ДЕСКРИПТИВНА ТЕОРІЯ ДЕТЕРМІНОВАНОГО ХАОСУ

О. М. Шарковський

Інститут математики
Національна академія наук України

Грудень 2017

How complicated is the one-dimensional chaos: descriptive theory of chaos

We consider one-dimensional dynamical systems given by maps $f \in C^0(I, I)$ with I being a closed interval under the condition that the topological entropy $h(f)$ is positive.

Most recently, the book [1] of Sylvie Ruette appeared, the aim of which is "to survey the relations between the various kinds of chaos and related notions for continuous interval maps". However, the book does not even mention the research of the talk author published back in the sixties of the past century [2-4]. The research results showed a huge variety of the trajectory attractors (i.e., ω-limit sets) and the more complexity of their attraction basins, pointing to a very intricate interweaving of different basins. All this gives a good idea about the complexity of the one-dimensional chaos.

In [2], using the descriptive sets theory, it was proved that even basins of the simplest attractors – cycles – can be very complex, namely, can be a set of the third class in the Baire classification. Later in [3], it was shown that such situation is typical, namely, even for quadratic maps, the basin of any attractor that contains a cycle and is not maximal or locally maximal (which is typical where $h(f) > 0$), is a set of the third Baire class.

In [4], the properties of the set of all trajectory attractors of f partially ordered by the set-theoretic inclusion, were formulated. If $h(f) > 0$, then in this set there exists at least one maximal attractor $\mathcal{A}$, that contains cycles and so contains continuum many of locally maximal attractors other than cycles (and being Cantor sets); each from these locally maximal attractors contains continuum many of minimal attractors other than cycles (and hence being Cantor sets). It remains to add that the basin of every attractor contained in $\mathcal{A}$ is dense on $\mathcal{A}$. The proofs of all statements can be found in the author's thesis from 1966 and in [5, sect. 4.1].

1. S.Ruette, *Chaos on the interval*, Amer. Math. Soc., ser. University lecture **67**, 2017.
2. A.N.Sharkovsky, *A classification of fixed points*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **97**, 1970, 159-179 (transl. from Ukrain. Mat. Zh. **17**(5), 1965, 80-95).
3. A.N.Sharkovsky, *Behavior of a mapping in the neighborhood of an atrracting set*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **97**, 1970, 227-258 (transl. from Ukrain. Mat. Zh. **18**(2), 1966, 60-83).
4. A.N.Sharkovsky, *Partially ordered system of attracting sets*, Soviet Math. Dokl. **7**, 1966, 1384-1386 (transl. from Dokl. Akad. Nauk SSSR **170**(5), 1966, 1276-1278).
5. A.N.Sharkovsky, *Attractors of trajectories and their basins*, Naukova Dumka, Kiev, 2013, 320p. (in Russian).

Коротке резюме доповіді :

Дескриптивна (тобто, описова) теорія множин – класичний розділ математики, який виник на початку минулого сторіччя. В доповіді пропонуються *основи дескриптивної теорії хаосу*. Показано, що

динамічна система, якщо топологічна ентропія додатна,

1) має дуже багато різних атракторів траєкторій, а саме, континуум атракторів;

2) басейни більшості атракторів мають дуже складну будову, а саме, є множинами 3-го класу за термінологією дескриптивної теорії множин;

3) басейни різних атракторів дуже сильно переплітаються і їх не можна відокремити один від одного ніякими відкритими чи замкненими множинами, а можна лише множинами 2-го класу складності, та

множина всіх атракторів динамічної системи утворює в просторі замкнених множин фазового простору (з метрикою Хаусдорфа) атракторну сітку (мережу), комірки якої створюють Канторові множини з самих атракторів.

Розглядаються динамічні системи на компакті X, породжувані неперервним відображенням $f : X \to X$, переважно у випадку, коли X – це інтервал $I \subset R$.

Асимптотичну поведінку кожної траєкторії $f^i(x)$, $i = 0, 1, 2, ...$, $x \in X$, звичайно визначає так звана ω-гранична множина, або, простіше, *атрактор* траєкторії – інваріантна, замкнена множина $\mathcal{A}_x = \bigcap_{m>0} \overline{\{\bigcup_{i>m} f^i(x)\}}$, яка притягує цю траєкторію, коли час прямує до нескінченності: для будь якого її околу U існує $i_0 = i_0(U)$ таке, що $f^i(x) \in U$ при $i \geq i_0$.

