Галилеевски инвариантные уравнения движения со спин-орбитальным взаимодействием

А.Г. НИКИТИН, В.И. ФУЩИЧ

Хорошо известно, что если в релятивистское уравнение Дирака для электрона ввести взаимодействие с внешним электромагнитным полем и затем приближенно (с точностью до членов $\frac{1}{m^2}$) диагонализировать гамильтониан с помощью серии преобразований Фолди–Воутхойзена, то оператор энергии будет иметь вид [1]

$$H = H_1 + H_2 + H_3 + H_4, \tag{1}$$

где

$$H_1 = \gamma_0 \left(m + \frac{\vec{\pi}^{\,2}}{2m} \right) + eA_0 \tag{2}$$

описывает взаимодействие точечного заряда с электромагнитным полем,

$$H_2 = -\frac{e}{2m}\gamma_0 \vec{\sigma} \cdot \vec{H} \quad — \tag{3}$$

дипольное взаимодействие,

$$H_3 = -\frac{e}{8m^2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\pi} \times \vec{E} - \vec{E} \times \vec{\pi}) \quad — \tag{4}$$

спин-орбитальное взаимодействие,

$$H_4 = -\frac{e}{m^2} \operatorname{div} \vec{E} \quad — \tag{5}$$

дарвиновское взаимодействие. Здесь $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ — матрицы Паули, γ_0 — диагональная матрица Дирака, $\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A}$.

Каждый член в формуле (1) имеет четкую физическую интерпретацию.

В 1954 г. Баргман [2] показал, что спин частицы можно последовательно ввести в нерелятивистскую квантовую механику, если рассмотреть центральное расширение группы Галилея. В связи с этим результатом возникает задача об отыскании уравнений движения для частицы с произвольным спином s, инвариантных относительно расширенной группы Галилея, с помощью которых можно бы описать, например, поведение электрона во внешних электромагнитных полях. Другими словами эту задачу можно сформулировать так: описать уравнения движения в рамках релятивистской квантовой механики для частиц со спином, которые подобно уравнению Дирака приводили бы к гамильтониану типа (1). Первые результаты в этом направлении получил Леви-Леблонд [3] для частицы со спином $s = \frac{1}{2}$,

Труды международного семинара “Теоретико-групповые методы в физике”, Звенигород, 28–30 ноября 1979 г., Москва, Наука, 1980, Т.2, С. 35–41.

а затем Хатен и Герлей [4] для частицы с произвольным. спином. Эти уравнения представляют собой систему дифференциальных уравнений первого порядка. После введения взаимодействия в такие уравнения получаем гамильтонианы типа (1), в которых, однако, отсутствуют члены, описывающие спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия (т.е. члены типа H_3 и H_4).

Во многих книгах и статьях утверждается, что спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия — чисто релятивистские эффекты. В дальнейшем будет показано, что такое широко распространенное утверждение ошибочно, поскольку указанные взаимодействия могут быть описаны с помощью уравнений, инвариантных относительно группы Галилея. Вывод и анализ таких уравнений и является целью настоящей работы.

Перейдем к формулировке нашей задачи. Группой Галилея G называется совокупность преобразований координат x_a $(a = 1, 2, 3)$ и времени t следующего вида

$$x_a \to x'_a = R_{ab}x_b + V_a t + b_a, \qquad t \to t' = t + b_0, \tag{6}$$

где R_{ab} — оператор трехмерного поворота, V_a, b_μ — произвольные действительные параметры.

Мы рассмотрим два класса уравнений, инвариантных относительно преобразований (6), а именно системы дифференциальных уравнений в частных производных первого и второго порядка. Наиболее общий вид уравнения первого порядка задается формулой

$$L^{(1)}\Psi(,\vec{x}) = 0, \qquad L^{(1)} = \beta_\mu p^\mu + \beta_5 m, \qquad p_\mu = -i\frac{\partial}{\partial x_\mu}, \tag{7}$$

где β_μ — матрицы, подлежащие определению, Ψ — столбец функций с компонентами $(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n)$.

Уравнение второго порядка ищем в виде

$$\begin{gathered} L^{(2)}\Psi(t,\vec{x}) = 0, \qquad L^{(2)} = i\frac{\partial}{\partial t} - H(\vec{p}), \\ H(\vec{p}) = A_0 + A_b p_b + A_{bc}\frac{1}{2}(p_a p_b + p_b p_a), \end{gathered} \tag{8}$$

A_0, A_b, A_{bc} — матрицы, которые будут определены из условия галилеевской инвариантности.

