План курсу

(а) Вступ. Гомеоморфізми одновимірних многовидів. Компактні поверхні, їх накриваючі простори. Гомотопічні та гомологічні властивості.
(б) Теорема Жордана про криву. Теорема Жордана-Шонфліса про диск. Варіанти їх доведень. Застосування.
(в) Теорема Бера про гомотопні криві на поверхнях. Її наслідки.
(г) Головні розшарування. Простори вкладень. Теорема Серфа-Палеса-Ліми про дію дифеоморфізмів на просторах вкладень.
(д) Конфігураційні простори. Опис таких просторів для прямої, відрізка, кола, компактних поверхонь. Обчислення їх гомотопічного типу. Групи кіс.
(е) Трюк Александера. Його наслідки. Зв'язок групи гомеотопій диска з фіксованими точками і групи кіс.
(ж) Гомотопічні типи компонент зв'язності груп гомеоморфізмів поверхонь.
(и) Групи гомеотопій. Скручування Дена. Твірні цих груп. Їх опис для деяких поверхонь.
(к) Функції Морса. Графи Ріба. Кліткове розбиття ассоційоване з векторним полем градієнта функції Морса.

Лекція 1. Гомотопічні типи груп гомеоморфізмів відрізка та кола

8 вересня 2025

Гомеоморфізми відрізка. Нехай $I = [0;1]$ – відрізок.

Задача 1.1. Нехай $f\colon I \to I$ – неперервне відображення. Показати, що наступні умови еквівалентні
(а) f – гомеоморфізм;
(б) f є строго монотонним і сюр'єктивним;
(в) f є строго монотонним, причому $f(0) = 0$ і $f(1) = 1$ або $f(0) = 1$ і $f(1) = 0$.

Задача 1.2. Нехай $a < b$ і $c < d$ довільні числа.
(а) Побудувати які-небудь гомеоморфізми $\phi, \psi\colon [a;b] \to [c;d]$ такі, що

$$\phi(a) = c, \qquad \phi(b) = d, \qquad \psi(a) = d, \qquad \psi(b) = c.$$

(б) Нехай $\phi\colon [a;b] \to [c;d]$ – довільний гомеоморфізм. Перевірити, що відображення

$$\Phi\colon \mathcal{H}([a;b]) \to \mathcal{H}([c;d]), \qquad \Phi(h) = \phi \circ h \circ \phi^{-1},$$

є ізоморфізмом груп.

Задача 1.3. Для довільних $a < b$ і $c < d$ побудувати ізоморфізм груп $\mathcal{H}([a;b]) \to \mathcal{H}([c;d])$.

Задача 1.4. Нехай $q \in \mathcal{H}(I)$ – гомеоморфізм, визначений за формулою $q(x) = 1 - x$.
(а) Показати, що $q \circ q = \mathrm{id}_I$. Зокрема, $\langle q \rangle$ породжує в $\mathcal{H}(I)$ циклічну підгрупу A порядка 2.
(б) Побудувати яку-небудь ретракцію $r\colon \mathcal{H}(I) \to A$.
(в) Довести, що A є навіть сильним деформаційним ретрактом $\mathcal{H}(I)$.
Зокрема, $\mathcal{H}(I)$ складається з двох компонент зв'язності. Вони є стягуваними і відповідають строго зростаючим та строго спадаючим гомеоморфізмам I, відповідно.

Загальне твердження про розклад групи в топологічний добуток підпросторів (не обов'язково підгруп!)

Нагадаємо, що *структура групи* на множині H – це пара відображень

$$\mu\colon H \times H \to H \text{ (множення)}, \qquad \nu\colon H \to H \text{ (взяття оберненого)},$$

та елемент $e \in H$ (який називається одиницею) такі, що

(а) $\mu(e,x) = \mu(x,e) = x$ для всіх $x \in H$; (властивість одниці)
(б) $\mu(\mu(x,y),z) = \mu(x,\mu(y,z))$ для всіх $x,y,z \in H$; (асоціативність)
(в) $\mu(x,\nu(x)) = e$ для всіх $x \in H$; (існування оберненого).

