Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Олександр ПРИШЛЯК

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ ТА ТОПОЛОГІЯ

Загальна топологія

Навчальний посібник

Київ – 2025

УДК 517.9 515.14: 515.164.174

О.Пришляк. Диференціальна геометрія та топологія. Загальна топологія. Навчальний посібник. - К.:, 2025. - 90 с.

Рецензенти:

Максименко С.І., доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України

Петравчук А.П., доктор фізико-математичних наук, професор

В навчальному посібнику розглядаються основні топологічні поняття, зокрема топологічні конструкції та топологічні властивості топологічних просторів.

Книга адресована науковцям, викладачам, аспірантам та студентам вузів, які здобувають спеціальність за освітньою програмою "Математика".

@ О.Пришляк 2025

Зміст

Вступ

Згідно своєї назви, топологія вивчає структури атласів карт. Об'єктами, на яких задані атласи карт, є многовиди. Проте, методи вивчення таких структур поширюються на інші множини. Топологічні властивості – це ті, що зберігаються при неперервних перетвореннях. Для вивчення таких властивостей на множині, що досліджується, повинна існувати топологічна структура, що задається сім'єю відкритих множин. Загальна топологія – це наука, що вивчає різні топологічні структури та їх топологічні властивості. До топології відносяться також науки, де основними інваріантами є ті, що не змінюються при неперервних відображеннях. Наприклад, гомотопічна топологія (вивчає неперервні деформації), алгебраїчна топологія (застосування алгебраїчних структур як топологічних інваріантів), диференціальна топологія (вивчає топологічні властивості гладких многовидів).

В першому розділі розглядається поняття топологічного простору та способи задання топологічних структур. зокрема за допомогою відкритих множин, замкнених множин, бази та передбази, а також операції замикання, внутрішності та межі множини.

В другому розділі розглядаються основні топологічні конструкції: підпростір, топологічна сума, топологічний добуток, факторпростір тощо. Також в цьому розділі вивчаються неперервні відображення та гомеоморфізми.

В третьому розділі вивчаються такі топологічні властивості: зв'язність та лінійна зв'язність, аксіоми відокремлення, компактність, локальна евклідовість (многовиди).

Кожний підрозділ містить вправи для самостійної роботи.

В додатках можна знайти завдання для самостійної роботи на теми, що не потрапили в основний матеріал і відносяться зразу до всіх тем, завдання підвищеної складності, приклад модульної контрольної роботи та контрольні запитання.

1. Топологічні простори

В цьому розділі ми опишемо способи задання топологічних структур на заданій множині X: за допомогою набору відкритих множин, бази, замкнених множин, операцій внутрішності та замикання.

1. Відкриті множини

Для задання поняття неперервності відображення з множини X в множину Y на цих множинах повинні існувати додаткові структури, наприклад структури метричних просторів. Але найбільш загальною структурою для цього є структура топологічного простору, що визначається набором відкритих множин.

Через 2^X будемо позначати множину всіх підмножин множини X.

Означення 1.1. *Топологічним простором* називається пара (X, τ), в якій X – множина, а $\tau \subset 2^X$ сім'я підмножин множини X, що задовольняє таким умовам:

T1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$,

T2) Якщо $U_i \in \tau, i \in \alpha$, то $\cup_{i\in\alpha} U_i \in \tau$,

T3) Якщо $U \in \tau$ та $V \in \tau$, то $U \cap V \in \tau$.

В цьому випадку множина X називається простором, елементи з X точками, підмножини X, що належать τ – *від-*

критими множинами в просторі X, а τ – *топологією* або *топологічною структурою.*

Зауважимо, що умова Т3) рівносильна умові

Т3') Якщо $U_i \in \tau, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то $\bigcup_{i=1}^{n} U_i \in \tau$.

Отже, топологічна структура на X це сім'я підмножин в X, що називаються відкритими множинами, і такими що

1) $\emptyset$ і весь простір є відкритими множинами,

2) об'єднання довільної кількості відкритих множин є відкритою множиною,

3) перетин скінченої кількості відкритих множин є відкритою множиною.

Нехай X – довільна множина.

Приклад 1.1. Топологія $\tau_T = \{\emptyset, X\}$ називається *тривіальною* або *антидискретною* на множині X, а (X, τ_T) – тривіальним або антидискретним топологічним простором.

Приклад 1.2. Топологія $\tau_D = 2^X$ називається *дискретною* на множині X, а пара (X, τ_D) – дискретним простором.

Твердження 1.1. *Топологія буде дискретною тоді та тільки тоді, коли кожна точка простору є відкритою множиною.*

Доведення. Необхідність. Якщо $x \in X$, то $\{x\} \in 2^X = \tau_D$.

Достатність. Нехай для кожної точки $x \in X$: $\{x\} \in \tau$. Тоді якщо $U \subset X$, то

$$U = \bigcup_{x \in U} x, \quad U \in \tau$$

як об'єднання відкритих множин (своїх точок). Отже, $\tau = \tau_D$. □

На одноточковій множині існує єдина топологія. Вона є тривіальною та дискретною, одночасно. На просторах з більшим числом точок тривіальна топологія не є дискретною. На множині з двох точок крім цих двох топологій є ще один тип топологічної стриктури.

Приклад 1.3. Нехай $X = \{x, y\}$, $\tau = \{\emptyset, X, x\}$. Тоді τ є топологічною структурою. В цьому випадку, простір (X, τ) називається *зв'язною двоточкою* або *простором Серпінського.*

Приклад 1.4. Нехай (X, d) — метричний простір. Нагадаємо, що множина U називається відкритою в метричному просторі, якщо для довільної точки $x \in U$ існує $\varepsilon > 0$, що $B(x, \varepsilon) \subset U$. Тут $B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$. Сукупність τ_d усіх відкритих у метриці d множин є топологією на X, яка називається *метричною топологією.*

Зауважимо, що різним метрикам на множині X може відповідати одна і та сама топологія. Наприклад, якщо всі відстані помножити на стале додатне число, то τ_d не зміниться.

Топологічний простір (X, τ) називається *метризовним*, якщо існує така метрика d на X, що $\tau = \tau_d$.

Якщо в $\mathbb{R}^n$ задано стандартну евклідову метрику

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}, \text{ де } x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n),$$

то таку метричну топологію називають *евклідовою* або *стандартною.* $\mathbb{R}^n$ з евклідовою топологією позначають $\mathbb{E}^n$.

Наприклад, на прямій відкрита множина в евклідовій топології є об'єднанням інтервалів виду (a, b), де $a < b$.

Приклад 1.5. Нехай X – довільна множина. Сім'я

$$\tau = \{\emptyset, U \subset X : \ X \setminus U \text{ є скінченою } \}$$

називається *коскінченою* топологією або топологією скінченних доповнень.

Приклад 1.6. Нехай X – довільна множина. Сім'я

$$\tau = \{\emptyset, U \subset X :\ X \setminus U \text{ є зліченою або скінченою}\}$$

називається *козліченою* топологією або топологією злічених доповнень.

Окрім топологічних структур, що перераховані раніше, на прямій $\mathbb{R}$ існують інші топології.

Приклад 1.7. *Ліва порядкова топологія* на $\mathbb{R}$ – це сім'я

$$\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Права порядкова топологія визначається аналогічно за допомогою інтервалів вигляду (α, ∞).

Приклад 1.8. *Кокомпактна топологія* на $\mathbb{R}$ – це $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathbb{R} \mid U$ відкрите в евклідовій топології на прямій, а доповнення $\mathbb{R} \setminus U$ обмежене$\}$.

Кокомпактна топологія в $\mathbb{R}^n$ визначається аналогічно.

Означення 1.2. Множина N_A називається *околом* підмножини A топологічного простору X, якщо існує така відкрита множина U_A, що

$$A \subset U_A \subset N_A.$$

Відкрита множина є околом кожної своєї підмножини.

Теорема 1.1. *Множина U відкрита тоді і тільки тоді, коли вона містить окіл кожної своєї точки.*

Доведення. Необхідність. Якщо U – відкрита, то вона є околом кожної своєї точки. Отже, для кожної точки $x \in U$ існує окіл $N_x = U \subset U$.

Достатність. Якщо для кожної точки $x \in U$ існує окіл $N_x \subset U$, то покажемо, що

$$U = \bigcup_{x \in U} N_x. \qquad (1.1)$$

Для доведення формули (1.1) досить довести включення в обидва боки. Оскільки $x \in N_x$, то $U = \cup_{x\in U}\{x\} \subset \cup_{x\in U} N_x$. Оскільки для кожного $x \in U$ окіл $N_x \subset U$, то $\cup_{x\in U} N_x \subset \cup_{x\in U} U = U$. Отже, виконується формула (1.1). За умовою теореми, маємо що кожної точки $x \in U$: $x \in U_x \subset N_x \subset U$. Тобто замість довільних околів N_x можемо розглядати відкриті околи U_x. Тоді $U = \cup_{x\in U} U_x$ і є відкритою множиною, як об'єднання відкритих множин (за аксіомою топології T2). □

Означення 1.3. Усі топології, які задані на тій самій множині, можна частково впорядкувати в розумінні такого означення: кажуть, що топологія τ_1 *сильніша*, ніж топологія τ_2, якщо довільний елемент із τ_2 належить τ_1. В цьому випадку кажуть також, що топологія τ_2 *слабкіша*, ніж τ_1. Дискретна топологія – найсильніша, а тривіальна – найслабша з усіх таких топологій.

Вправа 1.1. Довести, що простір X з дискретною топологією метризовний, а з тривіальною не метризовний, якщо $|X|>1$.

Вправа 1.2. Чи є перетин (об'єднання) топологій, що задані на одній і тій же множині X, топологією на X?

Вправа 1.3. [4, 1] Перевірити, чи є пара (X, τ) топологічним простором в кожному з таких випадків:

а) $X = \{a, b\}$, $\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$;

б) $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}\}$;

в) $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$;

г) $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c\}\}$;

ґ) $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$;

д) $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c, d\}\}$;

е) $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$;

є) $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}\}, \{a, b, c, d\}$;

ж) $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$;

з) $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$;

и) $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$;

і) $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$;

ї) $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$.

Вправа 1.4. [4, 2] З'ясувати, чи є пара (X, τ) топологічним простором в кожному з таких варіантів:

а) $X = \mathbb{N}$ або $X = \mathbb{Z}$, $\tau = \{U \subset X \mid$ якщо $n \in U$ і n непарне, то $n + 1 \in U\}$;

б) $X = \mathbb{N}$ або $X = \mathbb{Z}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{m \in X \mid m < n\}, n \in X\}$;

в) $X = \mathbb{Z}$, $\tau = \{\emptyset, m\mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$;

г) $X = \mathbb{Z}$, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{Z}, m^n\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \cup 0, m \in \mathbb{N}\}$;

д) $X = \mathbb{Z}$, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{Z}, m\mathbb{Z}, mn\mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{N}$ — прості$\}$;

е) $X = (-1, 1)$, $\tau = \{\emptyset, X, (1/n, 1 - 1/n), n \in \mathbb{N}\}$;

є) $X = [-1, 1]$, $\tau = \{\emptyset, X, [-1, b), (a, b], (a, 1], a \in [-1, 0), b \in (0, 1]\}$;

ж) $X = [1, 1]$, $\tau = \{\mathrm{U} \subset X \mid 0 \notin U$ або $U \supset (-1, 1)\}$.

Вправа 1.5. [4, 3] З'ясувати, чи є пара $(\mathbb{R}, \tau)$ топологічним простором в кожному з таких варіантів:

а) $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$;

б) $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$;

в) $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$;

г) $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$;

д) $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (\alpha, +\infty), \alpha \in \mathbb{R}\}$;

е) $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, q), q \in \mathbb{Q}\}$;

є) $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, q], q \in \mathbb{Q}\}$;

ж) $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, n], n \in \mathbb{Z}\}$;

з) $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, (-q, q), q > 0\}$;

и) $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-n, n], n \in \mathbb{N}\}$;

і) $\tau = \{\emptyset, [0, +\infty), (-\infty, 0), (-\infty, x) \cup (x, +\infty), x > 0\}$;

к) $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, -1/n), n \in \mathbb{N}\}$;

л) $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, 0), (-\infty, -1/n], n \in \mathbb{N}\}$.

Вправа 1.6. [4, 4] З'ясувати, чи є пара $(\mathbb{R}^2, \tau)$ топологічним простором в кожному з таких варіантів:

а) $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = r\}, r > 0\}$

б) $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < r\}, r > 0\}$

в) $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, \{(x,y) \mid x^2+y^2 > r\}, r > 0\}$

г) $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, \{(x,y) \mid x^2+y^2 = r\}, r > 0\}$

д) $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, \{(x,y) \mid x^2+y^2 > 0\}\}$

е) $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, (-\infty, +\infty) \times \mathbb{R}, [n, n) \times \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$

є) $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}\}$

ж) $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, \mathbb{Z}\}$

Вправа 1.7. [4, 5] З'ясувати, чи є пара (X, τ) топологічним простором, в кожному з випадків:

а) X — довільна непорожня множина, $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \setminus X \mid U \subset A\}$, $A \subset X$;

б) X — довільна непорожня множина, $\tau = \{X\} \cup \{U \subset X \mid U \setminus A = \varnothing,\ A \subset X\}$;

в) X — довільна непорожня множина, $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X \mid$ доповнення X/U січене$\}$;

г) X — нескінченна множина, $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X \mid U$ нескінченна$\}$;

д) X — довільна непорожня множина, $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X \mid$ доповнення X/U не більш ніж зліченне$\}$;

е) X — нескінченна множина, $\tau = \{U \subset X \mid$ доповнення X/U містить p або не більш ніж зліченне$\}, p \in X$;

є) X — незліченна множина, $\tau = \{U \subset X \mid$ доповнення X/U містить p або не більш ніж зліченне$\}, p \notin X$.

Вправа 1.8. [4, 38] Порівняти такі топології на множині $X = \{a, b, c\}$:

$\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}\}$,
$\tau_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$,
$\tau_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$,
$\tau_4 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$,
$\tau_5 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Вправа 1.9. [4, 39] Порівняти такі топології на множині $X = \{a, b, c, d\}$:

$\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\}$,
$\tau_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c, d\}\}$,
$\tau_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}\}$,
$\tau_4 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\}$.

Вправа 1.10. [4, 40] Порівняти такі топології на множині $\mathbb{R}^2$:

$\tau_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < g\}, \quad g \in \mathbb{R}, g > 0\}$;
$\tau_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > p\}, \quad p \in \mathbb{N}\}$;
$\tau_3 = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < p\}, \quad p \in \mathbb{N}\}$;
τ_4 – природна топологія;
τ_5 – козлічена топологія;
τ_6 – коскінчена топологія.

Вправа 1.11. Скільки різних топологій існує на множині з трьох елементів?

Вправа 1.12. Доведіть такі властивості околів точки:

1) Якщо N окіл точки x, $N \subset K$, то K окіл x.
2) Перетин скінченого числа околів точки x є околом x.

2. База та передбаза

Для задання топологічної структури зручно описувати не всі відкриті множини, а лише їхню частку і задати правило, як із цієї частки отримати всі інші відкриті множини.

Означення 1.4. Нехай (X, τ) – топологічний простір. Сім'я $\beta \subset \tau$ називається *базою* топології τ (або базою топологічного простору (X, τ)), якщо кожна відкрита множина в X може бути представлена у вигляді об'єднання деяких елементів з β:

$$U \in \tau \Leftrightarrow \exists \{U_i\}_{i \in \alpha} \subset \beta : U = \bigcup_{i \in \alpha} U_i.$$

Теорема 1.2. ***(1-й критерій бази).*** *$\beta \subset \tau$ буде базою топології τ тоді і тільки тоді, коли для кожного $U \in \tau$ і $x \in U$ існує $V \in \beta$ таке, що $x \in V \subset U$.*

Доведення. Необхідність. Нехай $\beta \subset \tau$ – база топології τ, $U \in \tau$, $x \in U$. Тоді, за означенням бази, існують $\{U_i\}_{i \in \alpha} \subset \beta$, що $U = \bigcup_{i \in \alpha} U_i$. Оскільки $x \in U$, то існує $i \in \alpha$, що $x \in U_i$. Шукане $V = U_i$.

