Системи нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку, інваріантні відносно алгебри Галілея та її розширень

В.І. ФУЩИЧ, Р.М. ЧЕРНІГА

New classes of systems of nonlinear evolution equations are constructed which are invariant in regard to the Galilei algebra and its extentions (including operators of scale and projective transformations). New nonlinear generalisation of the Schödinger equation are proposed which retain Galilean symmetry of the linear equation.

Нижче розглядаються системи нелінійних двовимірних параболічних рівнянь вигляду

$$\lambda_1\psi_t^{(1)} = A^{11}\psi_{xx}^{(1)} + A^{12}\psi_{xx}^{(2)} + B^{(1)}, \quad \lambda_2\psi_t^{(2)} = A^{21}\psi_{xx}^{(1)} + A^{22}\psi_{xx}^{(2)} + B^{(2)}, \tag{1}$$

де $A^{nm} = A^{nm}(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \psi_x^{(1)}, \psi_x^{(2)})$, $B^{(n)} = B^{(n)}(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \psi_x^{(1)}, \psi_x^{(2)})$ — довільні комплексні або дійсні функції, неперервно диференційовані за всіма змінними, $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $\psi_t^{(n)} = \frac{\partial\psi^{(n)}}{\partial t}$, $\psi_x^{(n)} = \frac{\partial\psi^{(n)}}{\partial x}$, $\psi_{xx}^{(n)} = \frac{\partial^2\psi^{(n)}}{\partial x^2}$, $\psi^{(n)} = \psi^{(n)}(t,x)$ — шукані комплексні або дійсні функції, індекси n і m скрізь набувають значень 1, 2.

Система рівнянь (1) узагальнює практично всі відомі двовимірні системи еволюційних рівнянь другого порядку, якими описуються найрізноманітніші процеси у фізиці, хімії, біології (досить згадати процеси тепломасопереносу, фільтрації двофазної рідини, дифузії при хімічних реакціях, руху популяції в природі тощо) [1].

У випадку комплексних функцій $\psi = \psi^{(1)} = \psi^{*(2)}$, $C = A^{11} = A^{*22}$, $D = A^{12} = A^{*21}$, $B = B^{(1)} = B^{*(2)}$, $\lambda_1 = \lambda_2^* = i$ система рівнянь (1) перетворюється на пару комплексно спряжених рівнянь, які інтерпретуватимемо як клас нелінійних узагальнень рівняння Шредінгера, а саме:

$$i\psi_t = C\psi_{xx} + D\psi_{xx}^* + B, \tag{2a}$$

$$-i\psi_t^* = C^*\psi_{xx}^* + D^*\psi_{xx}^* + B^* \tag{2b}$$

(нижче комплексно спряжені рівняння (2b) скрізь опущено). Очевидно, що при $C = k \in \mathbb{R}$, $D = B = 0$ рівняння (2a) перетворюється на класичне рівняння Шредінгера з нульовим потенціалом

$$i\psi_t = k\psi_{xx}, \quad 0 \neq k \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Шляхом відповідного вибору функції $B(\psi, \psi^*, \psi_x, \psi_x^*)$ можна одержати найрізноманітніші нелінійні узагальнення рівняння (3), які зустрічаються в літературі [2, 4].

Відомо, що лінійне рівняння (3) інваріантне відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$ з базовими операторами [3, 4]

$$P_t = \partial_t, \quad P_x = \partial_x, \tag{4a}$$

Доповіді АН України, 1993, № 8, С. 44–51.

$$G_x = t\partial_x - \frac{x}{2k}J, \quad J = i(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}), \tag{4b}$$

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + \alpha(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}), \tag{4c}$$

$$\Pi = tD - t^2\partial_t - \frac{x^2}{4k}J, \quad \alpha = -\frac{1}{2}, \tag{4d}$$

де $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_\psi = \frac{\partial}{\partial \psi}$, $\partial_{\psi^*} = \frac{\partial}{\partial \psi^*}$.

Алгебру, утворену операторами (4a), (4b), називають алгеброю Галілея $AG(1,1)$, а її розширення за допомогою оператора (4c) позначимо $AG_1(1,1)$. Відзначимо, що симетрія багатовимірних систем рівнянь (1) при $A^{nm} = A^{nm}(\psi^{(1)}, \psi^{(2)})$, $A^{12} = A^{21} = 0$ досліджена в роботі [4]. Проте для математичного моделювання деяких процесів необхідно вимагати, щоб $A_{12} \neq 0$, $A^{21} \neq 0$ (див., наприклад, [2, 5]). З іншого боку, в останні роки запропоновано деякі нелінійні рівняння Шредінгера [6, 7], які, згідно з висновками роботи [4], не зберігають галілеївську симетрію лінійного рівняння (3). Це підкреслює необхідність побудови систем рівнянь вигляду (1), інваріантних відносно ланцюжка алгебр $AG(1,1) \subset AG_1(1,1) \subset AG_2(1,1)$.

