УДК 517.9:519.46

НЕКЛАСИЧНІ СИМЕТРІЇ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

Т. А. Баранник

Полтав. нац. пед. ун-т ім. В. Г. Короленка
вул. Остроградського, 2, Полтава, 36000, Україна
e-mail: barannykt@rambler.ru

We study conditional symmetry of a system of nonlinear reaction-diffusion equations. It has been found that there exist operator symmetry conditions for nonlinear reaction-diffusion equations with an arbitrary number of independent variables. These operators are explicitly found. Exact solutions are constructed for nonlinear reaction-diffusion equations with exponential nonlinearity.

Исследована условная симметрия системы нелинейных уравнений реакции-диффузии. Установлено, что для систем нелинейных уравнений реакции-диффузии с произвольным количеством независимых переменных существуют операторы условной симметрии, причем эти операторы найдены в явном виде. Построены точные решения нелинейных уравнений реакции-диффузии с экспоненциальной нелинейностью.

1. Вступ. У даній роботі досліджується умовна симетрія системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u), \tag{1}$$

де u — стовпець $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, f — стовпець $\left(f^1, f^2, \ldots, f^n\right)$, кожна з компонент вектора u є функцією змінних $t, x_1, \ldots, x_m$, f — вектор-функція u, A — невироджена квадратна матриця порядку n,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Такі системи знаходять широке застосування в теорії тепломасопереносу, а також в математичній біології та хімії. Важливими частинними випадками системи (1) для $n = 2$ є комплексне рівняння Ландау – Гінзбурга і нелінійне рівняння Шрьодінгера в m-вимірному просторі, які використовуються у нелінійній оптиці, а також нелінійній квантовій механіці.

Класична симетрія системи (1) досліджувалась в [1 – 6]. У роботі В. І. Фущича і М. І. Сєрова [7] було започатковано вивчення умовної симетрії рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u), \tag{2}$$

яке є частинним випадком рівняння (1) і відповідає значенням $n = m = 1$. Вичерпний аналіз умовних симетрій рівняння (2) був виконаний П. Кларксоном і Е. Мансфелд [8]. Умовна симетрія багатовимірного скалярного рівняння (1) досліджувалась у [9]. Ефективний підхід до вивчення класичної і умовної симетрій рівняння (1) з довільними n і m був запропонований А. Г. Нікітіним і Р. Вільтшире [4, 5].

У даній роботі результати досліджень, викладені у [8, 9], узагальнюються на рівняння (1) з довільними n і m.

2. Умовна симетрія рівняння (1). Для довільної функції $f(u)$ рівняння (1) є інваріантним відносно групи $E(n)$, генератори якої мають форму

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a \frac{\partial}{\partial x_b} - x_b \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a \neq b, \quad a, b = 1, 2, \ldots, m. \tag{3}$$

Беручи до уваги симетрію рівняння (1) відносно групи обертань $O(m)$, генератори якої J_{ab} наведено у (3), доцільно шукати розв'язки рівняння (1) у вигляді

$$u = u(t, x), \quad x = \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

В результаті приходимо до редукованого рівняння

$$u_t - Au_{xx} - \frac{m-1}{x} Au_x = f(u). \tag{5}$$

Дослідимо умовну симетрію рівняння (5). Головна ідея методу, запропонованого в [4, 5], полягає в тому, що оператор симетрії (класичної або некласичної) шукається у вигляді

$$Q = \eta \frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} - \pi^a \frac{\partial}{\partial u^a},$$

де $\pi^a = \pi^{ab} u_b - \omega^a$ і функції π^{ab}, η і ξ залежать тільки від t і x. Коефіцієнти η, ξ, π^a визначаються з умови, що для оператора

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - A \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{m-1}{x} A \frac{\partial}{\partial x}$$

комутатор $[Q, L]$ допускає зображення

$$[Q, L] = \Lambda L + \varphi + \theta Q, \tag{6}$$

де Λ, φ і θ — квадратні матриці порядку n, елементи яких є функціями t і x.

