n} \right)^{j_1} \dots \\ & \dots \left(\lambda_n x_n + \sum_{s_1 + \dots + s_n \leq k} g_{s_1 \dots s_n}^n x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n} \right)^{j_n} = \\ & = \lambda_i x_i + \lambda_i \sum_{j_1 + \dots + j_n \leq k} h_{j_1 \dots j_n}^i x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} + \tilde{q}_i(x), \quad (7) \end{aligned}$$

где $\tilde{q}_i(x) = O(\|x\|^k)$ при $\|x\| \rightarrow 0$, $i = 1, \dots, n$.

Приравнявая в (7) коэффициенты при $x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}$, получаем

$$\left(\lambda_i - \lambda_1^{j_1} \lambda_2^{j_2} \dots \lambda_n^{j_n}\right) h_{j_1 \dots j_n}^i = p_{j_1 \dots j_n}^i, \quad (8)$$

где $p_{j_1 \dots j_n}^i$ — некоторые полиномы, зависящие от $h_{s_1 \dots s_n}^i$, $s_1 + \dots + s_n < j_1 + \dots + j_n$. Таким образом, коэффициенты $h_{j_1 \dots j_n}^i$ определяются при помощи рекуррентных соотношений

$$h_{j_1 \dots j_n}^i = \frac{p_{j_1 \dots j_n}^i}{\lambda_i - \lambda_1^{j_1} \lambda_2^{j_2} \dots \lambda_n^{j_n}}. \quad (9)$$

Лемма доказана.

Пусть $\alpha = \min_i |\lambda_i|$, $\beta = \max_i |\lambda_i|$. Тогда

$$\alpha \|x\| < \|Bx\| < \beta \|x\|. \quad (10)$$

Предположим, что

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Теорема 1. Если $S \in \text{Diff}^k(U)$, $k > \frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$, выполняются условия (2) и (11), то в некоторой окрестности начала координат существует преобразование H класса C^k такое, что $HSN^{-1} = B$.

Для доказательства теоремы 1 потребуются некоторые дополнительные сведения.

Обозначим $Q^l(V)$ пространство вектор-функций $f = (f^1, \dots, f^n)$, которые определены в некоторой окрестности V начала координат, принадлежат классу C^l и обращаются в нуль в точке $O(0, 0, \dots, 0)$ вместе со своими частными производными порядка $\leq l$. Тогда, очевидно, $Q^{l'}(V') \subseteq Q^l(V)$, если $V' \supseteq V$ и $l' \geq l$. В пространстве $Q^l(V)$ введем метрику

$$\|f\|_V^l = \sup_V \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^l \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_m \leq n} \left| f_{x_{j_1} \dots x_{j_m}}^i \right|.$$

Непосредственным следствием этого определения является следующая лемма.

Лемма 2. Для любого $f \in Q^k(U)$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти достаточно малую окрестность V начала координат такую, что

$$\|f\|_V^1 + \|f\|_V^2 + \dots + \|f\|_V^{k-1} < \varepsilon \|f\|_V^k.$$

Теперь определим на пространстве $Q^k(U)$ оператор

$$G : f(x) \mapsto B^{-1} f(S(x)).$$

Если $f \in Q^k(U)$, то и $Gf \in Q^k(U)$ (ввиду (11) можно считать, что $S^0 U \subset U$).

Лемма 3. Пусть $f \in Q^k(U)$, $S \in \text{Diff}^k(U)$ и $k > \frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$. Существует окрестность V начала координат такая, что

$$\|Gf\|_V^k < \theta \|f\|_V^k$$

при некотором $\theta < 1$.

Доказательство. Пусть $S = (g^1, \dots, g^n)$, так что якобиан $J(x) = \left(\frac{\partial g^i}{\partial x_j}, i, j = 1, \dots, n \right)$, и $f = (f^1, \dots, f^n)$. При каждом i , $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned} & \left[f^i(S(x)) \right]_{x_{j_1} \dots x_{j_k}} = \\ & = \sum_{1 \leq s_1, \dots, s_k \leq n} f_{x_{s_1} \dots x_{s_k}}^i(S(x)) g_{x_{j_1}}^{s_1}(x) \dots g_{x_{j_k}}^{s_k}(x) + W^i, \end{aligned} \quad (12)$$

где $W^i = \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{1 \leq s_1, \dots, s_r \leq n} W_{s_1 \dots s_r}^i f_{x_{s_1} \dots x_{s_r}}^i$ и $W_{s_1 \dots s_r}^i$ — полиномы относительно производных g^1, \dots, g^n порядка $\leq k$.

Так как g^1, \dots, g^n — функции класса C^k в U , то

1) для любого $\varepsilon_1 > 0$, согласно лемме 2, найдется $\delta_1 > 0$ такое, что

$$\|W\|_{V_{\delta_1}}^k \leq \varepsilon_1 \|f\|_{V_{\delta_1}}^k,$$

где $W = (W^1, \dots, W^n)$ и $V_{\delta_1} - \delta_1$ — окрестность точки $O(0, \dots, 0)$;

2) для любого $\varepsilon_2 > 0$ найдется $\delta_2 > 0$ такое, что

$$\|J(x)\| < \beta + \varepsilon_2$$

для каждого $x \in V_{\delta_2}$, $V_{\delta_2} - \delta_2$ — окрестность точки $O(0, 0, \dots, 0)$. Если $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и $V - \delta$ — окрестность точки $O(0, 0, \dots, 0)$, то

$$\|Gf\|_V^k < \frac{(\beta + \varepsilon_2)^k + \varepsilon_1}{\alpha} \|f\|_V^k.$$

Поскольку $k > \frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$, т. е. $\beta^k < \alpha$, то $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ можно выбрать так,

чтобы выполнялось неравенство $\frac{(\beta + \varepsilon_2)^k + \varepsilon_1}{\alpha} < 1$.

Доказательство теоремы 1 проведем методом последовательных приближений. За нулевое приближение мы возьмем преобразование $H_0 \in \mathfrak{B}^k$, удовлетворяющее уравнению $H = B^{-1}HS$ с точностью до членов k -го порядка. Такое H_0 в силу леммы 1 существует, и $H_0 - B^{-1}H_0S \in Q^k(U)$. Последующие приближения строим по формуле

$$H_m = B^{-m}H_0S^m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Поскольку $H_0 \in \mathfrak{B}^k$ и $S \in \text{Diff}^k(U)$, то в некоторой окрестности начала координат H_m принадлежат классу C^k при любом m .

Так как $G^l(B^{-1}H_0S - H_0) = B^{-(l+1)}H_0S^{l+1} - B^{-l}H_0S^l$, то

$$H_m = H_0 + \sum_{l=0}^{m-1} G^l (B^{-1}H_0S - H_0), \quad m = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Согласно лемме 3, для функции $f_1 = H_0 - B^{-1}H_0S$ найдется окрестность V_1 начала координат такая, что

$$\|Gf_1\|_{V_1}^k < \theta \|f_1\|_{V_1}^k$$

и $\theta < 1$. Для функции $f_2 = Gf_1$ найдется окрестность V_2 такая, что

$$\|Gf_2\|_{V_2}^k < \theta \|f_2\|_{V_2}^k$$

и т. д. Существует окрестность V начала координат, содержащаяся в окрестностях V_l , $l = 1, 2, \dots$ ². Таким образом,

$$\|G^l f_1\|_V^k < \theta^l \|f_1\|_V^k, \quad l = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что последовательность (13) равномерно сходится в окрестности v к преобразованию H класса C^k , которое удовлетворяет уравнению $HSH^{-1} = B$. Теорема 1 доказана.

Если отображение S является аналитическим в u , выполняются условия (2) и (11), то в некоторой окрестности начала координат существует аналитическое преобразование H такое, что $HSH^{-1} = B$.

Доказательство этого утверждения проводится методом последовательных приближений аналогично тому, как была доказана

²Это можно доказать, воспользовавшись следующим усилением леммы 2: для любого $f \in Q^k(u)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность v начала координат такая, что

$$\|G^m f\|_V^1 + \|G^m f\|_V^2 + \dots + \|G^m f\|_V^{k-1} < \varepsilon \|G^m f\|_V^k$$

при всех $m = 0, 1, 2, \dots$

теорема 1. Приближения H_m , построенные по формуле (13), являются аналитическими, а сама последовательность H_m , $m = 0, 1, \dots$, — равномерно сходящаяся, так что ее предел есть также аналитическая функция.

В случае, когда

$$\lambda_i = \lambda_i^{m_1} \dots \lambda_i^{m_n}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (14)$$

где m_j , $j = 1, 2, \dots, n$, — целые неотрицательные числа, для которых $\sum_{j=1}^n m_j > 1$, т. е. условие (2) не выполняется, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Если $S \in \text{Diff}^k(U)$, $k > \frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$, выполняются условия (11) и (14), то в некоторой окрестности начала координат существует преобразование H класса C^k такое, что

$$\begin{aligned} HSH^{-1}x = & \left(\lambda_1 x_1 + \sum a_{m_1 \dots m_n}^1 x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}, \dots, \lambda_n x_n + \right. \\ & \left. + \sum a_{m_1 \dots m_n}^n x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

где $a_{m_1 \dots m_n}^i$ — некоторые постоянные, и суммирование проводится по всем наборам (m_1, \dots, m_n) целых неотрицательных чисел, для которых имеет место (14).

Заметим, что ввиду (11) соотношения (14) выполняются лишь для конечного числа наборов (m_1, \dots, m_n) .

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Результаты, сформулированные для случая, когда выполняется условие (11), т. е. $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, имеют место также и при $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть среди собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ имеются лежащие как внутри, так и вне единичного круга, т. е. не выполняется условие (11). Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Если $S \in \text{Diff}^k(U)$, выполняется условие (2) и среди $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ имеются лежащие как внутри, так и вне единичного круга, то в некоторой окрестности начала координат существует преобразование H , приводящее отображение S к линейному и принадлежащее классу C^ν , причем $\nu = \nu(\lambda_1, \dots, \lambda_n; k)$ и $\nu \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы 3 приведено в [57, 64].

В том случае, когда среди λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, имеются комплексные, теоремы 1–3 остаются справедливыми. Однако линеаризующее преобразование H является, вообще говоря, комплексным. Тем не менее, и в этом случае существует вещественное преобразование \tilde{H} , линеаризующее исходное отображение S . При этом матрица линеаризованного отображения будет содержать по диагонали блоки $\begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{vmatrix}$, $\alpha_i = \text{Re } \lambda_i$, $\beta_i = \text{Im } \lambda_i$. Эти результаты являются следствием приведенных выше теорем.

§ 3. Представление решений нелинейных уравнений в окрестности особой точки

Построение решений нелинейных функциональных уравнений в явном виде – обычно очень трудная, а часто и вообще неразрешимая задача. Вместе с тем, используя результаты предыдущего параграфа, даже для уравнений вида

$$x(f(t, x(t))) = G(t, x(t)),$$

где $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $G: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, удается описать структуру решений уравнения в окрестности особых точек. Под особыми точками мы понимаем неподвижные точки (характеристического) отображения

$$S: \begin{cases} t \mapsto f(t, x) \\ x \mapsto G(t, x), \end{cases}$$

так что точка (t_0, x_0) является особой для решения $x(t)$, если $x(t_0) = x_0$ и t_0, x_0 удовлетворяют системе уравнений $f(t_0, x_0) = t_0$, $G(t_0, x_0) = x_0$.

Сейчас мы рассмотрим несколько более простую систему функциональных уравнений

$$x(f(t)) = G(t, x(t)), \quad (1)$$

где $G = (g_1, \dots, g_n)$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Будем предполагать, что начало координат в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ — точка $O(0, \dots, 0)$ является неподвижной точкой отображения

$$S: \begin{cases} t \mapsto f(t) \\ x \mapsto G(t, x) \end{cases} \quad (2)$$

и $S \in \text{Diff}^k(U)$, где U — некоторая окрестность начала координат.

Обозначим через $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ корни уравнения $\det||B - \lambda E|| = 0$, где B — якобиан отображения S в точке $O(0, \dots, 0)$, E — единичная матрица, и, в частности, $\lambda_0 = f'(0)$. Предположим λ_i , $i = 0, 1, \dots, n$, вещественны, попарно различны и

$$\lambda_i \neq \lambda_0^{m_0} \lambda_1^{m_1} \dots \lambda_n^{m_n}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (3)$$

при любых целых $m_j \geq 0$, для которых $\sum_{j=0}^n m_j > 1$. Далее будем предполагать, что матрица B является диагональной матрицей (в ином случае этого можно добиться используя линейное преобразование координат).

Тогда, согласно теоремам 1 и 3 предыдущего параграфа, существует преобразование

$$\begin{cases} \tau = h_0(t) \\ y = H(t, x), \end{cases} \quad (4)$$

где $y = (y_1, \dots, y_n)$, $H = (h_1, \dots, h_n)$, принадлежащее классу C^ν , $\nu = \nu(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, k)$, такое, что в новых переменных τ, y_1, \dots, y_n отображение S является линейным

$$\begin{cases} \tau \mapsto \lambda_0 \tau \\ y \mapsto \Lambda y, \end{cases} \quad \Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix}.$$

При этом $\nu = k$, если

1) $|\lambda_i| < 1, i = 0, 1, \dots, n$, и $k > \frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$, где $\alpha = \min_{i=0,1,\dots,n} |\lambda_i|$,
 $\beta = \max_{i=0,1,\dots,n} |\lambda_i|$, или же

2) $|\lambda_i| > 1, i = 0, 1, \dots, n$ и $k > \frac{\ln \beta}{\ln \alpha}$.

Таким образом, с помощью преобразования (4) исследование системы (1) в некоторой окрестности начала координат сводится к исследованию линейной системы

$$y(\lambda_0 \tau) = \Lambda y(\tau). \quad (5)$$

Общее решение системы (5) выписано в § 1 главы 2. Например, при $\lambda_0 > 0, \tau > 0$ общее решение имеет вид

$$y_i(\tau) = \tau^{\nu_i} \omega_i \left(\frac{\ln \tau}{\ln \lambda_0} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

где $\nu_i = \frac{\ln |\lambda_i|}{\ln \lambda_0}$ и ω_i — произвольные функции, для которых $\omega_i(\tau + 1) = \text{sign} \lambda_i \omega_i(\tau)$ $i = 1, 2, \dots, n$.

Используя (4) и представление общего решения системы (5), можно выписать общее решение системы (1) в окрестности начала координат

$$h_i(t, x(t)) = [h_0(t)]^{\nu_i} \omega_i \left(\frac{\ln h_0(t)}{\ln \lambda_0} \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Поскольку согласно предыдущему параграфу функции $h_0(t)$, $H(t, x)$ являются решениями уравнений

$$\begin{aligned} H(f(t), \Lambda x + G(t, x)) &= \Lambda H(t, x), \\ h_0(f(t)) &= f'(0)h_0(t) \end{aligned}$$

и, следовательно, могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} H(t, x) &= x + P(t, x), \\ h_0(t) &= t + \tilde{h}(t), \end{aligned}$$

где $P(t, x) \in C_{t,x}^k$, $\tilde{h}(t) \in C^k$, и $P(t, x) = o(|x|)$ при $t \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$, $\tilde{h}(t) = o(t)$ при $t \rightarrow 0$, то решение системы (1) может быть записано в следующей форме (якобиан преобразования (4) отличен от нуля в U)

$$x_i(t) = h_0^{\nu_i}(t) \omega_i\left(\frac{\ln h_0(t)}{\ln \lambda_0}\right) + \quad (8)$$

$$+ \tilde{P}_i\left[t, h_0^{\nu_1}(t) \omega_1\left(\frac{\ln h_0(t)}{\ln \lambda_0}\right), \dots, h_0^{\nu_n}(t) \omega_n\left(\frac{\ln h_0(t)}{\ln \lambda_0}\right)\right], i = 1, \dots, n,$$

или же

$$x_i(t) = t^{\nu_i} \omega_i\left(\frac{\ln h_0(t)}{\ln \lambda_0}\right) + p_i(t) + \quad (9)$$

$$+ \tilde{P}_i\left[t, h_0^{\nu_1}(t) \omega_1\left(\frac{\ln h_0(t)}{\ln \lambda_0}\right), \dots, h_0^{\nu_n}(t) \omega_n\left(\frac{\ln h_0(t)}{\ln \lambda_0}\right)\right], i = 1, \dots, n,$$

где $\tilde{P}_i(t, x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, принадлежат классу C^ν по всем переменным и $p_i(t) = o(t)$ при $t \rightarrow 0$, $\tilde{P}_i(t, x_1, \dots, x_n) = o(|x_1| + \dots + |x_n|)$ при $t \rightarrow 0$, $x_i \rightarrow 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Поскольку $h_0(0) = 0$, то непосредственно из представления (8), (9) вытекает, что множество непрерывных решений уравнения (1), определенных в некоторой окрестности начала координат и таких, что $x(0) = 0$, содержит:

- а) семейство решений, зависящее от n произвольных 1-периодических функций класса C^r , если $r < \nu_i, i = 1, \dots, n$;
 б) семейство решений, зависящее от произвольной константы, если $r = \max\{\nu_i, i = 1, \dots, n\}$
 в) единственное решение $\{\omega_i(\tau) = 0, i = 1, \dots, n\}$, если $r > \nu_i, i = 1, \dots, n$.

Проиллюстрируем вышеизложенное в случае, когда $n = 1$. Рассмотрим уравнение

$$x(qt) = \lambda x(t) + atx^2(t), \quad (10)$$

в окрестности начала координат $O(0, 0)$ при условии, что $a \neq 0$, λ и q одновременно либо > 1 , либо < 1 .

Сведем уравнение (1) к соответствующему ему линейному уравнению

$$y(qt) = \lambda y(t), \quad (11)$$

общее решение для которого, как известно, имеет вид

$$y(t) = t^{\frac{\ln \lambda}{\ln q}} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \quad (12)$$

где $\omega(t)$ — произвольная 1-периодическая функция.

Для решения задачи воспользуемся замечанием к теореме 1 предыдущего параграфа, согласно которому в некоторой окрестности начала координат существует аналитическая замена переменных

$$y = h(t, x), \quad (13)$$

такая, что в новых переменных наше уравнение принимает вид (11).

Функцию $h(t, x)$ можно искать в виде

$$h(t, x) = x + h_2(t) x^2 + h_3(t) x^3 + \dots \quad (14)$$

как решение следующего уравнения

$$h(qt, \lambda x + atx^2) = \lambda h(t, x). \quad (15)$$

Действительно, подставляя (14) в (15), получим соотношение

$$\lambda x + atx^2 + h_2(qt) (\lambda x + atx^2)^2 + h_3(qt) (\lambda x + atx^2)^3 + \dots =$$

$$= \lambda x + \lambda h_2(t) x^2 + \lambda h_3(t) x^3 + \dots$$

из которого (приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x) получаем уравнения для определения функций $h_2(t)$, $h_3(t)$, \dots :

$$\begin{aligned} \lambda^2 h_2(qt) + a t &= \lambda h_2(t), \\ \lambda^3 h_3(qt) + 2\lambda a t h_2(qt) &= \lambda h_3(t), \\ \lambda^4 h_4(qt) + a^2 t^2 h_2(qt) + 3\lambda^2 a t h_3(qt) &= \lambda h_4(t) \\ , \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Следовательно, функция $h_2(t)$ должна удовлетворять линейному неоднородному уравнению

$$h_2(qt) = \frac{1}{\lambda} h_2(t) - \frac{1}{\lambda^2} a t,$$

аналитическое решение которого, как известно, имеет вид

$$h_2(t) = -\frac{a}{(\lambda q - 1)\lambda} t.$$

Аналогично, решая последовательно уравнения (16), находим $h_3(t)$, $h_4(t)$, $h_5(t)$, \dots . К примеру, $h_3(t)$ будет иметь вид

$$h_3(t) = \frac{2a^2 q}{\lambda(\lambda q - 1)(\lambda^2 q^2 - 1)} t^2.$$

Таким образом, используя (13) и (14), получим

$$y = x - \frac{a}{(\lambda q - 1)\lambda} t x^2 + \frac{2a^2 q}{\lambda(\lambda q - 1)(\lambda^2 q^2 - 1)} t^2 x^3 + \dots \quad (17)$$

Теперь для получения решения $x(t)$ необходимо разрешить полученное соотношение (17) относительно $x(t)$. Если искать $x(t)$ в виде

$$x(t) = y(t) + c_2(t)y^2(t) + c_3(t)y^3(t) + \dots, \quad (18)$$

то подставляя (18) в (17), получим

$$y(t) + c_2(t)y^2(t) + c_3(t)y^3(t) + \dots -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{a}{(\lambda q - 1)\lambda} t \left(y(t) + c_2(t)y^2(t) + c_3(t)y^3(t) + \dots \right)^2 + \\
& + \frac{2a^2 q}{\lambda(\lambda q - 1)(\lambda^2 q^2 - 1)} t^2 \left(y(t) + c_2(t)y^2(t) + c_3(t)y^3(t) + \dots \right)^3 + \\
& + \dots = y(t).
\end{aligned}$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях y , получим

$$c_2(t) = \frac{a}{(\lambda q - 1)\lambda} t, \quad c_3(t) = \frac{2a^2}{\lambda^2(\lambda^2 q^2 - 1)(\lambda q - 1)} t^2, \dots$$

Таким образом, используя (18) и (12), решение $x(t)$ можно представить в таком виде

$$\begin{aligned}
x(t) = & t^{\frac{\ln \lambda}{\ln q}} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right) + \frac{a}{(\lambda q - 1)\lambda} t^{2\frac{\ln \lambda}{\ln q} + 1} \omega^2\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right) + \\
& + \frac{2a^2}{(\lambda^2 q^2 - 1)(\lambda q - 1)\lambda^2} t^{3\frac{\ln \lambda}{\ln q} + 2} \omega^3\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right) + \\
& + o\left(t^{3\frac{\ln \lambda}{\ln q} + 2}\right), \quad t \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Построение решений системы (1) значительно усложняется, если не выполняется условие (3), т.е. существует, по крайней мере, одно λ_i и целые $m_0, m_1, \dots, m_n \geq 0, \sum_{j=0}^n m_j > 1$, такие, что

$$\lambda_i = \lambda_0^{m_0} \lambda_1^{m_1} \dots \lambda_n^{m_n}. \quad (19)$$

Рассмотрим наиболее простой случай $n = 1$, когда имеется только одно уравнение

$$x(f(t)) = g(t, x(t)) \quad (20)$$

и соответствующее характеристическое отображение

$$S: \begin{cases} t \mapsto f(t) \\ x \mapsto g(t, x), \end{cases} \quad (21)$$

принадлежит $Diff^k(U)$ в некоторой окрестности U точки $(0, 0)$.

Для уравнения (20) условие (19) означает, что при некотором $m > 0$

$$q^m = b, \quad (22)$$

где $q = f'(0)$, $b = g'_x(0, 0)$. Из (13) следует, что и $|q|$, и $|b|$ должны быть одновременно < 1 или > 1 .

Если $k > m$, то, согласно теореме 2 предыдущего параграфа, в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ существует C^k замена переменных

$$\begin{cases} \tau = h_0(t), \\ y = h(t, x) \end{cases} \quad (23)$$

такая, что в переменных τ, y отображение S имеет вид

$$\begin{cases} \tau \mapsto q\tau \\ y \mapsto by + c\tau^m, \end{cases} \quad (24)$$

c — некоторая постоянная. Функциональное уравнение (20) в переменных τ, y запишется следующим образом:

$$y(q\tau) = by(\tau) + c\tau^m. \quad (25)$$

Так как при отображении (24)

$$\begin{aligned} \tau^m &\mapsto b\tau^m, \\ \frac{y}{\tau^m} &\mapsto \frac{y}{\tau^m} + \frac{c}{b}, \end{aligned}$$

то, полагая

$$z = \frac{b}{c} \frac{y}{\tau^m}, \quad (26)$$

получим уравнение

$$z(q\tau) = z(\tau) + 1. \quad (27)$$

Общее решение уравнения (27) имеет вид

$$z(\tau) = \begin{cases} \frac{\ln \tau}{\ln |q|} + \omega_1\left(\frac{\ln \tau}{\ln |q|}\right), & \tau > 0, \\ \frac{\ln |\tau|}{\ln |q|} + \omega_2\left(\frac{\ln |\tau|}{\ln |q|}\right), & \tau < 0, \end{cases} \quad (28)$$

причем

$$\begin{aligned} \omega_1(\tau + 1) &= \omega_1(\tau), \\ \omega_2(\tau + 1) &= \omega_2(\tau), \quad \text{если } q > 0, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \omega_1(\tau + 1) &= \omega_2(\tau), \\ \omega_2(\tau + 1) &= \omega_1(\tau), \quad \text{если } q < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, общее решение уравнения (20) можно выписать, используя (23), (26) и (28).

§ 4. Характеризация элементарных функций

Функциональные уравнения можно использовать для характеристики различного рода специальных функций. Часто для этого используются так называемые функциональные уравнения со свободными переменными. При этом к решениям достаточно предъявлять минимальные требования, а именно, предполагать, что решения непрерывны. В таком случае, к примеру, уравнение $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ характеризует линейные функции, а уравнение $\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ – показательные. Немного более сложное уравнение

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) - \sqrt{1 - \varphi^2(x)} \cdot \sqrt{1 - \varphi^2(y)},$$

в качестве непрерывных решений имеет функции $\varphi(x) = \cos \beta x$ и только их [23]. Если “удалить” из этого уравнения свободную переменную, положив $y = x$, мы получим функциональное уравнение $\varphi(2x) = 2\varphi^2(x) - 1$, с которым мы уже неоднократно встречались, в частности, в §3.1 проведен достаточно подробный его анализ, где показано, что помимо косинуса, это уравнение имеет и много других непрерывных решений.

Можно использовать для характеристики функций более, чем одно функциональное уравнение. Так в [71] доказано, что :

существует одна и только одна функция $\varphi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, именно $\cos x$, удовлетворяющая условиям:

- а) непрерывность – $\varphi(x)$ непрерывна;
- б) периодичность – $\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x)$ и $\varphi(x + \alpha) \neq \varphi(x)$ при $0 < \alpha < 2\pi$;
- в) формула удвоения – $\varphi(2x) = 2\varphi^2(x) - 1$.

Еще одна возможность для характеристики функций заключается в сужении класса функций, в котором рассматриваются решения, например, рассматривать только гладкие функции, и воспользоваться результатами предыдущих двух параграфов. Именно такой подход реализуется в этом параграфе.

Функциональные уравнения, которые используются для характеристики функций, имеют, как правило, вид

$$x(f(t)) = g(x(t)), \quad (1)$$

а их исследование целесообразно проводить в окрестности неподвижных точек характеристического отображения

$$T : \begin{cases} t \mapsto f(t) \\ x \mapsto g(x) \end{cases}.$$

Мы рассмотрим более детально именно уравнение (1) в предположении, что функции f , g являются непрерывно дифференцируемыми (интересующие нас функции, конечно, должны быть таковыми), а отображение T имеет неподвижную точку (a, b) (т.е. $f(a) = a$, $g(b) = b$).

Положим $\lambda = \frac{df}{dt}|_{t=a}$, $\mu = \frac{dg}{dx}|_{x=b}$, и будем считать, что $\lambda, \mu > 0$. Если $\lambda < 1$, $\mu > 1$ или $\lambda > 1$, $\mu < 1$, то точка (a, b) является неподвижной точкой типа седло и через нее проходит единственное решение уравнения (1), а именно $x(t) \equiv b$. В силу того, что функциональные соотношения, которые могут характеризовать элементарные функции, удовлетворяются, как правило, однопараметрическими семействами функций, то можно утверждать, что уравнения наиболее простого вида, которые имеют своими решениями элементарные функции, не должны иметь неподвижных точек типа седло.

Поэтому будем предполагать, что либо $0 < \lambda, \mu < 1$, либо $\lambda, \mu > 1$, и, для определенности, пусть $f, g \in C^k$, $k > 1$, а $\frac{\ln \mu}{\ln \lambda} = \nu$ — целое число и $k \geq \nu + 1$.

В силу [58] существуют определенные в некоторой окрестности точки (a, b) решения $h_1(t), h_2(x)$ уравнений

$$\begin{aligned} h_1(f(t)) &= \lambda h_1(t), \\ h_2(g(x)) &= \mu h_2(x), \end{aligned} \quad (2)$$

такие, что $h_1(t), h_2(x) \in C^{k-1}$ и $h_1(a) = 0, h_2(b) = 0, h_1'(a) = 1, h_2'(b) = 1$.

В таком случае отображение T принимает вид

$$\begin{cases} h_1(t) \mapsto \lambda h_1(t) \\ h_2(x) \mapsto \mu h_2(x) \end{cases}$$

и, следовательно, общее решение уравнения (1) определяется соотношениями

$$\begin{cases} h_2(x(t)) = \omega\left(\frac{\ln h_1(t)}{\ln \lambda}\right) h_1^\nu(t), \\ x(t) = b + h_2^{-1}\left(\omega\left(\frac{\ln h_1(t)}{\ln \lambda}\right) h_1^\nu(t)\right), \end{cases} \quad (3)$$

где $\omega(t)$ — произвольная 1-периодическая функция.