Розглянемо алгебру Галілея з зображенням (4a) і

$$G_x = t\partial_x - \frac{x}{2}J_\lambda, \quad J_\lambda = \lambda_1\psi^{(1)}\partial_{\psi^{(1)}} + \lambda_2\psi^{(2)}\partial_{\psi^{(2)}}. \tag{5}$$

Теорема 1. *Система нелінійних рівнянь (1) інваріантна відносно алгебри Галілея з зображенням (4a), (5) тоді і тільки тоді, коли вона має вигляд*

1) у випадку $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$

$$\begin{gathered}
\lambda_1\psi_t^{(1)} = g^{11}\left(\psi_{xx}^{(1)} - \frac{(\psi_x^{(1)})^2}{\psi^{(1)}}\right) + g^{12}\frac{\psi^{(1)}}{\psi^{(2)}}\left(\psi_{xx}^{(2)} - \frac{(\psi_x^{(2)})^2}{\psi^{(2)}}\right) + \\
+ \psi^{(1)}\left(f^{(1)} + \left(\frac{\psi_x^{(1)}}{\psi^{(1)}}\right)^2\right), \\
\lambda_2\psi_t^{(2)} = g^{21}\frac{\psi^{(2)}}{\psi^{(1)}}\left(\psi_{xx}^{(1)} - \frac{(\psi_x^{(1)})^2}{\psi^{(1)}}\right) + g^{22}\left(\psi_{xx}^{(2)} - \frac{(\psi_x^{(2)})^2}{\psi^{(2)}}\right) + \\
+ \psi^{(2)}\left(f^{(2)} + \left(\frac{\psi_x^{(2)}}{\psi^{(2)}}\right)^2\right),
\end{gathered} \tag{6}$$

де $g^{nm} = g^{nm}(v, v_x)$, $f^{(n)} = f^{(n)}(v, v_x)$ *— довільні функції,*

$$v = (\psi^{(1)})^{\lambda_2}(\psi^{(2)})^{-\lambda_1}, \quad v_x = \frac{\partial v}{\partial x} \equiv \left(\lambda_2\frac{\psi_x^{(1)}}{\psi^{(1)}} - \lambda_1\frac{\psi_x^{(2)}}{\psi^{(2)}}\right)v;$$

2) у випадку $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda \neq 0$

$$\begin{gathered}
0 = g^{11}\psi_{xx}^{(1)} + g^{12}\frac{\psi^{(1)}}{\psi^{(2)}}\left(\psi_{xx}^{(2)} - \frac{(\psi_x^{(2)})^2}{\psi^{(2)}}\right) + \psi^{(1)}f^{(1)}, \\
\lambda\psi_t^{(2)} = g^{21}\frac{\psi^{(2)}}{\psi^{(1)}}\psi_{xx}^{(1)} + g^{22}\left(\psi_{xx}^{(2)} - \frac{(\psi_x^{(2)})^2}{\psi^{(2)}}\right) + \psi^{(2)}\left(f^{(2)} + \left(\frac{\psi_x^{(2)}}{\psi^{(2)}}\right)^2\right),
\end{gathered} \tag{7}$$

де $g^{nm} = g^{nm}(\psi^{(1)}, \psi^{(1)}_x)$, $f^{(n)} = f^{(n)}(\psi^{(1)}, \psi^{(1)}_x)$ *— довільні функції.*

Доведення теореми 1, як і теорем 2, 3, грунтується на класичній схемі Лі, реалізація якої для знаходження галілей-інваріантних систем наведена в роботі [8]. Оскільки викладки досить громіздкі, ми їх опускаємо.

Наслідок 1. *В класі нелінійних рівнянь (2) алгебру* $AG(1,1)$ *(4a)–(4b) лінійного рівняння Шредінгера (3) зберігають тільки такі:*

$$\frac{i}{k}\psi_t = g^{(1)}\left(\psi_{xx} - \frac{(\psi_x)^2}{\psi}\right) + g^{(2)}\frac{\psi}{\psi^*}\left(\psi^*_{xx} - \frac{(\psi^*_x)^2}{\psi^*}\right) + \psi\left(f + \left(\frac{\psi_x}{\psi}\right)^2\right), \quad (8)$$

де $g^{(n)} = g^{(n)}(|\psi|, |\psi|_x)$, $f = f(|\psi|, |\psi|_x)$ *— довільні функції,* $|\psi| = \sqrt{\psi\psi^*}$, $|\psi|_x = \frac{\partial|\psi|}{\partial x}$.

