Симметрия и точные решения нелинейного уравнения Дирака

В.И. ФУЩИЧ, Р.З. ЖДАНОВ

Построены широкие семейства точных решений нелинейных уравнений для классического дираковского поля. Предложены новые нелинейные конформно-инвариантные уравнения для спинорного поля.

Vast families of exact solutions of the nonlinear equations for classical Dime field are constructed. New nonlinear conformally-invariant equations for spinor field are suggested.

Введение

Шестьдесят лет тому назад, н 1928 г. в журнале "Proceedings of the Royal Society" [1] Поль Адриен Морис Дирак опубликовал открытое им принципиально новое уравнение теоретической и математической физики

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi(x) = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{1}$$

которое, наряду с уравнениями Ньютона, Максвелла, Шредингера, лежит в основе современной теоретической физики*. В (1) $\psi(x)$ — четырехкомпонентная комплекснозначная функция; $x = (x_0 \equiv t, x_1, x_2, x_3) \in R(1,3)$ — четырехмерное псевдоевклидово пространство; γ_μ — четырехрядные матрицы, удовлетворяющие алгебре Клиффорда

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \tag{2}$$

где $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$, m — масса частицы.

Проблеме построения линейных многокомпонентных уравнений, обобщающих уравнение Дирака (1), для частиц произвольного спина посвящено огромное число работ (см., например, [2–6] и литературу в [6]).

Луи де Бройль высказал идею о том, что частицы (поля) со спинами $s = 0, 1, 3/2, \ldots$ должны строиться на основе спинорного уравнения Дирака (1). Линейной реализации этой идеи посвящены работы по теории линейных релятивистских уравнений для частиц произвольного спина.

Первой нелинейной попыткой реализации идеи де Бройля была статья Д. Иваненко [7], в которой предложено нелинейное обобщение уравнения Дирака в виде

$$[\gamma_\mu p^\mu - m + \lambda(\bar\psi\psi)]\psi(x) = 0. \tag{3}$$

В начале 50-х годов В. Гейзенберг [8–11] выдвинул программу по разработке единой теории поля на основе следующего нелинейного обобщения уравнения (1):

$$[\gamma_\mu p^\mu + \lambda(\bar\psi\gamma_\mu\gamma_4\psi)\gamma^\mu\gamma_4]\psi(x) = 0, \quad \gamma_4 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3. \tag{4}$$

Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1988, **19**, вып. 5, С. 1154–1196.

*Настоящий обзор посвящен шестидесятилетию открытия Дираком уравнения для спипорного поля.

Простейшее конформно-инвариантное нелинейное спинорное уравнение получил Ф. Гюрши [12]:

$$\left[\gamma_\mu p^\mu + \lambda(\bar{\psi}\psi)^{1/3}\right]\psi(x) = 0. \tag{5}$$

Широкий класс конформно-инвариантных нелинейных уравнений типа Дирака, отличных от (4), (5), предложен в [13]. Одно из них имеет вид

$$\left[\gamma_\mu p^\mu + \lambda(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)\gamma^\mu[(\bar{\psi}\gamma_\nu\psi)(\bar{\psi}\gamma^\nu\psi)]^{-1/3}\right]\psi(x) = 0.$$

В [14, 15] предложен простой способ построения нелинейных спинорных уравнений, которые по своим симметрийным свойствам существенно отличаются от уравнений (1)–(5). Наиболее простое уравнение такого класса получается с помощью замены

$$\gamma_\mu \to \bar{\psi}\gamma_\mu\psi. \tag{6}$$

Сделав в (1) замену (6) и положив $m = 0$, приходим к нелинейному уравнению [14]

$$(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)p^\mu\psi = 0. \tag{7}$$

Можно доказать, что система дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) (7) инвариантна относительно бесконечномерной алгебры Ли.

В литературе существует немного работ, в которых построены в явном виде точные решения нелинейных спинорных уравнений [16–22].

В настоящей статье, в основу которой положены работы авторов [23–28], построены классы точных решений нелинейных спинорных уравнений. Речь пойдет о построении многопараметрических семейств классических (неквантовых) решений нелинейных спинорных систем.

Структура обзора такова. В разд. 1 изучена симметрия нелинейного уравнения Дирака

$$[\gamma_\mu p^\mu + F(\psi^*, \psi)]\psi(x) = 0, \tag{8}$$

где $F(\psi^*, \psi)$ — произвольная четырехрядная матрица, элементы которой являются гладкими функциями восьми полевых переменных ψ^*, ψ. Описаны все матрицы $F(\psi^*, \psi)$, при которых уравнение (8) инвариантно относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$, расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$ — группы Пуанкаре, дополненной однопараметрической группой масштабных преобразований, конформной группы $C(1,3) \supset \tilde{P}(1,3) \supset P(1,3)$.

В разд. 2 описаны анзацы

$$\psi(x) = A(x)\psi(\boldsymbol{\omega}), \tag{9}$$

предложенные в [23] и систематически описанные в [24–28], которые редуцируют систему (8) к системе для четырех функций, зависящих только от трех новых инвариантных переменных $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)\}$. Дираковский спинор $\psi(x)$ зависит от четырех переменных $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$. В (9) $A(x)$ — некоторая невырожденная матрица размерности 4×4, явный вид которой будет найден. В том случае, когда φ зависит только от одной независимой переменной, анзац

(9) редуцирует уравнение (8) к системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Многие из таких ОДУ удается решить точно и тем самым построить точные решения исходного нелинейного спинорного уравнения (8).

В разд. 3 приведены редуцированные уравнения для спинорного уравнения типа (8). Явный вид многопараметрических семейств решений спинорного уравнения приведен в разд. 4. Симметрия редуцированных уравнений обсуждена в разд. 5. Двумерным нелинейным спинорным моделям посвящен заключительный раздел.

Исследованию симметрийных свойств и построению точных решений многомерных нелинейных волновых уравнений

$$\Box u + F(u) = 0$$

посвящены работы [14, 15, 23, 29]. Широкие классы точных решений многомерного уравнения Шредингера с дробной степенью

$$\left(p_0 - \frac{1}{2m} p_a p_a\right) u(t, \boldsymbol{x}) = \lambda |u|^{4/3} u(t, \boldsymbol{x})$$

построены в [30]. Решению лоренц-инвариантных волновых уравнений с дифференциальными связями посвящены статьи [28, 31].

1. Нелинейные спинорные уравнения инвариантные относительно групп $P(1,3)$, $\tilde{P}(1,3)$, $C(1,3)$

В этом разделе описаны все уравнения вида (8), инвариантные относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$ и ее расширений — расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$ и конформной группы $C(1,3)$. Напомним, что расширенной группой Пуанкаре называется 11-параметрическая группа преобразований $\{P(1,3), D(1)\}$, где $D(1)$ — однопараметрическая группа масштабных преобразований

$$x'_\mu = e^\theta x_\mu, \quad \psi'(x') = e^{k\theta}\psi(x), \quad k, \theta = \mathrm{const}. \tag{10}$$

15-параметрическая конформная группа $C(1,3)$ включает в себя расширенную группу Пуанкаре и 4-параметрическую группу специальных конформных преобразований (которую мы будем обозначать $K(4)$):

$$\begin{aligned} &x'_\mu = (x_\mu - \theta_\mu x\cdot x)\sigma^{-1}(x);\\ &\psi'(x') = \sigma(x)[1 - (\gamma\cdot\theta)(\gamma\cdot x)]\psi(x), \end{aligned} \tag{11}$$

где $\sigma(x) = 1 - 2\theta\cdot x + (\theta\cdot\theta)(x\cdot x)$; θ_μ — параметры группы $K(4)$. Здесь и в дальнейшем используется сокращенная запись скалярного произведения в псевдоевклидовом пространстве $R(1,3)$:

$$a\cdot b \equiv a_\mu b^\mu = g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{12}$$

Теорема 1. *Уравнение (8) является пуанкаре-инвариантным, если и только если*

$$\begin{aligned} &F = F_1 + F_2\gamma_4 + F_3\gamma^\mu(\bar\psi\gamma_4\gamma_\mu\psi) + F_4 S^{\mu\nu}(\bar\psi\gamma_4 S_{\mu\nu}\psi),\\ &S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu), \end{aligned} \tag{13}$$

где $\bar\psi = \psi^\dagger\gamma_0$; F_1, F_2, F_3, F_4 — произвольные скалярные функции от $\bar\psi\psi$, $\bar\psi\gamma_4\psi$.

Мы приводим схему доказательства, в основе которой лежит инфинитезимальный алгоритм Ли [32–34]. Разлагая матрицу $F(\psi^*,\psi)$ по базису γ-матриц (см., например, [35])

$$F = a(\psi^*,\psi)I + b^\mu(\psi^*,\psi)\gamma_\mu + c^{\mu\nu}(\psi^*,\psi)S_{\mu\nu} + \\ + d^\mu(\psi^*,\psi)\gamma_\mu\gamma_4 + e(\psi^*,\psi)\gamma_4 \tag{14}$$

и используя критерий инвариантности, получаем, что необходимым и достаточным условием инвариантности уравнения (8) относительно группы Пуанкаре является выполнение следующих равенств:

$$\begin{gathered} Q_{0k}a = 0, \quad Q_{0k}e = 0, \quad Q_{0k}b_\mu + b^\alpha(g_{\alpha0}g_{\mu k} - g_{\alpha k}g_{\mu0}) = 0, \\ Q_{0k}d_\mu + d^\alpha(g_{\alpha0}g_{\mu k} - g_{\alpha k}g_{\mu0}) = 0, \\ Q_{0k}c_{\mu\nu} + c^{\alpha\beta}(g_{\alpha k}\delta^{\mu\nu}_{\beta0} + g_{\beta0}\delta^{\mu\nu}_{\alpha k} - g_{\alpha0}\delta^{\mu\nu}_{\beta k} - g_{\beta k}\delta^{\mu\nu}_{\alpha0}) = 0, \quad k=\overline{1,3}, \\ Q_{0a} = (S_{0a}\psi)^\alpha\frac{\partial}{\partial\psi^\alpha} + (\bar\psi S_{0a})^\alpha\frac{\partial}{\partial\bar\psi^\alpha}, \quad a=\overline{1,3}, \\ \delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = \delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha, \quad \alpha,\beta,\mu,\nu=\overline{0,3}, \quad \delta^\alpha_\beta \text{ — символ Кронекера.} \end{gathered} \tag{15}$$

С помощью простых, хотя и довольно громоздких рассуждений, удается построить общее решение системы ДУЧП (15). Подставляя найденный результат в (14) с учетом тождеств Фирца–Паули

$$\begin{gathered} (\bar\psi\psi)^2 - (\bar\psi S_{\mu\nu}\psi)(\bar\psi S^{\mu\nu}\psi) + (\bar\psi\gamma_4\psi)^2 = 0, \\ (\bar\psi\gamma_\mu\psi)(\bar\psi\gamma^\mu\psi) - (\bar\psi\gamma_\mu\gamma_4\psi)(\bar\psi\gamma_4\gamma^\mu\psi) = 0, \\ (\bar\psi\psi)^2 - (\bar\psi\gamma_\mu\gamma_4\psi)(\bar\psi\gamma_4\gamma^\mu\psi) - (\bar\psi\gamma_4\psi)^2 = 0, \end{gathered}$$

получаем утверждение теоремы.

Замечание. Нетрудно убедиться, что уравнение Гейзенберга является частным случаем уравнений (8), (13).

Теорема 2. *Уравнение (8) инвариантно относительно расширенной группы Пуанкаре $\tilde P(1,3)$, если и только если $F(\psi^*,\psi)$ имеет вид (13), причем*

$$\begin{gathered} F_i = (\bar\psi\psi)^{-1/2k}\tilde F_i, \quad i=1,2, \\ F_j = (\bar\psi\psi)^{-(1+2k)/2k}\tilde F_j, \quad j=3,4, \end{gathered} \tag{16}$$

где $\tilde F_1,\ldots,\tilde F_4$ — произвольные функции от $\bar\psi\psi/\bar\psi\gamma_4\psi$.

Теорема 3. *Уравнение (8) инвариантно относительно конформной группы $C(1,3)$, если и только если $F(\psi^*,\psi)$ имеет вид (13), (16) при $k=-3/2$.*

Доказательство двух последних утверждений проводится с помощью метода Ли (см. [33, 34]), мы его опускаем. Отметим лишь, что достаточность теоремы 3 может быть установлена непосредственной проверкой, обозначим

$$G(\psi^*,\psi) = \gamma_\mu p^\mu\psi + \Big\{(\tilde F_1 + \tilde F_2\gamma_4)(\bar\psi\psi)^{1/3} + \\ + [\tilde F_3\gamma^\mu(\bar\psi\gamma_4\gamma_\mu\psi) + \tilde F_4 S^{\mu\nu}(\bar\psi\gamma_4 S_{\mu\nu}\psi)](\bar\psi\psi)^{-2/3}\Big\}\psi. \tag{17}$$

Тогда справедливы следующие тождества:

$$G(\psi^{*\prime},\psi') = e^{-5/2\theta}G(\psi^*,\psi), \tag{18}$$

если $\psi^{*\prime}$, ψ' имеют вид (10) при $k=-3/2$;

$$G(\psi^{*\prime},\psi')=\sigma^2(x)[1-(\gamma\cdot\theta)(\gamma\cdot x)]G(\psi^*,\psi), \tag{19}$$

если $\psi^{*\prime}$, ψ' имеют вид (11). Из (18), (19) следует, что уравнение инвариантно относительно групп преобразований (10), (11), что и требовалось доказать.

Замечание. Если положить в (16) $\tilde F_2\equiv\tilde F_3\equiv\tilde F_4\equiv 0$, $\tilde F_1=\lambda=\mathrm{const}$, $k=-3/2$, то мы получим конформно-инвариантное спинорное уравнение Гюрши (5).

Как уже отмечалось во введение, существуют пуанкаре-инвариантные спинорные уравнения, принципиально отличные от уравнений вида (8). Одной из таких моделей является система нелинейных ДУЧП (7), на множетсве решений которой реализуется представление бесконечномерной алгебры Ли. Этот факт дает возможность построить общее решение уравнения (7). Используя классические методы интегрирования систем ДУЧП первого порядка с одинаковой главной частью (см., например, [37]), получаем, что общее решение спинорного уравнения (7) задается следующими формулами:

$$F^\alpha(x_\mu(j\cdot j)-j_\mu(j\cdot x),\psi,\psi^*)=0,$$

где $j_\mu=\bar\psi\gamma_\mu\psi$; $F^\alpha:\mathbf{R}^4\times\mathbf{C}^4\times\mathbf{C}^4\to\mathbf{C}^1$ — произвольные дифференцируемые (в смысле действительного анализа) функции.

Анзацы для спинорного поля

В этом разделе изложен метод построения анзацев (9), редуцирующих уравнения вида (8) к ДУЧП меньших размерностей. Построены анзацы для спинорного поля, инвариантные относительно расширенной группы Пуанкаре $\tilde P(1,3)$.

Постановка задачи. Будем говорить, что анзац (9) редуцирует уравнение (8) к ДУЧП меньшей размерности, если существуют четырехрядные матрицы $R(x)$, $R_1(\boldsymbol\omega)$, $R_2(\boldsymbol\omega)$, $R_3(\boldsymbol\omega)$, $Q(\boldsymbol\omega,\varphi,\varphi^*)$, для которых справедливо равенство

$$[\gamma_\mu p^\mu\psi+F(\psi^*,\psi)\psi]|_{\psi=A(x)\varphi(\boldsymbol\omega)}=R(x)\left\{R_i\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_i}+Q\varphi\right\}. \tag{20}$$

Из (20) следует, что если $\varphi(\boldsymbol\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$R_i\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_i}+Q\varphi=0, \tag{21}$$

то дираковский спинор, построенный по формуле (9), является решением исходного уравнения (8).

Следовательно, задача состоит в построении возможно более широких классов анзацев, удовлетворяющих условию (20). Подставляя анзац (9) в левую часть равенства (20) и приравнивая матричные коэффициенты при $\partial\varphi/\partial\omega_i$, получаем уравнения на $\omega_i(x)$, $A(x)$:

$$\begin{gathered}i\gamma_\mu\frac{\partial A}{\partial x_\mu}=RH(\boldsymbol\omega),\\ i\gamma_\mu\frac{\partial\omega_a}{\partial x_\mu}A=RR_a(\boldsymbol\omega),\quad a=\overline{1,3},\\ F((A\varphi)^*,A\varphi)A=R(x)\tilde Q(\boldsymbol\omega,\varphi,\varphi^*),\quad \tilde Q+H=Q.\end{gathered} \tag{22}$$

На первый взгляд, система ДУЧП (22) ничуть не проще, чем (8). Тем не менее теоретико-алгебраические методы дают эффективный алгоритм для построения широких классов частных решений системы (22). Из общей теории инвариантных решений следует, что если матрица $A(x)$ и скалярные функции $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, $\omega_3(x)$ удовлетворяют условиям

$$QA(x) \equiv \left(\xi^\mu(x)\frac{\partial A}{\partial x_\mu} + \eta(x)A\right) = 0, \tag{23}$$

$$Q_d\omega_a \equiv \xi^\mu(x)\frac{\partial \omega_a}{\partial x_\mu} = 0, \quad a = \overline{1,3}, \tag{24}$$

где Q — оператор симметрии уравнения (8), то анзац (9) редуцирует (8) к трехмерному ДУЧП (см. [33, 38, 39]).