Если функция $\omega(t)$ достаточное число раз дифференцируема, то p -ю производную решения $x(t)$ уравнения (1) при $p \leq \nu$ можно представить в виде

$$x^{(p)}(t) = h_1^{\nu-p}(t) \left(\nu(\nu-1) \dots (\nu-p+1) \omega + Q_p \right) \frac{h_1'^p}{h_2'} + \frac{h_1}{h_2'^p} R_p, \quad (4)$$

где Q_p — линейное выражение относительно $\omega', \dots, \omega^{(p)}$ и $Q_p(0, \dots, 0) = 0$, R_p — некоторый полином относительно $\omega, \omega', \dots, \omega^{(p)}, h_1', \dots, h_1^{(p)}, h_2, h_2', \dots, h_2^{(p)}$.

Поскольку $h_1(a) = 0$, то из (4) непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 1. Уравнение (1) в классе C^ν -функций имеет однопараметрическое семейство решений

$$x(t) = b + h_2^{-1}\left(c h_1^\nu(t)\right). \quad (5)$$

Для решений (5) имеем

$$x^{(\nu)}(t) = c\nu! \frac{h_1^{\nu}}{h_2^{\nu}} + \frac{h_1}{h_2^{\nu}} R,$$

где R — некоторый полином относительно $c, h_1, h_1', \dots, h_1^{(\nu)}, h_2', \dots, h_2^{(\nu)}$. Отсюда следует

$$x^{(\nu)}(a) = c\nu!$$

и имеет место такая теорема.

Теорема 2. Если ν — целое число, то произвольному $d > 0$ соответствует одно и только одно решение $x(t)$ уравнения (1) такое, что $x(a) = b, x^{(\nu)}(a) = d$, а именно $x(t) = b + h_2^{-1} \left(\frac{d}{\nu!} h_1^{(\nu)}(t) \right)$.

Теперь мы можем использовать полученные выше результаты для характеристики некоторых элементарных и специальных функций.

1. Функции $\cos \alpha t, \operatorname{ch} \alpha t$ удовлетворяют уравнению

$$x(2t) = 2x^2(t) - 1 \quad (6)$$

при произвольном α . Отображение

$$\begin{cases} t \mapsto 2t \\ x \mapsto 2x^2 - 1, \end{cases}$$

отвечающее этому уравнению, имеет две неподвижных точки $(0, 1)$ и $(0, -\frac{1}{2})$ типа узел. Все непрерывные решения уравнения (6) проходят через эти две точки плоскости (t, x) . Но через точку $(0, -\frac{1}{2})$ проходит единственное решение, для которого существует $x'(0)$, а именно $x(t) \equiv -\frac{1}{2}$; остальные непрерывные решения, удовлетворяющие условию $x(0) = -\frac{1}{2}$ (множество таких решений зависит от произвольной функции), как нетрудно доказать, не имеют $\lim_{t \rightarrow 0} x'(t)$.

Для неподвижной точки $(0, 1)$ $\lambda = 2$, $\mu = 4$ и, следовательно, $\nu = 2$. Поскольку вторая производная функции $\cos \alpha t$ при $-\infty < \alpha < +\infty$ и $t = 0$ пробегает значения от 0 до $-\infty$, а вторая производная функции $\operatorname{ch} \alpha t$ пробегает значения от 0 до $+\infty$, то, согласно теореме 2, функции $\cos \alpha t$ и $\operatorname{ch} \alpha t$ и только они являются решениями уравнения (6), которые имеют отличную от нуля вторую производную при $t = 0$.

Таким образом, $\cos t$ — это функция, которая является решением уравнения (6), для которого $x''(0) = -1$.

Аналогично, $\operatorname{ch} t$ — это функция, которая является решением уравнения (6), для которого $x''(0) = 1$.

2. Эллиптический косинус $\operatorname{cn} \alpha t$ удовлетворяет уравнению

$$x(2t) = \frac{2x^2(t)}{1 - k^2(1 - x^2(t))^2} - 1 \quad (7)$$

при произвольном α . Для отображения, которое отвечает этому уравнению, точка $(0, 1)$ является неподвижной и для нее $\nu = 2$. Поскольку вторая производная функции $\operatorname{cn} \alpha t$ при $-\infty < \alpha < +\infty$ и $t = 0$ пробегает значения от 0 до $-\infty$, то согласно теореме 2 функция $\operatorname{cn} \alpha t$ (при вещественных t) и только она будет решением уравнения (7), которое имеет отрицательную вторую производную при $t = 0$ и $x(0) = 1$.

Таким образом, $\operatorname{cn} \alpha t$ (при вещественных t) — это функция, которая является решением уравнения (7), для которого $x(0) = 1$, $x''(0) = -1$.

3. Функция $\operatorname{sn} \alpha t$ удовлетворяет уравнению

$$x(2t) = 2x(t)\sqrt{1 - x^2(t)}, \quad \text{где } t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \quad (8)$$

при произвольном α . Отображение, соответствующее этому уравнению, имеет три неподвижные точки — $(0, 0)$, $(0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ и $(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ типа узел. Через точку $(0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ проходит единственное решение,

для которого существует $x'(0)$, а именно $x(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; все другие непрерывные решения, удовлетворяющие условию $x(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, как нетрудно доказать, не имеют $\lim_{t \rightarrow 0} x'(t)$. Аналогично, через точку $(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ проходит единственное решение, для которого существует $x'(0)$, а именно $x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Для неподвижной точки $(0, 0)$ $\nu = 1$. Поскольку первая производная функции $\sin \alpha t$ при $-\infty < \alpha < +\infty$ и $t = 0$ пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$, то согласно теореме 2, функция $\sin \alpha t$ и только она будет решением уравнения (8), для которого существует отличная от нуля первая производная в точке $t = 0$.

Следовательно, $\sin t$ — это функция, которая является решением уравнения (8), удовлетворяющим условию $x'(0) = 1$.

4. Функция $\log_a t$ ($a > 0$) удовлетворяет уравнению

$$x(t^2) = 2x(t). \quad (9)$$

Соответствующее этому уравнению отображение имеет неподвижную точку $(1, 0)$, для которой $\nu = 1$. Все решения уравнения (9), определенные при $t > 0$, проходят через точку $(1, 0)$. Поскольку первая производная функции $\log_a t$ ($a > 0$) при $t = 1$ пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$, то, согласно теореме 2, функция $\log_a t$ ($a > 0$) и только она является решением уравнения (9), для которого существует первая производная в точке $t = 1$.

5. Функция a^t ($a > 0$) удовлетворяет уравнению

$$x(2t) = x^2(t). \quad (10)$$

Соответствующее этому уравнению отображение имеет две неподвижных точки — $(0, 0)$ и $(0, 1)$. Поскольку точка $(0, 0)$ является седлом, то через нее проходит единственное решение $x(t) = 0$.

Неподвижная точка $(0, 1)$ есть узел и для нее $\nu = 1$. Поскольку первая производная функции a^t ($a > 0$) при $t = 0$ пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$, то, согласно теореме 2, функция a^t ($a > 0$) и только она является решением уравнения (10), для которого существует отличная от нуля первая производная в точке $t = 0$.

§ 5. Уравнения с отклонениями аргумента, зависящими от неизвестной функции

Рассмотрим функциональные уравнения вида

$$x(f(x(t))) = g(x(t)), \quad (1)$$

где $t \in \mathbb{R}$, $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Это несколько экзотический класс уравнений: характеристическое отображение

$$S : \begin{cases} t \mapsto f(x), \\ x \mapsto g(x) \end{cases} \quad (2)$$

является вырожденным, вся плоскость отображается на одномерное (в “нормальной”, без кривых Пеано, ситуации) множество

$$\mathfrak{L} = \left\{ (t, x) : t = f(\tau), x = g(\tau), \tau \in \mathbb{R} \right\}.$$

Некоторые классы таких уравнений уже рассматривались нами ранее, и в §2.5 выписано, например, общее решение простейшего уравнения такого вида:

$$x(x(t)) = hx(t).$$

Под решением уравнения (1) будем понимать, как обычно, однозначные функции $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, обращающие (1) в тождество.

Если $x = \varphi(t)$ — решение уравнения (1), то его график

$$\Gamma_\varphi = \left\{ (t, x) : t = \tau, x = \varphi(\tau), \tau \in \mathbb{R} \right\}, \quad (3)$$

как мы знаем, инвариантен относительно характеристического отображения : $S\Gamma_\varphi \subset \Gamma_\varphi$, и, кроме того, по определению, $S\Gamma_\varphi \subset \mathfrak{L}$.

Из (2) следует, что

$$S\Gamma_\varphi = \left\{ (t, x) : t = f(\varphi(\tau)), x = g(\varphi(\tau)), \tau \in \mathbb{R} \right\},$$

так что

$$S\Gamma_\varphi = \{(t, x) : t = f(\xi), x = g(\xi), \xi \in V\}, \quad (4)$$

где

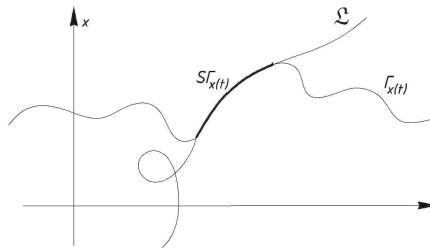
$$V = V_\varphi = \{\xi = \varphi(t), t \in \mathbb{R}\} \quad (5)$$

— множество значений, которые принимает решение $x = \varphi(t)$. Так как $\Gamma_\varphi \supset S\Gamma_\varphi$, то информация о графике решения, содержащаяся в (4), позволяет, по крайней мере, частично восстановить саму функцию :

$$\varphi(t) = g(\tau) \quad \text{при } t = f(\tau) \quad \text{и } \tau \in V. \quad (6)$$

В том случае, когда $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — взаимнооднозначное отображение, т.е. существует (однозначное) отображение $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, то из (6) вытекает, что

$$\varphi(t) = g(f^{-1}(t)) \quad \text{при } t \in f(V). \quad (7)$$



Согласно (5) $\varphi(t) \in V$ при всех $t \in \mathbb{R}$, так что

$$\varphi(t) \in V \quad \text{при } t \in \mathbb{R} \setminus f(V). \quad (8)$$

Никаких других условий на функцию $\varphi(t)$, помимо (6) и (8), уравнение (1), как легко проверить, не накладывает.

Остается выяснить, каким условиям удовлетворяет множество V , фигурирующее в (5) – (8).

Очевидно,

$$g(V) \subset V, \quad (9)$$

так как $S\Gamma_\varphi \subset \Gamma_\varphi$, а V – это проекция Γ_φ на ось x -ов.

Ввиду однозначности функции $\varphi(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, каждая прямая $t = \text{const}$ имеет не более одной общей точки с множеством $S\Gamma_\varphi$. Следовательно,

$$\text{если } g(\tau') \neq g(\tau'') \text{ при } \tau', \tau'' \in V, \text{ тогда и } f(\tau') \neq f(\tau''). \quad (10)$$

Итак, если $x(t)$ – решение уравнения (1), то существует множество $V \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям (9), (10), а само решение при этом удовлетворяет условиям (6), (8).

Легко убедиться и в том, что всякая функция $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая этим условиям, является решением уравнения (1).

В частном случае, когда $f(x) \equiv x$, т.е. рассматривается уравнение

$$x(x(t)) = g(x(t)), \quad (11)$$

условие (10), конечно, выполняется, так что общее решение уравнения (11) имеет вид

$$x(t) = \begin{cases} g(t), & \text{когда } t \in V, \\ p(t), & \text{когда } t \in \mathbb{R} \setminus V, \end{cases} \quad \text{где } p(t) - \text{произвольная функция с } p(t) \in V, \quad (12)$$

V – произвольное множество, удовлетворяющее (9).

Если $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывное кусочно монотонное отображение, т.е., ось t разбивается на конечное (или даже счетное) число (непересекающихся) интервалов I_1, I_2, \dots, I_m , так что $\bigcup_{s=1}^m I_s$ плотно на \mathbb{R} и на каждом интервале I_s функция f монотонна, то тогда мы имеем m интервалов $J_s = f(I_s)$, $s = 1, 2, \dots, m$, и m (обратных к f) однозначных отображений $f_s^{-1} : J_s \rightarrow I_s$, $s = 1, \dots, m$. Интервалы J_s , $s = 1, 2, \dots, m$, конечно, могут попарно

пересекаться (что всегда и происходит с соседствующими), и более того, могут вообще совпадать (например, для периодической функции).

В таком случае каждый интервал $V \subset \mathbb{R}$, обладающий свойствами: $g(V) \subset V$ и $V \subset I_{s'}$ для некоторого s' , $1 \leq s' \leq m$, задает семейство решений уравнения (1); каждая непрерывная функция, имеющая вид

$$x(t) = \begin{cases} gf_{s'}^{-1}(t), & \text{когда } t \in f(V), \\ p(t), & \text{когда } t \in \mathbb{R} \setminus f(V), \end{cases} \quad \text{где } p(t) — \quad (13) \\ \text{произвольная функция с } p(t) \in V,$$

является решением уравнения (1).

Из сказанного следует, что построение решений уравнения (1) сводится к выделению множеств $V \subset \mathbb{R}$, расположенных в области взаимнооднозначности отображения $\tau \rightarrow f(\tau)$ и инвариантных относительно отображения $\tau \rightarrow g(\tau)$; если такое множество V выделено, то на множестве $f(V)$ решение уравнения (1) определяется единственным образом, а на множестве $\mathbb{R} \setminus f(V)$ решение может принимать произвольные значения из V .

Следует отметить, что в приведенных выше рассуждениях о решениях уравнения (1) не очень существенно, что уравнение рассматривается на вещественной прямой; пространство, вообще говоря, может быть произвольным.

Рассмотрим несколько простых примеров, иллюстрирующих некоторые ситуации, которые могут встретиться для уравнений вида (1). В этих примерах f, g — непрерывные функции и решения предполагаются определенными и непрерывными при всех $t \in \mathbb{R}$. При этих условиях S — непрерывное отображение, график любого решения — связное множество и, следовательно, V — связное множество вещественной прямой, т.е. V — интервал (открытый, полуоткрытый или замкнутый).

1. $x(x(t)) = -ax(t) + b, \quad a > 1.$

В данном случае $g(\tau) = -a\tau + b$; при $a > 1$ отображение $\tau \rightarrow -a\tau + b$ имеет единственный инвариантный интервал — прямую \mathbb{R} (помимо вырожденного интервала — неподвижной точки $\tau = b/(a+1)$). Таким образом, уравнение имеет, помимо стационарного решения $x(t) \equiv b/(a+1)$, еще только одно непрерывное решение

$$x(t) = -at + b.$$

$$2. \quad x(x(t)) = x^2(t).$$

Здесь $g(\tau) = \tau^2$. Отображение $\tau \rightarrow \tau^2$ имеет одну отталкивающую неподвижную точку $\tau = 1$ и две притягивающие — $\tau = 0$ и $\tau = +\infty$. Поэтому интервал $V = (c, d)$ инвариантен, если выполнено одно из условий:

- а) $c \geq 1, d = \infty$,
- б) $c \leq 0, d = \infty$,
- в) $-1 \leq c \leq 0, c^2 \leq d \leq 1$.

Таким образом, всякое непрерывное решение уравнения имеет вид

$$x(t) = \begin{cases} t^2 & \text{при } t \in (c, d), \\ p(t) & \text{при } t \in \mathbb{R} \setminus (c, d), \end{cases}$$

c, d удовлетворяют одному из условий а) - в), $p(t)$ — произвольная непрерывная функция такая, что $c \leq p(t) \leq d$ и $p(c) = c^2, p(d) = d^2$.

$$3. \quad x(x^2(t)) = x(t).$$

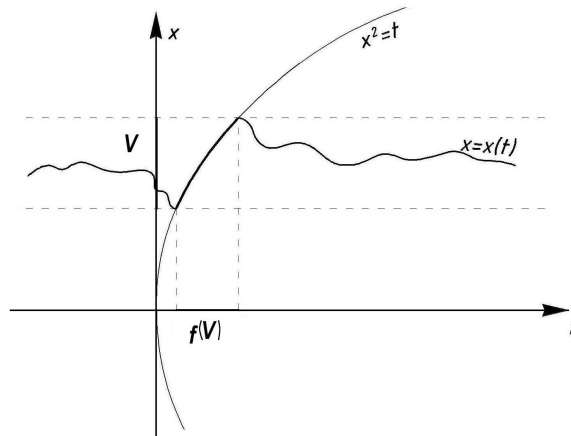
Для этого уравнения $f(\tau) = \tau^2$ и отображение $f: \tau \rightarrow \tau^2$ уже не является взаимнооднозначным на \mathbb{R} , но взаимнооднозначно на \mathbb{R}^+ и на \mathbb{R}^- . Так как $f(\mathbb{R}^\pm) = \mathbb{R}^+$, то мы имеем два взаимнооднозначных отображения $f_+^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ и $f_-^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^-$, при этом $f_\pm^{-1}(\tau) = \pm\sqrt{\tau}$. Чтобы описать все решения уравнения, необходимо рассмотреть обе возможности.

В данном случае $g(\tau) = \tau$ и каждый интервал $V \subset \mathbb{R}$ инвариантен при отображении $g: \tau \mapsto \tau$. Как мы знаем, интервал V должен принадлежать области значений отображения f^{-1} , а это \mathbb{R}^+ для f_+^{-1} и \mathbb{R}^- для f_-^{-1} . Следовательно, в качестве интервала V можно взять

любой интервал из \mathbb{R}^+ для f_+^{-1} или любой интервал из \mathbb{R}^- для f_-^{-1} и, согласно (13), непрерывные функции вида

$$x_{\pm}(t) = \begin{cases} \pm\sqrt{t}, & \text{когда } t \in f(V), \quad V \subset \mathbb{R}^{\pm}, \\ p(t), & \text{когда } t \in \mathbb{R} \setminus f(V), \quad \text{где } p(t) - \\ & \text{произвольная функция с } p(t) \in V, \end{cases}$$

и только такие функции будут решениями уравнения.



4. $x(x^2(t)) = x(t) + b, \quad b > 0.$

Здесь, как и в предыдущем примере, $f(\tau) = \tau^2$, так что мы имеем два взаимнооднозначных отображения $f_+^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ и $f_-^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^-$ с $f_{\pm}^{-1}(\tau) = \pm\sqrt{\tau}$. При отображении $g: \tau \mapsto \tau + b$ инвариантными являются интервалы $V_c = (c, \infty)$ с любым $c \in \mathbb{R}: g(V_c) = V_{c+b} \subset V_c$. Однако $V_c \subset \mathbb{R}^+$ только при $c > 0$, а $V_c \not\subset \mathbb{R}^-$ при любом $c \in \mathbb{R}$. Следовательно, решениями уравнения являются непрерывные функции, представимые в виде

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{t} + b & \text{при } t \geq c^2, \text{ где } c \geq 0 - \text{ произвольная константа,} \\ p(t) & \text{при } t \leq c^2, \text{ где } p(t) \geq c - \text{ произвольная функция.} \end{cases}$$

5. $x(x(t)) = \sin x(t).$

В этом случае $g(\tau) = \sin \tau$; отображение $g : \tau \mapsto \sin \tau$ имеет притягивающую неподвижную точку $x = 0$; $g(\tau) < \tau$ при $\tau > 0$ и $g(\tau) > \tau$ при $\tau < 0$, так что любой интервал $V = (c, d)$, $c \leq 0 \leq d$, инвариантен относительно отображения g . Поэтому решениями этого уравнения являются непрерывные функции, представимые в виде

$$x(t) = \begin{cases} \sin t & \text{при } t \in (c, d), \text{ где } c \leq 0 \leq d - \text{ произвольные константы,} \\ p(t) & \text{при } t \notin (c, d), \text{ где } p(t) - \text{ произвольная функция} \\ & \text{с } p(t) \in [c, d]. \end{cases}$$

$$6. \quad x(\sin x(t)) = ax(t), \quad a > 0.$$

Для этого уравнения $f(\tau) = \sin \tau$; отображение $f : \tau \mapsto \sin \tau$ является взаимнооднозначным на интервалах $I_k = [k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и $J = f(I_k) = [-1, 1]$ при всех k . Следовательно, многозначное отображение f^{-1} , определённое только(!) на интервале $[-1, 1]$, распадается на однозначные отображения $f_k^{-1} : J \rightarrow I_k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, так что $f_k^{-1}(\tau) = \arcsin \tau + k\pi$ при чётных k и $f_k^{-1}(\tau) = -\arcsin \tau + (k+1)\pi$ при нечётных k .

Свойства уравнения существенно зависят от параметра a .

Если $a = 1$, то $g(\tau) = \tau$ и, следовательно, любой интервал $V \subset \mathbb{R}$ инвариантен при отображении g . А если интервал V является множеством значений некоторого решения, то он должен лежать целиком в одном из интервалов I_k . Отсюда можно сделать вывод, что каждому k и любому интервалу $V \subset I_k$ отвечает множество непрерывных решений

$$x_k(t) = \begin{cases} \arcsin t + k\pi & \text{при } t \in f(V), V \subset I_k, k \text{ чётное,} \\ -\arcsin t + (k+1)\pi & \text{при } t \in f(V), V \subset I_k, k \text{ нечётное,} \\ p(t) & \text{при } t \notin f(V), p(t) - \text{ произволь-} \\ & \text{ная функция с } p(t) \in V. \end{cases}$$

Если $a < 1$, то отображение $g : \tau \mapsto a\tau$ имеет притягивающую неподвижную точку $\tau = 0$, которая притягивает все точки из \mathbb{R} , и любой интервал V , замыкание которого содержит точку $\tau = 0$, (и только такой) является инвариантным. А из всех интервалов I_k точку $\tau = 0$ содержит только интервал I_0 . Следовательно, в этом случае все решения представимы в виде

$$x_k(t) = \begin{cases} \arcsin t & \text{при } t \in f(V), \quad V = [c, d], \\ & -\pi/2 \leq c \leq 0 \leq d \leq \pi/2, \\ p(t) & \text{при } t \notin f(V), \quad \text{где } p(t) \text{ — произвольная} \\ & \text{функция с } p(t) \in [c, d]. \end{cases}$$

Если $a > 1$, то для отображения $g : \tau \mapsto a\tau$ неподвижная точка $\tau = 0$ отталкивающая и инвариантными при отображении g будут только интервалы $(-\infty, d]$ при $d \leq 0$ и $[c, \infty)$ при $c \geq 0$. Следовательно, ни один из интервалов I_k не может содержать интервал, инвариантный относительно отображения g , а это означает, что при $a > 1$ уравнение не имеет непрерывных решений, определенных при всех $t \in \mathbb{R}$ (последнее существенно!), помимо, конечно, тривиального $x(t) \equiv 0$.

Глава 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО- ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Наряду с функциональными уравнениями, содержащими операцию сдвига аргумента, и дифференциальными уравнениями, содержащими операцию дифференцирования, существует широкий класс уравнений, содержащих обе эти операции. Такие уравнения имеют несколько названий, из которых более употребительно — дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Мы будем их называть дифференциально-функциональными уравнениями.

Дифференциально-функциональные уравнения появились в начале XVIII века примерно тогда же, когда появились дифференциальные и функциональные уравнения, но они начали активно изучаться только в 40-50-е годы XX столетия. В начале 70-х мы уже имели целый ряд монографий, в частности [11, 33, 43, 75]. Однако усилия направлялись в основном на отыскание сходства таких уравнений с уравнениями дифференциальными (нам хотелось бы это подчеркнуть), старались перенести известные результаты теории дифференциальных уравнений на дифференциально-функциональные уравнения. Вместе с тем понятно, что дифференциально-функциональные уравнения должны обладать рядом свойств, присущих именно функциональным уравнениям.

§ 1. Вполне интегрируемые уравнения

Имеется достаточно широкий класс дифференциально-функциональных уравнений, которые непосредственно приводятся к функциональным уравнениям. Такими уравнениями мы сейчас и займемся. Как и раньше, наряду с уравнениями можно было бы рассматривать и системы уравнений, но мы не будем этого делать.

Каждому квазилинейному дифференциально-функциональному уравнению

$$A(t, x(t), x(f(t))) + B(t, x(t), x(f(t))) x'(t) + C(t, x(t), x(f(t))) f'(t) x'(f(t)) = 0, \quad (1)$$

где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B, C: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, можно поставить в соответствие уравнение Пфаффа

$$A(t, u, v) dt + B(t, u, v) du + C(t, u, v) dv = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) может оказаться вполне интегрируемым. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$A \left(\frac{\partial B}{\partial v} - \frac{\partial C}{\partial u} \right) + B \left(\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial v} \right) + C \left(\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial t} \right) = 0. \quad (3)$$

Дифференциально-функциональное уравнение (1), которому соответствует вполне интегрируемое уравнение Пфаффа, будем называть вполне интегрируемым.

Вполне интегрируемое уравнение (1) приводится к однопараметрическому семейству функциональных уравнений

$$\Phi(t, x(t), x(f(t))) = c,$$

которые возникают при „интегрировании” уравнения (1).

Рассмотрим пример

$$x'(qt) = bx'(t). \quad (4)$$

Интегрируя это уравнение, получаем семейство функциональных уравнений

$$x(qt) = qbx(t) + c, \quad (5)$$

c — постоянная интегрирования. Общее решение уравнения (5) есть

$$x(t) = \frac{c}{1 - qb} + \begin{cases} t^\mu \omega_1\left(\frac{\ln t}{\ln |q|}\right), & \text{если } t > 0, \\ |t|^\mu \omega_2\left(\frac{\ln |t|}{\ln |q|}\right), & \text{если } t < 0, \end{cases} \quad (6)$$

где $\mu = 1 + \frac{\ln |b|}{\ln |q|}$, ω_1, ω_2 — произвольные функции, удовлетворяющие условиям (8) из § 1 главы 2.

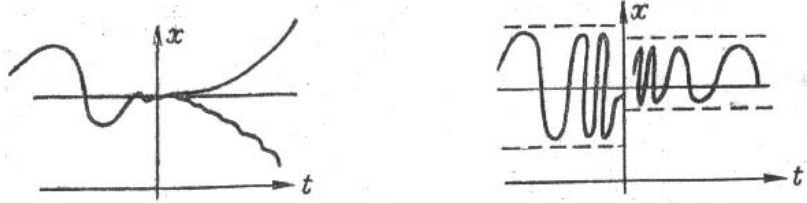
Чтобы получить решения дифференциально-функционального уравнения (4), принадлежащие, например, классу C^k , следует выделить из (6) C^k -функции. Функция $x(t)$, представимая в виде (6), принадлежит классу C^k при $t \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\omega_1, \omega_2 \in C^k$.

В зависимости от μ решения уравнения (4) ведут себя следующим образом:

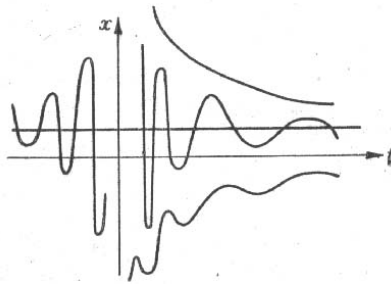
1) $\mu > 0$. Любое решение $x(t)$ имеет предел при $t \rightarrow 0$. Решения, для которых $x(0) = x_0$, имеют вид

$$x(t) = x_0 + \begin{cases} t^\mu \omega_1\left(\frac{\ln t}{\ln |q|}\right), & t > 0, \\ |t|^\mu \omega_2\left(\frac{\ln |t|}{\ln |q|}\right), & t < 0. \end{cases}$$

2) $\mu = 0$. Существует однопараметрическое семейство решений, именно $x(t) = \text{const}$, которые имеют предел при $t \rightarrow 0$. Для остальных решений $\lim_{t \rightarrow 0} x(t)$ не существует, эти решения колеблются в некоторых конечных пределах.



3) $\mu < 0$. Имеется однопараметрическое семейство ограниченных решений $x(t) = \text{const}$. Остальные решения при $t \rightarrow 0$ либо стремятся к $+\infty$ или к $-\infty$, либо колеблются около решения $x(t) = \text{const}$ с неограниченно возрастающей амплитудой.



Возвратимся к дифференциально-функциональному уравнению (1). Если $A \equiv 0$ и B, C не зависят от t , условие (3) выполнено, и, следовательно, уравнение (1) является вполне интегрируемым. Предположим, кроме того, что сдвиг аргумента $t \mapsto f(t)$ является линейным $f(t) = qt + b$. Уравнение (1) переписется тогда так:

$$P(x(t), x(qt + b))x'(t) + Q(x(t), x(qt + b))x'(qt + b) = 0. \quad (7)$$

Исследование уравнений вида (7) сводится к исследованию однопараметрического семейства функциональных уравнений. Функциональные уравнения выписываются в явном виде, если известен

интегрирующий множитель уравнения Пфаффа, соответствующего уравнению (7).

Можно было бы провести достаточно полный качественный анализ уравнения (7). Однако этого мы здесь делать не будем. Ряд вопросов о поведении решений уравнения (7), когда отклонение аргумента постоянно, т. е. $q = 1$, рассмотрен в [18, 19]. Исследование уравнения (7) при $b = 0$ проводилось в [50, 69].

Уравнение (4), которое рассматривалось выше, есть линейное уравнение вида (7). Рассмотрим еще один пример нелинейного уравнения, на котором видно, как можно проводить качественное исследование решений вполне интегрируемых уравнений.

