ЛОКАЛЬНО МАКСИМАЛЬНІ АТРАКТОРИ РОЗТЯГУЮЧИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

О. М. Шарковський, В. С. Бондарчук та А. Г. Сівак
(Інститут математики НАН України)

Вивчаються локально максимальні атрактори розтягуючих динамічних систем. Основним результатом роботи є зображення таких атракторів топологічними ланцюгами Маркова, що відповідають марковським розбиттям цих атракторів, яке дозволяє описати динаміку системи на них.

Уперше марковські розбиття побудував Я. Г. Сінай [1, 2] для дифеоморфізмів Аносова. Розтягуючі ендоморфізми, як найпростіші представники ендоморфізмів, вперше розглянув М.Шуб [3]. При побудові марковських розбиттів для розтягуючих ендоморфізмів ми, відповідним чином, модернізуємо метод Я.Г.Сіная.

Більш повна історія є в статтях О.М.Шарковського [4, 5]. О.М.Шарковський зазначає, що методи доведення основних результатів [6] були фактично опубліковані ще в 1973 році [7] у важкодоступній збірці статей Інституту математики АН України „Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений", хоча і в застосуванні вже до дещо інших об'єктів, і ніколи не були перекладені англійською мовою. Авторам невідомі аналогічні результати такого роду. Враховуючи таку історію та важливість підходу (на основі марковських розбиттів і топологічних ланцюгів Маркова), для опису побудови атракторів доцільно ці результати по-новому опублікувати.

1. Динамічні системи на компактах

Розглянемо спочатку деякі властивості динамічних систем на довільному компакті X, які породжуються неперервним відображенням $f : X \to X$. Асимптотична поведінка траєкторії визначається так званою ω-граничною множиною, або, по-іншому, атрактором траєкторії; атрактор будемо позначати A.

Термін "атрактор траєкторії" було запропоновано О.М.Шарковським у його книжці [8].

Основна властивість, яка характеризує динамічну систему на атракторі — це його динамічна зв'язність, сутність якої розкривається у наступних твердженнях.

Теорема 1.1. [8,9] *Нехай A — є атрактором траєкторії. Відображення $f : X \to X$ на A має наступну властивість: якщо $U \subset A$, $U \neq A$ і U є відкритим у A, то замикання $f(U)$ не міститься у U.*

У цьому сенсі на будь-якому атракторі траєкторії спостерігається "відсутність стискання".

Ця властивість динамічної зв'язності є не тільки необхідною, а й достатньою (!!): якщо на деякій замкненій множині $M \subset X$ задано відображення, яке має вищевказану властивість "відсутності стискання", то завжди є можливість продовжити це відображення на замкнену множину $M' \supseteq M$ таким чином, що множина M буде атрактором для динамічної системи на M'. Дану властивість було доведено в [8, с.42-44] та [9].

Розглянемо ряд наслідків цієї теореми.

Наслідок 1.1. *Якщо $U \subset A$ і $f(U) = U$, то U не може бути одночасно відкритим та замкненим у A.*

Наслідок 1.2. *Якщо A скінеченне, то точки множини A утворюють цикл.*

Дійсно, якщо A є скінченною і $f(A) = A$, то A містить хоча б один цикл (або нерухому точку). Точки цього циклу утворюють відкрито-замкнену множину у A і, як наслідок, цей цикл має містити усі точки множини A.

Наслідок 1.3. *Якщо A є нескінечнною, то кожна точка циклу, який належить A (якщо такий існує), має бути граничною для точок множини A.*

Це безпосередньо випливає з наслідку 1.1. Якщо мова йде про точки циклу з періодом n, то треба розглянути відображення f^n.

Існують й менш тривіальні наслідки теореми 1.1.

Наслідок 1.4. *Якщо A не є циклом, то будь-яка відкрита у A нульвимірна множина (якщо така існує), містить хоча б одну точку, яка не належить жодному циклу.*

Звернемо увагу, що у випадку, коли атрактор A містить відкриту у X підмножину, існує точка $x' \in A$, для якої $A_{x'} = A$, оскільки за вказаних умов для будь-якої точки x має існувати номер i_x такий, що $f^i x \in A$ для $i > i_x$. Тому, коли X є відрізком прямої, результат наслідку 1.4 можна уточнити: якщо множина A на відрізку відрізняється від циклу, то на A мають бути скрізь щільними точки, які не належать циклам. (Дійсно, якщо множина A є ніде не щільною на відрізку, то це твердження випливає з наслідку 1.4. Якщо ж A містить інтервал, то існує точка $x \in A$, для якої $A_x = A$, і в цьому випадку точки $f^i x$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, розташовані у A всюди щільно.)

Наслідок 1.5. *Якщо існує точка $x' \in A$, для якої $A_{x'} = A$, і замкнена множина $F \subset A$ є такою, що $fF = F$, то для будь-якої відкритої у A множини U, $U \cap F = \varnothing$, має існувати точка $x \in \overline{U}$, для якої $f^i x \in A \setminus U$ при $i > 0$.*

Звернемо увагу, що за умови виконання припущень цього наслідку, на множині A будуть всюди щільними точки x, для яких $A_x \neq A$.

Повне доведення теореми 1.1, а також більш повний набір її наслідків міститься у [8, 9].

2. Атрактори траєкторій розтягуючих динамічних систем на багатовидах

Розглянемо так звані розтягуючі динамічні системи, для яких є можливість отримати цілу низку цікавих результатів якраз внаслідок умови розтягування.

Нехай M є компактним диференцийовним багатовидом класу C^r, $r \geq 1$, а $f\colon M \to M$ — *розтягуючим ендоморфізмом*, тобто відображенням класу C^1, для якого при деяких $c > 0$ та $\lambda > 1$ у деякій метриці Рімана на M виконується нерівність

$$\|Df^m v\| \geq c\lambda^m \|v\| \quad \text{для усіх} \quad m > 0 \quad \text{і} \quad v \in TM,$$

де TM є дотичним розшаруванням багатовиду M (внаслідок умови компактності M визначення розтягуючого ендоморфізму не залежить від вибору ріманової метрики).

Серед усіх атракторів траєкторій можна вирізнити максимальні та локально максимальні. Атрактор $\mathcal{A}$ називається максимальним, якщо не існує атракторів $\tilde{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$ (тобто більших за $\mathcal{A}$). Атрактор $\mathcal{A}$ називається локально максимальним, якщо існує окіл $\mathcal{A}$, у якому немає атракторів $\tilde{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$.

В системах із складною динамікою у якості найпростішого прикладу атрактора, який не є ані максимальним, ані локально максимальним, можна розглянути гомоклінічну траєкторію разом із циклом, до якого ця траєкторія прямує.

Далі будуть розглянуті наступні об'єкти:

$\mathcal{A}(f) = \{A\}$ — множина усіх атракторів f; у цій роботі у якості атракторів розглядаються ω-граничні множини.

$\mathcal{A}'(f)$ — множина локально максимальних атракторів f; при цьому $\mathcal{A}'(f) \subset \mathcal{A}(f)$.

Наступна теорема дає можливість отримати апроксимацію будь-якого атрактора за допомогою локально максимального.

