Галілей-інваріантні системи нелінійних рівнянь типу Гамільтона–Якобі та реакції-дифузії

В.І. ФУЩИЧ, Р.М. ЧЕРНІГА

All systems of $(n+1)$-dimensional evolutional second-order equations invariant under chain of algebras $AG(1,n)$, $AG_1(1,n)$, $AG_2(1,n)$ are described. The obtained results are illustrated by the examples of reaction-diffusion equations and Hamilton–Jacobi type systems.

1. Відомо, що система $(n+1)$-вимірних рівнянь дифузії (теплопровідності)

$$\lambda_1 U_t = \Delta U, \tag{1.a}$$

$$\lambda_2 V_t = \Delta U, \tag{1.b}$$

де $U(t,x)$, $V(t,x)$ — шукані дійсні функції, $U_t = \frac{\partial U}{\partial t}$, $V_t = \frac{\partial V}{\partial t}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,n)$ з базою

$$P_t = \partial_t, \quad P_a = \partial_a, \tag{2.a}$$

$$Q_\lambda, \quad G_a = tP_a - \frac{1}{2}x_a Q_\lambda, \quad J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \tag{2.b}$$

$$D = 2tP_t + x_a P_a + I_\alpha, \tag{2.c}$$

$$\Pi = t^2 P_t + t x_a P_a - \frac{|x|^2}{4} Q_\lambda + t I_\alpha, \quad \alpha_k = -\frac{n}{2}. \tag{2.d}$$

У співвідношеннях (2) і скрізь далі $I_\alpha = \alpha_1 U\partial_U + \alpha_2 V\partial_V$, $Q_\lambda = \lambda_1 U\partial_U + \lambda_2 V\partial_V$, $\partial_U = \frac{\partial}{\partial U}$, $\partial_V = \frac{\partial}{\partial V}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}$, $\alpha_k, \lambda_k \in \mathbb{R}^1$, а за індексами a і b, що повторюються, передбачається сумування від 1 до n; $k = 1, 2$.

Алгебра утворена операторами (2a)–(2b) називається алгеброю Галілея, а її розширення за допомогою оператора (2c) позначимо $AG_1(1,n)$.

Очевидно, що одиничні оператори Q_λ і I_α є лінійно залежними лише у випадку $\delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = 0$. У зв'язку з цим одержуємо два випадки принципово різних представлень алгебр $AG_1(1,n)$ та $AG_2(1,n)$ при $\delta = 0$ і $\delta \neq 0$, чого не було у випадку одного рівняння дифузії (інваріантність нелінійного рівняння дифузії відносно низки підалгебр алгебри $AG_2(1,n)$ досліджена в [1]).

Зазначимо, що у випадку,коли система рівнянь (1) є парою комплексно спряжених рівнянь Шрьодінгера, тобто $U = V^*$, $\lambda_1 = \lambda_2^* = i$, оператори Q_λ і I_α лінійно незалежні. Це приводить до того, що нелінійні узагальнення рівняння Шрьодінгера, які повністю зберігають його симетрію [2], принципово відрізняються від нелінійних узагальнень системи рівнянь дифузії (1) при $\delta = 0$.

Доповіді НАН України, 1994, № 3, P. 31–37.

Розглянемо систему щонайможливіших квазілінійних узагальнень системи рівнянь (СР) дифузії (1) вигляду

$$\lambda_1 U_t = A_{ab} U_{ab} + C_{ab} V_{ab} + B_1, \tag{3.a}$$

$$\lambda_2 V_t = D_{ab} U_{ab} + E_{ab} V_{ab} + B_2, \tag{3.b}$$

де A_{ab}, C_{ab}, D_{ab}, E_{ab}, B_1, B_2 — довільні дійсні неперервно диференційовані функції від $(2n+2)$ змінних U, V, $U_1, \dots, U_n$, $V_1, \dots, V_n$. Індекси $a = 1, \dots, n$ та $b = 1, \dots, n$ біля функцій U і V означають диференціювання за x_a та x_b.

СР (3) узагальнює практично всі відомі нелінійні системи еволюційних рівнянь першого і другого порядків, якими описуються найрізноманітніші процеси у фізиці, хімії, біології (досить згадати процеси тепломасопереносу, фільтрації двофазної рідини, дифузії при хімічних реакціях, динаміки руху популяцій, тощо) [3, 4].