Определение. *Будем говорить, что уравнение (7) (или (8)) галилеевски инвариантно, если на множестве решений этих уравнений выполняются условия*

$$[L^{(n)}, P_\mu]_- = [L^{(n)}, J_a]_- = [L^{(n)}, G_a]_- = [L^{(n)}, M]_- = 0, \qquad n = 1, 2, \tag{9}$$

где P_μ, G_a, J_a, M — генераторы группы Галилея, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$\begin{gathered} [P_a, P_b]_- = [P_0, P_a]_- = [P_0, J_a]_- = [G_a, G_b]_- = [M, P_0]_- = [M, P_a]_- = \\ = [M, J_a]_- = [M, G_a]_- = 0, \quad [P_a, J_b]_- = i\varepsilon_{abc}P_c, \quad [G_a, J_b]_- = i\varepsilon_{abc}G_c, \\ [J_a, J_b]_- = i\varepsilon_{abc}J_c, \quad [P_a, G_b]_- = i\delta_{ab}M, \quad [P_0, G_a]_- = iP_a. \end{gathered} \tag{10}$$

11-мерная алгебра Галилея (10), как известно имеет три инвариантных оператора (операторы Казимира)

$$C_1 = P_0 - \frac{P_a P_a}{2M}, \qquad C_2 = M,$$
$$C_3 = (MJ_a - \varepsilon_{abc} P_b G_c)(M_a - \varepsilon_{abc} P_b G_c), \tag{11}$$

собственные значения которых ассоциируются с внутренней энергией, массой и квадратом спина частицы.

Из условия инвариантности (9) относительно алгебры (10), а значит и группы Галилея, видно, что, задавшись некоторым представлением алгебры (10), можно описать широкий класс галилеевски инвариантных уравнений движения. В работе [5] в аналогичной постановке решена задача об описании уравнений, инвариантных относительно группы Пуанкаре. Будем исходить из следующей явной структуры для генераторов P_μ, G_a, J_a, M:

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad M = m,$$
$$J_a = (\vec{x} \times \vec{p})_a + S_a, \qquad G_a = tp_a - mx_a + \lambda_a, \tag{12}$$

где S_a — матрицы, реализующие приводимое представление алгебры $O(3)$, λ_a — некоторые пока неизвестные числовые матрицы.

Операторы (12) порождает обычные локальные преобразования для волновой функции, т.е.

$$\Psi(t, \vec{x}) \to \Psi'(t', \vec{x}') = \exp[if(t, \vec{x})] D^s(R_{ab}, V_a) \Psi(t, \vec{x}),$$

где $D^s(R_{ab}, V_a)$ — некоторая числовая матрица, зависящая от параметров преобразования Галилея (6),

$$f(t, \vec{x}) = mR_{ab} V_a x_b + \frac{1}{2} mV^2 t.$$

Подставив (7), (8), (12) в (9) и приравняв коэффициенты при линейно независимых слагаемых, получаем систему коммутационных соотношений для матриц S_a, λ_a, β_μ, A_μ, A_{bc}:

$$[S_a, S_b]_- = i\varepsilon_{abc} S_c, \qquad [S_a, \lambda_b]_- = i\varepsilon_{abc}\lambda_c, \qquad [\lambda_a, \lambda_b]_- = 0,$$
$$[\Lambda_a, \beta_b]_- = i\delta_{ab}\beta_0, \qquad [\beta_0, S_a]_- = 0, \qquad [\lambda_a, \beta_0]_- = 0, \tag{13}$$

$$[\beta_5, S_a]_- = 0, \qquad [\lambda_a, \beta_5]_- = i\beta_a, \qquad [\beta_a, S_b]_- = \varepsilon_{abc}\beta_c, \tag{13$'$}$$

$$[\lambda_a, A_0]_- = iA_a, \qquad [A_0, S_a]_- = 0, \qquad [A_a, S_b]_- = i\varepsilon_{abc} A_c,$$
$$[\lambda_a, A_{bc}]_- = 0, \qquad [\lambda_a, A_b]_- = i(\delta_{ab} + 2A_{ab}),$$
$$[A_{ab}, S_c]_- = i(\varepsilon_{acd} A_{db} + \varepsilon_{bck} A_{ak}). \tag{13$''$}$$

Таким образом, задача об описании галилеевских уравнений первого и второго порядков сводится к решению коммутационных соотношений (13), (13′), (13″).