Легко помітити, що рівняння (8) при $g^{(1)} = 1$, $g^{(2)} = 0$ і $f = a|\psi|^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$ перетворюється на відоме рівняння Шредінгера зі степеневою нелінійністю, а при $g^{(1)} = 0$, $g^{(2)} = -1$, $f = -4|\psi|^2_x|\psi|^{-6} + a|\psi|^2$, $a \in \mathbb{C}$ — на рівняння

$$\frac{i}{k}\psi_t = -\frac{\psi}{\psi^*}\psi^*_{xx} + a\psi|\psi|^2 - 2\psi\frac{|\psi_x|^2}{|\psi|^2}, \quad (9)$$

яке за структурою нагадує рівняння [6, 7]

$$i\psi_t = c_1\psi_{xx} + a\psi|\psi|^2 - c\psi\frac{|\psi_x|^2}{|\psi|^2}, \quad c_1, c \in \mathbb{C}. \quad (10)$$

Відзначимо, що рівняння (10), на відміну від (9), не інваріантне відносно алгебри Галілея, оскільки воно не належить класу (8).

Розглянемо алгебри $AG_1(1,1)$ і $AG_2(1,1)$, які є розширеннями алгебри Галілея $AG(1,1)$ (4a), (5), за допомогою операторів

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + I_\alpha, \quad (11a)$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x - \frac{x^2}{4}J_\lambda + tI_\alpha, \quad (11b)$$

де $I_\alpha = \alpha_1\psi^{(1)}\partial_{\psi^{(1)}} + \alpha_2\psi^{(2)}\partial_{\psi^{(2)}}$, $\alpha_n \in \mathbb{C}$ (для рівняння Шредінгера (3) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\lambda_1 = \lambda_2^* = \frac{i}{k}$). Виявляється, що класифікація систем рівнянь, інваріантних відносно алгебр $AG_1(1,1)$ і $AG_2(1,1)$, суттєво залежить від значення визначника $\delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}$, який, зокрема, при $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda \neq 0$ дорівнює $\lambda\alpha_2$.

Теорема 2. *Система нелінійних рівнянь (1) інваріантна відносно алгебри* $AG_1(1,1)$ *з базовими операторами (4a), (5), (11a) тоді і тільки тоді, коли вона має вигляд*

1) у випадку $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$

$$\lambda_1\psi_t^{(1)} = h^{11}\left(\psi_{xx}^{(1)} - \frac{(\psi_x^{(1)})^2}{\psi^{(1)}}\right) + h^{12}\frac{\psi^{(1)}}{\psi^{(2)}}\left(\psi_{xx}^{(2)} - \frac{(\psi_x^{(2)})^2}{\psi^{(2)}}\right) + \\ + \psi^{(1)}\left(v^{-\frac{2}{\delta}}W^{(1)} + \left(\frac{\psi_x^{(1)}}{\psi^{(1)}}\right)^2\right),$$

$$\lambda_2\psi_t^{(2)} = h^{21}\frac{\psi^{(2)}}{\psi^{(1)}}\left(\psi_{xx}^{(1)} - \frac{(\psi_x^{(1)})^2}{\psi^{(1)}}\right) + h^{22}\left(\psi_{xx}^{(2)} - \frac{(\psi_x^{(2)})^2}{\psi^{(2)}}\right) + \\ + \psi^{(2)}\left(v^{-\frac{2}{\delta}}W^{(2)} + \left(\frac{\psi_x^{(2)}}{\psi^{(2)}}\right)^2\right),$$

де $h^{nm} = h^{nm}(\theta)$, $W^{(n)} = W^{(n)}(\theta)$ — *довільні функції,*

$$\theta = v_x v^{\frac{1}{\delta}-1} \equiv \left(\lambda_2\frac{\psi_x^{(1)}}{\psi^{(1)}} - \lambda_1\frac{\psi_x^{(2)}}{\psi^{(2)}}\right),$$

якщо $\delta \neq 0$ *або, якщо* $\delta = 0$ — *вигляд*

$$\lambda_1\psi_t^{(1)} = h^{11}\left(\psi_{xx}^{(1)} - \frac{(\psi_x^{(1)})^2}{\psi^{(1)}}\right) + h^{12}\frac{\psi^{(1)}}{\psi^{(2)}}\left(\psi_{xx}^{(2)} - \frac{(\psi_x^{(2)})^2}{\psi^{(2)}}\right) + \\ + \psi^{(1)}\left(v_x^2W^{(1)} + \left(\frac{\psi_x^{(1)}}{\psi^{(1)}}\right)^2\right),$$

$$\lambda_2\psi_t^{(2)} = h^{21}\frac{\psi^{(2)}}{\psi^{(1)}}\left(\psi_{xx}^{(1)} - \frac{(\psi_x^{(1)})^2}{\psi^{(1)}}\right) + h^{22}\left(\psi_{xx}^{(2)} - \frac{(\psi_x^{(2)})^2}{\psi^{(2)}}\right) + \\ + \psi^{(2)}\left(v_x^2W^{(2)} + \left(\frac{\psi_x^{(2)}}{\psi^{(2)}}\right)^2\right),$$

де $h^{nm} = h^{nm}(v)$, $W^{(n)} = W^{(n)}(v)$ — *довільні функції, (*v*,* v_x — *див. теорему 1).*