Нехай (H,μ,ν,e) – група і τ – деяка топологія на H. Тоді (H,μ,ν,e,τ) утворюють структуру топологічної групи на H, якщо μ і ν неперервні в топології τ.

Задача 1.5. Нехай H – топологічна група і $K \subset H$ – підгрупа і $A \subset H$ – підмножина, яка перетинає кожен лівий суміжний клас H/K в єдиній точці. Припустимо, що відображення, $r\colon H \to A$, яке ставить у відповідність кожному x точку перетину $xK \cap A$ є неперервним. Показати, що тоді r є ретракцією, а відображення

$$\xi\colon K \times A \to H, \qquad \xi(k,a) = ak,$$

є гомеоморфізмом, обернений $\eta = \xi^{-1}\colon H \to K \times A$ до якого задається формулою

$$\eta(h) = \big(r(h)^{-1}h, r(h)\big).$$

Задача 1.6. Нехай K – стягуваний топологічний простір і $k \in K$ – довільна точка. Показати, що для довільного топологічного простору A, підмножина $A \times k$ є деформаційним ретрактом для $A \times K$.

Гомеоморфізми кола. Нехай $S^1 = \{|z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ – одиничне коло на комплекній площині.

Задача 1.7. Показати, що S^1 є групою відносно операції множення комплексних чисел.

Задача 1.8. Позначимо через $C(S^1,S^1)$ – множину всіх неперервних відображень $S^1 \to S^1$. Показати, що $C(S^1,S^1)$ є *групою відносно операції $\cdot$ поточкового множення*. Тобто, якщо $f,g \in C(S^1,S^1)$, то маємо коректно визначене неперервне відображення $(f \cdot g)\colon S^1 \to S^1$, $(f \cdot g)(z) = f(z)g(z)$.

Задача 1.9. Показати, що $C(S^1,S^1)$ є також є *моноїдом відносно операції $\circ$ композиції відображень* (тобто ця операція асоціативна і має одиницю, але не всі елементи мають обернені). Тобто, якщо $f,g \in C(S^1,S^1)$, то маємо коректно визначене неперервне відображення $f \circ g\colon S^1 \to S^1$, $f \circ g(z) = f\big(g(z)\big)$.

Задача 1.10. Довести, що $\circ$ є право дистрибутивною відносно $\cdot$, тобто для довільних $f,g,h \in C(S^1,S^1)$

$$(f \cdot g) \circ h = (f \circ h) \cdot (g \circ h).$$

Показати, що ліва дистрибутивність в загальному випадку не виконується, тобто навести приклад трійки $f,g,h \in C(S^1,S^1)$ такої, що

$$h \circ (f \cdot g) \neq (h \circ f) \cdot (h \circ f).$$

Таким чином $C(S^1,S^1)$ має дві операції $\cdot$ і $\circ$, пов'язані тільки правим законом дистрибутивності. Такі структури називають *правими майже-кільцями*.

Надалі вважатимемо, що $C(S^1,S^1)$ наділено рівномірною топологією.

Задача 1.11. Розглянемо *універсальне накриваюче* відображення $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = e^{2\pi i}$. Показати, що для кожного неперервного відображення $f\colon S^1 \to S^1$ і існує неперервна функція $\hat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка робить комутативною таку діаграму:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ S^1 \arrow[r, "f"] & S^1 \end{tikzcd}$$

Іншими словами, $p \circ \hat{f} = f \circ p$, тобто $f(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i \hat{f}(t)}$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Відображення $\hat{f}$ називається *підняттям* f (і воно не єдине, як випливає з наступних пунктів).