Достатність. Нехай для кожного $U \in \tau$ і $x \in U$ існує $V_x \in \beta$ таке, що $x \in V_x \subset U$. Тоді $U = \bigcup_{x \in U} V_x$. Тому β – база топології τ. □

Приклад 1.9. Сукупність β, що складається з усіх відкритих інтервалів з раціональними кінцями є базою евклідової топології на прямій. Перевіримо перший критерій бази. нехай $U = \bigcup_i (a_i, b_i)$, $x \in U$. Тоді існує таке i, що $x \in (a_i, b_i)$. Це рівносильне тому, що $a_i < x < b_i$. Виберемо такі раціональні c і d, що $a_i < c < x < d < b_i$. Тоді $v = (c, d) \in \beta$ і $x \in V \subset U$.

Теорема 1.3. ***(2-й критерій бази).*** *Для того, щоб сукупність $\beta = \{U_i\}$, $i \in \alpha$ була базою деякої топології на мно-*

жині X, необхідно і достатньо, щоб

$$X = \underset{i\in\alpha}{\cup} U_i \text{ і для всіх } j,k \in \alpha \text{ існує } \gamma \subset \alpha : U_j \cap U_k = \underset{i\in\gamma}{\cup} U_i.$$

Доведення. Необхідність. Нехай β – база топології τ на X. Оскільки X – відкрита множина, то $X = \underset{i\in\alpha}{\cup} U_i$. Елементи бази є відкритими множинами, їх перетин також є відкритою множиною, тому $U_j \cap U_k = \underset{i\in\gamma}{\cup} U_i$.

Достатність. Нехай $X = \underset{i\in\alpha}{\cup} U_i$ і для всіх $j,k \in \alpha$ існує $\gamma \subset \alpha : U_j \cap U_k = \underset{i\in\gamma}{\cup} U_i$. Перевіримо виконання аксіом топологічної структури для $\tau = \{\underset{i\in\gamma}{\cup} U_i : \gamma \subset \alpha\}$. Перші дві умови випливають із побудови τ. Переконаємося у виконанні третьої аксіоми. Нехай $U, V \in \tau$, $U = \underset{i\in\omega}{\cup} U_i$, $V = \underset{j\in\delta}{\cup} V_j$, $U_i \in \beta$, $V_j \in \beta$. Тоді $U \cap V = (\underset{i\in\omega}{\cup} U_i) \cap (\underset{j\in\delta}{\cup} V_j) = \underset{i,j}{\cup}(U_i \cap V_j) = = \underset{i,j}{\cup}(\underset{k\in\gamma_{i,j}}{\cup} U_k) \in \tau$. □

Приклад 1.10. Нехай $X = \mathbb{R}$, $\beta = \{[a,b), a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Перевіримо другий критерій бази. Оскільки,

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} [i, i+1), \text{ то } \mathbb{R} = \bigcup_{a<b} [a,b).$$

Для довільних двох півінтервалів $[a,b)$, $[c,d) \in \beta$ можливі такі варіанти їх взаємного розташування на прямій:

1. $a < b \le c < d$ або $c < d \le a < b$, тоді $[a,b) \bigcap [c,d) = \emptyset = \bigcup_{i\in\emptyset} [a_i, b_i)$;

2. $a \le c < b \le< d$, тоді $[a,b) \bigcap [c,d) = [c,b) \in \beta$;

3. $c \le a < d \le b$, тоді $[a,b) \bigcap [c,d) = [a,d) \in \beta$;

4. $a \le c < d \le b$, тоді $[a,b) \bigcap [c,d) = [c,d) \in \beta$;

5. $c \le a < b \le d$, тоді $[a, b) \bigcap [c, d) = [a, b) \in \beta$.

Оскільки в усіх можливих випадках перетин двох елементів бази можна подати як об'єднання деяких елементів бази, то другий критерій бази виконується. Топологічний простір $\mathbb{R}$ з топологічною структурою, заданою цією базою, називається *стрілкою Зоргенфрея.*

Означення 1.5. Нехай (X, τ) – топологічний простір. Сім'я $s \subset \tau$ називається *передбазою* топології τ, якщо скінчені перетини $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$, де $U_i \in s$ для $i = 1, \ldots, k$ утворюють базу топології τ.

Іншими словами. довільну відкриту множину можна отримати із елементів передбази за допомогою скінченного числа операцій перетину та довільного числа операцій об'єднання.

З означення передбази випливає, що довільне покриття множини X є передбазою деякої топології на множині X.

Вправа 1.13. Перевірити, що такі сукупності множин будуть базами евклідової топології τ_E прямої $\mathbb{R}^1$:

a) сукупність, що складається з усіх відкритих інтервалів з раціональними кінцями,

b) сукупність, що складається з усіх відкритих інтервалів з ірраціональними кінцями,

c) сукупність, що складається з усіх відкритих інтервалів.

Вправа 1.14. Нехай $(X,\, d)$ метричний простір. Довести, що сім'я відкритих куль $\beta = \{B(X,\ r),\ x \in X,\ r{>}0\}$ є базою метричної топології τ_d.

Вправа 1.15. Довести, що сім'я $\beta = \{X,\ x \in X\}$ є базою дискретної топології τ_D на X.

Вправа 1.16. Перевірити, що сім'я, яка складається з інтервалів $(a, +\infty)$ та $(\infty,\, b)$, утворює передбазу евклідової топології τ_E на прямій.

Вправа 1.17. [4, 46] З'ясувати, чи є родина β підмножин множини X базою деякої топології на X, якщо:

а) $X = \{a, b, c\}$, $\beta = \{\{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$;

б) $X = \{a, b, c, d\}$, $\beta = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$;

в) $X = \{a, b, c, d\}$, $\beta = \{\{c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$;

г) $X = \{a, b, c, e\}$, $\beta = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\}\}$;

ґ) X — довільна непорожня множина, β — довільне її розбиття;

д) $X = \mathbb{N}$ або $X = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\beta = \{\{m \in X \mid m$ ділить $n\}, n \in X\}$;

е) $X = \mathbb{Z}$, $\beta = \{B_n, n \in \mathbb{Z}\}$, де

$$B_n = \begin{cases} \{n-1, n, n+1\}, & \text{коли } n \text{ парне}, \\ \{n\}, & \text{коли } n \text{ непарне}; \end{cases}$$

є) $X = (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$, $\beta = \{(0, 1/m), (0, 1/n) \cup (n, n+1)\}, m, n \in \mathbb{N}, m \geq 2$;

ж) $X = \mathbb{R}$, $\beta = \{(a, b), a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$;

з) $X = \mathbb{R}$, $\beta = \{[a, b), a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$;

и) $X = \mathbb{R}$, $\beta = \{[a, b), a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$;

і) $X = \mathbb{R}$, $\beta = \{(-\infty, q), q \in \mathbb{Q}\}$;

й) $X = \mathbb{R}$, $\beta = \{\mathbb{R}, \{n\}, n \in \mathbb{Z}\}$;

к) $X = \mathbb{R}$, $\beta = 2^{\mathbb{Q}}$;

л) $X = \mathbb{R}$, $\beta = \{\mathbb{Z} \cup A \mid A \subset \mathbb{R}\}$;

м) $X = \mathbb{R}$, $\beta = \{(a, b) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$;

н) $X = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{[a, b) \times [c, d), a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d\}$;

о) $X = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{[a, b) \times [c, d), a, b \in \mathbb{Q}, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d\}$;

п) $X = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{[a, b) \times [c, d),\ a, b, c, d \in \mathbb{Q},\ a < b,\ c < d\}$;

р) $X = \mathbb{R}^2$, $\beta = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r\right\},\ r \in \mathbb{R},\ r > 0$;

с) $X = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{(a, b) \times (c, d),\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a < b,\ c < d\}$;

т) $X = \mathbb{R}^2$, β — родина всіх прямих;

у) $X = \mathbb{R}^2$, β — родина всіх не більш ніж зліченних підмножин;

ф) $X = \mathbb{R}^2$, β — родина всіх континуальних підмножин;

х) $X = \mathbb{R}^n$, β — родина всіх відкритих куль;

ч) $X = \mathbb{R}^n$, β — родина всіх замкнених куль.

Вправа 1.18. [4, 59, 60] Знайти базу найменшої потужності для топологічного простору X, τ, якщо:

а) $X = \{a, b\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$;

б) $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$;

в) $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\}$;

г) $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$;

ґ) $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$;

д) $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$;

е) $X = \mathbb{R}_1$, τ – ліва порядкова топологія;

є) $X = \mathbb{R}_1$, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, n], \, n \in \mathbb{Z}\}$;

ж) $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, p], \, p \in \mathbb{N}\}$;

з) $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, -1/n], \, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$;

и) $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (0, +\infty), (-\infty, -1/n], \, n \in \mathbb{N}\}$;

ї) $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (0, +\infty), (-\infty, -1/n], \, n \in \mathbb{N}, r > 0\}$;

й) $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (0, +\infty), (-\infty, -\sqrt{3}/n], \, n \in \mathbb{N}\}$;

к) $X = \mathbb{Z}$, τ – дискретна топологія;

л) $X = \mathbb{Z}$, τ – коскінчена топологія;

м) $X = \mathbb{Z}$, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, k \in \mathbb{N};$;

н) $X = \mathbb{R}$, τ – стрілка Зоргенфрея;

о) $X = \mathbb{R}^2$, τ – кокомпактна топологія;

п) $X = \mathbb{R}^2$, τ – природна топологія.

3. Замикання та внутрішність

Інколи замість відкритих множин зручно розглядати замкнені множини.

Означення 1.6. Множина F називається *замкненою* в топологічному просторі (X, τ), якщо її доповнення $X \backslash F$ відкрите в (X, τ).

З правил де Моргана та аксіом топологічної структури випливають такі властивості замкнених множин:

C1) $\emptyset$ *і* X *– замкнені множини*, C2) *перетин довільної кількості замкнених множин є замкненою множиною,*

C3) *об'єднання скінченої кількості замкнених множин є замкненою множиною.*

Топологічну структуру можна задавати за допомогою замкнених множин, якщо вони задовольняють властивлстям C1–C3.

Множина, що є одночасно відкритою і замкненою називається *відкрито-замкненими.* $\emptyset$ і X є прикладами таких множин.

Означення 1.7. *Замиканням* $\overline{A}$ підмножини A топологічного простору (X, τ) називається перетин усіх замкнених в X множин, які містять A.

$$\overline{A} = \bigcap_{A \subset B, B - \text{замкнена}} B.$$

Теорема 1.4. *Замикання* $\overline{A}$ *є найменшою, за включенням, замкненою множиною, що містить множину* A*. Іншими словами,* $C = \overline{A}$ *тоді та тільки тоді, коли* C *є замкненою і не існує замкненої множини , що* $A \subset D \subset C$*.*

Доведення. Необхідність. Якщо $C = \overline{A}$, то C є замкненою множиною як перетин замкнених множин і властивості C2. Якщо від супротивного припустити, що існує замкнена множина $D \neq C$, що $A \subset D \subset C$, то D є однією із замкнених множин. за яким беретаться перетин в означенні замикання. Тому $\overline{A} \subset D$. Враховуючи припущення $D \subset C = \overline{A}$. Звідки випливає $D = C$, що протирічить припущенню $D \neq C$.

Достатність. Нехай C є найменшою, за включенням, замкненою множиною, що містить множину A. Іншої такої множини $E \neq C$ не існує, бо інакше тоді $D = C \bigcap E$ буде меншою замкненою множиною, що містить A. Оскільки $\overline{A}$ є перетином всіх замкнених множин, що містять A, а C є однією з таких множин, то $\overline{A} \subset C$. Покладемо $D = \overline{A} \bigcap C$. Якщо $D \neq C$, то отримаємо протиріччя з припущенням. Отже, $C = \overline{A} \bigcap C$. Це рівносильно тому, що $C \subset \overline{A}$. З урахуванням включення $\overline{A} \subset C$ маємо $C = \overline{A}$. $\square$

Теорема 1.5. *Підмножина A топологічного простору замкнена тоді і тільки тоді, коли $\overline{A} = A$.*

Доведення. Необхідність. Якщо A – замкнена множина, то вона є найменшою замкненою множиною, що містить себе. Отже, $\overline{A} = A$.

Достатність. Нехай $\overline{A} = A$. Тоді A є замкненою множиною, як перетин замкнених множин (властивість C2). $\square$

Наслідок 1. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Доведення. Оскільки множина $\overline{A}$ є замкненою, то застосування теореми до неї доводить наслідок. $\square$

Означення 1.8. *Внутрішністю* $\operatorname{Int} A$ підмножини A топологічного простору (X, τ) називається об'єднання всіх відкритих в X множин, які лежать в A.

$$\operatorname{Int} A = \bigcup_{B \subset A, B \in \tau} B.$$

Внутрішність $\operatorname{Int} A$ є найбільшою відкритою множиною, що лежить в множині A.

Теорема 1.6. *Для довільної підмножини $A \subset X$ мають місце рівності*

$$X \setminus \overline{A} = \operatorname{Int}(X \setminus A) \quad \textit{та} \quad X \setminus \operatorname{Int} A = \overline{X \setminus A}.$$

Доведення. Застосуємо правило де Моргана та введемо позначення $C = X \setminus B$:

$$X \setminus \overline{A} = X \setminus \bigcap_{A \subset B, B-\text{замкнена}} B = \bigcup_{A \subset B, B-\text{замкнена}} X \setminus B =$$

$$= \bigcup_{C \subset X \setminus A, C \in \tau} C = \operatorname{Int}(X \setminus A).$$

Друга рівність доводиться аналогічно (або виводиться з першої). □

Наслідок 2. $\overline{A} = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)$.

Наслідок 3. $\operatorname{Int} A = X \setminus \overline{X \setminus A}$.

Наслідок 4. *A – відкрита множина в X тоді та тільки тоді, коли $A = \operatorname{Int} A$.*

Наслідок 5. $\operatorname{Int}\operatorname{Int} A = \operatorname{Int} A$.

Означення 1.9. Підмножина A називається *скрізь щільною* в X, якщо $\overline{A} = X$.

Означення 1.10. *Межею* ∂A множини A називається множина $\overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$. Для межі множини A використовується також позначення ∂A.

Теорема 1.7. *Для довільної підмножини $A \subset X$ має місце рівність*

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

Доведення. Нагадаємо, що для різниці множин за означенням $B \setminus C = B \cap (X \setminus C)$. Тоді

$$\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A = \overline{A} \cap (X \setminus \operatorname{Int} A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

Остання рівність випливає з теореми 1.6. □

Означення 1.11. Точка x є *граничною точкою* множини A, якщо $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Теорема 1.8. *Точка x є граничною для множини A тоді і тільки тоді, коли для кожного її околу U*

$$U \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset.$$

Доведення. Необхідність. Нехай x гранична точка замкненої множини A. Якщо існує U – окіл x, що $U \bigcap A \setminus \{x\} = \emptyset$, то для відкритого околу V $(x \in v \subset U)$ також $V \bigcap A \setminus \{x\} = \emptyset$. Звідки випливає, що $V \bigcap \overline{A \setminus \{x\}} = \emptyset$. Тому $x \notin \overline{A \setminus \{x\}}$. Отримане протиріччя з означенням граничної точки доводить необхідність.

Достатність. Нехай для кожного відкритого околу U точки x виконується нерівність $U \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Якщо $x \notin \overline{A \setminus \{x\}}$, то множина $X \setminus \overline{A \setminus \{x\}}$ притирічить припущенню. Це доводить, що x є граничною точкою для A. □

Теорема 1.9. *Підмножина $A \subset X$ замкнена тоді і тільки тоді, коли вона містить всі свої граничні точки.*

Доведення. Необхідність. Якщо A – замкнена, $x \notin A$, то окіл $U = X \setminus A$ не перетинається з $A \setminus \{x\}$. Це доводить, що точка x не є граничною.