Сформулируем теперь общую схему построения решений нелинейного уравнения Дирака, инвариантного относительно расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$. В качестве оператора Q выбираем линейную комбинацию базисных операторов алгебры Ли расширенной группы Пуанкаре $A\tilde{P}(1,3)$:

$$Q = c^{\mu\nu}J_{\mu\nu} + c^{00}D + c^\mu P_\mu, \tag{25}$$

где $P_\mu = ig_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}$, $J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + S_{\mu\nu}$, $D = x_\mu P^\mu + ik$, $c^{\mu\nu}$, c^{00}, c^μ — константы, $\mu, \nu = \overline{0,3}$.

Решая систему ДУЧП (23), (24) с Q из (25), находим анзацы вида (9). Подстановка последних в (8) приводит к ДУЧП, зависящим от трех переменных ω_1, ω_2, ω_3. Решая полученные уравнения и подставляя результаты в (9), находим точные решения исходного ДУЧП (8).

Таким образом, задача построения точных решений нелинейного уравнения Дирака разбивается на два этапа. Содержанием первого из них является интегрирование ДУЧП (23), (24) и построение анзацев (9). На втором этапе ищутся частные решения редуцированных ДУЧП.

Мы реализуем эту схему для нелинейного уравнения Дирака вида

$$\left[\gamma_\mu p^\mu + \lambda(\bar{\psi}\psi)^{1/2k}\right]\psi(x) = 0. \tag{26}$$

Построение матриц $A(x)$. Для того чтобы найти явный вид матрицы $A(x)$, необходимо проинтегрировать систему ДУЧП (23) с оператором Q вида (25). Но (23) — это система 16 уравнений с переменными коэффициентами, решить ее стандартными методами непросто. Поэтому, прежде чем интегрировать систему (23), упростим ее, воспользовавшись инвариантностью нелинейного уравнения (26) относительно расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$. Для этого сделаем в (23) следующую замену:

$$A'(x) = \exp\{\Sigma\}A(x), \tag{27}$$

где $\Sigma = \theta^{\mu\nu}J_{\mu\nu} + \theta^{00}D + \theta^\mu P_\mu$, $\theta^{\mu\nu}, \theta^{00}, \theta^\mu = \text{const}$.

Причем Σ выбирается таким образом, чтобы уравнение на $A'(x)$ имело наиболее простой вид. Из (23), (27) нетрудно получить, что $A'(x)$ удовлетворяет системе ДУЧП вида

$$[\exp\{\Sigma\}Q\exp\{-\Sigma\}]A'(x) = 0. \tag{28}$$

Следовательно, необходимо выбрать параметры $\theta^{\mu\nu}$, θ^{00}, θ^{μ} так, чтобы оператор

$$Q' = \exp\{\Sigma\} Q \exp\{-\Sigma\} \tag{29}$$

имел наиболее простой вид. Эта задача решается следующей теоремой, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 4. *Оператор (25) с помощью преобразования (29) может быть приведен к одному из операторов вида*

$$\begin{aligned}
&1.\quad Q' = J_{01} + J_{12} - aD;\\
&2.\quad Q' = J_{01} + J_{12} + P_0 + \beta P_3;\\
&3.\quad Q' = J_{01} + J_{12} + \beta P_3;\\
&4.\quad Q' = J_{23} - aD;\\
&5.\quad Q' = J_{01} + bJ_{23} - aD;\\
&6.\quad Q' = J_{01} + bJ_{23} - D - \beta P_0;\\
&7.\quad Q' = J_{01} + P_2;\\
&8.\quad Q' = J_{23} + \alpha_1 P_0 + \alpha_2 P_1;\\
&9.\quad Q' = D;\\
&10.\quad Q' = P_0 + P_3;\\
&11.\quad Q' = P_0;\\
&12.\quad Q' = P_3,
\end{aligned} \tag{30}$$

где a, b, α_1, α_2 — произвольные действительные параметры.

Таким образом, вместо того чтобы решать систему (23) с оператором Q общего вида, достаточно решить систему (28) с операторами Q вида (30), что значительно проще.

Рассмотрим, например, оператор $Q' = J_{01} + J_{12} - aD$, для него система (28) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\left[-ax_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + (x_2 - x_0)\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right) + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{1}{2}(\gamma_0\gamma_1 + \gamma_1\gamma_2) - ak\right] A(x) = 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

Решение (31) ищем в виде

$$A(x) = f(x) \exp\{g(x)\gamma_1(\gamma_2 - \gamma_0)\}. \tag{32}$$

Подставляя (32) в (31), получаем следующую систему для определения $f(x)$, $g(x)$:

$$\begin{aligned}
&-ax_\mu f_{x_\mu} + (x_2 - x_0) f_{x_1} - x_1(f_{x_0} + f_{x_2}) - akf = 0,\\
&-ax_\mu g_{x_\mu} + (x_2 - x_0) g_{x_1} - x_1(g_{x_0} + g_{x_2}) + \frac{1}{2} = 0.
\end{aligned} \tag{33}$$

Частное решение уравнений (33) дается формулами

$$f(x) = (x_0 - x_2)^{-k}, \quad g(x) = \frac{1}{2a}\ln(x_0 - x_2), \quad a \neq 0,$$

$$f(x) = 1, \quad g(x) = \frac{x_1}{2}(x_0 - x_2)^{-1}, \quad a = 0.$$

Подставляя полученный результат в (32), находим $A(x)$:

$$a \neq 0, \quad A(x) = (x_0 - x_2)^{-k} \exp\left\{\frac{1}{2a}\gamma_1(\gamma_0 - \gamma_2)\ln(x_0 - x_2)\right\},$$

$$a = 0, \quad A(x) = \exp\left\{\frac{x_1}{2(x_0 - x_2)}\gamma_1(\gamma_0 - \gamma_2)\right\}.$$

Матрицы $A(x)$, соответствующие остальным операторам из (30), находятся аналогично, приводим окончательный результат:

$$
\begin{aligned}
&1. \quad a \neq 0,\ A(x) = (x_0 - x_2)^{-k} \exp\left\{\frac{1}{2a}\gamma_1(\gamma_0 - \gamma_2)\ln(x_0 - x_2)\right\},\\
& a = 0,\ A(x) = \exp\left\{\frac{x_1}{2(x_0 - x_2)}\gamma_1(\gamma_0 - \gamma_2)\right\};\\
&2. \quad A(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}(x_0 - x_2)\gamma_1(\gamma_0 - \gamma_2)\right\};\\
&3. \quad A(x) = \exp\left\{\frac{x_3}{2\beta}\gamma_1(\gamma_0 - \gamma_2)\right\};\\
&4. \quad A(x) = \left(x_2^2 + x_3^2\right)^{-k/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}\right\};\\
&5. \quad a \neq 0,\ a \neq -1,\ A(x) = \left(x_0^2 - x_1^2\right)^{-k/2} \times\\
& \times \exp\left\{\frac{1}{2(a+1)}\gamma_0\gamma_1 \ln(x_0 + x_1) - \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}\right\},\\
& a = -1,\ A(x) = \left(x_0^2 - x_1^2\right)^{-k/2} \times\\
& \times \exp\left\{-\frac{1}{4}\gamma_0\gamma_1 \ln(x_0 - x_1) - \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}\right\},\\
& a = 0,\ A(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1 \ln(x_0 + x_1) - \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}\right\};\\
&6. \quad A(x) = (2x_0 + 2x_1 + \beta)^{-k/2} \times\\
& \times \exp\left\{\frac{1}{4}\gamma_0\gamma_1 \ln(2x_0 + 2x_1 + \beta) - \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}\right\};\\
&7. \quad A(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1 \ln(x_0 + x_1)\right\};\\
&8. \quad A(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}\right\};\\
&9. \quad A(x) = x_0^{-k} I; \qquad 10\text{–}12.\ A(x) = I,
\end{aligned}
\tag{34}
$$

где I — единичная матрица размерности 4×4.

Анзацы для уравнения (26). Для того чтобы построить инвариантные переменные $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, $\omega_3(x)$, необходимо проинтегрировать систему ДУЧП (23), взяв в качестве $\xi^\mu(x)$ коэффициенты операторов (30). Интегрирование системы

(24) проводится стандартными методами теории линейных ДУЧП первого порядка, мы приводим полученный результат в виде таблицы, где $-\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=1$.

Таблица 1

№ п/п	$\omega_1(x)$	$\omega_2(x)$	$\omega_3(x)$
1.1	$\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2\right)x_3^{-2}$	$(x_0-x_2)x_3^{-1}$	$ax_1(x_0-x_2)^{-1}-\ln(x_0-x_2)$
1.2	x_0-x_2	x_3	$x_0^2-x_1^2-x_2^2$
2	$x_3+\beta(x_0-x_2)$	$2x_1+(x_0-x_2)^2$	$3x_3+3x_1(x_0-x_2)+(x_0-x_2)^3$
3	x_0-x_2	$x_0^2-x_1^2-x_2^2$	$\beta x_1-(x_0-x_2)x_3$
4	$x_0x_1^{-1}$	$\ln\left(x_2^2+x_3^2\right)+2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_3}$	$\left(x_2^2+x_3^2\right)\left(x_0^2-x_1^2\right)^{-1}$
5.1	$\left(x_0^2-x_1^2\right)^{-a-1}\times$ $\times(x_0+x_1)^{2a}$	$\left(x_0^2-x_1^2\right)\left(x_2^2+x_3^2\right)^{-1}$	$b\ln\left(x_2^2+x_3^2\right)+2a\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_3}$
5.2	x_0+x_1	$\left(x_0^2-x_1^2\right)\left(x_2^2+x_3^2\right)^{-1}$	$b\ln\left(x_2^2+x_3^2\right)-2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_3}$
5.3	$x_0^2-x_1^2$	$x_2^2+x_3^2$	$b\ln(x_0+x_1)+\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_3}$
6	$(2x_0+2x_1+\beta)\times$ $\times\exp\left\{\frac{2}{\beta}(x_1-x_0)\right\}$	$(2x_0+2x_1+\beta)\left(x_2^2+x_3^2\right)^{-1}$	$b\ln\left(x_2^2+x_3^2\right)+2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_3}$
7	$x_0^2-x_1^2$	$\ln(x_0+x_1)-x_2$	x_3
8	$x_2^2+x_3^2$	$\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_3}+\beta_1x_0+\beta_2x_1$	$\alpha_2x_0+\alpha_1x_1$
9	$x_1x_0^{-1}$	$x_2x_0^{-1}$	$x_3x_0^{-1}$
10	x_0+x_1	x_2	x_3
11	x_1	x_2	x_3
12	x_0	x_1	x_2

Подставляя формулы (34) и результаты из табл. 1 в (9), получаем набор анзацев, инвариантных относительно расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$:

$$1.1.\ \psi(x)=(x_0-x_2)^{-k}\exp\left\{\frac{1}{2a}\gamma_1(\gamma_0-\gamma_2)\ln(x_0-x_2)\right\}\varphi(\boldsymbol{\omega}_{1.1}); \tag{35}$$

$$1.2.\ \psi(x)=\exp\left\{\frac{x_1}{2(x_0-x_2)}\gamma_1(\gamma_0-\gamma_2)\right\}\varphi(\boldsymbol{\omega}_{1.2}); \tag{36}$$

$$2.\ \psi(x)=\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_1(\gamma_2-\gamma_0)(x_2-x_0)\right\}\varphi(\boldsymbol{\omega}_2); \tag{37}$$

$$3.\ \psi(x)=\exp\left\{\frac{x_3}{2\beta}\gamma_1(\gamma_2-\gamma_0)\right\}\varphi(\boldsymbol{\omega}_3); \tag{38}$$

$$4.\ \psi(x)=\left(x_2^2+x_3^2\right)^{-k/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_3}\right\}\varphi(\boldsymbol{\omega}_4); \tag{39}$$

$$\begin{gathered}5.1.\ \psi(x)=\left(x_0^2-x_1^2\right)^{-k/2}\times\\ \times\exp\left\{\frac{1}{2(a+1)}\gamma_0\gamma_1\ln(x_0+x_1)-\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_3}\right\}\varphi(\boldsymbol{\omega}_{5.1});\end{gathered} \tag{40}$$

$$5.2.\ \psi(x) = \left(x_0^2 - x_1^2\right)^{-k/2} \times \times \exp\left\{-\frac{1}{4}\gamma_0\gamma_1 \ln(x_0 - x_1) - \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}\right\}\varphi(\boldsymbol{\omega}_{5.2}); \tag{41}$$

$$5.3.\ \psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1 \ln(x_0 + x_1) - \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}\right\}\varphi(\boldsymbol{\omega}_{5.3}); \tag{42}$$

$$6.\ \psi(x) = (2x_0 + 2x_1 + \beta)^{-k/2} \times \times \exp\left\{\frac{1}{4}\gamma_0\gamma_1 \ln(2x_0 + 2x_1 + \beta) - \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}\right\}\varphi(\boldsymbol{\omega}_6); \tag{43}$$

$$7.\ \psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1 \ln(x_0 + x_1)\right\}\varphi(\boldsymbol{\omega}_7); \tag{44}$$

$$8.\ \psi(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}\right\}\varphi(\boldsymbol{\omega}_8); \tag{45}$$

$$9.\ \psi(x) = x_0^{-k}\varphi(\boldsymbol{\omega}_9); \tag{46}$$

$$10.\ \psi(x) = \varphi(\boldsymbol{\omega}_{10}); \tag{47}$$

$$11.\ \psi(x) = \varphi(\boldsymbol{\omega}_{11}); \tag{48}$$

$$12.\ \psi(x) = \varphi(\boldsymbol{\omega}_{12}), \tag{49}$$

$\boldsymbol{\omega}_i$ — набор инвариантов из табл. 1 под номером i.

Редуцированные уравнения. Подставляя анзацы (35)–(49) в нелинейное уравнение Дирака (26), получаем редуцированные уравнения для определения $\varphi(\boldsymbol{\omega})$, общая структура которых такова:

$$i(f^{a\mu}(\boldsymbol{\omega})\gamma_\mu)\varphi_{\omega_a} + i(g^\mu(\boldsymbol{\omega}) + \gamma_4 h^\mu(\boldsymbol{\omega}))\gamma_\mu\varphi + \lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi = 0, \tag{50}$$

где $f^{a\mu}$, g^μ, h^μ — рациональные функции от ω_1, ω_2, ω_3, $\mu = \overline{0,3}$, $a = \overline{1,3}$. Выпишем полученные уравнения:

$$\begin{aligned}1.1.\quad & k(\gamma_2 - \gamma_0)\varphi + [(\gamma_0 - \gamma_2)(\omega_1 + a^{-2}\omega_2^2\omega_3^2) + (\gamma_0 + \gamma_2)\omega_2^2 - \\ & - 2a^{-1}\gamma_1\omega_3\omega_2^2 - 2\gamma_3\omega_1\omega_2]\varphi_{\omega_1} + [(\gamma_0 - \gamma_2)\omega_2 - \gamma_3\omega_2^2]\varphi_{\omega_2} + \\ & + [a\gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_0)(\omega_3 + 1)]\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi;\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}1.2.\quad & \frac{1}{2}\omega_1^{-1}(\gamma_0 - \gamma_2)\varphi + (\gamma_0 - \gamma_2)\varphi_{\omega_1} + \gamma_3\varphi_{\omega_2} + \\ & + [(\gamma_0 + \gamma_2)\omega_1 + (\gamma_0 - \gamma_2)\omega_3\omega_1^{-1}]\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi;\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}2.\quad & [\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2)]\varphi_{\omega_1} + 2\gamma_1\varphi_{\omega_2} + \\ & + \frac{3}{2}(2\gamma_2 + (\gamma_0 - \gamma_2)\omega_2)\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi;\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}3.\quad & \frac{1}{2\beta}\gamma_4(\gamma_2 - \gamma_0)\varphi + (\gamma_0 - \gamma_2)\varphi_{\omega_1} + \Big[(\gamma_0 + \gamma_2)\omega_1 - \frac{2}{\beta}\gamma_1\omega_3 + \\ & + (\gamma_0 - \gamma_2)(\beta^{-2}\omega_3^2 + \omega_2)\omega_1^{-1}\Big]\varphi_{\omega_2} + (\beta\gamma_1 - \gamma_3\omega_1)\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi;\end{aligned} \tag{54}$$

$$4.\quad \frac{1}{2}(1-2k)\gamma_3\varphi+(\omega_1\omega_3)^{1/2}(\gamma_0-\gamma_1\omega_1)\varphi_{\omega_1}+2(\gamma_3+a\gamma_2)\varphi_{\omega_2}+ \\ +[2\gamma_3-(\gamma_0+\gamma_1\omega_1)\omega_3^{1/2}\omega_1^{-1/2}]\omega_3\varphi_{\omega_3}=i\lambda(\bar\varphi\varphi)^{1/2k}\varphi; \tag{55}$$

$$5.1.\quad \Big[-k(\gamma_0\operatorname{ch}\ln\omega_1^{1/2(a+1)}-\gamma_1\operatorname{sh}\ln\omega_1^{1/2(a+1)})+ \\ +\frac{1}{2(a+1)}(\gamma_0+\gamma_1)\omega_1^{-1/2(a+1)}+\frac{1}{2}\gamma_3\omega_2^{1/2}\Big]\varphi- \\ -2(a+1)(\gamma_0\operatorname{ch}\ln\omega_1^{1/2(a+1)}-\gamma_1\operatorname{sh}\ln\omega_1^{1/2(a+1)})\omega_1\varphi_{\omega_1}+ \\ +2[\omega_2(\gamma_0\operatorname{ch}\ln\omega_1^{1/2(a+1)}-\gamma_1\operatorname{sh}\ln\omega_1^{1/2(a+1)})-\omega_2^{3/2}\gamma_3]\varphi_{\omega_2}+ \\ +2(a\gamma_2+b\gamma_3)\omega_2^{1/2}\varphi_{\omega_3}=i\lambda(\bar\varphi\varphi)^{1/2k}\varphi; \tag{56}$$