Теорема 2.1. *Нехай $f\colon M \to M$ — розтягуючий ендоморфізм. Тоді для будь-яких атрактора $A \in \mathcal{A}(f)$ та околу $U \supset A$ знайдеться локально максимальний атрактор $A' \in \mathcal{A}'(f)$ такий, що $U \supset A' \supset A$.*

Нехай G є орієнтовним графом із скінченною множиною вершин $\{1, 2, \ldots, N\}$ і нехай $\mathbf{P} = \mathbf{P}[G] = (p_{ij})$ — його матриця суміжності: $p_{ij} = 1$, коли є ребро, що прямує з вершини i у вершину j, і $p_{ij} = 0$, коли такого ребра не існує. Послідовність i_1, i_2, …, i_n називається шляхом графа G з i у j, якщо $i_1 = i$ і $i_n = j$. Нескінченна послідовність i_1, i_2, …, i_n, … называється нескінченним шляхом графа G, якщо $p_{i_k i_{k+1}} = 1$ для $k = 1, 2, \ldots$.

Нехай $\mathcal{W}_G$ є множиною всіх нескінченних шляхів графа G, а $\mathcal{W}_N$ — простором всіх нескінченних послідовностей $\{i_k\}$ натуральних чисел з N, у якому визначена слабка топологія. Множина $\mathcal{W}_G$ є замкнутою у $\mathcal{W}_N$ й інваріантною відносно неперервного відображення зсуву, яке переводить послідовність $\{i_k\}$ у $\{i'_k\}$, де $i'_k = i_{k+1}$. Тому $\mathcal{W}_G$ можна розглядати як топологічний простір, у якому зсув — позначений як T_G — буде неперервним відображенням. У цьому випадку T_G називається топологічним ланцюгом Маркова із скінченною множиною станів G [10, 11].

Нехай (G_1, g_1) та (G_2, g_2) — динамічні системи, які визначені на топологічних просторах G_1 та G_2 відповідно за допомогою $g_1\colon G_1 \to G_1$ та $g_2\colon G_2 \to G_2$. Простір G_2 називають еквіваріантним образом G_1, якщо існує відображення $\psi\colon G_1 \to G_2$, для якого $\psi g_1 = g_2 \psi$.

Наступна теорема надає інформацію про те, як влаштовані локально максимальний атрактор та динамічна система на такому атракторі.

Теорема 2.2. *Нехай $f\colon M \to M$ — розтягуючий ендоморфізм. Тоді будь-який локально максимальний атрактор f є еквіваріантним образом простору $\mathcal{W}_G$ деякого топологічного ланцюга Маркова зі скінченною множиною станів G.*

Наслідок 2.2.1. *У будь-якому локально максимальному атракторі розтягуючого ендоморфізму $f\colon M \to M$ множина періодичних точок є щільною.*

Наслідок 2.2.2. *У будь-якому локально максимальному атракторі розтягуючого ендоморфізму $f\colon M \to M$ існує щільна траєкторія.*

Доведення теореми 2.1. Розглянемо метрику Ляпунова на M, тобто метрику, у якій для розтягуючого ендоморфізму $f\colon M \to M$ виконується нерівність

$$\|Dfv\| > \lambda \|v\|, \quad v \in TM, \quad \lambda > 1.$$

Можливість побудови ляпуновської метрики для розтягуючого ендоморфізму f доводиться аналогічно тому, як це зроблено у [12] для дифеоморфізмів Аносова.

Оскільки f є накриваючим відображенням [3], то для будь-якої точки $x \in M$ знайдеться опуклий відкритий окіл $U_x \subset M$ такий, що його повний прообраз $f^{-1}(U_x)$ складається з l компонент зв'язності, які будуть позначатись $\mathfrak{C}_i(f^{-1}(U_x))$, $i = 1, \ldots, l$. Коли неважливо, про яку компоненту йдеться, індекс i вказуватися не буде. Відкрита множина $\mathfrak{C}(f^{-1}(U_x))$ є дифеоморфною околу U_x. Будь-яку відкриту множину $U \subset \mathfrak{C}(f^{-1}(U_x))$ будемо називати околом, у якому ендоморфізм f є локальним дифеоморфізмом.

Лема 2.1.1. *Нехай U — окіл, у якому розтягуючий ендоморфізм $f\colon M \to M$ є локальним диффеоморфізмом, і нехай $S \subset U$. Тоді* $\operatorname{diam} f(S) \geq \lambda \operatorname{diam} S$, *де* $\operatorname{diam} S = \sup\limits_{x,y \in S} d(x,y)$.

Доведення. Нехай $h_1\colon [0,1] \to U_{x_1} \supset f(S)$ — шлях, що з'єднує $f(x)$ і $f(y)$ (тобто $h_1(0) = f(x)$ і $h_1(1) = f(y)$), де $x, y \in S$ (припускаємо, що $\mathfrak{C}(f^{-1}(U_{x_1})) \supset U$), також нехай h_1 має мінімальну довжину. Розглянемо шлях

$$h_0 = f\Big|_{U_{x_1}}^{-1} h_1\colon [0,1] \to \mathfrak{C}(f^{-1}(U_{x_1})).$$

Тоді $h_0(0) = x$, $h_0(1) = y$ і для розтягуючого ендоморфізму f маємо

$$d(f(x), f(y)) = \int\limits_0^1 \|h_1'(t)\| dt = \int\limits_0^1 \left\| Df\Big|_{\mathfrak{C}(f^{-1}(U_{x_1}))}^{h_0'(t)} \right\| dt \geq \lambda \int\limits_0^1 \|h_0'(t)\| dt \geq \lambda\, d(x,y).$$

Тому $\operatorname{diam} f(S) = \sup\limits_{x,y \in S} d(f(x), f(y)) \geq \lambda \sup\limits_{x,y \in S} d(x,y) \geq \lambda \operatorname{diam} S$. Лему доведено.

Лема 2.1.2. *Існує $\delta > 0$ таке, що для будь-якої точки $x \in M$ куля $U_\delta(x)$ з центром у точці x і діаметром δ є опуклою множиною, а його повний прообраз $f^{-1}(U_\delta(x))$ складается з l компонент зв'язності $\mathfrak{C}_i(f^{-1}(U_\delta(x)))$, $i = 1, \ldots, l$.*

Доведення. Нехай $\delta(x)$ — максимальний діаметр кулі $U_{\delta(x)}(x)$, для якого $f^{-1}(U_{\delta(x)}(x))$ є сумою l компонент зв'язності $\mathfrak{C}(f^{-1}(U_{\delta(x)}(x)))$, а кожна з компонент є диффеоморфною $U_{\delta(x)}(x)$. Треба довести неперервність $\delta(x)$. Візьмемо точку $y \neq x$ таку, що $y \in U_{\delta(x)}(x)$ і $d(x,y) = \varepsilon$. Вкладення $U_{\delta(x)}(x) \subset U_{\delta(y)}(y)$ неможливе, тому що куля $U_{\delta(x)}(x)$ є максимальною. З іншого боку, $U_{\delta(y)}(y) \supset U_\gamma(y)$, де $\gamma = \delta(x) - \varepsilon$. Тому $|\delta(x) - \delta(y)| < \varepsilon$. Отже, функція $\delta(x)$. неперервна.

