

Групи Лі

СЕРГІЙ МАКСИМЕНКО

План

1. Топологічні групи. Їх елементарні властивості.
2. Дії груп. Стабілізатори та орбіти дій. Лема Бернсайда.
3. Групи Лі. Однопараметричні підгрупи. Ліво- та право- інваріантні векторні поля. Алгебра Лі групи Лі. Приєднане представлення групи Лі. Корені групи Лі.
4. Приклади груп Лі. Матричні групи над \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} .
5. Кватерніони та група $SO(3)$.
6. Комутативні групи Лі.
7. Максимальні тори. Теорема єдиності (з точністю до спряження) максимального тора в компактній групі Лі.
8. Нормалізатори максимальних торів. Група Вейля.
9. Корені основних матричних груп
10. Характери груп Лі.
11. Теорема існування міри Хаара на локально компактній топологічній групі.
12. Теорема Ямабе про тотожну компоненту групи Лі.
13. Група характерів локально компактної топологічної групи. Теорема двоїстості Понтрягіна-ван Кампена.

Рекомендована література

- [1] Дж. Адамс, Лекции по группам Ли. – М.: Наука, 1979, [download](#)
- [2] J. Gleason, Existence and uniqueness of Haar measure, [download](#)
- [3] M. Goto, On an arcwise connected subgroup of a Lie group, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 20, No. 1 (Jan., 1969), pp. 157-162 [download](#)

1. ТОПОЛОГІЧНІ ГРУПИ

Нехай G – множина, на якій задано топологію τ і структуру групи, тобто два відображення множення і взяття оберненого

$$\mu : G \times G \rightarrow G, \quad \nu : G \rightarrow G,$$

тобто

- (1) $\mu(a, \mu(b, c)) = \mu(\mu(a, b), c)$ для всіх $a, b, c \in G$;
- (2) існує такий $e \in G$, що $\mu(e, a) = \mu(a, e) = a$ для всіх $a \in G$ – цей елемент називають нейтральним, або одиницею G ;
- (3) $\mu(a, \nu(a)) = e$ для кожного $a \in G$, елемент $\nu(a)$ називається оберненим до a .

Трійка (τ, μ, ν) задає структуру топологічної групи на G , якщо $\mu, \nu \in$ неперервними в топології τ .

Підгрупами топологічної групи називають замкнені підгрупи. Нехай G, H – топологічні групи. Гомоморфізмом $\phi : G \rightarrow H$ топологічних груп називається неперервний гомоморфізм цих груп.

Нехай далі G – топологічна група. Зручно позначати $\mu(a, b) = ab$, $\nu(a) = a^{-1}$.

Задача 1.1. Довести, що для кожного $a \in G$ відображення лівого і правого зсуву $L_a, R_a : G \rightarrow G$, $L_a(x) = ax$, $R_a(x) = xa$, – гомеоморфізми G . Зокрема, спряження $x \mapsto a^{-1}xa$, тобто композиція $L_{a^{-1}} \circ R_a$ – також гомеоморфізм.

Задача 1.2. Довести, що відображення взяття оберненого елемента $\nu : G \rightarrow G$ – гомеоморфізм G .

Задача 1.3. Довести, що топологічні групи та їх неперервні гомоморфізми утворюють категорію. Ізоморфізми в цій категорії – це ізоморфізми груп, які також є гомеоморфізмами.

Задача 1.4. Довести, що для топологічної групи G наступні умови еквівалентні:

- 1) $G \in T_1$ -простором;
- 2) одиниця e є замкнутою множиною;
- 3) $\{e\} = \bigcap_{e \in V \in \tau} V$, де V пробігає множини всіх оточень e .

Задача 1.5. Довести, що для топологічної групи G наступні умови еквівалентні:

- 1) $G \in T_2$ -простором;
- 2) $\{e\} = \bigcap_{e \in V \in \tau} \bar{V}$, де V пробігає множини всіх оточень e .

Задача 1.6. Нехай $b, c \in G$ і $a = bc^{-1}$. Довести, що для довільного околу U_a існують такі околу U_b і U_c точок b і c відповідно, такі, що $U_b U_c^{-1} \subset U_a$.

Задача 1.7. Нехай $V \subset U \subset G$ – довільні підмножини, і W_e – оточення e такий, що або $VW_e^{-1} \subset U$ або $W_e^{-1}V \subset U$. Тоді $\bar{V} \subset \text{Int}(U)$.

Задача 1.8. Довести, що кожна топологічна група є T_3 -простором, але не обов'язково T_0 , T_1 , або T_2 .

Задача 1.9. Довести, що кожна компактна топологічна група є T_4 -простором, але не обов'язково T_0 , T_1 , або T_2 .

Задача 1.10. Довести, що T_1 топологічна група є T_2 -простором, а отже умови задач 1.4 та 1.5 еквівалентні.

Задача 1.11. Довести, що компонента зв'язності G_e одиниці e в G є нормальною топологічною підгрупою, тобто це нормальна підгрупа в G , яка також є замкнутою підмножиною в G .

Задача 1.12. Довести, що компонента лінійної зв'язності G_e одиниці e в G є нормальною підгрупою групи G , але вона не обов'язково замкнена.

Задача 1.13. Показати, що для кожного (неперервного) гомоморфізму топологічних груп $\phi : G \rightarrow H$ маємо, що $\phi(G_e) \subset H_e$, а тому від індукує гомоморфізм

$$\phi_e : G/G_e \rightarrow H/H_e.$$

Довести, що якщо ϕ – сюр'єктивний, то ϕ_e – також сюр'єктивний. Навести приклад, коли ϕ – ін'єктивний, але ϕ_e – не є ін'єктивним.

Задача 1.14. Довести, що в топологічній групі G замикання підгрупи є підгрупою.

Задача 1.15. Довести, що в топологічній групі G кожна відкрита підгрупа є замкнутою.

Задача 1.16. Довести, що в топологічній групі G замикання нормальної підгрупи є нормальною підгрупою.