Уравнение

$$x'(t+a) = [b + cx(t)]x'(t), \quad a, b, c > 0, \quad (8)$$

является вполне интегрируемым уравнением. Интегрируя его, получаем семейство функциональных уравнений

$$x'(t+a) = bx(t) + \frac{c}{2}x^2(t) + \alpha, \quad (9)$$

α — произвольная постоянная.

При отображении

$$x \mapsto \alpha + bx + \frac{c}{2}x^2 \quad (10)$$

прямая \mathbb{R} переходит в полупрямую $\mathbb{R}_\beta^+ = \{x \geq \beta\}$, $\beta = \alpha - \frac{b^2}{2c}$. Следовательно, характеристическое отображение

$$\begin{cases} t \mapsto t + a, \\ x \mapsto \alpha + bx + \frac{c}{2}x^2 \end{cases}$$

отображает плоскость $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в полуплоскость $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_\beta^+$. Если $x(t)$ — решение уравнения (9), то $x(t) \geq \beta$ при всех t , при которых решение определено.

Если $\alpha \leq \frac{(b-1)^2 - 1}{2c}$, то для любой точки $x' \in \mathbb{R}_\beta^+$ существует точка $x'' \in \mathbb{R}_\beta^+$, переходящая в x' при отображении (10). В этом случае любое решение уравнения (9) может быть продолжено на все $t \in \mathbb{R}$ (и притом некоторые решения могут быть продолжены при убывании t не единственным способом ввиду неоднозначности отображения, обратного (10)).

Если $\alpha > \frac{(b-1)^2 - 1}{2c}$, то уравнение (9) имеет решения, непродолжимые при убывании t .

Если $\alpha > \frac{(b-1)^2}{2c}$, то все решения уравнения (9) непродолжимы на достаточно малые t . Это следует из того, что для любого $x' \in \mathbb{R}_\beta^+$ найдется $m > 0$ такое, что не существует точка $x'' \in \mathbb{R}$, которая при отображении (10) перешла бы в x' за m шагов.

Отметим, что постоянная интегрирования α , входящая в функциональное уравнение (9), может быть найдена по решению $x(t)$ уравнения (8), если это решение известно в каких-либо двух точках t_0 и $t_0 + a$: $\alpha = x(t_0 + a) - bx(t_0) - \frac{c}{2}x^2(t_0)$. Такая информация о решении имеется, когда для уравнения (8) ставится задача Коши:

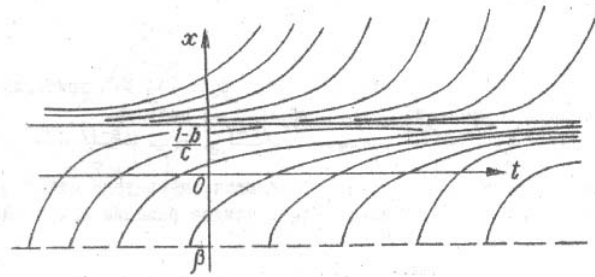
решение уравнения (8) задается на начальном множестве $[t_0, t_0 + a]$ и требуется найти это решение при остальных t , при которых оно существует.

Таким образом, если

$$x(t_0 + a) > bx(t_0) + \frac{c}{2}x^2(t_0) + \frac{(b-1)^2}{2c},$$

то $x(t)$ нельзя продолжить на достаточно малые t .

Если $\alpha = \frac{(b-1)^2}{2c}$, отображение (10) имеет одну неподвижную точку $x_0 = \frac{1-b}{c}$ (типа „седло-узел”).



Решения, для которых $x(t) \geq \frac{1-b}{c}$, продолжимы в обе стороны. Решения, для которых $x(t) < \frac{1-b}{c}$ хотя бы при некоторых t , непродолжимы на малые t (продолжение возможно, пока $x(t) \geq \beta$).

Если $\alpha < \frac{(b-1)^2}{2c}$, то отображение (10) имеет две неподвижные точки. Обозначим γ бóльшую из них:

$$\gamma = \frac{-(b-1) + \sqrt{(b-1)^2 - 2\alpha c}}{c}.$$

Положим $y = x - \gamma$. При отображении (10)

$$y \mapsto \lambda y + \frac{c}{2}y^2, \quad (11)$$

где $\lambda = b + \gamma c$. Неподвижные точки отображения (11) —

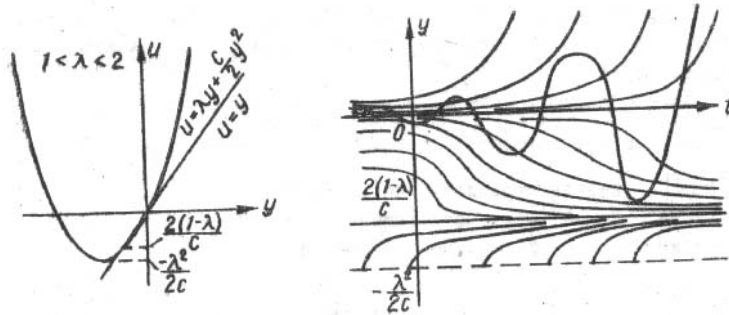
$$y_1 = 0 \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{2(1-\lambda)}{c}.$$

Так как $y_1 > y_2$ и $c > 0$, то $\lambda > 1$.

Если $\lambda < 2$, т. е.

$$\alpha > \frac{(b-1)^2 - 1}{2c},$$

то, как уже отмечалось, уравнение (9) имеет непродолжимые решения.

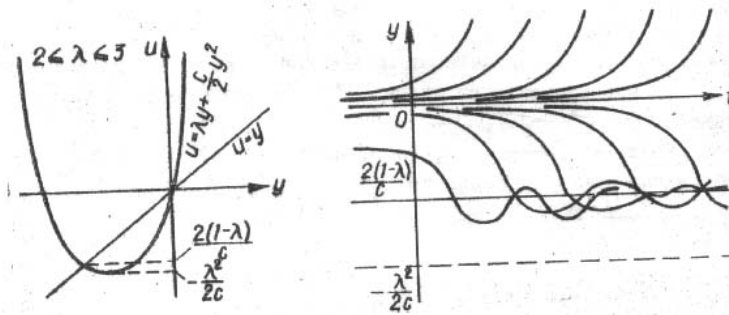


Точка $y_1 = 0$ отталкивающая, точка $y_2 = \frac{2(1-\lambda)}{c}$ притягивающая. Решения ведут себя, как показано на рисунке.

Если $2 \leq \lambda \leq 3$, т. е.

$$\frac{(b-1)^2 - 1}{2c} \geq \alpha \geq \frac{(b-1)^2 - 4}{2c},$$

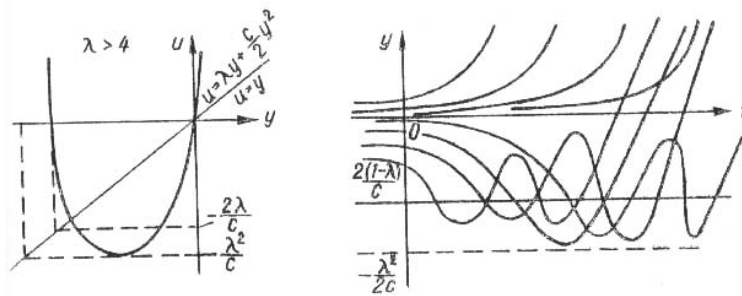
то неподвижные точки y_1 и y_2 являются опять-таки отталкивающей и притягивающей, однако теперь каждое решение может быть продолжено на все t .



Если $\lambda > 3$, т. е. $\alpha < \frac{(b-1)^2 - 2^2}{2c}$, то обе неподвижные точки отображения (11) являются отталкивающими. Существуют решения, для которых продолжение влево неоднозначно: $y(t)$ можно

продолжить так, чтобы или $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$, или $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = -\frac{2(1-\lambda)}{c}$, или $y(t)$ при $t \rightarrow -\infty$ будет колебаться между $y = 0$ и $y = -\frac{\lambda^2}{2c}$.

Если $\lambda > 4$, т. е. $\alpha < (b-1)^2 - 3^2$, то уравнение (9) не имеет ограниченных решений, кроме $y(t) \equiv 0$ и $y(t) \equiv \frac{2(1-\lambda)}{c}$.



Используя теоремы о линеаризации отображения, можно получить асимптотическое представление решений при $t \rightarrow \pm\infty$.

При некоторых значениях λ , например при $\lambda = 2, 4$, решения уравнения (9) или, что то же самое, уравнения

$$y(t+a) = \lambda y(t) + \frac{c}{2} y^2(t), \quad (12)$$

выписываются в явном виде. Так, если $\lambda = 2$, то при отображении

$$\begin{cases} t \mapsto t+a, \\ y \mapsto 2y + \frac{c}{2} y^2 \end{cases} \quad (13)$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{c}{2}y + 1 &\mapsto \left(\frac{c}{2}y + 1\right)^2, \\ 2^{t/a} &\mapsto 2 \cdot 2^{t/a} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\varphi(t, y) = \frac{\ln\left(\frac{c}{2}y + 1\right)}{2^{t/a}}, \quad \frac{c}{2}y + 1 > 0,$$

является инвариантом отображения (13). Таким образом, общее решение уравнения (12) при $\lambda = 2$ имеет вид

$$y(t) = \frac{2}{c} \left(-1 + e^{2^{t/a}\omega(t/a)} \right), \quad (14)$$

$\omega(t)$ — произвольная периодическая функция периода 1.

Из (14) следует, что:

- 1) $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$;
- 2) $y(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, если $\omega > 0$;
- 3) $y(t) \rightarrow -\frac{2}{c}$ при $t \rightarrow +\infty$, если $\omega < 0$;

4) $y(t)$ колеблется с неограниченно возрастающей амплитудой, если существуют t', t'' такие, что $\omega(t') > 0$, $\omega(t'') \leq 0$.

В рассмотренных выше уравнениях сдвиг аргумента является линейным. Интересные возможности появляются в том случае, когда сдвиг аргумента $t \mapsto f(t)$ нелинейный.

Рассмотрим, например, уравнение

$$tx'(2t^2 - 1) = x'(t), \quad (15)$$

которое после интегрирования сводится к семейству функциональных уравнений

$$x(2t^2 - 1) = 4x(t) + c. \quad (16)$$

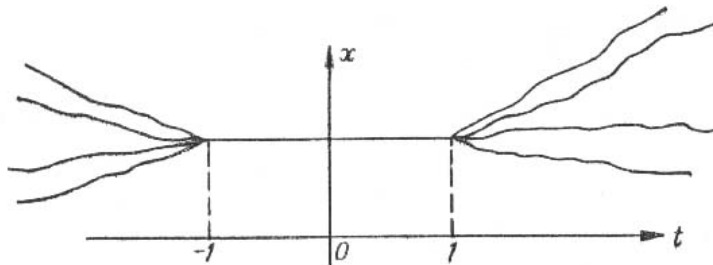
Уравнение (16) при каждом c и $-1 \leq t \leq 1$ имеет единственное непрерывное решение $x(t) = x_0 = \text{const}$.

При $|t| \geq 1$ имеется много решений. Характеристическое отображение, соответствующее уравнению (16), можно представить в виде

$$\begin{cases} \text{Arch} t \mapsto 2\text{Arch} t, \\ x - x_0 \mapsto 4(x - x_0). \end{cases}$$

Это отображение имеет инвариант $\frac{x - x_0}{(\text{Arch} t)^2}$. Следовательно, при $t > 1$

$$x(t) = x_0 + \ln^2(t + \sqrt{t^2 - 1}) \cdot \omega \left(\frac{\ln \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})}{\ln 2} \right)$$



и, вообще, каждое C^1 -решение уравнения (15), для которого $x(0) = x_0$, может быть представлено таким образом:

$$x(t) = x_0 + \begin{cases} \left(\ln \left(|t| + \sqrt{t^2 - 1} \right) \right)^2 \omega \left(\frac{\ln \ln \left(|t| + \sqrt{t^2 - 1} \right)}{\ln 2} \right), & t < -1, \\ 0, & -1 \leq t \leq 1, \\ \left(\ln \left(t + \sqrt{t^2 - 1} \right) \right)^2 \omega \left(\frac{\ln \ln \left(t + \sqrt{t^2 - 1} \right)}{\ln 2} \right), & t > 1, \end{cases}$$

где ω — произвольная периодическая функция периода 1 класса C^1 .

Наряду с уравнением (1) можно было бы рассмотреть более общее уравнение, когда сдвиг аргумента зависит и от неизвестной функции. Среди таких уравнений также можно выделить вполне интегрируемые. Например, дифференциально-функциональному уравнению

$$P(x(t), x(f(x(t)))) + Q(x(t), x(f(x(t)))) \cdot x'(f(x(t))) = 0 \quad (17)$$

соответствует вполне интегрируемое уравнение Пфаффа

$$f'(u)P(u, v)du + Q(u, v)dv = 0.$$

Таким образом, решение уравнения (17) сводится к решению семейства функциональных уравнений

$$\Phi(x(t), x(f(x(t)))) = c.$$

Рассмотрим, к примеру, уравнение

$$x'(x(t)) = h. \quad (18)$$

Интегрируя (18), получаем функциональное уравнение

$$x(x(t)) = hx(t) + c, \quad (19)$$

c — произвольная постоянная. Если положить

$$x(t) = y\left(t + \frac{c}{h-1}\right) - \frac{c}{h-1}, \quad (20)$$

уравнение (19) примет вид

$$y(y(t)) = hy(t) \quad (21)$$

(преобразование (20) следует из замены переменных t, x , преобразующей характеристическое отображение уравнения (16) в характеристическое отображение уравнения (21)).

Уравнение (21) рассматривалось в § 5 главы 2, где выписано также его общее решение (стр. 86). Следовательно, можно выписать и общее решение уравнения (19):

$$x(t) = t_0 + \begin{cases} p_1(t), & p_1 - \text{произвольная, но } \alpha \leq p_1 \leq \beta \\ & \text{при } t < \alpha + t_0, \\ ht, & \text{при } \alpha + t_0 \leq t \leq \beta + t_0, \\ p_2(t), & p_2 - \text{произвольная, но } \alpha \leq p_2 \leq \beta \\ & \text{при } t > \beta + t_0, \end{cases} \quad (22)$$

$$t_0 = -\frac{c}{h-1}.$$

Всякое C^1 -решение уравнения (18) имеет вид (22), где t_0 — произвольная постоянная, α, β — произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям (17), стр. 86, p_1, p_2 — произвольные C^1 -функции, лежащие в полосе $[\alpha, \beta]$ и удовлетворяющие в точках $t_1 = \alpha + t_0, t_2 = \beta + t_0$ условиям согласования:

$$\lim_{t \rightarrow t_i} p_i(t) = ht_i, \quad \lim_{t \rightarrow t_i} p_i'(t) = h, \quad i = 1, 2.$$

§ 2. Линейные дифференциально-функциональные уравнения

Рассмотрим линейное дифференциально-функциональное уравнение

$$a(t)x'(f(t)) + b(t)x'(t) + c(t)x(f(t)) + d(t)x(t) = 0 \quad (1)$$

в случае, когда отклонение аргумента $t - f(t)$ обращается в ноль в некоторой точке, например $t = 0$. Будем предполагать, что функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, $f(t)$ являются аналитическими в некоторой окрестности этой точки.

Мы построим общее решение уравнения (1). Это решение, вообще говоря, будет определено лишь в окрестности $t = 0$.

Если $f'(0) = q \neq 0, \pm 1$, то в окрестности точки $t = 0$ существует аналитическая функция $h(t)$, удовлетворяющая уравнению Шредера $h(f(t)) = qh(t)$ и такая, что $h'(0) = 1$ (глава 2, § 4). Полагая $x(t) = y(h(t))$, $\tau = h(t)$, уравнение (1) можно представить в виде

$$\tilde{a}(\tau)y'(q\tau) + \tilde{b}(\tau)y'(\tau) + \tilde{c}(\tau)y'(q\tau) + \tilde{d}(\tau)y(\tau) = 0.$$

Если рассматривать окрестность $t = 0$ и $\tilde{a}(0) \neq 0$, то коэффициент при $y'(q\tau)$ можно считать постоянным.

Учитывая это, в дальнейшем достаточно ограничиться изучением уравнения

$$qx'(qt) + b(t)x'(t) + c(t)x(qt) + d(t)x(t) = 0. \quad (2)$$

Вид решений уравнения (2) существенно зависит от значений q , $b_0 = b(t)|_{t=0}$ и $\mu = \frac{\ln |b_0|}{\ln |q|}$. Основной результат о представлении решений можно сформулировать следующим образом.

Теорема. Если $q^m \neq -b_0$, $|q|^m |b_0| \neq 1$ при $m = 0, 1, 2, \dots$, то в некоторой окрестности U точки $t = 0$ существуют:

- 1) аналитическая функция $p(t)$, $p(0) = 1$;
- 2) линейный оператор $L(\omega): C_U^k \rightarrow C_U^k$, $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$, а (C_U^a — пространство аналитических в U функций), $L(0) = 0$; такие, что общее решение уравнения (2) может быть представлено в виде

$$x(t) = \alpha p(t) + \begin{cases} t^\mu L \left[\omega_1 \left(\frac{\ln t}{\ln |q|} \right) \right], & t > 0, \\ |t|^\mu L \left[\omega_2 \left(\frac{\ln |t|}{\ln |q|} \right) \right], & t < 0, \end{cases} \quad (3)$$

где α — произвольная постоянная, ω_1, ω_2 — произвольные периодические C^1 -функции, причем

- 1) $\omega_1(t+1) = \omega_1(t)$,
 $\omega_2(t+1) = \omega_2(t)$, если $q > 0$, $b_0 < 0$,
- 2) $\omega_2(t+1) = -\omega_1(t)$,
 $\omega_2(t+1) = -\omega_2(t)$, если $q > 0$, $b_0 > 0$,
- 3) $\omega_2(t+1) = \omega_1(t)$,
 $\omega_1(t+1) = \omega_2(t)$, если $q < 0$, $b_0 < 0$,
- 4) $\omega_2(t+1) = -\omega_1(t)$,
 $\omega_1(t+1) = -\omega_2(t)$, если $q < 0$, $b_0 > 0$.

Условия (4) представляют собой обычные условия, которым должны удовлетворять произвольные периодические функции.

В том случае, когда $q^m = -b_0$ при некотором $m \geq 0$, общее решение уравнения (2) также имеет вид (3), однако функция $p(t)$

будет несколько иной: $p(t) = p_1(t) + t^m \ln |t| p_2(t)$, где $p_1(t)$, $p_2(t)$ — аналитические функции и $p_1(0) = 1$.

Если при некотором $m \geq 0$ $|q|^m |b_0| = 1$ (т. е. $\mu = -m$), то $L(\omega) = L_0(\omega) + \beta(\omega) p_0(t) t^m \ln |t|$, где $L_0(\omega): C^k \rightarrow C^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\beta(\omega)$ — постоянная, зависящая от ω , и $p_0(t)$ — аналитическая функция.

Здесь мы не будем полностью доказывать теорему, а рассмотрим только вопрос о построении решений, когда коэффициенты в уравнении (2) постоянны, т. е. уравнение (2) имеет вид

$$qx'(qt) + bx'(t) + cx(qt) + dx(t) = 0, \quad (5)$$

в предположении, что

$$q > 0, \quad b < 0. \quad (6)$$

При других предположениях относительно q и b и в случае переменных коэффициентов доказательство проводится аналогично.

Уравнение (5) является вполне интегрируемым, если $d = bc$. В этом случае, интегрируя уравнение (5), получаем семейство функциональных уравнений

$$x(qt) + bx(t) = \alpha e^{-ct}, \quad (7)$$

α — произвольная постоянная.

Общее решение уравнения (7) есть

$$x(t) = \alpha p(t) + \begin{cases} t^\mu \omega_1\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), & t > 0, \\ |t|^\mu \omega_2\left(\frac{\ln |t|}{\ln q}\right), & t < 0, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$p(t) = (1 + b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c)^n}{n! (q^n + b)} t^n,$$

ω_1, ω_2 — произвольные периодические функции периода 1.

Общее решение вполне интегрируемого уравнения (5) в классе C^1 представляет собой совокупность C^1 -функций из (8). В этом случае оператор L , фигурирующий в формулировке теоремы, есть тождественный оператор $L(\omega) \equiv \omega$.

Чтобы доказать теорему, когда уравнение (5) не является вполне интегрируемым, мы, во-первых, построим однопараметрическое семейство аналитических решений $\alpha p(t)$, во-вторых, найдем семейство решений, представляемых в виде $t^\mu L(\omega)$, и при этом выясним вид оператора $L(\omega)$. Поскольку (5) — линейное уравнение, то сумма двух его решений есть также решение, и, следовательно, остается доказать, что всякое решение уравнения (5) представляется в виде линейной комбинации аналитического решения и решения вида $t^\mu L(\omega)$.

1. Аналитические решения.

Будем искать решения уравнения (5), представимые в виде степенного ряда

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n, \quad (9)$$

где α_n — постоянные.

Подставляя (9) в (5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t , получаем рекуррентные соотношения для α_n :

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} \frac{-(q^{n-1}c + d)}{n(q^n + b)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

α_0 — произвольная постоянная.

Из (10) находим

$$\alpha_n = p_n \alpha_0, \quad p_n = \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{i=1}^n \frac{q^{i-1}c + d}{q^i + b}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Поскольку

$$\frac{q^{n-1}c + d}{n(q^n + b)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

то ряд (9) сходится для всех конечных t . Так как сумма степенного ряда в круге сходимости является аналитической функцией, то $p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$, $p_0 = 1$, при всех t есть аналитическая функция и $p(0) = 1$; $x(t) = \alpha p(t)$ есть искомое однопараметрическое семейство аналитических решений.

2. Решение вида $t^\mu L(\omega)$.

Пусть $t > 0$. Если уравнение (5) является вполне интегрируемым, то $L(\omega)$ — тождественный оператор: $L(\omega) \equiv \omega$.

Если уравнение (5) не является вполне интегрируемым ($d \neq bc$) его можно интерпретировать как возмущение вполне интегрируемого уравнения и попытаться получить оператор $L(\omega)$ в виде некоторого возмущения тождественного оператора. Будем искать $L(\omega)$ в виде ряда по степеням

$$L(\omega) = \omega + B_1(\omega)t + B_2(\omega)t^2 + \dots, \quad (12)$$

где $B_n(\omega)$, $n = 1, 2, \dots$, — операторы, отображающие периодические функции в периодические с тем же периодом. Иначе говоря, будем искать решения уравнения (5), представимые в виде

$$x(t) = t^\mu \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{\ln t}{\ln q} \right) t^n, \quad (13)$$

где $A_n(t)$ — периодические функции периода 1, так что

$$B_n(\omega(t)) = A_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad A_0(t) = \omega(t).$$

Подставляя (13) в (5), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[b \sum_{n=0}^{\infty} (1 - q^n) A_n \left(\frac{\ln t}{\ln q} \right) t^{n+\mu} \right] = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (q^n c - d) A_n \left(\frac{\ln t}{\ln q} \right) t^{n+\mu}. \end{aligned} \quad (14)$$

Приравнявая в (14) коэффициенты при одинаковых степенях t , будем иметь

$$\frac{1}{\ln q} A_n'(t) + (\mu + n) A_n(t) = a_{n-1} A_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

$A_0(t) = \omega(t)$ — произвольная периодическая функция периода 1,

$$a_n = \frac{q^n bc - d}{b(1 - q^{n+1})}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

Если в (14) приравнять не коэффициенты, а сами члены, содержащие t в одинаковых степенях, то получим соотношения, эквивалентные (15):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[A_n \left(\frac{\ln t}{\ln q} \right) t^{n+\mu} \right] = \\ = a_{n-1} A_{n-1} \left(\frac{\ln t}{\ln q} \right) t^{n+\mu-1}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Рекуррентные соотношения (15) представляют собой линейные дифференциальные уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами относительно $A_n(t)$. Если правая часть (15) является периодической функцией ($A_{n-1}(t)$ — периодическая функция), то уравнение (15) при каждом n имеет единственное периодическое решение, которое можно записать в виде

$$\begin{aligned} A_n(t) = \frac{a_{n-1} \ln q}{q^n |b| - 1} (q^n |b|)^{-t} \times \\ \times \int_t^{t+1} A_{n-1}(\tau) (q^n |b|)^{-\tau} d\tau, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

или

$$A_n\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right) = \frac{a_{n-1}}{q^n |b| - 1} t^{-(\mu+n)} \times \\ \times \int_t^{qt} A_{n-1}\left(\frac{\ln \tau}{\ln q}\right) \tau^{\mu+n-1} d\tau, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

Из (19) найдем

$$B_n\left(\omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right) = A_n\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right) = \\ = r_n t^{-(\mu+n)} \int_t^{qt} \int_{t_1}^{qt_1} \dots \int_{t_{n-1}}^{qt_{n-1}} \omega\left(\frac{\ln t_n}{\ln q}\right) t_n^\mu dt_n \dots dt_1, \quad (20)$$

$$r_n = \prod_{i=1}^n \frac{a_{i-1}}{q^i |b| - 1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Таким образом, оператор $L(\omega)$ может быть представлен в виде формального ряда (12) с коэффициентами (20). Оператор $B_n: \omega \rightarrow \rightarrow B_n(\omega)$ отображает периодические функции периода 1 в периодические периода 1.

Покажем, что формальный ряд (12) (или, что то же самое, ряд (13)) с коэффициентами (20) сходится.

Если $\omega(t) \in C^1$, $\omega(t+1) = \omega(t)$ и $\omega_{\max} = \max_t |\omega(t)|$, то

$$|B_n(\omega(t))| \leq \beta_n \omega_{\max}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (22)$$

где

$$\beta_n = \left| \frac{\ln q}{n} \right|^n \prod_{i=1}^n \left| \frac{|q^{i-1}bc| + |d|}{(1-q^i) \ln q^i |b|} \right|, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} &= \left| \frac{(|q^n bc| + |d|) \ln q}{b(q^{n+1} - 1) \ln q^{n+1} |b|} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{b} \right| \left| \frac{|q^n bc| + |d|}{q^{n+1} - 1} \right| \left| \frac{1}{\mu + n + 1} \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, то ряд (12) сходится абсолютно и равномерно для всех t и функция $L\left(\omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right) \in C^0$.

Дифференцируя (13) и учитывая (16), будем иметь

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left[t^\mu L\left(\omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right) \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n A_n \left(\frac{\ln t}{\ln q}\right) t^{n+\mu} + \frac{d}{dt} \left[t^\mu \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right) \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Существует такое a , что $a_n < a$ при всех n . Поэтому, если $\omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right) \in C^1$, то ряд (24) также сходится для всех t ввиду сходимости ряда (12) и, следовательно, $L\left(\omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right) \in C^1$.

Таким образом, $t^\mu L(\omega)$ представляет собой семейство решений уравнения (5), зависящее от произвольной периодической функции.

Продолжая формально дифференцировать ряд (24) и учитывая (16), можно точно так же показать, что $L\left(\omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right) \in C^k$, $k = 2, 3, \dots$, если $\omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right) \in C^k$. Если $\omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)$ — аналитическая функция, то, как легко видеть, $L\left(\omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$ представляет собой ряд из аналитических функций, абсолютно и равномерно сходящийся в некоторой окрестности $t = 0$ и, таким образом, $L\left(\omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$ также является аналитической функцией.

Остается показать, что всякое решение уравнения (5) при $t > 0$ может быть представлено в виде

$$x(t) = \alpha p(t) + t^\mu L \left(\omega \left(\frac{\ln t}{\ln q} \right) \right), \quad (25)$$

где α — некоторая постоянная, ω — некоторая периодическая функция периода 1. Для этого достаточно, рассматривая (25) как уравнение относительно $\omega(t)$, доказать, что оно имеет единственное решение на некотором множестве функций $x(t)$, содержащем решения уравнения (5), и при этом, если $x(t)$ является решением уравнения (5), то $\omega(t)$ удовлетворяет указанным в формулировке теоремы условиям. Это доказательство подробно приведено в [47].

Аналогичное представление решений имеет место и для систем линейных дифференциально-функциональных уравнений

$$A(t) x'(qt) + B(t) x'(t) + C(t) x(qt) + D(t) x(t) = 0, \quad (26)$$

где A, B, C, D — аналитические $n \times n$ матрицы [45].

§ 3. Дифференциально-функциональные уравнения с конечной группой преобразований аргумента

С функциональными уравнениями, у которых все или часть преобразований аргумента принадлежит конечной группе преобразований, мы встречались в § 2.4 и § 2.6. В этом параграфе мы уже рассмотрим дифференциально-функциональные уравнения, у которых все преобразования аргумента принадлежат конечной группе. Однако, в случае функциональных уравнений нас интересовало представление их решений, а здесь основное внимание будет уделено качественным свойствам решений.

Итак, рассмотрим дифференциально-функциональные уравнения вида

$$F(t, x(t), x(\tau_1(t)), \dots, x(\tau_k(t))) = 0, \quad (1)$$

где F – дифференциальный оператор, а преобразования аргумента $\tau_i(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, порождают конечную группу преобразований G .

1. Исследование таких уравнений сводится к исследованию дифференциальных уравнений. Полагая в (1)

$$y_i(t) = x(\tau_i(t)), \quad i = 0, 1, \dots, k, \quad \tau_0(t) = t, \quad (2)$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} F(t, y_0(t), y_1(t), \dots, y_k(t)) &= 0, \\ F(\tau_1(t), y_1(t), y_{i_{1,1}}(t), \dots, y_{i_{1,k}}(t)) &= 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\ F(\tau_k(t), y_k(t), y_{i_{k,1}}(t), \dots, y_{i_{k,k}}(t)) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$i_{r,s}$ – индекс преобразования $\tau_{i_{r,s}}(t) = \tau_s(\tau_r(t))$, $1 \leq r, s \leq k$.