Оскільки $\delta(x) > 0$, за теоремою Веєрштраса існує $\delta_1 > 0$ таке, що $\delta(x) \geq \delta_1$ для всіх $x \in M$. Далі, згідно з [13], існує $\delta_2 > 0$, для якого будь-яка куля $U_{\delta'}(x)$ з діаметром $\delta' \leq \delta_2$ буде опуклою множиною на M. Щоб завершити доведення, можна обрати $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Зауваження 1. Внаслідок лем 2.1.1 та 2.1.2 для будь-якого $S \subset U_\delta(x)$ існує $y \in M$ таке, що $\mathfrak{C}(f^{-1}(S)) \subset U_\delta(y)$. Аналогічно, для будь-якого $m > 1$ маємо $\mathfrak{C}(f^{-m}(S)) \subset U_\delta(y)$. Тому, за лемою 2.1.1 для будь-якого $m \geq 1$ отримуємо оцінку

$$\operatorname{diam} \mathfrak{C}(f^{-m}(S)) \leq \frac{1}{\lambda^m} \operatorname{diam} S.$$

Скінченним розбиттям багатовиду M називається скінченне покриття цього багатовиду замкненими підмножинами $\{X_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, якщо

$$\operatorname{int} X_i \neq \varnothing \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

і

$$X_{i'} \cap X_{i''} \subset \partial X_{i'} \cap \partial X_{i''} \quad \text{для будь-яких} \quad i' \neq i'', \quad 1 \leq i', i'' \leq n,$$

де $\partial X = X \setminus \operatorname{int} X$ — границя X.

Для багатовиду M з ендоморфізмом $f\colon M \to M$ скінченне розбиття $\mathcal{X} = \{X_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, називається *марковським*, якщо існує $m > 0$ таке, що з умови $f^m(\operatorname{int} X_i) \cap \operatorname{int} X_j \neq \varnothing$ випливає $f^m(X_i) \supset X_j$.

Лема 2.1.3. *Нехай $f\colon M \to M$ — розтягуючий ендоморфізм. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує марковське розбиття $\mathcal{X} = \{X_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, таке, що $\operatorname{diam} X_i < \varepsilon$ для всіх i і об'єднання границь множин з $\mathcal{X}$ має міру нуль.*[1]

Доведення. Нехай $\{U_\beta(x_i)\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, — скінченне покриття багатовиду M замкненими кулями $U_\beta(x_i) = \{x \mid d(x, x_i) \leq \beta\}$, де $\beta \leq \delta$ для δ з леми 2.1.2.

Скінченне розбиття $\mathcal{X}_\beta = \{X_\beta^j\}$., отримується
з покриття $\{U_\beta(x_i)\}$, якщо у якості множин X_β^j розглянути всілякі перетини

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}_j} U_\beta(x_i), \quad \text{де} \quad \mathcal{I}_j \subset \{1, 2, \ldots, k\} \quad \text{і} \quad \operatorname{int} \bigcap_{i \in \mathcal{I}_j} U_\beta(x_i) \neq \varnothing,$$

а також множини

$$U_\beta(x_j) \setminus \bigcup_{i \neq j} U_\beta(x_i), \quad \text{де} \quad \operatorname{int}\Big(U_\beta(x_j) \setminus \bigcup_{i \neq j} U_\beta(x_i)\Big) \neq \varnothing.$$

Скінченне розбиття $\mathcal{X}^0 = \{X_i^0\}$, $i = 1, 2, \ldots, n.$, індукується
розбиттям $\mathcal{X}_\beta$ і складається з усіх компонент $\mathfrak{C}(f^{-m}(X_\beta^j))$ для прообразів X_β^j відносно f^{-m}. З урахуванням зауваження 1 отримуємо оцінку

$$\operatorname{diam} X_i^0 = \varepsilon' \leq \frac{\beta}{\lambda^m}. \tag{1}$$

Для $\mathcal{X}^0$ розтягуючий ендоморфізм $f\colon M \to M$ є локальним диффеоморфізмом у кожній множині $X_i^0 \in \mathcal{X}^0$.

Скінченне розбиття $\mathcal{X}^1 = \{X_i^1\}$.

Нехай $m > 0$ — достатньо велике (вибір m буде вказаний пізніше) і нехай $X_{i_1}^0 \in \mathcal{X}^0$. Визначимо $X_{i_1}^1$ як

$$X_{i_1}^1 = \mathfrak{C}(f^{-m}(\bigcup_{k \in \mathcal{K}_{i_1}} X_k^0)), \quad \text{де} \quad \mathfrak{C}(f^{-m}(\bigcup_{k \in \mathcal{K}_{i_1}} X_k^0)) \bigcap X_{i_1}^0 \neq \varnothing$$

і $k \in \mathcal{K}_{i_1}$ тільки за умови $f^m(\operatorname{int} X_{i_1}^0) \bigcap \operatorname{int} X_k^0 \neq \varnothing$. Обернене відображення у даному випадку є визначеним з урахуванням обраного $\mathcal{X}^0$.

Зараз перебудуємо розбиття $\mathcal{X}^0 = \{X_i^0\}$, щоб отримати нове розбиття $\mathcal{X}_{i_1}^0 = \{\widetilde{X}_i^0\}$. Нехай

$$U(X_{i_1}^1) = \bigcup_{k \in \mathcal{K}} X_k^0,$$

[1] Міра, яка породжується рімановою метрикою багатовиду M.

де $k \in \mathcal{K}$ тільки за умови $\operatorname{int} X_j^0 \bigcap X_{i_1}^1 \neq \varnothing$. Поза множиною $U(X_{i_1}^1)$ елементи розбиття $\mathcal{X}^0$ залишимо без змін (тобто $\widetilde{X}_i^0 = X_i^0$, якщо $i \notin \mathcal{K}$,) а для інших покладемо $\widetilde{X}_{i_1}^0 = X_{i_1}^1$ і $\widetilde{X}_i^0 = \overline{X_i^0 \setminus X_{i_1}^1}$. В результаті отримаємо розбиття $\mathcal{X}_{i_1}^0 = \{\widetilde{X}_i^0\}$, де елемент $\widetilde{X}_{i_1}^0 \in \mathcal{X}_{i_1}^0$ має таку властивість:

$$\text{якщо} \quad f^m(\operatorname{int} \widetilde{X}_{i_1}^0) \bigcap \operatorname{int} X_j^0 \neq \varnothing, \quad \text{то} \quad f^m(\widetilde{X}_{i_1}^0) \supset X_j^0.$$

Нехай $\widetilde{X}_{i_2}^0 \in \mathcal{X}_{i_1}^0$ и $\widetilde{X}_{i_2}^0 \neq X_{i_1}^1 = \widetilde{X}_{i_1}^0$. З розбиттям $\mathcal{X}_{i_1}^0$ та елементом $\widetilde{X}_{i_2}^0 \in \mathcal{X}_{i_1}^0$ будемо діяти за алгоритмом, який є аналогічним описаному вище для розбиття $\mathcal{X}^0$ та елемента $X_{i_1}^0 \in \mathcal{X}^0$. Отримаємо нове розбиття $\mathcal{X}_{i_1 i_2}^0$, причому елемент $X_{i_1}^1$ не буде перебудований, тому $X_{i_1}^1 \in \mathcal{X}_{i_1 i_2}^0$. Дійсно, припустимо, що $\operatorname{int} X_{i_1}^1 \bigcap \operatorname{int} \widetilde{X}_{i_2}^1 \neq \varnothing$, де $\widetilde{X}_{i_2}^1$ визначається аналогічно $X_{i_1}^1$:

$$\widetilde{X}_{i_2}^1 = \mathfrak{C}(f^{-m}(\bigcup_{k \in \mathcal{K}_{i_2}} \widetilde{X}_k^0)),$$