Задача 1.17. Довести, що в топологічній групі G , яка задовольняє аксіому T_1

- 1.17.1. централізатор кожного елемента $Z(a) = \{x \in G \mid ax = xa\}$ є замкнутою підгрупою;
- 1.17.2. центр групи $Z(G) = \{x \in G \mid ax = xa \text{ для всіх } a \in G\}$ є замкнутою підгрупою;
- 1.17.3. нормалізатор $N(H) = \{x \in G \mid xHx^{-1} = H\}$ замкненої підгрупи H є замкнутою підгрупою;
- 1.17.4. кожна замкнена підгрупа скінченного індексу відкрита;
- 1.17.5. якщо G компактна, то кожна відкрита підгрупа має скінченний індекс;
- 1.17.6. замикання комутативної підгрупи є комутативною підгрупою.

Комутатор двох елементів $a, b \in G$ це

$$[a, b] := aba^{-1}b^{-1}.$$

Комутант групи - це підгрупа породжена комутаторами елементів. Вона позначається $[G, G]$.

Задача 1.18. Відкрита проблема: отримати умови за яких комутант топологічної групи буде замкнутою підгрупою.

Нехай $H \subset G$ - підгрупа і $p : G \rightarrow G/H$ природне відображення в множину правих (або лівих) суміжних класів і наділимо G/H відповідною факторною топологією.

Задача 1.19. Нехай $H \subset G$ - підгрупа топологічної групи і $p : G \rightarrow G/H$ природне відображення в множину правих (або лівих) суміжних класів. Наділимо G/H відповідною факторною топологією.

- 1.19.1. Довести, що p - відкрите відображення.
- 1.19.2. G/H - T_1 -простір тоді і тільки тоді, коли H - замкнена.

Задача 1.20. Нехай $\phi : G \rightarrow H$ - сюр'єктивний гомоморфізм топологічних груп, $\ker(\phi)$ - його ядро і $\hat{\phi} : G/\ker(\phi) \cong H$ - *ізоморфізм груп*, для якого наступна діаграма комутативна:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & H \\ & \searrow p & \nearrow \hat{\phi} \\ & G/\ker(\phi) & \end{array}$$

Показати, що $\hat{\phi}$ - неперервний.

Зауважимо, що $\hat{\phi}$, взагалі кажучи, не є гомеоморфізмом, а тому не буде *ізоморфізмом топологічних груп*. Навести такий приклад.

2. Дії ГРУП

Нехай G - група з одиницею e і X - множина. *Ливою дією групи G на X* називається відображення $\mu : G \times X \rightarrow X$, яке задовольняє такі умови:

- $\mu(e, x) = x$ для всіх $x \in X$;
- $\mu(g, \mu(h, x)) = \mu(gh, x)$ для всіх $x \in X$ і $g, h \in G$.

Якщо перепозначити $\mu(g, x) = gx$, то ці умови перепишуться так:

- $ex = x$ для всіх $x \in X$;
- $g(h, x) = (gh)x$ для всіх $x \in X$ і $g, h \in G$.

Аналогічно *права дія групи G на X* називається відображення $\mu : X \times G \rightarrow X$, яке задовольняє такі умови:

- $\mu(x, e) = x$ для всіх $x \in X$;
- $\mu(\mu(x, g), h) = \mu(x, gh)$ для всіх $x \in X$ і $g, h \in G$.

Відмінність лівої і правої дій в тому, що при дії добутком gh на x , в лівій дії, спочатку застосовується h , а потім g , а в правій – навпаки, спочатку g , а потім h .

Якщо G і X наділені топологіями, в яких μ – неперервне, то дія називається *неперервною (відносно даних топологій)*.

Якщо G – група Лі, X – многовид класу C^r , і μ – диференційовне класу C^r , то дія називається *диференційовною (класу C^r)*.

Задача 2.1. Нехай $\mu : G \times X \rightarrow X$ – ліва дія. Довести, що тоді $\nu : X \times G \rightarrow X$, $\nu(x, g) = \mu(g^{-1}, x)$, є правою дією.

Задача 2.2. Нехай $\nu : X \times G \rightarrow X$ – права дія. Довести, що тоді $\mu : G \times X \rightarrow X$, $\mu(g, x) = \nu(x, g^{-1})$, є лівою дією.

Надалі розглядатимемо лише ліві дії. Нехай $\mu : G \times X \rightarrow X$ – ліва дія. Для кожного $g \in G$ позначимо через $L_g : X \rightarrow X$ відображення визначене за формулою $L_g(x) = gx$.

Задача 2.3. Нехай $\mu : G \times X \rightarrow X$ – ліва дія. Довести наступні твердження.

2.3.1) $L_e = \text{id}_X$, $L_g \circ L_h = L_{gh}$.

2.3.2) Показати, що кожне L_g є бієкцією.

2.3.3) Якщо дія неперервна, то L_g – гомеоморфізм X .

2.3.4) Якщо дія диференційовна, то L_g – дифеоморфізм класу C^r .

Задача 2.4. Нехай $\mu : G \times X \rightarrow X$ – ліва дія. Нехай Σ_X – група всіх бієкцій X на себе відносно операції композиції відображень. Показати, що відповідність $\bar{\mu} : G \rightarrow \Sigma_X$, $\bar{\mu}(g) = L_g$ – гомоморфізм.

Задача 2.5. Нехай $\gamma : G \rightarrow \Sigma_X$ довільний гомоморфізм в групу бієкцій X . Довести, що тоді відображення $\mu : G \times X \rightarrow X$ визначене за формулою $\mu(g, x) = \gamma(g)(x)$, є лівою дією G на X .

Ядро $\ker(\bar{\mu})$ називається *ядром неефективності дії μ* .

Задача 2.6. Нехай $\nu : X \times G \rightarrow X$ – права дія. Для кожного $g \in G$ позначимо через $R_g : X \rightarrow X$ відображення визначене за формулою $R_g(x) = xg$, яке називається *правим зсувом* на елемент g . Показати, що відповідність $\bar{\nu} : G \rightarrow \Sigma_X$, $\bar{\nu}(g) = R_g$ – є *антигомоморфізмом*, тобто

$$\bar{\nu}(gh) = \bar{\nu}(h) \circ \bar{\nu}(g).$$

Навпаки, нехай $\delta : G \rightarrow \Sigma_X$ довільний антигомоморфізм в групу бієкцій X . Довести, що тоді відображення $\nu : X \times G \rightarrow X$ визначене за формулою $\nu(x, g) = \delta(g)(x)$, є правою дією G на X .

Таким чином ліва (права) дія групи на множині це те ж саме, що гомоморфізм (антигомоморфізм) цієї групи в групу бієкцій X .