Достатність. Припустимо, що A містить всі свої граничні точки. Це означає, що якщо $x \notin A$, то вона не є граничною, тому існує окіл U_x, що $U \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$. З урахуванням того, що $x \notin A$ це рівносильне тому, що $U \subset X \setminus A$. Тоді, за критерієм відкритості множини, $X \setminus A$ є відкритою, а A замкнена. □

Означення 1.12. Точка x є *ізольованою точкою* множини A, якщо $x \in A$ та існує її окіл U такий, що $U \bigcap A \setminus \{x\} = \emptyset$.

Вправа 1.19. Довести властивості C1–C3, а саме, що:

а) весь простір і порожня множина є замкненими множинами;

б) перетин будь-якої сім'ї замкнених множин є замкненою множиною;

в) об'єднання скінченної сім'ї замкнених множин є замкненою множиною.

Вправа 1.20. Довести, що:

а) для будь-яких підмножин A і B топологічного простору виконуються рівності і включення

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A} \backslash \overline{B} \subset \overline{A \backslash B}$$

б) для будь-яких підмножин $A_i,\ i \in N$ топологічного простору виконується рівність

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \ \bigcup \ \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} A_{i+j}}$$

Наведіть приклад, коли не виконується остання рівність, якщо знехтувати другим доданком в правій частині.

Вправа 1.21. Довести, що відкрита множина A тоді і тільки тоді перетинається з множиною B, коли $A \bigcap \overline{B} \neq \varnothing$.

Вправа 1.22. Нехай множина A замкнена, а множина B відкрита. Довести, що $A \backslash B$ замкнена, а $B \backslash A$ відкрита.

Вправа 1.23. Довести, що для будь-яких двох відкритих множин, що не перетинаються, замикання однієї з них не перетинається з іншою.

Вправа 1.24. Нехай множина A відкрита і $A \bigcap B = \varnothing$. Довести, що $\overline{A} \bigcap Int\overline{B} = \varnothing$.

Вправа 1.25. Нехай X - топологічний простір, $A \subset X$ і будь-яка підмножина в A замкнена. Довести, що множина A не має граничних точок.

Вправа 1.26. Довести, що в стандартній (евклідовій) топології на прямій $\overline{[a,b)} = [a,b]$, $\mathrm{Int}[a,b) = (a,b)$.

Вправа 1.27. Довести, що в дискретній топології на X для довільної множини A: $\overline{A} = \mathrm{Int}A = A$.

Вправа 1.28. Довести, що в тривіальній топології на X для $A \neq \emptyset$: $\overline{A} = X$ і для $A \neq X$: $\mathrm{Int}A = \emptyset$.

Вправа 1.29. Доведіть такі властивості внутрішності:

$\mathrm{Int}\ A = A \Leftrightarrow \quad A \in \tau$,

$\mathrm{Int}(\mathrm{Int}\ A) = \mathrm{Int}A$.

Вправа 1.30. Довести, що множина A є скрізь щільною в X тоді та тільки тоді, коли A перетинається з кожною не порожньою відкритою підмножиною простору X.

Вправа 1.31. Перевірити, що множина дійсних чисел скрізь щільна на прямій $\mathbb{R}$.

Вправа 1.32. [4, 72] В топологічному просторі (X,τ), де:

1. $X = \{a,b,c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$;
2. $X = \{a,b,c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}\}$;
3. $X = \{a,b,c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$;
4. $X = \{a,b,c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$;
5. $X = \{a,b,c,d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$;
6. $X = \{a,b,c,d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}\}$;
7. $X = \{a,b,c,d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}\}$;

8. $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

знайти внутрішність $\operatorname{Int} A$, замикання $\overline{A}$, множини ізольованих точок $I(A)$, граничних точок A' множини A та з'ясувати, чи є множина A відкритою, замкненою, скрізь щільною в X, якщо:

а) $A = \{a\}$;

б) $A = \{b\}$;

в) $A = \{c\}$;

г) $A = \{a, b\}$;

д) $A = \{a, c\}$;

е) $A = \{b, c\}$.

Вправа 1.33. [4, 73] В топологічному просторі (Z, τ), де:

1. τ — ліва порядкова топологія;
2. $\tau = \{\emptyset, 2nZ, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$;
3. τ — дискретна топологія;
4. τ — топологія арифметичних прогресій;

знайти внутрішність $\operatorname{Int} A$, замикання $\overline{A}$, множини ізольованих точок $I(A)$, граничних точок A' множини A, та з'ясувати, чи є множина A відкритою, замкненою, скрізь щільною в Z, якщо:

а) $A = \{1, 2\}$;

b) $A = \mathbb{N}$;

в) $A = 8Z$;

г) $A = \mathbb{Z} \setminus 2Z$.

Вправа 1.34. [4, 74] В топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau)$, де:

1. $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$;
2. τ — ліва порядкова топологія;
3. $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, p), p \in \mathbb{Z}\}$;
4. $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-p, +\infty), p \in \mathbb{Z}\}$;
5. $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, [0, 1), (0, 2) \subset \mathbb{R}, x > 0\}$;
6. $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (p, +\infty), p \in \mathbb{N}\}$;
7. τ — природна топологія;
8. τ — топологія стрілки Зоргенфрея;

знайти внутрішність $\operatorname{Int} A$, замикання $\overline{A}$, множини ізольованих точок $I(A)$, граничних точок A' множини A та з'ясувати, чи є множина A відкритою, замкненою, скрізь щільною в $\mathbb{R}$, якщо A є множиною:

а) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$;

б) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$;

в) $(-2, 0)$;

г) $\mathbb{Z}$;

д) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$;

е) $\mathbb{N}$;

є) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup [-\pi/2, \pi/2]$;

ж) $\mathbb{Q}$;

з) $[1/2, +\infty)$;

и) $(-\infty, 1)$;

і) $(-\infty, 0]$;

ї) $[0, 1/2]$;

й) $(0, \sqrt{2})$;

к) $[\sqrt{2}, 0)$;

л) $(1, +\infty)$;

м) $[1/2, +\infty)$;

Вправа 1.35. [4, 75] В топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$, де

1. $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r\},\ r \in \mathbb{R}, r > 0\}$,
2. $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq n\},\ n \in \mathbb{N}\}$,
3. τ – природна топологія,

знайти внутрішність $\operatorname{Int} A$, замикання $\overline{A}$, множини ізольованих точок $I(A)$, граничних точок A' множини A, а також з'ясувати, чи є множина A відкритою, замкненою, скрізь щільною в $\mathbb{R}^2$, якщо A належить до переліку:

а) $\{(0, 0)\}$;

b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;

в) $\{(1, \sqrt{2})\}$;

г) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, \sqrt{2})\}$;

д) $(\mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\})) \times \mathbb{Z}$;

е) $(\mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\})) \setminus (\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$;

є) $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$;

ж) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$;

з) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$;

и) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$;

і) $\mathbb{Z} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$;

ї) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1/3\}$;

й) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| > 1\}$;

к) $(-1, 2)^2$;

л) $[1/4, 1/3]^2$;

м) $(1/2, 3/5] \times (-4/5, 4/5]$;

о) $(-1, 1/2) \times \mathbb{R}$.

Вправа 1.36. [4, 83] Нехай A, B — довільні множини топологічного простору X. Довести або спростувати твердження:

а) $\operatorname{Int} A = A \setminus \overline{X \setminus A}$;

b) якщо $\operatorname{Int} A \subseteq \operatorname{Int} B$, то $A \subseteq B$;

в) якщо $\overline{A} \subseteq \overline{B}$, то $A \subseteq B$;

г) $\operatorname{Int} A \subseteq A$;

д) $\operatorname{Int} \overline{A} = \operatorname{Int} A$;

е) $A \subseteq \operatorname{Int} \overline{A}$;

є) якщо A відкрита, то $A \subseteq \operatorname{Int} \overline{A}$;

ж) $A \supseteq \operatorname{Int} \overline{A}$;

з) якщо A замкнена, то $A \supseteq \operatorname{Int} \overline{A}$;

и) A є замиканням деякої відкритої множини тоді й лише тоді, коли $A = \operatorname{Int} \overline{A}$;

і) $\operatorname{Int} \operatorname{Int} A = \operatorname{Int} A$;

ї) $\operatorname{Int} \operatorname{Int} A = \operatorname{Int} \overline{A}$;

к) A відкрита тоді й лише тоді, коли $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$;

л) A відкрита тоді й лише тоді, коли $A \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}$;

м) A замкнена тоді й лише тоді, коли $A \cup \operatorname{Int} B \supseteq \operatorname{Int}(A \cup B)$;

н) A замкнена тоді й лише тоді, коли $\operatorname{Int}(A \cup \operatorname{Int} B) = \operatorname{Int}(A \cup B)$;

о) якщо A, B відкриті і $A \cap B = \varnothing$, то $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$;

п) якщо $A \cap B = \varnothing$, то $\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B = \varnothing$;

р) якщо $A \cup B = X$, то $\operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B = X$;

с) якщо A відкрита і $A \cap B = \varnothing$, то $\overline{A} \cap \operatorname{Int} B = \varnothing$;

т) $\operatorname{Int}(A \cup B) = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} \overline{B}$.

у) якщо A відкрита, то $\overline{A} = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)$;

Вправа 1.37. [4, 87] Довести, що для довільних множин A і B топологічного простору X:

а) $\operatorname{Int} A \cap \partial A = \emptyset$;

б) $\operatorname{Int}(\partial A) = \emptyset$;

в) $\partial(X \setminus A) = \partial A$;

г) ∂A — замкнена множина;

д) $X \setminus \partial A = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int}(X \setminus A)$;

е) $\partial A \subseteq \overline{A}$;

ж) $\partial A \subseteq \partial \overline{A}$;

з) $\partial A = \partial \overline{A}$ тоді й лише тоді, коли межа ∂A ніде не щільна;

й) $\partial\partial A \subset \partial A$;

і) $\operatorname{Int} A = A \setminus \partial A$;

ї) $\overline{A} = A \cup \partial A$;

к) $\partial\partial A = \partial A$;

л) множина A відкрита тоді й лише тоді, коли $A \cap \partial A = \varnothing$;

м) множина A відкрита тоді й лише тоді, коли $\partial A = \overline{A} \setminus A$;

н) множина A замкнена тоді й лише тоді, коли $\partial A \subseteq A$;

о) множина A замкнена тоді й лише тоді, коли $\partial A = A \setminus \operatorname{Int} A$;

п) якщо A відкрита або замкнена, то $\partial\partial A = \partial A$;

с) $\partial(A \cap B) \subseteq \partial A \cup \partial B$;

т) $\partial(A \cap B) \subseteq (\partial A \cap \overline{B}) \cup (\partial B \cap \overline{A})$;

у) $\partial(A \cup B) \subseteq (\partial A \cup \overline{B}) \cup (\partial B \cup \overline{A})$;

ф) якщо множини A та B відкриті, то

$$\partial(A \cap B) \cup (\partial A \cap \partial B) \subseteq \partial(A \cap B) \subseteq (\partial A \cap \overline{B}) \cup (\partial B \cap \overline{A});$$

х) $\operatorname{Int} \partial A = \operatorname{Int} \overline{A} \setminus A$;

ц) якщо $\partial A \cap \operatorname{Int} B = \varnothing$, то

$$\operatorname{Int}(A \cup B) = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B;$$

ч) якщо $\partial A \subseteq B$, то

$$\partial(A \cap B) = (\overline{A} \cap \partial B) \cup (\partial A \cap \overline{B}).$$

Вправа 1.38. Довести, що точка $x \in E^n \backslash A$ тоді і тільки тоді є граничною точкою множини A, коли $x \in \partial A$.

Вправа 1.39. Довести, що якщо множини A і B задовольняють умові $A \bigcap \overline{B} = \varnothing = \overline{A} \bigcap B$, то $\partial(A \bigcup B) = \partial A \bigcup \partial B$.

Вправа 1.40. Довести, що чергуючи оператори замикання і взяття доповнення до множини A в топологічному просторі X, можна отримати не більше 14 різних множин.

2. Топологічні конструкції

В цьому розділі ми задаємо топологічні структури на підмножинах топологічного простору. Для метричних просторів, обмеження метрики на підмножину перетворює її в метричний простір, а для нього можна побудувати метричну топологічну структуру. Для довільних топологічних просторів нам потрібна конструкція індукованої топології. Також розглянемо неперервні відображення, що узгоджені з топологічними структурами.

1. Підпростір

Означення 2.1. Нехай (X,τ) – топологічний простір, $Y \subset X$. Топологія $\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$ називається *індукованою топологією.* При цьому пара (Y,τ_y) називається *підпростором* простору (X,τ).

Теорема 2.1. *Індукована топологія задовольняє аксіомам топологічної структури.*

Доведення. T1) $\emptyset = Y \cap \emptyset \in \tau_Y$, $Y = Y \cap X \in \tau_Y$.

T2) Якщо $V_i \in \tau_Y$, $i \in \alpha$, то існують $U_i \in \tau$, $i \in \alpha$, що $V_i = Y \cap U_i, i \in \alpha$. Оскільки $\bigcup_{i\in\alpha} U_i \in \tau$, то

$$\bigcup_{i\in\alpha} V_i = \bigcup_{i\in\alpha}(Y \bigcap U_i) = Y \bigcap(\bigcup_{i\in\alpha} U_i) \in \tau_Y.$$

T3) Якщо $V_1, V_2 \in \tau_Y$, то існують $U_1, U_2 \in \tau$, що $V_1 = Y \cap U_1$, $V_2 = Y \cap U_2$. Оскільки $U_1 \bigcap U_2 \in \tau$, то

$$V_1 \bigcap V_2 = (Y \bigcap U_1) \bigcap (Y \bigcap U_2) = Y \bigcap (U_1 \bigcap U_2) \in \tau_Y.$$

□

Домовленість. Надалі, якщо не сказано інше, то всі підмножини $\mathbb{R}^n$ наділені індукованою топологією, а топологія в $\mathbb{R}^n$ стандартна (евклідова), тобто породжена евклідовою метрикою.

Теорема 2.2. *Нехай сім'я β є базою (X, τ), $Y \subset X$. Тоді сім'я $\beta_y = \{U \cap Y : U \in \beta\}$ є базою для (Y, τ_Y).*

Доведення. Якщо $V \in \tau_Y$, то існує $W \in \tau$, що $V = Y \cap W$. За означенням бази для τ, існує $\gamma \subset \beta$, що $W = \bigcup_{W_i \in \gamma} W_i$. Тоді $\gamma_y = \{W_i \cap Y \mid W_i \in \gamma\} \subset \beta_y$, а

$$V = Y \cap W = V = Y \cap \bigcup_{W_i \in \gamma} W_i = \bigcup_{W_i \in \gamma} (W_i \cap Y) = \bigcup_{V_i \in \gamma_y} V_i.$$

Отже, β_y – база для τ_Y. □

Вправа 2.1. [4, 167] Знайти топологію T на множині $S \subset X$, індуковану топологією τ на X, якщо:

1. $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$, $S = \{a, c\}$;
2. $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, a\}\}$, $S = \{b\}$;
3. $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b, c\}\}$, $S = \{a, b, c\}$;
4. $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$, $S = \{a, b, c\}$;
5. X — незлічення множина, τ — скінченна топологія, S — непорожня множина;

6. $X = [-1, 1]$, τ — топологія альтернативи, $S = \{-1, \frac{1}{2}\}$ — довільна не

7. (X, τ) — стрілка Зоргенфрея, $S = \mathbb{Z}$;

8. $X = \mathbb{R}$, τ — природна топологія, $S = \{0, 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

9. $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $S = \mathbb{Z}$;

10. $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{\emptyset, (-\infty, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $S = [0, 1]$;

11. $X = \mathbb{R}^2$, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < n\}, n \in \mathbb{N}\}$, $S = (0, 1) \times \{0\}$;

12. $X = \mathbb{R}^2$, τ — природна топологія, $S = (0, 1) \times \{0\}$.