Каждому решению дифференциально-функционального уравнения (1) соответствует некоторое решение системы дифференциальных уравнений (3), построенное согласно равенству (2), и наоборот, каждому решению системы (3), удовлетворяющему условиям

$$y_r(\tau_s(t)) = y_{i_{s,r}}(t), \quad (4)$$

соответствует решение уравнения (1) $x(t) = y_0(t)$. Вместо системы (3) можно говорить, по крайней мере, формально, об одном дифференциальном уравнении, но более высокого порядка относительно $x(t) = y_0(t)$.

Обратим внимание на то, что множество решений дифференциально-функциональных уравнений с конечной группой преобразований аргумента, вообще говоря, имеет ту же мощность, что

и множество решений дифференциальных уравнений. А для дифференциально-функциональных уравнений более привычной является ситуация, когда множество решений зависит не от произвольных постоянных (как для дифференциальных уравнений), а от произвольных (периодических) функций.

2. Перейдем теперь к более детальному исследованию уравнений

$$x'(t) = f(x(t), x(-t)), \quad (5)$$

$$P(x(t), x(-t))x'(t) + Q(x(t), x(-t))x'(-t) = R(x(t), x(-t)), \quad (6)$$

$$x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

содержащих преобразование аргумента

$$\tau(t) = -t, \quad (7)$$

для которого

$$\tau(\tau(t)) = t. \quad (8)$$

При этом ставим перед собой цель показать, как можно использовать имеющиеся методы и результаты теории дифференциальных уравнений и что эти методы могут дать применительно к уравнениям (5), (6), а также указать на ряд особенностей, которыми обладают решения таких дифференциально-функциональных уравнений.

Преобразования аргумента образуют простейшую конечную группу — группу второго порядка. Функциональные и дифференциально-функциональные уравнения с преобразованиями (7), по-видимому, впервые рассматривал Ч.Бэббедж [9], широко известный ныне своими исследованиями по универсальным вычислительным машинам, опередившими почти на столетие последующие работы в этом направлении. Уже Ч.Бэббеджу было известно (см., например, [31]), что преобразование аргумента в этом случае можно “удалить” и для функциональных уравнений сразу же получить решение (возможно, в виде неявно заданных функций),

а дифференциально-функциональные уравнения свести к дифференциальным уравнениям.

Например, для дифференциально-функционального уравнения

$$x'(t) = ax(-t) \quad (9)$$

имеем

$$x'(-t) = ax(t) \quad \text{и} \quad x''(t) = -ax'(-t),$$

так что

$$x''(t) = -a^2x(t). \quad (10)$$

Решения уравнения (9) (по крайней мере, C^2 -решения) содержатся среди решений уравнения (10). Решая уравнение (10) и подставляя полученные выражения в (9), найдем, что

$$x(t) = C \sin\left(at + \frac{\pi}{4}\right), \quad (11)$$

где C – произвольная постоянная, – общее решение уравнения (9).

Дифференциально-функциональные уравнения с конечной группой преобразований аргумента уже изучались рядом авторов (укажем, например, монографию [48]); рассматривался в основном вопрос о сведении дифференциально-функциональных уравнений к дифференциальным и о построении, когда это возможно, решений в явном виде.

К функциональным и дифференциально-функциональным уравнениям такого типа иногда приводят краевые задачи для уравнений в частных производных гиперболического и эллиптического типов, если оператор уравнения разлагается в произведение дифференциальных операторов первого порядка. Так, функциональные уравнения с преобразованием (7) неоднократно применялись в теории фильтрации Н.М.Герсевановым (в частности, в работе [24]).

Тот факт, что дифференциально-функциональные уравнения с преобразованием (7) могут иметь свойства, существенно отличающиеся от свойств обычных дифференциальных уравнений, отмечал еще В.Файт [63], изучавший условия колеблемости решений уравнений, близких к уравнению (5).

Это подтверждает также качественное исследование уравнений (5) и (6), которое предлагается ниже. Используя “фазовую” плоскость, точками которой являются пары $(x(t), x(-t))$, удается выяснить свойства решений, в частности, их асимптотическое поведение, устойчивость, продолжимость, возможные постановки задач.

3. Рассмотрим вначале уравнение (5). Положим $y(t) = x(-t)$. Тогда $y'(t) = -x'(-t)$. Заменяя в (5) t на $-t$, получаем $x'(-t) = f(x(-t), x(t))$. Таким образом, приходим к системе второго порядка

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y), \\y' &= -f(y, x).\end{aligned}\tag{12}$$

Если функция $x = \varphi(t)$ является решением уравнения (5), то функции $x = \varphi(t)$, $y = \varphi(-t)$ являются решением системы (12). Наоборот, если $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ – решение системы (12), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned}x(-t) &= y(t), \\y(-t) &= x(t)\end{aligned}\tag{13}$$

(одно из этих условий, очевидно, является следствием другого), то функция $x = \varphi(t)$ является решением уравнения (5).

Следовательно, исследование уравнения (5) сводится к исследованию системы (12).

Относительно функции $f(x, y)$ будем предполагать, что она обеспечивает существование и единственность решений системы (12) при всех t .

Векторное поле $V(x, y)$, задаваемое системой (12) (а именно, $V(x, y) = (f(x, y), -f(y, x))$), кососимметрично относительно прямой $y = x$: если $V(x', y') = (a, b)$, то $V(y', x') = -(b, a)$.

Таким образом, система (12) обладает следующим свойством симметрии (S).

Фазовый портрет системы (12) (т.е. разбиение “фазовой” плоскости (x, y) на траектории) симметричен относительно прямой $y = x$ и при этом направление движения антисимметрично в симметричных относительно прямой $y = x$ точках.

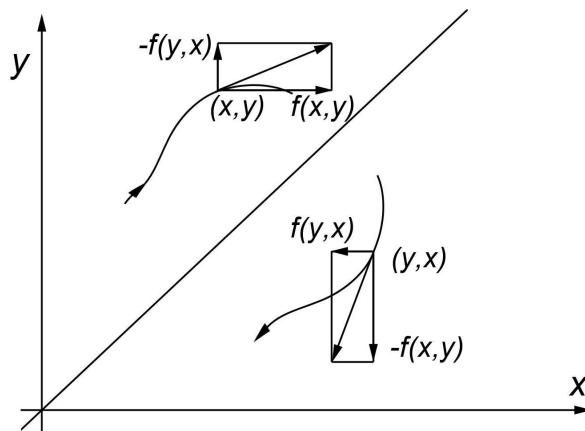


Рис. 1

Свойства решений уравнения (5), о которых будет идти речь ниже, являются следствием симметрии фазового портрета системы (12).

Из условий (13) следует, что

$$x(0) = y(0). \quad (14)$$

Ввиду свойства (S) решения системы (12), удовлетворяющие (14), удовлетворяют и условию (13).

Таким образом, каждому решению системы (12), удовлетворяющему равенству (14), и только такому решению соответствует решение уравнения (5). Задача найти решения уравнения (5) эквивалентна задаче найти решения системы (12), удовлетворяющие условию (14).

Каждой траектории системы (12) соответствует континуальное множество решений этой системы (за исключением положений равновесия, каждому из которых соответствует единственное решение) и, как только что выяснено, столько решений уравнения (5), сколько общих точек эта траектория имеет с прямой $y = x$. Для траекторий, не пересекающих прямую $y = x$, нет решений уравнения (5), которые соответствовали бы этим траекториям. Траекториям, пересекающим прямую $y = x$ один раз, соответствует одно решение уравнения (5). Если траектория системы (12) пересекает прямую $y = x$ дважды, то она является замкнутой и ей соответствует два периодических решения уравнения (5).

Более двух точек, общих с прямой $y = x$, траектория системы (12) иметь не может. Действительно, если бы такая траектория существовала, то ввиду симметрии фазового портрета, она принадлежала бы прямой $y = x$. Направление движения в некоторой окрестности этой траектории должно было бы совпадать с направлением движения на самой траектории, что противоречит антисимметрии направления движения на траекториях, симметричных относительно прямой $y = x$. Из этих рассуждений вытекает также, что траектории системы (12), принадлежащие прямой $y = x$, являются положениями равновесия.

Какие задачи можно ставить для уравнения (5)? Для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка обычно ставится задача Коши: найти решение $x(t)$, удовлетворяющее условию $x(t_0) = x_0$. Имеет ли смысл такая постановка задачи для уравнения (5)?

Для системы (12) при этом получаем задачу: найти решения, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \text{а), } & x(t_0) = x_0, \quad y(-t_0) = x_0, \\ \text{б), } & x(0) = y(0). \end{aligned}$$

(условие б) необходимо: система (12) может иметь решения, удовлетворяющие условиям а), но не удовлетворяющие б)).

При $t_0 = 0$ — это обычная задача Коши, которая, как мы предполагаем, имеет единственное решение, определенное при всех t . Следовательно, и задача Коши для уравнения (5), если $t_0 = 0$ имеет единственное решение, определенное при всех t .

Иначе обстоит дело при $t_0 \neq 0$. Интегральные кривые уравнения (5) получаются при проектировании интегральных кривых системы (12) (в пространстве (t, x, y)), проходящих через прямую $\{t = 0, x = y\}$ на плоскость (t, x) . Но в результате такого проектирования через точку (t_0, x_0) может проходить одна, несколько, бесконечно много или ни одной интегральной кривой уравнения (5). Поэтому и задача найти решение уравнения (5), для которого $x(t_0) = x_0$, может иметь одно, несколько, бесконечно много решений или не иметь их совсем.

Например, для уравнения (9) такая задача имеет единственное решение, а именно

$$x(t) = x_0 \frac{\sin\left(at + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(at_0 + \frac{\pi}{4}\right)}, \quad (15)$$

если $t_0 \neq \frac{\pi}{a}\left(n - \frac{1}{4}\right)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; не имеет решений, если $t_0 = \frac{\pi}{a}\left(n - \frac{1}{4}\right)$ и $x_0 \neq 0$, и, напротив, имеет бесконечно много решений, если $x_0 = 0$ (при $t = \frac{\pi}{a}\left(n - \frac{1}{4}\right)$ все решения уравнения (9) обращаются в нуль).

При исследовании задачи Коши для уравнения (5) полезно иметь в плоскости (x, y) , наряду с фазовым портретом системы (12), семейство кривых $d_t = \varphi^t d_0$, где $d_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$,

$t \in \mathbb{R}$, $\varphi^t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — динамическая система, задаваемая системой (12). Задача Коши для уравнения (5) имеет столько решений, сколько общих точек имеют прямая $x = x_0$ и кривая d_{t_0} .

Чтобы изучать свойства решений уравнения (5), как-то: существование решений различных типов, в том числе периодических, асимптотическое поведение решений, в частности ограниченность, колеблемость, устойчивость, и т.д., естественно использовать информацию о свойствах траекторий динамической системы (12).

Если, например, траектория системы (12) устойчива по Лагранжу (ввиду симметрии траекторий устойчивость (неустойчивость) имеет место одновременно при убывании и возрастании t), то соответствующее решение уравнения (5) будет ограниченным при $t \rightarrow \pm\infty$. Если траектория системы (12) является неустойчивой по Лагранжу, то решение уравнения (5) будет неограниченным либо при убывании t , либо при возрастании t , либо как при убывании, так и при возрастании t .

Охарактеризуем более подробно решения, которые может иметь уравнение (5).

А. Постоянные решения. Решения $x(t) = \text{const}$ соответствуют положениям равновесия системы (12), лежащим на прямой $y = x$. Функция $x(t) = \alpha$, $t \in \mathbb{R}$, является решением (5) тогда и только тогда, когда $f(\alpha, \alpha) = 0$.

Из симметрии фазового портрета системы (12) следует, что положение равновесия не может быть типа “фокус”; из антисимметрии направления движения по симметричным траекториям следует, что положение равновесия не может быть “узлом”.

Полезно рассмотреть линейное уравнение вида (5).

Пр и м е р 1.

$$x'(t) = ax(t) + bx(-t), \quad b \neq 0. \quad (16)$$

Этому уравнению соответствует линейная система

$$x' = ax + by, \quad (17)$$

$$y' = -bx - ay.$$

Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ -b & -a - \lambda \end{vmatrix} = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$, так что положение равновесия системы (17) — точка $(0, 0)$ — является “седлом” при $|a| > |b|$ и “центром” при $|a| < |b|$.

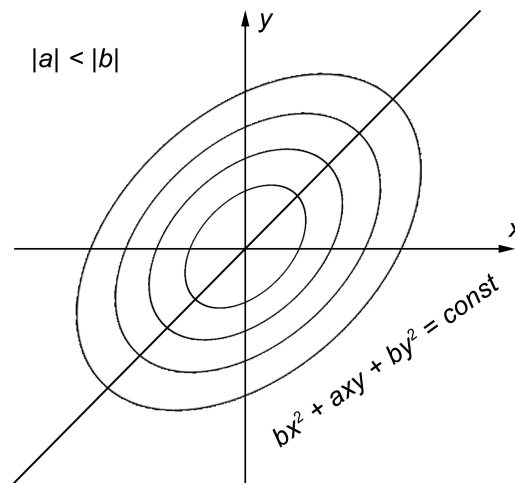


Рис. 2а

Таким образом, если $|a| < |b|$, все решения уравнения (16), за исключением постоянного решения $x(t) \equiv 0$, являются периодическими (каждой периодической траектории системы (17) соответствуют два периодических решения уравнения (16)).

Если $|a| > |b|$, то все решения уравнения (16), исключая постоянное решение $x(t) \equiv 0$, являются неограниченными как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$. При этом, если a, b разных знаков, то, как видно из рис.2б, решения ведут себя одинаково при возрастании и убывании t : стремятся к $+\infty$, если $x(0) > 0$, и к $-\infty$, если $x(0) < 0$ (решения уравнения (16) соответствуют только траекториям системы (17), пересекающим прямую $y = x$). Если же a и b одного знака (рис.2в), то каждое решение уравнения (16) является монотонным и возрастает при $bx(0) > 0$, а при $bx(0) < 0$ убывает.

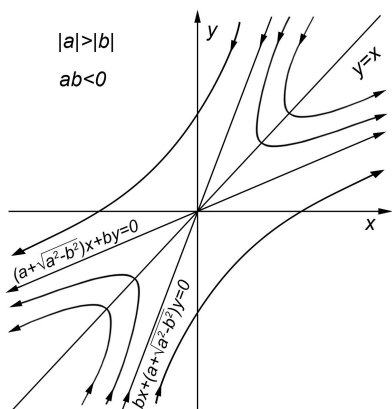


Рис. 2б

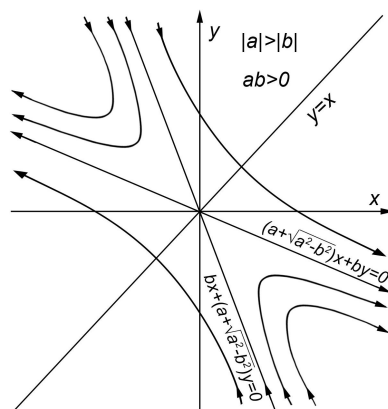


Рис. 2в

Так как не представляет труда выписать общее решение системы (17), то можно явно выписать и решения уравнения (16). При $|a| < |b|$

$$x(t) = A \sin(\sqrt{b^2 - a^2}t + \varphi), \quad (18)$$

где A – произвольная постоянная и $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \cdot \operatorname{sgn} b$, и при $|a| > |b|$

$$x(t) = A \left[(a + \sqrt{a^2 - b^2})e^{\sqrt{a^2 - b^2}t} - be^{-\sqrt{a^2 - b^2}t} \right]. \quad (19)$$

Обратим внимание на то, что решения уравнения (16), как это следует из формул (18), (19), обращаются в нуль одновременно: если $|a| < |b|$, – при $t_n = \frac{n\pi - \varphi}{\sqrt{b^2 - a^2}}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, если $|a| > |b|$, $ab > 0$, – при $t_* = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \frac{b}{a + \sqrt{a^2 - b^2}}$. Такая ситуация, имеющая место для линейных уравнений, для нелинейных уравнений, вообще говоря, не сохраняется.

Поведение решений произвольного уравнения вида (5) в окрестности постоянного решения $x(t) \equiv \alpha$ определяется соответствующей линейной частью функции $f(x, y)$. Так, если $f'_x(\alpha, \alpha) = a$, $f'_y(\alpha, \alpha) = b$, то при $|a| < |b|$ в окрестности решения $x(t) = \alpha$ содержится континуальное (однопараметрическое) семейство пе-

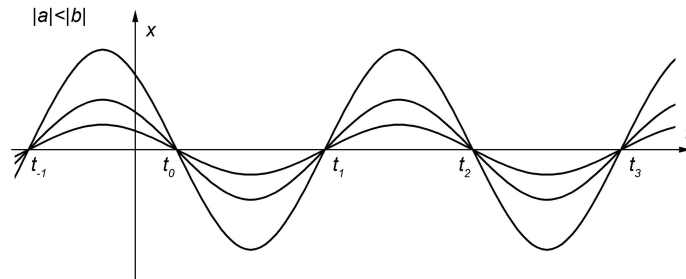


Рис. 3а

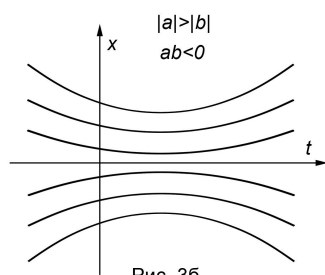


Рис. 3б

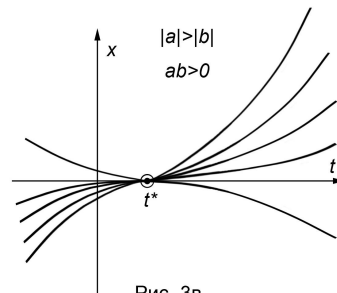


Рис. 3в

риодических решений уравнения (5). Если $|a| > |b|$, существует окрестность решения $x(t) = \alpha$, которая не содержит при всех t ни одного другого решения уравнения (5). При $|a| = |b|$ возможны различного рода вырождения.

Следует, однако, иметь в виду, что отстоящие далеко друг от друга решения системы (12) при проектировании, о котором шла речь выше, могут давать решения уравнения (5), близкие либо при $t \rightarrow +\infty$, либо при $t \rightarrow -\infty$. Поэтому как при $a > b$, так и при $a < b$ возможна ситуация (все же “неустойчивая”), когда к решению $x(t) \equiv \alpha$ асимптотически притягивается, например при $t \rightarrow -\infty$, семейство решений уравнения (5); но при $t \rightarrow +\infty$ эти решения уже не смогут притягиваться к решению $x(t)$ (см. ниже пример 2))¹.

¹Под близкими решениями уравнения (5) следует понимать решения, близкие при всех $t \in \mathbb{R}$.

Решение $x(t) = \alpha$ уравнения (5) назовем постоянным решением гиперболического типа, если $a > b$ и постоянным решением эллиптического типа, если $a < b$.

Решения $x(t) = \text{const}$ гиперболического и эллиптического типов являются изолированными и непрерывно зависят от возмущений правой части уравнения (5). В частности, при достаточно малых возмущениях решения эллиптического типа будут оставаться таковыми, семейство периодических решений, существующее в окрестности этого решения, будет сохраняться.

Из простых топологических соображений и симметрии фазового портрета системы (12) следует, что между любыми двумя постоянными решениями эллиптического типа имеется еще по крайней мере одно постоянное решение. Между двумя постоянными решениями гиперболического типа может не быть никаких других решений $x(t) = \text{const}$; уравнение (5) может иметь любое число (конечное или счетное) постоянных решений гиперболического типа и не иметь больше никаких других постоянных решений.

Б. Периодические решения. Периодические решения уравнения (5) соответствуют замкнутым траекториям системы (12), пересекающим прямую $y = x$.

Как уже отмечалось, если $x(t) \equiv \alpha$ – решение уравнения (5) и $|f'_x(\alpha, \alpha)| < |f'_y(\alpha, \alpha)|$, то в любой окрестности этого решения имеются периодические решения; существуют α_1, α_2 , $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, такие, что всякое решение уравнения (5), удовлетворяющее условию $x(0) = \alpha'$, $\alpha' \in (\alpha_1, \alpha_2)$ является периодическим.

В силу непрерывной зависимости решений системы (12) от начальных данных и симметрии фазового портрета для любой замкнутой траектории системы (12), пересекающей прямую $y = x$, существует окрестность (в плоскости (x, y)), состоящая из замкнутых траекторий. Поэтому замкнутые траектории, пересекающие прямую $y = x$, заполняют открытое множество плоскости (x, y) . Отсюда следует, что значения $\alpha \in \mathbb{R}$, для которых решения уравнения (5), удовлетворяющие условию $x(0) = \alpha$, являются перио-

дическими, образуют на \mathbb{R} открытое множество; уравнение (5) не может иметь изолированных периодических решений.

Периодические решения уравнения (5) непрерывно зависят от возмущений правой части; если уравнение (5) имеет периодические решения, то при любых, но достаточно малых возмущениях и возмущенное уравнение также имеет периодические решения, близкие (орбитно) к периодическим решениям уравнения (5).

Если $x(t) = p(t)$ – периодическое решение уравнения (5), то существует α , $\min_t p(t) < \alpha < \max_t p(t)$, такое, что $x(t) = \alpha$ – постоянное решение уравнения (5).

В. Асимптотически постоянные и асимптотически периодические решения. Рассмотрим решения, ограниченные при всех t . Такие решения соответствуют траекториям системы (12), пересекающим прямую $y = x$ и лежащим в ограниченной области плоскости. Асимптотически постоянные решения соответствуют траекториям, стремящимся к положениям равновесия, асимптотически периодические – траекториям, стремящимся к предельным циклам. Ввиду симметрии фазового портрета (12) решения уравнения (5), асимптотически постоянные (периодические) при $t \rightarrow +\infty$, являются асимптотически постоянными (периодическими) и при $t \rightarrow -\infty$ (и, наоборот).

В “грубом” случае, когда фазовый портрет системы (12) структурно устойчив (так будет почти всегда), набор возможных типов (ограниченных) решений уравнения (5) исчерпывается указанными выше постоянными, периодическими, асимптотически постоянными и асимптотически периодическими решениями. В “негрубом” случае возможны и другие типы решений. Например, предельный цикл системы (12) может состоять не из одной траектории, а из нескольких, так что решение, соответствующее траектории, приближающейся к такому предельному циклу, хотя и будет носить колебательный характер, однако не будет асимптотически периодическим.

Обратим внимание на то, что предельным циклам системы (12), если они и существуют, не соответствуют никакие решения уравнения (5) (предельные циклы не могут пересекать прямую $y = x$).

Пример 2.

$$x'(t) = (ax(t) - b)x(-t). \quad (20)$$

Этому уравнению соответствует система

$$\begin{aligned} x' &= (ax - b)y, \\ y' &= -x(ay - b). \end{aligned} \quad (21)$$

Система (21) имеет положения равновесия: $(0, 0)$ – типа “центр” и $(\frac{b}{a}, \frac{b}{a})$ – типа “седло”; прямые $x = \frac{b}{a}$ и $y = \frac{b}{a}$ состоят из целых траекторий. Ввиду симметрии относительно прямой $y = x$ фазовый портрет должен быть таким, как на рис. 4 (пусть $a, b > 0$). Все траектории, расположенные в квадранте $\{x < \frac{b}{a}, y < \frac{b}{a}\}$, являются замкнутыми.²

²Симметрия системы (21) позволяет явно выписать первый интеграл системы. Из (21) вытекает, что

$$\begin{aligned} (x + y)' &= b(x - y), \\ (xy)' &= b(x^2 - y^2) - axy(x - y), \end{aligned}$$

так что

$$\frac{d(xy)}{d(x+y)} = (x+y) - \frac{a}{b}(xy),$$

и, следовательно, вдоль каждого решения системы (21)

$$\varphi(x, y) = (ax - b)(ay - b)e^{\frac{a}{b}(x+y)} = const.$$

Траектории системы (21) имеют вид $\varphi(x, y) = c$ и, в частности, пересекают прямую $y = x$ при $c > 0$. Для траекторий, расположенных в квадранте $\{x > \frac{b}{a}, y > \frac{b}{a}\}$, величина c изменяется от 0 до $+\infty$, для периодических траекторий из квадранта $\{x < \frac{b}{a}, y < \frac{b}{a}\}$ – от 0 до b^2 .

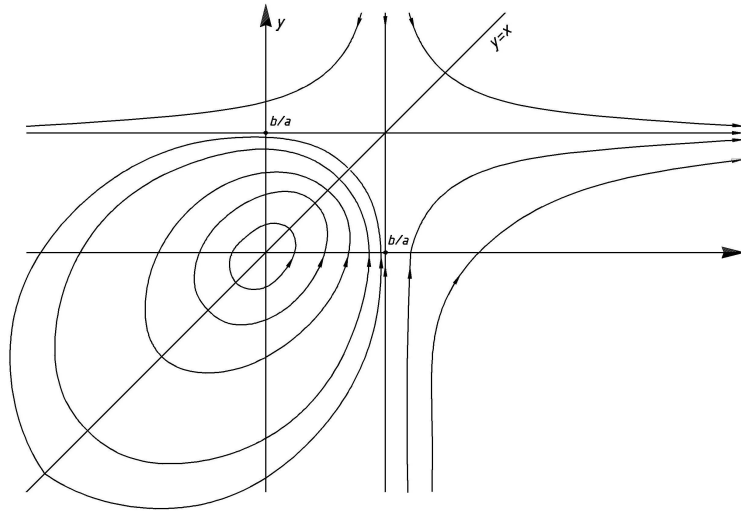


Рис. 4

Решения уравнения (20) соответствуют траекториям системы (21), лежащим в квадрантах $\{x > \frac{b}{a}, y > \frac{b}{a}\}$, $\{x < \frac{b}{a}, y < \frac{b}{a}\}$ и положению равновесия $\{x = \frac{b}{a}, y = \frac{b}{a}\}$. Уравнение (20) имеет два постоянных решения: $x(t) \equiv 0$ и $x(t) \equiv \frac{b}{a}$. Решения, удовлетворяющие условию $x(0) = x_0$, являются периодическими при $x_0 < \frac{b}{a}$ (кроме $x(t) \equiv 0$), а при $x_0 > \frac{b}{a}$ стремятся к $\frac{b}{a}$, когда $t \rightarrow -\infty$, и к $+\infty$, когда $t \rightarrow +\infty$.

Уместно сделать следующее замечание. Решения уравнения (5) рассматривались нами в классе функций, определенных (и непрерывных) при всех $t \in \mathbb{R}$. Множество решений уравнения (5) существенно расширится, если рассматривать решения, определенные (и непрерывные) при $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (исключается значение t , при котором t и отклоняющийся аргумент, в данном случае $-t$, совпадают). Так, например, уравнение $x' = ax(-t)$ имеет двухпараметрическое семейство решений

$$x(t) = \begin{cases} A \sin at + B \cos at, & t > 0, \\ B \sin at + A \cos at, & t < 0, \end{cases}$$

определенных при $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (и только однопараметрическое семейство решений $x(t) = A(\sin at + \cos at)$, определенных и непрерывных при всех $t \in \mathbb{R}$).

Если рассматривать решения уравнения (5), определенные при $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то каждой траектории системы (12), симметричной относительно прямой $y = x$ (и имеющей с этой прямой общие точки), и каждой паре траекторий, симметричных относительно прямой $y = x$ (и не имеющих с этой прямой общих точек)³, соответствуют два семейства решений. При этом каждые два решения $x^+(t) = \varphi(t)$ и $x^-(t) = \varphi(-t)$ определяются однозначно своими значениями $x_0 = \varphi(+0)$ и $y_0 = \varphi(-0)$; если точки (x_0, y_0) и (y_0, x_0) принадлежат двум (симметричным) траекториям, то эти точки разбивают траектории на две пары симметричных полутраекторий и решение $x(t) = \varphi(t)$ соответствует одной паре симметричных полутраекторий, а решение $x(t) = \varphi(-t)$ – другой паре; если точки (x_0, y_0) и (y_0, x_0) принадлежат одной траектории (и $x_0 \neq y_0$), то они разбивают эту траекторию на три части так, что одно решение уравнения (5) соответствует двум симметричным частям траектории, а другое решение – всей траектории, но третья часть траектории при этом “приходится” решением дважды. Никаких других решений, имеющих не более одной точки разрыва (кроме как непрерывных при всех t или имеющих разрыв при $t = 0$), у уравнения (5) нет.

4. Рассмотрим теперь уравнение (6). Подставляя $-t$ вместо t , получаем равносильное уравнение:

$$Q(x(-t), x(t))x'(t) + P(x(-t), x(+t))x'(-t) = R(x(-t), x(t)). \quad (8')$$

³Ввиду симметрии фазового портрета любая траектория системы (12) либо симметрична относительно прямой $y = x$, либо имеет симметричную ей траекторию.

Возможны два случая: либо $g(u, v) = P(u, v) \cdot P(v, u) - Q(u, v) \cdot Q(v, u)$ тождественно равно нулю, либо нет.