Кожна з множин $\mathcal{A}_x$, $x \in X$, може бути атрактором для багатьох траєкторій. Множину всіх траєкторій, що притягуються одним і тим же атрактором, називають *басейном цього атрактора*: якщо $\mathcal{A}$ – атрактор, тоді $\mathfrak{B}(\mathcal{A}) = \{x \in X \mid \mathcal{A}_x = \mathcal{A}\}$ – басейн атрактора.

Більшість результатів, представлених в цій доповіді, отримані і опубліковані ще в 60-х роках минулого сторіччя, але і зараз, здається, мало відомі, хоча всі вони тоді ж були перекладені англійською.

[1] А.Н.Шарковский *О притягивающих и притягивающихся множествах*, Доклады АН СССР **160**, 1965, 1036-1038 (пер.: Soviet Math. Dokl. **6**, 1965, 268-270).

[2] А.Н.Шарковский, *Об одной классификации неподвижных точек*, УМЖ **17**(5), 1965, 80-95 (пер.: AMS. Transl. (2) **97**, 1970, 159-179).

[3] А.Н.Шарковский, *Поведение отображения в окрестности притягивающего множества*, УМЖ **18**(2), 1966, 60-83 (пер.: Amer. Math. Soc. Transl. (2) **97**, 1970, 227-258).

[4] А.Н.Шарковский, *Частично упорядоченная система притягивающих множеств*, Доклады АН СССР **170**, 1966, 1276-1278 (пер.: Soviet Math. Dokl. **7**, 1966, 1384-1386).

[5] А.Н.Шарковский, *Строение эндоморфизма на ω-предельном множестве*, Intern. Math. Congress (Moscow,1966), секц.6, тез., 51.

[6] А.Н.Шарковский, *Аттракторы траекторий и их бассейны*, Наукова Думка, Київ, 2013, 320с.

Т у т:

притягивающее множество = атрактор траєкторії = ω-гранична множина траєкторії

притягивающееся множество = басейн атрактора = підмножина фазового простору, що складається з траєкторій, які мають один і той же атрактор траєкторій

Тепер добре відомо, що в одновимірній динамічній системі хаос є тоді, коли топологічна ентропія системи додатна. Також добре відомо, що для одновимірних систем має місце таке:

Для динамічної системи, яку задає відображення $f \in C^0(I, I)$, де I – замкнений інтервал, наступні твердження еквівалентні:

(1) топологічна ентропія додатна, $h(f) > 0$;

(2) f має цикл періоду $\neq 2^i$, $i \geq 0$;

(3) f має гомоклінічну траєкторію;

(4) існують $m \geq 1$ і замкнені інтервали $J, K \subset I$ такі, що $f^m J \cap f^m K \subset J \cup K$,

і з них випливають ще два еквівалентні твердження:

(5) існують $x, y \in I$ та $\delta > 0$ такі, що $\lim_{i\to\infty} \sup \rho[f^i(x), f^i(y)] \geq \delta$ і $\lim_{i\to\infty} \inf \rho[f^i(x), f^i(y)] = 0$;

(6) існує континуум пар траєкторій з властивістю (5).

Слово *хаос* як математичний термін вперше з'явилося в статті Li, Yorke "Period three implies chaos" (Monthly **103**, 1975) і саме властивість (6) фігурувала там як основна при визначенні хаосу.

[7] Бондарчук В.С., Шарковский А.Н., *Восстанавливаемость расширяющих эндоморфизмов по системе ω-предельных множеств*, в: Динамические системы и вопросы устойчивости решений диф.уравнений, Инст. матем. АН УССР, Киев, 1973, 28-34.

[8] Шарковский А.Н., Бондарчук В.С., *Частично упорядоченная система ω-предельных множеств расширяющих эндоморфизмов*, в: Динамические системы и вопросы устойчивости решений диф.уравнений, Инст. матем. АН УССР, Киев, 1973, 128-164.

[9] Бондарчук В.С., *Инвариантные множества гладких динамических систем*, Диссертация, 1974.

[10] Shakovsky A.N. *How complicated can be one-dimensional dynamical systems: descriptive estimates of sets*, Dynamical systems and ergodic theory (Warsaw, 1986), Banach Center Publ., **23**, Warsaw, 1989, 447-453.

[11] Сивак А.Г., *Дескриптивные оценки для статистически предельных множеств динамических систем,* в: *Динамические системы и Турбулентность*, Инст. матем., Киев, 1989, 100-102.

[12] Сивак А.Г., *О структуре множества траекторий, порождающих инвариантную меру,* в: *Динамические системы и нелинейные явления*, Инст. матем., Киев, 1990, 39-43.

[13] Сивак А.Г., *σ-Аттракторы траекторий и их бассейны,* Добавление, гл.7, в: [6], 281-310.