Вправа 2.2. [4, 168] Знайти топологію τ_i на множині S, індуковану топологією τ на X та відображенням $i : S \to X$, якщо:

1. $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}\}$, $S = \{a, b\}$, $i : a \mapsto b$, $b \mapsto c$;

2. $X = S = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}\}$, $i : a \mapsto b$, $b \mapsto c$;

3. $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}\}$, $i : a \mapsto b$, $b \mapsto d$;

4. $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}\}$, $S = \{a, b\}$, $i : a \mapsto b$, $b \mapsto c$;

5. $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, $i : a \mapsto b$, $b \mapsto a$, $c \mapsto b$, $d \mapsto c$;

6. $X = S = \mathbb{N}$, τ — топологія дільників, $i(n) = n!$;

7. (X, τ) — дискретний топологічний простір, S — довільна непорожня множина, i — довільне відображення;

8. X — непорожня множина, τ — A-вмісна топологія, $A \subset X$ — нетривіальна підмножина, $S = A$, i — довільна неперервна підмножина.

Вправа 2.3. Нехай Y - підпростір в топологічному просторі X. Довести, що:

а) множина $A \subset Y$ замкнена в Y тоді і тільки тоді, коли A є перетином деякої замкненої множини, що належить X, з Y;

б) для будь-якої $A \subset Y$ виконується рівність $\overline{A}_Y = \overline{A}_X \bigcap Y$;

в) якщо Y - замкнена множина в X, то будь-яка замкнена множина в Y замкнена і в X,

г) якщо Y– відкрита множина в X, то будь-яка відкрита множина в Y відкрита і в X.

2. Неперервні відображення

Нехай (X, τ) і (Y,γ) топологічні простори.

Означення 2.2. Відображення $f\colon X \to Y$ називається *неперервним*, якщо для кожної $U \in \gamma$ маємо $f^{-1}(U) \in \tau$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини з Y є відкритою множиною в X.

Означення 2.3. Відображення $f\colon X \to Y$ називається *гомеоморфізмом* (або топологічним відображенням), якщо воно бієктивне і неперервне в обидва боки (f і f^{-1} – неперервні). Простори X, Y *гомеоморфні*, якщо між ними існує хоча б один гомеоморфізм. Позначають $X \cong Y$.

Означення 2.4. Відображення $f\colon X \to Y$ називається *відкритим (замкненим)*, якщо образ кожної відкритої (замкненої) множени є відкритою (замкненою) множиною.

Символом 1_X або id_X будемо позначати тотожне відображення простору X, тобто таке відображення, що залишає кожну точку нерухомою.

Властивість бути гомеоморфними є відношення еквівалентності у множині топологічних просторів. Ті властивості топологічних просторів, які притаманні усім гомеоморфним просторам, називаються *топологічними інваріантами.* Більшість понять, що вводяться в наступних параграфах, є топологічними інваріантами.

Теорема 2.3. ***(Критерії неперервності)*** *Нехай (X, τ) і (Y, γ) – топологічні простори. Тоді такі умови рівносильні:*

а) відображення $f : X \to Y$ – неперервне,

б) прообраз довільної замкненої множини з Y є замкнена множина в X,

в) для довільної точки $x \in X$ і довільного околу V точки $f(x)$ існує такий окіл U точки x, що $f(U) \subset V$,

г) для довільної $A \subset X$: $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f\left(A\right)}$.

Доведення. а) $\Rightarrow$ б). Нехай $f : X \to Y$ – неперервне, A – замкнена в Y. Тоді $Y \setminus A$ відкрита і $f^{-1}(Y \setminus A)$ відкрита в X. Звідси випливає, що множина $f^{-1}(A) = X \setminus (f^{-1}(Y \setminus A))$ замкнена.

б) $\Rightarrow$ а) аналогічно доведенню а) $\Rightarrow$ б).

б) $\Rightarrow$ г). $f^{-1}(\overline{f\left(A\right)})$ є повним прообразом замикання і тому є замкненою множиною, що містит A, а отже, і $\overline{A}$. Звідси випливає, що $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f\left(A\right)}$.

г) $\Rightarrow$ б). Нехай B – замкнена в Y, $A = f^{-1}(B)$. Тоді $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f\left(A\right)} = \overline{B} = B$. Звідки маємо $\overline{A} \subset f^{-1}(B) = A$. За властивістю замикання $A \subset \overline{A}$. Це означає, що $A = \overline{A}$, і отже, A замкнена.

□

а) $\Rightarrow$ в). Нехай $f : X \to Y$ неперервне, V – окіл точки $f(x)$. За означенням околу, існує відкрита W, що $f(x) \in W \subset V$ тоді шуканий $U = f^{-1}(W)$.

в) $\Rightarrow$ а). Нехай V – відкрита, $U = f^{-1}(V)$. Тоді для кожної точки $x \in f^{-1}(V)$ множина V є околом $f(x)$. Тому існує відкритий окіл $U(x)$, що $f(U(x)) \subset V$. Це означає, що $U(x) \subset U$. Тому U відкрита за критерієм відкритих множин.

Вправа 2.4. Довести, що функція $f(x) = \frac{2x-1}{x(1-x)}$ задає гомеоморфізм $(0, 1)$ на $\mathbb{R}$.

Вправа 2.5. Довести, що довільні відкриті інтервали прямої гомеоморфні між собою.

Вправа 2.6. Побудувати гомеоморфізм $B^2 \to \mathbb{R}^2$, де B^2 – відкрита куля радіуса 1.

Вправа 2.7. Побудувати гомеоморфізм $S^2 \backslash \{\omega\} \to \mathbb{R}^2$, де S^2 – сфера одиничного радіусу, а ω – деяка фіксована точка на S^2.

Вправа 2.8. Якщо $X \subset Y$, то тотожне відображення id: $X \to Y$, $id(X) = X$, $x \in X$, є вкладенням.

Вправа 2.9. Довести, що відображення f топологічного простору X в топологічний простір Y неперервне тоді і тільки тоді, коли для довільної точки $x \in X$ і довільного околу V точки $f(x)$ існує такий окіл U точки x, що $f(U) \subset V$.

Вправа 2.10. Довести, що композиція двох неперервних відображень є неперервним відображенням.

Вправа 2.11. Довести, що образ бази при неперервному відображенні може не бути базою.

Вправа 2.12. [4, 156] Побудувати гомеоморфізми між топологічними просторами (X, τ) , (Y, σ) (якщо топологія τ або σ не задана, то вважати їх природною або індукованою природною топологією на $\mathbb{R}^n$):

а) $X = (-1,\ 1)$ і $Y = \mathbb{R}^1$;

б) $X = (a,\ b)$ і $Y = (c,\ d)$;

в) $X = (0, 1)$ і $Y = (0, +\infty)$;

г) $X = Y = \mathbb{R}$, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, n), n \in \mathbb{Z}\}$, $\sigma = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-n, n), n \in \mathbb{Z}\}$;

д) $X = Y = \mathbb{R}$, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, -1/n), n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-1/n, n), n \in \mathbb{N}\}$;

е) $X = Y = \mathbb{R}$, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, -1/n), n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-n, n), n \in \mathbb{N}\}$;

є) $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, +\infty)$, $\tau = \{\emptyset, X, [0, \infty)\}$, $\sigma = \{\emptyset, Y, (x, \infty), x \in [0, +\infty)\}$;

ж) $X = \mathbb{R} = Y$, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, 0), (-\infty, -1/n), n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-1/n, n), n \in \mathbb{N}\}$;

з) $X = \mathbb{R}$, τ — природна топологія, $Y = (-1, 1)$, $\sigma = \tau|_Y$;

и) $X = \mathbb{R}$, τ — природна топологія, $Y = (0, +\infty)$, $\sigma = \tau|_Y$;

і) $X = \mathbb{R}$, $Y = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, τ і σ — індуковані природною топологією на $\mathbb{R}$;

ї) $X = (-\infty, 0)$, $Y = (1, +\infty)$, τ і σ — індуковані природною топологією на $\mathbb{R}$;

й) $X = (0, 1)$, $Y = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, τ і σ — індуковані природною топологією на $\mathbb{R}$;

к) $X = [0, 1)$, $Y = (a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, τ і σ — індуковані природною топологією на $\mathbb{R}$;

л) $X = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ — сфера, $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ — еліпсоїд, τ і σ — індуковані природною топологією на $\mathbb{R}^3$;

м) $X = D^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\}$ — замкнений n-вимірний диск (замкнена n-вимірна куля), $Y = I^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \max|x_k| \leq 1\}$ — куб, τ і σ — індуковані природною топологією на $\mathbb{R}^n$;

н) $X = D^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 \leq 1,\ x_{n+1} \geq 0\}$ — n-вимірна півкуля, $Y = S^n_+ = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1,\ x_{n+1} \geq 0\}$ - замкнена півсфера;

о) $X = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < 1\}$ — відкритий n-вимірний диск, $Y = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 \leq 1,\ x_{n+1} > 0\}$ — відкрита n-вимірна півкуля);

Вправа 2.13. Довести, що будь-які дві відкриті випуклі підмножини в E^n гомеоморфні в індукованій топології. Чи справедливе це твердження для довільних випуклих підмножин?

Вправа 2.14. Довести, що простір R^n гомеоморфний проколотій сфері $S^n \backslash \{\omega\}$, де ω - будь-яка точка, що належить S^n.

Вправа 2.15. Довести, що в E^3 круговий циліндр скінченної висоти без основ, однопорожнинний гіперболоїд, відкрите кільце і сфера без двох точок гомеоморфні один одному.

Вправа 2.16. Побудувати гомеоморфізм $T^2 = S^1_1 \times S^1_2 \to T^2 = S^1_2 \times S^1_1$, де S^1_1 - меридіан тора, а S^1_2 - його паралель.

Вправа 2.17. Нехай f - гомеоморфізм на себе границі S^{n-1} кулі D^n. Довести, що f можна продовжити до гомеоморфізму всієї кулі D^n на себе.

Вправа 2.18. Довести, що $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ для будь-якого неперервного відображення f топологічного простору X і будь-якої $A \subset X$.

Вправа 2.19. Нехай мають місце рівності

$$X = A\bigcup B,\ \overline{A\backslash B}\bigcap B\backslash A = \varnothing,\ A\backslash B\bigcap \overline{B\backslash A} = \varnothing,$$

а f – відображення, визначене на X, неперервне на A і на B. Довести, що відображення f неперервне на X.

Вправа 2.20. Чи завжди образ відкритої (замкненої) множини при неперервному відображенні є відкритою (замкненою) множиною?

Вправа 2.21. Нехай f-взаємно-однозначне неперервне відображення топологічного простору X на топологічний простір Y. Довести, що наступні умови еквівалентні:

а) f - факторне відображення;
б) f - відкрите;
в) f - замкнене;

Вправа 2.22. Довести, що проектування топологічного добутку на будь-який співмножник є неперервним відкритим (не обов'язково замкненим) відображенням.

Вправа 2.23. Довести, що функція, яка визначена на топологічному добутку $X \times Y$ і неперервна по кожній змінній, може не бути неперервною на $X \times Y$.

Вправа 2.24. Вказати негомеоморфні топологічні простори, кожен з яких гомеоморфний підпростору іншого.

Вправа 2.25. Вказати негомеоморфні топологічні простори, кожен з яких взаємно-однозначно і неперервно відображається на інший.

Простір $C(X, Y)$ наділяється *компактно-відкритою* топологією, базою якої є множини

$$U(K, O) = \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subseteq O\},$$

де K — компактна множина в X, а O — відкрита в Y.

Якщо y_0 — відмічена точка в Y, то постійне відображення в y_0 є відміченою точкою в $C(X,Y)$.

Вправа 2.26. Довести, що множини $U(K,O)$ утворюють базу топології.

3. Топологічна сума

Означення 2.5. *Топологічною сумою* або *незв'язним об'єднанням* топологічних просторів (X,τ_1) та (Y,τ_2), що не перетинаються, називається об'єднання $X\bigcup Y$ з топологією

$$\tau = \{U \cup V | U \in \tau_1, V \in \tau_2\}.$$

Топологічна сума просторів X та Y позначається $X \sqcup Y$.

З означення топологічної суми випливає, що якщо $X \cap Y = \emptyset$, то множини X та Y є відкрито-замкненими у $X \sqcup Y$.

Приклад 2.1. $[0,1) \sqcup [2,3] = [0,1) \cup [2,3]$.

Приклад 2.2. $[0,1) \sqcup [1,2] \neq [0,2]$. За означенням топологічної суми, [1,2] є відкритою множиною у $[0,1) \sqcup [1,2]$. Проте [1,2] не є відкритою множиною у $[0,2]$, бо в індукованій топології на відрізку $[0,2]$ єдиним замкненим відрізком, що їй належить, є відрізок $[0,2]$.

Вправа 2.27. Нехай A, B – відкриті множини у просторі X, $A \cup B = \emptyset$. Довести, що $A \sqcup B = A \cup B$.

Вправа 2.28. Нехай A, B – замкнені множини у просторі X, $A \cup B = \emptyset$. Довести, що $A \sqcup B = A \cup B$.

Вправа 2.29. Нехай $0 \notin A \subset \mathbb{R}$. Довести, що $A = A_- \sqcup A_+$, де $A_- = A \cap (-\infty, 0)$, $A_+ = A \cap (0, +\infty)$.

4. Топологічний добуток

Нагадаємо, що декартовим добутком двох множин X та Y називається множина пар: $X \times Y = \{(X,\, y) \mid \quad x \in X,\, y \in Y\}$, а декартовим добутком множин X_i, $i \in \boldsymbol{N}$ множина послідовностей $\Pi X_i = \{(x_1,\, x_2,\, \dots) \mid \quad x_i \in X_i\}$. Кожну таку послідовність можна розглядати як таке відображення $\boldsymbol{N} \to XX_i$, що $i \to X_i$. Через π: $\Pi X_i \to X_i$ будемо позначати проекцію на i-ий множник.

Означення 2.6. *Топологічним* або *тихоновим* добутком топологічних просторів (X,τ_1) та (Y,τ_2) називається декартовий добуток$X \times Y$ з топологією τ, базу якої складають множини $U \times V$, де $U \in \tau_1$, $V \in \tau_2$. *Тихоновим* добутком топологічних просторів (X_i,τ_i) називається декартовий добуток ΠX_i з топологією τ, передбазу якої складають множини $\pi^1(U_i)$, де $U_i \in \tau_i$. Топологія τ є найслабшою з усіх топологій на ΠX_i, для яких кожна з проекцій π_i є неперервним відображенням.

Приклад 2.3. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Вправа 2.30. Довести, що топологія добуток $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ збігається з евклідовою топологією $\mathbb{R}^2$.

Приклад 2.4. $[0,1] \times [0,1] = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$.

Вправа 2.31. Довести, що нескінчений добуток дискретних двоточкових множин гомеоморфний канторовій множині (канторова множина може бут отримана в такий спосіб: відрізок [0,1] розрізається на 3 рівні частини і видаляється середня, відрізки, що залишилися знову розрізаються та 3 частин і видаляються середини і т.д.).

Вправа 2.32. Нехай A і B - підмножини в деяких топологічних просторах. Довести, що:

а) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$;

б) $Int(A \times B) = IntA \times IntB$;
в) $\partial(A \times B = \partial A \times \overline{B}) \bigcup (\overline{A} \times \partial(B))$.

Вправа 2.33. Довести, що топологічний добуток T_1-просторів (гаусдорфових просторів) є T_1-простором (відповідно гаусдорфовим простором).

Вправа 2.34. Довести, що простір X тоді і тільки тоді є T_1-простором, коли діагональ Δ топологічного добутку $X \times X$ є перетином деякої сім'ї відкритих множин.

Вправа 2.35. Довести, що простір X гаусдорфовий тоді і тільки тоді, коли діагональ Δ топологічного добутку $X \times X$ є замкненою підмножиною в $X \times X$.

Вправа 2.36. Довести, що топологічний добуток тоді і тільки тоді має злічену базу, коли кожен координатний простір має злічену базу і топології всіх координатних просторів, крім зліченого числа, тривіальні.

Вправа 2.37. Довести, що топологічний добуток двох гаусдорфових просторів є гаусдорфовим.