У пропонованій роботі описані всі системи еволюційних рівнянь (3), які інваріантні відносно ланцюжка алгебр $AG(1,n) \subset AG_1(1,n) \subset AG_2(1,n)$, та проілюстровано одержані висліди на прикладах СР реакції-дифузії та систем типу Гамільтона–Якобі.

2. В алгебру симетрій системи рівнянь дифузії (1) входять оператори G_a, $a = 1, \dots, n$, які є диферецiйним виpаженням справедливості принципу відносності Галілея для них. Також відомо [1], що оператори Галілея тісно пов'язані з фундаментальним розв'язком рівняння дифузії. У цьому зв'язку логічним виглядає пошук у класі систем рівнянь (3) галілей-інваріантних нелінійних узагальнень системи (1).

Теорема 1. *Система нелінійних рівнянь (3) інваріантна відносно алгебри Галілея з представленням (2a), (2b) тоді і тільки тоді,коли вона має вигляд*

$$\begin{aligned}
\lambda_1 U_t &= \Delta U + U[A_1 \Delta(\ln U) + C_1 \Delta(\ln V) + B_1] + \\
&\quad + U_{\omega_a \omega_b}[A_2 (\ln U)_{ab} + C_2 (\ln V)_{ab}], \\
\lambda_2 V_t &= \Delta V + V[D_1 \Delta(\ln U) + E_1 \Delta(\ln V) + B_2] + \\
&\quad + V_{\omega_a \omega_b}[D_2 (\ln U)_{ab} + E_2 (\ln V)_{ab}],
\end{aligned} \tag{4}$$

де $\omega_a = \frac{\partial \omega}{\partial x_a} \equiv (\lambda_2 U_a/U - \lambda_1 V_a/V)\omega$, $\omega = U^{\lambda_2} \cdot V^{-\lambda_1}$, $(\ln U)_{ab} = \frac{\partial^2 (\ln U)}{\partial x_a \partial x_b}$, $(\ln V)_{ab} = \frac{\partial^2 (\ln V)}{\partial x_a \partial x_b}$, *а* A_k, B_k, C_k, D_k, E_k *— довільні функції від абсолютних інваріантів* $AG(1,n)$ ω *і* $\theta = \omega_a \omega_a$, $k = 1, 2$.

Доведення теореми, як і наступних теорем, грунтується на класичній схемі Лі, реалізація якої для знаходження ґалілей-інваріантних систем наведена в [5]. Оскільки викладки досить громіздкі, то тут вони опущені.

Зазначимо, що у випадку $\lambda_1 = 0$, тобто перше рівняння системи (3) еліптичне, абсолютні інваріанти алгебри Ґалілея значно спрощуються, а саме $\omega = U$, $\theta = U_a U_a$.

При побудові СР вигляду (3) які володіють $AG_1(1,n)$- та $AG_2(1,n)$-інваріантністю, структура таких систем суттєво залежить від визначника δ.

Теорема 2. *Нелінійна СР (3) інваріантна відносно алгебри* $AG_1(1,n)$ *з базовими операторами (2a)–(2c) тоді і тільки тоді коли вона має вигляд*

1. Випадок $\delta \neq 0$

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 U_t &= \Delta U + U[A_1(\hat\theta)\Delta(\ln U) + A_2(\hat\theta)\Delta(\ln V) + \omega^{-2/\delta}B_1(\hat\theta)] + \\
&\quad + U\omega^{2/\delta-2}\omega_a\omega_b[C_1(\hat\theta)(\ln U)_{ab} + C_2(\hat\theta)(\ln V)_{ab}], \\
\lambda_2 V_t &= \Delta V + V[D_1(\hat\theta)\Delta(\ln U) + D_2(\hat\theta)\Delta(\ln V) + \omega^{-2/\delta}B_2(\hat\theta)] + \\
&\quad + V\omega^{2/\delta-2}\omega_a\omega_b[E_1(\hat\theta)(\ln U)_{ab} + E_2(\hat\theta)(\ln V)_{ab}].
\end{aligned}
\tag{5}
$$