Задача 2.7. Нехай $\mu : G \times X \rightarrow X$ – ліва дія. Довести що наступні умови еквівалентні:

2.7.1) $\ker(\bar{\mu})$ – тривіальне;

2.7.2) $\bar{\mu} : G \rightarrow \Sigma_X$ – ін'єктивний;

2.7.3) якщо $gx = x$ для всіх $x \in X$, то $g = e$.

Дія μ називається *ефективною*, якщо виконана одна з цих умов. В протилежному випадку μ називають *неефективною*.

Нехай $\mu : G \times X \rightarrow X$ – ліва дія. Тоді

- *стабілізатор* точки x це підмножина в що складається з усіх елементів групи, які залишають x «на місці»:

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\};$$

- *орбіта* точки x це підмножина в X , що складається з усіх образів точки x при дії елементами з G :

$$O_x := \{gx \in X \mid g \in G\};$$

- множина *нерухомих точок* елемента $g \in G$ – це

$$Fix(g) := \{x \in X \mid gx = x\}.$$

Задача 2.8. Довести, що стабілізатор G_x точки x є підгрупою в G

Задача 2.9. Показати, що якщо дія неперервна, а X – хаусдорфовий, то стабілізатор G_x кожної точки $x \in X$ є замкненою підгрупою в G

Задача 2.10. Нехай $x \in X$ і $g, h \in G$. Довести що наступні умови еквівалентні:

2.10.1) $gx = hx$;

2.10.2) $g^{-1}h \in G_x$;

2.10.3) g і h належать одному лівому суміжному класу G по стабілізатору G_x .

Задача 2.11. Нехай $x \in X$ і $\phi_x : G \rightarrow O_x$ – відображення визначене за формулою $\phi_x(g) = gx$. Показати, що індукує бієкцію $\bar{\phi}_x : G/G_x \rightarrow O_x$ яка робить комутативною таку діаграму:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi_x} & O_x \\ & \searrow p & \nearrow \bar{\phi}_x \\ & G/G_x & \end{array}$$

де p – природне відображення в множину лівих суміжних класів G/G_x .

Задача 2.12. Припустимо, що G і X – скінченні. Довести, що тоді для довільної точки $x \in X$ маємо, що $|G| = |O_x| |G_x|$.

Задача 2.13. Довести, що орбіти різних точок або не перетинаються, або тотожні. Іншими словами кодна дія групи визначає *розбиття* X на орбіти.

Зазвичай, якщо дія μ зрозуміла з контексту, то через X/G позначається простір орбіт, тобто фактор-множина по розбиттю на орбіти дії.

Задача 2.14. Нехай $x \in X$ і $g \in G$. Довести, що $G_{gx} = gG_xg^{-1}$. Зокрема стабілізатори точок, x і gx , які належать одній орбіті, є спряженими підгрупами в G , а відображення $\alpha_g : G_x \rightarrow G_{gx}$, $\alpha_g(h) = ghg^{-1}$ є ізоморфізмом групи G_x на G_{gx} .

Навпаки, показати, що якщо стабілізатори G_x і G_y деяких точок $x, y \in X$ – спряжені, то ці точки належать одній орбіті.

Задача 2.15. Нехай $g, h \in G$. Довести, що $Fix(ghg^{-1}) = g(Fix(h))$. Зокрема, L_g індукує бієкцію $Fix(h)$ на $Fix(ghg^{-1})$. Показати, що якщо дія неперервна, то ця бієкція є гомеоморфізмом.

Задача 2.16. (Лема Бернсайда) Припустимо, що G і X – скінченні. Довести що тоді

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} Fix(g).$$

Тобто кількість орбіт дії – це середнє значення кількості нерухомих точок по всіх елементах групи.

Підказка. Для доведення розгляньте множину $A = \{(g, x) \in G \times X \mid gx = x\} \subset G \times X$. Тоді

$$A = \bigsqcup_{g \in G} g \times Fix(g) = \bigsqcup_{x \in X} G_x \times x = \bigsqcup_{O \in X/G} \bigsqcup_{x \in O} G_x \times x$$

звідки $|A| = \sum_{g \in G} |Fix(g)| = \sum_{x \in X} |G_x| = \bigsqcup_{O \in X/G} \bigsqcup_{x \in O} |G_x|$. З того, що стабілізатори точок однієї орбіти мають однакове число елементів, виведіть, що перша остання сума дорівнює $|X/G| |G|$.

Задача 2.17. Довести що наступні умови еквівалентні:

- 2.17.1) для кожної точки $x \in X$ її стабілізатор $G_x = \{e\}$ «тривіальний», тобто є єдиною підгрупою;
- 2.17.2) якщо $gx = x$ для деякого $g \in G$ і $x \in X$, то $g = e$;
- 2.17.3) для кожного $g \in G$, $Fix(g) \neq \emptyset$ тоді і лише тоді, коли $g = e$;
- 2.17.4) для кожного $x \in X$ відображення $\phi_x : G \rightarrow O_x$, $\phi_x(g) = gx$, є бієкцією.

Якщо виконана одна з цих умов, то дія називається *вільною*.

Задача 2.18. Довести що наступні умови еквівалентні:

- 2.18.1) для довільних точок $x, y \in X$ їх стабілізатори G_x і G_y – спряжені в G ;
- 2.18.2) для будь-яких $x, y \in X$ існує $g \in G$ таке, що $y = gx$;
- 2.18.3) для кожного $x \in X$ відображення $\phi_x : G \rightarrow O_x$, $\phi_x(g) = gx$ – сюр'єктивне.

Якщо виконана одна з цих умов, то дія називається *транзитивною*.

Підмножина $A \subset X$ називається *інваріантною відносно дії G* або *G -інваріантною*, якщо $gA = A$ для всіх $g \in G$.

Задача 2.19. Нехай $A \subset X$ – G -інваріантна підмножина. Показати, що відображення $\bar{\mu}_A : G \rightarrow \Sigma_A$, $\mu_A(g) = g|_A : A \rightarrow A$, – гомоморфізм. Довести, що підмножина

$$Q_A := \{g \in G \mid ga = a \text{ для всіх } a \in A\}$$

є нормальною підгрупою в G . Ототожнити її з ядром гомоморфізму $\bar{\mu}_A$.