5. Факторпростір

Означення 2.7. Нехай (X,τ) - топологічний простір, Y - множина і f відображення $X \to \Upsilon$. *Фактортопологією* відносно відображення f і топології τ називається найбільш сильна з усіх топологій на множині Y, для яких відображення f неперервне. Нехай тепер ω - відношення еквівалентності на множині X, Y - фактормножина X/ω і f - природна проекція$X \to X/\omega$, яка кожній точціx ∈X ставить у відповідність її клас еквівалентності. Тоді *факторпростір* простору (X,τ) за відношенням еквівалентності ω - це фактормножина X/ω, що має фактортопологію відносно відображення f і топології τ

. Часто факторпростір позначають так, як і фактормножину, тобто символом X/ω. Якщо відношення еквівалентності ω полягає в тому, що воно ототожнює усі точки з деякої підмножини A⊂X з деякою однією точкою, то факторпростір позначається через $X/$A.

Якщо ω - відношення еквівалентності в I^2, яке ототожнює точки (0;b) і (1;1 - b), то MB = I$^2/\omega$ - це *лист Мебіуса.*

Якщо ω - відношення еквівалентності в I^2, яке ототожнює точки (0;b) з (1;b) і (a;0) з (1 - a;1), то KB = I$^2/\omega$ - *пляшка Клейна.*

Якщо ω - відношення еквівалентності в I^2, яке ототожнює точки (0;b) з (1;1 - b) і (a;0) з (1 - a;1), то $\mathbf{R}P^2$ = I$^2/\omega$ - *проективна площина.*

Вправа 2.38. Знайти факторпростір $X/\sim$ топологічного простору (X, τ) за відношенням еквівалентності $\sim$, якщо:

1. $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \dots\}$; $\sim$ — таке найменше відношення еквівалентності, що $a \sim c$, $b \sim d$;

2. $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}\}$, $\sim$ — таке найменше відношення еквівалентності, що $a \sim b$, $c \sim d$;

3. $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$, $\sim$ — таке найменше відношення еквівалентності, що $a \sim b$, $c \sim d$;

4. $X = \{a, b, c, d, e\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c\}, \dots\}$, $\sim$ — найменше відношення еквівалентності, що $a \sim b$, $c \sim d$, $c \sim e$;

5. $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, \sim c \sim c \sim b\}\}$;

6. $X = \mathbb{Z}$, τ — топологія цифрової прямої, $\sim$ — таке відношення еквівалентності на $\mathbb{Z}$, що $k \sim l$, тоді й лише тоді, коли $k - l$ ділиться на $n \in \mathbb{N}$ (цифрове коло, коли n парне);

7. X — непорожня множина, τ — топологія розбиття, $\sim$ — відношення еквівалентності, породжене даним розбиттям;

8. (X, τ) — довільний топологічний простір, $\sim$ — відношення еквівалентності, кожен клас якого скрізь щільний в X;

9. $X = \mathbb{R}$, τ — природна топологія, $\sim$ — таке відношення еквівалентності, що $x \sim y$, тоді й лише тоді, коли $x = y$, $x, y \in \mathbb{Q}$;

10. $X = \mathbb{R}$, τ — природна топологія, $\sim$ — таке відношення еквівалентності, що $x \sim y$, тоді й лише тоді, коли $x \sim y$, що не належить $\mathbb{Q}$.

Вправа 2.39. Нехай $D^1 = [-1;1]$ - одновимірний диск, $S^0 = \{-1;1\}$- нульвимірна сфера. Довести, що $D^1/S^0 \cong \quad S^1$ - коло.

Вправа 2.40. Нехай $I^2 = [0;1]\times[0;1]$ одиничний квадрат, ω - відношення еквівалентності в I^2, яке ототожнює точки $(0;t)$ і $(1;t)$, $t \in I = [0,1]$. Довести, що $\mathrm{I}^2/\omega \quad \cong \quad S^1\times\mathrm{I}$ - циліндр.

Вправа 2.41. Нехай ω – відношення еквівалентності в I^2, яке ототожнює точки $(0; b)$ з $(1; b)$ і $(a; 0)$ з $(a; 1)$. Довести, що $\mathbf{T}^2 = I^2/\omega \cong S^1 \times S^1$ – тор.

Вправа 2.42. Довести, що якщо сфера S^{n-1} є межею диска D^n, то $D^n/S^{n-1} = S^n$.

Вправа 2.43. Яка поверхня буде одержана, якщо в правильному шестикутнику склеїти протилежні сторони за осьовими симетріями між ними?

Вправа 2.44. Скільки різних (не гомеоморфних) поверхонь можна отримати попарно склеюючи сторони чотирикутника, шестикутника?

6. Букет, циліндр, конус, надбудова

Означення 2.8. *Топологічним простором з відміченою точкою* називається пара (X, x_0), де X – топологічний простір, $x_0 \in X$.

Топологічний добуток $X \times Y$ просторів (X, x_0) і (Y, y_0) має відмічену точку (x_0, y_0). На факторпросторі $X/\sim$ простору (X, x_0) відміченою точкою є клас еквівалентності точки x_0. Відміченою точкою на $[0, 1]$ вважається 0.

Означення 2.9. *Букет* $X \vee Y$ просторів (X, x_0) і (Y, y_0) — це незв'язне об'єднання просторів X і Y, в якому точку x_0 склеєно з y_0:

$$X \vee Y = (X \sqcup Y)/\sim, \quad x_0 \sim y_0.$$

Означення 2.10. *Циліндром* над простором X називається добуток $\operatorname{Cyl} X = X \times I$, де $I = [0, 1]$.

Означення 2.11. *Конусом* $\operatorname{Con} X$ над X називається простір

$$\operatorname{Con} X = X \times I / X \times \{1\},$$

що отриманий з циліндра $X \times I$ стягуванням верхньої основи $X \times \{1\}$ в точку.

Приклад:

$$\operatorname{Con} S^n = D^{n+1}.$$

Означення 2.12. *Надбудовою* ΣX над X називається простір

$$\Sigma X = \operatorname{Con} X / X \times \{0\},$$

що отриманий з конуса $\operatorname{Con} X$ стягуванням основи $X \times \{0\}$ в точку.

Приклад:

$$\Sigma S^n = S^{n+1}.$$

Означення 2.13. *Змішаним добутком* називається простір

$$X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y.$$

Приклад:

$$S^n \wedge S^k = S^{n+k}.$$

Якщо X — простір з відміченою точкою x_0, то в операціях конуса і надбудови будемо додатково $x_0 \times I$ стягувати в точку, яку і будемо вважати відміченою.

Означення 2.14. Нехай X, Y — топологічні простори, $A \subseteq Y$, $f\colon A \to X$ — неперервне відображення. Кажуть, що простір $X \cup_f Y$ отримано з X приклеюванням Y за відображенням f, якщо

$$X \cup_f Y = (X \sqcup Y)/\sim, \quad x \sim f(x),\ x \in A.$$

Вправа 2.45. Довести рівності (гомеоморфність просторів)

а) $X \vee S^0 = X \sqcup *$,

б) $([0,1],0) \vee ([2,3],2) = ([-1,1],0)$,

в) $([-1,1],0) \vee ([2,4],3) = (X,0)$,

г) $\operatorname{Cyl} S^0 = [0,1] \sqcup [2,3]$,

д) $\operatorname{Con} S^n = D^{n+1}$,

е) $\Sigma S^n = S^{n+1}$,

є) $S^n \wedge S^k = S^{n+k}$,

ж) $X \vee Y = X \cup_f Y,\ f : x_0 \to y_0,\ x_0 \in X,\ y_0 \in Y$.

3.Топологічні властивості

Топологічні властивості – це властивості, що зберігаються при гомеоморфізмах. До топологічних властивостей відносять сепрарабельність та існування у простору зліченої бази (2-га аксіома зліченості).

1.Зв'язність та лінійна зв'язність

Означення 3.1. Топологічний простір називається *зв'язним*, якщо його не можна подати у вигляді об'єднання двох непорожніх відкритих множин, що не перетинаються. В іншому випадку простір називається *незв'язним.* Якщо X незв'язний простір, то існують такі відкритті не порожні множини U і V, що $X = U \Upsilon V$ і $U \cap V \neq \emptyset$. Тоді множини U і V є також замкненими, як доповнення до відкритих. В цьому випадку також кажуть, що пара $\{U, V\}$ є *розбиттям* простору X.

Підмножина зв'язна в топологічному просторі, якщо вона зв'язна в ньому як підпростір.

Якщо $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ і $X \cap Y = \emptyset$, то пара $\{X, Y\}$ є розбиттям $X \sqcup Y$.

Приклад 3.1. Множина $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ є незв'язною, а пара $\{[0, 1], [2, 3]\}$ є її розбиттям.

Теорема 3.1. *Множина $X = [0, 1]$ є зв'язною.*

Доведення. Припустимо від супротивного, що для $X = [0,1]$ існує розбиття $\{U,\ V\}$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $0 \in U$. Нехай $a = \inf V$. Якщо $a \in U$, то $a < 1$. Оскільки U – відкрита множина, то разом з точкою a вона містить і якийсь її ε-окіл ($\varepsilon > 0$). Тому $[0, a+\varepsilon) \subset U$. Звідки випливає, що $\inf V \geq a + \varepsilon$. Отримане протиріччя доводить хибність припущення, що $a \in U$.

Умова $a \notin U$ рівносильна $a \in V$. Оскільки $0 \in U$, то $a > 0$. Оскільки V – відкрита і $a \in V$, то існує ε-окіл a що міститься в V. Тому $(a-\varepsilon, a] \subset V$. Звідси випливає, що $a - \varepsilon \geq \inf V$. Отримане протиріччя доводить теорему. □

Теорема 3.2. *Образ зв'язного простору при неперервному відображенні – зв'язний.*

Доведення. Нехай $f : X \to Y$ – неперервне відображення зв'язного простору X. Припустимо від супротивного, що існує розбиття $\{U, V\}$ множини $f(X) \subset Y$. Тоді $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ є розбиттям X, що протирічить зв'язності X. □

З цієї теореми випливає те, що зв'язність – топологічна властивість.

Лема 3.1. *X, Y – зв'язні і $X \cap Y \neq \emptyset$, то обмеження $X \cup Y$ також є зв'язним.*

Доведення. Припустимо від супротивного, що $X \cup Y$ не є зв'язним, тоді існує його розбиття $\{U,\ V\}$. Оскільки $X \cap Y \neq \emptyset$, то існує $x \in X \cap Y$. Нехай, для визначеності, $x \in U$. Нехай $y \in V$. Якщо $y \in X$, то $\{U \cap X,\ V \cap X\}$ – розбиття X, що протирічить його зв'язності. Якщо $y \in Y$, то $\{U \cap Y,\ V \cap Y\}$ – розбиття Y, що протирічить його зв'язності. Отримані протиріччя доводять лему. □

Означення 3.2. *Компонентою зв'язності* (або *компонентою*) топологічного простору називається максимально зв'язна в ньому підмножина, тобто така зв'язна множина, яка не є власною підмножиною ніякої іншої зв'язної множини. Іншими словами, U є компонентою зв'язності простору X, якщо зв'язна і не існує зв'язної множини $V \supset U$, $V \neq U$.

З означення компоненти зв'язності та теореми 3.3 випливає

Наслідок 6. *При гомеоморфізмі компоненти зв'язності відображаються у компоненти зв'язності. Зокрема, гомеоморфні простори мають однакову кількість компонент зв'язності.*

З леми 3.1 випливає, що дві різні компоненти зв'язності не перетинаються. Отже, простір X розбивається на свої компоненти зв'язності.

Лема 3.2. *Якщо $f : X \to Y$ – гомеоморфізм, $A \subset X$, то обмеження $f|_A : A \to f(A)$ та $f|_{X \setminus A} : X \setminus A \to Y \setminus f(A)$ також є гомеоморфізмами.*

Доведення. З того що f – бієкція випливає, що $f|_A : A \to f(A)$ та $f|_{X\setminus A} : X \setminus A \to Y \setminus f(A)$ також є бієкціями. Покажемо, що відкриті в топології A множини відображаються на відкриті множини в топології $f(A)$. Нехай $V \in \tau_A$. Тоді існує $U \in \tau_X$, що $V = U \cap A$. З бієктивності f випливає, що $f(V) = f(U) \cap f(A)$. Оскільки f – гомеоморфізм, то $f(U) \in \tau_Y$. Тому $f(V) = f(U) \cap f(A) \in \tau_{f(A)}$. Застосування аналогічних міркувань до $f^{-1}|_{f(A)} = (f|_A)^{-1}$ доводить, що $f|_A$ – гомеоморфізм.

Якщо перепозначити A та $X \setminus A$, то отримаємо, що $f|_{X\setminus A} : X \setminus A \to Y \setminus f(A)$ – гомеоморфізм. □

Наслідок 6 разом з лемою 3.2 дозволяють доводити не гомеоморфність деяких зв'язних просторів. Продемонструємо це на прикладі.

Приклад 3.2. Відрізок $[a, b]$ не гомеоморфний інтервалу (c, d). Припустимо від супротивного, що існує гомеоморфізм $f : [a, b] \to$

(c, d). Тоді $f|_{(a,b]} : (a, b] \to (c, f(a)) \cup (f(a), d)$ також гомеоморфізм, що неможливо, бо $(a, b]$ має одну компоненту, а $(c, f(a)) \cup (f(a), d)$ – дві.

Для доведення зв'язності зручно використовувати поняття лінійної зв'язності.

Означення 3.3. *Шляхом* з точки x в точку y в топологічному просторі X називається неперервне відображення $\gamma : [0, 1] \to X$ таке, що $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. Топологічний простір X називається *лінійно зв'язним*, якщо для довільних точок $x, y \in X$ існує шлях з x в y.

Теорема 3.3. *Якщо X лінійно зв'язний, то X зв'язний.*

Доведення. Припустимо від супротивного, що X лінійно зв'язний, та існує розбиття $\{U, V\}$ простору X. Оскільки $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, то існують $x \in U$, $y \in V$. Із лінійної зв'язності X випливає існування шляху $\gamma : [0, 1] \to X$ з з точки x в точку y. Тоді $\{\gamma^{-1}(U), \gamma^{-1}(V)\}$ розбиття відрізку [0,1], що протирічить теоремі 3.1. Отримане протиріччя доводить теорему. $\square$

Приклад 3.3. Сфера S^2 є зв'язною множиною. Нехай O – центр сфери. Для довільних двох точок $x, y \in S^2$ розглянемо площину α, що проходить через точки O, x, y. Нехай β – найменша з дуг, на які точки x, y поділяють коло $\alpha \cap S^2$. Ортогональна проекція β на пряму (x, y) з подальшим лінійним відображенням відрізка $[x, y]$ на $[0, 1]$ задає гомеоморфізм ω між β та $[0, 1]$. Обернене відображення ω^{-1} задає шлях з x у y.

Для підмножин прямої зв'язність рівносильна лінійній зв'язності. Проте, в загальному випадку, із лінійної зв'язності не випливає зв'язність, що демонструють наступні приклади.

Приклад 3.4. Простір

$$X = \{0\} \times [-1, 1] \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = \sin \frac{1}{x},\ x \neq 0\}$$

є зв'язним і лінійно незв'язним. Зауважимо, що $X = X_- \cup X_0 \cup X_+$, де $X_- = \{(x, y) \in X | x < 0\}$, $X_0 = \{(x, y) \in X | x = 0\}$, $X_+ = \{(x, y) \in X | x > 0\}$. Кожна з цих множин є лінійно зв'язною, а отже, зв'язною. Припустимо, що у простора X існує розбиття $\{U, V\}$, $(0, 0) \in U$. Оскільки U відкрита, то вона містить окіл $(0, 0)$ і тому перетинається з кожною із множин X_-, X_0, X_+. Оскільки $V \neq \emptyset$, то V перетинається хоча б із однією з множин X_-, X_0, X_+. Нехай це буде X_-. Тоді $\{U \cap X_-, V \cap X_-\}$ є розбиттям X_-, що протирічить його зв'язності. Отримане протиріччя доводить зв'язність X.

Якщо припустити, що X лінійно зв'язний, то для $x \in X_-$ та $y \in X_0$ існує шлях $\gamma : [0, 1] \to X$ із x у y, $\gamma(t) = \{x(t), y(t)\}$. Нехай $t_0 = \inf_{x(t)=0} t$. З розривності в 0 функції $y = \sin \frac{1}{x}$ випливає розривність $y(t)$ в t_0, що протирічить неперервності γ і доводить лінійну незв'язність X.