де $\widetilde{X}_k^0 \in \mathcal{X}_{i_1}^0$ и $k \in \mathcal{K}_{i_2}$ тільки за умови $f^m(\operatorname{int} \widetilde{X}_{i_2}^0) \bigcap \operatorname{int} \widetilde{X}_k^0 \neq \varnothing$. Тоді існує елемент $\widetilde{X}_i^0 \in \mathcal{X}_{i_1}^0$ такий, що

$$f^m(\operatorname{int} X_{i_1}^1) \bigcap \operatorname{int} \widetilde{X}_i^0 \neq \varnothing \quad \text{і} \quad f^m(\operatorname{int} \widetilde{X}_{i_2}^1) \bigcap \operatorname{int} \widetilde{X}_i^0 \neq \varnothing,$$

що неможливо, оскільки у такому випадку

$$f^m(\operatorname{int} \widetilde{X}_{i_1}^0) \bigcap \operatorname{int} \widetilde{X}_i^0 \neq \varnothing \quad \text{і} \quad f^m(\operatorname{int} \widetilde{X}_{i_2}^0) \bigcap \operatorname{int} \widetilde{X}_i^0 \neq \varnothing, \tag{2}$$

що суперечить умові $\widetilde{X}_{i_1}^0, \widetilde{X}_{i_2}^0 \in \mathcal{X}^0$. (У зв'язній множині $\widetilde{X}_{i_1}^0 \bigcup \widetilde{X}_{i_2}^0$ розтягуючий ендоморфізм $f\colon M \to M$ є локальним диффеоморфізмом, тому з (2) випливає, що $\operatorname{int} \widetilde{X}_{i_1}^0 \bigcap \operatorname{int} \widetilde{X}_{i_2}^0 \neq \varnothing$.)

Елемент $\widetilde{X}_{i_2}^1$ має таку властивість:

$$\text{якщо} \quad f^m(\operatorname{int} \widetilde{X}_{i_2}^1) \bigcap \operatorname{int} X_k^0 \neq \varnothing, \quad \text{то} \quad f^m(\widetilde{X}_{i_2}^1) \supset X_k^0.$$

Якщо продовжити процедуру перебору елементів, то за скінченне число кроків будуть вичерпані усі елементи вихідного розбиття, і в результаті буде отримано розбиття

$$\mathcal{X}^1 = \mathcal{X}_{i_1 i_2 \dots i_n}^0 = \{X_i^1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

елементи якого мають наступну властивість по відношенню до елементів $X_j^0 \in \mathcal{X}^0$:

$$\text{якщо} \quad f^m(\operatorname{int} X_i^1) \bigcap \operatorname{int} X_j^0 \neq \varnothing, \quad \text{то} \quad f^m(X_i^1) \supset X_j^0.$$

Скінченне розбиття $\mathcal{X}^2 = \{X_i^2\}$.

Перехід від $\mathcal{X}^1$ до $\mathcal{X}^2$ здійснюється аналогічно переходу від $\mathcal{X}^0$ до $\mathcal{X}^1$. Нехай

$$f^m(X_i^1) = \bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} X_k^0, \quad \text{де} \quad \mathcal{K}_i \subset \{1, 2, \dots, n\}.$$

Оскільки при деякому $m > 0$ (яке буде вибране нижче) маємо $\operatorname{int} X_i^1 \bigcap \operatorname{int} X_i^0 \neq \varnothing$ для будь-якого $i = 1, 2, \dots, n$, можна визначити

$$X_i^2 = \mathfrak{C}(f^{-m}(\bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} X_k^1))$$

так, що
$$\mathfrak{C}(f^{-m}(\bigcup_{k\in\mathcal{K}_i} X_k^1))\bigcap \operatorname{int} X_i^1 \neq \varnothing.$$

Сім'я $\mathcal{X}^2$ є покриттям.

Дійсно, нехай $x \in M$ і $x \notin X_i^2$ для $i = 1, 2, \dots, n$, де $X_i^2 \in \mathcal{X}^2$. За побудови, точка $x \in X_i^0$ для деякого $X_i^0 \in \mathcal{X}^0$. Маємо
$$f^m(x) \in f^m(X_i^0) \subset \bigcup_{k\in\mathcal{K}_i} X_k^0,$$
тому
$$x \in X_i^1 = \mathfrak{C}(f^{-m}(\bigcup_{k\in\mathcal{K}_i} X_k^0)).$$
З урахуванням визначення X_i^2, якщо припустити, що $f^m(x) \in X_k^1$ для деякого $k \in \mathcal{K}_i$, отримуємо протиріччя, оскільки тоді $x \in X_i^2$, тому що f^m — локальний диффеоморфізм X_k^1. Якщо ж $f^m(x) \notin X_k^1$ для усіх $k \in \mathcal{K}_i$, то існує ціле l таке, що $f^m(x) \in X_k^1$ для деякого $k \in \mathcal{K}_l$, причому
$$(\bigcup_{k\in\mathcal{K}_i} X_k^1)\bigcap(\bigcup_{k\in\mathcal{K}_l} X_k^1) \neq \varnothing \quad \text{і} \quad \operatorname{int}(\bigcup_{k\in\mathcal{K}_i} X_k^1)\bigcap \operatorname{int}(\bigcup_{k\in\mathcal{K}_l} X_k^1) = \varnothing.$$
Відображення f^m є диффеоморфізмом у $(\bigcup_{k\in\mathcal{K}_i} X_k^1)\bigcup(\bigcup_{k\in\mathcal{K}_l} X_k^1)$, а множини $\bigcup_{k\in\mathcal{K}_i} X_k^1$ і $\bigcup_{k\in\mathcal{K}_l} X_k^1$ перетинаються тільки по границі, тому за визначенням X_l^2 точка x належить X_l^2. При цьому
$$\operatorname{int}\mathfrak{C}(f^{-m}(\bigcup_{k\in\mathcal{K}_i} X_k^1))\bigcap X_i^1 \neq \varnothing.$$
Отже, $\mathcal{X}^2$ — покриття.

Покриття $\mathcal{X}^2$ є розбиттям.

Маємо довести, що $\operatorname{int} X_i^2 \bigcap \operatorname{int} X_j^2 = \varnothing$ для $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$. Якщо $x \in \operatorname{int} X_i^2 \bigcap \operatorname{int} X_j^2$, то знайдеться $X_l^1 \in \mathcal{X}^1$ таке, що
$$X_l^1 \subset \bigcup_{k\in\mathcal{K}_i} X_k^1 \quad \text{і} \quad X_l^1 \subset \bigcup_{k\in\mathcal{K}_j} X_k^1, \quad \text{де} \quad f^m(x) \in \bigcup_{k\in\mathcal{K}_i} X_k^1 \quad \text{і} \quad f^m(x) \in \bigcup_{k\in\mathcal{K}_j} X_k^1,$$
тому $l \in \mathcal{K}_i$ і $l \in \mathcal{K}_j$, а тоді
$$\operatorname{int} X_i^1 \bigcap \operatorname{int} X_j^1 = \mathfrak{C}(f^{-m}(\bigcup_{k\in\mathcal{K}_i} X_k^0))\bigcap\mathfrak{C}(f^{-m}(\bigcup_{k\in\mathcal{K}_j} X_k^0)) \neq \varnothing,$$
що неможливо, оскільки $i \neq j$. Отже, $\mathcal{X}^2$ — розбиття.