$$5.2.\quad \Big[-k(\gamma_0\operatorname{ch}\ln\omega_1^{1/2}-\gamma_1\operatorname{sh}\ln\omega_1^{1/2})+\frac{1}{4}(\gamma_0-\gamma_1)\omega_1^{1/2}+\frac{1}{2}\gamma_3\omega_2^{1/2}\Big]\varphi+ \\ +(\gamma_0+\gamma_1)\omega_1^{1/2}\varphi_{\omega_1}+[2\omega_2(\gamma_0\operatorname{ch}\ln\omega_1^{1/2}-\gamma_1\operatorname{sh}\ln\omega_1^{1/2})- \\ -\gamma_3\omega_2^{1/2}]\varphi_{\omega_2}+2\omega_2^{1/2}(b\gamma_3-\gamma_2)\varphi_{\omega_3}=i\lambda(\bar\varphi\varphi)^{1/2k}\varphi; \tag{57}$$

$$5.3.\quad \frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_1+\gamma_3\omega_2^{-1/2})\varphi+[\gamma_0(\omega_1+1)+\gamma_1(\omega_1-1)]\varphi_{\omega_1}+ \\ +2\gamma_3\omega_2^{-1/2}\varphi_{\omega_2}+[b(\gamma_0+\gamma_1)+\gamma_2\omega_2^{-1/2}]\varphi_{\omega_3}=i\lambda(\bar\varphi\varphi)^{1/2k}\varphi; \tag{58}$$

$$6.\quad \frac{1}{2}[(1-2k)(\gamma_0+\gamma_1)+\gamma_3\omega_2^{1/2}]\varphi+2\omega_1[\beta(\gamma_0+\gamma_1)+\gamma_0-\gamma_1]\varphi_{\omega_1}+ \\ +2\omega_2[(\gamma_0+\gamma_1)-\gamma_3\omega_2^{1/2}]\varphi_{\omega_2}+2\omega_2^{1/2}(\gamma_2+b\gamma_3)\varphi_{\omega_3}=i\lambda(\bar\varphi\varphi)^{1/2k}\varphi; \tag{59}$$

$$7.\quad \frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_1)\varphi+[(\gamma_0+\gamma_1)\omega_1+\gamma_0-\gamma_1]\varphi_{\omega_1}+ \\ +(\gamma_0+\gamma_1-\gamma_2)\varphi_{\omega_2}+\gamma_3\varphi_{\omega_3}=i\lambda(\bar\varphi\varphi)^{1/2k}\varphi; \tag{60}$$

$$8.\quad \frac{1}{2}\gamma_3\omega_1^{-1/2}\varphi+2\gamma_3\omega_1^{1/2}\varphi_{\omega_1}+(\beta_1\gamma_0+\beta_2\gamma_1+\gamma_2\omega_1^{-1/2})\varphi_{\omega_2}+ \\ +(\alpha_2\gamma_0+\alpha_1\gamma_1)\varphi_{\omega_3}=i\lambda(\bar\varphi\varphi)^{1/2k}\varphi; \tag{61}$$

$$9.\quad -k\gamma_0\varphi+(\gamma_a-\gamma_0\omega_a)\varphi_{\omega_a}=i\lambda(\bar\varphi\varphi)^{1/2k}\varphi; \tag{62}$$

$$10.\quad (\gamma_0+\gamma_3)\varphi_{\omega_1}+\gamma_1\varphi_{\omega_2}+\gamma_2\varphi_{\omega_3}=i\lambda(\bar\varphi\varphi)^{1/2k}\varphi; \tag{63}$$

$$11.\quad \gamma_a\varphi_{\omega_a}=i\lambda(\bar\varphi\varphi)^{1/2k}\varphi; \tag{64}$$

$$12.\quad \gamma_0\varphi_{\omega_1}+\gamma_1\varphi_{\omega_2}+\gamma_2\varphi_{\omega_3}=i\lambda(\bar\varphi\varphi)^{1/2k}\varphi, \tag{65}$$

где $\varphi_{\omega_a}=\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_a}$, $a=\overline{1,3}$.

Следующим этапом нашего алгоритма является редукция полученных систем ДУЧП к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Общая структура получаемых при этом систем нелинейных ОДУ такова:

$$if^{\mu}(z)\gamma_{\mu}\frac{d\varphi}{dz}+i[g^{\mu}(z)\gamma_{\mu}+h^{\mu}(z)\gamma_{\mu}\gamma_4]\varphi+\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi=0,$$

где f^{μ}, g^{μ}, h^{μ} — рациональные функции от $z=z(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$.

Если в ДУЧП (51) положить $\varphi=\varphi(\omega_2)$, то для нахождения спинора $\varphi(\omega_2)$ получаем следующую систему ОДУ:

$$k(\gamma_2-\gamma_0)\varphi+[(\gamma_0-\gamma_2)\omega_2-\gamma_3\omega_2^2]\varphi_{\omega_2}=i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \tag{66}$$

если же выбрать $\varphi=\varphi(\omega_3)$, получаем систему ОДУ вида

$$k(\gamma_2-\gamma_0)\varphi+[a\gamma_1+(\gamma_2-\gamma_0)(\omega_3+1)]\varphi_{\omega_3}=i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi. \tag{67}$$

Аналогичные рассуждения, будучи примененными к уравнениям (52)–(65), дают набор систем нелинейных ОДУ (в скобках указан номер ДУЧП, из которого получается рассматриваемое уравнение):

$$(\gamma_0-\gamma_2)\varphi_{\omega_1}+\frac{1}{2}\omega_1^{-1}(\gamma_0-\gamma_2)\varphi=i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \qquad ((52),\ 68)$$

$$[\gamma_3+\beta(\gamma_0-\gamma_2)]\varphi_{\omega_1}=i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \qquad ((53),\ 69)$$

$$2\gamma_1\varphi_{\omega_2}=i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \qquad ((53),\ 70)$$

$$2\beta(\gamma_0-\gamma_2)\varphi_{\omega_1}+\gamma_4(\gamma_2-\gamma_0)\varphi=2i\lambda\beta(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \qquad ((54),\ 71)$$

$$\frac{1}{2}(1-2k)\gamma_3\varphi+2(\gamma_3+a\gamma_2)\varphi_{\omega_2}=i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \qquad ((55),\ 72)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_1+\gamma_3\omega_2^{-1/2})\varphi+2\gamma_3\omega_2^{-1/2}\varphi_{\omega_2}=i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \qquad ((58),\ 73)$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[(1-2k)(\gamma_0+\gamma_1)+\gamma_3\omega_2^{1/2}]\varphi+\\&\qquad+2\omega_2(\gamma_0+\gamma_1-\gamma_3\omega_2^{1/2})\varphi_{\omega_2}=i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi;\end{aligned} \qquad ((59),\ 74)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_1)\varphi+[(\gamma_0+\gamma_1)\omega_1+\gamma_0-\gamma_1]\varphi_{\omega_1}=i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \qquad ((60),\ 75)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_1)\varphi+(\gamma_0+\gamma_1-\gamma_2)\varphi_{\omega_2}+\gamma_3\varphi_{\omega_3}=i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \qquad ((60),\ 76)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_1)\varphi+\gamma_3\varphi_{\omega_3}=i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \qquad ((60),\ 77)$$

$$\frac{1}{2}\omega_1^{-1/2}\gamma_3\varphi+2\gamma_3\omega_1^{1/2}\varphi_{\omega_1}=i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \qquad ((61),\ 78)$$

$$-k\gamma_0\varphi+(\gamma_a-\gamma_0\omega_a)\varphi_{\omega_a}=i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \qquad ((62),\ 79)$$

$$(\gamma_0+\gamma_3)\varphi_{\omega_1} = i\lambda(\bar\varphi\varphi)^{1/2k}\varphi; \qquad ((63),\ 80)$$

$$\gamma_a\varphi_{\omega_a} = i\lambda(\bar\varphi\varphi)^{1/2k}\varphi; \qquad ((64),\ 81)$$

$$\gamma_0\varphi_{\omega_1} = i\lambda(\bar\varphi\varphi)^{1/2k}\varphi, \qquad ((65),\ 82)$$

(по a нет суммирования).

Если удается проинтегрировать одно из уравнений (66)–(82), то подстановка полученного результата в соответствующий анзац (35)–(49) дает точное решение нелинейного уравнения Дирака (26). Замечательным является то обстоятельство, что решения некоторых нелинейных систем ОДУ (66)–(82) удается построить в явном виде. Это связано с широкой группой инвариантности, допускаемой исходным ДУЧП (26).

Точные решения нелинейного уравнения Дирака. В силу того что системы (66)–(82) являются нелинейными, стандартные методы интегрирования ОДУ к ним неприменимы. Поэтому в каждом конкретном случае приходится использовать специфические приемы, мы приведем один из наиболее характерных.

"Линеаризуем" систему (69) следующим образом:

$$\begin{aligned}&[\gamma_3+\beta(\gamma_0-\gamma_2)]\frac{d\varphi}{d\omega_1} = i\lambda(f(\omega_1))^{1/2k}\varphi,\\ &\bar\varphi\varphi = f(\omega_1).\end{aligned} \tag{83}$$

Первое уравнение без труда интегрируется, его общее решение имеет вид

$$\varphi(\omega_1) = \exp\left\{-i\lambda\int^{\omega_1}(f(z))^{1/2k}dz[\gamma_3+\beta(\gamma_0-\gamma_2)]\right\}\chi,$$

где χ — произвольный постоянный спинор.

Используя второе условие из (83), получаем

$$f(\omega_1) = \bar\varphi\varphi = \bar\chi\chi,$$

следовательно, общее решение (69) имеет следующий вид:

$$\varphi = \exp\left\{-i\lambda(\bar\chi\chi)^{1/2k}[\gamma_3+\beta(\gamma_0-\gamma_2)]\omega_1\right\}\chi. \tag{84}$$

Совершенно аналогично получаем общее решение системы ОДУ (70):

$$\varphi = \exp\left\{-\frac{i\lambda}{2}(\bar\chi\chi)^{1/2k}\gamma_1\omega_2\right\}\chi. \tag{85}$$

Подстановка (84), (85) в формулу (37) дает точные решения нелинейного уравнения Дирака (26):

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_1(\gamma_0-\gamma_2)(x_0-x_2)\right\}\times\\ &\times\exp\left\{-i\lambda[\gamma_3+\beta(\gamma_0-\gamma_2)](\bar\chi\chi)^{1/2k}(x_3+\beta(x_0-x_2))\right\}\chi;\end{aligned} \tag{86}$$

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_1(\gamma_0-\gamma_2)(x_0-x_2)\right\}\times\\ &\times\exp\left\{-\frac{i\lambda}{2}(\bar\chi\chi)^{1/2k}\gamma_1(2x_1+\beta(x_0-x_2)^2)\right\}\chi.\end{aligned} \tag{87}$$

Обратимся теперь к системе (68). Умножив ее слева на матрицу $(\gamma_0 - \gamma_2)$ и воспользовавшись тождеством $(\gamma_0 - \gamma_2)^2 = 0$, получим условие совместности этой системы

$$(\gamma_0 - \gamma_2)\varphi = 0.$$

Несложно показать, что если φ удовлетворяет этому условию, то $\bar{\varphi}\varphi = 0$. Следовательно, $\bar{\psi}\psi = \bar{\varphi}\varphi = 0$, т.е. множитель $(\bar{\psi}\psi)^{1/2k}$, определяющий нелинейный характер ДУЧП (26), равен нулю. Такие решения мы не рассматриваем.

Кроме указанных случаев удается проинтегрировать системы ОДУ (71), (72) (при $(k-1/2)a = 0$), (76)–(78), (80)–(82). При этом системы (71), (80) приводят к решениям с $\bar{\psi}\psi = 0$.

Подстановка полученных результатов в формулы (35)–(49) дает следующие классы точных решений нелинейного уравнения Дирака:

$$\begin{gathered} k = \frac{1}{2}, \quad \psi(x) = (x_2^2 + x_3^2)^{-1/4} \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}\right\} \times \\ \times \exp\left\{-i\lambda\frac{\bar{\chi}\chi}{2(1+a^2)}(\gamma_3 + a\gamma_2)\left[\ln(x_2^2 + x_3^2) + 2a \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}\right]\right\}\chi; \end{gathered} \tag{88}$$

$$\begin{gathered} k \neq \frac{1}{2}, \quad \psi(x) = (x_2^2 + x_3^2)^{-1/4} \exp\left\{-\frac{1}{4}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}\right\} \times \\ \times \exp\left\{\frac{2i\lambda k}{1-2k}(x_2^2 + x_3^2)^{(2k-1)/4k}\gamma_3(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}\right\}\chi; \end{gathered} \tag{89}$$

$$\begin{gathered} k \neq 0, \quad \psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1 \ln(x_0 + x_1)\right\} \times \\ \times \exp\left\{\left[\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1)\gamma_2 - i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}(\gamma_0 + \gamma_1 - \gamma_2)\right](\ln(x_0 + x_1) - x_2)\right\}\chi; \end{gathered} \tag{90}$$

$$\begin{gathered} \psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1 \ln(x_0 + x_1)\right\} \times \\ \times \exp\left\{-i\gamma_3\left[\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k} + \frac{i}{2}(\gamma_0 + \gamma_1)\right]x_3\right\}\chi; \end{gathered} \tag{91}$$

$$\psi(x) = \exp\left\{-i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}\gamma_1 x_1\right\}\chi; \tag{92}$$

$$\psi(x) = \exp\left\{i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}\gamma_0 x_0\right\}\chi. \tag{93}$$

Построенные решения обладают тем недостатком, что переменные x_μ входят в них несимметрично, в то время как в нелинейном уравнении Дирака (26) все переменные равноправны. На физическом языке это означает, что система (26) решается в фиксированной системе отсчета. Чтобы получить решения (точнее, семейства решений), не зависящие от системы отсчета, необходимо “размножить” (86)–(93) с помощью преобразований из расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$ (о размножении решений см., например, [13, 25]).

Мы осуществим процедуру размножения решения (87), в остальных случаях рассуждения аналогичны. Формула размножения решений с помощью преобразований, генерируемых оператором J_{01}, имеет вид

$$\psi_2(x) = \exp\left\{-\frac{\theta}{2}\gamma_0\gamma_1\right\}\psi_1(x'), \quad \theta = \mathrm{const},$$
$$x_0' = x_0 \operatorname{ch}\theta + x_1 \operatorname{sh}\theta, \quad x_1' = x_1 \operatorname{ch}\theta + x_0 \operatorname{sh}\theta, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3.$$

Применяя эту формулу к (87), получаем:

$$\begin{aligned}\psi_2(x) &= \exp\left\{-\frac{\theta}{2}\gamma_0\gamma_1\right\}\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_1(\gamma_0-\gamma_2)(x_0\operatorname{ch}\theta + x_1\operatorname{sh}\theta - x_2)\right\}\times\\ &\times\exp\left\{-\frac{i\lambda}{2}(\bar\chi\chi)^{1/2k}\gamma_1(2x_1\operatorname{ch}\theta + 2x_0\operatorname{sh}\theta + (x_0\operatorname{ch}\theta + x_1\operatorname{sh}\theta - x_2)^2)\right\}\chi.\end{aligned} \tag{94}$$

Перепишем (94) в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned}\psi_2(x) &= \exp\left\{-\frac{\theta}{2}\gamma_0\gamma_1\right\}\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_1(\gamma_0-\gamma_2)(x_0\operatorname{ch}\theta + x_1\operatorname{sh}\theta - x_2)\right\}\times\\ &\times\exp\left\{\frac{\theta}{2}\gamma_0\gamma_1\right\}\exp\left\{-\frac{\theta}{2}\gamma_0\gamma_1\right\}\exp\Big\{-\frac{i\lambda}{2}(\bar\chi\chi)^{1/2k}\gamma_1[2x_1\operatorname{ch}\theta + 2x_0\operatorname{sh}\theta +\\ &+(x_0\operatorname{ch}\theta + x_1\operatorname{sh}\theta - x_2)^2]\Big\}\exp\left\{\frac{\theta}{2}\gamma_0\gamma_1\right\}\exp\left\{-\frac{\theta}{2}\gamma_0\gamma_1\right\}\chi.\end{aligned}$$

Принимая во внимание тождества

$$\exp\left\{-\frac{\theta}{2}\gamma_0\gamma_1\right\}\gamma_\alpha\exp\left\{\frac{\theta}{2}\gamma_0\gamma_1\right\} = \begin{cases}\gamma_0\operatorname{ch}\theta + \gamma_1\operatorname{sh}\theta, & \alpha = 0,\\ \gamma_2\operatorname{ch}\theta + \gamma_0\operatorname{sh}\theta, & \alpha = 1,\\ \gamma_\alpha, & \alpha = 2, 3,\end{cases}$$

окончательно получаем:

$$\begin{aligned}\psi_2(x) &= \exp\Big\{\frac{1}{2}(\gamma_1\operatorname{ch}\theta + \gamma_0\operatorname{sh}\theta)(\gamma_0\operatorname{ch}\theta + \gamma_1\operatorname{sh}\theta - \gamma_2)\times\\ &\times(x_0\operatorname{ch}\theta + x_1\operatorname{sh}\theta - x_2)\Big\}\exp\Big\{-\frac{i\lambda}{2}(\bar\chi\chi)^{1/2k}(\gamma_1\operatorname{ch}\theta + \gamma_0\operatorname{sh}\theta)\times\\ &\times[2x_1\operatorname{ch}\theta + 2x_0\operatorname{sh}\theta + (x_0\operatorname{ch}\theta + x_1\operatorname{sh}\theta - x_2)^2]\Big\}\tilde\chi,\\ \tilde\chi &= \exp\left\{-\frac{\theta}{2}\gamma_0\gamma_1\right\}\chi.\end{aligned}$$

Используя остальные преобразования из группы Лоренца $O(1,3) \subset \tilde P(1,3)$, получаем следующее семейство решений:

$$\begin{aligned}\psi_3(x) &= \exp\left\{\frac{1}{2}(\gamma\cdot b)((\gamma\cdot a) + (\gamma\cdot d))(a\cdot x + d\cdot x)\right\}\times\\ &\times\exp\left\{-\frac{i\lambda}{2}(\bar\chi\chi)^{1/2k}(\gamma\cdot b)[2b\cdot x + (a\cdot x + d\cdot x)^2]\right\}\chi.\end{aligned} \tag{95}$$

Здесь и в дальнейшем a_μ, b_μ, c_μ, d_μ — произвольные действительные параметры, удовлетворяющие соотношениям вида

$$\begin{aligned}&-a\cdot a = b\cdot b = c\cdot c = d\cdot d = -1,\\ &a\cdot b = a\cdot c = a\cdot d = b\cdot c = b\cdot d = c\cdot d = 0.\end{aligned} \tag{96}$$

Размножая семейство (95) с помощью однопараметрической группы масштабных преобразований и группы сдвигов, окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
&\psi_4(x) = \exp\left\{\frac{\theta}{2}(\gamma\cdot b)(\gamma\cdot a+\gamma\cdot d)(a\cdot z+d\cdot z)\right\}\times\\
&\times\exp\left\{-\frac{i\lambda}{2}(\bar\chi\chi)^{1/2k}(\gamma\cdot b)[2b\cdot z+\theta(a\cdot z+d\cdot z)^2]\right\}\chi,\\
&z_\mu = x_\mu+\theta_\mu,\quad \mu=\overline{0,3},\quad \theta_\mu,\theta=\text{const}.
\end{aligned}\tag{97}$$

В решение (97) все переменные входят на равных правах, и вид его не изменяется при переходе к другой инерциальной системе отсчета (иначе говоря, семейство решений (97) инвариантно относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$).

