О ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННОЙ СИСТЕМЕ ω-ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ РАСТЯГИВАЮЩИХ ЭНДОМОРФИЗМОВ

А.Н.ШАРКОВСКИЙ, В.С.БОНДАРЧУК

Введение. Пусть M – компактное дифференцируемое многообразие класса C^r, $r \geq 1$ и $f: M \to M$ – растягивающий эндоморфизм, т.е. отображение $f: M \to M$ класса C^1, для которого существуют $c>0$, $\lambda>1$ такие, что в некоторой римановой метрике на M $\|Df^m v\| \geq c\lambda^m \|v\|$ для каждого $v \in TM$ и $m>0$, где TM – касательное расслоение многообразия M (в силу компактности многообразия M определение растягивающего эндоморфизма не зависит от выбора римановой метрики).

Пусть $\mathfrak{M}(f)$ – совокупность ω – предельных множеств растягивающего эндоморфизма $f: M \to M$. Пусть $\Sigma(f) = \{\sigma\}$ – частично упорядоченное множество и между элементами множества $\Sigma(f)$ и элементами $\mathfrak{M}(f)$ существует взаимно однозначное соответствие $\pi: \pi\mathfrak{M}(f) = \Sigma(f)$ такое, что $\sigma_1 < \sigma_2$ тогда и только тогда, когда $\Omega_1 \subset \Omega_2$, где $\sigma_i = \pi\Omega_i$, $i=1,2$. Частично упорядоченное множество $\Sigma(f)$ называется частично упорядоченной системой ω-предельных множеств растягивающего эндоморфизма $f: M \to M$.

ω – предельное множество Ω называется локально максимальным, если существует окрестность $\mathcal{U} \supset \Omega$ множества Ω такая, что каждое ω – предельное множество $\tilde{\Omega}$, удовлетворяющее условию $\mathcal{U} \supset \tilde{\Omega} \supset \Omega$

совпадает с Ω .

Пусть $\mathfrak{M}'(f)$ – совокупность локально макси-мальных ω-предельных множеств: $\mathfrak{M}'(f) \subset \mathfrak{M}(f)$. Частично упорядоченное множество $\Sigma'(f) = \pi\,\mathfrak{M}'(f)$ называется частично упорядоченной системой локально максимальных ω-предельных множеств растягивающего эндоморфизма $f: M \to M$; $\Sigma'(f) \subset \Sigma(f)$.

В [1] показано, что вся информация о растягивающем эндоморфизме f содержится в $\mathfrak{M}(f)$. Вопрос о том, как много информации об эндоморфизме f содержит $\Sigma(f)$ или $\Sigma'(f)$, остается открытым. В этой статье изучаются свойства частично упорядоченных множеств $\Sigma(f)$ и $\Sigma'(f)$, аналогичные тем, которые рассматривались в [2,3] для непрерывного отображения отрезка в себя. Кроме того, изучается строение локально максимальных ω-предельных множеств.

Статья состоит из трех частей. В первой части доказывается теорема 1, которая устанавливает возможность аппроксимации любого ω-предельного множества $\Omega \in \mathfrak{M}(f)$ локально максимальным ω-предельным множеством $\Omega' \in \mathfrak{M}'(f)$, а также теорема 2, которая дает информацию о локально максимальном ω-предельном множестве и о динамической системе на нем.

Теорема 1. Пусть $\Omega \in \mathfrak{M}(f)$ – ω – предельное множество растягивающего эндоморфизма $f: M \to M$ $\mathcal{U} \subset \Omega$ – произвольная окрестность множества Ω . Тогда существует локально максимальное ω-предельное множество $\Omega' \in \mathfrak{M}'(f)$ такое, что $\mathcal{U} \supset \Omega' \supset \Omega$.

Пусть G – ориентированный граф с конечным множеством вершин $N = \{1, 2, \dots, N\}$ и $\Pi[G] = \Pi = (\pi_{ij})$ – его матрица смежности: $\pi_{ij} = 1$, если существует ребро, ведущее из вершины i в вершину j , и $\pi_{ij} = 0$ – в противном случае. Последовательность $i = i_1, i_2, \dots, i_n = j$ называется путем графа G , ведущим из i в j . Бесконечную последовательность $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n, \dots$ будем называть бесконечным путем графа G , если $\pi_{i_k i_{k+1}} = 1$ при $k = 1, 2, \dots$.

Совокупность бесконечных путей графа G обозначим Λ_G. Пусть Λ_N – пространство бесконечных последовательностей натуральных чисел $j_1,\ldots,j_k \in N$, наделенное слабой топологией. Множество Λ_G замкнуто в Λ_N и инвариантно относительно непрерывного отображения сдвига, переводящего последовательность $\{i_k\}$ в последовательность $\{i'_k\}$, где $i'_k = i_{k+1}$. Следовательно, Λ_G можно рассматривать как топологическое пространство, а сдвиг, обозначаемый T_G, – как его непрерывное отображение. T_G называется топологической марковской цепью с конечным множеством состояний G [4,5].

Пусть (G_1, g_1) и (G_2, g_2) – две динамические системы, заданные на топологических пространствах G_1 и G_2 соответственно отображениями $g_1: G_1 \to G_1$ и $g_2: G_2 \to G_2$. Отображение $\varphi: G_1 \to G_2$ называется эквивариантным, если $\varphi g_1 = g_2 \varphi$.

Теорема 2. Любое локально максимальное ω-предельное множество $\Omega' \in \mathfrak{M}'(f)$ является эквивариантным образом пространства Λ_G некоторой топологической марковской цепи с конечным множеством состояний G.

Следствие 1. Периодические точки растягивающего эндоморфизма $f: M \to M$, содержащиеся в локально максимальном ω-предельном множестве $\Omega \in \mathfrak{M}'(f)$, плотны в нем.

Следствие 2. В каждом локальном максимальном ω-предельном множестве $\Omega \in \mathfrak{M}'(f)$ существует плотная на нем траектория.

Во второй части статьи доказываются теоремы 3 и 4, из которых следует, что частично упорядоченное множество $\Sigma'(f)$ плотно в себе в смысле порядка и плотно во множестве $\Sigma(f)$, как в топологическом пространстве с интервальной топологией, а также устанавливается соотношение между информациями, которые заключаются в множествах $\Sigma(f)$ и $\Sigma'(f)$ о растягивающем эндоморфизме $f: M \to M$.

Теорема 3. Частично упорядоченная система локально максимальных множеств $\Sigma'(f)$ растягивающего эндоморфизма $f: M \to M$ плотна в себе, т.е. для любых двух элементов $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma'(f)$, $\sigma_1 < \sigma_2$ существует элемент $\sigma \in \Sigma'(f)$ такой, что $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$.

Частично упорядоченное множество удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей, если всякая строго убывающая цепь элементов этого множества имеет минимальный элемент.

Из теоремы 3 вытекает.

Следствие 3. Частично упорядоченные множества $\Sigma'(f)$ и $\Sigma(f)$ не удовлетворяют условию обрыва убывающих цепей.

Частично упорядоченное множество $(\Sigma, \leq)$ называется направленным, если для каждых $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ существует элемент $\sigma \in \Sigma$ такой, что $\sigma \leq \sigma_1$ и $\sigma \leq \sigma_2$.

Для каждого элемента $\sigma \in \Sigma(f)$ определим частично упорядоченное множество $B_\sigma \subset \Sigma'(f)$ следующим образом: $B_\sigma = \{\sigma' \mid \sigma < \sigma', \sigma' \in \Sigma'(f)\}$.

Теорема 4. Частично упорядоченное множество B_σ направленное. Каждому направленному множеству $B \subset \Sigma'(f)$ соответствует единственный элемент $\sigma \in \Sigma(f)$ такой, что $B = B_\sigma$.

В частично упорядоченном множестве $\Sigma(f)$ можно ввести интервальную топологию [9] и превратить его тем самым в топологическое пространство следующим образом. Пусть C – какая-нибудь цепь из $\Sigma(f)$. Замкнутыми интервалами в C являются:

а) само C,

б) для каждого $\alpha \in C$ множество всех $\gamma \geq \alpha$,

в) для каждого $\alpha \in C$ множество всех $\gamma \leq \alpha$,

г) для любых $\alpha < \beta$ множество γ таких, что $\alpha \leq \gamma \leq \beta$.

Под интервальной топологией частично упорядоченного множества $\Sigma(f)$ понимают топологию, определенную путем взятия замкнутых интервалов множества $\Sigma(f)$ в качестве псевдобазиса замкнутых множеств.

Из теоремы 4 вытекают следующие следствия.

Следствие 4. Множество $\Sigma'(f)$ плотно в топологическом пространстве $\Sigma(f)$.

Следствие 5. Если изоморфны частично упорядоченные системы $\Sigma'(f_1)$ и $\Sigma'(f_2)$, то изоморфны и частично упорядоченные системы $\Sigma(f_1)$ и $\Sigma(f_2)$, где $f_1, f_2 : M \to M$ – растягивающие эндоморфизмы.

Следовательно, вся информация о растягивающем эндоморфизме $f: M \to M$, содержащаяся в частично упорядоченном множестве $\Sigma(f)$, содержится и в частично упорядоченной системе локально максимальных ω-предельных множеств $\Sigma'(f)$

В третьей части статьи доказываются теоремы 5 и 6, которые дают некоторые числовые характеристики множеств $\Sigma'(f)$ и $\Sigma'(f)$.

Теорема 5. Частично упорядоченная система $\Sigma'(f)$ растягивающего эндоморфизма $f: M \to M$ имеет мощность континуума и содержит счетное число минимальных элементов (максимальный – один). Каждая максимальная цепь частично упорядоченной системы $\Sigma'(f)$ состоит из счетного числа элементов.

Теорема 6. Частично упорядоченная система $\Sigma(f)$ растягивающего эндоморфизма $f: M \to M$ содержит континуум минимальных элементов (максимальный – один). Кажжая максимальная цепь частично упорядоченной системы $\Sigma(f)$ либо счетна, либо имеет мощность континуума.

Из теорем 5,6 в частности, следует, что среди минимальных ω-предельных множеств эндоморфизма f имеются множества, отличные от периодических траекторий. Таких ω – предельных множеств континуум и каждое из них представляет собой совершенное множество, на котором любая траектория из этого множества всюду плотна.

Перейдем к доказательству сформулированных утверждений.

1. Доказательство теорем 1 и 2.

В дальнейшем будем пользоваться ляпуновской метрикой на M, т.е. метрикой, в которой для растягивающего эндоморфизма $f: M \to M$ выполняется неравенство

$$\|Dfv\| > \lambda \|v\|,$$

$v \in TM$ и $\lambda > 1$. Возможность построения ляпуновской метрики для растягивающего эндоморфизма $f: M \to M$ показывается аналогично тому, как это сделано в [12] для $У$ – диффеоморфизмов.