Розбиття $\mathcal{X}^2 = \{X_i^2\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, має наступну властивість:
$$\text{якщо} \quad f^m(\operatorname{int} X_i^2)\bigcap \operatorname{int} X_j^1 \neq \varnothing, \quad \text{то} \quad f^m(X_i^2) \supset X_j^1.$$

Скінченне розбиття $\mathcal{X}^3$, як і всі наступні розбиття у цьому ланцюзі побудов, отримуються аналогічно.

Послідовність скінченних розбиттів $\mathcal{X}^k = \{X_i^k,\ i = 1, 2, \dots, n\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, яка отримується в результаті, має наступну властивість:
$$\text{якщо} \quad f^m(\operatorname{int} X_i^k)\bigcap X_j^{k-1} \neq \varnothing, \quad \text{то} \quad f^m(X_i^k) \supset X_j^{k-1}.$$

Розглянемо метричний простір 2^M, елементами якого є замкнуті множини багатовиду M, із визначеною на ньому метрикою

$$\operatorname{dist}(X_1, X_2) = \max\Big\{ \sup_{y\in X_1}\inf_{x\in X_2} d(x,y), \sup_{y\in X_2}\inf_{x\in X_1} d(x,y)\Big\} \quad \text{для} \quad X_1, X_2 \in 2^M.$$

Простір 2^M є компактним [14] і, як наслідок, повним.

Для побудованої послідовності розбиттів $\mathcal{X}^k = \{X_i^k,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ треба довести, що при кожному i послідовність $\{X_i^k,\ k = 0, 1, \ldots\}$ є фундаментальною в метриці простору 2^M. Для цього оцінимо відстань $\operatorname{dist}(X_i^k, X_i^{k+1})$. Враховуючи зауваження 1, маємо

$$\Delta(\mathcal{X}^k, \mathcal{X}^{k+1}) := \max_{i=1,2,\ldots,n} \operatorname{dist}(X_i^k, X_i^{k+1}) = \max_{i=1,2,\ldots,n} \operatorname{dist}\Big(f^{-m}\Big(\bigcup_{j\in\mathcal{K}_i} X_j^{k-1}\Big), f^{-m}\Big(\bigcup_{j\in\mathcal{K}_i} X_j^{k}\Big)\Big) \le$$

$$\le \frac{1}{\lambda^m} \max_{i=1,2,\ldots,n} \operatorname{dist}\Big(\bigcup_{j\in\mathcal{K}_i} X_j^{k-1}, \bigcup_{j\in\mathcal{K}_i} X_j^{k}\Big) \le \frac{1}{\lambda^m} \max_{i=1,2,\ldots,n} \operatorname{dist}(X_j^{k-1}, X_j^k) = \frac{1}{\lambda^m}\Delta(\mathcal{X}^{k-1}, \mathcal{X}^k).$$

З (1) випливає, що $\Delta(\mathcal{X}^k, \mathcal{X}^{k+1}) \le \dfrac{1}{\lambda^m}\Delta(\mathcal{X}^{k-1}, \mathcal{X}^k)$, $k = 1, 2, \ldots$, і $\Delta(\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^0) \le \dfrac{\varepsilon'}{\lambda^m}$ за побудовою множин X_i^1. Таким чином,

$$\Delta(\mathcal{X}^k, \mathcal{X}^{k+1}) \le \frac{\varepsilon'}{\lambda^{m(k-1)}} \tag{3}$$

і тоді

$$\operatorname{dist}(X_i^k, X_i^{k+l}) \le \sum_{j=0}^{l-1} \operatorname{dist}(X_i^{k+j}, X_i^{k+j+1}) \le \varepsilon' \sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{\lambda^{m(k+j+1)}}. \tag{4}$$

Отже, послідовність $\{X_i^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$ є фундаментальною, тому

$$X_i^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} X_i^\infty, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

При цьому множини X_i^∞ будуть замкнені.

Скінченне розбиття $\mathcal{X}^\infty = \{X_i^\infty\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Для доведення того, що це розбиття, визначимо деякі поняття [14]. Точка s належить до нижньої границі послідовності множин $S_1, S_2, \ldots$ (це позначається як $s \in \operatorname*{Li}_{n\to\infty} S_n$), якщо будь-який окіл точки s, починаючи з деякого n, перетинається з усіма множинами S_n. Точка s належить до верхньої границі послідовності множин $S_1, S_2, \ldots$ (це позначається як $s \in \operatorname*{Ls}_{n\to\infty} S_n$), якщо будь-який окіл точки s перетинається з нескінченним числом множин S_n. Послідовність множин $\{S_n\}$ називається збіжною до множини S (це позначається як $S = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} S_n$), якщо $\operatorname*{Li}_{n\to\infty} S_n = S = \operatorname*{Ls}_{n\to\infty} S_n$.

Відомо, що $\operatorname*{Ls}_{n\to\infty} S_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} S_{n+k}}$.

Топологія, яка задається збіжністю у сенсі даного визначення, є еквівалентною топології, яка задається вказаною вище метрикою у просторі 2^M [14].

В нашому випадку $X_i^\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} X_i^{n+k}}$.

Сім'я $\mathcal{X}^\infty$ *є покриттям.*

Дійсно, нехай існує точка $x \in M$, для якої $x \notin X_i^\infty$ при всіх i. Позначимо

$$\widetilde{X}_i^q = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} X_i^{q+k}}.$$

Для кожного $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ знайдеться q_i таке, що $x \notin \widetilde{X}_i^{q_i}$. Тоді $x \notin X_i^j$ при будь-якому $j \geq q_i$. Нехай $Q = \max\limits_{i=1,2,\dots,n} q_i$. Тоді $x \notin X_i^Q$ при будь-якому i, що неможливо, оскільки $\{X_i^Q\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, — розбиття.

Покриття $\mathcal{X}^\infty$ є розбиттям.

Якщо це не так, то існують елементи $X_i^\infty, X_j^\infty \in \mathcal{X}^\infty$ такі, що $\operatorname{int} X_i^\infty \bigcap \operatorname{int} X_j^\infty \neq \varnothing$. Відкриту кулю з діаметром ε позначимо U_ε і зауважимо, що існує $U_\varepsilon \subset \operatorname{int} X_i^\infty \bigcap \operatorname{int} X_j^\infty$. Оскільки

$$\operatorname{int} X_i^\infty = \operatorname{int} \bigcap_{q=0}^{\infty} \widetilde{X}_i^q \quad \text{і} \quad \widetilde{X}_i^{q+1} \subset \widetilde{X}_i^q,$$

маємо

$$\operatorname{int} \bigcap_{q=0}^{\infty} \widetilde{X}_i^q \subset \bigcap_{q=0}^{\infty} \operatorname{int} \widetilde{X}_i^{q+1}.$$

Отже,

$$U_\varepsilon \subset \bigcap_{q=0}^{\infty} \operatorname{int} \widetilde{X}_i^{q+1},$$

тобто $U_\varepsilon \subset \operatorname{int} \widetilde{X}_i^q$ для кожного $q = 1, 2, \dots$. Так само маємо $U_\varepsilon \subset \operatorname{int} \widetilde{X}_j^q$ для кожного $q = 1, 2, \dots$.