3. Топологічні дії

Неха G – топологічна група, X – топологічний простір, і $\mu : G \times X \rightarrow X$ – ліва дія.

4. ГОЛОВНІ РОЗШАРУВАННЯ

5. МАТРИЧНІ ГРУПИ НАД \mathbb{R}

Нехай $M(\mathbb{R}, n) = \mathbb{R}^{n^2}$ – множина всіх квадратних матриць над \mathbb{R} . Вона утворює алгебру \mathbb{R} над полем \mathbb{R} відносно додавання та множення матриць, а також множення матриць на дійсні числа. Ототожнимо її з гладким многовидом \mathbb{R}^{n^2} .

Нехай також E – одинична матриця. Для матриці $A = (a_{ij}) \in M(\mathbb{R}, n)$ нехай A^t – транспонована і A^{-1} – обернена до A , $\det(A)$ або $|A|$ позначатимуть визначник матриці A , а $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ – сума діагональних елементів A , яка називається *слід* матриці A .

Задача 5.1. Показати, що відображення визначника $\det : M(\mathbb{R}, n) \rightarrow \mathbb{R}$, $A \mapsto \det(A)$, є аналітичним (зокрема класу C^∞) гомоморфізмом моноїдів $(M(\mathbb{R}, n), *)$ та (\mathbb{R}, \cdot) відносно їх множень. Іншими словами, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Задача 5.2. Довести, що $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ для всіх $A, B \in M(\mathbb{R}, n)$. Більш того, якщо $|A| \neq 0$, то $\text{tr}(ABA^{-1}) = \text{tr}(B)$.

Задача 5.3. Довести, що відображення $\langle \cdot, \cdot \rangle : M(\mathbb{R}, n) \times M(\mathbb{R}, n) \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle A, B \rangle \mapsto \text{tr}(AB^t)$, тотожне із звичайним скалярним добутком в \mathbb{R}^{n^2} .

Розглянемо наступні підгрупи матриць відносно множення:

- $GL(\mathbb{R}, n) = \{A \in M(\mathbb{R}, n) \mid |A| \neq 0\}$ – всі невироджені матриці;
- $GL^+(\mathbb{R}, n) = \{A \in M(\mathbb{R}, n) \mid |A| > 0\}$ – всі матриці з додатним визначником;
- $SL(n) = \{A \in M(\mathbb{R}, n) \mid |A| = 1\}$ – спеціальна лінійна група;
- $SL^\pm(n) = \{A \in GL(\mathbb{R}, n) \mid |A| = \pm 1\}$ – ця група зазвичай не має спеціальної назви;
- $O(n) = \{A \in M(\mathbb{R}, n) \mid AA^t = E\}$ – ортогональна група;
- $SO(n) = \{A \in M(\mathbb{R}, n) \mid AA^t = E, |A| = 1\} = SL(n) \cap O(n)$.

Задача 5.4. Перевірити, що всі вказані вище підмножини дійсно є групами відносно множення матриць.

Задача 5.5. Показати, що в топології $M(\mathbb{R}, n)$:

- $GL(\mathbb{R}, n)$ і $GL^+(\mathbb{R}, n)$ – відкриті підмножини, а отже гладкі підмноговиди многовиду $M(\mathbb{R}, n) = \mathbb{R}^{n^2}$;
- $GL(\mathbb{R}, n)$ має рівно дві компоненти зв'язності;
- $GL^+(\mathbb{R}, n)$ є тотожною компонентою зв'язності, тобто компонентою зв'язності одиничної матриці.

За означенням, дотичне розшарування $TM(\mathbb{R}, n)$ многовиду $M(\mathbb{R}, n) = \mathbb{R}^{n^2}$ (як Євклідового простору) ототожнюється з $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$, а дотичне розшарування TU кожної відкритої підмножини $U \subset M(\mathbb{R}, n)$ – ототожнюється з $U \times \mathbb{R}^{n^2}$. Більш точно, існує природна бієкція $TU = U \times \mathbb{R}^{n^2}$ і ми вводимо на TU топологію з $U \times \mathbb{R}^{n^2}$.

Зокрема, дотичне розшарування $TGL(\mathbb{R}, n)$ ототожнюється з

$$TGL(\mathbb{R}, n) \cong GL(\mathbb{R}, n) \times \mathbb{R}^{n^2}.$$

Задача 5.6. Показати, що в топології $M(\mathbb{R}, n)$ група $SL(n)$ –

5.6.1) замкнена;

5.6.2) некомпактна;

5.6.3) лінійно зв'язна;

5.6.4) дотичний простір групи $SL(n)$ в одиниці E складається з матриць, які мають нульовий слід: $T_E SL(n) = \{A \in M(\mathbb{R}, n) \mid \text{tr}(A) = 0\}$.

Задача 5.7. Показати, що існують гомеоморфізми $GL(\mathbb{R}, n) \cong SL(n) \times (\mathbb{R} \setminus 0) \cong SL^\pm(n) \times (0, +\infty)$. Зокрема, вкладення $SL(n) \subset GL^+(\mathbb{R}, n)$ та $SL^\pm(n) \subset GL(\mathbb{R}, n)$ є гомотопічними еквівалентностями.

Задача 5.8. (Характеризація ортогональних матриць) Нехай $A \in M(\mathbb{R}, n)$. Довести, що наступні умови еквівалентні:

5.8.1) $A \in O(n)$, тобто $AA^t = E$;

5.8.2) $(Ax, Ay) = (x, y)$ для всіх $x, y \in \mathbb{R}^n$;

5.8.3) $(Ax, Ax) = (x, x)$ для кожного $x \in \mathbb{R}^n$.

Розглянемо функцію $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 = (x, x)$. Тоді 5.8.3) означає, що $\phi(Ax) = \phi(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n$.

Задача 5.9. Показати, що процес ортогоналізації Грамма-Шмідта, можна інтерпретувати як сильну деформаційну ретракцію $GL(\mathbb{R}, n)$ на $O(n)$.

Інше доведення того, що $O(n)$ є сильним деформаційним ретрактом міститься в задачі 5.17

Задача 5.10. Довести, що для матриці $A \in M(\mathbb{R}, n)$ наступні умови еквівалентні:

5.10.1) A – симетрична, тобто $A = A^t$;

5.10.2) $(Ax, y) = (x, Ay)$ для всіх $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Задача 5.11. Показати, що якщо матриця $A \in M(\mathbb{R}, n)$ – симетрична, то її власні значення є дійсними і в деяком базисі вона діагоналізується.