Так как f – накрывающее отображение [6], то для любой точки $x \in M$ существует выпуклое открытое множество $\mathcal{U}_x \subset M$ такое, что полный проообраз $f^{-1}(\mathcal{U}_x)$ множества $\mathcal{U}_x$ состоит из ℓ компонент связности. Обозначим $\sigma_i(f^{-1}(\mathcal{U}_x))$, $i = 1, \dots, \ell$ компоненты связности $f^{-1}(\mathcal{U}_x)$, если не существенно, какая компонента имеется в виду, то индекс i будем опускать. Открытое множество $\sigma(f^{-1}(\mathcal{U}_x))$ диффеоморфно окрестности $\mathcal{U}_x$. Любое открытое множество $\mathcal{U} \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{U}_x))$ будем называть окрестностью, в которой эндоморфизм $f: M \to M$ будет локальным диффеоморфизмом.

Лемма 1. Пусть $W \subset M$ – множество многообразия M такое, что $W \subset \mathcal{U}$ и $\mathcal{U}$ – окрестность, в которой растягивающий эндоморфизм f является локальным диффеоморфизмом. Тогда

$$\operatorname{diam} f(W) \geqslant \lambda \operatorname{diam} W,$$

где $\operatorname{diam} W = \sup\limits_{x,y \in W} d(x,y)$.

Доказательство. Пусть $h_1: [0,1] \to \mathcal{U}_{x_1} \supset f(W)$, причем $\sigma(f^{-1}(\mathcal{U}_{x_1})) \supset \mathcal{U}$) – путь такой, что $h_1(0) = f(x)^1$, $h_1(1) = f(y)$, где $x, y \in W$.

Пусть путь h_1 имеет минимальную длину. Рассмотрим путь $h = f\big|^{-1}_{\mathcal{U}_{x_1}} h_1 : [0,1] \to \sigma(f^{-1}(\mathcal{U}_{x_1}))$.

...видно, $h(0)=x$, $h(1)=y$. Из того, что $f: M \to M$ – растягивающий эндоморфизм, следует:

$$d(f(x),f(y)) = \int_0^1 \|h_1'(t)\|\,dt = \int_0^1 \left\| Df \Big|_{\sigma(f^{-1}(U_{x_1}))}^{h'(t)} \right\| dt \geqslant$$

$$\geqslant \lambda \int_0^1 \|h'(t)\|\,dt \geqslant \lambda\, d(x,y).$$

Следовательно, $\operatorname{diam} f(W) = \sup\limits_{x,y\in W} d(f(x),f(y)) \geqslant$
$\geqslant \lambda \sup\limits_{x,y\in W} d(x,y) \geqslant \lambda \operatorname{diam} W.$
Лемма доказана.

Лемма 2. Существует $\delta>0$ такое, что любой шар $U_\delta(x)$ диаметра δ с центром в произвольной точке $x\in M$ будет выпуклым множеством, для которого полный прообраз $f^{-1}(U_\delta(x))$ состоит из ℓ компонент связности $\sigma_i(f^{-1}(U_\delta(x)))$, $i=1,\dots,\ell$.

Доказательство. Обозначим через $\delta(x)$ максимальный диаметр шара $U_{\delta(x)}(x)$ такого, что полный прообраз $f^{-1}(U_{\delta(x)}(x))$ равен несвязной сумме ℓ компонент связности $\sigma(f^{-1}(U_{\delta(x)}(x)))$, каждая из которых диффеоморфна $U_{\delta(x)}(x)$. Докажем непрерывность функции $\delta(x)$. Возьмем точку $y\neq x$, $d(x,y)=\mu$ и $y\in U_{\delta(x)}(x)$. Ситуация, при которой $U_{\delta(x)}(x)\subset U_{\delta(y)}(y)$ невозможна, так как шар $U_{\delta(x)}(x)$ максимальный. С другой стороны, очевидно, что $U_{\delta(y)}(y)\supset U_\nu(y)$, где $\nu=\delta(x)-\mu$. Таким образом, $|\delta(x)-\delta(y)|<\mu$. Следовательно, функция $\delta(x)$ непрерывна. В силу теоремы Вейерштрасса существует $\delta_1>0$ (так как $\delta(x)>0$)

такое, что $\delta(x) \geqslant \delta_1$ для всех $x \in M$. Согласно [11] существует $\delta_2 > 0$ такое, что любой шар $\mathcal{U}_{\delta'}(x)$ с диаметром $\delta' \leq \delta_2$ будет выпуклым множеством на многообразии M. В качестве δ выберем $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$.

Замечание 1. В силу лемм 1 и 2 для любого множества $W \subset \mathcal{U}_\delta(x)$ существует $y \in M$ такое, что $\sigma(f^{-1}(W)) \subset \mathcal{U}_\delta(y)$. Аналогично для любого $m > 1$ $\sigma(f^{-m}(W)) \subset \mathcal{U}_\delta(y)$. Поэтому по лемме для любого $m \geqslant 1$ имеем

$$diam\, \sigma\, (f^{-m}(W)) \leq \frac{1}{\lambda^m} diam\, W .$$

Конечное покрытие замкнутыми множествами $\{W_i \quad i = 1, 2, \dots, n\}$, многообразия M назовем конечным разбиением многообразия M, если $Int\, W_i \neq \emptyset$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n$, $W_{i'} \cap W_{i''} \subset \partial W_{i'} \cap \partial W_{i''}$ для любых $1 \leq i' \neq i'' \leq n$, где $\partial W_i = W_i \setminus Int\, W_i$ граница множества W_i.

Конечное разбиение $\xi = \{W_i,\ i = 1, 2, \dots, n\}$ называется марковским для растягивающего эндоморфизма $f: M \to M$, если существует $m > 0$ такое, что $f^m(W_i) \supset W_j$, как только $f^m(Int\, W_i) \cap Int\, W_j$

Лемма 3. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует марковское разбиение $\xi = \{W_i,\ i = 1, 2, \dots, n\}$ такое, что $diam\, W_i < \varepsilon$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ при этом совокупность границ разбиения ξ имеет меру нуль. (Мера порождена римановой метрикой многообразия M).

Доказательство. Пусть $\{\mathcal{U}_\mu(x_j), j = 1, 2, \dots, k\}$ конечное покрытие многообразия M замкнутыми шарами $\mathcal{U}_\mu(x_j) = \{\ \mid d(x, x_j) \leq \mu$, где $2\mu \leq \delta$, δ – определено в лемме 2. Рассмотрим конечн разбиение $\xi_\mu = \{ W_\mu^\ell , \quad \ell = 1, 2, \ldots, p \}$ многообразия M, полученное из покрытия $\{ \mathcal{U}_\mu(x_j) \}$ следующим образом: в качестве множеств W_μ^ℓ возьмем всевозможные пересечения $\bigcap_{j \in \mathcal{J}_\ell} \mathcal{U}_\mu(x_j)$, где $\mathcal{J}_\ell \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ таково, что $\operatorname{Int} \bigcap_{j \in \mathcal{J}_\ell} \mathcal{U}_\mu(x_j) \neq \emptyset$ а также все непустые множества вида $\mathcal{U}_\mu(x_j) \setminus \bigcap_{j=1}^{k} \mathcal{U}_\delta(x_j)$

То, что ξ_μ – разбиение, очевидно.

Разбиение ξ_μ индуцирует разбиение $\xi^0 = \{ W_i^0 , i = 1, 2, \ldots, n \}$ следующим образом: конечное разбиение ξ^0 состоит из всех (связных) компонент $\sigma(f^{-m}(W_\mu^\ell))$ всех прообразов $f^{-m}(W_\mu^0)$. В силу замечания 1 $\operatorname{diam} W_i^0 = \varepsilon' \leq \frac{\mu}{\lambda^m}$. Разбиение ξ^0 многообразия M обладает тем свойством, что в каждом множестве $W_i^0 \in \xi^0$ растягивающий эндоморфизм $f: M \to M$ является локальным диффеоморфизмом.

Пусть $m > 0$ – достаточно большое целое число. Ограничения на m будут указаны ниже. Пусть $W_{i_1}^0 \in \xi^0$. Определим множество $W_{i_1}^1$ следующим образом: $W_{i_1}^1 = \sigma(f^{-m}(\bigcup_{k \in \mathcal{K}_{i_1}} W_k^0))$, где $\sigma(f^{-m}(\bigcup_{k \in \mathcal{K}_{i_1}} W_k^0)) \cap W_{i_1}^0 \neq \emptyset$ и $k \in \mathcal{K}_{i_1}$, если $f^m(\operatorname{Int} W_{i_1}^0) \cap \operatorname{Int} W_k^0 \neq \emptyset$. Взятие обратного отображения законно в силу построения разбиения ξ^0.

Перестроим разбиение ξ^0. Пусть $\mathcal{U}(W_{i_1}^1) = \bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha^0$, $\alpha \in A$, если $\operatorname{Int} W_\alpha^0 \cap W_{i_1}^1 \neq \emptyset$; вне $\mathcal{U}(W_{i_1}^1)$ элементы разбиения ξ^0 оставим без изменений; т.е. положим $\widetilde{W}_i^0 = W_i^1$, если $i_1 \neq A$; далее положим $\widetilde{W}_{i_1}^1 = W_{i_1}^1$ и $\widetilde{W}_\alpha^0 = \overline{W_\alpha^0 \setminus W_{i_1}^1}$

Таким образом, получим перестроенное разбиение $\xi^{o}_{i_1} = \{\widetilde{W}^{o}_{i},\ i=1,2,\dots,n\}$.

Элемент $\widetilde{W}^{o}_{i} \in \xi^{o}_{i_1}$ обладает следующим свойством: если $f^m(\mathcal{I}nt\ \widetilde{W}^{o}_{i_1}) \cap \mathcal{I}nt\ W^{o}_{i_k} \neq \emptyset$ то $f^m(\widetilde{W}^{o}_{i_1}) \supset W_{i_k}$.

Пусть $\widetilde{W}_{i_2} \in \xi^{o}_{i_1}$ и $\widetilde{W}_{i_2} \neq W^{1}_{i_1}$. Поступим аналогично с разбиением $\xi^{o}_{i_1}$ относительно элемента $\widetilde{W}_{i_2} \in \xi^{o}_{i_1}$. Получим новое разбиение $\xi^{o}_{i_1,i_2}$; причем элемент $\widetilde{W}^{1}_{i_1}$ не подвергается перестройке и, следовательно, $W_{i_1} \in \xi^{o}_{i_1 i_2}$. Действительно, пусть $\mathcal{I}nt\ W^{1}_{i_1} \cap \mathcal{I}nt\ \widetilde{W}^{1}_{i_2} \neq \emptyset$, где $\widetilde{W}^{1}_{i_2}$ определяется аналогично $W^{1}_{i_1}$: $\widetilde{W}^{1}_{i_2} = \sigma(f^{-m}(\bigcup_{k \in \mathcal{K}_{i_2}} \widetilde{W}^{o}_{k}))$ $\widetilde{W}^{o}_{k} \in \xi^{o}_{i_1}$ и $k \in \mathcal{K}_{i_2}$, если $f^m(\mathcal{I}nt\ \widetilde{W}^{o}_{i_2}) \cap$ $\cap\, \mathcal{I}nt\ \widetilde{W}^{o}_{k} \neq \emptyset$. Тогда существует элемент $W_{i_k} \in \xi^{o}_{i_1}$ такой, что $f^m(\mathcal{I}nt\ W^{1}_{i_1}) \cap \mathcal{I}nt\ W_{i_k} \neq \emptyset$ и $f^m(\mathcal{I}nt\ W^{1}_{i_2}) \cap \mathcal{I}nt\ W_{i_k} \neq \emptyset$, что невозможно, потому что тогда $f^m(\mathcal{I}nt\ W_{i_1}) \cap W_{i_k} \neq \emptyset$,

$$f^m(\mathcal{I}nt\ W_{i_1}) \cap W_{i_k} \neq \emptyset \quad \text{и} \quad f^m(\mathcal{I}nt\ W_{i_2}) \cap W_{i_k} \neq \emptyset. \quad (1)$$

Так как в связном множестве $W^{1}_{i_1} \cup W^{1}_{i_2}$ растягивающий эндоморфизм $f: M \to M$ является локальным диффеоморфизмом, то из (1) вытекает, что $\mathcal{I}nt\ W^{o}_{i_1} \cap \mathcal{I}nt\ W^{o}_{i_2} \neq \emptyset$. Но это противоречит тому, что $W^{o}_{1}, W^{o}_{i_2} \in \xi^{o}$.