2) у випадку $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda \neq 0$

$$0 = h^{11}\psi_{xx}^{(1)} + h^{12}\frac{\psi^{(1)}}{\psi^{(2)}}\left(\psi_{xx}^{(2)} - \frac{(\psi_x^{(2)})^2}{\psi^{(2)}}\right) + (\psi^{(1)})^{1-2/\alpha_1}W^{(1)},$$

$$\lambda\psi_t^{(2)} = h^{21}\frac{\psi^{(2)}}{\psi^{(1)}}\psi_{xx}^{(1)} + h^{22}\left(\psi_{xx}^{(2)} - \frac{(\psi_x^{(2)})^2}{\psi^{(2)}}\right) + \\ + \psi^{(2)}\left((\psi^{(1)})^{-\frac{2}{\alpha_1}}W^{(2)} + \left(\frac{\psi_x^{(2)}}{\psi^{(2)}}\right)^2\right),$$

де $h^{nm} = h^{nm}(\theta_0)$, $W^{(n)} = W^{(n)}(\theta_0)$ *— довільні функції,* $\theta_0 = \psi_x^{(1)}(\psi^{(1)})^{\frac{1}{\alpha_1}-1}$, *якщо* $\alpha_1 \neq 0$ *або, якщо* $\alpha_1 = 0$ *— вигляд*

$$
\begin{aligned}
0 &= h^{11}\psi_{xx}^{(1)} + h^{12}\frac{\psi^{(1)}}{\psi^{(2)}}\left(\psi_{xx}^{(2)} - \frac{(\psi_x^{(2)})^2}{\psi^{(2)}}\right) + \psi^{(1)}(\psi_x^{(1)})^1 W^{(1)},\\
\lambda\psi_t^{(2)} &= h^{21}\frac{\psi^{(2)}}{\psi^{(1)}}\psi_{xx}^{(1)} + h^{22}\left(\psi_{xx}^{(2)} - \frac{(\psi_x^{(2)})^2}{\psi^{(2)}}\right) + \\
&\quad + \psi^{(2)}\left((\psi_x^{(1)})^2 W^{(2)} + \left(\frac{\psi_x^{(2)}}{\psi^{(2)}}\right)^2\right),
\end{aligned}
$$

де $h^{nm} = h^{nm}(\psi^{(1)})$, $W^{(n)} = W^{(n)}(\psi^{(1)})$ *— довільні функції.*

Наслідок 2. *В класі нелінійних рівнянь (2) алгебру* $AG_1(1,1)$ *(4a)–(4b), (11a) лінійного рівняння Шредінгера (3) зберігають тільки такі:*

$$
\begin{aligned}
\frac{i}{k}\psi_t &= h^{(1)}\left(\psi_{xx} - \frac{(\psi_x)^2}{\psi}\right) + h^{(2)}\frac{\psi}{\psi^*}\left(\psi_{xx}^* - \frac{(\psi_x^*)^2}{\psi^*}\right) + \\
&\quad + \psi\left(|\psi|^{-\frac{2}{\alpha}}W + \left(\frac{\psi_x}{\psi}\right)^2\right),
\end{aligned}
\tag{12}
$$

де $h^{(n)} = h^{(n)}\left(|\psi|_x|\psi|^{\frac{1}{\alpha}-1}\right)$, $W = W\left(|\psi|_x|\psi|^{\frac{1}{\alpha}-1}\right)$ *— довільні функції,* $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ *— параметр в операторі* I_α, $\alpha \neq 0$.

Теорема 3. *Система нелінійних рівнянь (1) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея* $AG_2(1,1)$ *з базовими операторами (4a), (5), (11) тоді і тільки тоді, коли вона має вигляд*

1) у випадку $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$

$$
\begin{aligned}
\lambda_1\psi_t^{(1)} &= h^{11}\left(\psi_{xx}^{(1)} - \frac{(\psi_x^{(1)})^2}{\psi^{(1)}}\right) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(h^{11} + 2\alpha_1)\frac{\psi^{(1)}}{\psi^{(2)}}\left(\psi_{xx}^{(2)} - \frac{(\psi_x^{(2)})^2}{\psi^{(2)}}\right) + \\
&\quad + \psi^{(1)}\left(v^{-\frac{2}{\delta}}W^{(1)} + \left(\frac{\psi_x^{(1)}}{\psi^{(1)}}\right)^2\right),\\
\lambda_2\psi_t^{(2)} &= -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(h^{22} + 2\alpha_2)\frac{\psi^{(2)}}{\psi^{(1)}}\left(\psi_{xx}^{(1)} - \frac{(\psi_x^{(1)})^2}{\psi^{(1)}}\right) + h^{22}\left(\psi_{xx}^{(2)} - \frac{(\psi_x^{(2)})^2}{\psi^{(2)}}\right) + \\
&\quad + \psi^{(2)}\left(v^{-\frac{2}{\delta}}W^{(2)} + \left(\frac{\psi_x^{(2)}}{\psi^{(2)}}\right)^2\right),
\end{aligned}
$$