Рассмотрим вначале случай, когда $g(u, v) \neq 0$. Исключая $x'(-t)$ из уравнений (6) и (6'), получаем уравнение

$$x'(t) = \frac{f(x(t), x(-t))}{g(x(t), x(-t))}, \quad (22)$$

где

$$f(u, v) = R(u, v) \cdot P(v, u) - Q(u, v) \cdot R(v, u).$$

Существенно, что функция $g(u, v)$ является симметрической: $g(u, v) = g(v, u)$.

Полагая $y(t) = x(-t)$, приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \cdot \frac{1}{g(x, y)}, \\ y' &= -f(y, x) \cdot \frac{1}{g(x, y)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Вместо системы (23) удобно рассматривать систему

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y), \\ y' &= -f(y, x), \end{aligned} \quad (24)$$

отличающуюся от (23) только скоростью движения по траекториям; если функция $g(x, y)$ не обращается в нуль на некоторой траектории системы (24), то эта траектория будет также траекторией системы (23); если на траектории системы (24) есть точки, в которых функция $g(x, y)$ обращается в нуль, то (замкнутое) множество нулей $g(x, y)$ разбивает эту траекторию на (открытые) дуги, каждой из которых соответствуют, вообще говоря, непродолжимые решения системы (23). Решения уравнения (22) соответствуют только тем частям траекторий системы (23), которые имеют общие точки с прямой $y = x$.

Таким образом, решение уравнения (22), а следовательно, и решение уравнения (6), удовлетворяющие условию $x(0) = x_0$, при $t \rightarrow \pm\infty$ будут вести себя так же, как и решение уравнения $x'(t) = f(x(t), x(-t))$, удовлетворяющее условию $x(0) = x_0$, если $g(x, y) > 0$ на траектории системы (24), проходящей через точку (x_0, x_0) плоскости (x, y) ; решение уравнения (22) будет отличаться от решения уравнения $x'(t) = f(x(t), x(-t))$ лишь сжатием или растяжением вдоль оси t (в зависимости от величины $g(x, y)$). Если $g(x, y) < 0$ на этой траектории, то решение уравнения (22) при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) ведет себя так же, как и решение уравнения $x'(t) = f(x(t), x(-t))$ при $t \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow +\infty$). Если же функция $g(x, y)$ обращается в нуль на этой траектории, например, в точке (x', y') , и часть траектории, связывающая эту точку и прямую $y = x$, больше не содержит нулей функции $g(x, y)$, то существует $t' < \infty$ такое, что решение уравнения (22), удовлетворяющее условию $x(0) = x_0$, при $t \rightarrow t'$ приближается к x' и не продолжимо на $t \geq t'$.

Пример 3.

$$ax(t)x'(t) + bx'(-t) = x(t). \quad (25)$$

Уравнение (22) в данном случае будет таким:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{(ax(t) - b) \cdot x(t)}{a^2x(t)x(-t) - b^2}, \\ f(x, y) &= (ax - b)y, \quad g(x, y) = a^2xy - b^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Система

$$\begin{aligned} x' &= (ax - b)y, \\ y' &= -x(ay - b) \end{aligned}$$

рассматривалась ранее; ее фазовый портрет изображен на рис.4. Теперь мы должны дополнительно выделить точки плоскости (x, y) , в которых $g(x, y) = 0$, и изменить направление движения на тех траекториях (или частях траекторий), где $g(x, y) < 0$.

Таким образом, решения уравнения (25), удовлетворяющие условию $x(0) = x_0$, при $x_0 > \frac{b}{a}$ таковы, что $x(t) \rightarrow \frac{b}{a}$ при $t \rightarrow -\infty$ и $x(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ (как и для уравнения (20)). Существует $\bar{x} \in (0, \frac{b}{a})$ такое, что при $-\frac{b}{a} < x_0 < \bar{x}$ решения уравнения (25) периодические, а при $x_0 < -\frac{b}{a}$ и $\bar{x} < x_0 < \frac{b}{a}$ непродолжимые⁴. Имеются две периодические функции, для одной из которых $x(0) = \bar{x}$ и для другой $x(0) = -\frac{b}{a}$, удовлетворяющие уравнению (25) всюду, за исключением счетного множества точек, в которых $x'(t)$ обращается в ∞ . Наконец, ни одно решение ни при одном значении t не равно $\frac{b}{a}$.

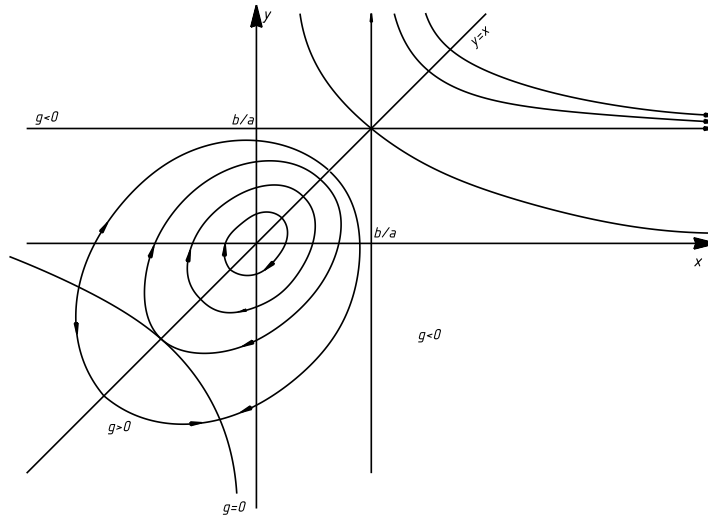


Рис. 5

⁴Точка (\bar{x}, \bar{x}) лежит на той же периодической траектории системы (21), что и точка $(-\frac{b}{a}, -\frac{b}{a})$. Поэтому, если положить $\bar{x} = \frac{b}{a}(u+1)$, то для u получается уравнение $ue^{u+2} = -2$ (см. сноску на с.196), имеющее два вещественных корня: $u_1 = -2$ и $u_2 = -0,4065\dots$. Следовательно, $\bar{x} = \frac{b}{a} \cdot 0,593\dots$

Рассмотрим уравнение (6) в случае, когда $g(u, v) \equiv 0$. Из уравнений (6), (8') следует, что для решений уравнения (6)

$$f(x(t), x(-t)) = 0. \quad (27)$$

Здесь также возможны два случая: либо $f(u, v) \equiv 0$, либо $f(u, v) \neq 0$.

В последнем случае исследование уравнения (6) сводится к нахождению совместных решений двух уравнений: дифференциально-функционального уравнения (6) и функционального уравнения (27). Эти уравнения имеют, вообще говоря, конечное число совместных решений.

Пр и м е р 4.

$$x'(t) + x'(-t) = ax(t) + b, \quad a \neq 0. \quad (28)$$

Здесь $f(u, v) = a(u - v)$, так что $x(t) - x(-t) = 0$ и $x'(t) + x'(-t) = 0$. Уравнение (28) имеет единственное решение $x(t) = -\frac{b}{a}$.

Пр и м е р 5.

$$a^{x(t)}x'(t) + a^{x(-t)}x'(-t) = bx(t), \quad a > 0, \quad b \neq 0. \quad (29)$$

Для этого уравнения $g(u, v) \equiv 0$ и $f(u, v) = ba^v(u - v)$. Следовательно, $x(t) - x(-t) = 0$, $x'(t) + x'(-t) = 0$ и из (29) вытекает, что $x(t) = 0$.

Пр и м е р 6.

$$x(t)x'(t) + x(-t)x'(-t) = ax^2(t) + b \quad a, b > 0, \quad (30)$$

В данном случае уравнение (27) имеет вид

$$x^2(t) - x^2(-t) = 0,$$

откуда следует, что $x(t)x'(t) + x(-t)x'(-t) = 0$, т.е. левая часть уравнения (30) должна быть равна нулю. Уравнение (30) не имеет (вещественных) решений.

Остается рассмотреть случай, когда и $f(u, v) \equiv 0$, т.е.

$$\frac{P(u, v)}{Q(v, u)} = \frac{Q(u, v)}{P(v, u)} = \frac{R(u, v)}{R(v, u)}. \quad (31)$$

В этом случае уравнение (6) имеет много решений; каждое решение можно задавать произвольным образом при $t \leq 0$ (или $t \geq 0$) и, используя уравнение (6), продолжать решение на $t > 0$ (соответственно, $t < 0$).

Действительно, если $\varphi(t)$ – произвольная C^1 -функция, определенная, например, при $t \geq 0$ и удовлетворяющая при $t = 0$ условию

$$[P(\varphi(0), \varphi(0)) + Q(\varphi(0), \varphi(0))] \varphi'(0) = R(\varphi(0), \varphi(0))$$

(этому условию должно удовлетворять всякое решение уравнения (6)), то, полагая при $t \leq 0$ $x(t) = \varphi(-t)$, получим для $x(t)$ при $t > 0$ дифференциальное уравнение

$$P(x(t), \varphi(t))x'(t) - Q(x(t), \varphi(t))\varphi'(t) = R(x(t), \varphi(t)). \quad (32)$$

Если $\psi(t)$ – решение этого уравнения, определенное при $t \geq 0$ и удовлетворяющее условию $\psi(0) = \varphi(0)$, то функция

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(-t), & t \leq 0, \\ \psi(t), & t > 0, \end{cases}$$

будет решением уравнения (6). Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить выполнение равенств:

при $t > 0$

$$P(\psi(t), \varphi(t))\psi'(t) - Q(\psi(t), \varphi(t))\varphi'(t) = R(\psi(t), \varphi(t)),$$

при $t < 0$

$$-P(\varphi(-t), \psi(-t))\varphi'(-t) + Q(\varphi(-t), \psi(-t))\psi'(-t) = R(\varphi(-t), \psi(-t)).$$

Первое следует из того, что $\psi(t)$ – решение уравнения (32), второе вытекает из первого, если заменить t на $-t$ и воспользоваться соотношением (31).

Для построения решений уравнения (6), когда $f(u, v) = g(u, v) = 0$, удобно поступать следующим образом. Возьмём какую-либо симметрическую функцию $F(u, v)$. При этом функция $F(x(t), x(-t))$ будет четной, какова бы ни была функция $x(t)$. Поэтому каждой четной функции $\alpha(t)$, вообще говоря, соответствует решение уравнения (6), определяемое из (6) и уравнения $F(x(t), x(-t)) = \alpha(t)$. В частности, если $F(u, v) = u + v$, для решений уравнения (6) получаем дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} [P(x(t), \alpha(t) - x(t)) + Q(x(t), \alpha(t) - x(t))] \cdot x'(t) = \\ = Q(x(t), \alpha(t) - x(t))\alpha'(t) + R(x(t), \alpha(t) - x(t)) \end{aligned} \quad (33)$$

и (начальное) условие $x(0) = \frac{1}{2}\alpha(0)$, $\alpha(t)$ – произвольная четная функция.

Пример 7.

$$x'(t) + x'(-t) = R(x(t), x(-t)), \quad (34)$$

$R(u, v)$ – симметрическая функция.

Положим $R(x(t), x(-t)) = \alpha(t)$. Тогда $x'(t) + x'(-t) = \alpha(t)$ и, следовательно, $x(t) - x(-t) = \int_0^t \alpha(\tau) d\tau$. Решения уравнения (34) задаются неявной функцией

$$R(x(t), x(t) - \int_0^t \alpha(\tau) d\tau) = \alpha(t), \quad (35)$$

$\alpha(t)$ – произвольная четная функция.

Пример 8.

$$x(t)x'(t) + x(-t)x'(-t) = a(x(t) + x(-t)). \quad (36)$$

Полагая $x(t) + x(-t) = 2\alpha(t)$ и исключая $x(-t)$ из уравнения (36), получаем дифференциальное уравнение, из которого, учитывая также, что $x(0) = \alpha(0)$, находим

$$x(t) = \alpha(t) + a \frac{\int_0^t \alpha(\tau) d\tau}{\alpha(t)}, \quad (37)$$

$\alpha(t)$ – произвольная четная функция.

5. Не останавливаясь подробно на возможных обобщениях рассмотренных выше уравнений, отметим некоторые возникающие при этом затруднения.

Успех в исследовании уравнений (5), (6) связан с тем, что преобразование аргумента $\tau(t) = -t$ удовлетворяет соотношению (8) и, кроме того, $\tau'(t) = -1$. Соотношению (8) удовлетворяет и много других функций (всякая функция, график которой в плоскости (t, τ) симметричен относительно прямой $\tau = t$). Среди таких функций имеются и непрерывные (много монотонно убывающих и одна монотонно возрастающая ($\tau(t) = t$)), в частности, линейные функции $\tau(t) = h - t$.

Исследование уравнений, отличающихся от уравнений (5), (6) только преобразованием аргумента, в случае, когда $\tau(t) = h - t$, проводится так же, как исследование уравнений (5), (6) (более того, замена $\tilde{t} = t - \frac{h}{2}$, $\tilde{x}(\tilde{t}) = x(t)$ приводит такие уравнения к уравнениям (5), (6)).

Если же $\tau(t) \neq h - t$, то мы не получаем автономную систему дифференциальных уравнений, когда вводим функцию $y(t) = x(\tau(t))$. Неавтономность приводит к дополнительным трудностям, аналогичным тем, которые возникают, если рассматривать уравнения (5), (6) с функциями f или P, Q, R , явно зависящими от t .

Пример 9.

$$x'(t) = ax\left(\frac{b}{t}\right), \quad b > 0, \quad t > 0. \quad (38)$$

Полагая $y(t) = x\left(\frac{b}{t}\right)$, получаем неавтономную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}x' &= ay, \\y' &= -\frac{ab}{t^2}x.\end{aligned}$$

Общее решение этой системы можно выписать и, таким образом, получить решения уравнения (38):

$$x(t) = c\left(t^\lambda + \frac{ab^\lambda}{1-\lambda}t^{1-\lambda}\right), \quad (39)$$

c – произвольная постоянная, $\lambda = \frac{1+\sqrt{1-4a^2b}}{2}$ (при $4a^2b > 1$ вещественные решения уравнения (38) дает вещественная часть решения (39)).

Однако для уравнения

$$x'(t) = ax(\tau(t)) \quad (40)$$

с произвольным (но гладким) $\tau(t)$, удовлетворяющим соотношению (8), записать явно решения нельзя: C^2 -решения уравнения (40) являются решениями уравнения

$$x''(t) - a^2\tau'(t)x(t) = 0,$$

в котором $\tau'(t)$ может быть на полуоси произвольной отрицательно определенной функцией.

Исследование дифференциально-функциональных уравнений более высокого порядка или систем таких уравнений, так же, как и уравнений, у которых группа преобразований имеет порядок больше двух, естественно пытаться проводить таким же образом, и в этих случаях трудности будут связаны, в основном, только с увеличением размерности.

Литература

1. Adams C. R. *The general theory of a class of linear partial q-difference equations* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1924. – **Vol. 26**, No.3. – P. 283-312.
2. Adams C. R. *On the linear ordinary q-difference equation* // Ann. Math., Second Series. – 1929. – **Vol. 30**, No.1/4. – P. 195-205.
3. Adams C. R. *On the linear partial q-difference equation of general type* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1929. – **Vol. 31**, No. 2. – P. 360-371.
4. Adams C. R. *Linear q-difference equations* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1931. – **Vol. 37**, No. 6. – P. 361-400.
5. Аристов И. И. *Об итерации функций* // Изв. физ.-мат. о-ва при Казан. ун-те. – 1900. – **2**, № 10.
6. Арнольд В. И. *Малые знаменатели, I. Об отображениях окружности на себя* // Изв. СССР, сер. мат. – 1961. – **25**, 1. – С. 21-85.
7. Ацель Я. *Некоторые общие методы в теории функциональных уравнений одной переменной. Новые применения функциональных уравнений* // Успехи мат. наук. – 1956. – **11**, № 3. – С. 3-68.
8. Aczel J. *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen.* – Stuttgart: Basel, 1961. – 331 p.
9. Babbage Ch. *An essay towards the calculus of functions. Part II* // Philos. Trans. of London. – 1816. – **106**, p. 2, Ser. A. – P. 179-256.
10. Белицкий Г. Р. *Функциональные уравнения и локальная сопряженность отображений класса C^∞* // Мат. сборник. – 1973. – **91**, № 4. – С. 565–579.
11. Беллман Р., Кук К. Л. *Дифференциально-разностные уравнения.* – Москва: Мир, 1967. – 548 с.

12. Бетхер Л. Э. *Главнейшие законы сходимости итераций и приложение их к анализу* // Изв. физ.-мат. о-ва при Казан. ун-те. – 1903. – XIII; 1904. – XIV.
13. Бетхер Л. Э. *Итерация $f_x(z)$ алгебраической функции $f(z)$ как метатрансцендентная функция указателя x* // Изв. физ.-мат. о-ва при Казан. ун-те. – 1913. – 2, № 18.
14. Birkhoff G. D., Guenther P. E. *Note on a canonical form for the linear q -difference system* // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. – 1941. – 27. – P. 218-222.
15. Birkhoff G. D. *Formal theory of irregular linear difference equations* // Acta Mathematica. – 1930. – Vol. 54, 1. – P. 205-246.
16. Блейх Ф., Мелан Е. *Уравнения в конечных разностях статистики сооружений*. – Харьков: ОНТИ, 1936. – 269 с.
17. Брюно А. Д. *Аналитическая форма дифференциальных уравнений* // Труды Моск. мат. о-ва. – 1971. – 25. – С. 119–262; 1972. – 26. – С. 199–239.
18. Вайнберг Н.Г.М., Каменский Г.А., Мышкис А.Д. *О поведении решений дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом нейтрального типа, обладающего интегрирующим множителем* // Доклады АН СССР. – 1973. – 212, № 4. – С. 785-788.
19. Вайнберг Н.Г.М., Каменский Г.А., Мышкис А.Д. *О дифференциальном уравнении нейтрального типа, обладающем интегрирующим множителем* // Дифференц. уравнения. – 1973. – 9, № 11. – С. 1956-1965.
20. Валеев К. Г. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздыванием, линейно зависящим от аргумента* // Сиб. мат. журн. – 1964. – 5, № 2. – С. 290-309.
21. Вейль Г. *Классические группы, их инварианты и представления*. – Москва: Государственное издат. иностр. литер. 1947. – 404 с.

22. Гельфонд А. О. *Исчисление конечных разностей*. – Москва; Ленинград : Государственное издат. технико-теоретической литературы, 1952. – 479 с.
23. Ghermanescu M. *Ecuatii functionale*. – Romanian: Bucuresti Academiei Republicii Populare Romine, 1960. – 521 p.
24. Герсеванов Н.М. *Итерационное исчисление и его применения*. – Москва: Машстройиздат, 1950. – 69 с.
25. Guldberg A., Wallenberg G. *Theorie der linearen differencgleichungen*. – Leipzig-Berlin, 1911. – 288 p.
26. Siegel C. L. *Über die Normalform analytischer Differencgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung*, *Göttinger Nachrichten der Akademie der Wissenschaften // Bull Amer. Math Soc.* – 1952. – **78(6)**. – P. 923–952.
27. Kordylewski J., Kuczma M. *On some linear functional equations, I, II // Ann. Polon. Math.* – 1960. – **9**. – P. 119-136; 1962. – **11**. – P. 203-207.
28. Kuczma M. General solution of the functional equation $\phi[f(x)] = G(x, \phi(x))$ // *Ann. Polon. Math.* – 1960. – **8**. – P. 201-207; – **9**. – P. 275-284.
29. Kuczma M. *Bemerkungen über die Klassifikation der Funktionalgleichungen, Roczniki. P.T.M. // Prace Mat.* – 1965. – **9**. – P. 169-183.
30. Kuczma M. *Functional equations in a single variable*. – Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1968. – 384 p.
31. Ливенцов А.И. *Опыт систематического изложения функционального счисления с одним независимым переменным // Мат. сборник*. – 1876. – **8**, вып. I. – С. 80-160.
32. Марков А. *Числення скінченних різниць*. – Харьков: ОНТИ, 1936. – 243 с.
33. Мышкис А. Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом*. – Москва-Ленинград, 1951. – 256 с.; изд. 2-е, Москва, 1972. – 352 с.

34. Nörlund N. E. *Vorlesungen über Differenzenrechnung*. – Berlin: Springer-Verlag, 1924. – 563 p.
35. Пелюх Г. П. *О гладких решениях нелинейных функциональных уравнений в резонансном случае* // В кн.: Труды семинара по дифференциальным и интегральным уравнениям, вып. I. – Киев: Изд-во Ин-та математики АН УССР. – 1969. – С. 312-314.
36. Пелюх Г. П. *О гладких решениях системы нелинейных функциональных уравнений* // В кн.: Труды семинара по математической физике и нелинейным колебаниям, вып. III. – Киев: Изд-во Ин-та математики АН УССР. – 1969. – С. 236-242.
37. Пелюх Г. П. *О голоморфных решениях нелинейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа* // В кн.: Дифференциально-разностные уравнения. – Киев: Изд-во Ин-та математики АН УССР. – 1971. – С. 121-124.
38. Пелюх Г. П. *Общее решение одного класса линейных функциональных уравнений* // В кн.: Нелинейные колебания и устойчивость движения. – Киев: Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1973. – С. 194-198.
39. Пелюх Г. П. *О голоморфных решениях систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений* // В кн.: Метод интегральных многообразий в нелинейных дифференциальных уравнениях. – Изд-во Ин-та математики АН УССР. – Киев, 1973. – С. 182-194.
40. Пелюх Г. П., Шарковський О. М. *Про існування та єдиність розв'язків одного класу функціональних рівнянь* // Доповіді АН УРСР, Сер. А. – 1970. – № 9. – С. 790-794.
41. Пелюх Г. П., Шарковський О. М. *Характеризація елементарних та спеціальних функцій за допомогою функціональних співвідношень* // Доповіді АН УРСР, Сер. А. – 1970. – № 11. – С. 994-998.
42. Пелюх Г. П., Шарковский А. Н. *Общее решение одного класса нелинейных дифференциально-функциональных уравнений*

- нейтрального типа* // В кн.: Приближенные и качественные методы в теории дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1973. – С. 208-229.
43. Пинни Э. *Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения*. – Москва: Изд. иностр. литер., 1961. – 248 с.
44. Полищук В. М. *Зависимость решений линейных дифференциально-разностных уравнений от параметров* // В кн.: Метод интегральных многообразий в нелинейных дифференциальных уравнениях. – Киев: Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1973. – С. 204-212.
45. Полищук В.М. *Представление решений систем линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа* // Дифференц. уравнения. – 1974. – **10**, 8. – С. 1423-1429.
46. Полищук В. М., Шарковский А. Н. *Общее решение линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа* // В кн.: Дифференциально-разностные уравнения. – Киев: Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1971. – С. 125-139.
47. Полищук В.М., Шарковский А.Н. *Представление решений линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа* // Дифференц. уравнения. – 1973. – **9**, № 9. – С. 1627-1645.
48. Przeworska-Rolewicz D. *Equations with transformed argument*. – PWN & Elsevier: Warsaw-Amsterdam, 1973. – 354 p.
49. Poincaré H. *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles*. – Oeuvres, 1. – Paris, 1928.
50. Романенко Е.Ю. *Исследование некоторых вполне интегрируемых дифференциально-функциональных уравнений* // В кн.: Функциональные и дифференциально-разностные уравнения. – Киев: Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1974. – С. 110-128.

51. Романенко Е.Ю. *Представление решений квазилинейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа* // Укр. мат. журн. – 1974. – **26**, 6. – С. 749-761.
52. Романенко Е. Ю., Шарковский А. Н. *О решениях переопределенной системы функциональных уравнений* // В кн.: Метод интегральных многообразий в нелинейных дифференциальных уравнениях. – Киев: Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1973. – С. 220-232.
53. Синцов Д. М. *Заметки по функциональному исчислению* // Изв. Казан. ун-та. – 1903. – **XIII**, № 2. – С. 46-72.
54. Соколов Ю. Д. *Лінійні різницеві рівняння*. – Київ: Вид-во УАН, 1935. – 52 с.
55. Sternberg S. *Local C^n transformations of the real line* // Duke Math. J. – 1957. – **Vol. 24**, No. 1. – P. 97-102.
56. Sternberg S. *Local contractions and a theorem of Poincare* // Amer. J. Math. – 1957. – **Vol. 79**, No. 4. – P. 809-824.
57. Sternberg S. *The structure of local homeomorphisms. II, III* // Amer. J. Math. – 1958. – **Vol. 80**, No. 3. – P. 623-631; – 1959. – **Vol. 81**, No. 3. – P. 578-604.
58. Szekeres G. *Regular iteration of real and complex functions* // Acta Math. – 1958. – **Vol. 100**, Issue 3-4. – P. 204-258.
59. Thron W. J. *Sequences generated by iteration* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – **Vol. 96**, No. 1. – P. 38-53.
60. Trjitzinsky W. J. *Analytical theory of linear q -difference equations* // Acta Math. – 1933. – **Vol. 61**, Issue 1. – P. 1-38.
61. Trjitzinsky W. J. *Theory of non-linear q -difference systems* // Ann. Mat. Pura Appl. – 1938. – **Vol 17**, Issue 1. – P. 59-106.
62. Улам С. *Нерешенные математические задачи*. – Москва, 1964. – 168 с.
63. Fite W. *Properties of the solutions of certain functional differential equations* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1921. – **Vol. 22**, No. 3. – P. 311-319.

64. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. – Москва: Мир, 1970. – Гл. IX. – С. 275-325.
65. Choczewski B. *On differentiable solutions of a functional equation* // Ann. Polon. Math. – 1963. – **13**. – P. 133-138.
66. Choczewski B., Kuczma M. *On the “indeterminate case” in the theory of a linear functional equation* // Fund. Math. – 1966. – **58**. – P. 163-175.
67. Шарковский А. Н. *О решении одного класса функциональных уравнений* // Укр. мат. журн. – 1961. – **13**, 3. – С. 86-94.
68. Шарковский А. Н. *Об условиях единственности для функциональных уравнений* // В кн.: Труды семинара по математической физике и нелинейным колебаниям, вып. 2. – Изд-во Ин-та математики АН УССР. – Киев, 1968. – С. 262-268.
69. Шарковский А.Н. *О проблеме единственности решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом* // Респ. сб. “Математическая физика”, вып. 8. – 1970. – С. 167-172.
70. Шарковский А.Н. *Гладкие решения функциональных и дифференциально-разностных уравнений* // В кн.: Труды V Международ. конф. по нелинейным колебаниям. – Киев: Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1970. – т. 1. – С. 598-602.
71. Шарковский А. Н. *Характеризация косинуса* // Aequationes mathematicae. – 1973. – **Vol. 9**, 2/3. – С. 121-128.
72. Шарковский А. Н. *О функциональных и дифференциально-функциональных уравнениях, у которых отклонение аргумента зависит от неизвестной функции* // В кн.: Функцион. и диф.-разност. уравнения. – Киев: Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1974. – С. 148-155.
73. Шаршанов А. А. *О решении задачи об аналитической итерации в инвариантной области, содержащей неподвижную точку* // В кн.: Труды Междунар. симпозиума по нелиней. колебаниям. Т. 2. – Киев, 1963. – С. 481-495.

-
74. Schröder E. *Über iterierte Funktionen* // Math. Ann. – 1871. – Vol. 3. – P. 296-322.
75. Эльсгольц Л. Э. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*. – Москва: Наука 1964. – 127 с.; изд. 2-е: Эльсгольц Л. Э. и Норкин С. Б. – Москва: Наука, 1971. – 296 с.

ДОБАВЛЕНИЕ

К теории разностных уравнений с непрерывным временем

Е.Ю.Романенко, А.Н.Шарковский

§ 1. Вступление

Разностные уравнения с непрерывным временем (НРУ) можно и должно рассматривать как специальный раздел теории функциональных уравнений. Теория линейных НРУ была развита в работах Дж.Биркгофа и В.Тридинского (см., например, [1, 2]) ещё в начале двадцатого столетия. Возможность быстрого и успешного продвижения в этой области во многом была обусловлена наличием прямых аналогий между линейными НРУ и линейными дифференциальными уравнениями. В то же время для нелинейных НРУ хотя и имеется немало результатов, однако они носят пока довольно “разрозненный” характер. До недавнего времени не существовало более-менее целостной теории даже для простейшего нелинейного уравнения

$$x(t+1) = f(x(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

f – непрерывное отображение интервала I в себя.

Такое положение дел объясняется, в частности, принципиальным отличием нелинейных НРУ от дифференциальных уравнений, как

обыкновенных, так и с запаздыванием. Изучение многих вопросов теории НРУ требует существенно иных подходов.

Когда характеристическое отображение уравнения (1)

$$S : \begin{cases} t \mapsto t + 1, \\ x \mapsto f(x) \end{cases} \quad (2)$$

линейное, нахождение решений не представляет труда. Например, когда $f(x) = ax + b$, $a \neq 1$, функция $(x - \frac{b}{1-a})a^{-t}$, а также любая функция $\omega(t)$ периода 1 являются инвариантами отображения (2), и следовательно, общее решение уравнения (1) описывается формулой

$$x(t) = a^t \omega(t) + b/(1-a), \quad (3)$$

$\omega(t)$ — произвольная периодическая функция периода 1.

Если же отображение f (а значит, и отображение (2)) нелинейное, метод инвариантов эффективен далеко не всегда (см. главу 3).

