ВОССТАНАВЛИВАЕМОСТЬ РАСТЯГИВАЮЩИХ ЭНДОМОРФИЗМОВ ПО СИСТЕМЕ ω-ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

В.С.БОНДАРЧУК, А.Н.ШАРКОВСКИЙ

Пусть M – гладкое компактное многообразие, $\{M, f^n, n\in\mathbb{Z}\}$ ($\{M, f^n, n\in\mathbb{Z}^+\}$) – дискретная динамическая (полудинамическая) система, порожденная диффеоморфизмом $f: M\to M$ (гладким регулярным отображением $f: M\to M$), где $\mathbb{Z}$ – группа целых чисел, $\mathbb{Z}^+$ – полугруппа неотрицательных целых чисел. В дальнейшем как динамическую, так и полудинамическую системы будем просто обозначать через f.

Пусть $\mathfrak{M}(f)$ – совокупность ω – предельных множеств динамической (полудинамической) системы f: $\Omega\in\mathfrak{M}(f)$, если существует точка $x\in M$ такая, что $\Omega=\Omega_x=\bigcap_{N=1}^{\infty}\overline{\bigcup_{n=N}^{\infty} f^n(x)}$.

Дифференцируемое отображение $f: M\to M$ называется растягивающим эндоморфизмом, если существуют $c>0$, $\lambda>1$ такие, что в некоторой римановой метрике $\|Df^m v\|\geqslant c\lambda^m\|v\|$ для $v\in TM$ и $\forall m\in\mathbb{Z}^+$, где TM – касательное расслоение. В силу компактности многообразия M это определение не зависит от случайного выбора римановой метрики.

Одной из основных проблем теории динамических систем является проблема изоморфизма. К ней существует много подходов. В [1] для случая непрерывного отображения отрезка в себя предлагается рассматривать в качестве инварианта, содержащего много информации (о динамической системе), совокупность ее ω -предельных множеств, частично упорядоченную по включению. Такой подход оправдывается и для растягивающих эндоморфизмов следующей теоремой (аналогичной [1], стр.211).

Теорема. Если задана совокупность $\mathfrak{M}(f)$ ω - предельных множеств растягивающего эндоморфизма $f: M \to M$, то эндоморфизм f можно по этой системе однозначно восстановить.

Таким образом, совокупность ω -предельных множеств содержит всю информацию о динамической системе $f: M \to M$, когда f - растягивающий эндоморфизм.

Опишем некоторые необходимые понятия и факты из теории накрывающих пространств [2].

Если M - риманово многообразие, то $\bar{M}$ обозначает универсальное накрывающее многообразие и $P: \bar{M} \to M$ - соответствующее накрытие. $\bar{M}$ - тоже риманово многообразие с поднятой римановой метрикой по отображению P. Накрывающие преобразования, действующие на $\bar{M}$, будут изометриями. Каждое непрерывное отображение $\alpha: M \to N$ имеет поднятие $\bar{\beta}: \bar{M} \to \bar{N}$ такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \bar{M} & \xrightarrow{\bar{\beta}} & \bar{N} \\ {\scriptstyle P_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P_N} \\ M & \xrightarrow{\alpha} & N \end{array}$$

коммутативна. Если $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2$ - поднятия α, то тогда существует единственное преобразование накрытия ψ на $\bar{M}$, такое, что $\bar{\beta}_1 = \psi \bar{\beta}_2$. Компактное подмножество $C \subset M$ называют фундаментальной областью накрытия, если C есть замыкание своей внутренности и $P(C) = M$.

Лемма 1. Если V - открытое множество многообразия M, то существует $m \in \mathbb{Z}^+$ такое, что $f^m(V) = M$.

Доказательство. Растягивающий эндоморфизм $f: M \to M$ обладает следующими свойствами [3]:

Предложение 1. Пусть $f: M \to M$ — растягивающее отображение, тогда f — накрывающее, в частности, если M односвязно, то f — диффеоморфизм.