Элемент $W^{1}_{i_2}$ обладает свойством: если $f^m(\mathcal{I}nt\ W^{1}_{i_2}) \cap \mathcal{I}nt\ \widetilde{W}^{o}_{k} \neq \emptyset$, то

Продолжая этот процесс, за конечное число шагов исчерпаем все индексы $1,2,\dots,n$. В результате получим разбиение $\xi^1=\xi^0_{i_1 i_2\dots i_n}=\{W^1_i,\ i=1,2,\dots,n\}$.

Разбиение ξ^1 обладает следующим свойством: для каждого $i=1,2,\dots,n$, если $f^m(\mathcal{I}nt\, W^1_i)\cap$ $\cap\, \mathcal{I}nt\, W^0_k\neq\emptyset$, то $f^m(W^1_i)\supset W^0_k$, где $W^0_k\in\xi^0$

Мы сделали первый шаг: переход от разбиения $\xi^0=\{W^0_1,\dots,W^0_n\}$ к разбиению $\xi^1=\{W^1_1,W^1_2,\dots,W^1_i\}$.

Сделаем следующий шаг: перейдем от разбиения $\xi^1=\{W^1_i\}$ к разбиению $\xi^2=\{W^2_i\}$. Пусть $f^m(W^1_i)=\bigcup_{k\in\mathcal{K}_i} W^0_k$, где $\mathcal{K}_i\subset\{1,2,\dots,n\}$.

Так как $\mathcal{I}nt\, W^1_\ell\cap\mathcal{I}nt\, W^0_\ell\neq\emptyset$ для каждого $\ell=1,2,\dots,n$ (это будет следовать из соответствующего выбора $m>0$, которое будет приведено ниже), то определим $W^2_i=\sigma(f^{-m}(\bigcup_{k\in\mathcal{K}_i} W^1_k))$ так, что $\mathcal{I}nt\, W^1_i\cap\sigma(f^{-m}(\bigcup_{k\in\mathcal{K}_i} W^1_k))\neq\emptyset$.

Покажем, что $\xi^2=\{W^2_i,\ i=1,2,\dots,n\}$ будет действительно разбиением. Покажем сначала, что это покрытие. Рассмотрим точку x такую, что $x\notin W^2_k\in\xi^2$ для каждого $k=1,2,\dots,n$. Существует W^0_i такое, что $x\in W^0_i$. Имеем $f^m(x)\in f^m(W^0_i)\subset\bigcup_{j\in\mathcal{K}_i} W^0_j$, и, следовательно, $x\in W^1_i=\sigma(f^{-m}(\bigcup_{j\in\mathcal{K}_i} W^0_j))$. Для построения W^2_i берем $\sigma(f^{-m}(\bigcup_{k\in\mathcal{K}_i} W^1_k))$, причем $\sigma(f^{-m}(\bigcup_{k\in\mathcal{K}_i} W^1_k))\cap\mathcal{I}nt\, W^1_i\neq\emptyset$.

Если для $j\in\mathcal{K}_i$ $f^m(x)\in W^1_j$, то в силу того, что $f^m: M\to M$ является локальным диффеоморфизмом W^1_j, $x\in W^2_i$; получаем противоречие.

Если для каждого $j \in \mathcal{K}_i$ $f^m(x) \notin W_j^1$, то существует целое k, такое, что $f^m(x) \in W_\alpha^1$, $\alpha \in \mathcal{K}_k$ причем $\left(\bigcup_{j \in \mathcal{K}_i} W_j^1\right) \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{K}_k} W_\alpha^1\right) \neq \emptyset$, но $\mathcal{I}nt\left(\bigcup_{j \in \mathcal{K}_i} W_j^1\right) \cap \mathcal{I}nt\left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{K}_k} W_\alpha^1\right) = \emptyset$. В силу того, что $f^m: M \to M$ является диффеоморфизмом в $\left(\bigcup_{j \in \mathcal{K}_i} W_j^1\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{K}_k} W_\alpha^1\right)$ и множества $\bigcup_{j \in \mathcal{K}_i} W_j^1$ и $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{K}_k} W_\alpha^1$ пересекаются только по границе, точка x принадлежит W_k^2, согласно выбору W_k^2. При этом $\mathcal{I}nt\, \sigma\left(f^{-m}\left(\bigcup_{j \in \mathcal{K}_i} W_j^1\right)\right) \cap W_i^1 \neq \emptyset$. Таким образом, ξ^2 действительно является покрытием.

Покажем, что $\mathcal{I}nt\, W_i^2 \cap \mathcal{I}nt\, W_j^2 = \emptyset$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Действительно, если существует точка $x \in M$ такая, что $x \in \mathcal{I}nt\, W_i^2 \cap \mathcal{I}nt\, W_j^2$, то это означает, что существует $W_\alpha^1 \in \xi^1$: $W_\alpha^1 \in \bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} W_k^1 \ni f^m(x)$ и $W_\alpha^1 \in \bigcup_{k \in \mathcal{K}_j} W_k^1 \ni f^m(x)$; таким образом, $\alpha \in \mathcal{K}_i$, $\alpha \in \mathcal{K}_j$, поэтому $\mathcal{I}nt\, W_i^1 \cap \mathcal{I}nt\, W_j^1 =$
$= \sigma\left(f^{-m}\left(\bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} W_k^0\right)\right) \sigma\left(f^{-m}\left(\bigcup_{k \in \mathcal{K}_j} W_k^0\right)\right) \neq \emptyset$, что невозможно, потому что $i \neq j$. Следовательно, ξ^2 действительно будет разбиением.

Разбиение $\xi^2 = \{W_i^2,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ обладает тем свойством, что $f^m(W_j^2) \supset W_k^1$, если $f^m(\mathcal{I}nt\, W_i^2) \cap \mathcal{I}nt\, W_k^1 \neq \emptyset$. Аналогично разбиению ξ^2 строим разбиение ξ^3 и т.д.

Мы получили последовательность разбиений $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^k = \{W_i^k, i = 1, 2, \ldots, n\}$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. При этом, если $f^m(\mathrm{Int}\, W_i^k) \cap W_\ell^{k-1} \neq \phi$, то $f^m(W_i^k) \supset W_\ell^{k-1}$.

Рассмотрим метрическое пространство 2^M, элементами которого являются замкнутые множества многообразия M с метрикой

$$dist(F_1, F_2) = \max\{\sup_{y\in F_1} \inf_{x\in F_2} d(x,y), \sup_{y\in F_2} \inf_{x\in F_1} d(x,y)\},$$

где $F_1, F_2 \in 2^M$. Пространство 2^M компактно [10] и, следовательно, полно. Пусть $\xi^k = \{W_i^k, i = 1, 2, \ldots, n\}$ – последовательность разбиений, построенная выше. Докажем, что последовательность $\{W_i^k \; k = 0, 1, \ldots\}$ фундаментальна в метрике пространства 2^M для каждого i. Для этого оценим расстояние $dist(W_i^k, W_i^{k+1})$. По определению и в силу замечания 1 имеем

$$\delta(\xi^k, \xi^{k+1}) = \max_{i=1,2,\ldots,n} dist(W_i^k, W_i^{k+1}) =$$

$$= \max_{i=1,2,\ldots,n} dist(f^{-m}(\bigcup_{j\in \mathcal{K}_i} W_j^{k-1}), f^{-m}(\bigcup_{j\in \mathcal{K}_i} W_j^k)) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\lambda^m} \max_{i=1,\ldots,n} dist\left(\bigcup_{j\in \mathcal{K}_i} W_j^{k-1}, \bigcup_{j\in \mathcal{K}_i} W_j^k\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\lambda^m} \max_{i=1,\ldots,n} dist(W_i^{k-1}, W_i^k) \leq \frac{1}{\lambda^m} \delta(\xi^k, \xi^{k-1}).$$

Получаем $\delta(\xi^k, \xi^{k+1}) \leq \frac{1}{\lambda^m} \delta(\xi^{k-1}, \xi^k)$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\delta(\xi^1, \xi^0) \leq \frac{\varepsilon'}{\lambda^m}$ по построению множеств W^1. Итак,

$$\delta(\xi^k, \xi^{k+1}) \le \frac{\varepsilon'}{\lambda^{m(k+1)}} . \qquad (1')$$

Тогда $$dist(W_i^k, W_i^{k+\ell}) \le$$

$$\le \sum_{p=0}^{\ell-1} dist(W_i^{k+p}, W_i^{k+p+1}) \le \varepsilon' \sum_{p=0}^{\ell-1} \frac{1}{\lambda^{m(k+p+1)}}$$

Следовательно, последовательность $\{W_i^k, k=0,1,2,\dots\}$ фундаментальна и потому $W_i^k \xrightarrow[k\to\infty]{} W_i^\infty$, $i=1,2,\dots,n$.

Рассмотрим конечное семейство замкнутых множеств $\xi^\infty = \{W_i^\infty, i=1,2,\dots,n\}$. Покажем, что ξ^∞ является разбиением.

Введем некоторые понятия [10].

Точка p принадлежит нижнему пределу последовательности множеств $A_1, A_2, \dots : p \in \underset{n\to\infty}{Li} A_n$, если любая окрестность точки p пересекается со всеми множествами A_n, начиная с некоторого n.

Точка p принадлежит верхнему пределу последовательности множеств $A_1, A_2, \dots : p \in \underset{n\to\infty}{Ls} A_n$, если любая окрестность точки p пересекается с бесконечным числом множеств A_n.

Последовательность множеств $\{A_n\}$ называется сходящейся к множеству A: $A = \underset{n\to\infty}{Lim} A_n$,

если $\underset{n\to\infty}{Li} A_n = A = \underset{n\to\infty}{Ls} A_n$

Известно, что $\underset{n\to\infty}{Ls} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} A_{n+k}}$

Топология, определяемая сходимостью в смысле данного выше определения, эквивалентна топологии, которая задается метрикой в пространстве 2^M [10].