Задача 1.12. Описати всі підняття таких відображень

(а) $q(z) = 1$, постійне відображення в точку $1 \in S^1$;
(б) $q(z) = -i$, постійне відображення в точку $-i \in S^1$;
(в) $q(z) = z$, тотожне відображення;
(г) $q(z) = e^{2\pi i/3} z$, поворот на кут $2\pi/3$;
(д) $q(z) = iz$, поворот (на який кут?);
(е) $q(z) = \bar{z} = z^{-1}$, комплексне спряження, яке на колі тотожне із взяттям оберненого комплексного числа;
(ж) $q(z) = z^2$, піднесення до квадрату;
(и) $q(z) = z^n$, піднесення до n-го степеня, $n \geq 0$
(к) $q(z) = z^n$, піднесення до n-го степеня, $n < 0$.

Задача 1.13. Довести, що неперервна функція $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є підняттям деякого відображення $f \colon S^1 \to S^1$ тоді і тільки тоді, коли існує таке $k \in \mathbb{N}$, що $g(t+1) = g(t) + k$.

Тоді число k називається *степенем відображення* f і позначається $\deg(f)$.

Задача 1.14. Показати, що відображення $q_n \colon S^1 \to S^1$, $q_n(z) = z^n$ має степінь n.

Задача 1.15. Обчислити степені відображень із задачі 1.12.

Задача 1.16. (*) Нехай $f, g \in C(S^1, S^1)$, $f \cdot g$ – їх поточкове множення, а $f \circ g$ – їх композиція. Показати, що

$$\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g), \qquad \deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g).$$

Вивести звідси, що $\deg \colon C(S^1, S^1) \to \mathbb{Z}$, $f \mapsto \deg(f)$, є гомоморфізмом майже кілець з одиницею (кільце $\mathbb{Z}$ є майже кільцем відносно операцій $+$ та $\cdot$), див. задачу 1.10.

Для $n \in \mathbb{Z}$ позначимо через $C_n(S^1, S^1)$ підмножину в $C(S^1, S^1)$, що складається з відображень степеня n. Тоді ми маємо диз'юнктне об'єднання

$$C(S^1, S^1) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} C_n(S^1, S^1).$$

Задача 1.17. (*) Показати, що якщо $f \in C_n(S^1, S^1)$, то f має щонайменше $|n-1|$ нерухому точку.

Задача 1.18. Показати, що якщо $f \in \mathcal{H}(S^1)$ – гомеоморфізм, то $\deg(f) = \pm 1$, тобто

$$\mathcal{H}(S^1) \subset C_1(S^1, S^1) \bigsqcup C_{-1}(S^1, S^1).$$

Введемо позначення

$$\mathcal{H}^+(S^1) := \mathcal{H}(S^1) \cap C_1(S^1, S^1), \qquad \mathcal{H}^-(S^1) := \mathcal{H}(S^1) \cap C_{-1}(S^1, S^1).$$

Казатимемо, що гомеоморфізми з $\mathcal{H}^+(S^1)$ *зберігають орієнтацію*, а гомеоморфізми з $\mathcal{H}^-(S^1)$ – *змінюють* або *обертають* орієнтацію кола.

Задача 1.19. Довести, що $\mathcal{H}^+(S^1)$ є нормальною підгрупою в $\mathcal{H}(S^1)$ індексу 2, і $\mathcal{H}^-(S^1)$ – це другий суміжний клас $\mathcal{H}(S^1)/\mathcal{H}^-(S^1)$.

Задача 1.20. (*) Довести, що кожен $f \in \mathcal{H}^-(S^1)$ має рівно дві нерухомі точки.

Для точки $w \in S^1$ позначимо через $C(S^1, S^1; w)$ підмножину в $C(S^1, S^1)$ що складається з відображень f, для яких w є нерухомою, тобто $f(w) = w$. Нехай також

$$C_n(S^1, S^1; w) := C(S^1, S^1; w) \cap C_n(S^1, S^1)$$

відповідна підмножина відображень степеня n.

Надалі розглядатимемо випадок, коли $w = 1 \in S^1$.

Задача 1.21. Нехай $f \in C(S^1, S^1; 1)$.