Предложение 2. Пусть $f: M \to M$ — растягивающее отображение и $\bar{f}: \bar{M} \to \bar{M}$ — поднятие f на универсальное накрывающее многообразие, тогда $\bar{f}$ — тоже растягивающее отображение.

Таким образом, согласно предложениям 1 и 2 растягивающий эндоморфизм $f: M \to M$ можно поднять на универсальное накрывающее многообразие $\bar{M}$, и мы получим $\bar{f}: \bar{M} \to \bar{M}$ — растягивающий диффеоморфизм односвязного многообразия $\bar{M}$. Пусть $x \in \bar{M}$ и $\mathcal{U}_r(x) = \{y \mid d(x,y) \leqslant r\}$. Если c и λ — параметры диффеоморфизма $\bar{f}$, то $\bar{f}^n(\mathcal{U}_r(x)) \supset \supset \mathcal{U}_{c\lambda^n r}(\bar{f}^{n}(x))$. Действительно, пусть путь $h: [0,1] \to \bar{f}^n(\mathcal{U}_r(x))$ дифференцируемый, соединяет точку $\bar{f}^n(x)$ с границей $\partial \bar{f}^n(\mathcal{U}_r(x))$ и имеет минимальную длину. Тогда $\bar{f}^{-n} h: [0,1] \to \mathcal{U}_r(x)$ — путь, соединяющий x и $\partial \mathcal{U}_r(x)$, и $\int_0^1 \|D\bar{f}^{-n} h'(t)\| dt \geqslant r$. Следовательно, $\int_0^1 \|D\bar{f}^{-n} h'(t)\| dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{c\lambda^n} \|h'(t)\| dt$, т.е. $\int_0^1 \|h'(t)\| dt \geqslant c\lambda^n r$ и $\bar{f}^n(\mathcal{U}_r(x)) \supset \mathcal{U}_{c\lambda^n r}(\bar{f}^n(x))$.

Пусть теперь $C \subset \bar{M}$ — фундаментальная область для универсального накрытия $P: \bar{M} \to M$ и $V \subset M$ — открытое множество в M — не пусто. Тогда $V' = = P^{-1}(V) \cap \mathrm{Int}\, C \neq \varnothing$ и существуют $n > 0$, $\psi \in D_{\bar{M}}$ и замкнутый шар $B \subset V'$, такие, что $\bar{f}^n(B) \supset \psi(C)$, что доказывает лемму 1.

Замечание. Из доказательства этой леммы вытекает, что $\bar{\Gamma} = M$, где Γ — множество периодических точек. Действительно, $B \supset \bar{f}^{-n}\psi(C) \supset \bar{f}^{-n}\psi(B)$, что влечет существование точки $\bar{x} \in B$, такой, что $\bar{x} = \bar{f}^{-n}\psi(\bar{x})$, что эквивалентно $\bar{f}^n(\bar{x}) = \psi(\bar{x})$, т.е. $P\bar{f}^n(\bar{x}) = P\psi(\bar{x})$, откуда следует $f^n(x) = x$.

Лемма 2. Если M — компактное многообразие и $f: M \to M$ — растягивающий эндоморфизм, то f имеет неподвижную точку.

Доказательство. Если X – полное метрическое пространство и $g: X \to X$ – непрерывное отображение, для которого существуют $k, u \in R$, $u < 1$ такие, что $d(g^n(x), g^n(y)) \leq k u^n d(x,y)$ $\forall x, y \in X$ и $\forall n > 0$, тогда g имеет единственную неподвижную точку [4]. Отображение g при этих условиях называется сжимающим.

