Загальна топологія. Домашні завдання

Сергій Максименко

5 вересня 2025 р.

Сторінка курсу

Лекція 1. Поняття топології. База і передбаза

4 вересня 2025

Задача 1.1. Описати всі топології на множині $X = \{a, b\}$ з двох точок.

Задача 1.2. Описати всі топології на множині $X = \{a, b, c\}$ з трьох точок.

Задача 1.3. Чи можна сказати, що деякі з топологій в попередніх задачах є «однаковими в якомусь сенсі»? Якщо так, то як формалізувати це поняття «однаковості»?

Задача 1.4. Показати, що топологія τ на множині X є дискретною тоді і тільки тоді, коли τ містить всі одноточкові множини. Тобто кожна точка є відкритою.

Чи правда, що тоді кожна точка є замкненою множиною.

Припустимо, що в топології τ кожна точка є замкненою множиною. Чи правда, що тоді топологія τ – дискретна?

Задача 1.5. Нехай X – довільна (можливо нескінченна) множина, τ' – сім'я підмножин, яка складається з усіх підмножин X, доповнення до яких є скінченним, і $\tau = \tau' \cup \{\varnothing\}$.

(а) Перевірити, що τ є топологією на X (вона називається *топологією Зариського*).

(б) Припустимо, що X – скінченна множина. Що тоді можна сказати про τ' і τ?

(в) Нехай σ' – сім'я підмножин, яка складається з усіх підмножин X, доповнення до яких є скінченним або зліченим і $\sigma = \sigma' \cup \{\varnothing\}$. Чи буде σ топологією?

(г) Нехай η' – сім'я підмножин, яка складається з усіх підмножин X, доповнення до яких є нескінченним, але зліченим. Як співвідносяться η' і σ?

Задача 1.6. Нехай $\sigma = \{A_i\}_{i \in \Lambda}$ – сім'я підмножин множини X, яка має такі властивості:

(а) $\varnothing, X \in \sigma$;

(б) для довільних $A, B \in \sigma$ маємо, що $A \cup B \in \sigma$;

(в) для довільної підсім'ї $\{A_j\}_{j \in J} \subset \sigma$ її перетин $\bigcap\limits_{j \in J} A_j \in \sigma$.

Показати, що тоді сім'я $\tau = \{X \setminus A_i\}_{i \in \Lambda}$ є топологією на X.

Задача 1.7. Нехай τ – топологія на X і $\beta = \{U_i\}_{i \in \Lambda}$ – сім'я підмножин множини X, об'єднання яких дає X. Показати, що наступні умови еквівалентні:

(а) β – це база для τ;

(б) для довільного $U \in \tau$ і $x \in U$ існує таке $V \in \beta$, що $x \in V \subset U$.

Задача 1.8. Нехай τ – стандартна топологія на числовій прямій $\mathbb{R}$, базою якої є відкриті інтервали.

(а) Показати, що сім'я $\alpha = \{(-\infty; a), (a; +\infty)\}_{a \in \mathbb{Q}}$ є передбазою цієї топології.

(б) Чи буде передбазою для τ така сім'я $\alpha_1 = \{(-\infty; a)\}_{a \in \mathbb{Q}}$ є передбазою цієї топології?

(в) Для кожної з наступних підмножин в $\mathbb{R}$ визначити чи є вони відкритими або замкненим. Відповідь обгрунтувати.

  (i) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I} = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q}$ – множини натуральних, цілих, раціональних та ірраціональних чисел відповідно;

  (ii) сегменти $[a;b], (a;b], [a;b), (a;b)$ для $a < b$;

  (iii) послідовність $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$;

  (iv) $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{-4\}$;

  (v) $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$.

Задача 1.9. (*) Нехай $\alpha = \{A_i\}_{i\in\Lambda}$ – сім'я підмножин множини X. Побудувати мінімальну топологію на X, в якій всі елементи з α є замкненими.

Задача 1.10. (*) Визначіть аналоги передбази і бази топології в термінах замкнених множин.

Задача 1.11. (*) Нехай $(X, \leq)$ частково впорядкована множина (тобто відношення $\leq$ є рефлексивним, антисиметричним і транзитивним). Нехай також $a < b$ означає, що $a \leq b$ і $a \neq b$. Для кожної пари $a < b \in X$ визначимо множини

$$(a;b) := \{x \in X \mid a < x < b\}, \qquad [a;b] := \{x \in X \mid a \leq x \leq b\}$$

і розглянемо такі сім'ї підмножин в X:

$$\tau = \{(a;b) \mid a < b \in X\}, \qquad \sigma = \{[a;b] \mid a < b \in X\}.$$

(а) Чи завжди τ є базою деякої топології $\bar{\tau}$ на X? Якщо ні, знайдіть умови на $(X, \leq)$, за яких це вірно.

(б) Чи завжди σ є базою замкнених множин деякої топології $\bar{\sigma}$ на X? Якщо ні, знайдіть умови на $(X, \leq)$, за яких це вірно.

(в) Які співвідношення між $\bar{\tau}$ і $\bar{\sigma}$? За яких умов вони тотожні, або одна з них сильніша за іншу?