2. Випадок $\delta = 0$

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 U_t &= \Delta U + U[A_1(\omega)\Delta(\ln U) + A_2(\omega)\Delta(\ln V) + \omega_a\omega_a B_1(\omega)] + \\
&\quad + U\frac{\omega_a\omega_b}{\omega_{a_1}\omega_{a_1}}[C_1(\omega)(\ln U)_{ab} + C_2(\omega)(\ln V)_{ab}], \\
\lambda_2 U_t &= \Delta V + V[D_1(\omega)\Delta(\ln U) + D_2(\omega)\Delta(\ln V) + \omega_a\omega_a B_2(\omega)] + \\
&\quad + V\frac{\omega_a\omega_b}{\omega_{a_1}\omega_{a_1}}[E_1(\omega)(\ln U)_{ab} + E_2(\omega)(\ln V)_{ab}],
\end{aligned}
\tag{6}
$$

де A_k, B_k, C_k, D_k, E_k — довільні функції, $k = 1, 2$, $\hat\theta = \omega_a\omega_a\omega^{2/\delta-2}$ — абсолютний диференційний інваріант першого порядку алгебри (див. теорему 1).

У випадку виродження першого рівняння СР (3) в еліптичне ($\lambda_1 = 0$) абсолютні інваріанти в системах (5), (6) спрощуються і $\hat\theta = U_aU_aU^{2/\alpha_1-2}$ при $\delta \neq 0$, $\omega = U$ при $\delta = 0$.

Теорема 3. *У класі СР (3) алгебру інваріантності $AG_2(1,n)$ рівнянь (3) зберігають тільки такі, які мають вигляд*

1. Випадок $\delta \neq 0$

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 U_t &= \hat\alpha\Delta U + UA(\hat\theta)[\lambda_2\Delta(\ln U) - \lambda_1\Delta(\ln V)] + U\omega^{-2/\delta}B_1(\hat\theta) + \\
&\quad + (1-\hat\alpha_1)\frac{U_aU_a}{U} + U\omega^{2/\delta-2}\omega_a\omega_b C(\hat\theta)[\lambda_2(\ln U)_{ab} - \lambda_1(\ln V)_{ab}], \\
\lambda_1 V_t &= \hat\alpha_2\Delta V + VD(\hat\theta)[\lambda_2\Delta(\ln U) - \lambda_1\Delta(\ln V)] + V\omega^{-2/\delta}B_2(\hat\theta) + \\
&\quad + (1-\hat\alpha_2)\frac{V_aV_a}{V} + V\omega^{2/\delta-2}\omega_a\omega_b E(\hat\theta)[\lambda_2(\ln U)_{ab} - \lambda_1(\ln V)_{ab}].
\end{aligned}
\tag{7}
$$

2. Випадок $\delta = 0$

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 U_t &= \hat\alpha_1\Delta U + UA(\omega)[\lambda_2\Delta(\ln U) - \lambda_1\Delta(\ln V)] + U\omega_a\omega_a B_1(\omega) + \\
&\quad + (1-\hat\alpha_1)\frac{U_aU_a}{U} + U\frac{\omega_a\omega_b}{\omega_{\alpha_1}\omega_{a_1}}C(\omega)[\lambda_2(\ln U)_{ab} - \lambda_1(\ln V)_{ab}], \\
\lambda_2 V_t &= \hat\alpha_2\Delta V + VD(\omega)[\lambda_2\Delta(\ln U) - \lambda_1\Delta(\ln V)] + V\omega_a\omega_a B_2(\omega) + \\
&\quad + (1-\hat\alpha_2)\frac{V_aV_a}{V} + V\frac{\omega_a\omega_b}{\omega_{a_1}\omega_{a_1}}E(\omega)[\lambda_2(\ln U)_{ab} - \lambda_1(\ln V)_{ab}],
\end{aligned}
\tag{8}
$$

де A, B_1, B_2, C, D, E — довільні функції, $\hat\alpha_k = -2\alpha_k/n$, $k = 1, 2$ (α_k — див. оператор I_α), $a_1 = 1, 2, \ldots, n$.

Можна помітити, що у випадку $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \neq 0$ СР (7) і (8) локальною заміною $U \to U^{\hat\alpha_1}$, $V \to V^{\hat\alpha_2}$ зводяться до систем такої ж структури, але з $\hat\alpha_k = 1$, тобто $\hat\alpha_k = -n/2$. Випадок $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ — особливий і нище буде розглянутий.