Сначала опишем уравнения вида (8). Для этой цели используем следующую структуру для матриц S_a и λ_a:

$$S_a = \begin{pmatrix} s_a & 0 \\ 0 & s_a \end{pmatrix}, \qquad \lambda_a = -(\sigma_2 - i\sigma_3) S_a, \tag{14}$$

где s_a — генераторы неприводимого представления $D(s)$ группы $O(3)$, σ_a — матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

I и 0 — $(2s+1)$-рядные единичные и нулевые матрицы.

Поскольку матрицы S_a и λ_a имеют размерность $2(2s+1)\times(2(2s+1)$, то волновая функция $\Psi(t,\vec{x})$ в уравнениях (8) имеет $2(2s+1)$ компонент, что соответствует числу степеней свободы для частицы и античастицы.

Не приводя здесь детального решения коммутационных соотношений (13), (13″), сформулируем только окончательный результат.

Теорема. *Все возможные (с точностью до эквивалентности) матрицы A_μ, A_{ab}, удовлетворяющие соотношениям (13), (13″), задаются формулами*

$$\begin{aligned} &A_0 = A_0^{\mathrm{I}} = \sigma_3\eta m, \qquad A_b = A_b^{\mathrm{I}} = -2\eta\sigma_1 S_b, \\ &A_{bc} = A_{bc}^{\mathrm{I}} = [\delta_{bc} - 2(\sigma_3 + i\sigma_2)]\frac{\eta}{2m}S_b S_c, \end{aligned} \tag{15}$$

или

$$A_0 = A_0^{\mathrm{II}} = \sigma_3\tilde{\eta}m, \qquad A_b = A_b^{\mathrm{II}} = -2\tilde{\eta}(\sigma_2 - i\sigma_3)S_b, \qquad A_{ab} = A_{ab}^{\mathrm{II}} = \delta_{ab}, \tag{16}$$

где η и $\tilde{\eta}$ — произвольные постоянные.

Уравнение (8) с матрицами (15) описывает свободное движение нерелятивистской частицы с произвольным спином s, массой m и внутренней энергией $\pm\eta m$. В том случае, когда спин $s=\frac{1}{2}$, $\eta = 1$, уравнение (7) может быть записано с использованием матриц Дирака

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\,\Psi(t,\vec{x}) = (1-\gamma_0+\gamma_4)\,\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\Psi(t,\vec{x}), \tag{17}$$

где $\gamma_0 = \sigma_3$, $\gamma_a = -2i\sigma_2 S_a$, $\gamma_4 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

Из (17) видно, что если к уравнению Дирака добавить оператор второго порядка вида $-(1-\gamma_0+\gamma_4)\,\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$, то релятивистское уравнение превращается в уравнение, инвариантное относительно группы Галилея.

Покажем теперь, что уравнения (8) с матрицами (15) и (16) могут быть успешно использованы для описания движения заряженной частицы со спином во внешнем электромагнитном поле. Действительно, сделав в (8), (15) стандартную замену $p_\mu \to \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$, где A_μ — вектор-потенциал электромагнитного поля, приходим к уравнению

$$\left\{i\frac{\partial}{\partial t} - H(\vec{\pi})\right\}\Psi(t,\vec{x}) = 0, \tag{18}$$

$$H(\vec{\pi}) = \sigma_3\eta m + \frac{\vec{\pi}^2}{2m} - 2\eta\sigma_1\vec{S}\cdot\vec{\pi} - (\sigma_3+i\sigma_2)\frac{\eta}{m}\left[(\vec{S}\cdot\vec{\pi})^2 - \frac{1}{2}\vec{S}\cdot\vec{H}\right] + eA_0. \tag{19}$$

