УДК 517 . 968

ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ З МАЛОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ ТА ОБМЕЖЕННЯМИ

Т. А. Кучерук

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул Терещенківська, 3

One method for studying the problem for weakly nonlinear equations with restrictions is considered. Application of the iteration method to the problem is substantiated.

Розглядається один з підходів до дослідження задачі для рівнянь з малою нелінійністю та обмеженнями. Обґрунтовується застосування до цієї задачі ітераційного методу.

Задачі для рівнянь з малою нелінійністю та обмеженнями часто зустрічаються в різних областях природознавства і техніки. Розглянемо одну з таких задач, а саме

$$x = f + Kx + \varepsilon CFx, \quad Sx = p, \tag{1}$$

де $f \in X, p \in E$ — задані елементи; $K : X \to X, C : X \to X, S : X \to E$ — лінійні неперервні, а $F : X \to X$ — нелінійний ліпшиц-неперервний оператори; ε — малий додатний параметр; X, E — банахові простори.

Сумісність задачі (1) означає, що існує елемент $x \in X$, який задовольняє одночасно і рівняння, і умову.

Задачі вигляду (1) досліджувалися в літературі (див., наприклад, [1–3]). Дана стаття узагальнює результати лінійного випадку, розглянутого в [4]. Встановлюються умови сумісності задачі (1) та обґрунтовується ітераційний метод побудови наближених розв'язків задачі.

1. Задача з керуванням та умови сумісності задачі (1). Розглянемо задачу

$$y = f + Ky + \varepsilon CFy, \quad Sy = p + Su, \tag{2}$$

в якій $y \in X$ і $u \in U$ — шукані елементи, де $U \subset X$ — підпростір, причому $\dim U = \dim E$. Покажемо, що задача (2) зводиться до дослідження деякого рівняння. Для цього розглянемо допоміжну задачу

$$y = z + Ku, \quad Sy = p + Su, \tag{3}$$

в якій $z \in X$ вважаємо відомим елементом. Тут і далі припускаємо, що рівняння

$$Sw - SKw = p \quad \forall\, p \in E, \;\; w \in U,$$

має єдиний розв'язок, тобто існує такий оператор $\Gamma : E \to U$, що справедливі співвідношення

$$S(I - K)\Gamma p = p \quad \forall p \in E, \qquad \Gamma S(I - K)u = u \quad \forall u \in U,$$

де I — одиничний оператор в X. Тоді, як відомо [4], розв'язок задачі (3) має вигляд

$$u = Rz - w, \quad y = (I + KR)z - Kw. \tag{4}$$

Тут

$$R = \Gamma S, \quad w = \Gamma p. \tag{5}$$

Запишемо задачу (2) у вигляді (3), поклавши в ній

$$z = f + Ky - Ku + \varepsilon CFy. \tag{6}$$

Оскільки розв'язок задачі (3) виражається формулами (4), то, підставивши їх у співвідношення (6), отримаємо рівняння

$$z = g + Mz + \varepsilon CF[Tz - r], \tag{7}$$

в якому

$$\begin{gathered} g = f + Kh, \;\; M = KG, \;\; T = I + KR, \;\; r = Kw, \\ h = w - Kw, \;\; G = I + KR - R. \end{gathered} \tag{8}$$

Таким чином, дослідження задачі (2) звелося до дослідження рівняння (7).

Справедливі наступні теореми.

Теорема 1. *Якщо існує оператор $\Gamma : E \to U$, то задача (2) еквівалентна рівнянню (7). Їхні розв'язки пов'язані між собою співвідношенням*

$$y^* = z^* + Ku^*.$$

Теорема 2. *Якщо існує оператор $\Gamma : E \to U$, то задача (1) сумісна лише тоді, коли існує розв'язок рівняння (7), який задовольняє умову*

$$Rz^* = w.$$

Теорема 3. *Якщо існує оператор $\Gamma : E \to U$, то задача (1) та задача*

$$z = g + Mz + \varepsilon CF[Tz - r], \quad Rz = w$$

одночасно однозначно розв'язувані.