Симетрична матриця $A \in M(\mathbb{R}, n)$ називається *додатньо визначеною*, якщо $(Ax, x) > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n$. Позначимо через \mathcal{A} – множину всіх додатньо визначених матриць

Задача 5.12. Показати, що \mathcal{A} – опукла підмножина в $M(\mathbb{R}, n)$, а значить стягувана.

Задача 5.13. Показати, що симетрична $A \in M(\mathbb{R}, n)$ є *додатньо визначеною* тоді і тільки тоді, коли її всі власні значення додатні. Зокрема, тоді A – невироджена і існує така додатньо визначена матриця B , що $B^2 = A$.

Задача 5.14. Довести, що $\mathcal{A} \cap O(n) = \{E\}$

Задача 5.15. Довести, що для довільної матриці $A \in GL(\mathbb{R}, n)$, AA^t – додатньо визначена. Зокрема, існує матриця $B \in \mathcal{A}$, така, що $B^2 = AA^t$. Показати, що в цьому випадку, $B^{-1}A$ – ортогональна.

Задача 5.16. (Полярний розклад невиродженої матриці). Використовуючи попередню задачу 5.15 показати, що для довільної матриці $A \in GL(\mathbb{R}, n)$ існують такі матриці $B \in \mathcal{A}$ і $P \in O(n)$, що $A = BP$. Більш того, відповідність $\gamma : GL(\mathbb{R}, n) \rightarrow \mathcal{A} \times O(n)$, $\gamma(A) = (B, P)$, є гомеоморфізмом.

Задача 5.17. Вивести із задач 5.12 та 5.16, що вкладення $O(n)$ є сильним деформаційним ретрактом $GL(\mathbb{R}, n)$

Задача 5.18. Показати, що в топології $M(\mathbb{R}, n)$

5.18.1) $O(n)$ і $SO(n)$ – компактні;

- 5.18.2) $O(n)$ має рівно дві компоненти зв'язності;
 5.18.3) $SO(n)$ є тотожною компонентою зв'язності $O(n)$;
 5.18.4) дотичний простір групи $SO(n)$ в одиниці E складається з кососиметричних матриць: $T_E SO(n) = \{A \in M(\mathbb{R}, n) \mid A^t = -A\}$.

Задача 5.19. Нехай $A, B : (a, b) \rightarrow M(\mathbb{R}, n)$ – дві криві класу C^1 . Довести, що

$$(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$$

Задача 5.20. Нехай $A \in M(\mathbb{R}, n)$ і $L_A, R_A : M(\mathbb{R}, n) \rightarrow M(\mathbb{R}, n)$ – відображення множення на A справа і зліва:

$$L_A(X) = AX, \quad R_A(X) = XA.$$

Показати, що дотичні відображення $TL_A, TR_A : TM(\mathbb{R}, n) \rightarrow TM(\mathbb{R}, n)$ задаються формулами:

$$TL_A(X, V) = (AX, AV), \quad TR_A(X, V) = (XA, VA),$$

для всіх $X \in M(\mathbb{R}, n)$ і дотичних векторів $V \in T_X M(\mathbb{R}, n)$.

Задача 5.21. Нехай $A \in GL(\mathbb{R}, n)$ і $\nu : M(\mathbb{R}, n) \rightarrow M(\mathbb{R}, n)$, $\nu(A) = A^{-1}$, – відображення взяття оберненої матриці. Зокрема, $\nu(E) = E$, а тому маємо дотичне відображення

$$T_E \nu : T_E GL(\mathbb{R}, n) \rightarrow T_E GL(\mathbb{R}, n).$$

Показати, що $T_E \nu(V) = -V$ для всіх $V \in T_E GL(\mathbb{R}, n) = \mathbb{R}^{n^2}$.

Підказка. Нехай крива $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow GL(\mathbb{R}, n)$ задає дотичний вектор $V \in T_E GL(\mathbb{R}, n)$, тобто $A(0) = E$ і $A'(0) = V$. Тоді $A(t)A(t)^{-1} \equiv E$. Продиференціюйте цю тотожність по t і покладіть $t = 0$.

Задача 5.22. Нехай $\exp : M(\mathbb{R}, n) \rightarrow M(\mathbb{R}, n)$ – відображення, визначене за формулою

$$\exp(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i}{i!} = E + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots$$

Матриця $\exp(A)$ називається *експонентою* матриці A і також позначається через e^A . Довести такі твердження

- 5.22.1) Для кожної матриці A ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$ збігається. Іншими словами, послідовність його частинних сум, як послідовність точок в $M(\mathbb{R}, n) = \mathbb{R}^{n^2}$ – збіжна. Таким чином \exp – коректно визначене відображення.
 5.22.2) Якщо матриці A, B комутують, тобто $AB = BA$, то $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.
 5.22.3) Якщо A – невироджена, то $\exp(ABA^{-1}) = A\exp(B)A^{-1}$.
 5.22.4) $\exp(A^t) = (\exp(A))^t$.
 5.22.5) Якщо $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – діагональна, то $\exp(A) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$, зокрема вона теж діагональна.
 5.22.6) Більш загально, $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_k)$ – блочно діагональна, то

$$\exp(A) = \text{diag}(\exp(A_1), \dots, \exp(A_k)),$$
 зокрема вона теж блочно діагональна.
 5.22.7) Якщо A – верхньо (нижньо) трикутна, з діагоналлю $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$, то $\exp(A)$ – також верхньо (нижньо) трикутна, з діагоналлю $[e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}]$.
 5.22.8) $\det(\exp A) = e^{\text{tr}(A)}$ для всіх $A \in M(\mathbb{R}, n)$.

5.22.9) $\exp(A)$ – невироджена для всіх $A \in M(\mathbb{R}, n)$, тобто $\exp(M(\mathbb{R}, n)) \subset GL(\mathbb{R}, n)$.