де $h^{nn} = h^{nn}(\theta)$, $W^{(n)} = W^{(n)}(\theta)$ *— довільні функції (*v, θ *— див. теореми 1, 2),* *якщо $\delta \neq 0$ або, якщо $\delta = 0$ — вигляд*

$$\lambda_1\psi_t^{(1)} = h^{11}\left(\psi_{xx}^{(1)} - \frac{(\psi_x^{(1)})^2}{\psi^{(1)}}\right) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(h^{11}+2\alpha_1)\frac{\psi^{(1)}}{\psi^{(2)}}\left(\psi_{xx}^{(2)} - \frac{(\psi_x^{(2)})^2}{\psi^{(2)}}\right) + $$
$$+\psi^{(1)}\left(v_x^2 W^{(1)} + \left(\frac{\psi_x^{(1)}}{\psi^{(1)}}\right)^2\right),$$

$$\lambda_2\psi_t^{(2)} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(h^{22}+2\alpha_2)\frac{\psi^{(2)}}{\psi^{(1)}}\left(\psi_{xx}^{(1)} - \frac{(\psi_x^{(1)})^2}{\psi^{(1)}}\right) + h^{22}\left(\psi_{xx}^{(2)} - \frac{(\psi_x^{(2)})^2}{\psi^{(2)}}\right) + $$
$$+\psi^{(2)}\left(v_x^2 W^{(2)} + \left(\frac{\psi_x^{(2)}}{\psi^{(2)}}\right)^2\right),$$

де $h^{nn} = h^{nn}(v)$, $W^{(n)} = W^{(n)}(v)$ — довільні функції;

2) у випадку $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda \neq 0$

$$0 = h^{11}\psi_{xx}^{(1)} + (\psi^{(1)})^{1-2/\alpha_1}W^{(1)}, \tag{13a}$$

$$\lambda\psi_t^{(2)} = h^{22}\frac{\psi^{(2)}}{\psi^{(1)}}\psi_{xx}^{(1)} - 2\alpha_2\psi_{xx}^{(2)}(1+2\alpha_2)\frac{(\psi_x^{(2)})^2}{\psi^{(2)}} + \psi^{(2)}(\psi^{(1)})^{-2/\alpha_1}W^{(2)}, \tag{13b}$$

де $h^{nn} = h^{nn}(\theta_0)$, $W^{(n)} = W^{(n)}(\theta_0)$ — довільні функції (θ_0 — див. теорему 2), якщо $\alpha_1 \neq 0$ або, якщо $\alpha_1 = 0$

$$0 = h^{11}\psi_{xx}^{(1)} + \psi^{(1)}(\psi_x^{(1)})^2 W^{(1)}, \tag{14a}$$

$$\lambda\psi_t^{(2)} = h^{22}\frac{\psi^{(2)}}{\psi^{(1)}}\psi_{xx}^{(1)} - 2\alpha_2\psi_{xx}^{(2)} + (1+2\alpha_2)\frac{(\psi_x^{(2)})^2}{\psi^{(2)}} + \psi^{(2)}(\psi_x^{(1)})^2 W^{(2)}, \tag{14b}$$

де $h^{nn} = h^{nn}(\psi^{(1)})$, $W^{(n)} = W^{(n)}(\psi^{(1)})$ — довільні функції.

Варто зауважити, що для $AG_2(1,1)$-інваріантних систем рівнянь (13), (14) значно простіше вирішується питання їх інтегрування. Дійсно, завдяки відсутності шуканої функції $\psi^{(2)}$ у перших рівняннях цих систем, вони перетворюються на звичайні диференціальні рівняння другого порядку. Загальний розв'язок рівняння (14a) для довільних функцій h^{11}, $W^{(1)}$ у неявному вигляді записується так:

$$\int\left[\exp\int W^{(1)}/h^{11}d\psi^{(1)}\right]d\psi^{(1)} + e^{-a(t)}\psi^{(1)} = x + b(t),$$

Проінтегрувавши ці рівняння і підставивши знайдені розв'язки $\psi^{(1)}(t,x)$ в (13b) і (14b), одержимо рівняння для знаходження функції $\psi^{(2)}$, які лінеаризуються заміною $\Phi = (\psi^{(2)})^{-1/2\alpha_2}$, $\alpha_2 \neq 0$.