Доведення теорем 1 – 3 аналогічне доведенню цих теорем для лінійної задачі [4].

2. Ітераційний метод. Суть ітераційного методу стосовно задачі (1) полягає в тому, що послідовні наближення будуємо за формулами

$$z_k = f + Kx_{k-1} + \varepsilon CFy_{k-1}, \tag{9}$$

$$y_k = z_k + Ku_k, \quad u_k \in U, \tag{10}$$

$$Sx_k = p, \quad x_k = y_k - u_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{11}$$

Початкове наближення x_0, u_0 визначаємо із задачі (10), (11) при $k = 0$ і заданому $z_0 \in X$.

Для визначення елемента u_k, виконавши нескладні перетворення з урахуванням формул (10), (11), отримаємо рівняння

$$Su_k - SKu_k = Sz_k - p, \quad u_k \in U. \tag{12}$$

Згідно із зробленим вище припущенням існує єдиний розв'язок рівняння (12), який має вигляд

$$u_k = Rz_k - w. \tag{13}$$

Таким чином, послідовні наближення до шуканого розв'язку задачі (1) за методом (9) – (11) будуються однозначно.

Нехай P — оператор проектування простору X на його підпростір $(I - K)U$ і $Q = I - P$. Введемо в розгляд оператори

$$L = QM, \quad D = QC. \tag{14}$$

Припустимо, що виконуються нерівності

$$\begin{gathered} \|CFx - CFy\| \le a\|x - y\|, \\ \|DFx - DFy\| \le b\|x - y\| \quad \forall x, y \in X. \end{gathered} \tag{15}$$

Розглянемо матрицю A вигляду

$$A = \begin{pmatrix} \sigma & \alpha \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

в якій

$$\sigma = \varepsilon a\|T\|, \quad \gamma = \varepsilon b\|T\|, \quad \alpha = \|M\|, \quad \delta = \|L\|. \tag{16}$$

Теорема 4. *Нехай існує оператор $\Gamma : E \to U$. Тоді якщо спектральний радіус матриці A*

$$\rho(A) < 1 \tag{17}$$

і задача (1) сумісна, то вона має єдиний розв'язок $x^* \in X$ і справедливі співвідношення

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*, \lim_{k\to\infty} u_k = 0. \tag{18}$$

Доведення. Покажемо, що збіжність ітераційного методу (9) – (11) зводиться до збіжності послідовності $\{z_k, k \geq 1\}$, побудованої за формулами

$$z_k = g + Mv_{k-1} + \varepsilon CF[Tz_{k-1} - r], \tag{19}$$

$$v_k = d + Lv_{k-1} + \varepsilon DF[Tz_{k-1} - r], \tag{20}$$

де

$$v_k = Qz_k, \quad d = Qg. \tag{21}$$

Дійсно, із співвідношень (10), (11) випливає

$$x_k = z_k + Ku_k - u_k, \tag{22}$$

а на основі рівностей (13), (22), (8), (10) маємо

$$x_k = h + Gz_k, \quad y_k = Tz_k - r. \tag{23}$$

Підставивши (23) у формулу (9) і використавши властивість $GQ = G$ та позначення (21), (8), отримаємо співвідношення (19). Якщо застосувати до рівності (19) оператор Q і врахувати позначення (14), (21), то будемо мати формулу (20).