5.22.10) Для кожної матриці $A \in M(\mathbb{R}, n)$ відображення $\phi : \mathbb{R} \rightarrow GL(\mathbb{R}, n)$,

$$\phi(t) = \exp(At) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} = E + At + \frac{A^2}{2} t^2 + \dots + \frac{A^n}{n!} t^n + \dots$$

є аналітичним гомоморфізмом адитивної групи $(\mathbb{R}, +)$ в групу $GL(\mathbb{R}, n)$ відносно множення, тобто $\phi(t+s) = \psi(t)\psi(s)$. Причому, $\phi(0) = E$ і $\phi'(0) = A \in T_E GL(\mathbb{R}, n)$.

5.22.11) Нехай $0 \in M(\mathbb{R}, n)$ – нульова матриця. Тоді $\exp(0) = E$, а відповідне дотичне відображення $T_0 \exp : T_0 M(\mathbb{R}, n) \rightarrow T_0 M(\mathbb{R}, n)$ задається формулою $T_0 \exp(V) = V$ для всіх $V \in T_0 M(\mathbb{R}, n)$. Зокрема, \exp індукує дифеоморфізм деякого околу 0 в $T_0 M(\mathbb{R}, n) = M(\mathbb{R}, n) = \mathbb{R}^{n^2}$ на деякий окіл E в $GL(\mathbb{R}, n)$.

5.22.12) Більш загально, визначимо відображення $Q : TM(\mathbb{R}, n) \rightarrow M(\mathbb{R}, n) \times M(\mathbb{R}, n)$ за формулою

$$Q(A, V) = (A, \exp(V)),$$

для $A \in M(\mathbb{R}, n)$ і $V \in T_A M(\mathbb{R}, n)$. Тоді Q індукує дифеоморфізм деякого околу підмноговиду $M(\mathbb{R}, n) \times 0$ (нульового перерізу дотичного розшарування $TM(\mathbb{R}, n)$) на окіл діагоналі $\Delta = \{(V, V) \mid V \in M(\mathbb{R}, n)\}$ в $M(\mathbb{R}, n) \times M(\mathbb{R}, n)$.

6. КВАТЕРНІОНИ

7. ВЕКТОРНІ ПОЛЯ НА МНОГОВИДАХ

Задача 7.1. Довести, для товільних C^k -многовидів (M, α) , (N, β) без межі (α, β – відповідні C^k -атласи), їх добуток $M \times N$ також має структуру C^k -многовиду з атласом

$$\alpha \times \beta := \{\phi \times \psi : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid (U, \phi) \in \alpha, (V, \psi) \in \beta\},$$

що складається з попарних добутоків карт з α і β .

Показати, що при $k \geq 1$ існує канонічний C^{k-1} дифеоморфізм $T(M \times N) \cong TM \times TN$.

Нехай M – C^k -многовид і $p : TM \rightarrow M$ – дотичне розшарування. Векторне поле на многовиді M – це переріз дотичного розшарування, тобто відображення $s : M \rightarrow TM$, таке, що $p \circ s = \text{id}_M$. Іншими, словами, в кожній точці $x \in M$ вибирається деякий дотичний вектор $s(x) \in T_x M$.

Інтерпретація векторних полів в термінах звичайних диференціальних рівнянь. Нехай $U \subset \mathbb{R}^n$ – відкрита підмножина, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ – C^1 -відображення і

$$(1) \quad \dot{x} = F(x)$$

система диференціальних рівнянь. Розв'язати цю систему означає для кожної точки $x \in U$ необхідно знайти криву $\gamma_x : (-\varepsilon_x, \varepsilon_x) \rightarrow U$ таку, що $\gamma_x(0) = x$ і $(\gamma_x)'_t = F(\gamma_x(t))$, для деякого $\varepsilon_x > 0$, яке залежить від $x \in U$.

Для $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ і $\delta > 0$ нехай $K_\delta(x) = \prod_{i=1}^n [x_i - \delta, x_i + \delta]$ – куб з центром в точці x і сторонами по 2δ .

Згідно загальної теорії має місце теорема про існування, єдиність і гладку залежність від початкових даних розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь:

Теорема. Якщо F належить класу C^k , то для кожної точки $x \in U$ існують, $\varepsilon, \delta > 0$ і єдине C^k -відображення $\Phi : K_\delta(x) \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow U$ такі, що

- (а) $K_\delta(x) \subset U$;
- (б) $\Phi(y, 0) = y$ для всіх $y \in K_\delta(x)$

(в) $\frac{\partial}{\partial t}\Phi(y, t) = F(\Phi(y, t))$ для всіх $y \in K_\delta(x)$, $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Іншими словами, для фіксованого $y \in K_\delta(x)$ відображення $\phi_y : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow U$, $\phi(t) = \Phi(y, t)$ є єдиним розв'язком системи диференціальних рівнянь $\dot{x} = F(x)$, який задовольняє початкову умову $\phi(0) = y$.

Це твердження можна переказати на мову векторних полів.

- Так як U – відкрита підмножина в \mathbb{R}^n , тобто підмноговид, то для кожної точки $x \in U$ її дотичний простір $T_x U$ канонічним чином отожднюється з \mathbb{R}^n .
- За означенням, дотичне розшарування до U – це об'єднання дотичних просторів $T_x U$ по всіх точках $x \in U$: $TU = \sqcup_{x \in U} T_x U$. Це об'єднання можна також канонічним чином отожднити з $U \times \mathbb{R}^n$. Введемо на TU топологію з $U \times \mathbb{R}^n$ і вважатимемо, що, $TU \equiv U \times \mathbb{R}^n$ як топологічні простори.
- Тоді відображення $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ разом з системою диференціальних рівнянь $\dot{x} = F(x)$ можна інтерпретувати як переріз $\hat{F} : U \rightarrow TU = U \times \mathbb{R}^n$ дотичного розшарування U визначений за формулою: $\hat{F}(x) = (x, F(x))$. Розв'язати таку систему означає, що через кожну точку $x \in U$ потрібно провести криву $\gamma_x : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ таку, що $\gamma_x(0) = x$ і дотичний вектор до γ_x в точці $\gamma_x(t)$ тотожний з $\hat{F}(\gamma_x(t))$.
- Розв'язки системи (1) також називають *інтегральними кривими векторного поля \hat{F}* .

Задача 7.2. Нехай $U \subset \mathbb{R}^n$ – відкрита підмножина, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ – C^1 -відображення (векторне поле на U).