Уравнение (19) инвариантно относительно преобразований Галилея. При этом

$$D^s(R_{ab},V_a) = (1 + i\vec{\lambda}\cdot\vec{V})D^s(R_{ab}),$$

$D^s(R_{ab})$ — матрицы, реализующие представление группы $O(3)$, а вектор-потенциал преобразуется по правилу

$$A_b \to A'_b = R_{bc}A_c, \qquad A_0 \to A'_0 = A_0 + R_{ab}V_aA_b.$$

Такие преобразования для A_μ образуют представление группы Галилея. Для того, чтобы показать, что гамильтониан (19) описывает спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия, необходимо, как и в случае уравнения Дирака, приближенно диагонализировать $H(\vec{\pi})$. Такая диагонализация может быть осуществлена с помощью оператора

$$V = \exp(iC)\exp(iB)\exp(iA), \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{m}\sigma_2(\vec{S}\cdot\vec{\pi}),\\
B &= -\frac{1}{m^2}\sigma_1\left\{\frac{-i[(\vec{S}\cdot\vec{\pi})^2-\frac{1}{2}\vec{S}\cdot\vec{H}]}{2}+\frac{[\vec{S}\cdot\vec{\pi},\vec{\pi}^2]_-}{4\eta}-\frac{\vec{S}\cdot\vec{E}}{2\eta}\right\},\\
C &= \frac{1}{m^3}\sigma_2\left\{-\frac{2}{3}(\vec{S}\cdot\vec{\pi})^2+[\vec{S}\cdot\vec{\pi},\vec{S}\cdot\vec{H}]_+-[(\vec{S}\cdot\vec{\pi})^2,eA_0]\right\}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Преобразованный гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned}
H'(\vec{\pi}) = VH(\vec{\pi})V^{-1} &= \sigma_3\eta m + \frac{\vec{\pi}^2}{2m} + eA_0 - \eta\sigma_3\frac{\vec{S}\cdot\vec{H}}{m} -\\
&-\frac{e}{4m^2}\vec{S}\cdot(\vec{\pi}\times\vec{E}-\vec{E}\times\vec{\pi}) + \frac{e}{6m^2}s(s+1)\operatorname{div}\vec{E} + \frac{e}{3m^2}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} +\\
&+\frac{\eta e}{m^2}\vec{S}\cdot(\vec{\pi}\times\vec{H}-\vec{H}\times\vec{\pi}) - \frac{1}{3}\frac{\eta e}{m^2}Q_{ab}\frac{\partial H_a}{\partial x_b} + o\left(\frac{1}{m^3}\right),
\end{aligned} \tag{22}$$

где

$$Q_{ab} = -\frac{1}{2}\left\{3[S_a,S_b]_+ - \delta_{ab}s(s+1)\right\} \quad -$$

тензор квадрупольного взаимодействия.

Гамильтониан (22) содержит те же члены, что и оператор Дирака (1) плюс три дополнительных слагаемых. Для $s=\frac{1}{2}$, $\eta=1$ семь первых слагаемых в (22) в точности совпадают с гамильтонианом Дирака (1) в представлении Фолди–Воутхойзена.

Два последних члена гамильтониана (22) (которые можно интерпретировать как магнитное спин-орбитальное и магнитное квадрупольное взаимодействие) неинвариантны относительно преобразований пространственной инверсии P

$$\vec{x}\to-\vec{x}, \qquad t\to t, \qquad \vec{H}(\vec{x},t)\to\vec{H}(-\vec{x},t).$$

Причиной появления таких P-неинвариантных членов является то обстоятельство, что уравнение (8) неинвариантно относительно преобразования отражения пространственных координат

$$\Psi(t,\vec{x})\to r\Psi(t,-\vec{x}), \tag{23}$$

где r — некоторая унитарная матрица, $r^2 = 1$. Это особенно просто показать для уравнения (17), которое имеет вид уравнения Дирака с дополнительным P-неинвариантным членом (в этом случае $r = \gamma_0$).

Примером уравнения, инвариантного относительно преобразований Галилея и преобразований (23), может служить система

$$(\Gamma_\mu p^\mu - m)\,\tilde{\Psi} = (1 - \Gamma_0 + \Gamma_4)\,\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\tilde{\Psi},$$

где $\tilde{\Psi}$ — восьмикомпонентная функция;

$$\Gamma_\mu = \begin{pmatrix} \gamma_\mu & 0 \\ 0 & \gamma_\mu \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_4 \\ \gamma_4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad r = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & -\gamma_0 \end{pmatrix},$$

где γ_μ — четырехрядные матрицы Дирака. Удвоив число компонент функции Ψ, можно получить P-инвариантные уравнения вида (8) для галилеевской частицы с произвольным значением спина.