Приклад 3.5. (Мурашка і гребінець) Простір

$$Y = \{(0, 1)\} \cup [0, 1] \times \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{i} \right\} \times [0, 1]$$

є зв'язним і лінійно незв'язним.

Вправа 3.1. [4, 486] З'ясувати, чи є множина A компонентом простору (X, τ) у кожному конкретному випадку, зв'язною, якщо:

а) $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, $A = \{a, b\}$;

б) $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$, $A = \{b, c\}$;

в) $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}\}$, $A = \{b, c\}$;

г) $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$, $A = \{a, c\}$;

д) $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{\mathbf{b}\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$, $A = \{a, c, d\}$;

е) (X, τ) — цифрова пряма, $A = \{-n, \ldots, n\}$, $\quad n \in \mathbb{N}$;

є) $X = \mathbb{N}$, τ — топологія арифметичних прогресій Діріхле, $A = \mathbb{N}$;

ж) $X = \mathbb{Z}$, τ — топологія арифметичних прогресій, $A = \mathbb{N}$;

з) $X = \mathbb{R}$, τ — коскінченна топологія, $A = \mathbb{Z}$;

и) $X = \mathbb{R}$, τ — козлічна топологія, $A = \mathbb{Z}$;

і) $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$, $A = [0, 1]$;

ї) $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$, $A = [0, 1]$;

к) $X = \mathbb{R}$, τ — родина об'єднань відрізків з цілими кінцями та одноточкових множин з цілими елементами, $A = [0, 1]$;

л) $X = \mathbb{R}$, τ — $[0, 1]$-вмісна топологія, $A = [2, 3]$;

м) $X = \mathbb{R}$, τ — 0-вмісна топологія, $A = \mathbb{Z}$;

н) $X = \mathbb{R}$, τ — A-вилучена топологія, $A = \mathbb{Q}$;

о) $X = \mathbb{R}$, τ — природна топологія, $A = \mathbb{N}$;

п) $X = \mathbb{R}$, τ — природна топологія, $A = [0, 1]$;

р) $X = \mathbb{R}$, τ — природна топологія, $A = [0, +\infty)$.

т) $X = \mathbb{R}$, τ — природна топологія, $A = \mathbb{Q}$;
у) (X, τ) — площина Зоргенфрея, $A = (i\mathbb{Q})$;
ф) $X = \mathbb{R}^2$, τ — природна топологія, $A = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$;

х) $X = \mathbb{R}^2$, τ — природна топологія, $A = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$;
ц) $X = \mathbb{R}^2$, τ — природна топологія, $A = \mathbb{R}^2 \setminus \big((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \{0\}\big)$;
ч) $\mathbb{R}^2$, τ — природна топологія, $A = (\{0,1\} \times \{0\}) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{1/n\} \times [0,1])$;
ш) $X = \mathbb{R}^2$, τ — природна топологія, $A = (\{0,1\} \times \{0\}) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{1/n\} \times [0,1])$;
щ) $X = \mathbb{R}^2$, τ — природна топологія, $A = \{(x, \sin(1/x)) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$;
ь) $X = \mathbb{R}^2$, τ — природна топологія, $A = \big(\mathbb{R} \setminus 2\big) \cup \{(x,y) \mid |x| \leq 1, y \in \mathbb{R}\}$;
ю) $X = \mathbb{R}^2$, τ — природна топологія, $A = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\} \times [0,1]$;
я) $X = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, τ — будь-яка топологія.

Вправа 3.2. [4, 487] З'ясувати, чи є природна топологія на $\mathbb{R}^2$, $A = GL_2(\mathbb{R})$, зв'язною, коли:

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = e^x - 2\}$;

b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 = y^2 + 1\}$;

c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > y^2 \geq 1\}$;

d) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 = x^2, y^2 \geq 1\}$;

e) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 y^2 \geq 1\}$;

Вправа 3.3. [4, 488] З'ясувати, чи є топологічний простір (X, τ) зв'язним і лінійно зв'язним, коли:

a) (X, τ) — простір Серпінського;

b) $X = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, τ — топологія дільників;

d) $X = \mathbb{N}$, τ — цифрова пряма;

e) $X = \mathbb{Z}$, τ — топологія арифметичних прогресій;

f) $X = \mathbb{Q}$, τ — цифрова пряма;

k) $X = \mathbb{R}$, τ — природна топологія;

l) (X, τ) — евклідів простір;

m) $X = \mathbb{R}$, τ — кокомпактна топологія;

n) $X = \mathbb{Q} \cup \{p\}$, $p \notin \mathbb{Q}$, τ — топологія одноточкової компактфікації відкритого евклідового простору $\mathbb{R}$;

o) (X, τ) — стрілка Зоргенфрея;

p) $X = \mathbb{Z}_n$, τ — індукована евклідовою метричною топологією на $\mathbb{R}^{n+1}$.

Вправа 3.4. [4, 489] З'ясувати, чи є топологічний простір (X, τ) зв'язним і лінійно зв'язним, коли:

а) X — непорожня множина, τ — антідискретна топологія;

b) X — непорожня множина, τ — дискретна топологія;

в) X — непорожня множина, τ — топологія зломаної π;

г) X — непорожня множина, τ — A-вимірна топологія, $A \subset X$ — непорожня підмножина;

д) X — непорожня множина, τ — A-вилучена топологія, $A \subset X$ — непорожня підмножина;

е) X — власна надмножина носія топологічного простору S, τ — топологія вільного розширення S до X;

є) X — власна надмножина носія топологічного простору S, τ — топологія замкненого розширення S до X;

ж) X — власна надмножина носія топологічного простору S, τ — топологія розширення S до X;

з) X — нескінченна множина, τ — косічненна топологія;

и) $X = \mathbb{R}$, τ — козлічена топологія;

Вправа 3.5. Довести, що топологічний простір X незв'язний $\Leftrightarrow$ існує відкрито-замкнена множина U така, що $U \neq \emptyset$ і $U \neq X$.

Вправа 3.6. Довести, що інтервали $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b), $\infty \leq a<b \leq \infty$, і тільки вони є зв'язними множинами в стандартній топології на прямій.

Вправа 3.7. Довести, що замикання зв'язної множини зв'язна множина.

Вправа 3.8. Доведіть такі властивості компонент зв'язності:

1) компонента зв'язності, що містить точку x дорівнює об'єднанню всіх зв'язних множин, що містять точку x,

2) довільна компонента зв'язності є замкненою множиною,

3) якщо топологічний простір складається зі скінченого числа компонент зв'язності, то кожна компонента зв'язності є відкритою множиною,

4) кожні дві компоненти зв'язності або не перетинаються, або збігаються,

5) у гомеоморфних просторів однакове число компонент зв'язності.

Вправа 3.9. Довести, що простір $X = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 | \quad x \leq 0\} \cup \{(x, sin(1/x)) | \quad x>0\}$ є зв'язним, але лінійно не зв'язним.

Вправа 3.10. Довести, що підмножина з R^1 зв'язна тоді і тільки тоді, коли разом з будь-якими двома точками воно містить відрізок, що з'єднує ці точки.

Вправа 3.11. Навести приклад зв'язних множин, перетин яких не є зв'язним.

Вправа 3.12. Довести, що якщо A і B - замкнені множини, об'єднання і перетин яких є зв'язними множинами, то і множини A, B - зв'язні. Чи правильне це твердження для незамкнених множин A і B?

Вправа 3.13. Довести, що підмножина в $\mathbb{R}^2$, яка складається з точок, у яких хоча б одна координата ірраціональна, зв'язна.

Вправа 3.14. Навести приклад топологічного простору, що містить одноточкові компоненти зв'язності.

Вправа 3.15. Чи є образ незв'язного простору при неперервному відображенні незв'язним простором?

Вправа 3.16. Довести, що якщо неперервна дійсна функція f, визначена на зв'язному просторі X, приймає додатні і від'ємні значення, тоді в деякій точці з X вона перетворюється в нуль.

Вправа 3.17. Довести, що відкритий проміжок (інтервал) не гомеоморфний ніякому напіввідкритому та ніякому замкненому проміжку.

Вправа 3.18. Довести, що наступні простори не гомеоморфні:

а) $\mathbb{R}^1$ і $\mathbb{R}^n$ при $n > 1$;
б) S^1 і $[a;\ b]$;
в) S^1 і S^n при $n > 1$;
г) букви Е і И, що розглядаються як підпростори в $\mathbb{R}^2$.

Вправа 3.19. Довести, що якщо U – відкрита зв'язна підмножина в $\mathbb{R}^2$ (в $\mathbb{R}^n$), то U – лінійно зв'язна.

Вказівка. Доведіть, користуючись критерієм відкритих множин, що кожна компонента лінійної зв'язності U є відкритою множиною.

2. Аксіоми відокремлення

В цьому розділі ми розглядаємо топологічні властивості, які пов'язані з можливістю побудови околів, які не перетинаються, для множин, що не перетинаються, тобто відокремлення однієї множини від іншої за допомогою околів.

Означення 3.4. Топологічний простір (X, τ) може задовольняти таким аксіомам:

T_0: для довільних точок $x, y \in X$, $x \neq y$ існує окіл U точки y, що $x \notin U$ або окіл V точки x, що $y \notin U$.

T_1: для довільних точок $x, y \in X$, $x \neq y$ існує окіл U точки y, що $x \notin U$.

T_2: для довільних точок X, $y \in X$, $x \neq y$ існують їх околи, що не перетинаються.

T_3: $\forall$ замкненої множини A і $\forall$ $x \notin A$ $\exists U, V \in \tau$: $A \subset U$, $x \in V$, $U \cap V = \emptyset$.

$T_{3^1\!/_2}$: $\forall$ замкненої множини A і $\forall$ $x \notin A$ $\exists$ неперервна функція f:$X \to$[0,1], $f(A) = 0$, $f(X) = 1$. В цьому випадку кажуть, що точка x і множина A є *функціонально відокремленими.*

T_4: $\forall$ замкнених множин A і B, $A \cap B = \emptyset$ $\exists U, V \in \tau$: $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$.

Простір, який задовольняє аксіомі T_i називається T_i-простором.

Означення 3.5. Якщо простір, задовольняє аксіомі T_2, його називають *гаусдорфовим* простором. Простір, який задовольняє аксіомам T_1 і T_3 називається *регулярним*, аксіомам T_1 і $T_{3^1\!/_2}$ – *тихоновим*, або *цілком регулярним*, аксіомам T_1 і T_4 – *нормальним.*

Оскільки при гомеоморфізмі замкнені множини відображаються у замкнені, відкриті у відкриті, околи у околи, то кожна з аксіом відокремлення є топологічною властивістю.

Теорема 3.4. *(Критерій T_1-простору). Топологічний простір (X, τ) є T_1-простором тоді та тільки тоді, коли кожна множина, що складається з однієї точки, є замкненою.*

Доведення. Необхідність. Нехай $x \in X$, X – T_1-простір. За аксіомою T_1, для кожної точки $y \neq x$ існує окіл $U(y)$, що $x \notin U(y)$. Це рівносильно тому, що для кожної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує окіл $U(y)$, що $U(y) \subset X \setminus \{x\}$. За критерієм відкритої множини, $X \setminus \{x\}$ – відкрита, а $\{x\}$ – замкнена.

Достатність. Якщо кожна одноточкова множина є замкненою, то для довільних точок $x, y \in X$, $x \neq y$ множини $U(x) = X \setminus \{y\}$ та $U(y) = X \setminus \{x\}$ є їх околами такими, що $y \notin U(x)$, $x \notin U(y)$. □

Теорема 3.5. *Підпростір гаусдорфового простору є гаусдорфовим простором.*

Доведення. Якщо простір X гаусдорфів, $A \subset X$ і $x, y \in A$, $x \neq y$, то існують їх відкриті в X околи $U(x)$ та $U(y)$ такі, що $U(x) \cap U(y) = \emptyset$. Тоді множини $V(x) = U(x) \cap A$, $V(y) = U(y) \cap A$ є відкритими в індукованій на A топології і є околами в A точок x, y, що не перетинаються. □

Лема 3.3. *(Урісон). Топологічний простір (X,τ) нормальний тоді та тільки тоді, коли для довільних замкнених множин A і B, $A \cap B = \emptyset$ існує неперервна функція $f : X \to [0, 1]$, $f(A) = 0$, $f(B) = 1$.*

Доведення. Необхідність. Нехай A і B – замкнені множини нормального простору X, $A \cap B = \emptyset$. Покладемо $U_0 = A$, $U_1 = X \setminus A$. За аксіомою T_4 для замкнених множин A та B існує відкрита множина $U_{1/2}$, що $A \subset U_{1/2}$, $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Далі за індукцією визначаємо $U_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$ як відкритий окіл $\overline{U_{\frac{k}{2^n}}}$, для якого

$$\overline{U_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}} \cap X \setminus U_{\frac{k+1}{2^n}} = \emptyset.$$

Будемо позначати через $\mathbb{Q}_2$ множину чисел вигляду $\frac{m}{2^n}$, де

$m, n \in \mathbb{N}$. Визначимо функцію $f : X \to [0,1]$ формулою

$$f(x) = \sup_{t\in\mathbb{Q}_2, x\in\overline{U_t}} t = \inf_{t\in\mathbb{Q}_2, x\notin X\setminus U_t} t.$$

Доведемо, що f – неперервне. Для довільного інтервалу (a,b) розглянемо послідовності $a_i \to a$, $b_i \to b$, $a_i, b_i \in \mathbb{Q}_2$, $a \leq a_i < b_i \leq b$. Тоді

$$f^{-1}(a,b) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty}([0,b_i)\setminus[0,a_i])) =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty}(f^{-1}[0,b_i))\setminus f^{-1}[0,a_i])) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(U_{b_i}\setminus\overline{U_{a_i}}).$$

Таким чином, прообраз довільного відкритого інтервалу є відкритою множиною. Аналогічно показується, що прообраз довільної відкритої множини відкритий. Тому відображення f неперервне.

Достатність. $U = f^{-1}([0,\frac{1}{3})), V = f^{-1}((\frac{2}{3},1]).$ □

Теорема 3.6 (Тітце—Урісон). *Нехай X — нормальний топологічний простір, $A \subset X$ — замкнена підмножина. Якщо $f\colon A \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, то існує неперервна $g\colon X \to \mathbb{R}$ така, що $g\restriction_A = f$.*

Вправа 3.20. Довести, що дискретний та метризовний простори є T_0, T_1,і T_2-просторами.

Вправа 3.21. Довести, що тривіальний простір $(X,\ \tau_0)$ не буде T_0, T_1 чи T_2-простором, якщо $|X|>1$.

Вправа 3.22. Довести, що простори $(X = \{x,y\}, \tau = \{\emptyset, \{x\}, X\})$ і $(\mathbb{R}, \tau_+ = \{(a,+\infty)| \quad a \in \mathbb{R}\})$ T_1, але не T_0-простори.

Вправа 3.23. Довести, що множини $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ з коскінченою топологією є не гаусдорфовими T_1-просторами.

Вправа 3.24. Нехай f, g: $X \to Y$ неперервні відображення і Y T_2-простір. Довести, що множина $\{x \in X |\ f(X) = g(X)\}$ є замкненою.

Вправа 3.25. Довести, що умову існування двох відкритих множин в аксіомі T_4 можна замінити на умову існування відкритої множини $U_{A,B}$ такої, що $A \subset U_{A,B}$ і $\overline{U_{A,B}} \cap B = \emptyset$.

Вправа 3.26. Довести, що кожний нормальний простір є тихоновим, кожний тихоновий – регулярним, кожний регулярний – гаусдорфовим.

Вправа 3.27. Навести приклад T_0-простору, в якому жодна одноточкова множина не замкнена.

Вправа 3.28. Довести, що в T_1-просторі будь-яка множина є перетином деякої сім'ї відкритих множин.

Вправа 3.29. Довести, що будь-який підпростір T_1-простору є T_1-простором.

Вправа 3.30. Нехай $\mathcal{T}_1$ і $\mathcal{T}_2$ - дві топологіі на одній і тій же множині X, причому $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Довести, що якщо $(X, \mathcal{T}_1)$ - T_1-простір (T_2-простір), то і $(X, \mathcal{T}_2)$ - T_1-простір (T_2-простір).