- 7.2.1. Нехай $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ – розв'язок системи (1). Тоді для довільного $a > 0$ крива $\alpha : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \rightarrow U$, $\alpha(t) = \gamma(t - a)$ також є єдиним розв'язком системи (1), таким, що $\alpha(a) = \gamma(0)$.
- 7.2.2. Показати, що кожен розв'язок системи (1) продовжується єдиним чином на деякий максимальний інтервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$.
- 7.2.3. Показати, що образи інтегральних кривих в U векторного поля F або не перетинаються або тотожні. Таким чином коже векторне поле на U задає розбиття U на образи інтегральних кривих. Ці образи називаються *орбітами* векторного поля F .
- 7.2.4. Нехай $\Phi : K_\delta(x) \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow U$ – відображення як в теоремі вище. Довести, що якщо $s, t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ такі, що $s + t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, то

$$\Phi(\Phi(y, s), t) = \Phi(y, s + t).$$

- 7.2.5. Нехай $\mathcal{U} = \sqcup_{x \in U} (a_x, b_x) \subset U \times \mathbb{R}$ – об'єднання областей визначення всіх розв'язків системи (1). Довести, що \mathcal{U} є відкритим околком $U \times 0$ в $U \times \mathbb{R}$.

Більш того, розглянемо відображення $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow U$ визначене за формулою $\Phi(x, t) = \gamma_x(t)$, де γ_x – максимальний розв'язок (1), такий, що $\gamma_x(0) = x$, $(x, t) \in \mathcal{U}$. Показати, Φ належить класу C^k і задовольняє умови: $\Phi(y, 0) = y$ і $\Phi(\Phi(y, s), t) = \Phi(y, s + t)$ якщо визначена права і ліва частини останньої тотожності.

Це відображення Φ називається *локальним потоком поля F* .

- 7.2.6. Припустимо, що кожен розв'язок системи (1) продовжується до єдиного розв'язку $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow U$ визначеного на всій числовій прямій. Показати, що Φ продовжується до єдиного C^k відображення $\Phi : U \times \mathbb{R} \rightarrow U$, яке задовольняє таким умовам:

- $\Phi(y, 0) = y$,
- $\Phi(\Phi(y, s), t) = \Phi(y, s + t)$,
- $\frac{\partial}{\partial t}\Phi(y, t) = F(\Phi(y, t))$,

для всіх $y \in U$, $s, t \in \mathbb{R}$. Довести, що Φ є дією групи \mathbb{R} на U .

В цій ситуації Φ називається (*глобальним*) *поток*ом поля F .

7.2.7. Нехай $h : U \rightarrow V$ – дифеоморфізм і $G : V \rightarrow TV$ – векторне поле визначене за формулою: $G(h(x)) = T_x h(F(x))$, тобто воно робить комутативною таку діаграму:

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{T_h} & TV \\ F \uparrow & & \uparrow G \\ U & \xrightarrow{h} & V \end{array}$$

Таким чином, якщо в точці $x \in U$ маємо вектор $F(x)$, то в її образі $h(x)$ вектор $G(h(x))$ є образом вектора $F(x)$ відносно дотичного відображення $T_x h$. В цьому випадку векторні поля F та G називатимемо *h-узгодженими*.

Довести, що якщо $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ – інтегральна крива поля F , то $h \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$ – інтегральна крива поля G . Іншими словами, h переводить інтегральні криві векторного поля F в інтегральні криві векторного поля G .

7.2.8. Припустимо, що векторні поля $F : U \rightarrow TU$ і $G : V \rightarrow TV$ – h -узгоджені і нехай $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow U$ і $\Psi : \mathcal{V} \rightarrow V$ – їх локальні потоки. Довести, що $\Psi_t(y) = h \circ \Phi_t \circ h^{-1}(y)$ для всіх $(y, t) \in \mathcal{V}$.

7.2.9. Нехай $h : U \rightarrow U$ – дифеоморфізм, такий, що $F(h(x)) = T_x h(F(x))$ для всіх $x \in U$, тобто має місце комутативна діаграма:

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{T_h} & TU \\ F \uparrow & & \uparrow F \\ U & \xrightarrow{h} & U \end{array}$$

Показати, що h переставляє інтегральні криві поля F .

8. Групи Лі

Групою Лі називають топологічну групу G , яка є C^1 -многовидом і для якої відображення множення $\mu : G \times G$ та взяття оберненого $\nu : G \rightarrow G$ належать класу C^1 .

Скрізь нижче G – група Лі з одиницею e і $n = \dim G$ як многовиду.

Додаткова інформація, яка виникає при розгляді групи Лі полягає в вивченні дотичного відображення до відображення множення:

$$T\mu : T(G \times G) \cong TG \times TG \rightarrow TG.$$

Задача 8.1. Зауважимо, що існує природне вкладення

$$\lambda : G \times T_e G \cong (0 \times G) \times (T_e G \times e) \subset TG \times TG = T(G \times G).$$

8.1.1. Довести, що композиція

$$T\mu \circ \lambda : G \times T_e G \xrightarrow{\lambda} T(G \times G) \xrightarrow{T\mu} TG$$

є дифеоморфізмом. Зокрема, дотичне розшарування до групи Лі завжди є тривіальним.

8.1.2. Кожне векторне поле $F : G \rightarrow TG$ (як переріз дотичного розшарування) задається відображенням $G \rightarrow TG \cong \mathbb{R}^n$.

Задача 8.2. Аналогічно до задачі 8.1 показати, що існує вкладення

$$\rho : T_e G \times G \subset T(G \times G),$$

таке, що композиція

$$T\mu \circ \rho : T_e G \times G \cong TG$$

є дифеоморфізмом.

Геометричний зміст задач 8.1 і 8.2 в тому, що кожен дотичний вектор $v \in T_g G$ до деякого елемента $g \in G$ є

- образом єдиного дотичного вектора $l \in T_e G$ при дотичному відображенні $T_e L_g$ до лівого зсуву на елемент g , тобто $v = T_e L_g(l)$, а також
- образом єдиного дотичного вектора $r \in T_e G$ при дотичному відображенні $T_e R_g$ до правого зсуву на елемент g , тобто $v = T_e R_g(r)$.