В заключение покажем, что галилеевски инвариантные уравнения первого порядка (7) также описывают спин-орбитальное взаимодействие. Для этого приведем одно частное решение системы (13), (13″). Обозначим через S_{mn} $(m, n = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ генераторы произвольного представления группы $O(1,5)$. Тогда матрицы

$$\begin{aligned} &S_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc}, \qquad \lambda_a = S_{0a} + S_{5a}, \qquad \beta_a = S_{4a}, \\ &\beta_5 = S_{40} + 1 - S_{45}, \qquad \beta_0 = \frac{1}{2}(S_{40} + S_{45}) \end{aligned} \tag{24}$$

удовлетворяют соотношениям (13), (13′).

Уравнение (7) с матрицами (24) после минимальной замены $p_\mu \to \pi_\mu$ м принимает вид

$$(\beta_\mu \pi^\mu + \beta_5 m)\,\Psi(t, \vec{x}) = 0. \tag{25}$$

Для выяснения физического смысла решений уравнения (25) подвергнем волновую функцию $\Psi(t, \vec{x})$ преобразованию

$$\Psi \to \Psi' = U\Psi, \qquad U = \exp\left(i\frac{\vec{\lambda}\cdot\vec{\pi}}{m}\right). \tag{26}$$

После преобразования получим эквивалентную систему

$$\left[\beta_0\left(\pi_0 - \frac{\vec{\pi}^2}{2m} - \frac{5}{4}\frac{\vec{\pi}\times\vec{\lambda}\cdot\vec{H}}{m^2} - \frac{\vec{\lambda}\cdot\vec{E}}{m}\right) + \frac{\vec{\beta}\times\vec{\lambda}\cdot\vec{H}}{2m} + \beta_5 m\right]\Psi = 0. \tag{27}$$

Подставляя в (27) матрицы S_{mn} из представления $D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ алгебры $O(1,5)$ (при этом (25) сводится к уравнению Леви-Леблонда), получаем из (27) двухкомпонентное уравнение Паули

$$\left(\pi_0 - \frac{\vec{\pi}^2}{2m} + \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{H}}{2m}\right)\Psi(t, \vec{x}) = 0, \tag{28}$$

которое не описывает спин-орбитальное взаимодействие. Если же матрицы S_{mn} реализуют представление $D\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, то уравнение (27) учитывает спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия. В этом случае (27) сводится к уравнению

$$\left[\pi_0 - \frac{\vec{\pi}^2}{2m} + \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{H}}{2m} + \frac{e}{4m^2}\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{\pi}\times\vec{E} - \vec{E}\cdot\vec{\pi}\right) + \frac{\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{\pi}\times\vec{H} - \vec{H}\times\vec{\pi}\right)}{4m^2}\right]\Psi = 0.$$

Отметим, что формулы (7), (24) задают широкий класс как конечно-компонентных, так и бесконечнокомпонентных галилеевских уравнений. В частности, если матрицы S_{mn} реализуют бесконечномерное представление алгебры $O(1,5)$, то соотношения (7), (24) определяют бесконечнокомпонентное нерелятивистское уравнение. Таким образом, бесконечнокомпонентные уравнения имеют право на существование не только в рамках группы Пуанкаре, но и в рамках группы Галилея.

Некоторые из приведенных результатов частично опубликованы в [6].

1. Foldy L.L., Wouthuysen S.A., *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 29.
2. Bargman V., *Ann. Math.*, 1954, **59**, 1.
3. Levi-Leblond J.-M., *Commun. Math. Phys.*, 1967, **6**, 286.
4. Hagen C.R., *Commun. Math. Phys.*, 1970, **18**, 97;
   Hurley W.J., *Phys. Rev. D*, 1971, **3**, 2339.
5. Никитин А.Г., Фущич В.И., *ТМФ*, 1978, **34**, 319;
   Фущич В.И., Никитин А.Г., *ЭЧАЯ*, 1978, **9**, 501.
6. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Salogub V.A., *Nuovo Cim.*, 1975, **14**, 483; *Rep. Math. Phys.*, 1978, **13**, 175;
   Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cim.*, 1976, **16**, 81.