Таким чином, для відшукання функції $\Phi(t,x)$ в обох випадках одержуємо лінійне рівняння вигляду

$$\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -2\alpha_2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \Phi F(t,x),$$

для інтегрування якого можна вибрати той чи інший класичний метод залежно від конкретного значення функції

$$F(t,x)=\begin{cases}(\psi^{(1)})^{-2/\alpha_1}\left(W^{(2)}-W^{(1)}\dfrac{h^{22}}{h^{11}}\right), & \psi^{(1)}(t,x)\ \text{— розв'язок (13а)},\\ (\psi^{(1)}_x)^{2}\left(W^{(2)}-W^{(1)}\dfrac{h^{22}}{h^{11}}\right), & \psi^{(1)}(t,x)\ \text{— розв'язок (14а)}.\end{cases}$$

Наслідок 3. *В класі нелінійних рівнянь (2) алгебру $AG_2(1,1)$ лінійного рівняння Шредінгера (3) зберігають тільки такі рівняння:*

$$\frac{i}{k}\psi_t=h\left(\psi_{xx}-\frac{(\psi_x)^2}{\psi}\right)+(h-1)\frac{\psi}{\psi^*}\left(\psi^*_{xx}-\frac{(\psi^*_x)^2}{\psi^*}\right)+ \\ +\psi\left(|\psi|^4W+\left(\frac{\psi_x}{\psi}\right)^2\right), \tag{15}$$

де $h=h\left(|\psi|_x|\psi|^{-3}\right)$, $W=W\left(|\psi|_x|\psi|^{-3}\right)$ — довільні функції.

У випадку $h=1$, $W=0$ рівняння (15) переходить у лінійне рівняння (3), а при $h=1$ — у рівняння [4, 8]

$$i\psi_t=k\psi_{xx}+\psi|\psi|^4W,$$

яке в свою чергу при $W=\lambda_1+\lambda_2|\psi|_x|\psi|^{-3}$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ зводиться до [10]

$$i\psi_t=k\psi_{xx}+\lambda_1\psi|\psi|^4+\lambda_2\psi|\psi||\psi|_x. \tag{15$'$}$$

Зауважимо, що при $k=-1$, $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-4$ рівняння (15$'$) відоме в літературі як рівняння Екгауса [11], проте, наскільки нам відомо, досі ніхто не вказував на такий факт:

Наслідок 4. *Рівняння Екгауса $i\psi_t+\psi_{xx}+\psi|\psi|^4+4\psi|\psi||\psi|_x=0$ зберігає симетрію лінійного рівняння Шредінгера, тобто алгебру з базовими операторами (4).*

Разом з тим клас рівнянь (15) містить таке нетривіальне узагальнення рівняння (3), що зберігає його симетрію, як

$$i\psi_t=-k\frac{\psi}{\psi^*}\psi^*_{xx}+k\psi\left(\left(\frac{\psi_x}{\psi}\right)^2+\left(\frac{\psi^*_x}{\psi^*}\right)^2\right). \tag{16}$$

Зазначимо, що в рівнянні (16) потенціал

$$V=\left(\frac{\psi_x}{\psi}\right)^2+\left(\frac{\psi^*_x}{\psi^*}\right)^2=2\left(2|\psi|_x^2-|\psi_x|^2\right)/|\psi|^2$$

— дійсна функція.

При $h=0$, $W=-4\left(|\psi|_x|\psi|^{-3}\right)^2+a$ рівняння (15) зводиться до рівняння

$$\frac{i}{k}\psi_t=-\frac{\psi}{\psi^*}\psi^*_{xx}+a\psi|\psi|^4-2\psi\frac{|\psi_x|^2}{|\psi|^2}. \tag{17}$$

Рівняння (17) поряд з (9), (10) логічно інтерпретувати як нелінійні рівняння Шредінгера. Проте на противагу рівнянням (9), (10), рівняння (17) повністю зберігає симетрію, тобто алгебру інваріантності $AG_2(1,1)$ лінійного рівняння (3).

Виявляється, що вислiди, одержанi в теоремах 1, 2, 3, неможливо тривiальним чином узагальнити на багатовимiрний випадок. Про це свiдчить

Теорема 4. *В класi нелiнiйних $(n+1)$-вимiрних еволюцiйних систем*

$$\lambda_k\psi_t^{(k)} = A_{ab}^{k1}(\psi^{(1)},\psi^{(2)},\underset{1}{\psi}^{(1)},\underset{1}{\psi}^{(2)})\psi_{ab}^{(1)} + A_{ab}^{k2}(\psi^{(1)},\psi^{(2)},\underset{1}{\psi}^{(1)},\underset{1}{\psi}^{(2)})\psi_{ab}^{(2)} + \\ + B^{(k)}(\psi^{(1)},\psi^{(2)},\underset{1}{\psi}^{(1)},\underset{1}{\psi}^{(2)}), \tag{18}$$