[14] Sharkovsky A.N., Sivak A.G., *Basins of attractors of trajectories,* J. Difference Equations and Appl., **22**(2), 2016, 159-163.

В теорії динамічних систем поряд з відкритими множинами (наприклад, басейни притягуючих циклів, блукаючі множини) та замкненими множинами (ω-граничні множини, неблукаючі множини, центри динамічних систем), розглядаються множини більш складної структури.

З'являються F_σ множини, які є об'єднанням не більш ніж зчисленної кількості замкнених множин, наприклад, як множина всіх періодичних точок, G_δ множини, які є перетинами не більше ніж зчисленної кількості відкритих множин, як множина всіх транзитивних точок системи, $F_{\sigma\delta}$ множини, які є перетинами не більш ніж зчисленної кількості F_σ множин і т. д.

Ми використовуємо класифікацію множин за Бером, відповідно до якої перший клас складають відкриті та замкнені множини разом з множинами, що є як F_σ, так і G_δ множинами одночасно. Другий клас складається з множин, які є або F_σ, або G_δ множинами, але не є одним та другим, разом з множинами, які, навпаки, є одночасно $F_{\sigma\delta}$ і $G_{\delta\sigma}$, але не належать до першого класу. Третій клас складається з множин, що є $F_{\sigma\delta}$ або $G_{\delta\sigma}$, але не є обома, і множин, що ... Подальші класи визначаються аналогічним чином.

Верхні дескриптивні оцінки, як правило, отримати досить легко навіть для динамічних систем на довільному просторі X з зчисленним базисом, і в [ДАН-1965] такі верхні оцінки для систем на довільних компактах були отримані. А саме:

(a) якщо атрактор $\mathcal{A}$ є максимальним, тобто не існує атракторів $\tilde{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$, то басейн $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ є G_δ множиною;

(b) якщо атрактор $\mathcal{A}$ є локально максимальним, тобто існує окіл $\mathcal{A}$, який не містить атракторів $\tilde{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$, тоді басейн $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ є одночасно як $F_{\sigma\delta}$, так і $G_{\delta\sigma}$ множиною;

(c) в будь-якому випадку басейн $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ є (не більш складним in X ніж) $F_{\sigma\delta}$ множина, тобто завжди може бути представлений як перетин не більш ніж зчисленного числа об'єднань не більш ніж зчисленного числа замкнених множин.

Чи досягаються ці верхні оцінки хоча б для деяких класів систем і, отже, ми маємо складне переплітіння траєкторій, які прямують до різних атракторів – це досить складна задача навіть для одновимірних систем ...

Тим не менш, як з'ясувалося, всі ці оцінки досягаються одновимірними системами, коли система має цикл періоду $\neq 2^i$. А саме, в [УМЖ-65, УМЖ-66, ДАН-66] було показано, що в цьому випадку існує максимальний атрактор A_{max}, який містить цикли і континуум різних атракторів типу (c); басейн кожного такого (типу (c)) атрактора є множиною 3-го класу, тобто є $F_{\sigma\delta}$ множиною і не є $G_{\delta\sigma}$ множиною. Це означає, що

1) тут ми маємо дуже складне переплітіння траєкторій з різною асимптотичною поведінкою, і

2) з точки зору дескриптивної теорії, одновимірний хаос настільки ж складний, як і багатовимірний і навіть нескінченно-вимірний хаос.

Арифметичний приклад Бера множини третього класу

Хай J – це множина ірраціональних точок інтервалу $(0,1)$. Кожній точці з J відповідає ланцюговий дріб $\frac{1}{n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{n_3+\dots}}}$.

Множину Бера $\mathbb{B}$ третього класу складають точки J, для яких $n_j \to \infty$.

І цей же приклад "з точки зору" динамічних систем: Нехай відображення $g : J \to J$ задається формулою $g : \ x \mapsto \{1/x\}$, де $\{\dots\}$ позначає дробну частину числа. Відображення g неперервне на J (метрика для ланцюгових дробів) та $g(J) = J$. Дійсно, якщо $x = \frac{1}{n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{n_3+\dots}}}$, тоді $g(x) = \frac{1}{n_2+\frac{1}{n_3+\dots}}$.

Отже, множину Бера $\mathbb{B}$ третього класу складають точки $x \in J$, для яких $g^j x \to 0$, коли $j \to \infty$, тобто, в наших позначеннях, множина $\mathbb{B}$ є басейном атрактора $\{x = 0\}$.