Размножая аналогичным образом решения (86), (88)–(93), получаем следующие семейства точных решений нелинейного уравнения Дирака (26):

$$\begin{aligned}
&\psi(x) = \exp\left\{\frac{\theta}{2}(\gamma\cdot b)(\gamma\cdot a+\gamma\cdot d)(a\cdot z+d\cdot z)\right\}\times\\
&\times\exp\left\{-i\lambda[\gamma\cdot c+\beta(\gamma\cdot a+\gamma\cdot d)](\bar\chi\chi)^{1/2k}(c\cdot z+\beta(a\cdot z+d\cdot z))\right\}\chi;
\end{aligned}\tag{98}$$

$$\psi(x) = \exp\left\{i\lambda(\bar\chi\chi)^{1/2k}(\gamma\cdot a)(a\cdot z)\right\}\chi;\tag{99}$$

$$\psi(x) = \exp\left\{-i\lambda(\bar\chi\chi)^{1/2k}(\gamma\cdot b)(b\cdot z)\right\}\chi;\tag{100}$$

$$\begin{aligned}
&\psi(x) = \exp\Big\{\frac{1}{2}(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b)\ln\frac{1}{\theta}(a\cdot z+b\cdot z)\Big\}\exp\Big\{\Big[\frac{1}{2\theta}(\gamma\cdot a+\gamma\cdot b)(\gamma\cdot c)-\\
&-i\lambda(\bar\chi\chi)^{1/2k}(\gamma\cdot a+\gamma\cdot b-\gamma\cdot c)\Big](\theta\ln(a\cdot z+b\cdot z)-c\cdot z)\Big\}\chi;
\end{aligned}\tag{101}$$

$$\begin{aligned}
&\psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b)\ln\frac{1}{\theta}(a\cdot z+b\cdot z)\right\}\times\\
&\times\exp\left\{-i(\gamma\cdot c)\left[\lambda(\bar\chi\chi)^{1/2k}+\frac{i}{2\theta}(\gamma\cdot a+\gamma\cdot b)\right]c\cdot z\right\}\chi;
\end{aligned}\tag{102}$$

при $k=\dfrac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
&\psi(x) = [(b\cdot z)^2+(c\cdot z)^2]^{-1/4}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma\cdot b)(\gamma\cdot c)\operatorname{arctg}\frac{b\cdot z}{c\cdot z}\right\}\times\\
&\times\exp\left\{-\frac{i\lambda(\bar\chi\chi)}{2(1+\alpha^2)}(\alpha(\gamma\cdot b)+\gamma\cdot c)\left[\ln((b\cdot z)^2+(c\cdot z)^2)+2\alpha\operatorname{arctg}\frac{b\cdot z}{c\cdot z}\right]\right\}\chi;
\end{aligned}\tag{103}$$

при $k\neq\dfrac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
&\psi(x) = [(b\cdot z)^2+(c\cdot z)^2]^{-1/4}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma\cdot b)(\gamma\cdot c)\operatorname{arctg}\frac{b\cdot z}{c\cdot z}\right\}\times\\
&\times\exp\left\{\frac{2i\lambda k}{1-2k}((b\cdot z)^2+(c\cdot z)^2)^{(2k-1)/4k}(\gamma\cdot c)\right\}\chi.
\end{aligned}\tag{104}$$

В формулах (98)–(104) $z_\mu = x_\mu + \theta_\mu$, θ, α, β, θ_μ — произвольные постоянные, χ — произвольный постоянный спинор.

Кроме прямой редукции систем ДУЧП (51)–(62) существуют и другие возможности построения точных решений. В частности, если в (53) положить $\varphi = \varphi(\omega_1, \omega_2)$, мы получим двумерное уравнение Дирака

$$[\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2)]\varphi_{\omega_1} + 2\gamma_1\varphi_{\omega_2} = i\lambda(\bar\varphi\varphi)^{1/2k}\varphi. \qquad (105)$$

Удается найти частные решения системы (105), которые, будучи подставленными в формулу (37), дают новые классы решений уравнения (26):

$$\begin{gathered}
\text{при } k = \frac{1}{2},\\
\psi(x) = \exp\Big\{\frac{1}{2}(\gamma\cdot c)(\gamma\cdot a + \gamma\cdot d)(a\cdot z + d\cdot z)\Big\}\times\\
\times\Big[(\gamma\cdot b + \beta(\gamma\cdot a + \gamma\cdot d))(b\cdot z + \beta(a\cdot z + d\cdot z)) +\\
+\frac{1}{2}\gamma\cdot c[2c\cdot z + (a\cdot z + d\cdot z)^2]\Big]\times\\
\times\,\omega^{-1}\exp\Big\{-\frac{i\lambda(\bar\chi\chi)}{(\beta_1^2+\beta_2^2)\omega}(\beta_1(\gamma\cdot b + \beta(\gamma\cdot a + \gamma\cdot d)) +\\
+\beta_2(\gamma\cdot c))\Big[\beta_1(b\cdot z + \beta(a\cdot z + d\cdot z)) + \frac{1}{2}\beta_2(2c\cdot z + (a\cdot z + d\cdot z)^2)\Big]\Big\}\chi;
\end{gathered} \qquad (106)$$

$$\begin{gathered}
\text{при } k < 0,\\
\psi(x) = \exp\Big\{\frac{1}{2}(\gamma\cdot c)(\gamma\cdot a + \gamma\cdot d)(a\cdot z + d\cdot z)\Big\}\times\\
\times\Big\{\Big[(\gamma\cdot b + \beta(\gamma\cdot a + \gamma\cdot d))(b\cdot z + \beta(a\cdot z + d\cdot z)) +\\
+\frac{1}{2}\gamma\cdot c(2c\cdot z + (a\cdot z + d\cdot z)^2)\Big]f(\omega) + ig(\omega)\Big\}\chi.
\end{gathered} \qquad (107)$$

В (106), (107) β, β_1, β_2 — произвольные действительные параметры; χ — произвольный постоянный спинор; $z_\mu = x_\mu + \theta_\mu$, $\mu = \overline{0,3}$;

$$\omega = (b\cdot z + \beta(a\cdot z + d\cdot z))^2 + \frac{1}{4}(2c\cdot z + (a\cdot z + (a\cdot z + d\cdot z)^2)^2;$$

$$g(\omega) = \pm\left(\frac{1+|k|}{|k|}\right)^{1/2}\omega^{-1/2}f(\omega) = \mp\left(\frac{1+|k|}{|k|}\right)^{1/2}\left\{\mp\frac{(k^2+|k|)^{1/2}}{2\lambda(\bar\chi\chi)^{1/2k}}\right\}^k\omega^{-k/2}.$$

В заключение этого раздела остановимся на случае, когда в (26) $k = 3/2$. Из теоремы 3 следует, что уравнение (26) при таком выборе нелинейности инвариантно относительно конформной группы $C(1,3)$. Этот факт может быть использован для получения новых решений. Формула размножения решений с помощью группы специальных конформных преобразований (11) имеет вид [13, 25]:

$$\begin{gathered}
\psi_2(x) = \sigma^{-2}(x)[1 - (\gamma\cdot x)(\gamma\cdot\theta)]\psi_1(x');\\
x'_\mu = (x_\mu - \theta_\mu x\cdot x)\sigma^{-1}(x);\\
\sigma(x) = 1 - 2\theta\cdot x + (\theta\cdot\theta)(x\cdot x), \quad \theta_\mu = \text{const}, \quad \mu = \overline{0,3}.
\end{gathered}$$

Используя в качества $\psi_1(x)$ решения (98)–(102), (104) при $k = 3/2$ получаем семейства точных решений нелинейного уравнения Дирака–Гюрши (6), инвариантного относительно конформной группы $C(1,3)$ (мы опускаем соответствующие формулы).

Симметрия редуцированных уравнений

Поскольку используемый алгоритм построения точных решений требует знания симметрии уравнения, то следующим этапом после редукции нелинейного уравнения Дирака (26) к системам ДУЧП (51)–(65) должно быть исследование симметрийных свойств последних. Но уравнения (51)–(65) имеют весьма сложный вид, поэтому непосредственное применение алгоритма Ли для нахождения максимальной симметрии затруднительно (перспективным является использование для этих целей ЭВМ [40]). Следовательно, возникает задача поиска более эффективных методов исследования теоретико-алгебраических свойств систем редуцированных ДУЧП.

Алгебры инвариантности уравнений (51)–(65). В основе нашего подхода к исследованию симметрийных свойств уравнений (51)–(65) лежит следующее утверждение.

Пусть G — группа Ли преобразований, H — однопараметрическая подгруппа G, являющаяся нормальным делителем. Кроме того, задано ДУЧП с группой инвариантности G.

Теорема 5. *Уравнение, полученное из исходного ДУЧП редукцией по H-инвариантным решениям, инвариантно относительно группы G/H (наклонная черта обозначает факторизацию).*

Доказательство этого утверждения можно найти в [33].

Мы будем использовать эквивалентную формулировку этой теоремы в терминах алгебр Ли (это значительно упрощает все расчеты).

Если задано ДУЧП с алгеброй симметрии AG и одномерная подалгебра $Q \in AG$, являющаяся идеалом в AG, то уравнение, полученное из исходного редукцией по инвариантным решениям, инвариантно относительно алгебры Ли AG/Q.

В нашем случае в качестве одномерных подалгебр алгебры $AG = AP(1,3)$ выступают операторы (30). Но непосредственное применение теоремы невозможно, так как эти подалгебры, вообще говоря, не являются идеалами в $A\tilde{P}(1,3)$.

Поэтому возникает промежуточная задача нахождения максимальных подалгебр $A_1, \dots, A_{12}$ алгебры Ли $A\tilde{P}(1,3)$, для которых подалгебры (30) будут идеалами.

Из теории алгебр Ли известно (см., например, [33]), что одномерная алгебра $\{Q\}$ является идеалом в алгебре Ли $\langle \Sigma_1, \dots, \Sigma_s \rangle$, если и только если

$$[Q, \Sigma_i] = \lambda_i Q, \quad \lambda_i = \text{const}, \quad i = \overline{1, s},$$

где $[Q_1, Q_2]$ — коммутатор.

Следовательно, оператор $\theta_i^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + \theta_i^{00} D + \theta_i^{\mu} P_\mu$ принадлежит алгебре A_i, если и только если

$$[\theta_i^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + \theta_i^{00} D + \theta_i^{\mu} P_\mu, Q_i] = \lambda_i Q_i, \quad i = \overline{1, 12}. \tag{108}$$

Здесь $\theta_i^{\mu\nu}$, θ_i^{00}, θ_i^{μ} — константы; Q_i — операторы (30), по i нет суммирования.

Вычисляя коммутаторы в левой части равенства (108) и приравнивая к нулю коэффициенты при линейно независимых операторах $J_{\mu\nu}$, D, P_μ, получаем систему алгебраических уравнений на коэффициенты $\theta_i^{\mu\nu}$, θ_i^{00}, θ_i^μ. Решая эти уравнения, находим явный вид базисных операторов алгебр $A_1, \ldots, A_{12}$.

Следующим шагом является вычисление фактор-алгебр $\{A_i/Q_i,\ i=\overline{1,12}\}$, которые, согласно теореме 5, генерируют группы инвариантности редуцированных ДУЧП (51)–(65).

Реализуем эту схему для алгебры $\langle J_{01}+J_{12}-aD\rangle$. Подставляя оператор $Q_1 = J_{01}+J_{12}-aD$ в (108), получаем следующие условия на параметры $\theta_1^{\mu\nu}$, θ_1^{00}, θ_1^μ:

$$\text{при } a\neq 0,\quad \theta_1^{01}=\theta_1^{12},\quad \theta_1^{03}=\theta_1^{32},\quad \theta_1^{13}=\theta_1^{02}=0,\quad \theta_1^0=\theta_1^1=\theta_1^2=\theta_1^3=0;$$
$$\text{при } a=0,\quad \theta_1^{01}=\theta_1^{12},\quad \theta_1^{03}=\theta_1^{32},\quad \theta_1^0=-\theta_1^2,\quad \theta_1^{13}=0,\quad \theta_1^1=0.$$

Следовательно, базис алгебры Ли A_1 составляют операторы:

$$a\neq 0,\quad J_{01}+J_{12},\quad J_{03}+J_{23},\quad D;$$
$$a=0,\quad J_{03}+J_{32},\quad J_{02},\quad P_0-P_2,\quad P_3,\quad D.$$

Фактор-алгебра $\tilde{A}_1 = A_1/Q_1$ порождается такими операторами:

$$\begin{aligned}&a\neq 0,\quad J_{10}+J_{12},\quad J_{03}+J_{32};\\ &a=0,\quad J_{03}+J_{32},\quad J_{02},\quad P_0-P_2,\quad P_3,\quad D.\end{aligned}\tag{109}$$

Чтобы получить окончательный вид алгебр симметрии ДУЧП (51), (52), необходимо переписать операторы (108) в новых переменных ω_1, ω_2, ω_3, φ (т.е. сделать в (108) замену переменных (35), (36)), в результате имеем:

$$\begin{aligned}&\text{при }\ a\neq 0,\quad \tilde{A}_{1.1} = \Big\langle a\partial_{\omega_3}+\frac{1}{2}\gamma_1(\gamma_0-\gamma_2);\\ &\qquad 2(\omega_1\omega_2-\omega_2)\partial_{\omega_1}+\omega_2^2\partial_{\omega_2}+\frac{1}{2}\gamma_3(\gamma_2-\gamma_0)\Big\rangle;\\ &\text{при }\ a=0,\quad \tilde{A}_{1.2} = \Big\langle \omega_1\partial_{\omega_2}+2\omega_1\omega_2\partial_{\omega_3}+\frac{1}{2}\gamma_1(\gamma_0-\gamma_2);\\ &\qquad \omega_1\partial_{\omega_1}+\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_2;\ \omega_1\partial_{\omega_3};\ \partial_{\omega_2};\ \omega_1\partial_{\omega_1}+\omega_2\partial_{\omega_2}+2\omega_3\partial_{\omega_3}+k\Big\rangle,\end{aligned}\tag{110}$$

где $\partial_{\omega_a}=\frac{\partial}{\partial\omega_a}$, $a=\overline{1,3}$.