Одержані класи $AG_2(1,n)$-інваріантних СР (7) і (8) містять, зокрема, такі нелінійні узагальнення СР (1) як

$$\lambda_1 U_t = \Delta U + e_1 U \Delta(\ln\omega) + e_2 U \omega^{2/\delta-2}\omega_a\omega_b(\ln\omega)_{ab},$$
$$\lambda_2 V_t = \Delta V + e_3 V \Delta(\ln\omega) + e_4 V \omega^{2/\delta-2}\omega_a\omega_b(\ln\omega)_{ab}, \quad \delta \neq 0$$

та

$$\lambda_1 U_t = \Delta U + e_1 U \Delta(\ln\omega) + e_2 U \omega_a\omega_a\omega^{\beta_2},$$
$$\lambda_2 V_t = \Delta V + e_3 V \Delta(\ln\omega) + e_4 V \omega_a\omega_a\omega^{\beta_2}, \quad \delta = 0,$$

де $e_1, e_2, e_3, e_4, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $(\ln\omega)_{ab} = \lambda_2(\ln U)_{ab} - \lambda_1(\ln V)_{ab}$.

У випадку виродження першого рівняння системи (3) в еліптичне ($\lambda_1 = 0$) $AG_2(1,n)$-інваріантними є тільки СР вигляду

$$\begin{gathered}
0 = A_1(\hat\theta)\Delta U + A_2(\hat\theta)\frac{U_aU_b}{U_{a_1}U_{a_1}}U_{ab} + U^{1-2/\alpha_1}B_1(\hat\theta) + \\
+ UC(\hat\theta)\left[\Delta(\ln V) - \frac{U_aU_b}{U_{a_1}U_{a_1}}(\ln V)_{ab}\right], \quad \hat\theta = U_aU_aU^{2/\alpha_1-2}, \\
\lambda_2 V_t = \hat\alpha_2\Delta V + \frac{V}{U}\left(D_1(\hat\theta)\Delta U + D_2(\hat\theta)\frac{U_aU_b}{U_{a_1}U_{a_1}}U_{ab}\right) + \\
+ VU^{-2/\alpha_1}B_2(\hat\theta) + (1-\hat\alpha_2)\frac{V_aV_a}{V} + VE(\hat\theta)\left[\Delta(\ln V) - \frac{U_aU_b}{U_{a_1}U_{a_1}}(\ln V)_{ab}\right],
\end{gathered} \tag{9}$$

якщо $\delta \neq 0$ та

$$\begin{gathered}
0 = A_1(U)\Delta U + A_2(U)\frac{U_aU_b}{U_{a_1}U_{a_1}}U_{ab} + U_aU_aB(U) + \\
+ C(U)\left[\Delta(\ln V) - \frac{U_aU_b}{U_{a_1}U_{a_1}}(\ln V)_{ab}\right], \\
\lambda_2 V_t = \hat\alpha_2\Delta V + V\left(D_1(U)\Delta U + D_2(U)\frac{U_aU_b}{U_{a_1}U_{a_1}}U_{ab}\right) + \\
+ VU_aU_aB_2(U) + (1-\hat\alpha_2)\frac{V_aV_a}{V} + VE(U)\left[\Delta(\ln V) - \frac{U_aU_b}{U_{a_1}U_{a_1}}(\ln V)_{ab}\right],
\end{gathered} \tag{10}$$

якщо $\delta = 0$. У формулах (9), (10) A_k, B_k, D_k, E, C — довільні функції, $\hat\alpha_2 = -2\alpha_2/n$.

В роботі [6] показано,що інтегрування двовимірних СР вигляду (9), (10) зводиться до інтегрування лінійного рівняння дифузії з джерелом.

Зауваження 1. Одержані вище теореми 1–3 справедливі і для випадку СР (3) з комплексними функціями, тому вони є нетривіальним узагальненням вислідів роботи [6] на багатовимірний випадок.

Зауваження 2. Для запису всіх побудованих вище галілей-інваріантних СР можна скористатися тотожностями

$$(\ln U)_{ab} = \frac{U_{ab}}{U} - \frac{U_aU_b}{U^2}, \quad (\ln V)_{ab} = \frac{V_{ab}}{V} - \frac{V_aV_b}{V^2}.$$

Такий запис, очевидно, буде корисним при фізичному інтерпретуванні одержаних СР.