Далі, існує $q_1 > 0$ таке, що $\Delta(\mathcal{X}^{q+1}, \mathcal{X}^q) < \varepsilon$ для будь-якого $q > q_1$. Тоді знайдеться куля $U_{\varepsilon_1} \subset U_\varepsilon$, $\varepsilon_1 < \varepsilon$, така, що $U_{\varepsilon_1} \subset X_i^q$ для кожного $q > q_1$.

Аналогічні міркування щодо $U_{\varepsilon_1} \subset \widetilde{X}_j^k$ дають можливість дійти висновку, що існує куля $U_{\varepsilon_2} \subset U_{\varepsilon_1}$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, така, що $U_{\varepsilon_2} \subset X_j^q$ для кожного $q > q_2$.

Отже, для кожного $q > \max(q_1, q_2)$ є куля U_{ε_3} така, що $U_{\varepsilon_3} \subset X_i^q$ і $U_{\varepsilon_3} \subset X_j^q$, але це неможливо, якщо X_i^q і X_j^q є різними елементами розбиття $\mathcal{X}^q$.

Розбиття $\mathcal{X}^\infty$ є марковським.

З визначення $\mathcal{X}^l$ випливає, що кожне $X_i^l \in \mathcal{X}^l$ можна подати у вигляді

$$f^m(X_i^l) = \bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} X_k^{l-1}.$$

Переходячи до границі, маємо

$$\operatorname*{Lim}_{l \to \infty} f^m(X_i^l) = \operatorname*{Lim}_{l \to \infty} \bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} X_k^{l-1}.$$

З врахуванням властивостей такої гранниці [14], із неперервності $f^m \colon 2^M \to 2^M$ випливає, що

$$f^m(X_i^\infty) = f^m(\operatorname*{Lim}_{l \to \infty} X_i^l) = \bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} \operatorname*{Lim}_{l \to \infty} X_k^{l-1} = \bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} X_k^\infty.$$

Оцінимо величину $\operatorname{dam} X_i^\infty$ для $i = 1, 2, \dots, n$. Маємо $X_i^k \subset U_d(X_i^{k-1})$, де $U_d(X_i^{k-1})$ — d-окіл множини X_i^{k-1} для $d = \operatorname{dist}(X_i^k, X_i^{k-1})$, тобто

$$U_d(X_i^{k-1}) = \bigcup_{x \in X_i^{k-1}} U_d(x),$$

де $U_d(x)$ — відкрита куля з радіусом d й центром у x. Аналогічно $X_i^{k-1} \subset U_d(X_i^k)$.

Таким чином,

$$\operatorname{diam} X_i^k \leq \operatorname{diam} X_i^{k-1} + 2d \quad \text{і} \quad \operatorname{diam} X_i^{k-1} \leq \operatorname{diam} X_i^k + 2d,$$

або

$$\operatorname{diam} X_i^{k-1} - 2d \leq \operatorname{diam} X_i^k \leq \operatorname{diam} X_i^{k-1} + 2d.$$

Відповідно до (3), (4),

$$\varepsilon' - 2\varepsilon' \sum\nolimits_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{\lambda^m}\right)^j \leq \operatorname{diam} X_i^k \leq \varepsilon' + 2\varepsilon' \sum\nolimits_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{\lambda^m}\right)^j,$$

і в граничному випадку отримуємо

$$\varepsilon' - 2\varepsilon' \frac{1}{\lambda^m - 1} \leq \operatorname{diam} X_i^\infty \leq \varepsilon' + 2\varepsilon' \frac{1}{\lambda^m - 1}. \tag{5}$$

Якщо вибрати m достатньо великим, можна зробити $\operatorname{diam} X_i^\infty$ як завгодно близьким до ε'; при цьому мається на увазі, що $\varepsilon' < \varepsilon$.

Доведемо, що

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} \partial X_i^\infty\Big) = 0,$$

де $\mu(E) = \displaystyle\int_E g_{ij}\, dx_i \wedge dx_j$ — міра, породжена рімановою метрикою g_{ij} багатовиду M. Міра μ є неперервним відображенням простору 2^M в R^1. При цьому $\mu(\partial X_i^k) = 0$ для будь-яких $i = 1, 2, \dots, n$ і $k = 1, 2, \dots$. Внаслідок неперервності μ на 2^M маємо:

$$\mu(\partial X_i^\infty) = \mu(\operatorname*{Lim}_{k \to \infty} \partial X_i^k) = \lim_{k \to \infty} \mu(\partial X_i^k) = 0.$$

Лему доведено.

Зауваження 2. Відомий стандартний процес переходу від марковського розбиття $\mathcal{X}^\infty = \{X_i^\infty\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, з числом $m > 1$ до марковського розбиття $\mathcal{X} = \{X_j\}$, $j = 1, 2, \dots, n$, з числом $m = 1$. Кожна множина має вигляд

$$X_j = X_{i_1}^\infty \bigcap f(X_{i_2}^\infty) \bigcap f^2(X_{i_3}^\infty) \bigcap \dots \bigcap f^{m-1}(X_{i_m}^\infty),$$

де індекси $i_l \in \{1, 2, \dots, n\}$ мають бути такими, що $\operatorname{int} X_j \neq 0$. Тоді

$$f(X_j) = f(X_{i_1}^\infty) \bigcap f^2(X_{i_2}^\infty) \bigcap \dots \bigcap f^{m-1}(X_{i_{m-1}}^\infty) \bigcap f^m(X_{i_m}^\infty),$$

і якщо використати представлення

$$f^m(X_{i_m}^\infty) = \bigcup_{i_k \in \mathcal{K}_{i_m}} X_{i_k}^\infty,$$

то

$$f(X_j) = \bigcup_{i_k \in \mathcal{K}_{i_m}} \left(X_{i_k}^{\infty} \bigcap f(X_{i_1}^{\infty}) \bigcap f^2(X_{i_2}^{\infty}) \bigcap \ldots \bigcap f^{m-1}(X_{i_{m-1}}^{\infty}) \right),$$

де $\mathcal{K}_{i_m}$ — скінченна множина індексів.

Зауваження 3. Розглянемо простір $\mathfrak{X}$ скінченних розбиттів $\mathcal{X}_\mu = \{X_k^{(\mu)}\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, з однаковою кількістю елементів. У просторі $\mathfrak{X}$ визначимо метрику

$$\Delta(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = \max_{i=1,2,\ldots,n} \operatorname{dist}(X_i^{(1)}, X_i^{(2)}).$$

З оцінки (5) випливає, що $\mathcal{X}^\infty \in \mathfrak{X}$ неперервно залежить від вибору $\mathcal{X}^0 \in \mathfrak{X}$.

Нехай A — атрактор розтягуючого ендоморфизма $f\colon M \to M$, а U — окіл множини A. За лемою 2.1.3 існує марковське розбиття $\mathcal{X} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ з такою властивістю: якщо $U_i \bigcap A \neq \varnothing$, то $U_i \subset U$. Існує точка $x_1 \in M$, для якої $A_{x_1} = A$ (тут і далі через A_x позначається атрактор траєкторії точки x). Нехай $\mathcal{X}_U = \{U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_m}\}$, де $U_{i_j} \in \mathcal{X}_U$, якщо існує (ціле) $t_j > 0$ таке, що $f^{t_j}(x_1) \in U_{i_j}$ і $U_{i_j} \bigcap A \neq \varnothing$. Також для кожної точки $y \in A$ знайдеться множина $U_{i_j} \in \mathcal{X}_U$ така, що $y \in U_{i_j}$. Нехай $\Theta(x_1) = \{f^p(x_1), f^{p+1}(x_1), \ldots, f^{p+q}(x_1)\}$ — скінченний відрізок траєкторії точки x_1. Виберемо його настільки великим, що якщо $y \in A$ і $y \in \operatorname{int} U_{i_j}$, то існує $t_j < q$ таке, що $f^{p+t_j}(x_1) \in \operatorname{int} U_{i_j}$, а якщо $y \in \partial U_{i_{j'}}$, то існує $t_{j'} < q$ таке, що $f^{p+t_{j'}}(x_1) \in U_{i_{j'}}$. Відрізок $\Theta(x_1)$ можна вибрати так, щоби $f^p(x_1) \in U_{i_1}$ і $f^{p+q}(x_1) \in U_{i_1}$.