Критерій Бера для множини належати третьому класу

Нехай $P_{j_1 j_2 \ldots j_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, $j_k = 1, 2, \ldots$, — довершені ніде не щільні множини на R (або на множині ірраціональних чисел J), та

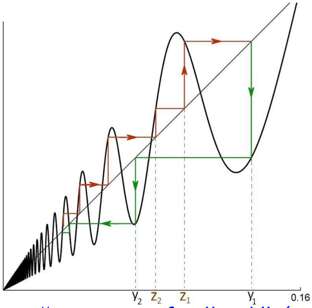
1) $P_{j_1 \ldots j_k j_{k+1}} \subset P_{j_1 \ldots . j_k}$,

2) $P_{j_1 \ldots j_k j_{k+1}}$ – ніде не щільні на $P_{j_1 \ldots . j_k}$,

3) $Q_k = \bigcup\limits_{j_{k+1}=1}^{\infty} P_{j_1 \ldots j_k j_{k+1}}$, $k = 1, 2, \ldots$ – усюди щільні на $P_{j_1 \ldots j_k}$.

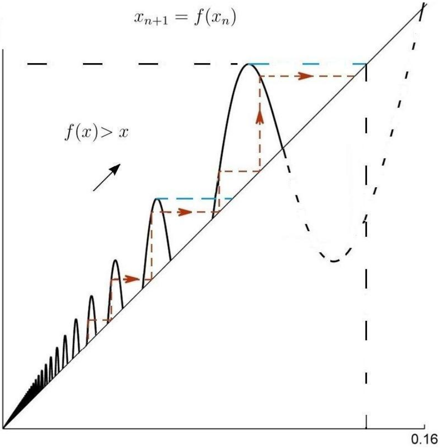
Тоді множина $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$ є множиною Бера третього класу.

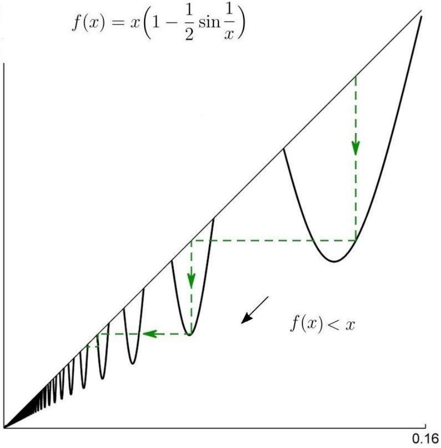
Теорема. *Якщо відображення має притягуюче-відштовхуючу нерухому точку, тоді басейн цієї точки є множиною Бера третього класу.*



Дорога до хаосу через “повзучий feedback” (негладка реалізація)

На цьому малюнку ми можемо побачити, як відбувається відштовхування від нерухомої точки ($x = 0$) та притягування до неї (“повзучий зворотній зв’язок”). Залишається показати, що множину точок x, для яких $f^i(x) \to 0$, коли $i \to \infty$, можна представити як суму двох множин, а саме, множини, що задовільняє критерій Бера бути множиною третього класу **та** множини класа ≤ 2. Саме ця досить складна задача розв’язується в [УМЖ-65].


$x_{n+1} = f(x_n)$
$f(x) > x$
0.16


$f(x) = x\left(1 - \frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}\right)$
$f(x) < x$
0.16

Теорема. *Якщо атрактор $\mathcal{A}$ не є максимальним або локально максимальним і містить цикл, тоді басейн $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ є множиною Бера третього класу.*

Доведення теореми дається в [УМЖ-66], базуючись на доведенні відповідної теореми для циклів в [УМЖ-65].

Для одновимірних систем, **тільки необерненість f надає зворотній зв'язок, який відкриває дорогу до хаосу.**

Тут ми вже маємо "швидкий зворотній зв'язок" як для циклів, так і для локально максимальних атракторів. Тим не менш, "повзучий зворотній зв'язок" залишається визначальним для атракторів, які не є локально максимальними.

Найпростішим прикладом такого атрактора може бути гомоклінічна траєкторія разом з циклом, до якого вона прямує...

Як же виникає цей "повзучий зворотній зв'язок"?

Для будь-яких двох атракторів $\mathcal{A}', \mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}_{max}$, які не перетинаються, існують локально максимальні атрактори $\mathcal{A}'_{lmax}, \mathcal{A}''_{lmax}$, які не перетинаються і містять, відповідно, $\mathcal{A}'$ та $\mathcal{A}''$. Тому їх басейни можна відокремити один від одного множинами другого класу Бера, а саме, F_σ множинами

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}' &= \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-i}(\mathcal{A}'_{lmax}) = \bigcup_{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'_{lmax}} \mathcal{B}(\mathcal{A}), \\
\mathcal{B}'' &= \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-i}(\mathcal{A}''_{lmax}) = \bigcup_{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}''_{lmax}} \mathcal{B}(\mathcal{A}).
\end{aligned}
$$

Отже, басейни будь-яких двох атракторів, які є множинами 3-го класу, завжди можна відокремити один від одного множинами 2-го класу.