де $k=1,2$, $\psi^{(k)}=\psi^{(k)}(t,x_1,\ldots,x_n)$, $\underset{1}{\psi}^{(k)}=(\psi_1^{(k)},\ldots,\psi_n^{(k)})$, $\psi_a^{(k)}=\frac{\psi^{(k)}}{\partial x_a}$, $\psi_{ab}^{(k)}=\frac{\partial^2\psi^{(k)}}{\partial x_a\partial x_b}$, $A_{ab}^{kk_1}$, $B^{(k)}$ — достатньо гладкi функцiї вiд $2(n+1)$ аргументiв, iнварiантними вiдносно алгебри Галiлея $AG(1,n)$ [4] є тiльки системи вигляду

$$\lambda_k\psi_t^{(k)} = A_0^{kk}\left(\Delta\psi^{(k)} - \frac{\psi_a^{(k)}\psi_a^{(k)}}{\psi^{(k)}}\right) + \frac{\psi^{(k)}}{\psi^{(k_1)}}A_0^{kk_1}\left(\Delta\psi^{(k_1)} - \frac{\psi_a^{(k_1)}\psi_a^{(k_1)}}{\psi^{(k_1)}}\right) + \\ + A^{kk}\frac{\partial v}{\partial x_a}\frac{\partial v}{\partial x_b}\left(\psi_{ab}^{(k)} - \frac{\psi_a^{(k)}\psi_b^{(k)}}{\psi^{(k)}}\right) + \\ + \frac{\psi^{(k)}}{\psi^{(k_1)}}A^{kk_1}\frac{\partial v}{\partial x_a}\frac{\partial v}{\partial x_b}\left(\psi_{ab}^{(k_1)} - \frac{\psi_a^{(k_1)}\psi_b^{(k_1)}}{\psi^{(k_1)}}\right) + \\ + \psi^{(k)}B_0^{(k)} + \frac{\psi_a^{(k)}\psi_a^{(k)}}{\psi^{(k)}}, \quad k,k_1=1,2, \quad k\neq k_1, \tag{19}$$

де $A_0^{k_1k_2}$, $A^{k_1k_2}$, $B_0^{(k)}$ — довiльнi функцiї аргументiв $v=(\psi^{(1)})^{\lambda_2}(\psi^{(2)})^{-\lambda_1}$, $\theta=\frac{\partial v}{\partial x_a}\frac{\partial v}{\partial x_a}$. За iндексами a, b, що повторюються, слiд пiдсумовувати вiд 1 до n, $k_2=1,2$.

Наслiдок 5. *У випадку, коли система рiвнянь (19) являє собою пару комплексно спряжених рiвнянь, одержуємо клас нелiнiйних узагальнень рiвняння Шредiнгера*

$$i\psi_t = A^{(1)}\left(\Delta\psi - \frac{\psi_a\psi_a}{\psi}\right) + \frac{\psi}{\psi^*}A^{(2)}\left(\Delta\psi^* - \frac{\psi_a^*\psi_a^*}{\psi^*}\right) + \psi B + \frac{\psi_a\psi_a}{\psi} + \\ + A^{(3)}(\psi\psi^*)_a(\psi\psi^*)_b\left(\psi_{ab} - \frac{\psi_a\psi_b}{\psi}\right) + \frac{\psi}{\psi^*}A^{(4)}(\psi\psi^*)_a(\psi\psi^*)_b\left(\psi_{ab}^* - \frac{\psi_a^*\psi_b^*}{\psi^*}\right), \tag{20}$$

якi зберiгають алгебру $AG(1,n)$ лiнiйного $(n+1)$-вимiрного рiвняння Шредiнгера.

У рiвняннях (20) $A^{(j)}$, $j=1,2,3,4$, B — довiльнi функцiї вiд двох аргументiв $\psi\psi^*$, $(\psi\psi^*)_a(\psi\psi^*)_a$, $(\psi\psi^*)_a\equiv\frac{\partial(\psi\psi^*)}{\partial x_a}$. Зокрема, клас рiвнянь (20) мiстить такi нетривiальнi узагальнення рiвняння Шредiнгера, якi не мають аналогiв у класi двовимiрних рiвнянь (2), як

$$i\psi_t = k\Delta\psi + \lambda|\psi|^\alpha|\psi|_a|\psi|_b\left(\psi_{ab} - \frac{\psi_a\psi_b}{\psi}\right),$$

$$i\psi_t = k\Delta\psi + \lambda\frac{|\psi|_a|\psi|_b}{|\psi|_{a_1}|\psi|_{a_1}}\left(\psi_{ab} - \frac{\psi_a\psi_b}{\psi}\right),$$

$$i\psi_t = k\Delta\psi + \lambda|\psi|_a|\psi|_b\left(\psi_{ab} - \frac{\psi_a\psi_b}{\psi} + \frac{\psi}{\psi^*}\left(\psi^*_{ab} - \frac{\psi^*_a\psi^*_b}{\psi^*}\right)\right),$$

де індекси $a, a_1, b = 1, 2, \ldots, n$, $|\psi|^2_a \equiv (\psi\psi^*)_a$, $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$.