(а) Покажіть, що існує єдине підняття $\hat{f}$ таке, що $\hat{f}(0) = 0$.

(б) Припустимо, що $f \in C_n(S^1, S^1)$, тобто $\hat{f}(t+1) = \hat{f}(t) + n$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Покажіть, що тоді $\hat{f}(kn) = kn$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$.

(в) Розглянемо такий лінійний ізоморфізм $\hat{q}_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\hat{q}_n(t) = nt$. Показати, що q_n є підняттям відображення $q_n(z) = z^n$.

(г) Визначимо гомотопію $F \colon \mathbb{R} \times [0;1] \to \mathbb{R}$ між $\hat{f}$ і $\hat{q}_n$ за формулою

$$F(t, s) = (1-s)\hat{f}(t) + sg(t).$$

Довести, що кожне $F_s \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є гомеоморфізмом $\mathbb{R}$, який задовольняє тотожність:

$$F_s(t+1) = F_s(t) + n, \qquad F_s(0) = 0.$$

(д) Вивести з задачі 1.13, що кожен F_s є підняттям деякого $f_s \in C_n(S^1, S^1; 1)$. Більш того, відображення $H \colon S^1 \times [0;1] \to S^1$, $H(z, s) = f_s(z)$, є неперервним, причому $H_0 = f$, $H_1 = q_n$, і кожне $H_s \in C_n(S^1, S^1; 1)$. Іншими словами H – це гомотопія між f та q_n в $C_n(S^1, S^1; 1)$.

Задача 1.22. (Еквівалентна попередній) Для $n \in \mathbb{Z}$, нехай $C_n(I, \mathbb{R})$ – множина неперервних функцій $g \colon I = [0;1] \to \mathbb{R}$, таких, що $g(0) = 0$ і $g(1) = n$.

(а) Показати, що $C_n(I, \mathbb{R})$ опукла, а тому стягувана.

(б) Покажіть, що для кожного $g \in C_n(I, \mathbb{R})$ коректно визначене неперервне відображення

$$\psi(g) \colon S^1 \to S^1, \qquad \psi(g)(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i g(t)},$$

і воно має степінь n.

(в) Доведіть, що відповідність $g \mapsto \psi(g)$ є гомеоморфізмом

$$\psi \colon C_n(I, \mathbb{R}) \to C_n(S^1, S^1; 1).$$

Задача 1.23. Виведіть з задачі 1.21 або задачі 1.22, що $C_n(S^1, S^1; 1)$ є стягуваним.

Задача 1.24. Розглянемо підмножину $Q = \{q_n \colon S^1 \to S^1 \mid q_n(z) = z^n\}$ в $C(S^1, S^1; 1)$.

(а) Покажіть, що Q є підгрупою відносно операції поточкового множення і вона ізоморфна групі цілих чисел $\mathbb{Z}$.

(б) Доведіть, що Q є сильним деформаційним ретрактом $C(S^1, S^1; 1)$ (скористайтесь задачею 1.23)

Задача 1.25. Покажіть, що відображення

$$\eta \colon C(S^1, S^1) \to C(S^1, S^1; 1) \times S^1, \qquad \eta(f) = \big(f(z)/f(1), f(1)\big)$$

є гомеоморфізмом. Знайдіть обернений до нього.

Задача 1.26. Для $w \in S^1$ позначимо через $r_w \colon S^1 \to S^1$, $r_w(z) = wz$ «поворот на w». Визначимо таке відображення:

$$\gamma \colon \mathbb{Z} \times S^1 \subset C(S^1, S^1), \qquad \gamma(n, w) = (q_n, r_w),$$

і нехай A – його образ.

(а) Покажіть, що γ – є топологічним вкладенням.

(б) Розглянемо відображення $r\colon C(S^1, S^1) \to A$, $r(f) = \big(q_{\deg(f)}, f(1)\big)$. Покажіть, що r – це ретракція.