Таким образом, $W_i^\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} W_i^{n+k}}$

ξ^∞ является покрытием многообразия M. Действительно, пусть существует точка $x \in M$ такая, что $x \notin W_i^\infty$ для каждого $i=1,2,\dots,n$. Обозначим $\widetilde{W}_i^q = \overline{\bigcup_{\ell=0}^{\infty} W_i^{q+\ell}}$; тогда для каждого $i=1,2,\dots,n$ существует q_i такое, что $x \in \widetilde{W}_i^{q_i}$. Отсюда $x \in W_i^\ell$ при всех $\ell = q_i, q_i+1, \dots$. Обозначим $q(x) = \max_{i=1,\dots,n} q_i$. Тогда $x \in W_i^{q(x)}$ для всех $i=1,2,\dots,n$, что невозможно, так как $\{W_i^{q(x)}, i=1,2,\dots,n\}$ является разбиением многообразия. M.

Покажем, что покрытие ξ^∞ является разбиением многообразия M. Пусть это не так, т.е. пусть существуют элементы $W_i^\infty, W_j^\infty \in \xi^\infty$ такие, что $\mathcal{I}nt\, W_i^\infty \cap \mathcal{I}nt\, W_j^\infty \neq \phi$. Тогда существует открытый шар S_μ, где $\mu = diam\ \mu$, такой, что $S_\mu \subset \mathcal{I}nt\, W_i^\infty \cap \mathcal{I}nt\, W_j^\infty$. Тогда $S_\mu \subset \mathcal{I}nt\, W_i^\infty = \mathcal{I}nt \bigcap_{q=0}^{\infty} \widetilde{W}_i^q$. Так как $\widetilde{W}_i^q \supset \widetilde{W}_i^{q+1}$, то $\mathcal{I}nt \bigcap_{q=0}^{\infty} \widetilde{W}_i^q \subset \bigcap_{q=0}^{\infty} \mathcal{I}nt\, \widetilde{W}_i^q$. Следовательно, $S_\mu \subset \bigcap_{q=0}^{\infty} \mathcal{I}nt\, \widetilde{W}_i^{q+1}$, т.е. $S_\mu \subset \mathcal{I}nt\, \widetilde{W}_i^q$ для каждого $q=1,2,\dots$. Аналогично $S_\mu \subset \mathcal{I}nt\, \widetilde{W}_i^q$ для каждого $q=1,2,3,\dots$. Существует $q_1>0$ такое, что для любого $q>q_1$, $\delta(\xi^{q+1}, \xi^q) < \mu$.

Тогда существует $S_{\mu_1} \subset S_\mu$, где $\mu_1 < \mu$, такой, что $S_{\mu_1} \subset W_i^q$ для каждого $q > q_1$. Применяя аналогичные рассуждения к шару $S_{\mu_1} \subset \widetilde{W}_j^q$, получим, что существует шар $S_{\mu_2} \subset S_{\mu_1}$, $\mu_2 < \mu_1$ такой, что $S_{\mu_2} \subset W_j^q$ для каждого $q > q_2$

Применяя аналогичные рассуждения к шару $S_{\mu_1} \subset \tilde{W}_j^q$ получим, что существует шар $S_{\mu_2} \subset S_{\mu_1}$, $\mu_2 < \mu_1$ такой, что $S_{\mu_2} \subset W_j^q$ для каждого $q > q_2$. Следовательно, для каждого $q > max(q_1, q_2)$ существует шар S_{μ_2} такой, что $S_{\mu_2} \subset W_i^q$ и $S_{\mu_2} \subset W_j^q$, что противоречит тому, что элементы W_i^q и W_j^q входят в разбиение ξ^q.

Покажем, что разбиение ξ^∞ марковское. В силу определения последовательности разбиений ξ^k для каждого $W_i^\ell \in \xi^\ell$ имеем $f^m(W_i^\ell) = \bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} W_k^{\ell-1}$. Переходя в этом равенстве к пределу, получим

$\lim_{\ell \to \infty} f^m(W_i^\ell) = \lim_{\ell \to \infty} \bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} W_i^{\ell-1}$. Согласно свойствам предела Lim [10] и непрерывности функции $f^m : 2^M \to 2^M$, получим

$$f^m(W_i^\infty) = f^m(\lim_{\ell \to \infty} W_i^\ell) = \bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} \lim_{\ell \to \infty} W_k^{\ell-1} = \bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} W_k^\infty .$$

Оценим теперь $diam\ W_i^\infty$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно, что $W_i^k \subset \mathcal{U}_d(W_i^{k-1})$, где $\mathcal{U}_d(W_i^{k-1}) = \bigcup_{x \in W_i^{k-1}} S_d(x)$ ($S_d(x)$ – шар с центром x радиуса $d = dist(W_i^k, W_i^{k-1})$) – окрестность множества W_i^{k-1}. Аналогично $W_i^{k-1} \subset \mathcal{U}_d(W_i^k)$. Таким образом,

$$diam\ W_i^k \le diam\ W_i^{k-1} + 2d \text{ и } diam\ W_i^{k-1} \le diam\ W_i^k + 2d$$

или $diam\ W_i^{k-1} - 2d \le diam\ W_i^k \le diam\ W_i^{k-1} + 2d$.

Согласно формуле $(1')$, имеем

$$\varepsilon' - 2\varepsilon' \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{\lambda^m}\right)^j \le diam\ W_i^k \le \varepsilon' + 2\varepsilon' \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{\lambda^m}\right)^j .$$

В пределе получим:

$$\varepsilon' - 2\varepsilon' \frac{\frac{1}{\lambda^m}}{1-\frac{1}{\lambda^m}} \le diam\, W_i^{\infty} \le \varepsilon' + 2\varepsilon' \frac{\frac{1}{\lambda^m}}{1-\frac{1}{\lambda^m}}. \qquad (2)$$

Выбирая m достаточно большим, можно сделать $diam\, W_i^{\infty}$ сколь угодно близким к ε', $\varepsilon' < \varepsilon$.

Докажем, что $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} \partial W_i^{\infty}) = 0$, где $\mu(E) = \int_E g_{ij}\, dx_i \wedge dx_j$ – мера, порожденная римановой метрикой g_{ij}, многообразия M. Мера μ является непрерывным отображением пространства 2^M в R^1. Очевидно, $\mu(\partial W_i^k) = 0$ для любых $i = 1, 2, \ldots, n$ и $k = 1, 2, \ldots$. В силу непрерывности меры μ на пространстве 2^M имеем:

$$\mu(\partial W_i^{\infty}) = \mu\left(\lim_{k\to\infty} \partial W_i^k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(\partial W_i^k) = 0.$$

Лемма доказана.

Замечание 2. Опишем стандартный процесс перехода от марковского разбиения $\xi^{\infty} = \{W_i^{\infty},\ i = 1, 2, \ldots n\}$ с числом $m > 0$ к марковскому разбиению $\xi_1 = \{\mathcal{U}_j,\ j = 1, 2, \ldots, p\}$ с числом $m = 1$. Каждое множество имеет вид:

$$\mathcal{U}_j = W_{i_1}^{\infty} \cap f(W_{i_2}^{\infty}) \cap f^2(W_{i_3}^{\infty}) \cap \ldots \cap f^{m-1}(W_{i_m}^{\infty}),$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_m = 1, 2, \ldots, n$, такие, что $Int\ \mathcal{U}_j \ne 0$.

Тогда $f(\mathcal{U}_j) = f(W_{i_1}^{\infty}) \cap f_1^2(W_{i_2}^{\infty}) \cap \ldots \cap f^{m-1}(W_{i_{m-1}}^{\infty}) \cap f^m(W_{i_m}^{\infty})$.

Но $f^m(W_{i_m}^{\infty}) = \bigcup_{i_\ell \in \mathcal{K}_{i_m}} W_{i_\ell}^{\infty}$, следовательно,

$$f(\mathcal{U}_j)=\bigcup_{i_\ell\in\mathcal{K}_{i_m}}(W_{i_\ell}^\infty\cap f(W_{i_1}^\infty)\cap\ldots\cap f^{m-1}(W_{i_{m-1}})),$$

где $\mathcal{K}_{i_m}$ – конечное множество индексов.

Замечание 3. Введем пространство Ξ конечных разбиений $\xi_\alpha=\{W_k^\alpha,\ k=1,2,\ldots,n\}$ с одинаковым количеством элементов. Введем в Ξ метрику следующим образом:

$$\rho(\xi_1,\xi_2)=\max_{i=1,2,\ldots,n} dist(W_i^{(1)},W_i^{(2)}).$$

Тогда из оценки (2) видно, что разбиение $\xi^\infty\in\Xi$ непрерывным образом зависит от выбора разбиения $\xi^0\in\Xi$

Пусть Ω – ω –предельное множество растягивающего эндоморфизма $f: M\to M$ и $\mathcal{U}$ – произвольная окрестность множества Ω. По лемме 3 существует марковское разбиение $\xi=(\mathcal{U}_1,\ldots,\mathcal{U}_m)$, обладающее свойством: если $\mathcal{U}_i\cap\Omega\neq\emptyset$, то $\mathcal{U}_i=\Omega$. Существует точка $x_1\in M$, для которой $\Omega_{x_1}=\Omega$. Пусть $\xi_{\mathcal{U}}=(\mathcal{U}_{i_1},\mathcal{U}_{i_2},\ldots,\mathcal{U}_m)$, где $\mathcal{U}_{i_\ell}\in\xi_{\mathcal{U}}$, если существует $k_\ell>0$ такое, что $f^{k_\ell}(x_1)\in\mathcal{U}_{i_\ell}$ и $\mathcal{U}_{i_\ell}\cap\Omega\neq\emptyset$. Очевидно, для каждой точки $y\in\Omega$ имеется множество $\mathcal{U}_{i_k}\in\xi_{\mathcal{U}}$, удовлетворяющее условию $y\in\mathcal{U}_{i_k}$. Выберем настолько большой конечный отрезок траектории точки x_1: $\theta(x_1)=\{f^k(x_1),f^{k+1}(x_1),\ldots,f^{k+p}(x_1)\}$, чтобы если $y'\in\Omega$ и $y'\in \mathrm{Int}\,\mathcal{U}_{i_\ell}$, $\mathcal{U}_{i_\ell}\in$, то существовало p_ℓ, $0\le p_\ell<p$, такое, что $f^{k+p_\ell}(x_1)\in \mathrm{Int}\,\mathcal{U}_{i_\ell}$, а если $y'\in\partial\mathcal{U}_{i_{\ell'}}$, то существовало $p_{\ell'}$, $0\le p_{\ell'}<p$, и $f^{k+p_{\ell'}}(x_1)\in\mathcal{U}_{i_{\ell'}}$. Отрезок $\theta(x_1)$

можно выбрать так, чтобы $f^k(x_1)\in U_i$ и $f^{k+p}(x_1)\in U_{i_1}$. Рассмотрим конечный упорядоченный набор множеств $U_{i'_1}, U_{i'_2},\dots, U_{i'_p}$, обладающий свойствами: $f^k(x_1)\in U_{i_0}$, $f^{k+1}(x_1)\in U_{i'_1},\dots$ $\dots, f^{k+p}(x_1)\in U_{i'_p}=U_{i'_0}$, где $U_{i'_k}\in \xi_U$, причем в этом наборе встречаются все множества из ξ_U. Пусть номер i' удовлетворяет условию:

$$f^{k+\ell_1-\alpha}(x_1)\cap \mathrm{Int}\, U_{i'_{\ell_1-\theta}}\neq\emptyset \quad ,\text{для } \alpha=1,2,\dots,\ell,$$

а $f^{k+\ell_1}(x_1)\cap \mathrm{Int}\, U_{i'_{\ell_1}}=\emptyset$. Тогда точка $f^{k+\ell_1}(x_1)$ лежит на границе множества $U_{i_{k_1}}$. Обозначим $d_1=\max_{q=0,\dots,\ell_1-1}(f^{k+q}(x_1), \partial U_{i'_q})$. Множество точек $x\in M$, для которых $\Omega_x=\Omega$, плотно в M. Действительно, пусть V – произвольная окрестность в M. Согласно лемме 1 [1] существует $m>0$ такое, что $f^m(V)\ni y_1$, где $y\in M$, для которой $\Omega_{y_1}=\Omega$. Следовательно, существует и точка $x\in V$ такая, что $f^m(x)=y_1$, $\Omega_x=\Omega$. Тогда найдется точка $x_1:(d(x_2,x_1)\leq \leq \dfrac{d_1}{\lambda^{\ell_1+k}}$ и $\Omega_{x_2}=\Omega$, причем точку x_2 можно выбрать так, что $f^{k+q}(x_2)\in \mathrm{Int}\, U_{i_q}$, $q=0,1,\dots,\ell_1$.

