Доклады Академии наук СССР
1965. Том 160, № 5

МАТЕМАТИКА

А. Н. ШАРКОВСКИЙ

О ПРИТЯГИВАЮЩИХ И ПРИТЯГИВАЮЩИХСЯ МНОЖЕСТВАХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 21 IX 1964)

Пусть T — непрерывное однозначное отображение компакта E в себя. Всякая точка $x \in E$ порождает итерационную последовательность $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$. Если точки $x, Tx, \ldots, T^{k-1}x$ попарно различны и $T^{k-1}x = x$, то точки $x, Tx, \ldots, T^{k-1}x$ образуют цикл k-го порядка.

Точка y называется ω-предельной точкой последовательности $\{T^j x\}$, если для всякой окрестности U точки y и любого $n > 0$ найдется номер $m \geqslant n$ такой, что $T^m x \in U$. Множество ω-предельных точек последовательности $\{T^j x\}$ обозначим Ω_x.

1. Множество $\Omega = \Omega_x$ замкнуто и $T\Omega = \Omega$. Следующие две теоремы характеризуют отображение T на множестве Ω.

Теорема 1. *Если U — открытое в Ω множество, причем $U \neq \Omega$, то замыкание множества TU не содержится в U.*

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Если $\Omega' \subset \Omega$ таково, что $T\Omega' = \Omega'$, то Ω' не может быть одновременно замкнутым и открытым в Ω.*

Следствие 2. *Если Ω конечно, точки множества Ω образуют цикл.*

Следствие 3. *Если Ω бесконечно, каждая точка цикла, принадлежащего Ω, является предельной для точек множества Ω.*

Теорема 2. *Если множество Ω бесконечно и $T^j x \in \Omega$ при $j \geqslant j_0$, то для любого открытого в Ω множества U производное множество множества $\bigcup_{j=0}^{\infty} T^j U$ есть Ω.*

Если множество Ω имеет в E внутренние точки, то номер j_0 такой, что $T^j x \in \Omega$ при $j \geqslant j_0$, всегда существует.

Теоремы 1 и 2 полностью характеризуют отображение на множестве Ω. Под этим понимается следующее.

А. Если задано непрерывное отображение T компакта E в себя так, что на замкнутом множестве Ω $T\Omega = \Omega$ и справедливо утверждение теоремы 2, то найдется точка $x \in \Omega$ такая, что $\Omega_x = \Omega$.

Б. Если замкнутое множество Ω не имеет внутренних в E точек, не содержит изолированных точек E и на нем задано непрерывное отображение T так, что $T\Omega = \Omega$ и справедлива теорема 1, то отображение T можно продолжить на замкнутое множество E', $\Omega \subset E' \subseteq E$ так, что отображение T на E' будет непрерывно и найдется точка $x \in E'$, для которой $\Omega_x = \Omega$.

Вопрос о структуре множества ω-предельных точек итерационной последовательности сводится к следующему: какова структура замкнутого множества $\Omega \subseteq E$, если на множестве Ω можно задать непрерывное отображение T так, что $T\Omega = \Omega$ и на Ω справедлива теорема 1 или 2.

Можно отметить такой результат: если компакт E локально связен и множество Ω имеет в E внутренние точки, то $\Omega = \bigcup_{j=1}^{k} \Omega^{(j)}$, $1 \leqslant k < \infty$, где $\Omega^{(1)}, \ldots, \Omega^{(k)}$ — связные замкнутые множества, не имеющие общих точек, и $T\Omega^{(j)} = \Omega^{(j+1)}$, $j = 1, 2, \ldots, k-1$, $T\Omega^{(k)} = \Omega^{(1)}$.

2. Будем говорить, что точка $x \in E$ притягивается множеством Ω, если Ω есть множество ω-предельных точек последовательности $\{T^j x\}_{j=0}$. Множество, состоящее из точек компакта, которые притягиваются к данному множеству Ω, обозначим $P(\Omega)$. Условимся в дальнейшем обозначать Ω (с индексами или без них) те и только те множества, для которых $P(\Omega)$ не пусто.

Теорема 3. $\bigcup_{\Omega' \supseteq \Omega} P(\Omega')$ *есть множество типа* G_δ.

Пусть Σ — система открытых множеств σ_i, $i = 1, 2, \ldots$, таких, что: 1) $\sigma_i \cap \Omega \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots$; 2) для всякой окрестности U точки $x \in \Omega$ найдется $\sigma \in \Sigma$, содержащееся в U. Построим для каждого $\sigma_i \in \Sigma$ открытое множество $S(\sigma_i)$, составленное из всех прообразов множества σ_i: $x \in S(\sigma_i)$ тогда и только тогда, когда существует $k \geqslant 0$ такое, что $T^k x \in \sigma_i$. $\bigcap_{i=1}^{\infty} S(\sigma_i) = \bigcup_{\Omega' \supseteq \Omega} P(\Omega')$. В самом деле, если $x \in P(\Omega')$, *где* $\Omega' \supseteq \Omega$, то $x \in S(\sigma_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ Если $x \in P(\Omega'')$ и Ω'' не содержит Ω, т. е. существует точка $y \in \Omega$, не принадлежащая Ω'', то найдется $\delta_{i'} \ni y$, не содержащее ни одной точки последовательности $\{T^j x\}_{j=0}$. Следовательно, $x \overline{\in} S(\sigma_{i'})$ и $x \overline{\in} \bigcup_{\Omega' \supseteq \Omega} P(\Omega')$.