Используя аналогичные рассуждения, получаем алгебры симметрии ДУЧП (53)–(65):

$$\begin{aligned}\tilde{A}_2 = \Big\langle &-2\omega_1\partial_{\omega_1}+2(1-\beta^2-\omega_2)\partial_{\omega_2}-3(\omega_3+\beta\omega_1)\partial_{\omega_3}+\\ &+\frac{1}{2}[\gamma_0\gamma_2+\beta\gamma_3(\gamma_2-\gamma_0)];\ \partial_{\omega_1};\ \partial_{\omega_3}\Big\rangle;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{A}_3 = \Big\langle &2\omega_2\partial_{\omega_2}+\omega_3\partial_{\omega_3}+k-\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_2;\\ &2\omega_3\partial_{\omega_2}+(\omega_1^2-\beta^2)\partial_{\omega_3}+\frac{1}{2\beta}(\gamma_2-\gamma_0)(\omega_1\gamma_1-\beta\gamma_3);\\ &\omega_1\partial_{\omega_2}+\beta\omega_1\partial_{\omega_3}+\frac{1}{2}\gamma_1(\gamma_0-\gamma_2)\Big\rangle;\end{aligned}$$

$$\tilde{A}_4 = \begin{cases} \langle Q_1;\ Q_2\rangle, & a \neq 0, \\ \langle Q_1;\ Q_2;\ Q_3;\ Q_4\rangle, & a = 0; \end{cases}$$

при $a \neq 0$, $Q_1 = \partial_{\omega_1}$, $Q_2 = (\omega_1^2 - 1)\partial_{\omega_1} + (\omega_1 + \omega_1^{-1})\omega_3\partial_{\omega_3} + \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1$;

при $a = 0$, $Q_1 = \partial_{\omega_2}$, $Q_2 = \omega_1^{-1/2}\omega_3^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\omega_2\right\}(\omega_1\partial_{\omega_1} + \omega_3\partial_{\omega_3})$,

$Q_3 = \omega_1^{1/2}\omega_3^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\omega_2\right\}(-\omega_1\partial_{\omega_1} + \omega_3\partial_{\omega_3})$,

$Q_4 = (\omega_1^2 - 1)\partial_{\omega_1} + (\omega_1 + \omega_1^{-1})\omega_3\partial_{\omega_3} + \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1$;

$$\tilde{A}_{5.1} = \left\langle \partial_{\omega_3};\ -2\omega_1\partial_{\omega_1} + \frac{1}{2(a+1)}\gamma_0\gamma_1 \right\rangle;$$

$$\tilde{A}_{5.2} = \left\langle \omega_1\partial_{\omega_1} - \frac{1}{4}\gamma_0\gamma_1;\ \partial_{\omega_1};\ \partial_{\omega_1} + \omega_2\omega_1^{-1}\partial_{\omega_2} - \frac{k}{2}\omega_1^{-1} \right\rangle;$$

$$\tilde{A}_{5.3} = \begin{cases} \langle Q_1;\ Q_2\rangle, & b \neq 0, \\ \langle Q_1;\ Q_2;\ Q_3;\ Q_4\rangle, & b = 0; \end{cases}$$

при $b \neq 0$, $Q_1 = \partial_{\omega_3}$, $Q_2 = 2\omega_1\partial_{\omega_1} + 2\omega_2\partial_{\omega_2} + k + \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1$;

при $b = 0$, $Q_1 = \partial_{\omega_3}$, $Q_2 = 2\omega_1\partial_{\omega_1} + 2\omega_2\partial_{\omega_2} + k + \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1$,

$Q_3 = \omega_2^{-1/2}\cos\omega_3\left(2\omega_2\partial_{\omega_2} - \operatorname{tg}\omega_3\partial_{\omega_3} + \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3\operatorname{tg}\omega_3\right)$,

$Q_4 = \omega_2^{-1/2}\sin\omega_3\left(2\omega_2\partial_{\omega_2} + \operatorname{ctg}\omega_3\partial_{\omega_3} - \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3\operatorname{ctg}\omega_3\right)$;

$$\tilde{A}_6 = \langle \omega_1\partial_{\omega_1};\ \partial_{\omega_3}\rangle;$$

$$\tilde{A}_7 = \langle \partial_{\omega_2};\ \partial_{\omega_3}\rangle;$$

$$\tilde{A}_8 = \begin{cases} \langle Q_1;\ Q_2;\ Q_3\rangle, & \alpha_1 = \pm\alpha_2, \\ \langle Q_1;\ Q_2\rangle, & \alpha_1 \neq \pm\alpha_2; \end{cases}$$

при $\alpha_1 = \pm\alpha_2$, $Q_1 = \partial_{\omega_2}$, $Q_2 = \mp 2\omega_1\partial_{\omega_1} -$

$- (\beta_2 \pm \beta_1)\alpha_2^{-1}\omega_3\partial_{\omega_2} \mp 2\omega_3\partial_{\omega_3} \mp k + \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1$, $Q_3 = \beta_1\partial_{\omega_2} + \alpha_2\partial_{\omega_3}$;

при $\alpha_1 \neq \pm\alpha_2$, $Q_1 = \beta_1\partial_{\omega_2} + \alpha_2\partial_{\omega_3}$, $Q_2 = \beta_2\partial_{\omega_1} + \alpha_1\partial_{\omega_3}$;

$$\tilde{A}_9 = \Big\langle \omega_a\omega_b\partial_{\omega_b} - \partial_{\omega_a} - k\omega_a + \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1;$$
$$\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\left(-\omega_b\partial_{\omega_c} + \omega_c\partial_{\omega_b} + \frac{1}{2}\gamma_b\gamma_c\right)\Big\rangle, \quad a, b, c = \overline{1,3};$$

$$\tilde{A}_{10} = \Big\langle \omega_1\partial_{\omega_2} + \frac{1}{2}\gamma_2(\gamma_0 + \gamma_3);\ \omega_1\partial_{\omega_3} + \frac{1}{2}\gamma_1(\gamma_0 + \gamma_3);\ \omega_1\partial_{\omega_1} - \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3;$$
$$\omega_2\partial_{\omega_3} - \omega_3\partial_{\omega_3} + \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3;\ \omega_a\partial_{\omega_a} + k;\ \partial_{\omega_1};\ \partial_{\omega_2};\ \partial_{\omega_3}\Big\rangle;$$

$$\tilde{A}_{11} = \left\langle \varepsilon_{abc}\left(-\omega_b\partial_{\omega_c} + \omega_c\partial_{\omega_b} + \frac{1}{2}\gamma_b\gamma_c\right);\ \omega_a\partial_{\omega_a} + k;\ \partial_{\omega_1};\ \partial_{\omega_2};\ \partial_{\omega_3}\right\rangle;$$

$$\tilde{A}_{12} = \Big\langle \omega_1\partial_{\omega_2} + \omega_2\partial_{\omega_1} - \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1;\ \omega_1\partial_{\omega_2} + \omega_3\partial_{\omega_1} - \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3;$$
$$-\omega_2\partial_{\omega_3} + \omega_3\partial_{\omega_2} + \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2;\ \omega_a\partial_{\omega_a} + k;\ \partial_{\omega_1};\ \partial_{\omega_2};\ \partial_{\omega_3}\Big\rangle.$$

Здесь $\tilde{A}_i$ — алгебра симметрии 1-го уравнения из (51)–(65), $\langle Q_1, \ldots, Q_s\rangle$ — линейная оболочка операторов $Q_1, \ldots, Q_s$.

В том, что $\tilde{A}_{1.1}$—$\tilde{A}_{12}$ действительно являются алгебрами симметрии редуцированных уравнений (51)–(65), можно убедиться непосредственной проверкой, используя метод Ли [33, 34].

Отметим, что описанный метод исследования симметрии редуцированных уравнений может быть реализован на ЭВМ. Кроме того, он может служить источником для получения новых представлений классических групп Ли. В частности, легко видеть, что

$$\tilde{A}_9 = AO(1,3),$$

где $AO(1,3)$ — алгебра Ли группы Лоренца $O(1,3)$.

Таким образом, на решениях ДУЧП (62) реализуется представление группы Лоренца $O(1,3)$, принципиально отличное от представления группы Лоренца, которое реализуется на решениях исходного уравнения (26). Используя этот факт, можно получить следующее нелинейное представление алгебры $AO(1,3)$:

$$P_\mu = ig_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad J_{ab} = x_aP_b - x_bP_a + iu^b\frac{\partial}{\partial u^a} - iu^a\frac{\partial}{\partial u^b},$$
$$J_{0a} = x_0P_a - x_aP_0 + iu_au_b\frac{\partial}{\partial u^b} - i\frac{\partial}{\partial u^a}, \quad a, b = \overline{1,3}.$$

Сделаем одно важное замечание. Теорема 5 не гарантирует того, что построенная группа будет максимальной группой симметрии редуцированного уравнения. В ряде случаев максимальная группа инвариантности значительно шире, чем это следует из теоремы 5.

Теорема 6. *Максимальная группа инвариантности ДУЧП (63) является бесконечнопараметрической, ее генераторы имеют вид:*

$$\begin{aligned}
&\text{при } k = 1, \quad Q_1 = \phi_1(\omega_1)\partial_{\omega_2} + \phi_2(\omega_1)\partial_{\omega_2} + \frac{1}{2}[\dot{\phi}_1(\omega_1)\gamma_1 + \dot{\phi}_2(\omega_1)\gamma_2](\gamma_0 + \gamma_3),\\
&Q_2 = -\omega_2\partial_{\omega_3} + \omega_3\partial_{\omega_2} + \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2,\\
&Q_3 = \phi_0(\omega_1)\partial_{\omega_1} + \dot{\phi}_0(\omega_1)(\omega_2\partial_{\omega_2} + \omega_3\partial_{\omega_3}) + \dot{\phi}_0(\omega_1) +\\
&\qquad + \frac{1}{2}\ddot{\phi}_0(\omega_1)(\gamma_1\omega_2 + \gamma_2\omega_3)(\gamma_0 + \gamma_3),\\
&Q_4 = \phi_3(\omega_1)\gamma_4(\gamma_0 + \gamma_3);
\end{aligned} \tag{111}$$

$$\begin{aligned}
&\text{при } k \neq 1, \quad Q_1 = \partial_{\omega_1},\ Q_2 = -\omega_2\partial_{\omega_3} + \omega_3\partial_{\omega_2} + \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2,\\
&Q_3 = \phi_1(\omega_1)\partial_{\omega_2} + \phi_2(\omega_1)\partial_{\omega_3} + \frac{1}{2}[\dot{\phi}_1(\omega)\gamma_1 + \dot{\phi}_2(\omega_1)\gamma_2](\gamma_0 + \gamma_3),\\
&Q_4 = \omega_a\partial_{\omega_a} + k,\ Q_5 = \phi_3(\omega_1)\gamma_4(\gamma_0 + \gamma_3),
\end{aligned} \tag{112}$$

где $\phi_0(\omega_1), \dots, \phi_3(\omega_1)$ — произвольные гладкие функции, точка обозначает дифференцирование по ω_1.

Доказательство, проводимое с помощью инфинитезимального метода Ли, очень громоздко, мы его опускаем.

Следствие. *Пусть $\phi_1 = \phi_1(\omega)$ — рещение ДУЧП (63), тогда спинор $\phi_2 = \phi_2(\omega)$, построенный по формуле*

$$\begin{aligned}\phi_2(\omega) = \phi_0^{-1} \exp\Big\{ &\phi_3(\omega_1)\gamma_4(\gamma_0+\gamma_3) - \frac{1}{2}\dot{\phi}_i(\gamma_1)\gamma_i(\gamma_0+\gamma_3) - \\ &- \frac{1}{2}\dot{\phi}_0(\omega_1)\phi_0^{-1}(\omega_1)[\gamma_1(\omega_2+\phi_1(\omega_1)) + \gamma_2(\omega_3+\phi_2(\omega_1))](\gamma_0+\gamma_3)\Big\} \times \\ &\times \phi_1\left(\int \phi_0(\omega_1)d\omega_1, \frac{\omega_2+\phi_1(\omega_1)}{\phi_0(\omega_1)}, \frac{\omega_3+\phi_2(\omega_1)}{\phi_0(\omega_1)}\right),\end{aligned} \tag{113}$$

также будет решением при $k=1$ (если $k \neq 1$, следует положить $\phi_0(\omega_1) = 1$).

В справедливости этого утверждения можно убедиться прямой проверкой.

Используя формулу (113), можно получать семейства решений нелинейного уравнения Дирака, зависящие от трех (при $k=1$ — от четырех) произвольных функций.

Выберем, например, в качестве $\phi_1(\omega)$ следующее частное решение уравнения (63):

$$\phi_1(\omega) = \exp\left\{-i\lambda\gamma_1\omega_2(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}\right\}\chi. \tag{114}$$

Подставляя (114) в формулу (113) и размножая найденное решение преобразованиями из группы $P(1,3)$, получаем следующие семейства точных решений нелинейного уравнения Дирака (26):

$$\begin{aligned}&\text{при } k=1, \quad \psi(x) = \phi_0^{-1}\exp\Big\{\phi_3\gamma_4(\gamma\cdot a+\gamma\cdot d) - \frac{1}{2}(\dot{\phi}_1\gamma\cdot b + \dot{\phi}_2\gamma\cdot c)\times \\ &\times(\gamma\cdot a+\gamma\cdot d) - \frac{1}{2}\dot{\phi}_0\phi_0^{-1}[(\gamma\cdot b)(b\cdot y+\phi_1) + (\gamma\cdot c)(c\cdot y+\phi_2)]\times \\ &\times(\gamma\cdot a+\gamma\cdot d)\Big\}\exp\left\{-i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2}(\gamma\cdot b)(b\cdot y+\phi_1)\phi_0^{-1}\right\}\chi;\end{aligned} \tag{115}$$

$$\begin{aligned}&\text{при } k\neq 1, \quad \psi(x) = \exp\Big\{\phi_3\gamma_4(\gamma\cdot a+\gamma\cdot d) - \frac{1}{2}(\dot{\phi}_1\gamma\cdot b+\dot{\phi}_2\gamma\cdot c)\times \\ &\times(\gamma\cdot a+\gamma\cdot d)\Big\}\exp\left\{-i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}(\gamma\cdot b)(b\cdot y+\phi_1)\right\}\chi,\end{aligned} \tag{116}$$

где $\phi_0, \dots, \phi_3$ — произвольные гладкие функции от $a\cdot y + d\cdot y$; χ — произвольный постоянный спинор; $y_\mu = x_\mu + \theta_\mu$, $\theta_\mu = \text{const}$, $\mu = \overline{0,3}$.

Другими примерами уравнений, симметрия которых шире симметрии, описываемой теоремой 5, являются ДУЧП (64), (65) при $k=1$. Можно показать, что при таком выборе нелинейности эти уравнения инвариантны относительно конформных групп $C(3)$ и $C(1,2)$ соответственно. Это дает возможность строить новые семейства решений нелинейного уравнения Дирака (26) при $k=1$, используя формулы размножения решений с помощью конечных преобразований группы специальных конформных преобразований. Минуя промежуточные выкладки, приводим полученные многопараметрические семейства точных решений уравнения (26):

при $k = 1$

$$\psi(x) = U(x) \exp\left\{-i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2}(\gamma \cdot b)V_1\right\}\chi; \tag{117}$$

$$\psi(x) = U(x) \exp\left\{-2i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2}\left(V_1^2 + V_2^2\right)^{1/4}(\gamma \cdot c)\right\}\chi. \tag{118}$$

В (117), (118) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&U(x) = \sigma^{-3/2}(x)[I + [(\gamma \cdot b)(b \cdot x) + (\gamma \cdot c)(c \cdot x) + \\
&\;+ (\gamma \cdot d)(d \cdot x)](\theta_1(\gamma \cdot b) + \theta_2(\gamma \cdot c) + \theta_3(\gamma \cdot d))]; \\
&V_1 = [b \cdot x + \theta_1((b \cdot x)^2 + (c \cdot x)^2 + (d \cdot x)^2)]\sigma^{-1}(x); \\
&V_2 = [c \cdot x + \theta_2((b \cdot x)^2 + (c \cdot x)^2 + (d \cdot x)^2)]\sigma^{-1}(x); \\
&\sigma(x) = 1 - 2(\theta_1 b \cdot x + \theta_2 c \cdot x + \theta_3 d \cdot x) + \vec{\theta}^{\,2}((b \cdot x)^2 + (c \cdot x)^2 + (d \cdot x)^2); \\
&\vec{\theta}^{\,2} = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2, \quad \theta_i = \text{const}.
\end{aligned}$$

Галилеевские-инвариантные уравнения, допускающие бесконечномерную алгебру симметрии. Из теоремы 6 следует, что на подмножестве решений уравнения Дирака (26) реализуется представление бесконечномерной алгебры Ли, включающей в качестве подалгебры алгебру Ли группы Галилея $G(1,2)$. Другими словами, условие

$$(P_0 + P_3)\psi = 0 \tag{119}$$

выделяет подмножество решений нелинейного уравнения Дирака (26), которое является гораздо более симметричным, чем все множество решений. Таким образом, условие (119), выделяющее согласно рассуждениям предыдущего подпункта нерелятивистскую часть множества решений уравнения (26), тем самым выделяет множество, инвариантное относительно бесконечномерной алгебры Ли A_∞. Формально это может быть записано следующим образом:

$$AP(1,3)/(P_0 + P_3) \cong AG(1,2) \subset A_\infty. \tag{120}$$

Оказывается, что этот факт имеет место для очень широкого класса пуанкаре-инвариантных уравнений, а именно — уравнений типа Баба

$$[\beta_\mu p^\mu + m]\Psi(x) = 0, \quad m = \text{const}, \tag{121}$$

где $\Psi = \{\Psi^1, \Psi^2, \ldots, \Psi^n\}$, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_l)$, $l \geq 2$; β_μ — $(n \times n)$-матрицы, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned}
&[\beta_\lambda, S_{\mu\nu}] = i(g_{\mu\lambda}\beta_\nu - g_{\nu\lambda}\beta_\mu), \\
&S_{\mu\nu} = i(\beta_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\mu), \quad g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, -1, \ldots, -1, -1), \quad 0 \leq \mu, \nu, \lambda \leq l.
\end{aligned}$$

Хорошо известно, что уравнение (121) инвариантно относительно алгебры Пуанкаре с базисными операторами вида [6, 41]

$$P_\mu = ig_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad J_{\mu\nu} = x_\nu P_\nu - x_\nu P_\mu + S_{\mu\nu}.$$

Потребуем, чтобы Ψ кроме уравнения (121) удовлетворяло и дополнительному условию вида (119)

$$(P_0 + P_l)\Psi(x) = 0.$$

Тогда для определения $\Psi(\omega) = \Psi(x_0 + x_l, x_1, \ldots, x_{l-1})$ получаем следующую систему ДУЧП:

$$\left[i(\beta_0 + \beta_l)\partial_{\omega_0} + i\sum_{j=1}^{l-1}\beta_j\partial_{\omega_j} + m\right]\Psi(\omega) = 0. \tag{122}$$

Предложение 1. *Уравнение (122) инвариантно относительно бесконечномерной алгебры Ли с базисными операторами вида*

$$\begin{aligned} &Q_1 = \partial_{\omega_0}, \quad Q_2 = \Phi^k(\omega_0)\partial_{\omega_k} + \frac{1}{2}\dot{\Phi}^k(\omega_0)([\beta_0, \beta_k] - [\beta_k, \beta_l]),\\ &k = 1, \ldots, l-1, \end{aligned} \tag{123}$$

где $\partial_{\omega_\mu} = \frac{\partial}{\partial\omega_\mu}$; $\mu = \overline{0, l-1}$; $\dot{\Phi}^k = d\Phi/d\omega_0$; Φ^k *— произвольные дифференцируемые функции от* ω_0.

