Групи Лі (КАУ, ІМНАНУ, 2026). Домашні завдання

Сергій Максименко

14 лютого 2026 р.

Сторінка курсу

Лекція 1. Топологічні групи

5 лютого 2026

Скрізь нижче (G, τ, μ, ν) – топологічна група, де τ – це топологія на G, $\mu\colon G \times G \to G$, $\mu(a,b) = ab$ – операція множення, а $\nu\colon G \to G$, $\nu(a) = a^{-1}$ – операція взяття оберненого елемента.

Для підмножин $A, B \subset G$ використовуватимемо такі позначення:

$$AB = \mu(A \times B) = \{ab \mid a \in A, b \in B\}, \qquad A^{-1} = \nu(A) = \{a^{-1} \mid a \in A\}, \qquad A^2 = AA$$

Задача 1.1. Нехай $U, A \subset G$ – дві підмножини, причому U – відкрита. Покажіть, що тоді наступні множини також є відкритими:

$$U^{-1}, \quad UA, \quad AU.$$

Чи зможете Ви навести приклад топологічної групи G і таких двох замкнених підмножин $A, B \subset G$, що AB не є замкненою?

Задача 1.2. Нехай $V \subset U \subset G$ – довільні підмножини, і W_e – окіл e такий, що або $VW_e^{-1} \subset U$ або $W_e^{-1}V \subset U$. Тоді $\overline{V} \subset Int(U)$.

Задача 1.3. Довести, що наступні підмножини є нормальними підгрупами в G:
- (а) замикання одиниці $\overline{e}$;
- (б) компонента зв'язності G_e одиниці e в G, причому вона є замкненою підгрупою;
- (в) компонента лінійної зв'язності одиниці e

Задача 1.4. Рівномірність.

1. Для кожного раціонального числа $q \in \mathbb{Q}$ вибрати такий відкритий інтервал $U_q = (a_q, b_q)$ такий, що $q \in U_q$, але $\cup_{q\in\mathbb{Q}} U_q \neq \mathbb{R}$, тобто їх об'єднання не покриває всю числову пряму (незважаючи на те, що $\mathbb{Q}$ є всюди щільною.)

2. Нехай $A \subset G$ – всюди щільна підмножина (тобто $\overline{A} = G$) і U – довільний окіл одиниці. Покажіть, що $AU = UA = G$.

3. Нехай (X, ρ) – метричний простір. Для кожної точки $x \in X$ і $\varepsilon > 0$ позначимо через

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid \rho(x,y) < \varepsilon\}$$

– відкритий шар радіусу ε з центром в точці x. Покажіть, що для довільної всюди щільної підмножини $A \subset X$ і довільного $\varepsilon > 0$, маємо, що

$$\bigcup_{x\in A} B_\varepsilon(x) = X.$$

Задача 1.5. Нехай $(G_0, \tau_0, \mu_0, \nu_0)$ і $(G_1, \tau_1, \mu_1, \nu_1)$ – дві топологічні групи. Доведіть, що прямий добуток цих груп $G_0 \times G_1$ з топологією прямого добутку є топологічною групою. Іншими словами, нехай $G = G_0 \times G_1$, $\tau = \tau_0 \times \tau_1$,

$$\mu\colon G \times G \to G, \qquad \mu\big((a,b),(a',b')\big) = \big(\mu_0(a,a'), \mu_1(b,b')\big) = (aa', bb'),$$

$$\nu\colon G \to G, \qquad \nu\big(a,b\big) = \big(\nu_0(a), \nu_1(b)\big) = (a^{-1}, b^{-1}).$$

Потрібно перевірити, що μ і ν неперервні, якщо G наділена топологією τ, а $G \times G$ – топологією $\tau \times \tau$.

Лекція 2. Топологічні групи. Продовження

12 лютого 2026

Задача 2.1. Нехай A – підгрупа топологічної групи G. Доведіть, що її замикання $\overline{A}$ також є підгрупою. Більш того, якщо A – нормальна, то $\overline{A}$ також є нормальною.

Задача 2.2. Нехай A – нормальна підгрупа топологічної групи (G, τ, μ, ν), і $p\colon G \to G/A$ – фактор-відображення. Введемо на G/A факторну топологію $\bar{\tau}$ відносно p, тобто підмножина $Q \subset G/A$ – відкрита тоді і тільки тоді, коли її прообраз $p^{-1}(Q)$ є відкритим в G. Нехай також

$$\bar{\mu}\colon G/A \times G/A \to G/A, \qquad \bar{\nu}\colon G/A \to G/A,$$

відповідні відображення множиння і взяття оберненого в G/A. Покажіть, що $\bar{\mu}$ і $\bar{\nu}$ неперервні відносно топології $\bar{\tau}$. Іншими словами, що $(G/A, \bar{\tau}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$ є топологічною групою.

Задача 2.3. Нехай $A \subset G$ – відкрита підгрупа. Покажіть, що A є також замкненою.

Задача 2.4. Нехай $Z(G) = \{g \in G \mid xg = gx \ \forall x \in G\}$ – ***центр*** групи G, тобто підгрупа таких елементів $g \in G$, які комутують з усіма елементами з G. Покажіть, що якщо G – має властивість T_2, то $Z(G)$ є замкненою підгрупою.

Задача 2.5. Нехай $(\mathbb{R}, +)$ – група дійсних чисел відносно додавання, $S^1 = \{|z| = 1 : z \in \mathbb{C}\}$ – одиничне коло – група комплексних чисел з модулем 1 відносно множення. Опишіть всі неперервні гомоморфізми

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad S^1 \to \mathbb{R}, \qquad \mathbb{R} \to S^1, \qquad S^1 \to S^1.$$