Звісно, інформація про самі атрактори та їх взаємозв'язки має складати суттєву частину дескриптивної теорії хаосу.

В [ДАН-1966] та [Attractor, гл. 4] розглядаються сімейства $\mathfrak{M}$ і $\mathfrak{M}'$ всіх атракторів та, відповідно, всіх локально максимальних атракторів, які містяться в $\mathcal{A}_{max}$.

$\mathfrak{M}$ містить континуум локально максимальних атракторів, відмінних від циклів; кожний з них є Канторовою множиною, на якій періодичні точки всюди щільні.

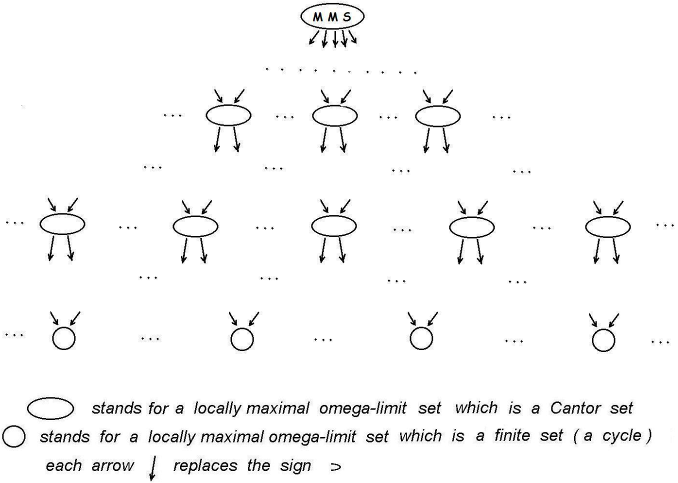
$\mathfrak{M}$ містить континуум мінімальних атракторів, відмінних від циклів, і отже, всі вони є Канторовими множинами.

Існує природний частковий порядок в $\mathfrak{M}$:
якщо $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}'$ передує $\mathcal{A}$ у $\mathfrak{M}$.

Максимальний атрактор $\mathcal{A}_{max}$ і кожний локально максимальний атрактор не мають безпосереднього попередника в будь-якому максимальному ланцюгу. Кожний атрактор такого ланцюга, відмінний від $\mathcal{A}_{max}$, має континуум безпосередніх наступників.

Кожний максимальний ланцюг з $\mathfrak{M}'$ містить зчисленну кількість локально максимальних атракторів і подібний до множини раціональних точок :

для кожних $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''$, існує $\mathcal{A}'''$ такий, що $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''' \subset \mathcal{A}''$ ...



2^X

Цікаво виглядає сімейство усіх атракторів $\mathfrak{M}$ як множина у просторі 2^X з метрикою Хаусдорфа.

Сімейство $\mathfrak{M}$ утворює в просторі 2^I замкнену множину [1996; Blokh, Bruckner, Humke, Smital]. Ця множина ніде не щільна на 2^X.

Сімейство $\mathfrak{M}'$ та сімейство усіх циклів $\mathfrak{P}$ утворюють у просторі 2^X множини, всюди щільні на множині $\mathfrak{M}$, тобто

$$\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{M}'} = \mathfrak{M}$$

Атракторна сітка (мережа) з Канторових множин

Кожний максимальний ланцюг $\mathfrak{L}$ з $\mathfrak{M}' \setminus \mathfrak{P}$ після його замикання в метриці Хаусдорфа перетворюється в множину Кантора на 2^X, яка починається в точці, що відповідає атрактору $\mathcal{A}_{max}$, і закінчується точкою, яка відповідає мінімальному або майже мінімальному атрактору, на яких всі або майже всі траєкторії всюди щільні.

Різні максимальні ланцюги з $\mathfrak{M}' \setminus \mathfrak{P}$ перетинаються на деяких локально максимальних атракторах, що веде в просторі 2^X до перетинання в певних точках різних Канторових множин і утворення Канторовими множинами сітки, вузлам якої відповідають саме локально максимальні атрактори.

Отже, $\mathfrak{M}$, як множина в просторі 2^X, є сіткою з сплетених Канторових множин, що починаються в точці, яка відповідає атрактору $\mathcal{A}_{max}$, та зчисленної кількості ізольованих точок, які відповідають циклам з $\mathfrak{P}$. Якщо $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{M}'$, тоді $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{P}$ є замкненою щільною в собі множиною в 2^X.