Доказательство. Для линейных уравнений справедливо следующее утверждение [6]: оператор Q является оператором симметрии уравнения

$$L(x)\Psi = 0,$$

если и только если существует матрица $R(x)$, такая, что

$$[Q, L] = R(x)L.$$

Докажем, что в нашем случае

$$[Q, L] = 0. \tag{124}$$

Действительно,

$$[Q_2, i(\beta_0 + \beta_l)\partial_{\omega_0} + i\beta_k\partial_{\omega_k} + m] = \frac{i}{2}(\beta_0 + \beta_l)\ddot{\Phi}^k(\omega_0)\{[\beta_0, \beta_k] - [\beta_k, \beta_l]\}.$$

Покажем, что $(\beta_0 + \beta_l)\{[\beta_0, \beta_k] - [\beta_k, \beta_l]\} = 0$, откуда и будет следовать формула (124). Выберем, например, $k = 1$;

$$\begin{aligned} &(\beta_0 + \beta_l)\{[\beta_0, \beta_1] - [\beta_1, \beta_l]\} = (\beta_0 + \beta_l)(\beta_0\beta_1 - \beta_1\beta_0 - \beta_1\beta_l + \beta_l\beta_1) =\\ &= (\beta_0\beta_0\beta_1 - \beta_0\beta_1\beta_0) + (\beta_l\beta_l\beta_1 - \beta_l\beta_1\beta_l) + (\beta_l\beta_0\beta_1 - \beta_0\beta_1\beta_l) +\\ &+ (\beta_0\beta_l\beta_1 - \beta_l\beta_1\beta_0) = i\beta_1 - i\beta_1 = 0. \end{aligned}$$

Аналогично доказываем утверждение и для $k = 2, \ldots, l-1$. Теорема доказана.

Замечание 1. Утверждение теоремы остается в силе и для пуанкаре-инвариантных нелинейных обобщений уравнения Баба (121)

$$\beta_\mu p^\mu\Psi + F(\Psi^*, \Psi) = 0, \quad \mu = 0, 1, \ldots, l. \tag{125}$$

Этот факт дает возможность строить классы точных решений систем ДУЧП (121), (125), включающие произвольные функции, используя формулы размножения решений типа (113).

Замечание 2. На решениях уравнения (122) реализуется следующее представление алгебры Галилея $AG(1,l-1)$:

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial\omega_0}, \quad P_a = -i\frac{\partial}{\partial\omega_a}, \quad a=\overline{1,l-1}, \quad J_{ab} = x_aP_b - x_bP_a + S_{ab},$$
$$G_a = \omega_0P_a + \frac{1}{2}(S_{al} - S_{0a}), \quad a,b=\overline{1,l-1}.$$

Алгебра (123) не является, вообще говоря, максимальной алгеброй симметрии уравнения (122) (последняя может быть значительно шире). Примером служит следующее ДУЧП:

$$[(\gamma_0+\gamma_4)P_0 - \gamma_aP_a + \lambda(\bar\psi\psi)^{1/3}]\psi(\omega) = 0, \quad a=1,2,3. \tag{126}$$

Теорема 7. *Базис максимальной алгебры инвариантности уравнения (126) образуют следующие операторы:*

$$\begin{aligned}
&P_0 = i\frac{\partial}{\partial\omega_0}, \quad J_{ab} = \omega_aP_b - \omega_bP_a + \frac{i}{4}[\gamma_a,\gamma_b],\\
&G = \Phi^a(\omega_0)P_a - \frac{i}{2}\dot\Phi^a(\omega_0)\gamma_a(\gamma_0+\gamma_4);\\
&\tilde A = \Phi^0(\omega_0)P_0 - \dot\Phi^0(\omega_0)\omega_aP_a + \frac{3}{2}\dot\Phi^0 + \frac{1}{2}\ddot\Phi^0\gamma_a\omega_a(\gamma_0+\gamma_4), \quad a,b=1,2,3,
\end{aligned} \tag{127}$$

где $\Phi^0,\ldots,\Phi^3$ *— произвольные дифференцируемые функции;* $\dot\Phi^\mu = d\Phi^\mu/d\omega_0$, $\mu=\overline{1,3}$.

Доказательство проводится с помощью метода Ли, мы его не приводим.

Следствие. *Уравнение (126) инвариантно относительно алгебры Ли обобщенной группы Галилея* $G_2(1,3)$ *(обобщенной группой Галилея называется группа Галилея, дополненная однопараметрическими группами масштабных и проективных преобразований).*

Базис этой алгебры может быть выбран в виде

$$\begin{aligned}
&P_0 = i\frac{\partial}{\partial\omega_0}, \quad P_a = -i\frac{\partial}{\partial\omega_a}, \quad J_{ab} = \omega_aP_b - \omega_bP_a + \frac{i}{4}[\gamma_a,\gamma_b],\\
&G_c = \omega_0P_c - \frac{i}{2}\gamma_c(\gamma_0+\gamma_4), \quad a,b,c=\overline{1,3}, \quad D = \omega_\mu P^\mu + \frac{3i}{2}, \quad \mu=\overline{0,3},\\
&A = 2\omega_0\omega_\mu P^\mu - \omega_0P_0 + 3i\omega_0 + i\gamma_a\omega_a(\gamma_0+\gamma_4).
\end{aligned}$$

В силу этого ДУЧП (126) можно трактовать как нерелятивистский аналог] конформно-инвариантного уравнения Дирака–Гюрши (5). С другой стороны, если положить в (126) $\lambda=0$, то полученное уравнение совпадает с уравнением Леви–Леблонда для нерелятивистской частицы с нулевой массой [42].

Важно отметить, что симметрийные свойства уравнения (126) не исчерпываются локальной симметрией (127). Непосредственной проверкой можно убедиться, что ДУЧП (126) допускает следующую нелокальную группу преобразований:

$$\psi' = \psi + (\gamma_0+\gamma_4)E(\omega;\psi), \tag{128}$$

где $E(\omega;\psi)$ — произвольное решение линейной системы ДУЧП

$$[\gamma_a P_a - \lambda(\bar{\psi}\psi)^{1/3}]E = 0,$$
$$\bar{\psi}(\gamma_0 + \gamma_4)E - \bar{E}(\gamma_0 + \gamma_4)\psi = 0, \quad \bar{E} = E^\dagger\gamma_0.$$

Некоторые двумерные спинорные модели

Эффективность применения теоретико-алгебраических методов тем выше, чем шире симметрия рассматриевомого уравнения. Особый интерес в этой связи представляют двумерные ДУЧП, инвариантные относительно бесконечнопараметрической группы преобразований. Именно это свойство позволило построить общие решения двумерных уравнений Д'Аламбера [30], Лиувилля [43], газовой динамики [44], Монжа–Ампера [43], Тирринга с нулевой массой [45, 46], Борна–Инфельда [43], Максвелла–Дирака [47] и др.

Мы покажем, что список интегрируемых моделей может быть пополнен следующими нелинейными спинорными ДУЧП:

$$[\gamma_\mu p^\mu + \lambda_1\gamma_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)]\psi(x_0, x_1) = 0, \quad \mu = 0, 1; \tag{129}$$

$$[(\gamma_0 + \gamma_3)p_0 - \gamma_1 p_1 + \lambda_2(\bar{\psi}\psi)^{1/2k}]\psi(x_0, x_1) = 0, \tag{130}$$

где $\psi = \psi(x_0, x_1)$ — четырехкомпонентный спинор; γ_0, γ_1, γ_3 — 4×4-матрицы Дирака; λ_1, λ_2, k — константы.

Уравнение (129) — это двумерный аналог уравнения Дирака–Гайзенберга (4), а ДУЧП (130) — двумерный аналог уравнения (126). Кроме того, (130) может быть получено из нелинейного уравнения Дирака (26), если положить $\psi = \psi(x_0 + x_3, x_1)$.

Симметрия уравнений (129), (130). Нам будет удобно выбрать в (129) γ-матрицы в следующем виде:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \hat{0} & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & \hat{0} \end{pmatrix}, \gamma_1 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & \hat{0} \end{pmatrix},$$

где σ_2, σ_3 — матрицы Паули; $\hat{0}$ — нулевая матрица размерности (2×2). Расписывая (129) покомпонентно и переходя к конусным переменным

$$\xi = x_0 - x_1, \quad \eta = x_0 + x_1,$$

получаем

$$\begin{aligned} i\partial_\xi\psi^0 &= -\lambda\left(|\psi^1|^2 + |\psi^3|^2\right)\psi^0, \\ i\partial_\eta\psi^1 &= \lambda\left(|\psi^0|^2 + |\psi^2|^2\right)\psi^1, \\ i\partial_\xi\psi^2 &= -\lambda\left(|\psi^1|^2 + |\psi^3|^2\right)\psi^2, \\ i\partial_\eta\psi^3 &= \lambda\left(|\psi^0|^2 + |\psi^2|^2\right)\psi^3, \end{aligned} \tag{131}$$

Предложение 2. *Максимальной локальной группой инвариантности системы (131) является бесконечнопараметрическая группа*

$$G = O_\xi(4) \times O_\eta(4) \times G_\infty, \tag{132}$$

где G_∞ *— бесконечнопараметрическая группа Ли преобразований вида*

$$\xi' = \int^{\xi} f_1^{-2}(z)dz, \quad \eta' = \int^{\eta} f_0^{-2}(z)dz,$$
$$\psi^{0\prime} = \psi^0 f_0(\eta), \quad \psi^{1\prime} = \psi^1 f_1(\xi), \quad \psi^{2\prime} = \psi^2 f_0(\eta), \quad \psi^{3\prime} = \psi^3 f_1(\xi),$$

f_0*,* f_1 *— произвольные дифференцируемые функции,* $O_\xi(4)$ *— группа преобразований, сохраняющих квадратичную форму* $|\psi^1|^2 + |\psi^3|^2$*, параметры которой являются произвольными функциями от* ξ*;* $O_\eta(4)$ *— группа линейных преобразований, сохраняющих квадратичную форму* $|\psi^0|^2 + |\psi^2|^2$*, параметры которой являются произвольными функциями от* η*.*

Предложение 3. *Максимальная локальная группа инвариантности уравнения (130) генерируется следующими операторами:*

при $k \neq \frac{1}{2}$*,*

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad D = x_\mu P_\mu + k,$$
$$G = \Phi_1(x_0)P_1 + \frac{1}{2}\dot{\Phi}(x_0)\gamma_1(\gamma_0 + \gamma_3),$$
$$Q = (\gamma_0 + \gamma_3)[\Phi_2(x_0)\gamma_2 + \Phi_3(x_0)\gamma_4];$$

при $k = \frac{1}{2}$*,*

$$G = \Phi_1(x_0)P_1 + \frac{1}{2}\dot{\Phi}(x_0)\gamma_1(\gamma_0 + \gamma_3),$$
$$A = \Phi_0(x_0)P_0 + \dot{\Phi}(x_0)x_1P_1 + \frac{1}{2}\dot{\Phi}(x_0) + \frac{x_1}{2}\ddot{\Phi}_0(x_0)\gamma_1(\gamma_0 + \gamma_3),$$
$$Q = (\gamma_0 + \gamma_3)[\Phi_2(x_0)\gamma_2 + \Phi_3(x_0)\gamma_4];$$

где $\Phi_\mu(x_0)$ *— произвольные дифференцируемые функции, точка обозначает дифференцирование по* x_0*.*

Замечание. Симметрийные свойства системы ДУЧП (131) значительно шире, чем инвариантность относительно локальной группы (132). В частности, (131) допускает группу нелокальных (интегральных) преобразований вида

$$\psi^{0\prime} = a\psi^0 \exp\left\{i\lambda_1 \int \left[\left(|b|^2 - 1\right)|\psi^1|^2 + \left(|d|^2 - 1\right)|\psi^3|^2\right] d\xi\right\},$$
$$\psi^{1\prime} = b\psi^1 \exp\left\{-i\lambda_1 \int \left[\left(|a|^2 - 1\right)|\psi^0|^2 + \left(|c|^2 - 1\right)|\psi^2|^2\right] d\eta\right\},$$
$$\psi^{2\prime} = c\psi^2 \exp\left\{i\lambda_1 \int \left[\left(|b|^2 - 1\right)|\psi^1|^2 + \left(|d|^2 - 1\right)|\psi^3|^2\right] d\xi\right\},$$
$$\psi^{3\prime} = d\psi^1 \exp\left\{-i\lambda_1 \int \left[\left(|a|^2 - 1\right)|\psi^0|^2 + \left(|c|^2 - 1\right)|\psi^2|^2\right] d\eta\right\},$$

где a, b, c, d — произвольные комплексные параметры. Отметим, что эта группа изоморфна группе C^4 по умножению.

Линеаризация и общее решение уравнений (129), (130). Для того чтобы построить общее решение ДУЧП (131), мы воспользуемся методом нелокальной линеаризации [43, 47], т.е. укажем в явном виде нелокальную замену переменных, приводящую (131) к системе линейных ДУЧП. Переходя в (131) к новым переменным по формулам

$$\begin{aligned}
\psi^0 &= u^0(\xi,\eta)\exp\left\{i\lambda_1\int\left(|u^1|^2+|u^3|^2\right)d\xi\right\},\\
\psi^1 &= u^1(\xi,\eta)\exp\left\{-i\lambda_1\int\left(|u^0|^2+|u^2|^2\right)d\eta\right\},\\
\psi^2 &= u^2(\xi,\eta)\exp\left\{i\lambda_1\int\left(|u^1|^2+|u^3|^2\right)d\xi\right\},\\
\psi^3 &= u^3(\xi,\eta)\exp\left\{-i\lambda_1\int\left(|u^0|^2+|u^2|^2\right)d\eta\right\},
\end{aligned}\tag{133}$$

получаем следующие уравнения для нахождения неизвестных функций u^0, u^1, u^2, u^3:

$$\partial_\xi u^0 = 0, \qquad \partial_\eta u^1 = 0, \qquad \partial_\xi u^2 = 0, \qquad \partial_\eta u^3 = 0. \tag{134}$$

Замена переменных (133) по виду напоминает замену Коула–Хопфа, приводящую уравнение Бюргерса к линейному уравнению теплопроводности [48, 49]. Принципиальное отличие состоит в том, что замена (133) является обратимой при любых $u^0,\dots,u^3$, а замена Коула–Хопфа, вообще говоря, нет.

Интегрирование уравнений (134) дает

$$u^0 = U^0(\eta), \qquad u^1 = U^1(\xi), \qquad u^2 = U^2(\eta), \qquad u^3 = U^3(\xi), \tag{135}$$

где $U^0,\dots,U^3$ — произвольные комплекснозначные дифференцируемые функции.

Подставляя (135) в (133) и переходя от конусных переменных ξ, η к исходным, получаем общее решение уравнения (129):

$$\begin{aligned}
\psi^0 &= U^0(x_0+x_1)\exp\left\{i\lambda_1\int^{x_0-x_1}\left[|U^1|^2+|U^3|^2\right]d\xi\right\},\\
\psi^1 &= U^1(x_0-x_1)\exp\left\{-i\lambda_1\int^{x_0+x_1}\left[|U^0|^2+|U^2|^2\right]d\eta\right\},\\
\psi^2 &= U^2(x_0+x_1)\exp\left\{i\lambda_1\int^{x_0-x_1}\left[|U^1|^2+|U^3|^2\right]d\xi\right\},\\
\psi^3 &= U^3(x_0-x_1)\exp\left\{-i\lambda_1\int^{x_0+x_1}\left[|U^0|^2+|U^2|^2\right]d\eta\right\}.
\end{aligned}\tag{136}$$

Отметим, что константа взаимодействия λ_1 входит в (136) аналитическим образом. Устремляя λ_1 к 0, получаем общее решение свободного двумерного уравнения Дирака

$$(\gamma_0 p_0 - \gamma_1 p_1)\psi(x_0,x_1) = 0.$$

Для того чтобы построить общее решение системы ДУЧП (130), заменим ее эквивалентной “линейной” системой вида

$$\begin{aligned} &\gamma_1\psi_{x_1} = i\lambda_2\frac{\partial f}{\partial x_1}\psi + (\gamma_0+\gamma_3)F(x_0,x_1),\\ &\psi_{x_0} = -F(x_0,x_1), \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = (\bar\psi\psi)^{1/2k}. \end{aligned} \tag{137}$$

Первое из уравнений (137) — это линейная неоднородная система ОДУ (x_0 входит в качестве параметра), общее решение которой может быть получено с помощью метода вариации произвольной постоянной

$$\begin{aligned} \psi(x) = {}&\exp\{-i\lambda_2\gamma_1 f(x_0,x_1)\}\times\\ &\times\left[\varphi(x_0) - \gamma_1(\gamma_0+\gamma_3)\int^{x_1}\exp\{-i\lambda_2\gamma_1 f(x_0,z)\}F(x_0,z)dz\right]. \end{aligned} \tag{138}$$

Подставляя (138) в остальные уравнения из (137) и решая полученные соотношения, находим общее решение исходной системы ДУЧП (130):

$$\begin{aligned} \psi(x_0,x_1) = {}&\exp\{-i\lambda_2 f(x_0,x_1)\gamma_1\}\times\\ &\times\left[\varphi(x_0) + \gamma_1(\gamma_0+\gamma_3)\int^{x_1}\exp\{-i\lambda_2\gamma_1 f(x_0,z)\}dz\,\times\right.\\ &\left.\times\left(\dot\varphi(x_0) - i\lambda_2\frac{\partial f}{\partial x_0}\gamma_1\varphi(x_0)\right)\right], \end{aligned} \tag{139}$$

где $\varphi = \varphi(x_0)$ — четырехкомпонентный спинор, произвольным образом зависящий от x_0; $f = f(x_0,x_1)$ — действительная скалярная функция, определяемая из соотношения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_1} = \left[A_0 + A_1\int^{x_1}\mathrm{ch}(2\lambda_2 f(x_0,z))dz + A_2\int^{x_1}\mathrm{sh}(2\lambda_2 f(x_0,z))dz\right]^{1/2k},\\ &A_0 = \bar\varphi\varphi, \qquad A_1 = \bar\varphi\gamma_1(\gamma_0+\gamma_3)\dot\varphi - \dot{\bar\varphi}\gamma_1(\gamma_0+\gamma_3)\varphi,\\ &A_2 = i(\bar\varphi(\gamma_0+\gamma_3)\dot\varphi - \dot{\bar\varphi}(\gamma_0+\gamma_3)\varphi), \qquad \dot\varphi = d\varphi/dx_0. \end{aligned} \tag{140}$$

Если формально устремить в (130) $k \to +\infty$, то это уравнений перейдет в линейное уравнение

$$[(\gamma_0+\gamma_3)p_0 - \gamma_1 p_1 + \lambda_2]\psi(x) = 0. \tag{141}$$

Оказывается, что такой предельный переход возможен и в формулах (139), (140), в результате чего получаем общее решение ДУЧП (141):

$$\psi(x) = \exp\{-i\lambda_2\gamma_1 x_1\}\left\{\varphi(x_0) - \frac{i}{2\lambda_2}(\gamma_0+\gamma_3)\exp\{-2i\lambda_2 x_1\gamma_1\}\dot\varphi(x_0)\right\},$$

где $\varphi = \varphi(x_0)$ — четырехкомпонентный спинор, произвольным образом зависящий от x_0.