У підсумку отримуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{gathered}
2A \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\Lambda A - [A, \pi], \\
-\frac{\partial \xi}{\partial t} + 2A \frac{\partial \pi}{\partial x} + \xi \frac{m-1}{x^2} A + \frac{m-1}{x} \frac{\partial \xi}{\partial x} A + A \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \theta \xi - \frac{m-1}{x} \Lambda A, \\
\varphi + \theta \pi = A \frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} + \frac{m-1}{x} A \frac{\partial \pi}{\partial x} - \frac{\partial \pi}{\partial t}, \\
\Lambda + \theta = 0,
\end{gathered} \tag{7}$$

де $\pi = \left(\pi^{ab}\right)$ — квадратна матриця порядку n.

Якщо Q є оператором умовної симетрії, то в рівності (6) $\theta \neq 0$.

Зінтегрувавши систему рівнянь (7) і визначивши відповідні матриці Λ, $\pi = \left(\pi^{ab}\right)$, φ, можна знайти всі нелінійності f^k, розв'язавши систему диференціальних рівнянь першого порядку

$$\left(\Lambda^{kb} - \pi^{kb}\right) f^b + \varphi^{kb} u^b + L\omega^k + \theta^{kb}\omega^b = \left(-\pi^{ab} u_b + \omega^a\right) \frac{\partial f^k}{\partial u_a}. \tag{8}$$

Теорема 1. *Рівняння (5) для $m = 2$ і $A = aI_n$ (I_n — одинична матриця порядку n) умовно інваріантне відносно оператора*

$$Y = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{2a}{x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x^2}\left(b_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + b_n \frac{\partial}{\partial u_n}\right),$$

$b_i \neq 0$ *для* $i = 1, \ldots, n$, *тоді і тільки тоді, коли*

$$f^i = \exp\left(-\frac{4a}{b_i} u_i\right)\varphi_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — *довільні функції змінних* $b_1u_2 - b_2u_1, b_1u_3 - b_3u_1, \ldots, b_1u_n - b_nu_1$.

Доведення. У даному випадку $\xi = -\dfrac{2a}{x}$, $\pi = 0$. З першого рівняння системи (7) знаходимо

$$\Lambda = -2\frac{\partial \xi}{\partial x} I_n = -\frac{4a}{x^2} I_n.$$

З третього і четвертого рівнянь системи (7) випливає, що $\varphi = 0$, $\theta = -\Lambda = \dfrac{4a}{x^2} I_n$. Враховуючи, що $\omega_k = \dfrac{b_k}{x^2}$ для $k = 1, \ldots, n$ і

$$L\omega_k + \Theta^{kk}\omega_k = \left(-a\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{a}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{b_k}{x^2} + \frac{4ab_k}{x^4} = 0,$$

для визначення функцій $f^1, \ldots, f^n$ отримуємо систему рівнянь

$$-4af^k = b_1\frac{\partial f^k}{\partial u_1} + \ldots + b_n\frac{\partial f^k}{\partial u_n}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Введемо допоміжну змінну τ:

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} = b_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Тоді з використанням змінної τ система (9) набирає вигляду

$$-4af^k = \frac{\partial f^k}{\partial \tau}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Інтегруючи її, знаходимо

$$f^k = C_k \exp(-4a\tau), \quad k = 1, \ldots, n,$$

де $C_1, \ldots, C_n$ — довільні сталі.

Визначимо перші інтеграли системи (10):

$$b_1 u_i - b_i u_1 = \bar{C}_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тому загальний розв'язок системи (9) має вигляд

$$f^k = \exp\left(-\frac{4a}{b_k}\, u_k\right) \varphi_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції змінних $b_1 u_i - b_i u_1$, $i = 1, \ldots, n$.

Теорема 2. *Рівняння (5) для $m \neq 2$, $m \neq 4$ і*

$$A = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & -\dfrac{m-4}{m}\, I_{n-l} \end{pmatrix},$$

умовно інваріантне відносно оператора

$$Y = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{m-4}{x}\,\frac{\partial}{\partial x} - \frac{(m-2)(m-4)}{x^2}\left(u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + u_l\, \frac{\partial}{\partial u_l}\right), \quad 1 \leq l \leq n,$$

тоді і тільки тоді, коли

$$f^i = u_i^{\frac{m-4}{m-2}} \varphi_i, \quad i = 1, \ldots, l, \quad f^j = u_1^{-\frac{2}{m-2}} \varphi_j, \quad j = l+1, \ldots, n.$$

Тут $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції змінних $\dfrac{u_2}{u_1}, \ldots, \dfrac{u_l}{u_1}, u_{l+1}, \ldots, u_n$.