(в) Доведіть, що r є сильною деформаційною ретракцією (тобто існує деформація $C(S^1, S^1)$ на A нерухома на A).

Ортогональна група $O(2)$. Ортогональною групою $O(2)$ називають групу 2×2 матриць A з дійсними коефіцієнтами, які задовольняють тотожність $AA^T = E$, де $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ – одинична матриця.

Розглянемо функцію $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x, y) = x^2 + y^2$. Тоді її квадратний корінь

$$\|v\| := \sqrt{Q(x, y)} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

називають *евклідовою нормою.*

Задача 1.27. Довести, що $\det(A) = \pm 1$ для кожної матриці $A \in O(2)$.

Задача 1.28. Показати, що кожна матриця $A \in O(2)$ має вигляд

- $A = \left(\begin{smallmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{smallmatrix}\right)$ для деякого $\phi \in [0; 2\pi)$, якщо $\det(A) = +1$. В цьому випадку A індукує поворот $\mathbb{R}^2$ на кут ϕ.
- $A = \left(\begin{smallmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{smallmatrix}\right)$ для деякого $\phi \in [0; 2\pi)$, якщо $\det(A) = -1$. В цьому випадку A є дзеркальною симетрією відносно прямої, що проходить через початок координат під кутом $\phi/2$ до додатнього напряму вісі ox.

Задача 1.29. Показати, що підмножина $SO(2) = \{A \in O(2) \mid \det(A) = 1\}$ є нормальною підгрупою індекса 2 в $O(2)$.

Вона називається *спеціальною ортогональною групою.*

Задача 1.30. Показати, що відображення $\rho\colon SO(2) \to S^1$, $\rho(A) = A(1, 0) = A(1 + 0i)$, є гоморфізмом груп. Зокрема $SO(2)$ є комутативною групою.

Задача 1.31. Покаати, що для довільних матриць $A \in SO(2)$ і $B \in O(2) \backslash SO(2)$ має місце тотожність

$$B^2 = E, \qquad BAB = BAB^{-1} = A^{-1} = A^t.$$

Задача 1.32. Показати, що $O(2)$ тотожна з множиною матириць, які зберігають норму, тобто задовольняють співвідношення $\|Av\| = \|v\|$ для всіх $v \in \mathbb{R}^2$.

Задача 1.33. Довести, що лінійне відображення $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ належить до $O(2)$ тоді і тільки тоді, коли воно невироджене і залишає інваріантним одиничне коло. В цій ситуації, обмеження $A|_{S^1} : S^1 \to S^1$ є гомеоморфізмом.

Таким чином, ми отримуємо відображення:

$$\eta\colon O(2) \to \mathcal{H}(S^1), \qquad \eta(A) = A|_{S^1}.$$

Задача 1.34. Довести, що η є ін'єктивним гомоморфізмом груп, причому

$$\eta(SO(2)) \subset \mathcal{H}^+(S^1), \qquad\qquad \eta(O(2) \setminus SO(2)) \subset \mathcal{H}^-(S^1).$$

Задача 1.35. Нехай $A = \left(\begin{smallmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{smallmatrix}\right) \in SO(2)$ – матриця повороту на деякий кут $\phi \in [0; 2\pi)$. Покажіть, що $\eta(A)(z) = e^{i\phi} z$.

Задача 1.36. Нехай $A = \left(\begin{smallmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{smallmatrix}\right) \in O(2) \setminus SO(2)$ – матриця дзеркальної симетрії відносно прямої, що проходить через початок координат під кутом $\phi/2$ до додатнього напряму вісі ox. Покажіть, що тоді $\eta(A)(z) = e^{i\phi/2}\overline{e^{-i\phi/2} z} = e^{i\phi}\bar{z}$.

Задача 1.37. Нехай $\mathcal{H}^+(S^1;1)$ – підгрупа в $\mathcal{H}^+(S^1)$, що складається з гомеморфізмів, які лишають нерухомою точку 1 (і зберігають орієнтацію).