В случае нелинейных f под решениями обычно понимают односторонние решения — функции $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow I$, удовлетворяющие уравнение (1) на полуоси \mathbb{R}^+ . В такой постановке можно строить решения по шагам: задав произвольным образом решение на $[0, 1)$, затем последовательно находить его значения на $[n, n+1)$, $n = 1, 2, \dots$, исходя из значений на $[n-1, n)$. Понятно, что каждое начальное условие

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [0, 1),$$

задаёт единственное решение

$$x_\varphi(t) = f^n(\varphi(t-n)), \quad t \in [n, n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

и вопрос о существовании решений не стоит. Основным является вопрос о качественном поведении решений, об их асимптотических свойствах, что особенно важно знать, когда речь идёт о приложениях.

Формулу (4) часто бывает удобно записать в виде

$$x_\varphi(t) = f^{(\cdot)}(\varphi(\lceil t \rceil)), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (5)$$

где $\langle \cdot \rangle$ и $\lceil \cdot \rceil$ — целая и дробная части числа.

Если отображение f обратимо, метод шагов позволяет продолжить начальную функцию и на \mathbb{R}^- и тем самым построить двусторонние решения, при этом формула (5) остаётся верной и для $t \in \mathbb{R}^-$.

Цель данного очерка — дать представление о качественных особенностях решений нелинейных уравнений вида (1). Такие уравнения более 30-и лет являются объектом исследований в Институте математики НАН Украины. Основные идеи этих исследований были опубликованы ещё в 1986 г. в монографии [3], но последующее, “более плотное”, изучение уравнения (1) продолжалось и некоторые принципиальные шаги были сделаны совсем недавно.

Естественно, теория НРУ в значительной степени должна опираться на существенно более “продвинутой” теорию дискретных разностных уравнений, но, вместе с тем, она отнюдь не будет простым техническим обобщением. Этот факт можно пояснить на примере уравнения (1) и его дискретного аналога — разностного уравнения

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{R}^+. \quad (6)$$

Каждое решение x_n , $n \in \mathbb{R}^+$, уравнения (6) однозначно определяется значением $x_0 \in I$ и ему соответствует траектория $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots$ отображения f . Иными словами, динамика решения x_n — это динамика осциллятора

$$x_n \mapsto x_{n+1} = f(x_n).$$

В то же время, каждое решение $x(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, уравнения (1) определяется, ввиду (4), своими значениями на целом интервале $[0, 1)$.

Поэтому каждому решению $x_\varphi(t)$ уравнения (1) соответствует уже континуальное семейство траекторий отображения f , а именно, $x_0^\tau, f(x_0^\tau), f^2(x_0^\tau), \dots$, где $\tau \in [0, 1)$ и $x_0^\tau = \varphi(\tau)$. Это означает, что динамику решения $x_\varphi(t)$, отличного на $[0, 1)$ от константы, можно трактовать как динамику континуума несвязанных осцилляторов, которые колеблются по одному и тому же закону, но взаимонезависимо и отличаются только начальными состояниями:

$$\begin{aligned} &\text{в каждой точке } \tau \in [0, 1) \text{ находится осциллятор} \\ &x_n \mapsto x_{n+1} = f(x_n), \quad x_0 = \varphi(\tau). \end{aligned} \quad (7)$$

Именно независимость колебаний осцилляторов (7) является тем фактором, который обычно приводит к очень сложному качественному “строению” решений уравнения (1) на больших временах, даже если динамика осцилляторов в отдельности — простая, например, каждый из них совершает асимптотически периодические колебания.

Анализ уравнения (1) основан на переходе к бесконечномерной динамической системе $\varphi(t) \mapsto f(\varphi(t))$, $\varphi \in C([0, 1], I)$, порождаемой уравнением на пространстве начальных функций. Результаты совсем кратко можно резюмировать так: качественное поведение решений может быть крайне сложным; уже простейшие нелинейные уравнения вида (1), в том числе, с квадратичной нелинейностью, обладают широким спектром решений от асимптотически постоянных до квазислучайных, асимптотические свойства которых описываются в терминах стохастических процессов; типичными для уравнения (1) являются непрерывные и даже сколь угодно гладкие решения, но стремящиеся к разрывным периодическим функциям (которые во многих случаях имеют бесконечное число разрывов на любом интервале единичной длины).

Ниже мы постарались в максимально упрощённой и лаконичной форме показать специфические особенности НРУ и дать хотя бы самое общее представление об источниках этих особенностей.

Для более глубокого ознакомления можно обратиться к работам [3]–[11].

§ 2. Асимптотически разрывные решения

В отличие от дифференциальных, разностные уравнения не обуславливают ни гладкости, ни непрерывности решений; решение $x_\varphi(t)$ может оказаться разрывным даже при непрерывных f и φ . Мы будем рассматривать непрерывные решения. Чтобы $x_\varphi(t)$ было непрерывным, необходимо и достаточно выполнение условий согласования:

$$\varphi \in C([0, 1), I), \quad \varphi(1 - 0) = f(\varphi(0)). \quad (8)$$

Когда f является C^k -гладким, некоторые решения также будут гладкими: для любого $1 \leq i \leq k$ решение x_φ является C^i -гладким на \mathbb{R}^+ , если и только если

$$\varphi \in C^i([0, 1), I), \quad \frac{d^s}{dt^s} \varphi(1-0) = \frac{d^s}{dt^s} (f(\varphi(0))), \quad s = 1, \dots, i.$$

Будем предполагать начальные функции $\varphi(t)$ удовлетворяющими условию (8), кроме того, будем считать их определенными на замкнутом интервале $[0, 1]$, полагая $\varphi(1) = \varphi(1 - 0)$.

Из (4) следует, что поведение решений уравнения (1) на больших временах определяется свойствами итераций 1D отображения

$$f : x \mapsto f(x), \quad x \in I. \quad (9)$$

Далее везде будем предполагать интервал I замкнутым и ограниченным.

Наличие у уравнения (1) равномерно непрерывных решений зависит от *разделителя* отображения f — множества

$$\mathcal{D}(f) = \{x \in I : \text{траектория } f^n(x), \quad n \in \mathbb{R}^+, \\ \text{неустойчива по Ляпунову}\}.$$

В окрестности точек $x_* \in \mathcal{D}(f)$ имеет место *разбегание близких траекторий*:

- (\diamond) для каждой точки $x_* \in \mathcal{D}(f)$ существует число $d(x_*) > 0$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся точка $x_{**} \in (x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon) \cap I$ и номер m со свойством:
 $|f^m(x_*) - f^m(x_{**})| > d(x_*)$.

Когда разделитель $\mathcal{D}(f)$ содержит подмножество $\mathcal{D}_\diamond(f)$ положительной меры, для которого $\inf_{x \in \mathcal{D}_\diamond(f)} d(x) > 0$, то отображение f называют *чувствительно зависящим от начальных данных* или, короче, *сенситивным*.

Значение множества $\mathcal{D}(f)$ для уравнения (1) становится понятным из “сочетания” формулы (4) со свойством (\diamond), которое приводит к следующему: пусть ради простоты $x_* \in \mathcal{D}(f)$ — неподвижная точка, если $\varphi(t_*) = x_*$ и $\varphi(t)$ не имеет экстремума при $t = t_*$, то, сколь бы малой ни взять окрестность V_n точки $t_n = t_* + n$, получим $\text{diam } x_\varphi(V_n) > d(x_*)$, начиная с некоторого n , и тогда решение $x_\varphi(t)$ не будет равномерно непрерывным на \mathbb{R}^+ ; для гладких φ это означает, что график $x_\varphi(t)$ вблизи точек $t = t_n$ с ростом n будет все более и более похожим на вертикальный отрезок длины $> d(x_*)$.

Теорема 1. *Все решения уравнения (1) являются равномерно непрерывными на \mathbb{R}^+ , если и только если $\mathcal{D}(f) = \emptyset$.*

Конечно уравнение (1) может иметь равномерно непрерывные решения, когда $\mathcal{D}(f) \neq \emptyset$. Нетрудно понять, что решение $x_\varphi(t)$ равномерно непрерывно на \mathbb{R}^+ , если $\varphi^{-1}(\mathcal{D}(f)) = \emptyset$, причём это условие — только достаточное. Простейший пример к обоим этим утверждениям доставляют стационарные решения — функции вида $x(t) \equiv \gamma$, где γ — константа, отвечающая неподвижной точке $x = \gamma$ отображения f ; решение $x(t) \equiv \gamma$ равномерно непрерывно на \mathbb{R}^+ независимо от того, будет неподвижная точка $x = \gamma$ устойчивой или нет.

Стационарные решения и решения, которые к ним стремятся при $t \rightarrow \infty$, будем называть *асимптотически постоянными*. По-

нятно, что эти решения порождаются начальными функциями $\varphi(t)$, для которых интервал $\varphi([0, 1])$ либо схлопывается в неподвижную точку отображения f , либо принадлежит области притяжения притягивающей или полупритягивающей неподвижной точки. Следовательно, у уравнения (1) всегда есть хотя бы одно асимптотически постоянное решение.

Сделаем относительно отображения f предположение:

$$f^2(x) - x \neq 0 \text{ на любом интервале из } I, \quad (*)$$

т.е. потребуем, чтобы в I отсутствовали интервалы, состоящие только из неподвижных точек или циклов периода 2 отображения f . Свойством (*) обладают почти все⁵ $f \in C^k(I, I)$, $k \geq 0$.

Определение 1. Ограниченную непрерывную функцию, заданную на \mathbb{R}^+ , назовём *асимптотически разрывной*, если она не является равномерно непрерывной на \mathbb{R}^+ .

Теорема 2. При условии (*) все решения уравнения (1), отличные от асимптотически постоянных, являются асимптотически разрывными (и наоборот).

В дальнейшем будем предполагать условие (*) выполненным, не оговаривая это особо.

§ 3. Периодичность в асимптотической динамике решений

Асимптотическая разрывность решений уравнения (1) приводит к тому, что описание их предельного поведения не возможно в классе непрерывных функций. Необходимо привлекать к рассмотрению более широкие функциональные пространства, наделённые специальными метриками, отличными от обычных метрик с поточечным сравнением. В этом плане весьма подходящим является

⁵ Говорим, что некоторое свойство выполняется для почти всех $w \in W$, если множество w с этим свойством является резидуальным в W .

пространство $SC(\mathbb{R}^+, 2^I)$
 полунепрерывных сверху функций $\xi : \mathbb{R}^+ \rightarrow 2^I$

(которое включает класс непрерывных функций).

Для полунепрерывных сверху функций, заданных на ограниченном интервале, хорошо приспособленной является метрика ρ_H , определяемая как расстояние Хаусдорфа для графиков функций. Когда речь идёт о функциях на неограниченном интервале, эта метрика становится менее удобной (с технической точки зрения), главным образом из-за того, что соотношение: $\rho_H(\xi_1|_D, \xi_2|_D) < \varrho$ не влечёт соотношение: $\rho_H(\xi_1|_U, \xi_2|_U) < \varrho$ при $U \subset D$. Такого “недостатка” лишена метрика ρ^Δ , задаваемая формулой

$$\rho^\Delta(\xi_1|_D, \xi_2|_D) = \sup_{\varepsilon > 0} \min \left\{ \varepsilon, \sup_{t \in D} \Delta(V_{\xi_1}^\varepsilon(t), V_{\xi_2}^\varepsilon(t)) \right\}, \quad (10)$$

где D — ограниченный замкнутый интервал; $\xi|_D$ — ограничение $\xi(t)$ на D ; $\Delta(\cdot, \cdot)$ — расстояние Хаусдорфа между множествами; $V_\xi^\varepsilon(t) = \xi(\bar{V}_\varepsilon(t))$, $V_\varepsilon(t) = (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \cap D$.

Метрика ρ^Δ осуществляет сравнение функций в “оптимальных” окрестностях точек (локально) и эквивалентна в смысле сходимости метрике ρ_H , которая сравнивает функции в целом (глобально). Отсюда следует, что близкие в C^0 -метрике функции остаются близкими в метрике ρ^Δ , и становится понятным смысл сходимости в этой метрике: $\rho^\Delta(\xi_i, \xi) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда последовательность графиков функций ξ_i имеет топологический предел и этот предел совпадает с графиком функции ξ .

Ввиду описанных выше свойств метрики ρ^Δ именно её целесообразно “взять за основу” метрики пространства $SC(\mathbb{R}^+, 2^I)$. Эту новую метрику обозначим ρ_∞^Δ и определим через ρ^Δ уже “традиционным” образом:

$$\rho_\infty^\Delta(\xi_1, \xi_2) = \sup_{0 < \ell < \infty} \rho^\Delta(\xi_1|_{[0, \ell]}, \xi_2|_{[0, \ell]}), \quad (11)$$

Дальнейший анализ качественного поведения решений предполагает обобщение понятия периодичности непрерывных функций на класс полунепрерывных сверху функций. Введём обозначение

$$\xi_{(\tau)}(t) = \xi(t + \tau).$$

Определение 2. Функцию $\xi \in SC(\mathbb{R}^+, 2^{\mathbb{R}})$ будем называть *периодической*, если существует $p > 0$ такое, что $\xi(t) = \xi_{(p)}(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$. Непрерывную ограниченную функцию $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *Δ -асимптотически периодической*, если существует периодическая функция $\xi \in SC(\mathbb{R}^+, 2^{\mathbb{R}})$ такая, что

$$\rho_{\infty}^{\Delta}(u_{(\tau)}, \xi_{(\tau)}) \rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Когда (12) имеет место, ξ будем называть *Δ -предельной функцией* для u .

В этой терминологии асимптотически постоянные решения представляют собой специальный подкласс Δ -асимптотически периодических функций.

Очень кратко динамику решений уравнения (1) можно охарактеризовать с помощью следующей теоремы.

Теорема 3. *Для почти каждого уравнения вида (1) почти каждое решение является Δ -асимптотически периодическим.*

В то же время, существование у уравнения (1) периодических (а значит, равномерно непрерывных) нестационарных решений — явление исключительное: такие решения есть тогда и только тогда, когда нарушается условие (*), т.е. когда $f^2(x) = x$ при $x \in [x', x''] \subseteq I$, $x' < x''$. А именно, начальные функции φ , для которых $\varphi([0, 1]) \subseteq [x', x'']$, порождают периодические решения с периодом 1 или 2:

$$\begin{aligned} x_{\varphi}(t) &= \varphi(\lceil t \rceil), \quad \text{если } f(x) = x \text{ при } x \in [x', x''], \\ x_{\varphi}(t) &= f^{\langle t \rangle \bmod 2}(\varphi(\lceil t \rceil)) \quad \text{в противном случае.} \end{aligned}$$

Более того, этими двумя случаями исчерпываются все возможности существования у уравнения (1) периодических (равно как и равномерно непрерывных) решений, отличных от стационарных.

В связи с теоремой 3 полезно также заметить следующее. Если периоды циклов отображения f ограничены в совокупности⁶, то все решения уравнения (1) являются Δ -асимптотически периодическими. Когда же у f есть циклы сколь угодно большого периода, уже существуют решения, отличные от Δ -асимптотически периодических. В частности, для гладких f в этом случае траектории некоторых (иногда, почти всех) точек $x \in I$ имеют ω -предельные множества, отличные от циклов. Пусть, например, $x = x_*$ — одна из таких точек, а начальная функция $\varphi_*(t)$ такова, что $\varphi_*(t) \equiv x_*$ на некотором интервале $[t', t'']$, $t' < t''$. Тогда $x_\varphi(t) \equiv \text{const} = f^n(x_*)$ при $t \in [t' + n, t'' + n]$, $n = 0, 1, \dots$. Таким образом, динамика решения $x_\varphi(t)$ оказывается “подчинённой” динамике траектории точки $x = x_*$ и потому не будет асимптотически периодической.

Для конкретного описания предельных функций решений необходимо ещё одно фундаментальное понятие теории динамических систем — *область влияния точки*

$$Q_f(x) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{j > 0} \overline{\bigcup_{i > j} f^i(V_\delta(x))}, \quad x \in I, \quad V_\delta(x) = (x - \delta, x + \delta) \cap I.$$

Почти все отображения $f \in C^k(I, I)$, $k \geq 0$, относятся к классу $F_N = \{f : \text{для любой точки } x \in I$

компоненты связности области влияния $Q_f(x)$
образуют либо цикл, либо цикл интервалов⁷ (**)
и $N < \infty$ — наименьшее общее кратное

⁶ Как известно, это возможно только тогда, когда f имеет циклы только с периодами 2^i , $i = 0, \dots, l$, $l < \infty$.

⁷ Набор замкнутых интервалов $E_0, E_1, \dots, E_{p-1} \subset I$ называют циклом интервалов периода p , если эти интервалы циклически переставляются под действием f и попарно не имеют общих внутренних точек.

их удвоенных периодов⁸ },

каждое со своим $N = N(f)$. В дальнейшем такими f и ограничимся.

Кроме того, чтобы не перегружать текст сложными формулами, ограничимся начальными функциями из множества

$$\Phi(f) = \left\{ \varphi : \text{если } \varphi(t_*) \in \mathcal{D}(f), \text{ то} \right. \\ \left. \varphi \text{ не имеет экстремума при } t = t_* \right\},$$

другими словами, потребуем, чтобы начальные функции $\varphi(t)$ переводили окрестность точки $t = t_*$ в (полную) окрестность точки $x = \varphi(t_*)$, если $\varphi(t_*) \in \mathcal{D}(f)$ (точки, в окрестности которых φ является константой, также относим к точкам экстремума).

Теорема 4. Пусть $f \in F_N$. Если $\varphi \in \Phi(f)$, то решение $x_\varphi(t)$ является Δ -асимптотически периодическим. Точнее, решение $x_\varphi(t)$ имеет Δ -предельную функцию вида

$$\mathcal{P}_\varphi(t) = f^{(t) \pmod p} \left(Q_{fN}(\varphi(\lceil t \rceil)) \right), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (13)$$

при этом $p = p(\varphi)$, наименьший период функции $\mathcal{P}_\varphi(t)$, является делителем N (здесь, как и ранее, $\langle \cdot \rangle$ и $\lceil \cdot \rceil$ обозначают целую и дробную части числа).

Отметим, что теорема 4 имеет место при значительно более слабых условиях на φ , которые для широких классов уравнений оставляют в силе формулу (13) для почти всех решений (см., например, [3, 8]); это важно, поскольку класс $\Phi(f)$ может для некоторых f оказаться довольно узким; например, если $\mathcal{D}(f) = I$, то $\Phi(f)$ состоит только из монотонных функций.

⁸ Необходимость удваивать периоды вызвана тем, что в некоторых случаях множество $Q_f(x)$ состоит из p интервалов (образующих цикл интервалов периода p), каждый из которых в свою очередь состоит из двух (смежных) интервалов, переходящих друг в друга при отображении f^p .

Важно также отметить, что для уравнений с $f \notin F_N$ (ни при каком N) возможны ситуации, когда типичными являются Δ -асимптотически почти периодические решения, стремящиеся к почти периодическим полунепрерывным сверху функциям (см. пример в § 6).

§ 4. Специфические особенности решений

Теоремы 3 и 4 показывают, что для уравнений вида (1) характерны Δ -асимптотически периодические решения с разрывными предельными функциями. Это, с одной стороны, говорит о простоте (регулярности) асимптотической динамики таких решений⁹, а с другой, показывает, что их поведение на больших временах может быть весьма сложным ввиду сложности соответствующих Δ -предельных функций. Остановимся на простейших выводах, касающихся этой сложности. Ради упрощения, дополним условия теоремы 4 ещё одним предположением:

Множество циклов периода n у отображения f (***)
не более, чем конечно при каждом $n \in \mathbb{R}^+$,

которому удовлетворяют почти все $f \in C^k(I, I)$, $k \geq 0$, и которое автоматически “перекрывает” условие (*), но не условие (**).

Асимптотическое поведение решений $x_\varphi(t)$, $\varphi \in \Phi(f)$, характеризуется их Δ -предельными функциями и в значительной мере определяется множеством $\varphi^{-1}(\mathcal{D}(f))$ (которое, при сделанных выше предположениях, пусто только для асимптотически постоянных решений).

- $\mathcal{P}_\varphi(t)$, как функция из \mathbb{R}^+ в 2^I , разрывна и полунепрерывна сверху. Если $[t_0] \notin \varphi^{-1}(\mathcal{D}(f))$, то $\mathcal{P}_\varphi(t_0)$ — одноточечное множество; если $[t_0] \in \varphi^{-1}(\mathcal{D}(f))$, то $\mathcal{P}_\varphi(t_0)$ — невырожденный

⁹ В этом смысле уравнения (1) оказываются более простыми, нежели уравнения (6), типичные решения последних могут, как известно, и не быть асимптотически периодическими.

замкнутый интервал, который назовём скачком функции \mathcal{P}_φ . Множество значений функции $\mathcal{P}_\varphi(t)$ конечно (в силу (***)).

- Во многих случаях график функции $\mathcal{P}_\varphi(t)$ является локально самоподобным и на любом интервале единичной длины оказывается фракталом, т.е. его фрактальная размерность > 1 . Эти свойства наследуются решениями от разделителя $\mathcal{D}(f)$, для которого они, как известно, характерны. Схематически это можно пояснить так. Пусть \dim_{box} обозначает box-counting размерность (одну из версий фрактальной размерности) и gr обозначает график функции. Так как число скачков функции \mathcal{P}_φ конечно, то $\dim_{\text{box}} \text{gr } \mathcal{P}_\varphi|_{[0,1]} = \dim_{\text{box}} \varphi^{-1}(\mathcal{D}(f)) + 1$. Поэтому, если $\dim_{\text{box}} \varphi^{-1}(\mathcal{D}(f)) \neq 0$, то фрактальная размерность $\text{gr } \mathcal{P}_\varphi|_{[0,1]}$ больше 1 и даже может равняться 2 (последнее заведомо возможно, когда $\mathcal{D}(f)$ содержит интервал).

Отсюда, в частности, вытекает, что с решением $x_\varphi(t)$, раньше или позже, происходит *градиентная катастрофа*: пусть p — асимптотический период решения и d — диаметр какого-либо из его скачков; тогда для любого $L > 0$ и сколь угодно малых $\delta_1, \delta_2 > 0$ существует $T_* > 0$ такое, что при $T > T_*$ в интервале $[T, T + p]$ найдётся точка, в которой константа Липшица решения $x_\varphi(t)$ становится больше L , а колебание решения $x_\varphi(t)$ в δ_1 -окрестности этой точки остаётся большим $d - \delta_2$. К тому же, в большинстве случаев количество такого рода точек, а значит, и число незатухающих колебаний решения на $[T, T + p]$ неограниченно растёт при $T \rightarrow \infty$,¹⁰ и следовательно, со временем поведение решения приобретает хаотический характер.

Хаотичность решения $x_\varphi(t)$ естественно оценивать, исходя из множества $\varphi^{-1}(\mathcal{D}(f))$. Когда $\varphi^{-1}(\mathcal{D}(f))$ является фракталом, можно говорить о высокой степени хаотизации, которая характеризуется следующим свойством.

¹⁰ Число колебаний растёт по степенному закону, если топологическая энтропия $\text{ent } f$ отображения f равняется нулю, и может расти экспоненциально, если $\text{ent } f > 0$.

- *Фрактальная геометрия решений.* Геометрические свойства решения $x_\varphi(t)$ в определённом смысле весьма нестандартны — регулярная (возможно, даже сколь угодно гладкая) кривая $y = x_\varphi(t)$ асимптотически стремится к локально самоподобному фрактальному множеству $\{(t, y) : t \in \mathbb{R}^+, y \in \mathcal{P}_\varphi(t)\}$.

Наиболее развитая хаотизация решения $x_\varphi(t)$, которую назовём сильной, происходит в случае, когда $\varphi^{-1}(\mathcal{D}(f))$ — невырожденный интервал (т.е. Δ -предельная функция решения разрывна в каждой точке). Сильной хаотизации присущи следующие особенности.

- *Space-filling свойство.* График решения $x_\varphi(t)$ имеет размерность 1, а график его предельной функции $\mathcal{P}_\varphi(t)$ — размерность 2 и, более того, $\dim_{\text{box}} \text{gr } \mathcal{P}_\varphi|_{[T, T+\delta]} = 2$ при любых $T \geq 0$ и $\delta > 0$. В результате кривая $y = x_\varphi(t)$ при больших t становится подобной плоской space-filling-кривой — непрерывной 2-мерной кривой, которая проходит через каждую точку некоторого квадрата. Точнее, график решения при $T \rightarrow \infty$ “стремится заполнить целиком” всю область $\Pi_{T, \delta} = \{(t, y) : t \in [T, T + \delta], y \in \mathcal{P}_\varphi(t)\}$, а именно, для любого $\epsilon > 0$ существует $T_\epsilon > 0$ такое, что при $T > T_\epsilon$ график $x_\varphi(t)$ “проходит” около каждой точки из $\Pi_{T, \delta}$ на расстоянии, меньшем ϵ .

- *Попадание за горизонт предсказуемости.* Наличие space-filling свойства приводит к тому, что решение $x_\varphi(t)$ попадает за горизонт предсказуемости: его значения на больших временах невозможно достоверно вычислить. Пусть d_o — наименьший из диаметров скачков Δ -предельной функции $\mathcal{P}_\varphi(t)$. Для сколь угодно малых $\epsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдётся $K > 0$ такое, что

$$\sup_{t': |t-t'| < \epsilon} |x_\varphi(t+n) - x_\varphi(t'+n)| \geq d_o - \delta > 0 \quad \text{при } n > K.$$

Поэтому вычисление числовых значений $x_\varphi(t)$ при больших t теряет смысл (если $d_o > \epsilon$) и тогда желательно использовать вероятностные подходы.

Несложно понять, что space-filling свойство и непредсказуемость решений обусловлены чувствительностью отображения f и, так сказать, отражают её в геометрическом и, соответственно, вычислительном планах.

В заключение этого параграфа упомянем ещё об одной специфической особенности.

- *Универсальные бифуркационные свойства решений.* Эти свойства наблюдаются у широких классов уравнений вида (1) и отражают закономерности, не зависящие от конкретного вида нелинейности. Они наследуются, более или менее очевидным образом, от дискретного уравнения (6) (универсальные свойства последнего см., например, в [3, 12]). В частности, упорядочение Шарковского натуральных чисел

$$\begin{aligned} 1 \prec 2 \prec 2^2 \prec 2^3 \prec \dots \prec 7 \cdot 2^2 \prec 5 \cdot 2^2 \prec 3 \cdot 2^2 \prec \dots \\ \prec 7 \cdot 2 \prec 5 \cdot 2 \prec 3 \cdot 2 \prec \dots 7 \prec 5 \prec 3, \end{aligned} \quad (14)$$

описывающее закономерности сосуществования циклов разных периодов у непрерывных отображений (если есть цикл периода p , то есть и циклы с любым периодом $p' \prec p$), может “контролировать” сосуществование периодических и почти периодических решений уравнения (1) (см. раздел 6). Другие универсальные свойства, касающиеся гладких отображений и описываемые специальными константами, наиболее известные из которых — константы Фейгенбаума $\alpha = 2.5029\dots$ и $\delta = 4.6992\dots$, также индуцируют универсальные свойства решений уравнения (1) (см., например, [3, 13, 14, 15]).

§ 5. Явление автостохастичности

Остановимся совсем коротко на, пожалуй, самом “экзотическом” свойстве НРУ: на существовании *автостохастических решений* — со-временем-непредсказуемых решений, свойства которых

на больших временах описываются случайными процессами. Явления такого рода получили название *автостохастичность* [4], в самой общей трактовке это — саморазвитие в детерминированной системе хаотических процессов, которые подчиняются неким статистическим закономерностям (допускают описание методами теории вероятностей).

К сожалению, здесь не удастся избежать нескольких громоздких формул. Основным “инструментом” будет понятие конечномерных распределений случайного процесса $\zeta(t)$ (определение и свойства которых можно найти в любом учебнике по теории вероятностей) — функций вида

$$\mathcal{F}_\zeta(x_1, \dots, x_r, t_1, \dots, t_r), \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad t_i \in \mathbb{R}^+, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

принимающих значения из $[0, 1]$ и удовлетворяющих условиям согласования Колмогорова. Значение распределения (15) называется *вероятностью* того, что $\zeta(t_1) \leq x_1, \zeta(t_2) \leq x_2, \dots, \zeta(t_r) \leq x_r$.

Вместо расширенного пространства $SC(\mathbb{R}^+, 2^I)$ используем

пространство $Re(\mathbb{R}^+, I)$ случайных процессов $\zeta : \mathbb{R}^+ \rightarrow I$, заданных своими конечномерными распределениями

(процессы, имеющие одинаковые наборы конечномерных распределений, отождествляются¹¹). Пространство $Re(\mathbb{R}^+, I)$ содержит, в частности, класс детерминированных непрерывных функций, рассматриваемых как соответствующие наборы конечномерных распределений¹².

¹¹ Этот подход вполне оправдан в рамках классических методов теории вероятностей, которые используют только конечномерные распределения. Термин “случайный процесс” (вместо “набор конечномерных распределений”) употребляем из соображений краткости, что не является общепринятым в современной теории вероятностей.