Таким образом, отрезок траектории $\theta(x_2)$ будет лежать во внутренних частях первых ℓ множеств $U_{i'_1}, U_{i'_2},\dots, U_{i'_\ell}$. При этом, возможно, найдутся множества $U_{i'_q}$, $q>\ell_1$ такие, что $\theta(x_2)$ вообще не попадет в них. Эти множества пока исключим из рассмотрения и получим новую совокупность множеств $\{U^{(2)}_{i'_\ell}\}=\xi^{(2)}_U\subset\xi$. С совокупностью $\xi^{(2)}_U$ мы поступим аналогичным образом и получим точку x_3 и совокупность $\xi^{(3)}_U$, такие, что

$$f^{k+j}(x_3) \subset \operatorname{Int} U^{(3)}_{i_j} \qquad \text{для} \quad j \le \ell_2 .$$

За конечное число шагов придем к разбиению $\tilde{\xi}_{\mathcal{U}} = \{\tilde{U}_{i_1}, \ldots, \tilde{U}_{i_p}\}$, обладающему свойством: существует точка $\tilde{x} \in M$ $\Omega_{\tilde{x}} = \Omega$, такая, что $f^{k+j}(\tilde{x}) \subset \operatorname{Int} \tilde{U}_{i_j}$ для всех $j = 1, 2, \ldots, p$.

При нашем построении мы могли исключить лишь множества U_{i_q}, которые содержат ω-предельную точку из множества Ω только на своей границе. Пусть $U_{i_{q_1}} \in \xi_{\mathcal{U}}$ – какое-нибудь из этих множеств. Существует такая точка x_{q_1}, что $f^m(x_{q_1}) \in \operatorname{Int} U_{i_{q_1}}$ для некоторого $m \geqslant 0$, причем $\Omega_{x_{q_1}} = \Omega$. Марковское разбиение ξ мы можем выбрать таким, чтобы существовал элемент $U_\alpha \in \xi_{\mathcal{U}}$, для которого существует точка $y \in \Omega$, такая что $y \in \operatorname{Int} U_\alpha$. Действительно, мы можем выбрать исходное разбиение ξ^o так, чтобы применение операции, описанной в замечании 2, привело нас к разбиению ξ_o, для коорого существует $W \in \xi_o$ такое, что $y \in \operatorname{Int} W$. Так как ξ^∞ непрерывно зависит от ξ^o, то ξ непрерывно зависит от ξ_o. Поэтому для марковского разбиения ξ существует элемент $U_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$ такой, что $y \in \operatorname{Int} U_\alpha$. Поскольку существует ω-предельная точка $y \in \operatorname{Int} U_\alpha$, $U_\alpha \in \xi_{\mathcal{U}}$, то отрезок траектории точки x_{q_1} пройдет также и через $\operatorname{Int} U_\alpha$.

Таким образом, мы показали, что любые два множества из $\xi_{\mathcal{U}}$ можно связать между собой конечными отрезками траекторий, причем эти траектории будут проходить по внутренним частям множеств $U_j \in \xi_{\mathcal{U}}$.

Разбиение $\xi_{\mathcal{U}}$ назовем марковским разбиением для ω-предельного множества Ω в окрестности $\mathcal{U}$.

Пусть $G = G(\xi_u)$ — конечный ориентированный граф, вершинами которого являются элементы множества ξ_u. Если $u_i, u_j \in \xi_u$, то ребро (u_i, u_j) существует тогда и только тогда, когда $f(u_i) \supset u_j$.

Лемма 4. Граф $G = G(\xi_u)$ связный.

Доказательство. Действительно, так как любые два множества $u_{i'} \in \xi_u$ и $u_{i''} \in \xi_u$ можно связать конечными отрезками траекторий, проходящих только через внутренние части множеств $u_i \in \xi_u$, то отсюда и следует связность графа $G = G(\xi_u)$.

Лемма 5. Если граф G связный, то периодические точки марковской цепи T_G плотны в Λ_G.

Доказательство. Пусть точка $(i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots) \in \Lambda_G$. Рассмотрим последовательность $x_n = \{i_1, i_2, \ldots i_n, \ldots i_1 i_2 \ldots\}$, где вместо точек между i_n и i_1 каждый раз должен быть написан один и тот же путь, идущий из i_n в i_1, что всегда возможно в силу связности графа G. Эта последовательность является периодической точкой марковской цепи T_G. Так как n может быть выбрано сколь угодно большим, то последовательность $\{x_n\}$ такова, что $x_n \to x$. Лемма доказана.

Лемма 6. Если граф G связный, то существует всюду плотная траектория для марковской цепи T_G.

Для доказательства леммы 6 достаточно в силу леммы 5 построить траекторию, плотную на замыкании множества периодических точек марковской цепи T_G. Так как многообразие M компактно, то марковская цепь T_G имеет счетное число периодических точек. Занумеруем их натуральным рядом 1,2,3.... Составим таблицу:

$$\begin{array}{lllll}
1. & a_{11} \rightarrow & a_{12} & a_{13} \rightarrow & a_{14} \; \dots \\
2. & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \; \dots \\
3. & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \; \dots \\
4. & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \; \dots \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

В этой таблице k -тая строка соответствует k -той периодической точке $(i_1, i_2, \dots i_{n_k}, i_1, i_2, \dots, i_{n_k}$. Элемент $a_{k\ell}$ обозначает путь

$$a_{k\ell}=(i_1, i_2, \dots, i_{n_k}, i_1, i_2, \dots, i_{n_k}, \dots, i_1, i_2, \dots, i_{n_k}),$$

в котором последовательность $i_1, i_2, \dots, i_{n_k}$ повторяется ℓ раз. Составим путь

$$(a_{11}\, b_1\, a_{12}\, b_2\, a_{21}\, b_3\, a_{31}\, b_4\, a_{23}\, b_5\, a_{13}\, b_6 \dots) \qquad (3)$$

(стрелки в таблице показывают, по какому закону составлен этот путь), b_n – путь, соединяющий последнюю вершину стоящего непосредственно перед b_n пути a_{ij} с первой вершиной стоящего непосредственно после b_n пути $a_{i'j'}$. Путь b_n существует в силу связности графа G. Так как в путь (3) входит сколь угодно большой отрезок любой периодической траектории, то через точку (3) проходит всюду плотная в Λ_a траектория.

Рассмотрим множество $\tilde{\Omega}=\{x/x\in\xi'_u,\ f^m(x)\in\xi'_u$ для каждого $m>0\}$, где $\xi'_u=\{U'_{i_1}, \dots, U'_{i_m}\}$ $U'_{i_\ell}=(\mathrm{Int}\bigcup_{k=1}^{m} U_{i_k})\cap U_{i_\ell}$.

Для каждого бесконечного пути $(i_1, i_2, \dots)$ графа $G=G(\xi_u)$ существует единственная точка $x\in\tilde{\Omega}$ такая, что $x=\bigcap_{m=1}^{\infty}\overline{G(f^{-m}(U_{i_m}))}$, где $G(f^m(U_{i_m}))$ – компонента связности полного прообраза $f^{-m}(U_{i_m})$, такая, что $G(f^{-m}(U_{i_m}))\cap U_{i_1}\neq\varnothing$.

Из замечания 1 следует, что $\overline{\bigcap_{m=1}^{\infty} \sigma(f^{-m}(\mathcal{U}_{i_m}))}$ действительно состоит из одной точки. Таким образом, получаем отображение $\varphi: \Lambda_G \to \tilde{\Omega}$; $\varphi(\Lambda_G) = \tilde{\Omega}$,

где $\varphi(i_1, i_2, \dots) = x$. Очевидно, отображение φ непрерывно. Действительно, пусть $x_n = (i_1, i_2, \dots, i_n, i_{n+1}, \dots)$ и $y_n = (i_1, i_2, \dots, i_n, i'_{n+1}, i'_{n+2}, \dots)$ – две

близкие точки пространства Λ_G. Тогда $\varphi(x_n)$, $\varphi(y_n) \in \bigcap_{m=1}^{n} \sigma(f^{-m}(\mathcal{U}_{i_m}))$ и в силу замечания 1 получаем, что φ непрерывно. Таким образом, $\tilde{\Omega}$ – инвариантное замкнутое множество $\tilde{\Omega} \supset \Omega$ и $\tilde{\Omega}$ является эквивариантным образом пространства Λ_G топологической марковской цепи T_G с конечным числом состояний G. Так как граф G связный, то в силу леммы 6 на множестве $\tilde{\Omega}$ существует всюду плотная траектория и, следовательно, $\tilde{\Omega}$ является ω-предельным множеством. Из построения $\tilde{\Omega}$ очевидным образом следует, что $\tilde{\Omega}$ – локально максимальное ω-предельное множество в окрестности $\operatorname{Int} \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{U}_{i_k}$ и $\tilde{\Omega} \supset \Omega$. Теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы 2 достаточно в доказательстве теоремы 1 исходить из локально максимального ω-предельного множества $\tilde{\Omega}$.

Следствия 1 и 2 вытекают соответственно из лемм 5 и 6 и теоремы 2.

П. Доказательство теоремы 3.

Пусть Ω_1, Ω_2 – локально максимальные ω-предельные множества для растягивающего эндоморфизма $f: M \to M$ и $\Omega_1 \subset \Omega_2$, $\Omega_1 \neq \Omega_2$, $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathfrak{M}'(f)$

Покажем, что существует множество $\Omega \in \mathfrak{M}'(f)$ такое, что $\Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2$, $\Omega = \Omega_1$, $\Omega \neq \Omega_2$.

Пусть $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset M$ – такие открытые множества, что $\Omega \subset \Omega_1$, $\Omega_2 \subset \mathcal{U}_2$, причем если существуют множества $\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2$ такие, что $\mathcal{U}_1 \supset \tilde{\Omega}_1 \supset \Omega_1$ и $\mathcal{U}_2 \supset \tilde{\Omega}_2 \supset \Omega_2$, то тогда $\tilde{\Omega}_1 = \Omega_1$ и $\tilde{\Omega}_2 = \Omega_2$.

Мы можем считать, что $\mathcal{U}_2 \supset \mathcal{U}_1$.