(а) Покажіть, що $O(2)$ (яку ми ототожнимо з $\eta(O(2))$ в $\mathcal{H}(S^1)$) перетинає кожен суміжний клас $\mathcal{H}(S^1)/\mathcal{H}^+(S^1;1)$ по одній точці.

(б) Визначимо відображення $r\colon \mathcal{H}(S^1) \to O(2)$,

$$r(h)(z) = \begin{cases} h(1)z, & \text{якщо } h \in \mathcal{H}^+(S^1), \\ h(1)\bar{z}, & \text{якщо } h \in \mathcal{H}^-(S^1). \end{cases}$$

Доведіть, що r – ретракція.

(в) Користуючись задачею 1.5 побудуйте гомеомрфізм $\mathcal{H}(S^1) \cong \mathcal{H}^+(S^1;1) \times O(2)$.

(г) Покажіть, що для кожного гомеоморфізма $g\colon [0;1] \to [0;1]$ коректно визначений гомеоморфізм

$$\psi(g)\colon S^1 \to S^1, \qquad \psi(g)(e^{2\pi it}) = e^{2\pi i g(t)}.$$

Доведіть, що відповідність $g \mapsto \psi(g)$ є гомеоморфізмом

$$\psi\colon \mathcal{H}([0;1]) \to \mathcal{H}(S^1).$$

(д) Вивдеіть з попередніх двох пунктів, що $O(2)$ є сильним деформаційним ретрактом $\mathcal{H}(S^1)$.

Лекція 2. Теорема Жордана про криву і теорема Жордана-Шонфліса

15 вересня 2025

Різні доведення цих теорем.

Теорема Жордана про криву

1) Початкове доведення Жордана, стор. 96-102
Camille Jordan. *Cours d'analyse de l'École polytechnique. Tome II.* Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1991 (1893). Calcul intégral. [Integral calculus], Reprint of the third (1913) edition. URL: https://archive.org/details/coursdanalyspoly01jorduoft | файл

2) Обговорення доведення даного Жорданом
L. D. Ames. On the theorem of analysis situs relating to the division of the plane or of space by a closed curve or surface. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 10(6):301–305, 1904. doi:10.1090/S0002-9904-1904-01114-3 | файл

3) Доведення для спеціального класу кривих
G. A. Bliss. The exterior and interior of a plane curve. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 10(8):398–404, 1904. doi:10.1090/S0002-9904-1904-01134-9 | файл

4) Перше строге доведення
Oswald Veblen. Theory on plane curves in non-metrical analysis situs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 6(1):83–98, 1905. doi:10.2307/1986378 | файл

5) Елементарне доведення
Helge Tverberg. A proof of the Jordan curve theorem. *Bull. London Math. Soc.*, 12(1):34–38, 1980. doi:10.1112/blms/12.1.34 | файл

6) Ще одне елементране доведення
Miloˇ s Dostál and Ralph Tindell. The Jordan curve theorem revisited. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, 80(3):111–128, 1978 | файл

7) Доведення, що за допомогою теореми Брауера про нерухому точку
Ryuji Maehara. The Jordan curve theorem via the Brouwer fixed point theorem. *Amer. Math. Monthly*, 91(10):641–643, 1984. doi:10.2307/2323369 | файл

8) Доведення за допомогою нестандартного аналізу
Louis Narens. A nonstandard proof of the Jordan curve theorem. *Pacific J. Math.*, 36:219–229, 1971. URL: http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102971282 | файл

9) Ще одне доведення за допомогою нестандартного аналізу
Vladimir Kanovei and Michael Reeken. A nonstandard proof of the Jordan curve theorem. *Real Anal. Exchange*, 24(1):161–169, 1998/99. arXiv:arxiv:9608204 | файл

10) І ще одне доведення за допомогою нестандартного аналізу
Néstor Bertoglio and Rolando Chuaqui. An elementary geometric nonstandard proof of the Jordan curve theorem. *Geom. Dedicata*, 51(1):15–27, 1994. doi:10.1007/BF01264098 | файл