Учитывая отмеченную выше связь между нелинейным уравнением Дирака (26) и системой ДУЧП (130), по формуле

$$\psi_1(x) = \psi(x_0 \to (x_0 + x_3), x_1 \to x_1),$$

где $\psi(x_0, x_1)$ из (139), получаем семейство точных решений уравнения (26), включающее четыре произвольных комплекснозначных функции.

Приложение 1
Анзацы, редуцирующие произвольное пуанкаре-инвариантное уравнение к системе ОДУ

С помощью анзацев, инвариантных относительно одномерных подалгебр алгебры Пуанкаре $AP(1,3)$, удается уменьшить размерность пуанкаре-инвариантных уравнений на единицу. Следовательно, чтобы редуцировать четырехмерную систему ДУЧП к системе ОДУ, необходимо использовать анзацы, инвариантные относительно трехмерных подалгебр алгебры $AP(1,3)$ [33]. Задача классификации всех неэквивалентных подалгебр алгебры Пуанкаре $AP(1,3)$ была решена в [50–53]. Общий вид анзаца, инвариантного относительно алгебры $\langle Q_1, Q_2, Q_3\rangle \subset AP(1,3)$, таков:

$$\psi(x) = A(x)\varphi(\omega), \tag{П.1}$$

где $\varphi = \varphi(\omega)$ — новый неизвестный спинор; $A(x)$ — 4×4-матрица, удовлетворяющая системе ДУЧП

$$Q_i A(x) = 0, \qquad i = \overline{1,3}, \tag{П.2}$$

$\omega = \omega(x)$ — новая инвариантная переменная, удовлетворяющая условиям вида

$$Q_i^{\mathrm{dif}}\omega = 0, \qquad i = \overline{1,3}, \tag{П.3}$$

где Q_i^{dif} обозначает дифференциальную часть оператора Q_i. Интегрируя системы ДУЧП (П.2), (П.3), получаем следующий набор анзацев (результат приводится в виде табл. 2).

Подобным же образом можно было бы построить пуанкаре-инвариантные анзацы и для скалярного, векторного, тензорного полей. Однако существует значительно более простой способ получения таких анзацев. Величины $\bar\psi\psi$, $\bar\psi\gamma_\mu\psi$, $\bar\psi\gamma_\mu\gamma_\nu\psi$ преобразуются относительно группы Пуанкаре как скаляр, вектор и тензор соответственно. Поэтому, чтобы найти анзацы, инвариантные относительно трехмерных подалгебр алгебры Пуанкаре, достаточно подставить анзацы для $\psi(x)$ из табл. 2 в следующие формулы:

$$\begin{aligned} &u(x) = \bar\psi\psi, \qquad A_\mu(x) = \bar\psi\gamma_\mu\psi, \\ &F_{\mu\nu} = \bar\psi\gamma_\mu\gamma_\nu\psi, \qquad \mu,\nu = \overline{0,3}. \end{aligned} \tag{П.4}$$

В результате получим:

$$u(x) = \Phi(\omega), \qquad A_\mu(x) = a_{\mu\nu}(x)\Phi^\nu(\omega), \qquad F_{\mu\nu}(x) = a_{\mu\nu\alpha\beta}\Phi^{\alpha\beta}(\omega), \tag{П.5}$$

где $\Phi = \bar\varphi\varphi$, $\Phi^\nu = \bar\varphi\gamma^\nu\varphi$, $\Phi^{\alpha\beta} = \bar\varphi\gamma^\alpha\gamma^\beta\varphi$.

В частности, анзацы для скалярного поля, построенные в [53], могут быть получены таким способом. В [54] с использованием подгрупповой структуры группы $P(1,3)$ [50–53] построены классы точных решений нелинейного уравнения Дирака (8) при $F = m + \lambda(\bar\psi\psi)^k$, $m, \lambda, k = \mathrm{const}$.

Таблица 2

№ п/п	$\langle Q_1, Q_2, Q_3\rangle$	$A(x)$	$\omega(x)$
1	$P_0,\ P_1,\ P_3$	I	x_2
2	$P_1,\ P_2,\ P_3$	I	x_0
3	$P_0+P_3,\ P_1,\ P_2$	I	x_0+x_3
4	$J_{03},\ P_1,\ P_2$	$\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3\ln(x_0+x_3)\right\}$	$x_0^2-x_3^2$
5	$J_{03},\ P_0+P_3,\ P_1$	$\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3\ln(x_0+x_3)\right\}$	x_2
6	$J_{03}+\alpha P_2,\ P_0,\ P_3$	$\exp\left\{\frac{x_2}{2\alpha}\gamma_0\gamma_3\right\}$	x_1
7	$J_{03}+\alpha P_2,\ P_0+P_3,\ P_1$	$\exp\left\{\frac{x_2}{2\alpha}\gamma_0\gamma_3\right\}$	$\alpha\ln(x_0+x_3)-x_2$
8	$J_{12},\ P_0,\ P_3$	$\exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right\}$	$x_1^2+x_2^2$
9	$J_{12}+\alpha P_0,\ P_1,\ P_2$	$\exp\left\{-\frac{x_0}{2\alpha}\gamma_1\gamma_2\right\}$	x_3
10	$J_{12}+\alpha P_3,\ P_1,\ P_2$	$\exp\left\{\frac{x_3}{2\alpha}\gamma_1\gamma_2\right\}$	x_0
11	$J_{12}+P_0+P_3,\ P_1,\ P_2$	$\exp\left\{\frac{1}{4}(x_3-x_0)\gamma_1\gamma_2\right\}$	x_0+x_3
12	$G_1,\ P_0+P_3,\ P_2$	$\exp\left\{\frac{x_1}{2(x_0+x_3)}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1\right\}$	x_0+x_3
13	$G_1,\ P_0+P_3,\ P_1+\alpha P_2$	$\exp\left\{\frac{\alpha x_1-x_2}{2\alpha(x_0+x_3)}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1\right\}$	x_0+x_3
14	$G_1+P_2,\ P_0+P_3,\ P_1$	$\exp\left\{\frac{x_2}{2}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1\right\}$	x_0+x_3
15	$G_1+P_0,\ P_0+P_3,\ P_2$	$\exp\left\{-\frac{x_0+x_3}{2}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1\right\}$	$2x_1+(x_0+x_3)^2$
16	$G_1+P_0,\ P_1,\ P_0+P_3$	$\exp\left\{-\frac{x_0+x_3}{2}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1\right\}$	x_2
17	$G_1+P_0,\ P_1+\alpha P_2,$ P_0+P_3	$\exp\left\{-\frac{x_0+x_3}{2}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1\right\}$	$2(x_2-\alpha x_1)-$ $-\alpha(x_0+x_3)^2$
18	$J_{03}+\lambda J_{12},\ P_0,\ P_3$	$\exp\left\{-\frac{1}{2\lambda}(\gamma_0\gamma_3+\lambda\gamma_1\gamma_2)\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right\}$	$x_1^2+x_2^2$
19	$J_{03}+\lambda J_{12},\ P_1,\ P_2$	$\exp\left\{\frac{1}{2}(\gamma_0\gamma_3+\lambda\gamma_1\gamma_2)\ln(x_0+x_3)\right\}$	$x_0^2-x_3^2$
20	$G_1,\ G_2,\ P_0+P_3$	$\exp\left\{\frac{\gamma_0+\gamma_3}{2(x_0+x_3)}(\gamma_1x_1+\gamma_2x_2)\right\}$	x_0+x_3
21	$G_1+P_2,$ $G_2+\alpha P_1+\beta P_2,$ P_0+P_3	$\exp\left\{\frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_3)\left[x_2\gamma_1-\right.\right.$ $-\frac{x_2(x_0+x_3)-x_1}{(x_0+x_3)(x_0+x_3+\beta)-\alpha}(x_0+x_3+\beta)\gamma_1+$ $\left.\left.+\frac{x_2(x_0+x_3)-x_1}{(x_0+x_3)(x_0+x_3+\beta)-\alpha}\gamma_2\right]\right\}$	x_0+x_3
22	$G_1,\ G_2+P_1+$ $+\alpha P_2,\ P_0+P_3$	$\exp\left\{\frac{x_1}{2(x_0+x_3)}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1+\right.$ $+\frac{x_2}{2(x_0+x_3)(x_0+x_3+\alpha)}\times$ $\left.\times(\gamma_0+\gamma_3)(\gamma_2(x_0+x_3)-\gamma_1)\right\}$	x_0+x_3
23	$G_1,\ G_2+P_2,$ P_0+P_3	$\exp\left\{\frac{x_1}{2(x_0+x_3)}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1+\right.$ $\left.+\frac{x_2}{2(x_0+x_3+1)}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_2\right\}$	x_0+x_3
24	$G_1,\ G_2+P_0,$ $P_0+P_3,\ P_1$	$\gamma_0+\gamma_3$	$2x_2+(x_0+x_3)^2$
25	$J_{03},\ G_1,\ P_2$	$\exp\left\{\frac{x_1}{2(x_0+x_3)}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1\right\}\times$ $\times\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3\ln(x_0+x_3)\right\}$	$x_0^2-x_1^2-x_3^2$

Продолжение табл. 2

№ п/п	$\langle Q_1, Q_2, Q_3\rangle$	$A(x)$	$\omega(x)$
26	$J_{03},\ G_1,\ P_0+P_3$	$\exp\left\{\frac{x_1}{2(x_0+x_3)}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1\right\}\times$ $\times\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3\ln(x_0+x_3)\right\}$	x_2
27	$J_{03}+\alpha P_1+\beta P_2$ $G_1,\ P_0+P_3$	$\exp\left\{\frac{x_1-\alpha\ln(x_0+x_3)}{2(x_0+x_3)}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1\right\}\times$ $\times\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3\ln(x_0+x_3)\right\}$	$x_2-\beta\ln(x_0+x_3)$
28	$J_{03}+\beta P_2,\ G_1,$ $P_0+P_3,\ P_1$	$\gamma_0+\gamma_3$	$x_2-\beta\ln(x_0+x_3)$
29	$G_1,\ G_2,\ J_{03}$	$\exp\left\{\frac{\gamma_0+\gamma_3}{2(x_0+x_3)}(\gamma_1x_1+\gamma_2x_2)\right\}\times$ $\times\exp\left\{-\frac{x_\mu x^\mu}{4(x_0+x_3)}\gamma_1\gamma_2\right\}$	x_0+x_3
30	$J_{03}+\lambda J_{12},\ G_1,\ G_2$	$\exp\left\{\frac{\gamma_0+\gamma_3}{2(x_0+x_3)}(\gamma_1x_1+\gamma_2x_2)\right\}\times$ $\times\exp\left\{\frac{1}{2}(\gamma_0\gamma_3+\lambda\gamma_1\gamma_2)\ln(x_0+x_3)\right\}$	$x_\mu x^\mu$

$\alpha,\beta,\lambda=\mathrm{const},\ G_i=J_{0i}-J_{i3},\ i=\overline{1,2}.$

Приложение 2
Об одном обобщение метода разделения переменных для систем дифференциальных уравнений

В этом приложении мы приведем один из возможных подходов к построению решений в разделенных переменных систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Метод разделения переменных является одним из классических методов интегрирования линейных дифференциальных уравнений. Его тесная связь с теоретико-групповыми свойствами уравнений была понята совсем недавно [55, 56]. Она состоит в том, что решение в разделенных переменных и параметры разделения являются соответственно собственной функцией и собственными значениями некоторого набора операторов $\{\Sigma_i\}$ симметрии рассматриваемого уравнения. Иначе говоря, справедливы равенства

$$L\psi\equiv\{a_\mu(x)\partial_{x_\mu}+a(x)\}\psi(x)=0,\qquad \mu=\overline{0,n-1}, \tag{П.6}$$

$$\Sigma_i\psi=\lambda_i\psi,\qquad i=\overline{1,n-1}, \tag{П.7}$$

где a_μ, a — переменные $m\times m$-матрицы; $\psi=(\psi^1,\ldots,\psi^m)$, $x=(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})$, $\lambda_i=\mathrm{const}$, Σ_i — дифференциальные операторы, образующие $(n-1)$-мерную абелеву алгебру Ли симметрии уравнения (П.6), т.е. они удовлетворяют условиям

$$[\Sigma_i,\Sigma_j]=\Sigma_i\Sigma_j-\Sigma_j\Sigma_i=0, \tag{П.8}$$

$$[L,\Sigma_i]\psi|_{L\psi=0}=0. \tag{П.9}$$

Поэтому решения уравнения (П.6), удовлетворяющие условиям (П.7), естественно называть решениями в разделенных переменных.

Система дифференциальных уравнений (П,6), (П.7) является переопределенной, и условия (П.8), (П.9) обеспечивают ее совместность. Наше основное наблюдение состоит в том, что требования (П.8), (П.9) можно значительно ослабить и тем самым обобщить классическое определение разделения переменных. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Система уравнений*

$$
\begin{aligned}
&L\psi = 0, \\
&Q_i\psi = \{b_i^\mu(x)\partial_{x_\mu} + b_i(x)\}\psi(x) = 0, \qquad i = \overline{1, n-1},
\end{aligned} \tag{П.10}
$$

где b_i^μ, b_i — переменные матрицы $(m \times m)$, совместна, если

$$
\begin{aligned}
&[Q_i, L] = B_i^k Q_k + B_i L, \\
&[Q_i, Q_j] = R_{ij}^k Q_k + R_{ij}, \qquad i, j, k = \overline{1, m}.
\end{aligned} \tag{П.11}
$$

В случае, когда

$$
\operatorname{rank} \begin{pmatrix} a^0(x) & \cdots & a^{n-1}(x) \\ b_1^0(x) & \cdots & b_1^{n-1}(x) \\ . & \cdots & . \\ b_{n-1}^0(x) & \cdots & b_{n-1}^{n-1}(x) \end{pmatrix} = m \times n, \tag{П.12}
$$

условия (П.11) являются необходимыми и достаточными.

В (П.11) B_i^k, B_i, B_{ij}^k, R_{ij} — некоторые дифференциальные операторы первого порядка с матричными коэффициентами.

Доказательство. Проведем доказательство в предположении, что условие (П.12) выполнено. Если в (П.10) $b_i^\mu(x) = \delta_i^\mu b_i(x)$, где δ_i^μ — символ Кронекера, то система (П.10) может быть записана в виде

$$
\partial_{x_\mu}\psi = A_\mu(x)\psi, \tag{П.13}
$$

причем $A_0 = -a_0^{-1}(a_k A_k + a)$.