¹² Для детерминированной функции $\zeta_*(t)$ имеем $\mathcal{F}_{\zeta_*}(x_1, \dots, x_r, t_1, \dots, t_r) = \prod_{i=1}^r \mathcal{F}_{\zeta_*}(x_i, t_i)$, $\mathcal{F}_{\zeta_*}(x, t) = \chi_{(-\infty, x]}(\zeta_*(t))$, где $\chi_B(\cdot)$ — характеристическая функция (индикатор) множества B .

Метрика в $\text{Re}(\mathbb{R}^+, I)$ должна сравнивать распределения значений процессов в окрестности каждой точки (и тогда она будет “тоньше” метрики ρ_∞^Δ). Чтобы получить эту метрику, следует множество $\xi(V_\varepsilon(t))$ в (10) заменить на распределение процесса ζ на множестве $V_\varepsilon(t)$. Эти соображения приводят к метрике

$$\rho_\infty^\#(\zeta_1, \zeta_2)_\theta = \sup_{0 < \ell < \infty} \rho^\#(\zeta_1|_{[0, \ell]}, \zeta_2|_{[0, \ell]})_\theta, \quad (16)$$

где

$$\rho^\#(\zeta_1|_D, \zeta_2|_D)_\theta = \sup_{\varepsilon > 0} \min \left\{ \varepsilon, \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\theta^r} \sup_{\substack{x_1, \dots, x_r \in I \\ t_1, \dots, t_r \in D}} \left| \mathcal{F}_{\zeta_1}^{r, \varepsilon}(x_1, \dots, t_r) - \mathcal{F}_{\zeta_2}^{r, \varepsilon}(x_1, \dots, t_r) \right| \right\}, \quad (17)$$

$\theta > 1$ — параметр (технического характера), $\mathcal{F}_\zeta^{r, \varepsilon}(x_1, \dots, t_r)$ — усреднение r -мерного распределения процесса ζ по ε -окрестности точки $(t_1, \dots, t_r) \in D^r$.

Метрика $\rho_\infty^\#$ сохраняет близость несингулярных¹³ непрерывных функций, близких в “своей родной” C^0 -метрике. Смысл сходимости в метрике $\rho^\#$ (и её связь с понятием слабой сходимости вероятностных мер) раскрывает следующее утверждение: если $\rho^\#(\zeta_i, \zeta) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, то $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{\zeta_i}^{r, \varepsilon}(x_1, \dots, t_r) = \mathcal{F}_\zeta^{r, \varepsilon}(x_1, \dots, t_r)$ равномерно по $(x_1, \dots, t_r) \in I^r \times D^r$ при любых фиксированных $r \in \mathbb{R}^+$ и $\varepsilon > 0$.

Поскольку типичные решения уравнения (1) обладают свойством асимптотической периодичности, вероятностное описание решений также должно отражать это свойство — использовать периодические случайные процессы. Как и ранее, под $\zeta_{(\tau)}(t)$ будем понимать сдвиг $\zeta(t)$ на τ вдоль оси t ; применительно к случайным

¹³ Под *несингулярными* функциями понимаем функции $g(t)$ со свойством: $\text{mes } g^{-1}(A) = 0$ для любого множества A лебеговой меры нуль.

процессам это означает, что $\zeta_{(\tau)}(t)$ задаётся распределениями

$$\mathcal{F}_{\zeta_{(\tau)}}(x_1, \dots, x_r) = \mathcal{F}_{\zeta}(x_1, \dots, x_r, t_1 + \tau, \dots, t_r + \tau), \quad r = 1, 2, \dots$$

Определение 3. Случайный процесс $\zeta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, называют *периодическим*, если существует $p > 0$ такое, что $\zeta(t) = \zeta_{(p)}(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, т.е. все конечномерные распределения процесса инвариантны относительно сдвига времени на $p > 0$ (и, в частности, *стационарным*, если эти распределения инвариантны при любых сдвигах времени). Детерминированную функцию $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *статистически периодической*, если существует периодический случайный процесс ζ такой, что для некоторого $\theta \geq 1$

$$\rho_{\infty}^{\#}(u_{(\tau)}, \zeta_{(\tau)})_{\theta} \rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Когда (18) имеет место, ζ будем называть *статистическим прообразом* для u .¹⁴

Если наличие у уравнения (1) непредсказуемых решений связано с чувствительностью f , то возможность вероятностного описания таких решений должна быть связана с наличием у f гладкой (т.е. абсолютно непрерывной относительно меры Лебега) инвариантной меры. Кроме того, в этом контексте функции f и φ должны быть несингулярными. Анализ решений удаётся провести при некоторых дополнительных предположениях относительно инвариантной меры, которые выполняются для широких классов отображений (см. замечание в конце раздела).

Определение 4. Пусть f имеет нормированную гладкую инвариантную меру μ . Меру μ будем называть *SIM_p-мерой* отображения f если:

¹⁴ У функции существует много статистических прообразов, но все они имеют один и тот же набор усреднённых конечномерных распределений (и не различаются метрикой $\rho_{\infty}^{\#}$).

- 1) носитель меры $\text{supp } \mu$ состоит из интервалов E_0, E_1, \dots, E_{p-1} , образующих цикл интервалов отображения f ;
- 2) мера μ эквивалентна мере Лебега на $\text{supp } \mu$;
- 3) отображение f^p является вероятностно перемешивающим:
 $\mu(A_1 \cap f^{-jp}(A_2)) \rightarrow p \cdot \mu(A_1) \mu(A_2)$ при $j \rightarrow \infty$,
 $A_1, A_2 \subset E_n, n = 0, \dots, p-1$;
- 4) $\text{mes } E_* = 0$, где E_* — граница бассейна
 $\mathcal{E}_f(\mu) = \bigcup_{n=0}^{p-1} \bigcup_{j \geq 0} \text{int } f^{-jp}(E_n)$ меры μ .

Теорема 5. Пусть f и φ — несингулярные и кусочно монотонные и f имеет SIM_p -меру μ . Если $\varphi([0, 1])$ принадлежит замыканию бассейна меры μ , то решение $x_\varphi(t)$ является статистически периодическим. Статистическим прообразом для $x_\varphi(t)$ является, в частности, случайный процесс $\mathfrak{F}_\varphi(t) \in \text{Re}(\mathbb{R}^+, I)$, конечномерные распределения которого имеют вид

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{F}_\varphi}(x, \dots, x_r, t, \dots, t_r) = \prod_{i=1}^r \mathcal{F}_{\mathfrak{F}_\varphi}(x_i, t_i), \quad r = 2, 3, \dots$$

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{F}_\varphi}(x, t) = p \cdot \mu \left((-\infty, x] \cap E_{n+\langle t \rangle \pmod{p}} \right) \quad (19)$$

при $\lceil t \rceil \in \varphi^{-1} \left(\bigcup_{j \geq 0} \text{int } f^{-jp}(E_n) \right), 0 \leq n \leq p-1$.

Процесс $\mathfrak{F}_\varphi(t)$ — периодический с периодом p , когда $p > 1$, и стационарный, когда $p = 1$; в последнем случае $\mathcal{F}_{\mathfrak{F}_\varphi}(x, t)$ не зависит ни от t , ни от φ , а именно:

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{F}_\varphi}(x, t) = \mu((-\infty, x] \cap \text{supp } \mu).$$

Отметим, что процесс $\mathfrak{F}_\varphi(t)$ не отражает автокорреляционные свойства решений. Учесть эти свойства можно с помощью другого статистического прообраза, конечномерные распределения которого задаются более сложным образом, но тоже через инвариантную меру μ (см. [10]).

Остановимся вкратце на прикладном аспекте теоремы 5 (он легко “извлекается” из сходимости $x_\varphi(t)$ к $\mathfrak{F}_\varphi(t)$ в метрике $\rho_\infty^\#$).

Теорема 6. *Если $r_* \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_* > 0$ — заданы, то для сколь угодно малого $\sigma > 0$ найдётся $T_* > 0$ такое, что при любых $\ell > 0$ и $(x_1, \dots, x_r) \in I^r$*

$$\left| \mathcal{F}_{x_\varphi}^\varepsilon(x_1, \dots, x_r, t_1, \dots, t_r) - \mathcal{F}_{\mathfrak{F}_\varphi}^\varepsilon(x_1, \dots, x_r, t_1, \dots, t_r) \right| \leq \sigma, \quad (20)$$

когда $\varepsilon > \varepsilon_$, $(t_1, \dots, t_r) \in [\tau, \tau + \ell]^r$, $\tau > T_*$, $r \leq r_*$.*

В частности, если $p = 1$, то (20) принимает вид

$$\left| \mathcal{F}_{x_\varphi}^\varepsilon(x_1, \dots, x_r, t_1, \dots, t_r) - \prod_{i=1}^r \mu((-\infty, x_i] \cap \text{supp } \mu) \right| \leq \sigma.$$

Таким образом, на больших временах (детерминированные) решения уравнения (1) ведут себя подобно случайным процессам: статистические свойства решений описываются при помощи их статистических прообразов. Теорема 6 показывает, как усреднённые распределения решения характеризуются усреднёнными распределениями его статистического прообраза. Более того, оказывается, что, если ε достаточно, но не слишком мало, то ε -усреднённые распределения решения можно охарактеризовать с помощью обычных, не усреднённых, распределений статистического прообраза (см. [10]). Таким образом, математическое ожидание, дисперсия и другие числовые характеристики случайного процесса $\mathfrak{F}_\varphi(t)$ “почти наверное” могут быть использованы для описания статистических свойств решения $x_\varphi(t)$. Попутно отметим, что теоремы 5 и 6 естественным образом обобщаются на случай, когда значения $\varphi(t)$ попадают в бассейны нескольких SIM-мер отображения f .

Автостохастичность для уравнений вида (1) — явление не исключительное. Во-первых, если уравнение имеет автостохастическое решение, то таких решений “много”: множество начальных функций, порождающих автостохастические решения, содержит

открытое подмножество. Более того, уравнений вида (1) с автостохастичностью тоже “много”, но уже в метрическом смысле: для широких классов отображений $f = f_\lambda$, гладко зависящих от параметра $\lambda \in [\alpha, \beta]$ (по крайней мере унимодальных; см., например, [16]), имеет место факт:

$$\text{mes} \{ \lambda \in [\alpha, \beta] : f_\lambda \text{ имеет СИМ-меру} \} > 0.$$

Это означает, что автостохастичность в уравнениях вида (1) *физически реализуема* — имеет место на множестве параметров положительной меры.

§ 6. Пример: квадратичная нелинейность

Этот параграф можно пропустить, если цель читателя — получить только самое общее представление о сложностях, которые спрятаны в простых разностных уравнениях. Рассматриваемый здесь пример будет полезен для тех, кто хочет более глубоко и неформально ознакомиться со спецификой нелинейных уравнений вида (1), увидеть и “прочувствовать” истоки этой специфики, “спрятанные” в асимптотической динамике соответствующего характеристического отображения (2), точнее, в динамике его нелинейной составляющей $x \mapsto f(x)$.

Выше мы описали общие свойства уравнений вида (1), акцентируя внимание на специфических особенностях решений. Важно подчеркнуть, что эти особенности (за исключением асимптотической разрывности) могут наблюдаться только у уравнений с необратимой нелинейностью f . Среди таких уравнений наиболее простые — уравнения с квадратичным f . Оказывается, что даже эти, квадратичные, уравнения обладают всеми характерными свойствами уравнений общего вида. “Простота” нелинейности в данном случае ведёт лишь к определённом единообразию в поведении всех решений.

В качестве примера возьмём простейшее квадратичное уравнение

$$x(t+1) = (x(t))^2 + \lambda, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \quad (21)$$

и вкратце опишем его свойства в зависимости от параметра $\lambda \in \mathbb{R}$. Для решений $x_\varphi(t)$ уравнения (21) и их начальных функций $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ справедливы соотношения (4) и (8). Это позволяет анализировать поведение решений, исходя из динамики отображения

$$h : x \mapsto x^2 + \lambda, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (22)$$

свойства которого хорошо изучены и широко известны. Отметим, что в данном контексте основную роль играют циклы отображения (22), закон сосуществования которых описывается упорядочением (14).

1. Ограниченность решений. Если $\lambda > 1/4$, то $h(x) > x$ при всех $x \in \mathbb{R}$, и следовательно, каждое решение — неограничено, точнее: $\lim_{t \rightarrow \infty} x_\varphi(t) = \infty$ для любой начальной функции $\varphi(t)$.

При $\lambda \leq 1/4$ у отображения h уже есть неподвижные точки, это — точки $\gamma = \frac{1+\sqrt{1-4\lambda}}{2}$ и $\gamma_0 = \frac{1-\sqrt{1-4\lambda}}{2}$, которым отвечают стационарные решения $x(t) = \gamma$ и $x(t) = \gamma_0$. Более того, при $-2 \leq \lambda \leq 1/4$ у h есть ограниченный инвариантный интервал $I_\lambda = [-\gamma, \gamma]$. Поэтому, если $\varphi([0, 1]) \subseteq I$, то соответствующее решение $x_\varphi(t)$ — ограничено: принимает значения из I_λ при всех $t \in \mathbb{R}^+$; в противном случае $x_\varphi(t)$ — неограничено. Когда $\lambda < -2$, отображение h уже не имеет ограниченных инвариантных интервалов и потому все нестационарные решения неограничены.

При $\lambda \leq 1/4$ поведение неограниченных решений характеризуется следующим образом. Если $\varphi([0, 1]) \subset (\gamma, \infty)$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} x_\varphi(t) = \infty$. Если же это условие на φ не выполняется, то всегда найдётся последовательность $t_i \rightarrow \infty$ такая, что $x_\varphi(t_i) \in I_\lambda$, $i = 0, 1, \dots$, и тогда $x_\varphi(t)$ колеблется с амплитудой, бесконечно возрастающей с ростом t .

Как могут вести себя ограниченные решения? Как уже отмечалось, уравнение (21) имеет ограниченные решения, отличные

от стационарных, только при $-2 \leq \lambda \leq 1/4$ и эти решения порождаются только теми начальными функциями φ , для которых $\varphi([0, 1]) \subseteq I_\lambda$.

Чтобы сразу же не начинать с “негрубых” ситуаций, исключим случай $\lambda = 1/4$, а также исключим решения, “цепляющиеся” за концы интервала I_λ , т.е. будем считать, что

$$-2 \leq \lambda < 1/4 \text{ и } |\varphi(t)| < \frac{1 + \sqrt{1 - 4\lambda}}{2} \text{ при } t \in [0, 1]. \quad (23)$$

Тогда для $x_\varphi(t)$ найдётся $\varepsilon = \varepsilon(\varphi) > 0$ со свойством:

$$|x_\varphi(t)| \leq \frac{1 + \sqrt{1 - 4\lambda}}{2} - \varepsilon \text{ при } t \in \mathbb{R}^+ \quad (-2 \leq \lambda < 1/4).$$

Далее под решениями будем понимать решения $x_\varphi(t)$, для которых условия (23) выполняются; вместо I_λ будем писать просто I .

Обозначим через f ограничение отображения h на интервал I , т.е. примем:

$$f : x \mapsto x^2 + \lambda, \quad \lambda \in [-2, 1/4], \quad x \in I = [-\gamma, \gamma]. \quad (24)$$

Неподвижная точка γ_0 будет притягивающей для f тогда и только тогда, когда $-3/4 \leq \lambda < 1/4$; при этом её область притяжения — внутренность интервала I . Следовательно, в этом случае все решения $x_\varphi(t)$ являются асимптотически постоянными: стремятся к стационарному решению $x(t) \equiv \gamma_0$. Если же $-2 \leq \lambda < -3/4$, то все решения кроме двух стационарных $x(t) = \gamma$ и $x(t) = -\gamma$ оказываются асимптотически разрывными; более того, в типичных ситуациях они являются Δ -асимптотически периодическими.

2. Δ -асимптотическая периодичность решений. Рассмотрим несколько возможных ситуаций, поясняющих механизмы возникновения Δ -асимптотически периодических решений. Ограничимся решениями $x_\varphi(t)$ с начальными функциями $\varphi \in \Phi(f)$ (см. § 3).

• *Конечное число разрывов на периоде.* При переходе λ через значение $-3/4$ происходит бифуркация удвоения периода: неподвижная точка γ_0 становится отталкивающей и от неё рождается притягивающий цикл периода 2, образованный точками $\gamma_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-4\lambda - 3}}{2}$ и остающийся притягивающим для $-5/4 \leq \lambda < -3/4$. При указанных λ этот цикл притягивает все точки из $I \setminus \mathcal{D}(f)$, где $\mathcal{D}(f)$ — разделитель f , состоящий в данном случае из (неустойчивых) неподвижных точек и их прообразов, т.е. $\mathcal{D}(f)$ представляет собой замкнутое счётное множество $\mathcal{D}(f) = \cup_{k \geq 0} f^{-k}(\gamma_0) \cup \{-\gamma, \gamma\}$ с двумя точками накопления: γ и $-\gamma$. Соответственно, все решения $x_\varphi(t)$ являются Δ -асимптотически периодическими с периодом 2 и стремятся к Δ -периодическим предельным функциям $\mathcal{P}_\varphi(t)$, которые полунепрерывны сверху и принимают три значения, из которых два — одноточечные множества $\{\gamma_1\}$ и $\{\gamma_2\}$, а одно — невырожденный интервал (скачок), представляющий собой область влияния точки γ_0 (Рис. 1). В частности, при $-5/4 \leq \lambda \leq -1$ решение $x_\varphi(t)$ стремится к Δ -предельной функции периода 2

$$\mathcal{P}_\varphi(t) = \begin{cases} \widehat{\varphi}(t), & t \in [0, 1), \\ f(\widehat{\varphi}(t-1)), & t \in [1, 2), \end{cases} \quad \text{где} \quad (25)$$

$$\widehat{\varphi}(t) := Q_{f^2}(\varphi(t)) = \begin{cases} \gamma_1, & t \in \varphi^{-1}(B_1), \\ \gamma_2, & t \in \varphi^{-1}(B_2), \\ [\gamma_1, \gamma_2], & t \in \varphi^{-1}(\mathcal{D}(f)), \end{cases}$$

и B_i — область притяжения точки γ_i
при отображении f^2 , $i = 1, 2$.

Определённая формулой (25) Δ -предельная функция $\mathcal{P}_\varphi(t)$ разрывна на множестве $\mathcal{D}(f, \varphi) := \varphi^{-1}(\mathcal{D}(f)) \subset [0, 1]$, которое ввиду (8) непусто и ввиду (23) конечно, и следовательно, $\mathcal{P}_\varphi(t)$ имеет на любом интервале $[\tau, \tau + 1] \subset \mathbb{R}^+$ непустое конечное множество точек разрыва $\mathcal{D}_\tau(f, \varphi)$, которое получается как пересечение $[\tau, \tau + 1]$ со сдвигами $\mathcal{D}(f, \varphi)$ на $\langle \tau \rangle$ и на $\langle \tau + 1 \rangle$.

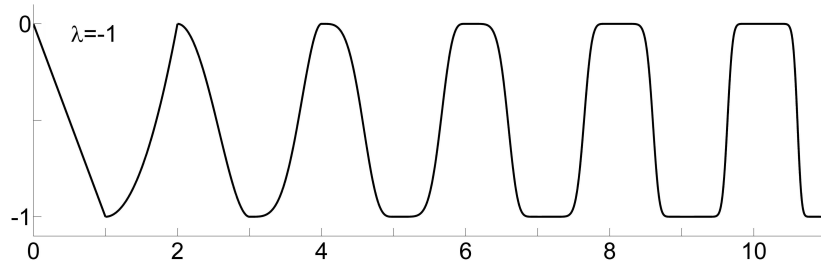


Рис. 1

• *Счётное число разрывов на периоде.* С дальнейшим убыванием λ сначала происходит последовательное удвоение периодов притягивающих циклов, продолжающееся вплоть до значения $\lambda^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k \approx -7/5$, где λ_k — бифуркационное значение, при котором притягивающий цикл периода 2^{k-1} превращается в отталкивающий, но при этом от него же рождается притягивающий цикл периода 2^k . При $\lambda^* < \lambda < -5/4$ отображение f имеет циклы только периодов $1, 2, 2^2, \dots, 2^m, m = m(\lambda) \geq 2$ и $m(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \lambda^*$. При этом только цикл периода 2^m , который обозначим Γ , является притягивающим, остальные — отталкивающие. Соответственно, разделитель $\mathcal{D}(f)$ состоит из точек отталкивающих циклов и их прообразов. Аналогично предыдущему случаю все решения $x_\varphi(t)$ будут Δ -асимптотически периодическими. Их Δ -предельные функции $\mathcal{P}_\varphi(t)$ полунепрерывны сверху, имеют период 2^m и одну и ту же область значений (в частности, значения этих функций в точках непрерывности принадлежат циклу Γ). На периоде Δ -предельные функции имеют счётное множество точек разрыва и в этом состоит единственное качественное отличие от случая $m(\lambda) = 1$. Объясняется оно тем, что при $m(\lambda) \geq 2$ разделитель $\mathcal{D}(f)$, хотя и является замкнутым счётным множеством, уже имеет существенно больше точек накопления — это прообразы циклов периодов $< 2^{m-1}$. Поэтому ввиду (8) и (23) множество $\mathcal{D}(f, \varphi)$, а значит, и множество $\mathcal{D}_\tau(f, \varphi)$ счётно для всех $\varphi(t)$ и любых $\tau \geq 0$. Такое “устройство” предельных функций приводит к тому, что число колебаний решений на интервале $[\tau, \tau + 1]$

неограниченно растет при $\tau \rightarrow \infty$, но медленно — по степенному закону.

- *Несчётное число разрывов на периоде.* Если продолжать уменьшать λ , то появляются новые циклы, точнее, при $\lambda < \lambda^*$ у f есть циклы периодов, отличных от степени двойки, множество точек всех циклов $\text{Per } f$ незамкнуто, а делитель $\mathcal{D}(f)$ является уже несчётным множеством. Для решений уравнения (21) это приводит к экспоненциальному нарастанию колебаний с увеличением t и, соответственно, к существенной хаотизации решений. Увеличение числа колебаний решения $x_\varphi(t)$ определяется скоростью “размножения” прообразов точек $x \in \mathcal{D}(f)$, которая, как нетрудно показать, равна $e^{\text{ent } f}$, где $\text{ent } f$ — топологическая энтропия отображения f (заметим, что $\text{ent } f > 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda < \lambda^*$). Рассмотрим две типичные ситуации.

На $[-2, \lambda^*]$ существует открытое и плотное подмножество Λ значений параметра, при которых f имеет притягивающий цикл (притом единственный и притягивающий почти все точки из I). При каждом $\lambda \in \Lambda$ соответствующий притягивающий цикл Γ имеет период $l = l(\lambda) > 2$, а делитель $\mathcal{D}(f)$ представляет собой несчётное, нигде не плотное множество — замыкание множества точек $x \in \text{Per } f \setminus \Gamma$ и их прообразов. Например, когда $\lambda = -1.755$, притягивающим является цикл $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ периода $l = 3$ (числовые значения γ_i можно вычислить как нули полинома $\frac{f^3(x)-x}{f(x)-x}$) и делитель $\mathcal{D}(f)$ гомеоморфен множеству Кантора. В этом случае точки $x \in \mathcal{D}(f)$ имеют общую область влияния — интервал $[f^2(0), f(0)] = [\lambda^2 + \lambda, \lambda]$, у точек $x \notin \mathcal{D}(f)$ также общая область влияния — цикл Γ и, наконец, $\text{ent } f = \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Соответственно, Δ -предельные функции решений $x_\varphi(t)$ задаются формулой:

$$\mathcal{P}_\varphi(t) = \begin{cases} \widehat{\varphi}(t), & t \in [0, 1), \\ f(\widehat{\varphi}(t-1)), & t \in [1, 2), \\ f^2(\widehat{\varphi}(t-2)), & t \in [2, 3), \end{cases} \quad (26)$$

где $\widehat{\varphi}(t) := Q_{f^3}(\varphi(t)) = \begin{cases} \gamma_i, & t \in \varphi^{-1}(B_i), \\ [\lambda^2 + \lambda, \lambda], & t \in \varphi^{-1}(\mathcal{D}(f)), \end{cases}$
и B_i – область притяжения точки γ_i
при отображении f^3 , $i = 1, 2, 3$.

Таким образом, решения являются Δ -асимптотически периодическими с периодом 3 (Рис. 2), значения их Δ -предельных функций $\mathcal{P}_\varphi(t)$ в точках непрерывности принадлежат циклу Γ , а множество $\mathcal{D}_\tau(f, \varphi)$, состоящее из точек разрыва функции $\mathcal{P}_\varphi(t)$ на интервале $[\tau, \tau + 1]$, оказывается несчётным для любого $\tau \geq 0$ (оно нигде не плотно и содержит канторово множество). Поэтому чис-

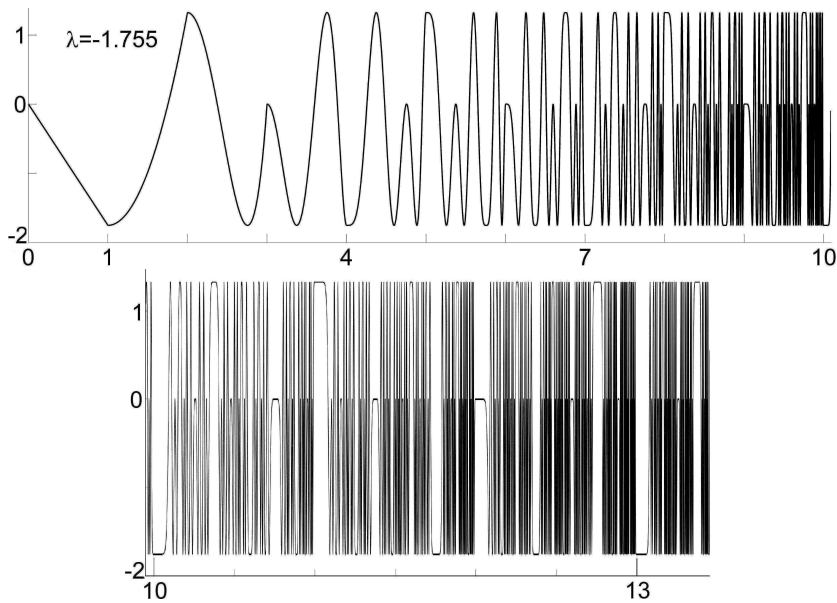


Рис. 2

ло колебаний решений на $[\tau, \tau + 1]$ растет экспоненциально при $\tau \rightarrow \infty$. Точнее, решения колеблются с амплитудой, стремящейся к $\lambda^2 = \text{diam}[\lambda^2 + \lambda, \lambda]$ при $\tau \rightarrow \infty$, и число их колебаний на $[\tau, \tau + 1]$ для больших τ возрастает в $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ раза при увеличении τ

на единицу. Кроме того, $\mathcal{D}(f)$, а следовательно, и $\mathcal{D}_\tau(f, \varphi)$ имеют положительную фрактальную размерность, в результате чего геометрия решений $x_\varphi(t)$ становится с ростом t крайне сложной: они стремятся к “фрактальным” Δ -предельным функциям $\mathcal{P}_\varphi(t)$, для которых $\dim_{\text{box}} \text{gr } \mathcal{P}_\varphi|_{[\tau, \tau+1]} > 1$ (но < 2) при любых $\tau \geq 0$.

3. Автостохастичность. Наряду с подмножеством Λ интервал $[-2, \lambda^*]$ содержит нигде не плотное подмножество положительной лебеговой меры Λ_* , состоящее из тех значений параметра, при которых f имеет (единственный) “поглощающий” цикл интервалов Υ , а именно, каждая точка из I за конечное число итераций попадает в один из интервалов, образующих Υ . В свою очередь, Λ_* содержит подмножество Λ_{**} , которое имеет такую же меру, как Λ_* , и обладает свойством: когда $\lambda \in \Lambda_{**}$, у f существует эргодическая инвариантная мера μ , которая сосредоточена на Υ и является SIM-мерой. Здесь наиболее простую ситуацию имеем при $\lambda = -2$, когда Υ состоит из одного интервала — самого инвариантного интервала $I = [-2, 2]$. В этом случае у f есть циклы любого периода, все они отталкивающие и в совокупности всюду плотны на I , откуда следует, что $\mathcal{D}(f) = I$ и I является областью влияния для $x \in I$ (более того, любая окрестность точки $x \in I$ накрывает I за конечное число итераций). При $\lambda = -2$ отображение f топологически сопряжено с “tent”-отображением $x \mapsto 1 - 2|x - 1/2|$, $x \in [0, 1]$, для которого мера Лебега является SIM-мерой. Это позволяет для отображения f указать SIM-меру μ точно: она задаётся плотностью

$$\mu(dw) = -\frac{dw}{\pi\sqrt{-w^2 + 4}}, \quad w \in [-2, 2]. \quad (27)$$

Такие свойства f отражаются на решениях уравнения (21) следующим образом. Все решения $x_\varphi(t)$ имеют одну и ту же Δ -предельную функцию — “суперфрактальную” функцию

$$\mathcal{P}(t) = [-2, 2], \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (28)$$

для которой $\dim_{\text{box}} \text{gr } \mathcal{P}_\varphi|_{[\tau, \tau+1]} = 2, \quad \tau \geq 0$.