Векторне поле $F : G \rightarrow TG$ називається *ліво-інваріантним* (*право-інваріантним*), якщо воно інваріантне відносно всіх лівих (правих) зсувів, тобто для кожного $g \in G$ має місце ліва (права) комутативна діаграма:

$$\begin{array}{ccc} TG & \xrightarrow{TL_g} & TG \\ F \uparrow & & \uparrow F \\ G & \xrightarrow{L_g} & G \end{array} \quad \begin{array}{ccc} TG & \xrightarrow{TR_g} & TG \\ F \uparrow & & \uparrow F \\ G & \xrightarrow{R_g} & G \end{array}$$

Задача 8.3. Нехай $F : G \rightarrow TG$ – векторне поле на G і $v = F(e) \in T_e G$.

- 8.3.1. Показати, що F – ліво інваріантне, тоді і тільки тоді $F(g) = TL_g \circ F(e) = TL_g(v)$ для всіх $g \in G$.
- 8.3.2. Показати, що F – право інваріантне, тоді і тільки тоді $F(g) = TR_g \circ F(e) = TR_g(v)$ для всіх $g \in G$.
- 8.3.3. Показати, що існує бієкція між $T_e G$, тобто дотичними векторами до e , і множиною всіх ліво-інваріантних (право-інваріантних) векторних полів.

Кожен C^1 гомоморфізм $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$ називається *однопараметричною підгрупою в G* .

Задача 8.4. Нехай $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$ – неперервний гомоморфізм, який є дисеренційовним в точці $t = 0$. Показати, що тоді ϕ належить класу C^1 і є інтегральною кривою лівоінваріантного векторного поля, яке відповідає вектору $\phi'(0) \in T_e G$.

Задача 8.5. Нехай F – ліво-інваріантне векторне поле, $v = F(e)$, і $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ – інтегральна крива цього поля, тобто $\phi'(t) = F(\phi(t))$ для всіх $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, і така, що $\phi(0) = e$.

- 8.5.1. Показати, що для всіх $s, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ таких, що $s + t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ виконується співвідношення $\phi(s + t) = \phi(s)\phi(t)$. Іншими словами, ϕ – “локальний гомоморфізм”.
- 8.5.2. Довести, що ϕ продовжується до гомоморфізма $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$, який також є інтегральною кривою F .

Таким чином маємо канонічні бієкції між

- простором $T_e G$ дотичних векторів до e ;
- множиною ліво-інваріантних векторних полів;
- множиною право-інваріантних векторних полів;
- множиною однопараметричних підгруп в G .

Крім того, на множині векторних полів існує білінійна кососиметна операція дужки $[\cdot, \cdot]$, яка перетворює цю множину в алгебру Лі. Ми обговоримо цю операцію пізніше. Зокрема, ця операція задана на ліво-інваріантних векторних полях, а значить на дотичних векторах до e . Тому $T_e G$ також називають *алгеброю Лі* групи Лі.

Для кожного $v \in T_e G$, позначимо через $\phi_v : \mathbb{R} \rightarrow G$ – відповідну однопараметричну підгрупу, тобто гомоморфізм такий, що $(\phi_v)'(0) = v$.

Відображення

$$\exp : T_e G \rightarrow G, \quad \exp(v) = \phi_v(1),$$

називається *експоненційним відображенням групи Лі* G .

Задача 8.6. Довести такі твердження

- 8.6.1. Показати, що для довільних $s \in \mathbb{R}$, $v \in T_e G$ і $t \in \mathbb{R}$, маємо, що $\phi_{sv}(t) = \phi_v(st)$
- 8.6.2. Показати, що для кожного $v \in T_e G$ однопараметричну підгрупу $\phi_v : \mathbb{R} \rightarrow G$ можна визначити як $\phi_v(t) = \exp(vt)$.
- 8.6.3. Довести, що експоненційне відображення є диференційовним.
- 8.6.4. Обчислити дотичне відображення до нього в $0 \in T_e G$.
- 8.6.5. Довести, що \exp індукує дифеоморфізм деякого околу $0 \in T_e G$ на деякий окіл $e \in G$.

Таким чином експоненційне відображення переводить прямі, що проходять через $0 \in T_e G$ на однопараметричні підгрупи.

Задача 8.7. Нехай $f : G \rightarrow H$ – C^1 -гомоморфізм груп Лі. Зокрема, $f(e_G) = e_H$. Показати, що має місце комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} T_{e_G} G & \xrightarrow{Tf} & T_{e_H} H \\ \downarrow \exp & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{f} & H. \end{array}$$

Задача 8.8. Довести, що кожна локально зв'язна топологічна група породжується довільним околом одиниці.

Задача 8.9. Нехай $f : G \rightarrow H$ – C^1 -гомоморфізм зв'язних груп Лі. Показати, що він однозначно задається дотичним відображенням $T_e f : T_{e_G} G \rightarrow T_{e_H} H$.

Задача 8.10. Нехай $T_e G = W \oplus W'$ – розклад дотичного простору в пряму суму двох підпросторів. Довести, що тоді відображення $g : T_e G \rightarrow G$, визначене за формулою $g(w, w') = \exp(w) \exp(w')$, є локальним дифеоморфізмом околу $0 \in T_e G$ на окіл одиниці $e \in G$.

Задача 8.11. Нехай $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ – локальна карта околу одиниці $e \in G$ така, що $\phi(e) = 0$ і $V \subset U$ – відкритий окіл e такий, що $VV \subset U$. Визначимо відображення

$$\nu : \phi(V) \times \phi(V) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \nu(x, y) = \phi(\phi^{-1}(x)\phi^{-1}(y)), \quad x, y \in \phi(V),$$

яке можна розглядати як “множення в локальній карті ϕ ”. Очевидно, що $\nu(0, 0) = 0$. Довести, що дотичне відображення

$$T_{(0,0)}\nu : T_0\mathbb{R}^n \times T_0\mathbb{R}^n \rightarrow T_0\mathbb{R}^n,$$

визначається за формулою

$$T_{(0,0)}\nu(u, v) = u + v.$$

Іншими словами, $\phi(xy) \approx \phi(x) + \phi(y) + o(|\phi(x)| + |\phi(y)|)$.

Задача 8.12. Нехай H – замкнена підгрупа групи Лі G . Довести, що H є гладким підмноговидом, а отже групою Лі.

Задача 8.13. Нехай $f : G \rightarrow H$ – неперервний гомоморфізм груп Лі. Показати, що він є диференційовним.

9. МАКСИМАЛЬНІ ТОРИ В КОМПАКТНИХ ГРУПАХ ЛІ