Теорема 4. $\bigcup_{\Omega' \subseteq \Omega} P(\Omega')$ *есть множество типа* $F_{\sigma\delta}$.

Действительно, если F — произвольное замкнутое множество, то множество $p(F)$, состоящее из точек $x \in E$, для которых $T^j x \in F$ при $j \geqslant j_0$ (j_0 зависит от x), есть множество типа F_σ. Рассмотрим последовательность открытых множеств $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$ таких, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \Omega$, и пусть F_i — замыкания множеств U_i. Построим множества $p(F_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ $\bigcap_{i=1}^{\infty} p(F_i)$ и есть множество $\bigcup_{\Omega' \subseteq \Omega} P(\Omega')$. В самом деле, если $x \in P(\Omega')$, $\Omega' \subseteq \Omega$, то $x \in p(F_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ Если $x \in P(\Omega'')$ и существует точка $y \in \Omega''$, не принадлежащая Ω, то найдется номер i_0 такой, что $y \overline{\in} F_{i_0}$, и тогда $x \overline{\in} p(F_i)$, $i \geqslant i_0$.

Следствие. $P(\Omega)$ *есть множество типа* $F_{\sigma\delta}$.

Если множество $\Omega \cap P(\Omega)$ не пусто, то $P(\Omega)$ на множестве Ω, как вытекает из теоремы 3, есть множество типа G_δ второй категории.

Возникает вопрос, существуют ли отображения, для которых множества $P(\Omega)$ есть множества типа G_δ или $F_{\sigma\delta}$ и не есть множества более простого типа. Утвердительный ответ на этот вопрос дают формулируемые ниже теоремы.

3. Рассмотрим случай, когда E — отрезок вещественной прямой.

Теорема 5. *Если Ω бесконечно, $P(\Omega)$ есть множество класса $\geqslant 1$ классификации Бэра — Валле-Пуссена.*

Следствие. *Если Ω бесконечно и не существует множества $\Omega' \supset \Omega$, то $P(\Omega)$ есть G_δ и не есть F_σ.*

Теорема 5 следует из леммы 1.

Лемма 1. *Если выполнены условия теоремы* 5, *то*: 1) *в любой окрестности каждой точки $X \in P(\Omega)$ есть точки $x' < x$, $x' \in P(\Omega)$ (если x не является левым концом E) и $x'' > x$, $x'' \in P(\Omega)$ (если x не является правым концом E)*; 2) *если интервал $(a, b) \subset P(\Omega)$, то и точки $a, b \in P(\Omega)$.*

Теорема 6. *Если Ω содержит цикл и существует $\Omega' \supset \Omega$, то $\bigcup_{\Omega' \supseteq \Omega} P(\Omega')$ есть множество второго класса.*

Доказательство теоремы 6 опирается на леммы 1 и 2.

Лемма 2. *Если* $(a, b) \subset \bigcup_{\Omega' \supseteq \Omega} P(\Omega')$ *и* Ω *содержит цикл, то существует такое* Ω', *что* $(a, b) \subset P(\Omega')$.

Лемма 2, по-видимому, справедлива, если Ω и не содержит циклов.

Теорема 7. *Если* Ω *содержит цикл и* 1) *существует* $\Omega' \supset \Omega$; 2) *во всякой окрестности* U *множества* Ω *найдется точка* $x \in P(\Omega)$, $x \bar{\in} \Omega$, $T^j x \in U$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, *то множество* $P(\Omega)$ *есть множество третьего класса классификации Бэра — Валле-Пуссена.*

Итак, множество $P(\Omega)$ при выполнении условий теоремы есть $F_{\sigma\delta}$ и не есть $G_{\delta\sigma}$.

Например, при отображении $Tx = x - x \sin \frac{1}{x}$ отрезка $[0, 1]$ множество точек x, для которых $T_x{}^j \to 0$ при $j \to \infty$, есть в точности $F_{\sigma\delta}$.

Если множество Ω бесконечно и содержит хотя бы одну изолированную точку (а следовательно, и счетное множество изолированных точек), то условие 2) теоремы выполняется.

Схема доказательства теоремы 7 следующая: 1) во множестве $\bigcup_{\Omega' \supseteq \Omega} P(\Omega')$ выбирается подмножество J, гомеоморфное множеству иррациональных чисел ([1]); 2) показывается, что множество $P(\Omega) \cap J$ может быть получено тем же путем и из тех же элементов, что и бэровское множество третьего класса ([2]).

Как следствие теорем 6 и 7 получаем теорему 8.

Теорема 8. *Если выполнены условия теоремы* 7, $\bigcup_{\Omega' \subseteq \Omega} P(\Omega')$ *есть множество третьего класса.*

Поступило
8 IX 1964

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, П. С. Урысон, Math. Ann., 98 (1927). [2] Н. Н. Лузин, Лекции об аналитических множествах, Собр. соч., 2, Изд. АН СССР, 1958, гл. II.