Вправа 3.31. Довести, що будь-який лінійно впорядкований топологічний простір буде гаусдорфовим простором.

Вправа 3.32. Навести приклад негаусдорфового T_1-простору.

Вправа 3.33. Навести приклад гаусдорфового простору зі зліченною базою, в якому довільна замкнена множина не буде перетином зліченної сім'ї відкритих множин.

Вправа 3.34. Нехай X є T_1-простором, x-гранична точка множини $A \subset X$ і U - довільний окіл точки x. Довести, що множина $U \bigcap A$ нескінченна.

Вправа 3.35. Довести, що в T_1-просторі множина всіх граничних точок довільної підмножини замкнена.

Вправа 3.36. Нехай X - гаусдорфовий простір, в якому будь-яка підмножина або відкрита, або замкнена. Довести, що:

а) в X не може існувати більше однієї граничної точки;

б) якщо x - гранична точка, то для довільної точки $y \neq x$ множина $\{y\}$ відкрита.

Вправа 3.37. Довести, що будь-який метричний простір гаусдорфовий.

Вправа 3.38. Довести, що T_1-простір X тоді і тільки тоді регулярний, коли для довільної точки $x \in X$ і довільної замкненої множини $A \subset X$, що не містить точку x, існує такий окіл U точки x, що $\overline{U} \bigcap A = \varnothing$.

Вправа 3.39. Довести, що T_1-простір X тоді і тільки тоді регулярний, коли для довільного околу U будь-якої точки $x \in X$ існує такий окіл V точки x, що $\overline{V} \subset U$.

Вправа 3.40. Довести, що в означенні регулярного простору аксіому T_1 можна замінити на T_0. Чи вірне це твердження для нормальних просторів?

Вправа 3.41. Навести приклад гаусдорфового нерегулярного простору.

Вправа 3.42. Навести приклад двох топологій $\mathcal{T}_1$ і $\mathcal{T}_2$ на одній множині, з яких $\mathcal{T}_1$ - регулярна, $\mathcal{T}_2$ - нерегулярна і $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

Вправа 3.43. Навести приклад регулярного, але не цілком регулярного простору.

Вправа 3.44. Довести, що будь-який підпростір регулярного (повністю регулярного) простору регулярний (повністю регулярний).

Вправа 3.45. Довести, що потужність повністю регулярного зв'язного простору, що містить більше однієї точки, не менше потужності континуума.

Вправа 3.46. Довести, що T_1-простір нормальний тоді і тільки тоді, коли для двох довільних його замкнених підмножин A і B, що не перетинаються, існує такий окіл U множини A, що $\overline{U} \bigcap B = \varnothing$.

Вправа 3.47. Довести, що T_1-простір X тоді і тільки тоді нормальний, коли для будь-якої замкненої множини $A \subset X$ і довільного його околу U існує такий окіл V множини A, що $\overline{V} \subset U$.

Вправа 3.48. Довести, що замкнений підпростір нормального простору є нормальним простором.

Вправа 3.49. Навести приклад повністю регулярного простору, який не є нормальним простором.

Вправа 3.50. Довести, що нормальний простір повністю регулярний.

Вправа 3.51. Довести, що T_1-простір, єдина точка якого не ізольована, є нормальним простором.

Вправа 3.52. Нехай X - гаусдорфовий простір, в якому множина неізольованих точок скінченна. Довести, що X нормальний простір.

Вправа 3.53. Чи довільний зліченний гаусдорфовий простір нормальний?

Вправа 3.54. Довести, що регулярний простір зі зліченною базою нормальний.

Вправа 3.55. Чи є зліченний регулярний простір нормальним простором?

Вправа 3.56. Довести, що образ нормального простору при неперервному замкненому відображенні є нормальним простором.

Вправа 3.57. Довести, що топологічний добуток будь-якої множини повністю регулярних просторів повністю регулярний.

Вправа 3.58. Нехай X - множина всіх дійсних чисел з топологією, базисом якої є сім'я всіх напіввідкритих інтервалів. Показати, що X - нормальний простір, а топологічний добуток $X \times X$ не є нормальним простором.

Вправа 3.59. Нехай для замкнених підмножин A і B, що не перетинаються, топологічного простору X існує функція Урісона. Довести, що множини A і B містять в X околи, що не перетинаються.

Вправа 3.60. Довести, що для будь-якої замкненої підмножини A нормального простору X і довільного околу U множини A існує таке неперервне відображення $g : X \to [a; b],\ a, b \in R,\ a \neq b$, що

$$g(x) = \begin{cases} a, & \text{якщо} \quad x \in A, \\ b, & \text{якщо} \quad x \in X \backslash U. \end{cases}$$

Вправа 3.61. Довести, що будь-який метричний простір нормальний.

Вправа 3.62. Довести, що нормальний простір зі зліченним базисом метризований (теорема Урісона).

Вправа 3.63. Підмножина A топологічного простору X називається функціонально замкненою, якщо $A = f^{-1}(0)$ для деякого $f : X \to \mathcal{J}$. Підмножина B топологічного простору X називається функціонально відкритою, якщо множина $X \backslash B$ функціонально замкнена. Довести, що:

а) зліченне об'єднання функціонально замкнених множин може не бути функціонально замкненою множиною;

б) об'єднання функціонально відкритих множин може не бути функціонально відкритою множиною.

3. Компактні простори

Означення 3.6. *Покриттям* підмножини A простору X називається сім'я $\{U_i \subset X\colon i \in S\}$ така, що $A \subset \bigcup_{i\in S} U_i$. Покриття називається *відкритим*, якщо всі U_i - відкриті, і *скінченим*, якщо S скінчена множина.

Якщо $T \subset S$, то підсім'я $\{U_i \subset X\colon i \in T\}$ називається *підпокриттям* покриття $\{U_i \subset X\colon i \in S\}$, якщо вона сама є покриттям A.

Означення 3.7. Множина A називається *компактною*, якщо довільне її відкрите покриття містить скінчене підпокриття. Топологічний простір компактний, якщо він компактний в собі як підмножина.

Теорема 3.7. *Нехай X – топологічний простір, $A \subset X$. A є компактною в X множиною тоді та тільки тоді, коли підпростір A з індукованою топологією є компактним.*

Доведення. Необхідність. Нехай A – компактна множина, $\{V_i\}_{i\in\alpha}$ – відкрите покриття A в індукованій топології. За означенням підпростору, для кожного V_i існує відкрита в X множина U_i така, що $V_i = U_i \cap A$. Тоді $\{U_i\}_{i\in\alpha}$ відкрите в X покриття A. Із компактності A випливає існування скінченого підпокриття $U_1, \dots, U_n$. Звідки маємо, що $\{V_1 = U_1 \cap A, \dots, V_n = U_n \cap A\}$ – скінчене підпокриття для $\{V_i\}_{i\in\alpha}$.

Достатність. За аналогією з необхідністю, з існування скінченого підпокриття для $\{V_i\}_{i\in\alpha}$ випливає існування скінченого підпокриття для $\{U_i\}_{i\in\alpha}$. $\square$

Теорема 3.8. *Нехай X – компактний простір, A – замкнена в X множина. Тоді A компактна.*

Доведення. Нехай $\{U_i\}_{i\in\alpha}$ – відкрите в X покриття A. Оскільки множина $X \setminus A$ відкрита, то $\{X \setminus A, U_i\}_{i\in\alpha}$ – відкрите покриття X. Із компактності X випливає існування скінченого підпокриття. Якщо воно містить множину $X \setminus A$ то вилучимо її, а якщо не містить – залишимо підпокриття без змін. В результаті отримаємо скінчене підпокриття для A. □

Теорема 3.9. *Нехай X – гаусдорфів простір, A – компактна в X множина. Тоді A замкнена.*

Доведення. Покажемо, що множина $X \setminus A$ – відкрита. Для довільної точки $x \in X \setminus A$ та кожної точки $y \in A$, за аксіомою T_2, існують відкриті околи $U^y(x)$ точки x та $U(y)$, що не перетинаються. Тоді $\{U(y)\}_{y\in A}$ – відкрите покриття компактної множини A. З компактності випливає існування скінченого підпокриття $\{U(y_1), \ldots, U(y_n)\}$ $(A \subset \cup_{i=1}^n U(y_i))$. Покладемо $U(x) = U^{y_1}(x) \cap \ldots \cap U^{y_1}(x)$. Тоді $U(x)$ – окіл точки x і $U(x) \cap U(y_i) = \emptyset, (1 \leq i \leq n)$. Тому $U(x) \cap \cup_{i=1}^n U(y_i) = \emptyset$, звідки $U(x) \cap A = \emptyset$, що рівносильне $U(x) \subset X \setminus A$. За критерієм відкритих множин, $X \setminus A$ відкрита, а отже, A замкнена. □

Теорема 3.10. *Нехай $f : X \to Y$ – неперервне відображення компактного простору X. Тоді образ $f(X)$ компактний в Y.*

Доведення. Нехай $\{V_i\}_{i\in\alpha}$ – довільне відкрите покриття множини $f(X)$. З неперервності f випливає, що $U_i = f^{-1}(V_i)$ – відкриті в X. Тому $\{U_i\}_{i\in\alpha}$ – відкрите покриття X. Скориставшись компактністю X знаходимо скінчене підпокриття $U_1, \ldots, U_n$. Тоді його образ $V_1, \ldots, V_n$ є скінченим підпокриттям для $f(X)$. □

Теорема 3.11. *Якщо $f : X \to Y$ – взаємно-однозначне неперервне відображення компактного простору X на гаусдорфовий простір Y, то f є гомеоморфізмом.*

Доведення. За умовами теореми відображення f бієктивне та неперервне. Для гомеоморфізма залишилось перевірити те, що обернене відображення є неперервним, що в нашому випадки означає відкритість або замкненість відображення f (образи замкнених множин замкнені). Нехай A – замкнена в X множина. Тоді за теоремою 3.8 множина A компактна. За теоремою 3.10 $f(A)$ компактна, а за теоремою 3 $f(A)$ замкнена. $\square$

Теорема 3.12 (Компактність відрізка)**.** *Відрізок* $[0, 1]$ *є компактним.*

Доведення. Нехай $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — довільне відкрите покриття відрізка $[0, 1]$, тобто $[0, 1] \subset \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ та кожне U_α відкрите в $\mathbb{R}$.

Покладемо $S := \{\, x \in [0, 1] \mid [0, x]$ можна покрити скінченною кількістю множин із $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \,\}$.

Покажемо, що S непорожня. Оскільки $0 \in [0, 1]$, існує U_{α_0} з $0 \in U_{\alpha_0}$. Через відкритість U_{α_0} існує $\varepsilon > 0$ таке, що $[0, \varepsilon] \subset U_{\alpha_0}$. Тоді для будь-якого $x \in (0, \varepsilon]$ відрізок $[0, x]$ покривається однією множиною U_{α_0}, тож $x \in S$ і $S \neq \varnothing$.

Множина S обмежена зверху числом 1, отже існує $s := \sup S \in [0, 1]$. Покажемо, що $s = 1$. Припустимо протилежне: $s < 1$. Оскільки $\{U_\alpha\}$ покриває $[0, 1]$, існує U_β, що містить s. Через відкритість U_β існує $\delta > 0$ з інтервалом $(s - \delta,\, s + \delta) \subset U_\beta$.

Із визначення супремума існує $x \in S$ таке, що $s - \frac{\delta}{2} < x \leq s$. За означенням S відрізок $[0, x]$ має скінченне підпокриття $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_m}\}$. Тоді об'єднання $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_m}, U_\beta\}$ покриває

$$[0, x] \,\cup\, (s - \delta,\, s + \delta) \,\supset\, [0,\, s + \tfrac{\delta}{2}].$$

Зокрема, відрізок $[0, y]$ із $y := \min\{1, s + \frac{\delta}{2}\}$ також покривається скінченною кількістю множин з нашого покриття. Отже $y \in S$. Але $y > s$ (бо $s + \frac{\delta}{2} > s$ і ми припустили $s < 1$), що суперечить визначенню $s = \sup S$. Отримали протиріччя, тож мусить бути $s = 1$.

Отже $1 \in S$, тобто існує скінченне підпокриття для $[0, 1]$. Оскільки вибір покриття був довільним, $[0, 1]$ є компактним. $\square$

Теорема 3.13 (Тихонова). *Топологічний добуток двох компактних просторів є компактним простором.*

Доведення. Нехай (X, τ_X), (Y, τ_Y) – компактні простори, $\{W_i\}_{i\in\alpha}$ – відкрите покриття $X \times Y$. Оскільки кожне $W_i = \cup_k U_{i,k} \times V_{i,k}$ $(U_{i,k} \in \tau_X, V_{i,k} \in |\tau_Y)$, то $\{U_{i,k} \times V_{i,k}\}_{i,k}$ також відкрите покриття (покриття добутками). Існування скінченого підпокриття для довільного відкритого покриття рівносильно існуванню скінченого покриття для покриттів добутками (покриття добутками є частковим випадком загального, а якщо існує скінчене підпокриття для покриття добутками, отриманого із загального покриття, то замінивши добутки цього підпокриття на W_i, що їх містять, отримаємо скінчене підпокриття).

Отже, надалі вважаємо, що $W_i = U_i \times V_i$. Нехай $x \in X$. Розглянемо множину, $\{x\} \times Y$, що гомеоморфна Y і тому є компактною. Ті множини з $W_i = U_i \times V_i$, які перетинаються з $\{x\} \times Y$ утворюють її скінчене відкрите покриття, для якого існує скінчене підпокриття $\{U_1^x \times V_1^x, \ldots, U_m^x \times V_m^x\}$. Позначимо $U(x) = U_1 \cap \ldots \cap U_m$ – відкритий окіл точки x.

Проведемо таку побудову для кожної точки $x \in X$. Тоді $\{U(x)\}_{x\in X}$ – відкрите покриття простору X. З компактності X випливає існування скінченого підпокриття $\{U(x_1), \ldots, U(x_k)\}$. Для кожного $U(x_i)$ із цього підпокриття, за побудовою, існує скінчене число добутків $U_j^{x_i} \times V_j^{x_i}$, що покривають $U(x_i) \times Y$. Отже, $\{U_j^{x_i} \times V_j^{x_i}\}_{i,j}$ – скінчене підпокриття $X \times Y$. $\square$

Теорема 3.14 (Гейне-Бореля)**.** . *Нехай* $A \subset \mathbb{R}^n$. *Множина* A *компактна тоді та тільки тоді, коли вона замкнена та обмежена.*

Доведення. Необхідність. Якщо A компактна, то замкненість випливає із гаусдорфовості $\mathbb{R}^n$ і теореми 3.8. Обмеженість доведемо методом від супротивного. Розглянемо покриття A відкритими кулями з центрами в точках A і радіусу 1. Скінчене підпокриття є обмеженим, з чого випливає обмеженість A. Отримана суперечність доводить необхідність.

Достатність. Якщо множина A обмежена, то вона обмежена по кожній координаті. Тому можна так підібрати систему координат, що $A \subset I^n$ (I=[0,1]). За теоремою 3.12 відрізок I – компактний, а за теоремою 3.13 куб I^n – компактний. Тому множина A компактна, як замкнена підмножина компактного простору. □

Означення 3.8. *Компактифікацією* простору X називається пара $cX = (Y, c)$, де Y - компактний гаусдорфовий простір, а $c : X \to Y$ вкладення таке, що $\overline{c(X)} = Y$. Якщо доповнення $Y \backslash c(X)$ складається з однієї точки, то компактифікація називається одноточковою або компактифікацією Александрова.

Означення 3.9. Топологічний простір називається *локально компактним*, існує компактний окіл.

Теорема 3.15. *Для локально компактного гаусдорфового не компактного простору* X *існує одноточкова компактифікація.*

Доведення. Для простору (X, τ_X) покладемо $Y = X \cup \omega$, де $\omega \notin X$ – точка.

$$\tau_Y = \tau_x \cup \{\omega \cup X \setminus A \mid A - \text{компактна в } X\}.$$

Для довільного відкритого покриття Y існує відкрита множина U_0, що містить ω. Решта множин цього покриття є відкритим покриттям компактної множини A. Для нього існує скінчене підпокриття, яке разом з U_0 є скінченим підпокриттям Y.