3. Звернемо увагу на те, що локальна заміна $U = M(\hat{U})$, $V = N(\hat{V})$, де M, N — довільні диференційовані функції, зводить будь-яку СР з симетрією $AG(1,n)$, $AG_1(1,n)$ чи $AG_2(1,n)$ до локально-еквівалентної системи з такою ж симетрією, але з іншим представленням операторів Q_λ і I_α, а саме:

$$\hat{Q}_\lambda = \lambda_1 M \left(\frac{dM}{d\hat{U}}\right)^{-1} \frac{\partial}{d\hat{U}} + \lambda_2 N \left(\frac{dN}{d\hat{V}}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial\hat{V}},$$
$$\hat{I}_\alpha = \alpha_1 M \left(\frac{dM}{d\hat{U}}\right)^{-1} \frac{\partial}{d\hat{U}} + \alpha_2 N \left(\frac{dN}{d\hat{V}}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial\hat{V}}.$$

Зокрема, у випадку $M = \exp U$, $N = \exp V$ одержуємо

$$\hat{Q}_\lambda = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial\hat{U}} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial\hat{V}}, \quad \hat{I}_\alpha = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial\hat{U}} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial\hat{V}}. \tag{11}$$

В цьому випадку клас СР, інваріантних відносно алгебри $AG_2(1,n)$ з представленням (2), (11), у випадку $\delta = 0$ має вигляд

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \hat{U}_t &= \alpha_1 \Delta\hat{U} + A(\hat{\omega})(\lambda_2 \Delta\hat{U} - \lambda_1 \Delta\hat{V}) + \hat{U}_a \hat{U}_a + \hat{\omega}_a \hat{\omega}_a B_1(\hat{\omega}) + \\
&\quad + C(\hat{\omega}) \frac{\hat{\omega}_a \hat{\omega}_b}{\hat{\omega}_{a_1} \hat{\omega}_{a_1}} (\lambda_2 \hat{U}_{ab} - \lambda_1 \hat{V}_{ab}), \\
\lambda_2 \hat{V}_t &= \alpha_2 \Delta\hat{V} + D(\hat{\omega})(\lambda_2 \Delta\hat{U} - \lambda_1 \Delta\hat{V}) + \hat{V}_a \hat{V}_a + \hat{\omega}_a \hat{\omega}_a B_2(\hat{\omega}) + \\
&\quad + E(\hat{\omega}) \frac{\hat{\omega}_a \hat{\omega}_b}{\hat{\omega}_{a_1} \hat{\omega}_{a_1}} (\lambda_2 \hat{U}_{ab} - \lambda_1 \hat{V}_{ab}),
\end{aligned} \tag{12}$$

де $\hat{\omega} = \lambda_2 U - \lambda_1 V$, $\hat{\omega}_a = \lambda_2 U_a - \lambda_1 V_a$.

У випадку $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $A = B = C = D = E = 0$ СР (12) зводиться до систем вигляду (нижче знак $\hat{}$ опущено)

$$\begin{aligned}
\lambda_1 U_t &= U_a U_a + B_1(\omega)\omega_a \omega_a, \\
\lambda_2 V_t &= V_a V_a + B_2(\omega)\omega_a \omega_a, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

СР (13) природньо назвати узагальненням незачепленої СР Гамільтона–Якобі (Г–Я)

$$\begin{aligned}
\lambda_1 U_t &= U_a U_a, \\
\lambda_2 V_t &= V_a V_a.
\end{aligned} \tag{14}$$

На відміну від симетрії одного рівняння Г–Я [7, 8] локальна симетрія СР (14) вичерпується алгеброю $AG_2(1,n)$ (2), (11) при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ з додатковими операторами

$$P_V = \partial_V, \quad D_1 = -t\partial_t + U\partial_U + V\partial_V. \tag{15}$$

Таким чином, СР (13) вичерпуються всі нелінійні узагальнення вигляду

$$\begin{aligned}
\lambda_1 U_t &= U_a U_a + B_1(U, V, U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_n), \\
\lambda_2 V_t &= V_a V_a + B_2(U, V, U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_n)
\end{aligned} \tag{16}$$

системи Г–Я, які зберігають її симетрію $AG_2(1,n)$.