Пусть точка $y_x \in \Omega_2$, $y \in \Omega_1$ такова, что траектория $\{f^n y\}_{n=0}^{\infty}$ всюду плотна во множестве Ω_2; существования такой точки утверждается в следствии 2. Пусть $\mathcal{U}_y$ – открытый шар с центром в точке y, такой, что $\mathcal{U}_y \cap \mathcal{U}_1 \neq \emptyset$, причем $diam\ \mathcal{U}_y = \varepsilon$

Пусть $x \in \Omega_1$ и $\mathcal{U}_x$ – открытый шар с центром в точке x и $diam\ \mathcal{U}_x < \frac{\varepsilon}{2}$, причем $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{U}_1$. Так как траектория $\{f^n y\}_{n=0}^{\infty}$ всюду плотна в ω – предельном множестве Ω_2 и $\Omega_1 \subset \Omega_2$ то существует $n > 0$ такое, что $f^n(y) \in \mathcal{U}_x$.

Согласно замечанию 1 окрестность $\mathcal{U}_x$ может быть выбрана настолько малой, что компоненты связности $\sigma(f^{-k}(\mathcal{U}_x))$, $k = 0, 1, \ldots, n$, содержащие точки $f^{n-k}(y)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, содержатся в окрестности $\mathcal{U}_2$; $\mathcal{U}_2 \supset \sigma(f^{-k}(\mathcal{U}_x))$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Так как $diam\ \sigma(f^{-n}(\mathcal{U}_x)) \leq \frac{diam\ \mathcal{U}_x}{\lambda^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, то существует точка $x_0 \in \sigma(f^{-n}(\mathcal{U}_x))$ такая, что $f^n(x_0) = x$. Очевидно, $x_0 \in \mathcal{U}_1$, $x_0 \notin \mathcal{U}_1$.

Достроим отрицательную часть траектории точки x_0 так, чтобы α – предельное множество A достроенной траектории содержалось в Ω. Пусть $y_1 \in M$ – периодическая точка периода n растягивающего эндоморфизма $f: M \to M$, существование которой туверждает следствие 1. Пусть $\mathcal{U}_\delta(y_1)$ – выпуклая окрестность точки y_1, в которой растягивающий эндоморфизм $f: M \to M$ является локальным диффеоморфизмом, причем $\mathcal{U}_\delta(y_1) \subset \mathcal{U}_1$. Обозначим $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1} = y$ периодическую траекторию точки y_1. Так как $f(y_i) = y_{i+1} (mod\, n)$, то пусть $\sigma(f^{-m}(\mathcal{U}_\delta(y_1)))$ – компонента связности полного прообраза $f^{-m}(\mathcal{U}_\delta(y_1))$, такая, что

$$y_{(1-m)\,\mathrm{mod}\,n} \in \mathcal{G}(f^{-n}(\mathcal{U}_\delta(y_1))).$$

По лемме 1 [1] существует $\ell > 0$ такое, что $f^\ell(\mathcal{U}_\delta(y_1)) \ni x_0$. Следовательно, существует точка $x_1 \in \mathcal{U}_\delta(y_1)$ такая, что $f^\ell(x_1) = x_0$. Множество точек $\theta_1^1 =$ $= \{f^0 x_1 = x_1, dx_1, f^2 x_1, \ldots, f^\ell x_1 = x_0\}$ представляет собой часть траектории, которую мы достраиваем в отрицательном направлении. Рассмотрим следующую отрицательную часть траектории точки x_1:

$$\theta_1^2 = \{x^m = f^{-m}(x_1) \mid f^{-m}(x_1) \in \mathcal{G}(f^{-m}(\mathcal{U}_\delta(y_1)))\}.$$

Точки $\theta_1 = \theta_1^1 \cup \theta_1^2$, согласно замечанию 1, представляют собой отрицательную часть траектории точки x_0, такую, что α – предельное множество θ_1 совпадает с периодической траекторией точки $y_1 \in \Omega_1$. Обозначим построенную траекторию θ; она обладает тем свойством, что ее α – предельное множество $A \subset \Omega_1$ и существует точка $x_0 \in \theta$ такая, что $x_0 \in \mathcal{U}_2$, $x_0 \notin \mathcal{U}_1$ и $f^n(x_0) = x$, где $x \in \Omega_1$, причем $\theta \subset \mathcal{U}_2$.

Покажем, что множество $\Omega_1 \cup \theta$ является ω – предельным. Пусть $\mathcal{G}_n = \{V_i^{(n)},\ i = 1, 2, \ldots, k_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ конечные покрытия компактного множества $\Omega \cup \theta$, причем $\mathrm{diam}\, V_i^{(n)} \le \varepsilon_n$ и $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть $V \subset M$ – произвольное открытое множество многообразия M. Пусть $x_0 \in \theta$ и V_i^1 – открытая окрестность точки x_0 такая, что $V_i^1 \in \mathcal{G}_1$. Так как $f: M \to M$ – растягивающий эндоморфизм, то согласно лемме 1 [1] существует $k > 0$ такое, что $f^k(V) \supset V_i^1$. Следовательно, существует открытое множество $W_1 \subset V$ такое, что $f^m(W_1) \subset V_i^1$. Так как $f^n(x_0) = x$, где $x \in \Omega_1$ по построению траектории θ, то $f^n(V_i^1) \cap V_{i_1}^2 \neq \emptyset$, где $V_{i_1}^2 \in G_2$ такое, что $x \in V_{i_1}^2$. Определим $W_2 = f^{-n-k}(V_{i_1}^2) \cap W_1$. Очевидно, $V \supset W_1 \supset W_2$. Но так как Ω_1 – ω – предельное множество, то существует такое $\ell > 0$, что

$$A_1 = f(V_{i_1}^2) \cap V_{i_2}^2, \quad A_2 = f(A_1) \cap V_{i_3}^2, \ldots .$$

$$A_\ell = f(A_{\ell-1}) \cap V_{\ell+1}^2, \text{ причем } A_k \neq \emptyset, \ k = 1, 2, \ldots, \ell,$$

при этом $\bigcup_{\ell=2}^{\ell+1} V_{i_\ell}^2 \supset \Omega_1$ и существует точка $x_{i_\ell} \in \theta$, такая, что $x_{i_\ell} \in A_\ell$.

Определим $W_3 = f^{-n-k-\ell}(A_\ell) \cap W_2$. Так как A_ℓ – непустое открытое множество, то существует $V_{i_\ell}^{m_1} \in G_{m_1}$ такое, что $V_{i_\ell}^{m_1} \subset A_\ell$ и $x_{i_\ell} \in V_{i_\ell}^{m_1}$, где $x_{i_\ell} \in \theta$ и $m_1 > 2$.
Применяя описанный процесс к окрестности $V_{i_\ell}^{m_1}$, получим множество W_4 и т.д. В результате будем иметь систему открытых множеств такую, что $V \supset \supset W_1 \supset W_2 \supset W_3 \supset \ldots$. Из построения следует, что для каждой точки $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$, $\Omega_x = \Omega_1 \cup \theta$

Возьмем окрестность $\mathcal{U}$ ω – предельного множества $\Omega_1 \cup \theta$: $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_2$, и существует точка $x \in \Omega_2$ такая, что $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U} = \emptyset$, где $\mathcal{U}_x$ – достаточно малая окрестность точки x. По теореме 1 существует максимальное в этой окрестности ω – предельное множество Ω такое, что $\mathcal{U} \supset \Omega \supset \Omega_1 \cup \theta$. В силу того, что $\Omega_2 \supset \Omega \cup \theta \supset \Omega_1$ и $\mathcal{U}_2 \supset \mathcal{U} \supset \mathcal{U}_1$, мы можем выбрать марковское разбиение ξ многообразия M настолько малого диаметра, чтобы марковские разбиения для множеств Ω_2, $\Omega \cup \theta$, Ω_1 соответственно с окрестностях $\mathcal{U}_2, \mathcal{U}, \mathcal{U}_1$ – $\xi_{\mathcal{U}_2}, \xi_{\mathcal{U}}, \xi_{\mathcal{U}_1}$ удовлетворяли включениям: $\xi_{\mathcal{U}_2} \supset \xi_{\mathcal{U}} \supset \xi_{\mathcal{U}_1}$. Отсюда имеем:

$$G(\xi_{\mathcal{U}_2}) \supset G(\xi_{\mathcal{U}}),$$

$$G(\xi_{\mathcal{U}}) \supset G(\xi_{\mathcal{U}_1}),$$

где символ $\subset$ означает включение графов.
Так как по лемме 4 графы связны, то это означает, что $\Omega_2 \supset \Omega \supset \Omega_1$, $\Omega \neq \Omega_2$, $\Omega \neq \Omega_1$ и Ω является локально максимальным ω-предельным множеством. Теорема 3 доказана.

Согласно теореме 3 существует плотная в себе цепь, и, следовательно, частично упорядоченное множество $\Sigma'(f)$ не удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей. Но $\Sigma(f) \supset \Sigma'(f)$, поэтому и частично упорядоченное множество $\Sigma(f)$ тоже не удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей.

Доказательство теоремы 4. Покажем, что частично упорядоченное множество $B_{\sigma} = \{\sigma' \mid \sigma < \sigma', \sigma' \in \Sigma'(f)\}$ направленное.

Пусть $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathfrak{M}'(f)$ – локально максимальные множества растягивающего эндоморфизма $f: M \to M$, такие, что $\Omega_1 \supset \Omega$, $\Omega_2 \supset \Omega$, где $\Omega \in \mathfrak{M}(f)$ и $\pi\Omega_1 = \alpha_1$, $\pi\Omega_2 = \alpha_2$, $\pi\Omega = \alpha$. Если Ω – локально максимальное ω-предельное множество, то теорема тривиальна.

Пусть Ω – не локально максимальное ω-предельное множество. Выберем окрестности $\mathcal{U}_2 \supset \Omega_2$, $\mathcal{U}_1 \supset \Omega_1$, $\mathcal{U} \supset \Omega$, в которых множества Ω_1 и Ω_2 локально максимальны, причем $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \supset \mathcal{U}$. Существуют марковские разбиения $\xi_{\mathcal{U}_1}$ для ω-предельного множества Ω_1 в окрестности $\mathcal{U}_1$ и $\xi_{\mathcal{U}_2}$ для ω-предельного множества Ω_2 в окрестности $\mathcal{U}_2$, и $\xi_{\mathcal{U}}$ для ω-предельного множества Ω в окрестности $\mathcal{U}$, такие, что $\xi_{\mathcal{U}_1} \supset \xi_{\mathcal{U}}$, $\xi_{\mathcal{U}_2} \supset \xi_{\mathcal{U}}$. Следовательно, $G(\xi_{\mathcal{U}_1}) \supset G(\xi_{\mathcal{U}})$ и $G(\xi_{\mathcal{U}_2}) \supset G(\xi_{\mathcal{U}})$, поэтому существует локально максимальное ω-предельное множество Ω_3 в окрестности $\mathcal{U}$ такое, что

$$\Omega_1 \supset \Omega_3 , \quad \Omega_2 \supset \Omega_3 .$$

Теперь покажем, что каждому направленному множеству $B \subset \Sigma'(f)$ соответствует единственный элемент $\sigma \in \Sigma(f)$ такой, что $B = B_\sigma = \{\sigma' | \sigma < \sigma', \sigma' \in \Sigma'(f)\}$.