Теорема Жордана-Шонфліса

11) Доведення теореми Жордана-Шонфліса, розділ 5
M. H. A. Newman. *Elements of the topology of plane sets of points.* Cambridge University Press, New York, second edition, 1961 | файл

12) Серія лекцій по цим теоремам українською мовою
Є. О. Полулях. Теорема Жордана про криву, 2020. За матеріалами серії лекцій, що були прочитані у Інституті математики НАН України в рамках зимової школи з математики 2020 | файл

13) Доведення, яке використовує теорему Куратовського про непланарність графа $K_{3,3}$
Carsten Thomassen. The Jordan-Schönflies theorem and the classification of surfaces. *Amer. Math. Monthly*, 99(2):116–130, 1992. doi:10.2307/2324180 | файл

14) Доведення теореми Жордана-Шонфліса в найслабшій системі аксіом арифметики другого порядку
Nobuyuki Sakamoto and Keita Yokoyama. The Jordan curve theorem and the Schönflies theorem in weak second-order arithmetic. *Arch. Math. Logic*, 46(5-6):465–480, 2007. doi:10.1007/s00153-007-0050-6 | файл

15) Елементарне доведення
Stewart S. Cairns. An elementary proof of the Jordan-Schoenflies theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2:860–867, 1951. doi:10.2307/2031698 | файл

16) Доведення методами дискретної математики
Li Chen and Steven G. Krantz. A discrete proof of the general Jordan-Schoenflies theorem, 2020. arXiv:1504.05263, doi:10.48550/arXiv.1504.05263 | файл

Різні узагальнення цих теорем

17) Близьке твердження про розбиття площини відкритою дугою
J. R. Kline. The converse of the theorem concerning the division of a plane by an open curve. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 18(2):177–184, 1917. doi:10.2307/1988859 | файл

18) Початкове узагальнення на вищі розмірності, яке привело до великої кількості робіт
Barry Mazur. On embeddings of spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 65:59–65, 1959. doi:10.1090/S0002-9904-1959-10274-3 | файл

19) Послаблення умов з попередньої роботи Мазура
Marston Morse. A reduction of the Schoenflies extension problem. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66:113–115, 1960. doi:10.1090/S0002-9904-1960-10420-X | файл

20) Характеризація вкладень $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, які еквівалентні стандартному: сфера повинна бути вкладена з коміром
Morton Brown. A proof of the generalized Schoenflies theorem. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66:74–76, 1960. doi:10.1090/S0002-9904-1960-10400-4 | файл

21) Диференційловний випадок теореми Шонфліса
Marston Morse. Differentiable mappings in the Schoenflies problem. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 44:1068–1072, 1958. doi:10.1073/pnas.44.10.1068 | файл

22) Узагальнення попередньої статті
Marston Morse. Differentiable mappings in the Schoenflies theorem. *Compositio Math.*, 14:83–151, 1959 | файл

23) Узагальнення теореми Жордана на вищі розмірності
Micha A. Perles, Horst Martini, and Yaakov S. Kupitz. A Jordan-Brouwer separation theorem for polyhedral pseudomanifolds. *Discrete Comput. Geom.*, 42(2):277–304, 2009. doi:10.1007/s00454-009-9192-0 | файл

24) Узагальнення теореми Жордана на вищі розмірності
Sang-Eon Han. Jordan surface theorem for simple closed SST-surfaces. *Topology Appl.*, 272:106953, 25, 2020. doi:10.1016/j.topol.2019.106953 | файл

Література

[1] L. D. Ames. On the theorem of analysis situs relating to the division of the plane or of space by a closed curve or surface. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 10(6):301–305, 1904. doi:10.1090/S0002-9904-1904-01114-3.

[2] Néstor Bertoglio and Rolando Chuaqui. An elementary geometric nonstandard proof of the Jordan curve theorem. *Geom. Dedicata*, 51(1):15–27, 1994. doi:10.1007/BF01264098.