У випадку $B_1 = 0$ симетрія СР (13) розширюється за допомогою операторів

$$\hat{P}_V = B_2^{-\gamma}\partial_V, \quad \gamma = \lambda_1^2/(1+\lambda_1^2),$$
$$\hat{D}_1 = -t\partial_t + U\partial_U + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}U - B_2^{-\gamma}\int B_2^{\gamma}d\omega\right)\partial_V.$$

Аналогічні додаткові оператори з'являються в алгебрі симетрій СР (13) і при деяких конкретних функціях $B_1 B_2 \neq 0$. Зокрема, для $B_1 = -1/\lambda_1^2$ одержуємо $AG_2(1,n)$-інваріантну систему

$$U_t = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2^2}V_a V_a + \frac{2}{\lambda_2}U_a V_a,$$
$$V_t = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2}U_a U_a + \frac{2}{\lambda_1}U_a V_a$$

з додатковими операторами (15).

Виявляється, серед нелінійних узагальнень системи Г–Я (13) існує СР з унікальними симетрійними властивостями, а саме, при $B_1 = B_2 = -1/\lambda_1^2$ (нижче $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda$).

Теорема 4. *Максимальна (в розумінні Лі) алгебра інваріантності СР*

$$\begin{aligned} &U_t = U_a U_a, \\ &V_t = -\lambda U_a U_a + 2U_a V_a \end{aligned} \tag{17}$$

породжується базовими операторами

$$\begin{aligned} &P_t, \quad P_a, \quad J_{ab}, \quad Q_\lambda = \lambda\partial_U - \partial_V, \quad X = W(\lambda U - V)\partial_V, \\ &G_a = tP_a - \frac{1}{2}x_a Q_\lambda, \quad D = 2tP_t + x_a P_a, \\ &\Pi = t^2 P_t + t x_a P_a - \frac{|x|^2}{4}Q_\lambda, \quad G_a^1 = UP_a - \frac{1}{2}x_a P_t, \\ &D_1 = 2U\partial_U + x_a P_a, \quad \Pi_1 = U^2\partial_U + U x_a P_a - \frac{|x|^2}{4}P_t, \\ &K_a = x_a t P_t - \left(\frac{1}{2}|x|^2 + 2tU\right)P_a + x_a x_b P_b + x_a U Q_\lambda, \end{aligned} \tag{18}$$

де W — довільна диференційована функція.

Зазначимо, що наявність в алгебрі інваріантності СР (17) оператора X з довільною функцією W є природньою, оскільки друге рівняння системи лінійне відносно функції V. Значно цікавішим є те, що СР (17) можна вважати узагальненням класичного рівняння Г–Я на випадок двох шуканих функцій, адже оператори (18) при $W = 1$ породжують таку ж алгебру, що й рівняння Г–Я. Вважаємо,що це дуже важливий факт, оскільки тривіальне узагальнення згаданого рівняння до СР (14) не зберігає симетрію рівняння Г–Я.

4. Розглянемо нелінійну систему еволюційних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} &\lambda_1 U_t = \Delta U + f(U,V), \\ &\lambda_2 V_t = \Delta V + g(U,V), \end{aligned} \tag{19}$$

де f, g — довільні диференційовані функції. Системи рівнянь реакції дифузії вигляду (21) в останній час інтенсивно досліджуються (див., напр. [3, 9]). Як випливає з теорем 1–3, клас СР (19) містить системи з широкою симетрією. Зокрема, інваріантними відносно алгебри Галілея будуть всі СР рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} &\lambda_1 U_t = \Delta U + U f(\omega), \\ &\lambda_2 V_t = \Delta V + V g(\omega), \quad \omega = U^{\lambda_2} \cdot V^{-\lambda_1}. \end{aligned} \tag{20}$$

У випадку $f = \beta_1 \omega^{-2/\delta}$, $g = \beta_2 \omega^{-2/\delta}$, $\beta_k \in \mathbb{R}$ матимемо інваріантність відносно алгебри $AG_1(1,n)$. Нарешті при $\delta = \frac{n}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)$, тобто $\alpha_1 = \alpha = -n/2$, одержуємо СР

$$\begin{aligned} &\lambda_1 U_t = \Delta U + \beta_1 U^{1+\lambda_2\gamma} V^{-\lambda_1\gamma}, \\ &\lambda_2 V_t = \Delta V + \beta_2 U^{\lambda_2\gamma} V^{1-\lambda_1\gamma}, \end{aligned}$$

де $\gamma = 4/n/(\lambda_2 - \lambda_1)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, яка зберігає $AG_2(1,n)$ симетрію лінійної СР (1).