Пусть B – семейство локально максимальных ω – предельных множеств, обладающих свойством: для каждых $\Omega_1, \Omega_2 \in B$ существует $\Omega_3 \in B$ такое, что $\Omega_1 \supset \Omega_3$, $\Omega_2 \supset \Omega_3$. Пусть $\Omega_\Lambda = \bigcap_{\Omega \in B} \Omega$ и $\{U_i, i = 1, 2, \dots\}$ – открытые множества такие, что $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$, и $\bigcap_{i=1} U_i = \Omega_\Lambda$.

Покажем, что Ω_Λ – ω – предельное множество. Так как B – направленное множество, то существует последовательность $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \Omega_3 \supset \dots$ такая, что $U_n \supset \Omega_n$. Каждое множество Ω_n можно покрыть конечным числом открытых множеств $\{V^n_{i_m}, i_m = 1, 2, \dots, k_n\}$, таких, что $diam\, V^n_{i_m} = \varepsilon_n$ и для каждого $V^n_{i_m}$ существует точка $x \in \Omega_n : x \in V^n_{i_m}$ и $\bigcup_{i_m} V^n_{i_m} \subset U_n$. При этом $\varepsilon_n \to 0$, когда $n \to \infty$.

Пусть $W \subset M$ – произвольное открытое множество. Существует $m_1 > 0$ такое, что $f^{m_1}(W) \supset V^1_{i_1}$ по лемме 1 [1]. Следовательно, можно выбрать окрестность $W_1 \subset W$ такую, что $f^{n_1}(W_1) \subset V^1_{i}$,

и существует точка $x \in f^{m_1}(W_1)$, $x \in \Omega_1$, такая, что траектория, проходящая через нее, плотна в Ω_1 (следствие 2). В силу того, что Ω_1 – ω –предельное локально максимальное множество, существует $m_2 > 0$ такое, что $A_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \dots, m_2$, где $A_1 = f^{m_1}(W_1) \cap V^1_{i_1}$, $A_2 = f(A_1) \cap V^1_{i_2}$, $A_3 = f(A_2) \cap V^1_{i_3} \dots$

$\dots A_{m_2} = f(A_{m_2 - 1}) \cap V^1_{i_{m_2}}$, причем здесь исчерпаны все индексы $i_m \in (1, 2, \dots, k_1)$, и сушествует точка $x \in \Omega_2$ такая, что $x \in A_2$. Пусть открытое множество $W_2 \subset W_1$ такое, что $W_2 = f^{-m_1-m_2}(A_{m_2})$.

Теперь снова применим описанный процесс, но только уже к множествам, где в качестве W взята окрестность A_{m_2}, а в качестве покрытия $\{V^1_{i_m}\}$ $(diam\ V^1_{i_m} = \varepsilon_1)$ множества Ω_1 – покрытие $\{V^2_{i_m}\}$ $(diam\ V^2_{i_m} = \varepsilon_2)$ множества Ω_2.

В результате получим открытое множество $W'_2 \subset A_{m_2}$ (которое соответствует W_2). Тогда $W_3 = f^{-m_1-m_2}(W'_2)$ и т.д. Получаем систему открытых множеств $W \supset W_1 \supset W_2 \supset W_3 \supset \ldots$. По построению точка $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$ будет притягиваться множеством Ω, т.е. $\Omega_x = \Omega$.

Доказательство следствия 4. Если $\alpha \in \Sigma(f)$ и $\alpha \in \Sigma'(f)$, то утверждение очевидно.

Пусть $\alpha \in \Sigma(f)$ и $\alpha \notin \Sigma'(f)$. Пусть V_α – окрестность элемента α в интервальной топологии множества $\Sigma(f)$. Из теоремы 4 следует, что существует последовательность $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots$ такая, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \alpha$; следовательно, для $i > N$, где $N > 0$ – достаточно большое, $\alpha_i \in V_\alpha$, что доказывает плотность $\Sigma'(f)$ в $\Sigma(f)$.

Доказательство следствия 5. Пусть $\Sigma'(f_1) \sim \Sigma'(f_2)$, где символ $\sim$ означает отношение изоморфизма. Тогда имеется и взаимно однозначное соответствие между направленными множествами частично упорядоченных множеств $\Sigma'(f_1)$ и $\Sigma'(f_2)$, но так как $\Sigma(f_1)$ и $\Sigma(f_2)$ получаются как пополнения $\Sigma'(f_1)$ и $\Sigma'(f_2)$ направленными множествами согласно теореме 4, то $\Sigma(f_1) \sim \Sigma(f_2)$

III. Доказательство теоремы 5. Прежде всего заметим, что многообразие M имеет счетную базу и, таким образом, мощность замкнутых множеств в M равна мощности континуума. Следовательно, достаточно показать, что мощность ω – предельных локально максимальных множеств не меньше, чем мощность континуума.

Пусть $\Omega \in \mathfrak{M}'(f)$ – произвольное локально максимальное ω –предельное множество – растягивающего эндоморфизма $f: M \to M$. Пусть $\mathcal{U}$ – достаточно малое открытое множество многообразия M, в котором растягивающий эндоморфизм $f: M \to M$ является локальным диффеоморфизмом, и такое, что $\mathcal{U} \cap \Omega = \phi$. Выберем в открытом множестве $\mathcal{U}$ счетную систему открытых подмножеств $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \ldots$ таких, что $\mathcal{U} \supset \mathcal{U}_i$ для каждого $i = 1, 2, 3, \ldots$, $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \phi$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3, \ldots$.

Мы можем выбрать систему $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ так, чтобы она обладала следующим свойством: любая последовательность точек $\{x_n\}$, где $x_n \in \mathcal{U}_n$, сходится к единственной точке $x \in \mathcal{U}$. В силу леммы 1 [2] в каждом множестве $\mathcal{U}_n$ существует точка $y_n \in \mathcal{U}_n$, для которой существует $m \geqslant 0$ такое, что $f^m(y_n) \in \Omega$. Выберем отрицательную полутраекторию θ точки x, асимптотически приближающуюся к множеству Ω: $\alpha(x) \subset \Omega$ где $\alpha(x)$ – α – предельное множество этой отрицательной полутраектории, проходящей через точку $x \in \mathcal{U}$, это всегда можно сделать так, как описано в доказательстве теоремы 3. Но так как окрестность $\mathcal{U}$ достаточно малая, то каждой точке $x_n \in \mathcal{U}_n$ соответствует траектория θ_n, проходящая через эту точку в отрицательном направлении и асимптотически приближающаяся к траектории θ_0 : для этого нужно окрестность $\mathcal{U}$ итерировать в отрицательную сторону по траектории θ_0. Полученную счетную систему траекторий обозначим $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots$

Покажем, что любая подсистема этой системы траекторий, объединенная с множеством Ω, будет ω – предельным множеством.

Действительно, пусть W_x^n – окрестности точек $x \in \Omega$, диаметр которых равен ε_n, и $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Рассмотрим систему конечных покрытий $\{W_{x_i}^n\}$ $n = 1, 2, \ldots$ (точек x_i каждый раз конечное число). Для каждой точки $x_n \in \mathcal{U}_n$ возьмем систему окрестностей $\mathcal{U}_n^m$ такую, что $diam\ \mathcal{U}_n^m = \delta_m^2$ и $\delta_m^2 \to 0$ при $m \to \infty$, причем $\mathcal{U}_n^1 \supset \mathcal{U}_n^2 \supset \mathcal{U}_n^3 \supset \ldots$.

Пусть $\Omega_1 = \Omega \cup (\bigcup_{i \in \mathcal{J}} \theta_i)$, где $\mathcal{J} \subset N$, N – множество неотрицательных целых чисел, причем если $\mathcal{J}$ бесконечное, то $0 \in \mathcal{J}$

Докажем, что множество Ω_1 ω – предельное. Для этого определим "схему переключения". Если множество индексов $\mathcal{J}$ конечное, то "схема переключения" по определению имеет вид:

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n & i_1 & i_2 \ldots & i_n & i_1 & \ldots \\ \mathcal{U}_{i_1}^{k_1} & \mathcal{U}_{i_2}^{k_2} & \ldots & \mathcal{U}_{i_n}^{k_1} & \mathcal{U}_{i_1}^{k_2} & \mathcal{U}_{i_2}^{k_2} \ldots & \mathcal{U}_{i_n}^{k_2} & \mathcal{U}_{i_1}^{k_3} & \ldots \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{J} = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$. По определению

$\mathcal{U}_{i_\ell}^{k_i} = f^{-k_i}(\mathcal{U}_{i_\ell}) \cap W_i$, где $W_i = \bigcup_{x \in \Omega} W_x^i$,

причем $k_{i+1} > k_i > 0$, $\ell = 1, 2, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots$,

и k_i выбраны достаточно большими, чтобы

$\mathcal{U}_{i_\ell}^{k_i} \neq \phi$. Если множество $\mathcal{J} = \{i_1, i_2, \ldots\}$ бесконечное, то "схема переключения" по определению имеет вид:

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_1 & i_2 & i_1 & i_2 & i_3 & i_1 \dots \\ \mathcal{U}_{i_1}^{k_1} & \mathcal{U}_{i_2}^{k_2} & \mathcal{U}_{i_2}^{k_2} & \mathcal{U}_{i_1}^{k_3} & \mathcal{U}_{i_2}^{k_3} & \mathcal{U}_{i_3}^{k_3} & \mathcal{U}_{i_4}^{k_4} \dots \end{pmatrix}.$$

По определению $\mathcal{U}_{i_\ell}^{k_i} = f^{-k_i}(\mathcal{U}_{i_\ell}) \cap W_i$, $i, \ell = 1, 2, \dots,$ и $k_{i+1} > k_i > 0$, k_i выбраны так, чтобы $\mathcal{U}_{i_\ell}^{k_i} \neq \varnothing$.

Пусть теперь $V \subset M$ – произвольное открытое множество многообразия. Тогда по лемме 1 [2] существует целое число $p_1 > 0$ такое, что $f^{p_2}(V) \supset \mathcal{U}_{i_1}^{k_1}$. Пусть $V_1 \subset V$ – открытое множество такое, что $f^{p_1}(V_1) \subset \mathcal{U}_{i_1}^{k_1}$. Так как Ω – ω -предельное локально максимальное множество, то в нем существует всюду плотная траектория. Возьмем покрытие $\{V_{x_i}^1\}$ ω – предельного множества Ω. Тогда имеется часть всюду плотной траектории, которая проходит через все множества покрытия $\{V_{x_i}^1\}$ за конечное время p_2 и попадает в окрестность "схемы переключения" $\mathcal{U}_{i_2}^{k_1}$.

Поэтому можно выбрать открытое множество $V_2 = f^{-k_1 - p_1 - p_2}(\mathcal{U}_{i_2}^{k_1}) \subset V_1$. Если мы второй раз воспользуемся аналогично "схемой переключения", то получим открытое множество $V_3 \subset V_2$ и т.д. Следовательно, точка $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{V_i}$, где $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$ последовательность непустых открытых множеств, полученная при бесконечном использовании "схемы переключения", будет притягиваться множеством $\Omega_1 = \Omega \cup \left(\bigcup_{i \in \mathcal{J}} \theta_i \right)$ по построению "схемы переключения" и правилом ее использования, т.е. $\Omega_x = \Omega_1$.