Хорошо известно (см., например, [57]), что необходимые и достаточные условия совместности системы дифференциальных уравнений (П.13) таковы:

$$
[\partial_{x_\mu} - A_\mu, \partial_{x_\nu} - A_\nu] = \partial_{x_\nu} A_\mu - \partial_{x_\mu} A_\nu + [A_\mu, A_\nu] = 0. \tag{П.14}
$$

Следовательно, для системы (П.13) утверждение теоремы справедливо. Идея доказательства состоит в том, что система (П.10) может быть получена из (П.13) последовательным применением преобразований эквивалентности

$$
L \to L, \qquad Q_i \to Q_i' = \begin{cases} Q_i, & i \neq k, \\ W_i Q_i, & i = k, \end{cases} \tag{П.15}
$$

где $W_i = W_i(x)$ — невырождонные переменные матрицы $(m \times m)$. Если покажем, что для преобразованной системы

$$
\begin{aligned}
&L\psi = 0, \\
&Q_i'\psi = 0, \qquad i = \overline{1, n-1},
\end{aligned} \tag{П.16}
$$

выполнены условия (П.11), то тем самым теорема будет доказана. Это осуществляется прямым вычислением. Рассмотрим, например, коммутатор $[Q_k', L]$:

$$
\begin{aligned}
[Q_k', L] &= [W_i Q_i, L] = [W_i, L]Q_i + W_i[Q_i, L] = \\
&= \big([W_i, L] + W_j B_j^i\big) + W_i B_i L.
\end{aligned} \tag{П.17}
$$

Выразив из (П.15) Q_i через Q'_i и подставив найденные выражения в (П.17), получим

$$[Q'_k, L] = B^{i\prime}_k Q'_k + B'_k L,$$

где

$$B^{i\prime}_k = W_j B^i_j + [W_i, L] - [W_k, L] W_k^{-1} W_i - W_j B^k_j W_k^{-1} W_i, \qquad i \neq k,$$
$$B^{k\prime}_k = [W_k, L] W_k^{-1} + W_j B^k_j W_k^{-1}, \qquad B'_k = W_j B_j$$

(по k нет суммирования).

Проверка остальных соотношений из (П.11) проводится аналогично.

Замечание. Если в (П.11) $R_{ij} \equiv 0$, $B^k_i \equiv 0$, B_i — $(m \times m)$-матрицы, R^k_{ij} — константы, то требование (П.11) означает, что операторы Q_i образуют $(n-1)$-мерную алгебру Ли инвариантности уравнения (П.6). Если же $R_{ij} \equiv 0$, $B^k_i \equiv 0$, то Q_i — нелиевские операторы симметрии уравнения (П.6) (см. [6]). Наконец, если не все R_{ij}, B^k_i равны нулю, то мы имеем дело с так называемой нарушенной симметрией [31, 58].

Следствие. *Пусть операторы Q_i образуют супералгебру Ли инвариантности уравнений (П.6), тогда система (П.10) совместна.*

Таким образом, для того чтобы строить решения в разделенных переменных систем дифференциальных уравнений в частных производных, необходимо уметь классифицировать алгебраические объекты типа (П.11), частным случаем которых являются алгебры и супералгебры Ли. К настоящему времени эта задача нами частично решена лишь для алгебр Ли и некоторых простейших супералгебр.

Из доказательства теоремы следует, что при выполнении условия (П.12) систему (П.10) можно заменить эквивалентной ей системой дифференциальных уравнений (П.13). Если известно частное решение уравнений (П.14), то, подставляя его в систему (П.13) и находя ее общее решение, получаем решение в разделенных переменных исходной системы дифференциальных уравнений (П.6). Оказывается, что в ряде случаев систему (П.14) решать проще, чем систему (П.6).

Эффективность нашего подхода продемонстрируем на линейном уравнении Дирака

$$(i\gamma_\mu \partial_{x_\mu} - m)\psi(x) = 0, \tag{П.18}$$

где γ_μ — матрицы Дирака размерности (4×4); $\psi(x)$ — четырехкоппонентный дираковский спинор.

Стандартное определение разделения переменных в уравнении Дирака в декартовых координатах таково [56, 59, 60]:

$$\psi(x) = V_0(x_0) V_1(x_1) V_2(x_2) V_3(x_3)\chi, \tag{П.19}$$

где V_μ — переменные (4×4)-матрицы. Решения вида (П.19) получаются из (П.13), если положить $A_i = A_i(x_i)$, $i = \overline{1,3}$.

При этом условии (П.14) примут вид

$$\partial_{x_i} A_0 = [A_i(x_i), A_0], \tag{П.20}$$

$$[A_i(x_i), A_j(x_j)] = 0, \qquad i, j = \overline{1,3}, \tag{П.21}$$

где $A_0 = -\gamma_0\gamma_k A_k - im\gamma_0$.

Предложение 1. *Система дифференциальных уравнений (П.20), (П.21) совместна.*

Чтобы доказать это утверждение, необходимо убедиться в справедливости тождества

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}A_0 = \partial_{x_i}[A_j, A_0] = \partial_{x_j}[A_i, A_0] = \partial_{x_j}\partial_{x_i}A_0.$$

Но

$$\begin{aligned}\partial_{x_i}[A_j, A_0] &= [A_j, \partial_{x_i}A_0] = [A_j, [A_i, A_0]] = \\ &= [A_i, [A_j, A_0]] = [A_i, \partial_{x_j}A_0] = \partial_{x_j}[A_i, A_0],\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Предложение 2. *Общее решение системы уравнений (П.13) имеет вид*

$$\psi(x) = \exp\{A_0x_0\}U_1(x_1)U_2(x_2)U_3(x_3)\chi, \tag{П.22}$$

где

$$U_i(x_i) = I + \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\int_{\theta_i}^{x_i}A_i(x_i)\cdots\int_{\theta_i}^{x_i}}_{n}A_i(x_i)\underbrace{dx_i\cdots dx_i}_{n},$$

$A_i(x_i)$ — произвольные (4×4)-матрицы, удовлетворяющие условиям (П.20), (П.21); χ — произвольный постоянный спинор.

Доказательство. Покажем, что формула

$$\psi(x) = \exp\{A_0x_0\}\varphi(\boldsymbol{x}) \tag{П.23}$$

дает решение системы (П.13), если

$$\partial_{x_i}\varphi = A_i(x_i)\varphi, \qquad i = \overline{1,3}. \tag{П.24}$$

Действительно, в силу того, что $\partial_{x_0}A_0 = 0$, имеем

$$\partial_{x_0}\psi = A_0\psi,$$

кроме того,

$$\partial_{x_i}\varphi = \partial_{x_i}\left\{\sum_n \frac{x_0^n}{n!}A_0^n\right\} = \left\{\sum_n \frac{x_0^n}{n!}A_0^n\right\}\partial_{x_i}\varphi + \left\{\sum_n \frac{x_0^n}{n!}\partial_{x_i}A_0^n\right\}\varphi. \tag{П.25}$$

Так как

$$\begin{aligned}\partial_{x_i}A_0^n &= \frac{\partial A_0}{\partial x_i}A_0^{n-1} + A_0\frac{\partial A_0}{\partial x_i}A_0^{n-2} + \cdots + A_0^{n-1}\frac{\partial A_0}{\partial x_i} = \\ &= [A_i, A_0]A_0^{n-1} + \cdots + A_0^{n-1}[A_i, A_0] = [A_i, A_0^n],\end{aligned} \tag{П.26}$$

то, подставляя (П.25), (П.26) в (П.13), получаем

$$\exp\{A_0x_0\}(\partial_{x_i}\varphi - A_i\varphi) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что общее решение (П.24) может быть записано в виде

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = U_1(x_1)U_2(x_2)U_3(x_3)\chi,$$

где U_i — матрицант i-го уравнения из (П.24), задается формулой (П.22). Для этого необходимо воспользоваться тождеством

$$\left[A_i, \underbrace{\int_{\theta_j}^{x_j} A_j(x_j)\cdots\int_{\theta_j}^{x_j}}_{n} A_j(x_j)\underbrace{dx_j\cdots dx_j}_{n}\right] = 0, \qquad n \geq 1, \quad i \neq j,$$

из которого следует, что

$$[A_i(x_i), U_j(x_j)] = 0, \qquad i \neq j.$$

Особенно простой вид имеют формулы (П.20)–(П.22) в том случае, когда матрицы A_i постоянные. Из (П.20), (П.21) следует, что они должны удовлетворять следующей нелинейной алгебраической системе матричных уравнений:

$$[A_i, A_j] = 0, \qquad [\gamma_0\gamma_k A_k + im\gamma_0, A_i] = 0, \tag{П.27}$$

при этом решение уравнения (П.13)

$$\psi(x) = \exp\{-(\gamma_0\gamma_k A_k + im\gamma_0)x_0 + A_i x_i\}\chi. \tag{П.28}$$

Удается найти общее решение соотношений (П.27), однако полученный результат очень громозкий. Приведем здесь только некоторые частные решения:

$$\begin{gathered} A_1 = -im\gamma_1, \qquad A_2 = \theta\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \qquad A_3 = \theta\gamma_1; \\ A_1 = \theta_1 + \theta_2\gamma_0 + \theta_3\gamma_1\gamma_2 + \theta_4\gamma_3\gamma_4, \qquad A_2 = \gamma_2\gamma_1 A_1, \qquad A_3 = 0, \end{gathered} \tag{П.29}$$

$\theta, \theta_1, \ldots, \theta_4$ — произвольные комплексные константы.

Подставляя (П.29) в (П.28), получаем многопараметрические семейства точных решений уравнения Дирака.

Отметим, что операторы $Q_i = \partial_{x_i} - A_i$, образуя алгебру Ли, вообще говоря, не являются операторами симметрии уравнения Дирака, так как

$$[L, Q_i] = [\gamma_0, A_i]\gamma_0 L + \gamma_0[\gamma_0\gamma_k, A_i]Q_k, \qquad i = \overline{1,3}.$$

В заключение приведем полученными нами решения системы дифференциальных уравнений (П.20), (П.21) вида

$$A_i(x_i) = c_i^1 + c_i^2\gamma_i + c_i^3\gamma_4 + c_i^4\gamma_i\gamma_4, \qquad i = \overline{1,3}, \tag{П.30}$$

где $c_i^k = c_i^k(x_i)$, по i нет суммирования:

$$\begin{aligned} 1. \quad & c_1^1 = \lambda_1\cos\phi, \quad c_1^2 = im + \lambda_1\sin\phi, \quad c_1^3 = c_1^4 = 0, \\ & c_2^1 = \lambda_3\cos\varphi, \quad c_2^2 = \lambda_3\sin\varphi, \quad c_2^3 = c_2^4 = 0, \\ & c_3^1 = \lambda_5, \quad c_3^2 = c_3^3 = c_3^4 = 0, \end{aligned} \tag{П.31}$$

где

$$\phi = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{m}\{\theta\operatorname{tg}(\lambda_2 - 2i\theta x_1) + i\lambda_1\}, \qquad \theta = m^2 + \lambda_1^2,$$

$$\varphi = 2\operatorname{arctg}\left\{\lambda_4 e^{-2\lambda_3 x_2}\right\}, \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_5 = \mathrm{const};$$

$$\begin{aligned}
2.\quad & c_k^1 = \theta_{1k}\left(\theta_{2k}e^{2\theta_{1k}x_k} - 1\right)\left(\theta_{2k}e^{2\theta_{1k}x_k} + 1\right)^{-1}, \\
& c_k^2 = \theta_{2k}(\theta_{1k})^2 e^{2\theta_{1k}x_k}\left(\theta_{2k}e^{2\theta_{1k}x_k} + 1\right)^{-1}, \\
& c_k^3 = 0, \quad c_k^4 = ic_k^2, \quad k = \overline{1,3},
\end{aligned} \tag{П.32}$$

где $\theta_{1k}, \theta_{2k} = \text{const}$;

$$\begin{aligned}
3.\quad & c_1^1 = -i\left(1 + \lambda_2 e^{4i\theta x_1}\right)\left(1 - \lambda_2 e^{4i\theta x_1}\right)^{-1}, \quad c_1^2 = i\lambda_1, \quad c_1^3 = \lambda_1, \\
& c_1^4 = \theta\left(1 + \lambda_2 e^{4i\theta x_1}\right)\left(1 - \lambda_2 e^{4i\theta x_1}\right)^{-1}, \\
& c_2^1 = \lambda_3, \quad c_3^1 = \lambda_5, \quad c_2^k = c_3^k = 0, \quad k = \overline{2,4}.
\end{aligned} \tag{П.33}$$

Подставляя формулы (П.30)–(П.33) в (П.22), получаем точные решения уравнения Дирака вида (П.19). Причем, в силу того, что операторы $Q_i = \partial_{x_i} - A_i(x_i)$ не являются операторами симметрии уравнения (П.18), эти решения не могут быть получены в рамках подхода, используемого в [55, 56, 60].

1. Dirac P.A.M., *Proc. Roy. Soc. A*, 1928, **117**, 610–625.
2. Gorson E.M., Introduction to tensors, spinors and relativistic wave equations, London, 1953.
3. Фущич В.И., Никитин А.Г., *ЭЧАЯ*, 1978, **9**, Вып. 3, 501–553.
4. Фущич В.И., Никитин А.Г., *ЭЧАЯ*, 1981, **12**, Вып. 5, 1157–1219.
5. Фущич В.И., Никитин А.Г., *ЭЧАЯ*, 1983, **14**, Вып. 1, 5–57.
6. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наукова думка, 1983.
7. Ivanenko D., *Phys. Z. Sowjet.*, 1938, **13**, 141–150.
8. Heisenberg W., *Nachr. Akad. Wiss. Götingen*, 1953, № 8, 111–122.
9. Heisenberg W., *Rev. Mod. Phys.*, 1957, **29**, 269–300.
10. Нелинейная квантовая теория поля: Сб. статей, М., Изд-во иностр. лит., 1959.
11. Finkelstein R., LeLevier R., Ruderman M., *Phys. Rev.*, 1951, **83**, 326–335.
12. Gürsey F., *Nuovo Cimento*, 1956, **3**, 988–997.
13. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Zhdanov R.Z., *Phys. Lett. B*, 1985, **159**, 189–191.
14. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, в Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1983, 4–23.
15. Фущич В.И., О пуанкаре-, галилеево-инвариантных нелинейных уравнениях и методах их решений, в Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1985, 4–19.
16. Kortel F., *Nuovo Cimento*, 1956, **4**, 729–735.
17. Merwe P.T., *Phys. Lett. B*, 1981, **106**, 485–487.
18. Barut A.O., Xu B.W., *Phys. Rev. D*, 1981, **23**, 3076–3077.
19. Barut A.O., Xu B.W., *Physica D*, 1982, **6**, 137–139.
20. Akdeniz K.G., *Lett. Nuovo Cimento*, 1982, **33**, 40–44.
21. Akdeniz K.G., Smailagic A., *Lett. Math. Phys.*, 1984, **8**, 175–179.
22. Курдгелаидзе Д.Ф., *ЖЭТФ*, 1957, **32**, 1156–1162.
23. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1981, 6–28.
24. Фущич В.И., Штелень В.М., *Докл. АН СССР*, 1983, **269**, 88–92.
25. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *J. Phys. A*, 1983, **16**, 271–277.

26. Фущич В.И., Жданов Р.З., Точные решения систем нелинейных дифференциальных уравнений для спинорного и векторного полей, в Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1985, 20–30.

27. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., *J. Phys. A*, 1987, **20**, 4173–4190.

28. Фущич В.И., *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, 116–123.

29. Fushchych W.I., Serov N.I., *J. Phys. A*, 1983, **16**, 3645–3656.

30. Фущич В.И., Чернига Р.М., О точных решениях двух многомерных нелинейных уравнений шредингеровского типа, Препринт 86.85, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1986.

31. Fushchych W.I., Tsifra I.M., *J. Phys. A*, 1987, **20**, L45–L48.

32. Lie S., Teorie der Transformationgruppen, Bd. 1–3, Leipzig, 1888, 1890, 1893.

33. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978.

34. Ибрагимов Н.Х., Группы преобразований в математической физике, М., Наука, 1983.

35. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Введение в теорию квантованных полей, М., Наука, 1984.

36. Finkelstein R., Fronsdal C., Kaust P., *Phys. Rev.*, 1956, **103**, 365–369.

37. Курант Р., Уравнения с частными производными: Пер. с англ., М., Мир, 1964.

38. Morgan A.G.A., *Quart. J. Math. Oxford*, 1952, **3**, 250–259.

39. Биркгоф Г., Гидродинамика: Пер. с англ., М., Изд-во иностр. лит., 1953.

40. Корняк В.В., Применение ЭВМ для исследования симметрий некоторых уравнений математической физики, в Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1985, 114–119.

41. Bhabha H.J., *Rev. Mod. Phys.*, 1945, **17**, 200–215.

42. Levi-Leblonde J.-M., *J. Math. Phys.*, 1963, **4**, 776–792.

43. Фущич В.И., Тычинин В.А., О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований, Препринт 82.33, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1982.

44. Фущич В.И., Серова М.М., *Докл. АН СССР*, 1983, **268**, 1102–1104.

45. Thirring W., *Ann. Phys.*, 1958, **3**, 91–112.

46. Scarf F.L., *Phys. Rev.*, 1960, **117**, 693–695.

47. Фущич В.И., Тычинин В.А., Жданов Р.З., Нелокальная линеаризация и точные решения некоторых уравнений Монжа–Ампера, Дирака, Препринт 85.34, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1985.

48. Cole L.D., *Quart. Appl. Math.*, 1951, **9**, 225–236.

49. Hopf E., *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1950, **3**, 201–230.

50. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, 1597–1624.

51. Bacry H., Combe Ph., Sorba P., *Repts. Math. Phys.*, 1974, **5**, 145–186.

52. Bacry H., Combe Ph., Sorba P., *Repts. Math. Phys.*, 1974, **5**, 361–392.

53. Grunland A.M., Harnad J., Winternitz P., *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, 791–807.

54. Фущич В.И., Штелень В.М., *ТМФ*, 1987, **72**, 35–44.

55. Миллер У., Симметрия и разделение переменных, Пер. с англ., М., Мир, 1981.

56. Багров В.Г., Гитман Д.М., Тернов И.М. и др., Точные решения релятивистских волновых уравнений, Новосибирск, Наука, 1982.

57. Эйзенхарт Л.П., Непрерывные группы преобразований, Пер. с англ., М., Изд-во иностр. лит., 1947.

58. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Dordrecht, D. Reidel Publ. Company, 1987.

59. Cook A.H., *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 1982, **383**, 247–278.

60. Kalnins E.G., Miller W., Williams G.C., *J. Math. Phys.*, 1986, **27**, 1893–1900.