Начиная с некоторого момента, амплитуда решения $x_\varphi(t)$ становится равной 4, а число колебаний на интервале $[\tau, \tau + 1]$ возрастает вдвое, когда τ возрастает на единицу (этот факт очевиден и без привлечения энтропии $\text{ent } f$, которая при $\lambda = -2$ равна $\ln 2$); при этом график решения обладает space-filling свойством: для любого $\epsilon > 0$ найдётся $T_\epsilon = T_\epsilon(\varphi) > 0$ такое, что график (Рис. 3) проходит через ϵ -окрестность каждой точки прямоугольника $\Pi_T = [T, T + 1] \times [0, 1]$, $T > T_\epsilon$. Особенность такого рода решений состоит в том, что их приближенные значения при достаточно больших t могут оказаться отличными от их истинных значений на любую конечную величину $\approx \text{diam } I = 4$ (даже при сколь угодно высокой точности вычислений). Поэтому правомерно ставить вопрос о вероятностном описании. Наличие SIM-меры (27) позволяет это сделать. А именно, все решения $x_\varphi(t)$ являются статистически стационарными, они имеют общий статистический прообраз $\mathfrak{F}(t)$, заданный распределениями

$$\mathcal{F}(x, t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-2}^x \frac{dw}{\sqrt{-w^2 + 4}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} \sqrt{2-x}, \quad x \in [-2, 2], \quad (29)$$

$$\mathcal{F}(x_1, \dots, x_r, t, \dots, t_r) = \prod_{i=1}^r \mathcal{F}(x_i, t_i), \quad x_1, \dots, x_r \in [-2, 2], \quad r=2, 3, \dots$$

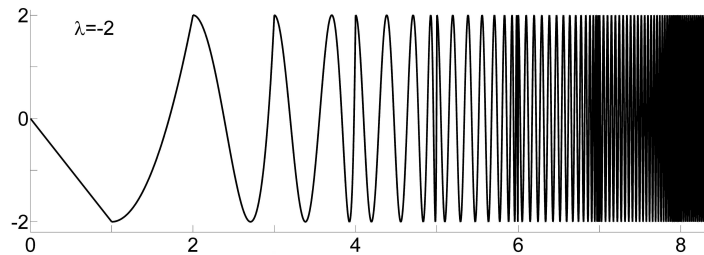


Рис. 3

4. Δ -асимптотическая почти периодичность решений. Разностные уравнения вида (1), как и (автономные) дифференциальные уравнения порядка > 3 , могут иметь почти периодические решения. Однако механизм появления таких решений совсем другой: если в дифференциальных уравнениях они появляются уже при наложении двух периодических колебаний с несоизмеримыми частотами, то в разностных (где периоды — всегда целые числа) это возможно лишь при значениях параметра λ (если иметь в виду уравнение (21)), являющихся предельными для тех значений λ , при которых рождаются циклы периодов $n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots$ с n_i , являющимися делителями n_{i+1} . В этом случае типичными становятся асимптотически почти периодические решения, притом со счётным числом асимптотических скачков, а не с конечным, как в периодическом случае.

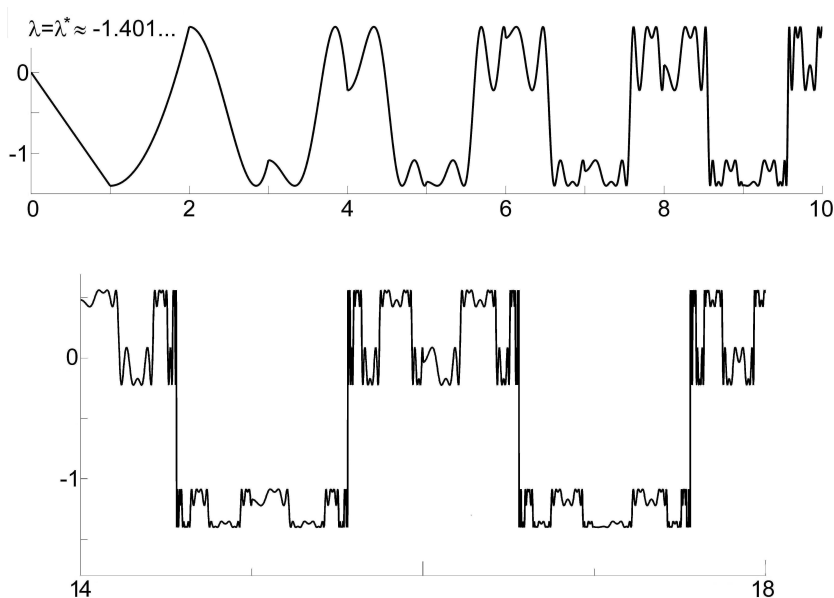


Рис. 4

Простейший пример предоставляет $\lambda = \lambda^*$, когда отображение f имеет циклы периодов $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$, и только; все эти циклы — отталкивающие и все точки из I , за исключением незамкнутого счётного множества — разделителя $\mathcal{D}(f) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\text{Per } f)$, притягиваются к канторову множеству \mathcal{K} , состоящему из точек накопления разделителя; при этом траектория любой точки $x \in \mathcal{K}$ — почти периодическая и плотна на \mathcal{K} . Рассуждая так же, как в предыдущих случаях, можно показать, что решение $x_\varphi(t)$ имеет почти периодическую полунепрерывную сверху предельную функцию $\mathcal{P}_\varphi(t)$ с почти периодами $p_i = 2^i, i = 0, 1, \dots$, которая имеет счётное множество точек разрыва на любом интервале единичной длины (при тех t , для которых $\varphi(\lceil t \rceil) \in \mathcal{D}(f)$), а в точках непрерывности принимает значения из \mathcal{K} . Значения функции $\mathcal{P}_\varphi(t)$ в точках разрыва — это замкнутые интервалы, которые мы называем скачками. Каждому почти периоду p_i отвечает 2^i скачков, так что в итоге $\mathcal{P}_\varphi(t)$ имеет счётное число скачков (Рис. 4); при этом амплитуды скачков, отвечающих почти периоду p_i , с ростом i очень быстро убывают и скорость их убывания характеризует известная константа Фейгенбаума $\alpha \approx 2,5029$.

Подобная ситуация имеет место на континуальном нигде не плотном на $[-2, \lambda^*]$ множестве значений параметра, которое будем обозначать Λ^* . Множество Λ^* “начинается” именно с λ^* . При остальных значениях $\lambda \in \Lambda^*$ у отображения f уже есть циклы, периоды которых отличны от степени двойки. Тогда решения уравнения (21) колеблются существенно “быстрее”: их предельные функции являются почти периодическими со счётным числом скачков, но с несчетным числом разрывов на каждом единичном интервале. Не имея возможности приводить здесь подробные объяснения, опишем вкратце бифуркации, происходящие с отображением (24) при изменении λ , которые приводят к появлению почти периодических решений у уравнения (21).

Для уравнений вида (1) с гладкой нелинейностью типичны два вида бифуркаций: бифуркация удвоения периода (мягкая), при

которой притягивающий цикл периода m превращается в отталкивающий и от него рождается притягивающий цикл периода $2m$, и бифуркация касания (жесткая), при которой рождаются два цикла одного периода m , один цикл — притягивающий, а другой — отталкивающий, вместе с которыми появляется и содержащий их новый цикл интервалов $J_{(m)}$ периода m с границей, образуемой отталкивающим циклом и его прообразами. В семействах с квадратичной нелинейностью только такие бифуркации циклов и возможны (при том бифуркация касания может случиться только после того, как произошла бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периода).

Очень важно, что с момента бифуркации касания при дальнейшем убывании λ качественные изменения на интервале $I = [-\gamma, \gamma]$ сводятся к изменениям только на цикле интервалов $J_{(m)}$, происходящим точно по тому же сценарию, что и эволюция на всем интервале I (о которой шла речь выше), с той лишь разницей, что теперь изменения происходят на m интервалах одновременно и до тех пор, пока эти m интервалов остаются инвариантными относительно f^m . Таким образом, мы можем выделить в области параметра замкнутый интервал $\Lambda_{(m)} \subset [-2, 1/4]$, концы которого задаются двумя значениями λ : одно из них — это значение параметра, при котором в результате бифуркации касания рождаются два цикла периода m и цикл интервалов периода m , а второе — значение параметра, когда этот цикл интервалов разрушается, образующие его m интервалов перестают быть инвариантными при отображении f^m (подобно тому, как перестает быть инвариантным относительно f интервал I , когда $\lambda < -2$). Аналогичная ситуация и в случае бифуркации удвоения периода с тем отличием, что возникает цикл интервалов периода $2m$.

Из сказанного можно сделать вывод: если m_1, m_2, \dots, m_k — произвольная (конечная) последовательность целых чисел, в которой либо все $m_i > 2$, либо существует $j \geq 1$ такое, что $m_i > 2$ при $i < j$, а при $i \geq j$ все m_i равны 2, то ей отвечает

(по крайней мере одна) последовательность вложенных интервалов $[-2, 1/4] \supset \Lambda_{(m_1)} \supset \Lambda_{(m_1 m_2)} \supset \dots \supset \Lambda_{(m_1 \dots m_k)}$ такая, что для каждого $\lambda \in \Lambda_{(m_1 \dots m_k)}$ отображение f имеет вложенные циклы интервалов $J_{(m_1)} \supset J_{(m_1 m_2)} \supset \dots \supset J_{(m_1 \dots m_k)}$ (периодов $m_1, m_1 \cdot m_2, \dots, m_1 \cdot \dots \cdot m_k$, соответственно); при этом границу каждого цикла интервалов $J_{(m_1 \dots m_i)}$, $1 \leq i \leq k$, образует отталкивающий цикл периода $m_1 \cdot \dots \cdot m_i$ и его прообразы.

Остается перейти к пределу при $k \rightarrow \infty$! В результате для каждой бесконечной последовательности m_1, m_2, \dots , в которой либо все $m_i > 2$, либо существует $j \geq 1$ такое, что $m_i > 2$ при $i < j$, а при $i \geq j$ все m_i равны 2, мы получаем: канторово множество $\mathcal{K}_{(m_1 m_2 \dots)} = \bigcap_{i \geq 1} J_{(m_1 \dots m_i)}$ — пересечение циклов интервалов, состоящее из почти периодических траекторий с почти периодами $n_i = \prod_{s=1}^i m_s$, $i = 1, 2, \dots$, а также параметр $\lambda_{(m_1 m_2 \dots)} = \bigcap_{i \geq 1} \Lambda_{(m_1 \dots m_i)} \in \Lambda^*$ (пересечение интервалов $\Lambda_{(m_1 \dots m_i)}$, действительно, состоит из одной точки, ибо значения λ , при которых f имеет притягивающий цикл, как известно, плотны на $[-2, 1/4]$). Таким образом, помимо $\lambda^* \in \Lambda^*$, мы имеем еще счетное множество значений параметра $\lambda \in \Lambda^*$, отвечающих последовательностям вида $m_1, \dots, m_j, 2, 2, 2, \dots$, где $1 \leq j < \infty$ и $m_1, \dots, m_j > 2$, а также несчетное множество значений параметра $\lambda \in \Lambda^*$, отвечающих последовательностям вида m_1, m_2, \dots , где все $m_i > 2$.

§ 7. Коротко о приложениях

Остаётся добавить несколько слов о том, где и как могут применяться разностные уравнения с непрерывным аргументом. Здесь сразу же возникает вопрос об их использовании в самой теории функциональных уравнений, в частности, применительно к функциональным уравнениям, которые заменой переменных могут быть формально сведены к разностным. К сожалению, такой переход чаще всего не позволяет “автоматически” извлечь содержательную информацию о свойствах решений исходных уравнений,

основываясь на свойствах решений соответствующих разностных уравнений. Причина — в замене переменных, которая при возвращении к исходному уравнению может существенно исказить “качественный портрет” решения. Даже для простейшего функционального уравнения (уже само название которого говорит о его родстве с разностными) — q -разностного уравнения

$$x(qt) = f(x(t)), \quad q > 1, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

приводящегося заменой $t = q^\tau$, $x(t) = y(\tau)$ к виду $y(\tau + 1) = f(y(\tau))$, вопрос о наследовании асимптотических свойств разностных уравнений, когда отображение f нелинейно, совсем не тривиален и заслуживает специальных исследований. При обратном переходе от $y(\tau)$ к $x(t)$ (по формуле $x(t) = y(\ln t / \ln q)$) решение $x(t)$ получается “экспоненциальным растяжением решения $y(\tau)$ вдоль оси абсцисс”, что при достаточно больших q ведёт к принципиальным отличиям в качественном поведении функций $x(t)$ и $y(\tau)$. Тем не менее, переход от функционального уравнения к уже исследованному разностному может помочь сформулировать достаточно правдоподобные гипотезы о качественном поведении решений исходного уравнения. Примером тому как раз и является уравнение (30), которое именно с таких позиций рассмотрено в [19, 20].

Весьма оптимистично выглядит ситуация с приложениями разностных уравнений в теории дифференциально-разностных уравнений, в первую очередь, уравнений нейтрального типа (которые включают класс т.н. вполне интегрируемых уравнений, непосредственно приводящихся к разностным [3]), а также в математической физике и, в частности, что особенно важно, в задачах математического моделирования пространственно-временного хаоса — турбулентности.

Первая из этих областей приложения не требует особых комментариев, возможность и несомненная польза от применения здесь

теории разностных уравнений очевидна. Например, уравнение

$$\dot{x}(t+1) = 2x(t)\dot{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (30)$$

прямым интегрированием приводится к однопараметрическому семейству разностных уравнений (21), рассмотренному в § 6. Решения уравнения (30) порождаются гладкими начальными функциями $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Из соображений непрерывности вытекает, что каждое решение $x_\varphi(t)$ уравнения (30) будет решением только одного из уравнений семейства (21), а именно, уравнения

$$x(t+1) = (x(t))^2 + \lambda[\varphi], \quad \text{где } \lambda[\varphi] = \varphi(1) - (\varphi(0))^2.$$

Отсюда вывод: уравнение (30), одно из простейших дифференциально-разностных уравнений, обладает всеми специфическими особенностями разностных уравнений (более того, оно в известном смысле “богаче” каждого отдельно взятого уравнения (21)). Для более сложных уравнений, не сводящихся непосредственно к разностным, применение последних связано с развитием теории возмущений. Кое-что в этом направлении нами уже было сделано [3, 21, 22].

Что касается второй области приложений, то относительно неё, по-видимому, следует дать некоторые пояснения. Как не раз отмечалось, функциональные уравнения могут использоваться при исследовании определённых классов краевых задач для уравнений с частными производными. И в этом плане именно разностные уравнения доставляют много простых и наглядных примеров. Мы не будем подробно останавливаться на этом вопросе (он сравнительно детально обсуждается в [3, 8, 17, 18]), а постараемся “раскрыть существо дела” на двух иллюстративных примерах.

Рассмотрим простейшую краевую задачу для уравнения переноса

$$w_t - w_x = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in [0, 1] \quad (\text{или } x \in S^1), \quad (31)$$

$$w|_{x=1} = f(w|_{x=0}), \quad f - C^1\text{-функция.} \quad (32)$$

Общее решение уравнения (31) имеет вид

$$w(x, t) = u(x + t), \quad u - \text{произвольная } C^1\text{-функция.}$$

Подставляя эту формулу в краевое условие (32), получаем сразу же разностное уравнение

$$u(t + 1) = f(u(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (33)$$

Тем самым, задача (31), (32) сводится к разностному уравнению; каким бы ни было начальное условие $w|_{t=0} = \varphi(x)$, $x \in [0, 1]$, ее решение представимо в виде

$$w(x, t) = u_\varphi(x + t), \quad (34)$$

где u_φ — решение уравнения (33) с начальным условием $u(t) = \varphi(t)$, $t \in [0, 1]$. Решение (34) будет C^1 -гладким на \mathbb{R}^+ , когда краевые и начальные условия для уравнения (31) согласованы, что обычно предполагается при постановке краевых задач.

Ещё один пример — задача для волнового уравнения

$$w_{tt} - w_{xx} = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in [0, 1], \quad (35)$$

$$w|_{x=0} = 0, \quad w_t|_{x=1} = g(w_x|_{x=1}), \quad g - C^1\text{-функция.} \quad (36)$$

Используя представление общего решения уравнения (35)

$$w(x, t) = u^+(x + t) + u^-(x - t),$$

u^+, u^- — произвольные C^2 -функции, и краевые условия (36), по той же схеме, что и в предыдущем примере, опять приходим к разностному уравнению, но уже для функции $v(t) = \frac{du^+}{dt}(t)$, а именно,

$$v(t + 1) - v(t - 1) = g(v(t + 1) + v(t - 1)), \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (37)$$

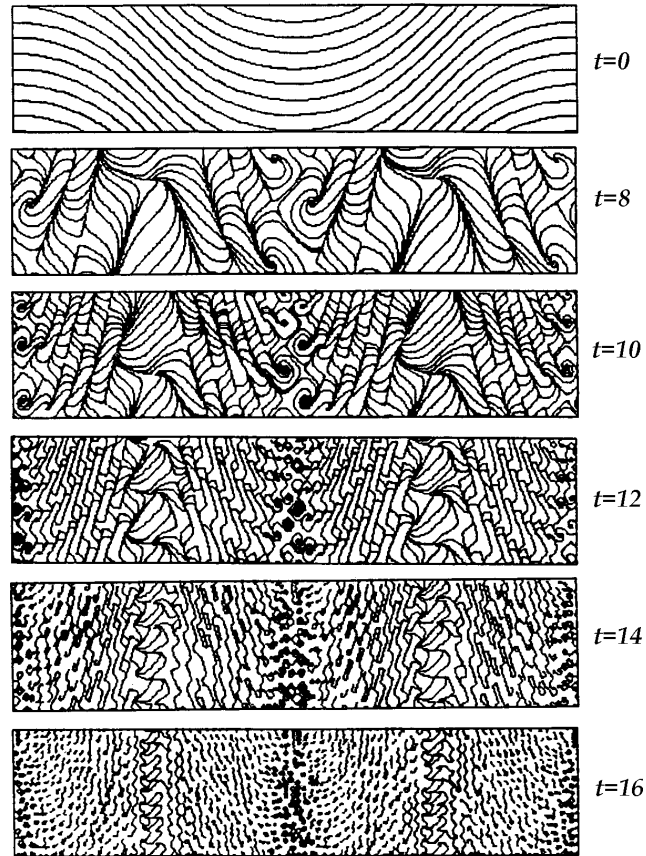


Рис. 5: [23, 24, 28] Развитие идеальной турбулентности. На рисунке изображены линии тока векторного поля (w^1, w^2) , эволюция которого задается краевой задачей $w_t^1 = w_x^1 + w_y^1$, $w_t^2 = -w_x^2 - w_y^2$, $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq y \leq 1$, и $w^1 = w^2|_{y=0}$, $w^1 = f(w^2)|_{y=1}$ с $f(z) = 1 - 2z^2$. С течением времени развивается каскадный процесс образования структур уменьшающихся масштабов, сопровождающийся разрушением крупномасштабных структур и стохастизацией векторного поля. В результате аттрактор динамической системы, порождаемой сдвигами вдоль решений этой краевой задачи, состоит из одной точки – случайного векторного поля (\hat{w}^1, \hat{w}^2) , компоненты которого имеют одну и ту же (x, y) -независимую плотность распределения $1/2\pi\sqrt{1-z^2}$, $-1 < z < 1$ (см. [25, 26, 28]).

В этом случае разностное уравнение (37) не разрешено относительно “старшего члена” $v(t+1)$, но для некоторых классов функций g , в частности, для кусочно линейных, зависимость $v(t+1)$ от $v(t-1)$ можно найти в явном виде и тем самым свести исходную задачу (35), (36) к разностному уравнению вида

$$v(t+1) = G(v(t-1)), \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

где G — одно- или многолистное отображение. Конечно, формулы перехода от решений уравнения (37) к соответствующим решениям задачи (35), (36) будут не такими простыми, как в первом примере, и приводить их здесь мы не будем (детали можно найти в [18, 24]).

Рассмотренные примеры подтверждают тот почти очевидный факт, что для краевых задач, сводимых к разностным или близким к ним уравнениям, поведение решений будет не менее сложным, чем для разностных уравнений (специфика краевых задач, например, условие гладкости решений не приводит к существенным упрощениям). Это, в частности, позволило предложить концепцию *идеальной турбулентности* — математической идеализации реальной турбулентности (пространственно-временного детерминированного хаоса), включающей сравнительно простые сценарии самовозникновения в решениях краевых задач таких сложных явлений как каскадный процесс образования когерентных структур, формирование фрактальных структур, перемежаемость, автостochasticность (см., например, [4], [23]–[27]). Термин “идеальная турбулентность” зафиксирован, в частности, в “Encyclopedia of Nonlinear Science” [28].

Список литературы

1. Birkhoff G.D. *General theory of linear difference equations* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1911. – **12**. – P. 243-284.
2. Birkhoff G.D., Trjitzinsky W.J. *Analytic theory of singular difference equations* // Acta Math. – 1933. – **60**. – P. 1-89.

3. Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. *Разностные уравнения и их приложения*. – Киев: Наукова думка, 1986. – 280 с. (Перевод на англ.: Sharkovsky A.N., Maistrenko Yu.L., Romanenko E.Yu. *Difference equations and their applications* (Ser. Math. and Appl., Vol.250). – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – 358 p.)
4. Sharkovsky A.N., Romanenko E.Yu. *Ideal turbulence: Attractors of deterministic systems may lie in the space of random fields* // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 1992. – **2**. – P. 31-36.
5. Романенко О.Ю., Шарковський О.М. *Від одновимірних до нескінченновимірних динамічних систем: ідеальна турбулентність* // Укр. матем. журн. – 1996. – **48**, № 12. – С. 1604-1627. (Перевод на англ.: Romanenko E.Yu., Sharkovsky A.N. *From one-dimensional to infinite-dimensional dynamical systems: Ideal turbulence* // Ukrainian. Math. J. – 1996. – **48**, № 12. – P. 1817-1842).
6. Romanenko E.Yu. *On attractors of continuous time difference equations* // Computers and Mathematics with Appl. – 1998. – **36**, № 10-12. – P. 377-390.
7. Романенко О.Ю. *Динамічні системи, породжені різницевиими рівняннями з неперервним часом* // Праці Українського математичного конгресу (Київ, 2001). Секц. Динамічні системи. – Київ: Ін-т математики НАН України. – 2003. – С. 94-104.
8. Шарковский А.Н., Романенко Е.Ю. *Разностные уравнения и динамические системы, порождаемые некоторыми классами краевых задач* // Труды Математического ин-та им. В.А.Стеклова. – 2004. – **244** – С. 281-296. (Перевод на англ.: Sharkovsky A.N., Romanenko E.Yu., *Difference equations and dynamical systems generated by some classes of boundary value problems* // Proc. the Steklov Institute of Mathematics (Moscow). – 2004. – **244**. – P. 264-279).

9. Романенко О.Ю. *Явище автостохастичності в динамічних системах, породжуваних різницевиими рівняннями з неперервним аргументом* // Укр. матем. журн. – 2006. – **58**, № 7. – С. 954-975.
10. Romanenko E. Yu. *Randomness in deterministic continuous time difference equations* // Int. J. Difference Equations and Appl. – 2010. – **16**, № 2-3. – P. 243-268 (Украиноязычный аналог: Романенко О.Ю. *Автостохастичність у різницевих рівняннях з неперервним часом*. Препринт 2008-2, Київ: Ін-т математики НАН України, 2008. – 50 с.)
11. Romanenko E.Yu., Sharkovsky A.N. *Difference equations with continuous time: theory and applications* // In: Discrete Dynamics and Difference Equations. – Singapore: World Scientific, 2010. – www.worldscibooks.com/mathematics/7470.html.
12. Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В. *Динамика одномерных отображений*. – Киев: Наукова думка, 1989. – 216 с. (Перевод на англ.: Sharkovsky A.N., Kolyada S.F., Sivak A.G, Fedorenko V.V. *Dynamics of one-dimensional maps* (Ser. Math. and Appl., Vol.407) – Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1997. – 262 p.)
13. Сивак А.Г., Шарковский А.Н. *Универсальный порядок и универсальная скорость бифуркаций решений дифференциально-разностных уравнений* // В кн.: Приближенные и качественные методы исследования дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. – С. 98-106.
14. Sharkovsky A.N., Sivak A.G. *Universal phenomena in solution bifurcations of some boundary value problems* // J. Nonlinear Mathematical Physics. – 1994. – **1**, № 2. – P. 147-157.
15. Sharkovsky A.N. *Universal phenomena in some infinite-dimensional dynamical systems* // Int. J. Bifurcation and Chaos, – 1995. – **5**, № 5. – P. 1419-1425, and in: Thirty years after

- Sharkovskii's theorem: New perspectives – Singapore: World Scientific, 1995. – P. 157-164.
16. Avila A., Lyubich M., de Melo W. *Regular or stochastic dynamics in real analytic families of unimodal maps* // *Inventiones Mathematicae*. – 2003. – **154**. – P. 451-550.
 17. Sharkovsky A.N. *Difference equations and boundary value problems* // *New Progress in Difference Equations (Proc. Int. Conf. "Difference Equations and Appl."(ICDEA-2001))*. – Taylor and Francis, 2004. – P. 3-22.
 18. Romanenko E.Yu., Sharkovsky A.N. *From boundary value problems to difference equations: A method of investigation of chaotic vibrations* // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. – 1999. – **9**, № 7. – P. 1285-1306.
 19. Derfel G., Romanenko E., Sharkovsky A. *Long-time behaviour of solutions of nonlinear q-difference equations* // *Int. J. Difference Equations and Appl.* – 2000. – **6**, № 5. – P. 485-511.
 20. Дерфель Г.А., Романенко Е.Ю., А.Н.Шарковский. *Асимптотическая разрывность гладких решений нелинейных q-разностных уравнений* // *Укр. матем. журн.* – 2000. – **52**, № 12. – С. 1615-1629.
 21. Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю., Шарковский А.Н. *Интегро-разностные уравнения и динамика численности популяций* // В кн.: *Дифференциальные уравнения и их приложения*. – Вильнюс, 1981. – С. 67-77.
 22. Agarwal R. P., Romanenko E.Yu., *On stable periodic solutions of difference equations* // *Math. Lett.* – 1998. – **11**, № 4. – P. 81-84.
 23. Romanenko E.Yu., Sharkovsky A.N., Vereikina M.B. *Self-structuring and self-similarity in boundary value problems* // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. – 1995. – **5**, № 5. – P. 145-156; *Self-structuring and self-stochasticity in difference equations and some boundary value problems* // In: *Proc. Intern. Workshop "Self-Similar Systems"*. – Dubna, 1999. – P.237-250.

24. Шарковський О.М. *Динамічні системи, породжені крайовими задачами. Ідеальна турбулентність. Комп'ютерна турбулентність* // Праці Українського математичного конгресу (Київ, 2001). Секц. Динамічні системи. – Київ: Ін-т математики НАН України. – 2003. – С. 125-149.
25. Sharkovsky A.N. *Ideal turbulence* // *Nonlinear Dynamics*. – 2006. – **44**. – P. 15-27.
26. Романенко Е.Ю., Шарковский А.Н., *Динамические системы и моделирование турбулентности* // *Укр. матем. журн.* – 2007. – **59**, № 2. – С. 217-230.
27. Romanenko E.Yu., Sharkovsky A.N. *Ideal turbulence phenomenon and transmission line with Chua's diode* // In: *Chaos, CNN, Memristors and Beyond*. – Singapore: World Scientific, 2013. – P. 202-210.
28. Sharkovsky A.N., Romanenko E.Yu. *Turbulence, ideal* // In: *Encyclopedia of Nonlinear Science*. – New York and London: Routledge, 2005. – P. 955-957.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автостохастичность	227	Разностное уравнение	212
Асимптотическая разрывность	218	Решение функционального уравнения	10
Бифуркация удвоения периода	242	Сдвиг аргумента	10
Бифуркация касания	243	Скачок функции	224
Вполне интегрируемое дифференциально-функциональное уравнение	159	Уравнение Пфаффа	159
График решения	11	Условия согласования	170, 216
Дифференциально-функциональное уравнение	158	Фактор характеристического отображения	19
Инвариантное множество		Функциональное уравнение	7, 8
Инвариант характеристического отображения	13, 14	Характеризация элементарных функций	144
Квазиинвариант характеристического отображения	19	Характеристическое отображение	11
Конечная группа преобразований	179	Чувствительная зависимость от начальных данных (сенситивность)	217
Линеаризация отображения	128	q -разностное уравнение	30
Независимые инварианты	17	t -кривая	12
Непродолжимое решение	24, 163	t -множество	12
Общее решение функционального уравнения	32	Δ -асимптотическая периодичность	220
Отклонение аргумента	10	Δ -асимптотическая почти периодичность	241
Преобразование аргумента	10	Δ -предельная функция	220
Порядок Шарковского	226	SIM-мера	229

Наукове видання

**Пелюх Григорій Петрович
Шарковський Олександр Миколайович**

**МЕТОД ІНВАРІАНТІВ
В ТЕОРІЇ
ФУНКЦІОНАЛЬНИХ
РІВНЯНЬ**

(російською мовою)

Комп'ютерна верстка

А. А. Акбергенов

І. В. Биковський

Підп. до друку 18.06.2013. Формат 60×90/16. Папір офс. № 1.
Гарн. Таймс. Офс. друк. Умов. друк. арк. 12,7.
Обл.-вид. арк. 14,8. Тираж 300 пр. Зам. № 65.

Інститут математики НАН України
01601, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.