Для доведення гаусдорфовості розглянемо випадок, коли одна з точок є ω, а інша нехай $x \in X$. За локальною компактностю в X існує компактний окіл U точки x. Тоді $V = \omega \cup X \setminus U$ є околом ω в Y. За побудовою, $U \cap V = \emptyset$.

Для двох різних точок, що належать X існують їх околи, що не перетинаються. Вони ж будуть шуканими околами цих точок в Y. $\square$

Вправа 3.64. Якщо (X, τ) – некомпактний простір, то покладемо $Y = X \cup \infty$, де ∞ - точка, що не належить X, $\tau_\infty = \tau \cup \{U \cup \infty$: $X \backslash U$ компактне в $X\}$. Довести, що τ_∞- топологія на Y і, якщо X - гаусдорфовий локально-компактний простір (кожна точка має компактний окіл), то (Y, c) - компактифікація X, де $c : X \to Y$ - натуральне вкладення.

Вправа 3.65. Довести, що всі одноточкові компактифікації гомеоморфні.

Вправа 3.66. Довести, що якщо $\omega = \{0, \ldots, 1\} \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, φ: $S^n \backslash \omega \to \mathbb{R}^n$ стереографічна проекція ($\varphi(X)$ це точка перетину променя ωx з координатною площиною $x_{n+1} = 0$), то (S^n, φ^1) є одноточковою компактифікацією простору $\mathbb{R}^n$.

Вправа 3.67. Довести, що компактний простір з дискретною топологією скінченний.

Вправа 3.68. Довести, що простір X компактний тоді і тільки тоді, коли кожне покриття простору X елементами деякого базису містить скінченне підпокриття.

Вправа 3.69. Довести, що простір тоді і тільки тоді компактний, коли для будь-якої його нескінченної множини існує точка повного накопичення.

Вправа 3.70. Довести, що в довільному нескінченному компактному просторі існує зліченна незамкнена множина.

Вправа 3.71. Довести, що відрізок $[a;\ b]$ є компактною в собі підмножиною в $\mathbb{R}^1$.

Вправа 3.72. Довести, що підмножина в $\mathbb{R}^n$ компактна тоді і тільки тоді, коли вона замкнена і обмежена.

Вправа 3.73. Довести, що незамкнений підпростір гаусдорфовогоа простору не є компактним простором.

Вправа 3.74. Довести, що непорожня компактна множина в $\mathbb{R}^1$ містить свою точну верхню і нижню грань.

Вправа 3.75. Довести, що перетин будь-якої сім'ї компактних множин є замкненою і компактноюм множиною.

Вправа 3.76. Навести приклад топологічного простору, в якому перетин деяких двох компактних множин не є компактною множиною.

Вправа 3.77. Навести приклад топологічного простору, в якому замикання деякої компактної множини не компакт.

Вправа 3.78. Довести, що для довільної неізольованої точки x компактного гаусдорфового простору X існує така множина $A \subset X$, що x є єдиною точкою повного накопичення для A.

Вправа 3.79. Довести, що кожна зв'язна компактна множина в $\mathbb{R}^1$ або порожня множина, або точка, або відрізок.

Вправа 3.80. Нехай $Y = \{A_\alpha :\ \alpha \in M\}$, де кожне A_α - компактна підмножина в деякому гаусдорфовому просторі і перетин будь-якої скінченної сім'ї елементів з Y зв'язний. Довести, що множина $\bigcup\limits_{\alpha\in M} A_\alpha$ зв'язна.

Вправа 3.81. Навести приклад зв'язного, але нелокально зв'язного гаусдорфового компактного простору.

Вправа 3.82. Нехай X - зв'язний гаусдорфовий простір, A і B - не порожні замкнені в ньому множини, що не перетинаються. Довести, що існує компонента множини $X\backslash(A\bigcup B)$, замикання якої перетинається з A і B.

Вправа 3.83. Довести, що будь-яка неперервна дійсна функція на компактному просторі обмежена і досягає своїх точних верхніх і нижніх граней.

Вправа 3.84. Довести, що дійсна всюди додатна функція на компактному просторі X віддалена від нуля (тобто існує таке $\varepsilon > 0$, що $f(x) > \varepsilon$ для всіх $x \in X$) .

Вправа 3.85. Довести, що відображення проектування $pr_1 : X \times Y \to X$ замкнене, якщо Y – компактний простір.

Вправа 3.86. Довести, що довільна неперервна функція на топологічному добутку будь-якої сім'ї компактних гаусдорфових просторів залежить від зліченого числа координат.

Вправа 3.87. Довести, що компактний гаусдорфовий простір метризований тоді і тільки тоді, коли він має зліченну базу.

Вправа 3.88. Довести, що компактний гаусдорфовий простір нормальний.

4. Многовиди

Покладемо $\mathbb{R}^n_+ = \{(x-1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$.

Означення 3.10. Топологічний простір M називається (топологічним) многовидом розмірності n, якщо:

1. M — гаусдорфів простір (для будь-яких двох точок існують їх околи, що не перетинаються);

2. M задовольняє другій аксіомі зліченності (існує злічена база);

3. M — локально евклідів (для будь-якої точки існує окіл гомеоморфний відкритій множині $\mathcal{U}\mathbb{R}^n_+$).

Останні дві умови можуть бути замінені одною — існує таке зліченне покриття $\{\mathcal{U}_i\}$ простору M відкритими множинами $\mathcal{U}_i$, що кожна $\mathcal{U}_i$ є гомеоморфною відкритій підмножині $\mathbb{R}^n_+$.

Означення 3.11. Пари $(\mathcal{U}_i, h_i)$, де h_i – гомеоморфізм $\mathcal{U}_i$ в $\mathbb{R}^n_+$, називаються *картами* для M; сім'я $\{(\mathcal{U}_i, h_i)\}$, що покривають M, називається *атласом*. Відображення h_i задає *локальну систему координат* $(x_1, \ldots, x_n)$: кожній точці $p \in \mathcal{U}_i$ ставляться у відповідність координати точки $h_i(p) \in \mathbb{R}^n_+$.

Означення 3.12. *Межею* многовида M називається множина точок $\partial M \subset M$, що $x \in \partial M$, якщо існує карта (U, h), $h : U \to \mathbb{R}^n_+$ в точці x, в якій $x_n(h(x)) = 0$. Якщо межа многовида M є порожньою множиною, то кажуть що M – многовид без межі. Доповнення $M \setminus \partial M$ називається *внутрішністю* многовида.

Означення 3.13. *Замкненим многовидом* називається компактний многовид без межі.

Теорема 3.16 (про неявну функцію для многовидів)**.** *Нехай в просторі $\mathbb{R}^n$ задано систему рівнянь*

$$f_i(x_1, ..., x_n) = 0, i = 1, ..., m, \tag{3.1}$$

де f_i – гладкі функції і M – множина розв'язків цієї системи. Якщо ранг матриці $J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ всюди на множині M дорівнює k, то M є многовидом розмірності $n - k$.

Приклад 3.6. n-вимірна сфера $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) : x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 - 1 = 0\}$ є многовидом, оскільки $J = (2x_1, \ldots, 2x_{n+1})$, ранг J дорівнює 1 на S^n, $\dim S^n = n + 1 - 1 = n$.

Приклад 3.7. Множина матриць $M(n, k)$ з дійсними елементами наділяється структурою многовиду завдяки відображенню $i : M(n, k) \to \mathbb{R}^{nk}$,

$$i((a_{ij})) = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1k}, a_{21}, \ldots, a_{2k}, \ldots, a_{nk}\}.$$

Вправа 3.89. Довести, що сфера

$$S^n = \{(x_1, ..., x_{n+1}) : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

є многовидом та побудувати атлас карт для неї.

Вправа 3.90. Довести, що двовимірний тор T^2 є многовидом та побудувати атлас карт для нього.

Вправа 3.91. Довести, що дійсний проективний простір $\mathbb{R}P^n$ є многовидом та побудувати атлас карт для нього.

Вправа 3.92. Довести, що комплексний проективний простір $\mathbb{C}P^n$ є многовидом та побудувати атлас карт для нього.

Вправа 3.93. Довести, що графік M_f неперервної функції $f : \Re^n \to R^1$ $(M + f = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) : x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., x_n)\})$ є n-вимірним многовидом.

Вправа 3.94. Довести, що довільна відкрита підмножина U многовида M є многовидом.

Вправа 3.95. Довести, що група не вироджених матриць $GL(n, \Re)$ та група спеціальних ортонормованих матриць $SO(n)$ є многовидами. Обчислити їх розмірність.

Вправа 3.96. Довести, що якщо M – многовид, а $f : M \to N$ – гомеоморфізм, то N – многовид.

Вправа 3.97. Довести, що декартовий добуток многовидів є многовидом.

Вправа 3.98. Перевірити, які з поверхонь другого порядку є многовидами.

Вправа 3.99. У $2n$-кутнику склеєні (ототожнені) пари сторін. Чи буде отриманий у результаті склейки простір класичною поверхнею? Якщо так, то чи буде вона орієнтована та як визначити її рід?

Вправа 3.100. Показати, що кожна класична поверхня може бути отримана із многокутника за допомогою склеюванням між собою відповідних пар сторін.

Вправа 3.101. Що буде, якщо лист Мьобіуса розрізати по середній лінії?

Вправа 3.102. Довести, що кожний многовид є локально-компактним простором (кожна точка має компактний окіл).

Вправа 3.103. Довести: многовид зв'язний $\iff$ він лінійно-зв'язний.

Вправа 3.104. Показати, що на сфері не можна ввести атлас, що складається з однієї карти.

4.Самостійна робота

В цьому розділі містяться завдання для самостійної роботи, що відносяться до всіх розділів.

1.Завдання для самостійної роботи

Вправа 4.1. Для кожного з наступних випадків визначити, чи має простір Z ту саму топологічну властивість, що і простори X та Y якщо простори X та Y

а) T_0-простори,

б) T_1-простори,

в) T_2-простори,

г) T_3-простори,

д) T_4-простори,

е) зв'язні,

є) лінійно зв'язні,

ж) компактні,

з) сепарабельні,

и) многовиди,

а простір Z пов'язаний з просторами X та Y умовою

1. $Z = X \times Y$,
2. $X = Y \times Z$,
3. $Z \subset X$,
4. $X \subset Z$,
5. $Z = X/\sim$,
6. $X = Z/\sim$.

У випадку позитивної відповіді, довести це, а у випадку негативної відповіді, навести приклад, що її підтверджує.

2. Завдання підвищеної складності

Вправа 4.2. Довести гомеоморфність тихонівського добуток дискретної двоточки та канторової множини: $2^\infty = K$.

Вправа 4.3. Довести теорема Тихонова для тихонівського добутку нескінченого числа просторів.

Вправа 4.4. Довести теорему Тітце-Урісона.

Вправа 4.5. Довести, що многовиди – нормальні топологічні простори.

Вправа 4.6. Довести, що $\mathbb{R}^2$ та $\mathbb{R}^n$ не гомеоморфні $(n > 2)$.

Вправа 4.7. Довести, що в квадраті [-1,1]x[-1,1] шлях з (-1, 0) в (1,0) перетинає шлях з (0, -1) в (0, 1).

Вправа 4.8. Побудувати приклад двох не гомеоморфних просторів X та Y, для яких існують неперервні бієкції $f : X \to Y$ та $g : Y \to X$.

Вправа 4.9. Довести, що в $\mathbb{R}^n$ замкненні множини, що не перетинаються, можуть бути функціонально відокремлені гладкою функцією.

Вправа 4.10. Довести, що неперервна бієкція евклідового простору $\mathbb{R}^n$ є гомеоморфізмом при а) $n = 1$, б) $n = 2$, в) $n > 2$.

Вправа 4.11. Довести, що бієкція простору $\mathbb{R}^n$, для якої образ кожної зв'язної множини зв'язний, і прообрази зв'язних множин зв'язні, є гомеоморфізмом при а) $n = 1$, б) $n = 2$, в) $n > 2$.

3. Приклад модульної роботи

1. На прямій $\mathbb{R}$ задана ліва порядкова топологія

$$\{\, (-\infty, a] \mid -\infty < a \leq +\infty \,\}.$$

Перевірити, чи буде цей топологічний простір

1. T_1-простором,
2. T_2-простором,
3. T_3-простором,
4. T_4-простором,
5. зв'язним,
6. компактним,
7. сепарабельним,
8. з другою аксіомою зліченності,
9. лінійно-зв'язним.

У зазначеній раніше топології на прямій для множини $A = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ знайти:

10. внутрішність,

11. замикання,

12. межу,

13. множину граничних точок,

14. ізольовані точки,

15. компоненти зв'язності.

2. Дати означення, навести приклад, що йому задовольняє, та приклад, який не задовольняє в кожному з таких випадків:

1. Замкнені множини.

2. Неперервні відображення.

3. Аксіома Т1,

4. Аксіома Т4.

5. Лінійно зв'язні простори.

6. Компактні простори.

7. Внутрішність.

8. Факторопологія.

9. Компонента зв'язності

4. Контрольні запитання

1. Скільки різних топологічних структур існує на множині з двох (трьох) точок?

2. Яких множин більше відкритих чи замкнених у простора зі скінченим числом точок?

3. Наведіть приклад множини (крім порожньої і всього простору), для якої внутрішність дорівнює замиканню.

4. Яка найменша можлива потужність бази заданого дискретного простору?

5. Яким умовам повинна задовольняти деяка сім'я підмножин аби бути базою (передбазою) деякої топологічної структури?

6. Наведіть приклад компоненти зв'язності з непорожньою межею.

7. Чи існує гомеомрфізм між прямою та площиною?

8. Які з таких кривих гомеоморфні між собою: а) пряма, б) пара паралельних прямих, в) еліпс, г) парабола, д) гіпербола?

9. Чи будь-який підпростір нормального простору є нормальним простором?

10. Скільки не гомеоморфних між собою компактифікацій має відкритий інтервал?

11. Чи буде образ неперервного ін'єктивного відображення інтервала (кола) на площину гомеоморфним інтервалу (колу)?

Список умовних позначень

∂A – межа множини A
S^n – n-вимірна сфера
D^n – n-вимірний диск
I – відрізок [0,1]
$X \vee Y$ – букет просторів X та Y
2^X – сім'я всіх підмножин простору X
Mo – стрічка Мьобіуса
T^2 – тор
Kl – пляшка Клейна

Предметний покажчик

Бібліоґрафія

[1] M. Bring. Introduction to differential topology.N.Y., 1994.

[2] Борисенко О.А. Диференціальна геометрія та топологія. Х. Основа. 1995.

[3] Гуран І.Й., Зарічний М.М. Диференціальна геометрія та топологія. К. НВК МО, 1991.

[4] Бабич В.М, Пєхтєрєв В.О. Загальна топологія в задачах і прикладах. Аксіома. 2015.

[5] В.Г.Кочаровський, О.О.Пришляк Топология. Методичні вказівки Київський Університет, К., 1998.

[6] О.О.Пришляк. Основи сучасної топології. Навчальний посібник. Київський Університет, К., 2006.

[7] О.Пришляк, Н.Лукова-Чуйко. Диференціальна геометрія та топологія. Курс лекцій. Зовнішня торгівля, К., 2012.

[8] О.О.Пришляк. Топологія многовидів. Навчальний посібник. Київський Університет, К., 2015. http://www.mechmat.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/ 2018/ 03/topolog pryshljak.pdf

[9] О.Пришляк. Алгоритмічні та комп'ютерні методи в топології та теорії динамічних систем. Навчальний посібник. К., 2023.- 216 с. https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/ 2023/12/algkom.pdf

[10] О.Пришляк, В.Терещенко. Обчислювальна геометрія. Основні конструкції на площині. К., 2024 https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2024/11/ somputational-geometry.pdf

[11] J.McCleary. A First Course in Topology. 2022. doi: 10.1090/STML/031

[12] J. Munkres. Topology. A First Course. 1974.