Теорема 2 доводиться за тією ж схемою, що і теорема 1.

3. Анзаци і редукція рівняння (1). За теоремою 1 рівняння (5) для $m = 2$, $A = aI_n$ і

$$f^i = \exp\left(-\frac{4a}{b_i}\, u_i\right) \varphi_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

умовно інваріантне відносно оператора

$$Y = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{2a}{x}\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x^2}\left(b_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + b_n\, \frac{\partial}{\partial u_n}\right).$$

Анзац, який відповідає оператору Y, має вигляд

$$u_i = \omega_i(z) - \frac{b_i}{4a}\, \ln x^2, \quad z = x^2 + 4t, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (11)$$

і редукує рівняння (5) до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$4a\omega_i'' + \exp\left(-\frac{4a}{b_i}\,\omega_i\right)\varphi_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції змінних $b_1\omega_2 - b_2\omega_1, b_1\omega_3 - b_3\omega_1, \ldots, b_1\omega_n - b_n\omega_1$. Для деяких функцій φ_i ця система може бути зінтегрована у квадратурах. Визначивши функції ω_i і повернувшись до змінних $x_1, \ldots, x_m$ за допомогою підстановки (4), отримаємо розв'язок рівняння (1).

Побудуємо, наприклад, розв'язки рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -\exp u, \tag{13}$$

яке є частинним випадком рівняння (1) і відповідає значенням $n = 1, m = 2$. Анзац

$$u = u(t, x), \quad x = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

редукує рівняння (13) до одновимірного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{x}\,\frac{\partial u}{\partial x} = -\exp u. \tag{15}$$

За теоремою 1 рівняння (15) умовне інваріантне відносно оператора

$$Y = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{2}{x}\,\frac{\partial}{\partial x} - \frac{4}{x^2}\,\frac{\partial}{\partial u}.$$

Анзац

$$u = \omega(z) + \ln z_x^2, \quad z = x^2 + 4t, \tag{16}$$

який відповідає оператору Y, редукує рівняння (15) до звичайного диференціального рівняння

$$\omega'' = \frac{1}{4}\,\exp\omega.$$

Зінтегрувавши дане рівняння, отримаємо такі розв'язки рівняння (13):

$$u = \ln\left\{2C_1\left(x_1^2 + x_2^2\right)\sec^2\left[\frac{\sqrt{C_1}}{2}\,\left(x_1^2 + x_2^2 + 4t + C_2\right)\right]\right\}, \quad C_1 > 0,$$

$$u = \ln\left\{8C_1C_2\left(x_1^2 + x_2^2\right)\,\frac{\exp\left(\sqrt{C}_1\left(x_1^2 + x_2^2 + 4t\right)\right)}{\left[1 - C_2\exp\left(\sqrt{C}_1\left(x_1^2 + x_2^2 + 4t\right)\right)\right]^2}\right\}, \quad C_1 > 0, \tag{17}$$

$$u = \ln\frac{x_1^2 + x_2^2}{\left[\dfrac{\sqrt{2}}{4}\,\left(x_1^2 + x_2^2 + 4t\right) + C\right]^2}, \quad C \text{ — довільна стала.}$$

Беручи до уваги інваріантність рівняння (13) відносно трансляцій незалежних змінних x_1, x_2, t, можна побудувати більш загальні розв'язки, виконавши у вищенаведених розв'язках (17) заміни $x_1 \to x_1 + k_1$, $x_2 \to x_2 + k_2$, $t \to t + k$, де k, k_1, k_2 — довільні сталі.