Пусть $\bar{f}: \bar{M} \to \bar{M}$ – поднятие растягивающего эндоморфизма, тогда $\bar{f}$ имеет обратный $\bar{f}^{-1}$, согласно предложениям 1 и 2. Так как f – растягивающий диффеоморфизм, то существуют $c > 0$, $\lambda > 1$ такие, что $\|D\bar{f}^{-n} v\| \leq \frac{1}{c\lambda^n} \|v\|$ для $v \in T\bar{M}$ и $\forall n > 0$. Пусть $d(x,y)$ – метрика на $\bar{M}$, индуцированная римановой метрикой на $T\bar{M}$. Тогда

$$d(\bar{f}^{-n}(x), \bar{f}^{-n}(y)) \leq \frac{1}{c\lambda^n} d(x,y) \qquad \text{для } x, y \in \bar{M} \text{ и } \forall n > 0.$$

Действительно, пусть $h: [0,1] \to M$ – гладкое отображение, такое, что $h(0) = x$, $h(1) = y$, дает минимальный путь, соединяющий x и y, тогда

$$d(x,y) = \int_0^1 \|h'(t)\| dt \quad \text{и} \quad d(\bar{f}^{-n}(x), \bar{f}^{-n}(y)) \leq$$

$$\leq \int_0^1 \|D\bar{f}^{-n} h(t)\| dt \leq \frac{1}{c\lambda^n} \int_0^1 \|h'(t)\| dt =$$

$$= \frac{1}{c\lambda^n} d(x,y).$$

Так как $\bar{f}^{-1}$ – сжимающее отображение, то $\bar{f}^{-1}$ имеет единственную неподвижную точку $\bar{x}_0$, т.е. $\bar{f}^{-1}(\bar{x}_0) = \bar{x}_0$ и $\bar{f}(\bar{x}_0) = \bar{x}_0$. Следовательно, $P\bar{f}(\bar{x}_0) = P(\bar{x}_0) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_0) = x_0$, где $x_0 = P(\bar{x}_0)$.

Теперь перейдем к доказательству теоремы, пользуясь только леммами 1 и 2.

Пусть x_0 – неподвижная точка растягивающего эндоморфизма $f: M \to M$, существование которой мы доказали.

Существует $y \neq x_0$ такое, что $f(y)=x_0$ в силу предложения 1 и компактности многообразия M. Возьмем произвольную окрестность U_1 точки x_0. По лемме 1 существует n_1 такое, что $f^{n_1}(U_1)=M$. Следовательно, существует и точка $y_1 \in U_1$ такая, что $f^n(y_1)=y$. Так как окрестность U_1 можно выбрать достаточно малой, то в этой окрестности растягивающий эндоморфизм f топологически сопряжен с линейным растяжением $A: \bar{x} \to 2\bar{x}$, где $x \in R^n$, $n = \dim M$ и, следовательно, α – предельным множеством траектории, построенной по линейному растяжению и перенесенной с помощью сопрягающего гомеоморфизма в окрестность $U_1 \subset M$, будет лишь точка x_0. Следовательно, существует траектория, которая попадает в неподвижную точку x_0, а своим α – предельным множеством имеет эту же неподвижную точку x_0.

Выберем одну из этих траекторий и обозначим ее через θ_1. Докажем, что множество θ_1 будет ω – предельным. Траекторию можно представить так:

$$x_0 = \alpha \ldots \to y_n \to y_{n-1} \to \ldots \to y_2 \to y_1 \to y \to x_0,$$

где α обозначает α –предельное множество траектории θ_1. Выберем фундаментальную систему окрестностей U_n точки y и для каждого $n>0$ возьмем связную компоненту открытого множества $f^{-n}(U_m)$, содержащую точку y_n. Обозначим ее U_m^n. Возьмем произвольное открытое множество $V \subset M$. Согласно лемме 1 существует $m_1(n_1)$ такое, что $f^{m_1}(V) \subset U_1^{n_1}$, где n_1 – некоторое фиксированное число.