Зауваження 3. Дифузійна СР (18) при $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$ заміною

$$U = Y + Z, \quad V = Y - Z, \quad Y = Y(t,x), \quad Z = Z(t,x) \tag{21}$$

зводиться до СР

$$\begin{aligned} &\lambda \frac{\partial Y}{\partial t} = \Delta Z + \hat{f}(Y,Z), \\ &\lambda \frac{\partial Z}{\partial t} = \Delta Y + \hat{g}(Y,Z), \end{aligned}$$

інваріантність якої відносно ланцюжка алгебр $AG(1,n) \subset AG_1(1,n) \subset AG_2(1,n)$ з одиничним оператором $Q_\lambda = \lambda\left(Y\frac{\partial}{\partial Z} + Z\frac{\partial}{\partial Y}\right)$ описується шляхом застосування заміни (21) до СР вигляду (18) з відповідною симетрією.

На закінчення наведемо ще одну цікаву систему рівнянь вигляду (19), а саме

$$\begin{aligned} &\lambda U_t = \Delta U + \beta_1 U^2/V, \\ &\lambda V_t = \Delta V + \beta_2 U, \quad \beta_1 \neq \beta_2, \quad \beta_k \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{22}$$

Максимальна алгебра інваріантності СР (22) є узагальненою алгеброю Галілея з базовими операторами (2a), (2b) та

$$\begin{aligned} &D = 2tP_t + x_a P_a - 2U\partial_U - \left(\frac{n}{2} + \frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2}\right) Q_\lambda, \\ &\Pi = tD - t^2 P_t - \frac{|x|^2}{4} Q_\lambda - \frac{\lambda}{\beta_1 - \beta_2} V_{\partial_U}. \end{aligned} \tag{23}$$

Між іншим, серед СР вигляду (18) у випадку $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ не існує $AG_2(1,n)$-інваріантних зі стандартним представленням (2). Проективний оператор (23) породжує групу скінченних перетворень

$$\begin{aligned} &t' = t/(1 - pt), \quad x'_a = x_a/(1 - pt), \quad p \in \mathbb{R}, \\ &\begin{pmatrix} U' \\ V' \end{pmatrix} = (1 - pt)^{2 + \frac{n}{2} + \hat{\beta}} \exp\left(-\frac{\lambda p |x|^2}{4(1 - pt)}\right) A(t) \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2}, \end{aligned}$$

де матриця $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda p}{(1-pt)(\beta_2-\beta_1)} \\ 0 & (1-pt)^{-2} \end{pmatrix}$ не діагональна, а в перетвореннях генерованих оператором (2d) аналогічна матриця діагональна [5].

Деякі класи точних розв'язків СР (22) одержано в роботі [10].

1. Fushchych W.I., Cherniha R.M., The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations, *J. Phys. A.: Math and Gen.*, 1985, **18**, № 18, 3491–3503.
2. Фущич В.И., Чернига Р.М., Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения. I, *Укр. мат. журн.*, 1989, **41**, № 10, 1349–1357.
3. Aris R., The theory of reaction and diffusion in permeable catalysts, Oxford, 1975, 300 p.
4. Вільгельмссон Г. (Wilhelmsson H.), Коливання та встановлення рівноваги за умов взаємозв'язку температури та густини у термоядерних плазмах, *Укр. фіз. журн.*, 1993, **38**, № 1, 44–53.
5. Фущич В.И., Чернига Р.М., О точных решениях двух многомерных уравнений шредингеровского типа, Препринт № 87.16, Киев, Ин-т математики, 1987, 44 с.
6. Фущич В.І., Черніга Р.М., Системи нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку, інваріантні відносно алгебри Галілея та її розширень, *Доповіді АН України*, 1993, № 8, 44–51.
7. Boyer C.P., Penafiel M.N. Conformal symmetry of the Hamilton–Jacobi equation and quantization, *Nuovo Cim. B*, 1976, **31**, № 2, 195–210.
8. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
9. Fife P.C., Mathematical aspects of reacting and diffusing systems, Berlin, Springer, 1979, 285 p.
10. Чернига Р.М., О точных решениях одной нелинейной системы диффузионного типа, в сб. Симметрийный анализ и решения уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики, 1988, 49–53.