Определим окрестность $\mathcal{U}_{\Omega_1} \supset \Omega_1$ следующим образом: $\mathcal{U}_{\Omega_1} = V_{\Omega} \cup \left(\bigcup_{i \in \mathcal{J}} V_{\theta_i} \right)$, где V_{Ω} – окрестность ω – предельного множества, в которой оно максимально, и V_{θ_i} – окрестность траектории θ_i, $i \in \mathcal{J}$ такая, что $V_{\theta_i} = V_{\theta_i^+} \cup V_{\theta_i^-}$, где $V_{\theta_i^-} = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(\mathcal{U}_i)$ и $V_{\theta_i^+} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{U}_{\varepsilon}(f^k(x_n))$, $x_n \in \mathcal{U}_i$

$\mathcal{U}_{\varepsilon}(\ldots)$ – окрестность диаметра ε. Согласно теореме 1 в окрестности $\mathcal{U}_{\Omega_1} \supset \mathcal{U}_1$ содержится локально максимальное ω – предельное множество $\Omega_{\mathcal{J}} \supset \Omega_1$. В силу построения окрестностей $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ и $\mathcal{U}_{\Omega_1}$ заключаем, что $\Omega_{\mathcal{J}_1} \neq \Omega_{\mathcal{J}_2}$, если $\mathcal{J}_1 \neq \mathcal{J}_2$, где $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \subset N$.

Следовательно, мы установили взаимно однозначное соответствие между всеми подмножествами $\mathcal{J} \subset N$ множества натуральных чисел и локально максимальными ω –предельными множествами вида $\Omega = \Omega_{\mathcal{J}}$. Итак, мощность множества локально максимальных ω – предельных множеств не меньше мощности континуума; а так как оценка сверху была установлена выше, то мы заключаем, что эта мощность равна мощности континуума.

Покажем, что всякая максимальная цепь частично упорядоченного множества $\Sigma'(f)$ будет счетной. Действительно, пусть L – максимальная цепь частично упорядоченного множества $\Sigma'(f)$. Пусть $\Omega \in L$ и $\mathcal{U} \supset \Omega$ – окрестность множества Ω, в которой Ω локально максимально. Пусть $\mathcal{U}_1 \supset \Omega$ – вторая окрестность Ω такая, что $\mathcal{U} \supset \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}_1$. Выберем открытое множество $G \in \mathcal{U}$, $G \notin \mathcal{U}_1$, где $G \in B$. B – база топологии $\mathcal{T}$ многообразия M. Проделаем эту процедуру для каждого элемента $\Omega \in L$. Следовательно, мощность цепи L не больше мощности базы открытых множеств B, но база имеет счетную мощность, поэтому цепь L имеет мощность не более чем счетную. Так как цепь

L, согласно теореме 3, плотна в себе, то она имеет ровно счетное число элементов.

Из следствия 1 следует, что минимальными элементами частично упорядоченного множества $\Sigma'(f)$ будут только периодические траектории; их счетное число. Следовательно, множество минимальных элементов в частично упорядоченном множестве $\Sigma'(f)$ счетно.

Доказательство теоремы 6. Так как $\Sigma(f) \supset \Sigma'(f)$, то $\Sigma(f)$ имеет мощность континуума.

Для доказательства того, что максимальная цепь частично упорядоченного множества $\Sigma(f)$ имеет счетную мощность или мощность континуума, достаточно показать, что не существует конечных максимальных цепей.

Действительно, пусть $L = \{\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots \subset \Omega_n\}$ – конечная цепь ω – предельных множеств $\Omega_i \in \mathfrak{M}(f)$. Если $\Omega_n = M$, то всегда можно достроить траекторию θ так, чтобы α – предельное и ω –предельное множество траектории θ, Ω_θ и A_θ были такими, что A_θ, $\Omega_\theta \subset \Omega_{n-1}$. Поэтому множество $\Omega_{n-1} \cup \theta$ будет ω –предельным и $\Omega_{n-1} \subset \Omega_{n-1} \cup \theta \subset \Omega_n$

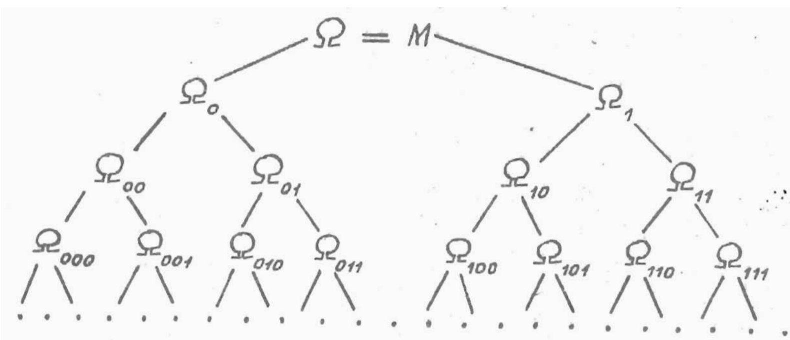
Если $\Omega_n \neq M$, то всегда можно построить траекторию θ так, чтобы $A_\theta, \Omega_\theta \subset \Omega_n$ и $\Omega_n \cup \theta \supset \Omega_n$. Построение аналогичной траектории проводилось нами выше. Но такое построение противоречит тому, что цепь L максимальна. Следовательно, максимальная цепь L конечной быть не может.

Покажем, что мощность множества минимальных элементоы частично упорядоченного множества $\Sigma(f)$ равна мощности континуума.

Пусть $\Omega \in \mathfrak{M}'(f)$ и не является минимальным элементом. Существуют Ω' и Ω'' – циклы периода k' и k'' соответственно, $\Omega' \cap \Omega'' = \emptyset$. Из доказательства теоремы 5 следует, что существуют ω –предельные множества $\tilde{\Omega}'$, $\tilde{\Omega}''$ такие, что $\Omega' \subset \tilde{\Omega}' \subset \Omega$ и $\Omega'' \subset \tilde{\Omega}'' \subset \Omega$, причем каждое из множеств $\tilde{\Omega}'\setminus\Omega'$, $\tilde{\Omega}''\setminus\Omega''$ состоит из одной траектории. Очевидно, $\tilde{\Omega}'\cap\tilde{\Omega}''=\emptyset$. Существуют окрестность H' множества $\tilde{\Omega}'$ и окрестность H'' множества $\tilde{\Omega}''$, такие, что $H'\cap H''=\emptyset$. По теореме 1 существуют ω – предельные локально максимальные множества $\tilde{\tilde{\Omega}}'$ и $\tilde{\tilde{\Omega}}''$, $\tilde{\tilde{\Omega}}'\in\mathfrak{M}'(f)$, $\tilde{\Omega}'\subset\tilde{\tilde{\Omega}}'\subset H'$ и $\tilde{\tilde{\Omega}}''\in\mathfrak{M}(f)$, $\tilde{\Omega}''\subset\tilde{\tilde{\Omega}}''\subset H''$.

Если H – окрестность множества Ω, не содержащая множеств $\tilde{\Omega}\supset\Omega$ и $H', H''\subset H$, то $\tilde{\tilde{\Omega}}', \tilde{\tilde{\Omega}}''\subset\Omega$ (следует из доказательства теоремы 3). Пусть $\Omega=M$ и заданы k_0 и k_1. Построим по k_0 и k_1 ω –предельные локально максимальные множества Ω_0 и Ω_1, как было описано выше, где k_0 и k_1 – периоды циклов, которые участвуют в построении. Проделаем теперь тоже самое для множества Ω_0 и чисел k_{00}, k_{01} и, аналогично, для Ω_1 и чисел k_{10}, k_{11}, причем $k_0<k_{00}, k_1$, и $k_1<k_{10}, k_{11}$. Получим Ω_{00}, Ω_{01} и Ω_{10}, Ω_{11} и т.д.

Таким образом, можно построить систему



где

$$\Omega_{i_1\ldots i_s}\in\mathfrak{M}'(f),$$

$\Omega_{i_1\ldots i_{s-1}} \supset \Omega_{i_1\ldots i_{s-1}i_s}$; $\Omega_{i_1 i_2\ldots i_{s-1}0} \cap \Omega_{i_1 i_2\ldots i_{s-1}1} = \emptyset$,

$k_{i_1\ldots i_{s-1}} < k_{i_1\ldots i_{s-1}i_s}$, $i_s = 0,1$; $s = 1,2,\ldots$.

Всякой бесконечной цепи L :

$\Omega_{i_1} \supset \Omega_{i_1 i_2} \supset \Omega_{i_1 i_2 i_3} \supset \ldots$ отвечает элемент F , $F = \bigcap\limits_{\Omega_{i_1\ldots i_s}} \Omega_{i_1 i_2\ldots i_s}$. То, что F – ω –предельное множество, доказывается так, как в теореме 4. Так как $k_{i_1 i_2\ldots i_{s-1}} < k_{i_1 i_2\ldots i_{s-1}i_s}$, то множество F не содержит циклов и содержит хотя бы один минимальный элемент, отличный , следовательно, от цикла принадлежащий множеству $\mathfrak{M}(f)$.

Мощность всех таких минимальных элементов равна мощности бесконечных цепей L вида: $\Omega_{i_1} \supset \Omega_{i_1 i_2} \supset \Omega_{i_1 i_2 i_3} \supset \ldots$, т.е. равна мощности континуума. Так как мощность множества замкнутых множеств многообразия M равна мощности континуума, то мощность множества минимальных элементов тоже равна мощности континуума.

Литература

1. В.С.Бондарчук, А.Н.Шарковский, Восстанавливаемость растягивающих эндоморфизмов по системе ω – предельных множеств, (настоящий сборник).

2. А.Н.Шарковский, Частично упорядоченная система притягивающих множеств, ДАН СССР, 170, № 6 (1966), 1276–1278.

3. А.Н.Шарковский, Об ω –предельных множествах дискретных динамических систем, Диссертация, К., 1966.

4. В.М.Алексеев, Квазислучайные динамические системы, Матем.сборник, 76 (118), 1 (1968), 72-134.

5. В.М.Алексеев, Перроновские множества и топологические цепи Маркова, УМН, 24, № 5,(1969), 227-228.

6. M.Shub, Endomorphisms of compact differentiable manifolds, Amer.J.Math., 91, N 1 /1969/, 175-200.

7. Я.Г.Синай, Марковские разбиения и $У$-диффеоморфизмы, Функц. анализ и его приложения, 2, вып.1 (1968), 64-90.

8. Я.Г.Синай, Построение марковских разбиений, Функц. анализ и его приложения, 2, вып.3 (1968), 70-81.

9. Г.Биркгоф, Теория структур, ИЛ, М., 1952.

10. К.Куратовский, Топология, 1,2, Мир, М., 1966.

11. Д.Громол, В.Клингенберг, В.Мейер, Риманова геометрия в целом, Мир, М., 1971.

12. А.Б.Каток, Динамические системы с гиперболической структурой, Девятая летняя математическая школа, Институт математики АН УССР, К., 1972, 125-212.