Серед класу рівнянь (20) вдається виділити підклас рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} i\psi_t = \Delta\psi + A_0\left[\Delta\psi - \frac{\psi_a\psi_a}{\psi} + \frac{\psi}{\psi^*}\left(\Delta\psi^* - \frac{\psi^*_a\psi^*_a}{\psi^*}\right)\right] + \psi|\psi|^{4/n}B_0 + \\ + \frac{|\psi|_a|\psi|_b}{|\psi|^{2+4/n}}A\left[\psi_{ab} - \frac{\psi_a\psi_b}{\psi} + \frac{\psi}{\psi^*}\left(\psi^*_{ab} - \frac{\psi^*_a\psi^*_b}{\psi^*}\right)\right], \end{aligned} \tag{21}$$

які зберігають симетрію $AG_2(1,n)$ лінійного $(n+1)$-вимірного рівняння Шредінгера. В рівнянні (21) A_0, A і B_0 — довільні функції від аргумента $|\psi|_a|\psi|_a|\psi|^{-2-4/n}$, який є диференціальним інваріантом узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,n)$ [4]. Наведемо кілька прикладів $AG_2(1,n)$-інваріантних узагальнень рівняння Шредінгера, які не мають аналогів у класі двовимірних рівнянь (2), а саме:

$$\begin{aligned} & i\psi_t = k\Delta\psi + \lambda\frac{|\psi|_a|\psi|_b}{|\psi|_{a_1}|\psi|_{a_1}}\frac{|\psi|^2_{ab}}{|\psi|^2}\psi, \\ & i\psi_t = \Delta\psi + \alpha\frac{\Delta|\psi|^2}{|\psi|^2}\psi + \lambda\frac{|\psi|_a|\psi|_b}{|\psi|^{4+4/n}}|\psi|^2_{ab}\psi, \\ & i\psi_t = -k\frac{\psi}{\psi^*}\Delta\psi^* + k\left(\frac{\psi_a\psi_a}{\psi^2} + \frac{\psi^*_a\psi^*_a}{\psi^{*2}}\right)\psi + \lambda\frac{|\psi|_a|\psi|_b}{|\psi|_{a_1}|\psi|_{a_1}}\frac{|\psi|^2_{ab}}{|\psi|^2}\psi. \end{aligned} \tag{22}$$

Для побудови рівнянь (22) було використано тотожності

$$|\psi|_{ab} = \frac{\partial^2(\psi\psi^*)}{\partial x_a\partial x_b},$$

$$\Delta\psi - \frac{\psi_a\psi_a}{\psi} + \frac{\psi}{\psi^*}\left(\Delta\psi^* - \frac{\psi^*_a\psi^*_a}{\psi^*}\right) \equiv \frac{\Delta|\psi|^2 - 4|\psi|_a|\psi|_a}{|\psi|^2}\psi,$$

$$\left[\psi_{ab} - \frac{\psi_a\psi_b}{\psi} + \frac{\psi}{\psi^*}\left(\psi^*_{ab} - \frac{\psi^*_a\psi^*_b}{\psi^*}\right)\right] \equiv \left[|\psi|_a|\psi|_b|\psi|^2_{ab} - 4(|\psi|_a|\psi|_a)^2\right]\frac{\psi}{|\psi|^2}.$$

На закінчення відзначимо, що наслідки 1–3 можна одержати шляхом конструювання рівнянь (8), (12), (13) за допомогою диференціальних інваріантів алгебр $AG(1,1)$, $AG_1(1,1)$, $AG_2(1,1)$, повний набір яких описано в роботі [9].

Детальнішому розгляду деяких конкретних еволюційних систем, описаних у теоремах 1–3, у випадку дійсних функцій $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$ буде присвячена окрема публікація.

1. Хенри Д., Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений, М., Мир, 1985, 376 с.
2. Dodd R.K., Fordy A.P., Prolongation structures of complex quasi-polinomial evolution equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1984, **17**, № 16, 3249–3266.
3. Niederer U., The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation, *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, № 5, 808–816.

4. Фущич В.И., Чернига Р.М., Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения I, II, *Укр. мат. журн.*, 1989, **41**, 1349–4357, 1687–1694.
5. Кричлоу Г.Б., Современная разработка нефтяных месторождений — проблемы моделирования, М., Недра, 1979, 303 с.
6. Malomed B. A., Stenflo L., Modulational instabilities and soliton solutions of a generalized nonlinear Schrödinger equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1991, **24**, L1149–L1153.
7. Doebner H.-D., Goldin G.A., On a general nonlinear Schrödinger equation admitting diffusion currents, *Phys. Lett. A*, 1992, **162**, 397–401.
8. Фущич В.И., Чернига Р.М., О точных решениях двух многомерных нелинейных уравнений шредингеровского типа, Препринт № 86.85, Киев, Ин-т математики АН Украины, 1986, 44 с.
9. Фущич В.І., Єгорченко І.А., Диференціальні інваріанти алгебри Галілея, *Доп. АН України, Сер. А*, 1989, № 4, 29–32.
10. Kundu A., Landau–Lifshitz and higher-order nonlinear systems gauge generated from nonlinear Schrödinger type equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, № 12, 3433–3438.
11. Calogero F., De Lillo S., Cauchy problems on the semiline and on a finite interval for the Eckhaus equation, *Inverse Problems*, 1988, **4**, L33–L37.