Розглянемо скінченний впорядкований набір множин $U_{i'_0}, U_{i'_1}, \ldots, U_{i'_q}$ із властивостями:

$$f^p(x_1) \in U_{i'_0}, \quad f^{p+1}(x_1) \in U_{i'_1}, \quad \ldots, \quad f^{p+q}(x_1) \in U_{i'_q} = U_{i'_0},$$

де $U_{i'_k} \in \mathcal{X}_U$, і в цьому наборі зустрічаються усі множини з $\mathcal{X}_U$. Нехай для i'_{k_1} виконується умова:

$$f^{p+k_1-j}(x_1) \bigcap \operatorname{int} U_{i'_{k_1-j}} \neq \varnothing \quad \text{для} \quad j = 1, 2, \ldots, k_1, \qquad \text{і} \qquad f^{p+k_1}(x_1) \bigcap \operatorname{int} U_{i'_{k_1}} = \varnothing.$$

Тоді точка $f^{p+k_1}(x_1)$ належить до границі множини $U_{i_{j_1}}$.

Позначимо $d_1 = \max\limits_{j=0,\ldots,k_1-1} d(f^{p+j}(x_1), \partial U_{i'_j})$.

Множина $\{x \in M \mid A_x = A\}$ є щільною в M.

Дійсно, нехай $V \subset M$ є відкритою. За умови розтягування для будь-якої точки $y_1 \in M$ такої, що $A_{y_1} = A$, існує $m > 0$, для якого $f^m(V) \ni y_1$. Тому знайдеться точка $x \in V$, для якої $f^m(x) = y_1$ і тоді $A_x = A$. Далі, знайдеться точка x_2 така, що $d(x_2, x_1) \leq \dfrac{d_1}{\lambda^{p+k_1}}$ і $A_{x_2} = A$, причому точку x_2 можна вибрати так, що $f^{p+j}(x_2) \in \operatorname{int} U_{i_j}$, $j = 0, 1, \ldots, k_1$. Тому відрізок траєкторії $\Theta(x_2)$ буде належати до внутрішніх частин перших k_1 множин $U_{i'_1}, U_{i'_2}, \ldots, U_{i'_{k_1}}$. Серед решти, можливо, будуть множини $U_{i'_j}$, $j > k_1$, до яких $\Theta(x_2)$ не потрапить. Ці множини поки що виключимо із розгляду і отримаємо новий набір множин $\mathcal{X}_U^{(2)} = \{U_{i'_j}^{(2)}\} \subset \mathcal{X}$. Для $\mathcal{X}_U^{(2)}$ аналогічно отримаємо точку x_3 та новий набір $\mathcal{X}_U^{(3)}$ такі, що $f^{p+k}(x_3) \in \operatorname{int} U_{i_j}^{(3)}$ для $j \leq k_2$. За скінченне число кроків прийдемо до розбиття $\widetilde{\mathcal{X}}_U = \{\widetilde{U}_{i_1}, \ldots, \widetilde{U}_{i_l}\}$, для якого існує точка $\widetilde{x} \in M$ така, що $A_{\widetilde{x}} = A$ і $f^{p+j}(\widetilde{x}) \in \operatorname{int} \widetilde{U}_{i_j}$ для $j = 1, 2, \ldots, l$.

У процесі побудови могли бути виключені множини $U_{i_j} \in \mathcal{X}_U$, які мають точку з A на своїй границі, але не всередині. Нехай $U_{i_{j_1}}$ — виключена множина. Існує така точка x_{j_1}, що

$f^m(x_{j_1}) \in \operatorname{int} U_{i_{j_1}}$ при деякому $m \geq 0$, причому $A_{x_{j_1}} = A$. Марковське розбитя $\mathcal{X}$ можна вибрати так, щоб існував елемент $\widetilde{U} \in \mathcal{X}_U$, який містить деяку точку $y \in A$, і при цьому $y \in \operatorname{int} \widetilde{U}$. Дійсно, вихідне розбиття $\mathcal{X}^0$ можна вибрати так, щоб процедура з зауваження 2 призводила до розбиття $\mathcal{X}_0$, для якого $y \in \operatorname{int} X$, де $X \in \mathcal{X}_0$. Розбиття $\mathcal{X}^\infty$ неперервно залежить від $\mathcal{X}^0$, тому $\mathcal{X}$ теж неперервно залежить від $\mathcal{X}_0$, так що можна рахувати, що в марковському розбитті $\mathcal{X}$ є елемент $\widetilde{U}$ такий, що $y \in \operatorname{int} \widetilde{U}$. З умов $y \in A$ і $y \in \operatorname{int} \widetilde{U}$ випливає, що відрізок траєкторії точки x_{j_1} також пройде через $\operatorname{int} \widetilde{U}$, оскільки множина $\operatorname{int} \widetilde{U}$ є відкритою.

Таким чином, будь-які дві множини з $\mathcal{X}_U$ можна зв'язати скінченним відрізком траєкторії так, щоб ця траєкторія проходила по внутрішнім частинам множин $U_j \in \mathcal{X}_U$.

Розбиття $\mathcal{X}_U$ назвемо марковським розбиттям для атрактора A в околі U.

Нехай $G = G(\mathcal{X}_U)$ — скінченний ориентовний граф з вершинами, які задані елементами множини $\mathcal{X}_U$, за умови припущення, що для $U_i, U_j \in \mathcal{X}_U$ ребро (U_i, U_j) існує тоді й тільки тоді, коли $f(U_i) \supset U_j$.

Лема 2.1.4. *Граф $G = G(\mathcal{X}_U)$ є зв'язним.*

Доведення. Зв'язність графа $G = G(\mathcal{X}_U)$ випливає з того, що будь-які дві множини $U_{i'}, U_{i''} \in \mathcal{X}_U$ можна зв'язати скінченними відрізками траєкторій, які проходять через внутрішні частини множин $U_i \in \mathcal{X}_U$.

Лема 2.1.5. *Якщо граф G є зв'язним, то періодичні точки його марковського ланцюга T_G щільні у просторі $\mathcal{W}_G$ всіх нескінченних шляхів графа.*

Доведення. Розглянемо точку $(i_1, i_2, \dots, i_n, \dots) \in \mathcal{W}_G$ та послідовність

$$x_n = \{i_1, i_2, \dots, i_n, \dots, i_1, i_2, \dots, i_n, \dots, i_1, i_2, \dots, i_n, \dots\},$$

де замість крапок між i_n і i_1 кожен раз вписується один й той самий шлях, що йде з i_n до i_1, який існує через те, що G є зв'язним. Зазначена послідовність є періодичною точкою марковського ланцюга T_G. При цьому n можна вибирати як завгодно великим, і тоді отримаємо $x_n \to x$, що доводить лему.