[3] G. A. Bliss. The exterior and interior of a plane curve. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 10(8):398–404, 1904. doi:10.1090/S0002-9904-1904-01134-9.

[4] Morton Brown. A proof of the generalized Schoenflies theorem. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66:74–76, 1960. doi:10.1090/S0002-9904-1960-10400-4.

[5] Stewart S. Cairns. An elementary proof of the Jordan-Schoenflies theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2:860–867, 1951. doi:10.2307/2031698.

[6] Li Chen and Steven G. Krantz. A discrete proof of the general Jordan-Schoenflies theorem, 2020. arXiv:1504.05263, doi:10.48550/arXiv.1504.05263.

[7] Milo ˇ s Dostál and Ralph Tindell. The Jordan curve theorem revisited. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, 80(3):111–128, 1978.

[8] Sang-Eon Han. Jordan surface theorem for simple closed SST-surfaces. *Topology Appl.*, 272:106953, 25, 2020. doi:10.1016/j.topol.2019.106953.

[9] Camille Jordan. *Cours d'analyse de l'École polytechnique. Tome II.* Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1991 (1893). Calcul intégral. [Integral calculus], Reprint of the third (1913) edition. URL: https://archive.org/details/coursdanalyspoly01jorduoft.

[10] Vladimir Kanovei and Michael Reeken. A nonstandard proof of the Jordan curve theorem. *Real Anal. Exchange*, 24(1):161–169, 1998/99. arXiv:arxiv:9608204.

[11] J. R. Kline. The converse of the theorem concerning the division of a plane by an open curve. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 18(2):177–184, 1917. doi:10.2307/1988859.

[12] Ryuji Maehara. The Jordan curve theorem via the Brouwer fixed point theorem. *Amer. Math. Monthly*, 91(10):641–643, 1984. doi:10.2307/2323369.

[13] Barry Mazur. On embeddings of spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 65:59–65, 1959. doi:10.1090/S0002-9904-1959-10274-3.

[14] Marston Morse. Differentiable mappings in the Schoenflies problem. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 44:1068–1072, 1958. doi:10.1073/pnas.44.10.1068.

[15] Marston Morse. Differentiable mappings in the Schoenflies theorem. *Compositio Math.*, 14:83–151, 1959.

[16] Marston Morse. A reduction of the Schoenflies extension problem. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66:113–115, 1960. doi:10.1090/S0002-9904-1960-10420-X.

[17] Louis Narens. A nonstandard proof of the Jordan curve theorem. *Pacific J. Math.*, 36:219–229, 1971. URL: http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102971282.

[18] M. H. A. Newman. *Elements of the topology of plane sets of points*. Cambridge University Press, New York, second edition, 1961.

[19] Micha A. Perles, Horst Martini, and Yaakov S. Kupitz. A Jordan-Brouwer separation theorem for polyhedral pseudomanifolds. *Discrete Comput. Geom.*, 42(2):277–304, 2009. doi:10.1007/s00454-009-9192-0.

[20] Nobuyuki Sakamoto and Keita Yokoyama. The Jordan curve theorem and the Schönflies theorem in weak second-order arithmetic. *Arch. Math. Logic*, 46(5-6):465–480, 2007. doi:10.1007/s00153-007-0050-6.

[21] Carsten Thomassen. The Jordan-Schönflies theorem and the classification of surfaces. *Amer. Math. Monthly*, 99(2):116–130, 1992. doi:10.2307/2324180.

[22] Helge Tverberg. A proof of the Jordan curve theorem. *Bull. London Math. Soc.*, 12(1):34–38, 1980. doi:10.1112/blms/12.1.34.

[23] Oswald Veblen. Theory on plane curves in non-metrical analysis situs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 6(1):83–98, 1905. doi:10.2307/1986378.

[24] Є. О. Полулях. Теорема Жордана про криву, 2020. За матеріалами серії лекцій, що були прочитані у Інституті математики НАН України в рамках зимової школи з математики 2020.