Следовательно, существует непустое открытое множество $V_1 \subset V$ такое, что $f^{m_1}(V_1) \subset U_1^{n_1}$; окрестность $U_1^{n_1}$ за n_1 шагов перейдет в U_1 согласно определению окрестности U_n^m. Следовательно, $f^{m_1+n_1+1}(V_1)$ – открытая окрестность точки x_0. В эту открытую окрестность попадает некоторая точка y_{n_2}, $n_2 > n_1$, вместе с окрестностью $U_2^{n_2}$. Следовательно, существует непустое открытое множество $V_2 \subset V_1$ такое, что $f^{m_1+n_1+n_2+1}(V_2) \subset \mathcal{U}_2^{n_2}$ и т.д. Применяя этот циклический процесс, получаем систему открытых множеств $V = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots$. Точка $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{V}_i$ будет по построению притягиваться к траектории θ_1, т.е. $\Omega_x = \theta_1$. Одновременно мы показали, что $\{x / \Omega_x = \theta_1\} = M$, т.е. множество точек, которые притягиваются траекторией θ_1, всюду плотно в множестве M.

Определим траекторию θ_2 следующим образом:

$$x_0 = \alpha \to \ldots \to y_n' \to y_{n-1}' \to \ldots \to y_1' \to y \to x_0,$$

где $y_1' \neq y$, что всегда возможно в силу предложения 1 и компактности многообразия, а остальная часть траектории θ_2 достраивается так же, как и траектория θ_1, но начиная с точки y; θ_2 тоже будет ω - предельным множеством. Построим траекторию θ_3:

$$x_0 = \alpha \ldots \to y_3^2 \to y_2^2 \to y_1 \to y \to x_0,$$

θ_3 - ω -предельное множество и т.д. Получаем последовательность $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ ω -предельных множеств, состоящих из одной траектории. При этом каждое из множеств

$$A_1 = \theta_1 \cap \theta_2 \setminus x_0, \quad A_2 = \theta_1 \cap \theta_2 \setminus x_0 \setminus A_1, \quad A_3 = \theta_1 \cap \theta_4 \setminus x_0 \setminus A_2$$

состоит из одной точки.
Следовательно, эндоморфизм восстанавливается на ω -предельном множестве θ_1 однозначно следующим образом:

$$x_0 \leftarrow A_1 \leftarrow A_2 \leftarrow A_3 \leftarrow \ldots .$$

Аналогично мы восстанавливаем эндоморфизм на любой траектории, имеющей вид $x_0 = \alpha \ldots \to y_3 \to y_2 \to y_1 \to x_0$.

Покажем, что множество точек, принадлежащих таким траекториям, плотно в M. Для этого достаточно показать, что множество точек, которые попадают в точку x_0, плотно в M, так как потом можно описанным выше способом продолжить траектории этих точек в отрицательном направлении к точке x_0.

Пусть $V \subset M$ – произвольное открытое множество. По лемме 1 существует $n > 0$ такое, что $f^n(V) \ni x$, и, следовательно, существует точка $x' \in V$, для которой $f^n(x') = x_0$.

Таким образом, растягивающий эндоморфизм можно восстановить на всюду плотном множестве $\bigcup_{n=1}^{\infty} \theta_n$ и, продолжая его по непрерывности, на всем многообразии M. Теорема доказана.

Пусть $f_1, f_2 : M \to M$ – растягивающие эндоморфизмы. Будем говорить, что $\mathfrak{M}(f_1)$ изоморфно $\mathfrak{M}(f_2)$, если существует гомеоморфизм $h : M \to M$ такой, что для любого $\Omega' \in \mathfrak{M}(f_1)$ $h\Omega' \in \mathfrak{M}(f_2)$ и для любого $\Omega'' \in \mathfrak{M}(f_2)$ $h^{-1}\Omega'' \in \mathfrak{M}(f_1)$.

Из доказательства теоремы вытекает

Следствие. f_1 топологически сопряжен с f_2 тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}(f_1)$ изоморфно $\mathfrak{M}(f_2)$.

Литература

1. А.Н.Шарковский, Об ω – предельных множествах дискретных динамических систем, Диссертация, К., 1966.

2. Э.Спеньер, Алгебраическая топология, Мир, М.,1971.

3. M.Shub, Endomorphisms of compact differentiable manifolds, Amer. J. Math., 91, N 1 /1969/, 175-200.