Лема 2.1.6. *Якщо граф G є зв'язним, то його марковський ланцюг T_G має всюди щільну траєкторію.*

Доведення. За лемою 2.1.5 достатньо побудувати траєкторію, яка є щільною на замиканні множини періодичних точок марковського ланцюга T_G. Багатовид M є компактним, тому марковський ланцюг має зліченну кількість періодичних точок. Занумеруємо їх натуральними числами і складемо з них таку таблицю:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & \longrightarrow & a_{12} & & a_{13} & \longrightarrow & a_{14} & & \dots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & & \dots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & & \dots \\
& \swarrow & & \nearrow & & & & & \\
a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & & \dots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

В цієї таблиці k-й рядок відповідає k-й періодичній точці $(i_1, i_2, \ldots, i_{n_k}, i_1, i_2, \ldots, i_{n_k}, \ldots)$. Елемент a_{kl} позначає шлях $a_{kl} = (i_1, \ldots, i_{n_k}, i_1, \ldots, i_{n_k}, \ldots, i_1, \ldots, i_{n_k})$, у якому послідовність $i_1, i_2, \ldots, i_{n_k}$ повторюється l разів. Відповідно до стрілок в таблиці складемо шлях

$$(a_{11}\, b_1\, a_{12}\, b_2\, a_{21}\, b_3\, a_{31}\, b_4\, a_{22}\, b_5\, a_{13}\, b_6\, \ldots), \tag{6}$$

де b_n — це шлях, що з'єднує останню вершину шляху a_{ij} зліва від b_n з першою вершиною шляху $a_{i'j'}$ справа від b_n; шлях b_n існує внаслідок зв'язності G. Шлях (6) містить як завгодно великий відрізок будь-якої періодичної траєкторії, тому відповідна цьому шляху (6) траєкторія буде всюди щільною у $\mathcal{W}_G$.

Розглянемо множину

$$\widetilde{A} = \{x \mid x \in \mathcal{X}'_U,\ f^m(x) \in \mathcal{X}'_U \text{ для кожного } m > 0\},$$

де

$$\mathcal{X}'_U = \{U'_{i_1}, \ldots, U'_{i_m}\}, \quad U'_{i_j} = \left(\operatorname{int} \bigcup_{k=1}^{m} U_{i_k}\right) \bigcap U_{i_j}, \quad U_{i_l} \in \mathcal{X}_U.$$

Кожному нескінченному шляху $(i_1, i_2, \ldots)$ графа $G = G(\mathcal{X}_U)$ відповідає єдина точка $x \in \widetilde{A}$ така, що

$$x = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{C}(f^{-m}(U_{i_m}))},$$

де $\mathfrak{C}(f^{-m}(U_{i_m}))$ — компонента зв'язності повного прообраза $f^{-m}(U_{i_m})$, для якої

$$\mathfrak{C}(f^{-m}(U_{i_m})) \bigcap U_{i_1} \neq \varnothing.$$

Те, що $\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{C}(f^{-m}(U_{i_m}))}$ складається з однієї точки, випливає із зауваження 1.

Таким чином, ми отримали відображення $\psi \colon \mathcal{W}_G \to \widetilde{A}$ таке, що $\psi(\mathcal{W}_G) = \widetilde{A}$ і $\psi(i_1, i_2, \ldots) = x$. При цьому ψ виявляється неперервним. Дійсно, нехай

$$x_n = (i_1, i_2, \ldots, i_n, i_{n+1}, \ldots) \quad \text{і} \quad y_n = (i_1, i_2, \ldots, i'_n, i'_{n+1}, \ldots)$$

є близькими точками простору $\mathcal{W}_G$. Тоді $\psi(x_n), \psi(y_n) \in \bigcap_{m=1}^{n} \mathfrak{C}(f^{-m}(U_{i_m}))$ і неперервність ψ також випливає з зауваження 1.

В підсумку, $\widetilde{A}$ — інваріантна замкнена множина, $\widetilde{A} \supset A$ і $\widetilde{A}$ — еквіваріантний образ простору $\mathcal{W}_G$ топологічного марковського ланцюга T_G зі скінченною кількістю станів G. Граф G є зв'язним, тому (за лемою 2.1.6) на множині $\widetilde{A}$ існує всюди щільна траєкторія. Отже, $\widetilde{A}$ є атрактором. З побудови видно, що множина $\widetilde{A}$ в околі $\operatorname{int} \bigcup_{k=1}^{m} U_{i_k}$ є локально максимальним атрактором, який містить A. Теорему доведено.

Доведення теореми 2.2 повторює доведення теореми 2.1, але потрібно виходити з того, що A є локально максимальним атрактором.

Доведення наслідків 2.2.1 і 2.2.2 випливає з лем 2.1.5, 2.1.6 і теореми 2.2.

Література

[1] Я. Г. Синай, “Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы”, *Функц. анализ и его прил.*, **2**:1 (1968), 64–89; **Engl. transl.**: Funct. Anal. Appl., 1968, **2**:1 (1968), 61–82.

[2] Я. Г. Синай, “Построение марковских разбиений”, *Функц. анализ и его приложения*, **2**:3 (1968), 70–80; **Engl. transl.**: Funct. Anal. Appl., **2**:3 (1968), 245–253.

[3] M. Shub, “Endomorphisms of compact differentiable manifolds”, *Amer. J. Math.*, **91**, 1 (1969), 175–200.

[4] О. М. Шарковський, “Дескриптивна теорія детермінованого хаосу”. *Український математичний журнал*, вип. 74, вип. 12, Січень 2023, с. 1709-1718.

[5] O. M. Sharkovsky "Descriptive Theory of Deterministic Chaos"(English), *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 74, pages 1950–1960 (2023).

[6] А. Н. Шарковский, “Частично упорядоченная система притягивающих множеств”, *ДАН СССР*, **170**, 6 (1966), 1276–1278; **Engl. transl.**: Soviet Math. Dokl., **7**, 5 (1966), 1384–1386.

[7] А. Н. Шарковский, В. С. Бондарчук, “О частично упорядоченной системе ω-предельных множеств растягивающих эндоморфизмов”, *Сборник статей “Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений”*, Ин-т матем. АН УССР (1973), 128–164.

[8] А. Н. Шарковский, “Аттракторы траекторий и их бассейны”, *Наукова думка*, Киев, 2013.

[9] А. Н. Шарковский, “Об ω-предельных множествах дискретных динамических систем”, *Докт. дисс.*, Киев, 1966.

[10] В. М. Алексеев, “Квазислучайные динамические системы”, *Матем. сб.*, **76(118)**, 1 (1968), 72–134; **Engl. transl.**: Math. USSR-Sb., **5**, 1 (1968), 73–128.

[11] В. М. Алексеев, “Перроновские множества и топологические цепи Маркова”, *УМН*, **24**, 5 (1969), 227–228.

[12] Д. Б. Каток, “Динамические системы с гиперболической структурой”, *Девятая летняя математическая школа*, Ин-т матем. АН УССР (1972), 125–212.

[13] Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер, “Риманова геометрия в целом”, *Мир, М.*, 1971; **transl. from German**: D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer, Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968.

[14] К. Куратовский, “Топология, 1, 2”, *Мир, М.*, 1966-69; **transl. from Engl.**: K. Kuratowski, Topology, Vols 1, 2, Academic Press, 1966-68.