Розглянемо тепер одновимірне рівняння реакції-дифузії

$$u_t - u_{xx} = -\exp u + 2\mu^2, \quad \mu \text{ — стала}, \quad \mu \neq 0. \tag{18}$$

Покажемо, що рівняння (18) має розв'язки, структура яких є такою самою, як і структура розв'язків (17) рівняння (13). Для їх знаходження використаємо анзац

$$u = \omega(z) + \ln z_x^2, \tag{19}$$

де $z = z(t, x)$, а $\omega = \omega(z)$ — довільний розв'язок рівняння

$$\omega'' - \exp\omega = 0. \tag{20}$$

Структура анзацу (19) є такою самою, як і структура анзацу (16). Підставивши (19) у (18), отримаємо рівняння

$$(z_t - z_{xx})\omega' = -\frac{2z_{xt}}{z_x} + 2\,\frac{z_{xxx}}{z_x} - 2\,\frac{z_{xx}^2}{z_x^2} + 2\mu^2. \tag{21}$$

Прирівнявши до нуля обидві частини рівняння (21), матимемо редуковану систему

$$\frac{z_{xt}}{z_x} - \frac{z_{xxx}}{z_x} + \frac{z_{xx}^2}{z_x^2} - \mu^2 = 0, \tag{22}$$

$$z_t = z_{xx}. \tag{23}$$

Підставимо (23) у (22):

$$z_{xx}^2 - \mu^2 z_x^2 = 0. \tag{24}$$

Рівняння (24) розпадається на два рівняння:

$$z_{xx} - \mu z_x = 0, \quad z_{xx} + \mu z_x = 0.$$

Загальним розв'язком першого рівняння є функція

$$z = k_1 \exp\left(\mu x + \mu^2 t\right) + k_2,$$

а другого рівняння — функція

$$z = k_1 \exp\left(-\mu x + \mu^2 t\right) + k_2,$$

де k_1, k_2 — довільні сталі, $k_1 \neq 0$.

Отже, задача знаходження розв'язків вигляду (19) рівняння (18) звелася до побудови розв'язків рівняння (20). Інтегруючи рівняння (20), отримуємо такі розв'язки рівняння (18):

$$u = \ln\left[\left(\frac{C_1}{2}\right)\sec^2\left[\frac{\sqrt{C_1}}{2}\left(k_1\exp\left(\mu x+\mu^2 t\right)+k_2+C_2\right)\right]\mu^2 k_1^2\exp 2\left(\mu x+\mu^2 t\right)\right],$$

$$u = \ln\left[\frac{2C_1C_2\exp\left(\sqrt{C}_1k_1\exp\left(\mu x+\mu^2 t\right)+\sqrt{C}_1k_2\right)}{\left[1-C_2\exp\left(\sqrt{C}_1k_1\exp\left(\mu x+\mu^2 t\right)+\sqrt{C}_1k_2\right)\right]^2}\mu^2 k_1^2\exp 2\left(\mu x+\mu^2 t\right)\right],$$

$$u = \ln\frac{\mu^2 k_1^2\exp\left(2\left(\mu x+\mu^2 t\right)\right)}{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}k_1\exp\left(\mu x+\mu^2 t\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}k_2+C_1\right]^2}.$$

Література

1. *Cherniha R., King I. R.* Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: I // J. Phys. A: Math. and Gen. — 2000. — **33**, № 2. — P. 267–282.
2. *Cherniha R., King I. R.* Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: I. Addendum // J. Phys. A: Math. and Gen. — 2000. — **33**, № 43. — P. 7839–7841.
3. *Cherniha R., King I. R.* Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: II // J. Phys. A: Math. and Gen. — 2002. — **36**. — P. 405–425.
4. *Nikitin A. G., Wiltshire R.* Symmetries of systems of nonlinear reaction-diffusion equations // Proc. Inst. Math. NAS Ukraine. — 2000. — **30**, Pt 1. — P. 47–59.
5. *Nikitin A. G., Wiltshire R. J.* Systems of reaction-diffusion equations and their symmetry properties // J. Math. Phys. — 2001. — **42**, № 4. — P. 1667–1688.
6. *Nikitin A. G.* Group classification of systems of nonlinear reaction-diffusion equations // Укр. мат. вісн. — 2005. — **2**, № 1. — С. 149–200.
7. *Фущич В. И., Серов Н. И.* Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. — 1990. — № 7. — С. 24–28.
8. *Clarkson P., Mansfield E.* Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations // Physica D. — 1993. — **70**. — P. 250–288.
9. *Баранник Т. А.* Умовна симетрія і точні розв'язки багатовимірного рівняння реакції-дифузії // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 10. — С. 1416–1420.
10. *Barannyk T. A., Nikitin A. G.* Solitary wave solutions for heat equations // Proc. Inst. Math. NAS Ukraine. — 2004. — **50**, Pt 1. — P. 34–39.

Одержано 21.04.15