Оскільки виконується умова (17), то, як відомо [5], існує єдиний розв'язок $z^* \in X$ рівняння (7), і послідовність $\{z_k, k \geq 1\}$ збігається за нормою в X до цього розв'язку, тобто

$$\lim_{k\to\infty} z_k = z^*. \tag{24}$$

За умовою теореми задача (1) сумісна, тобто вона має розв'язок $x^* \in X$, при цьому згідно з теоремою 2 розв'язок $z^* \in X$ рівняння (7) задовольняє умову

$$Rz^* = w. \tag{25}$$

Перейдемо до границі в рівності (13) і першому співвідношенні (23), використавши при цьому формули (24), (25), (8) та неперервність операторів R та G. В результаті отримаємо рівності (18):

$$\lim_{k\to\infty} u_k = Rz^* - w = 0, \quad \lim_{k\to\infty} x_k = h + Gz^* = x^*.$$

Єдиність розв'язку $x^* \in X$ задачі (1) випливає з єдиності розв'язку рівняння (7) та теореми 3.

3. Застосування методу до інтегральних рівнянь з обмеженнями. Розглянемо інтегральне рівняння

$$x(t) = f(t) + \int_\Omega K(t,\tau)x(\tau)d\tau + \varepsilon \int_\Omega C(t,\tau)F[\tau, x(\tau)]d\tau \tag{26}$$

з додатковими умовами

$$\int\limits_{\Omega} \Phi_s(\tau)x(\tau)d\tau = \gamma_s, \quad s = \overline{1,m}, \tag{27}$$

де $t \in \Omega \subset R^\nu$, $f : \Omega \to R$, ε — малий додатний параметр, $K : (\Omega \times \Omega) \to R$, $C : (\Omega \times \Omega) \to$ $\to R$, $F : (\Omega \times R) \to R$ — задані функції, причому такі, що $f \in L_2(\Omega)$,

$$\int\limits_{\Omega} \left| \int\limits_{\Omega} K(t,\tau)x(\tau)d\tau \right|^2 dt \le k^2 \int\limits_{\Omega} x^2(t)dt \quad \forall x \in L_2(\Omega),\ k = \text{const } > 0,$$

функція F задовольняє умову

$$|F[t,z] - F[t,y]| \le l(t)|z-y| \quad \forall\, z, y \in R, t \in \Omega, \tag{28}$$

причому $F_0(t) = \int\limits_{\Omega} C(t,\tau)F[\tau,0]d\tau \in L_2(\Omega)$ і

$$\int\limits_{\Omega} \left| \int\limits_{\Omega} |C(t,\tau)l(\tau)||x(\tau)|d\tau \right|^2 dt \le a^2 \int\limits_{\Omega} x^2(t)dt \quad \forall x \in L_2(\Omega); \tag{29}$$

$\Phi_s : \Omega \to R; \gamma_s, s = \overline{1,m},$ — відомі функції та множина чисел, $\Phi_s \in L_2(\Omega)$, $L_2(\Omega)$ — дійсний простір.

Задачу (26), (27) можна трактувати як частинний випадок задачі (1). Проілюструємо застосування до неї ітераційного методу. Його суть полягає в тому, що послідовні наближення знаходяться за формулами

$$z_k(t) = f(t) + \int\limits_{\Omega} K(t,\tau)x_{k-1}(\tau)d\tau + \varepsilon \int\limits_{\Omega} C(t,\tau)F[\tau, y_{k-1}(\tau)]d\tau, \tag{30}$$

$$y_k(t) = z_k(t) + \int\limits_{\Omega} K(t,\tau)u_k(\tau)d\tau, \quad u_k(t) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \xi_i(t), \tag{31}$$

$$\int\limits_{\Omega} \Phi_s(t)x_k(t)dt = \gamma_s, \quad s = \overline{1,m}, x_k(t) = y_k(t) - u_k(t), \quad k = 1,2,3,\ldots, \tag{32}$$

де $\{\xi_i(t), 1 \le i \le m\} \subset L_2(\Omega)$ — задана система лінійно незалежних функцій.

Для визначення невідомих параметрів $\lambda_i^k, i = \overline{1,m}$, на основі формул (31), (32) маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{m} a_{si}\lambda_i^k = b_s^k, \quad s = \overline{1,m}, \tag{33}$$

де

$$a_{si} = \int\limits_{\Omega} \Phi_s(t)\eta_i(t)dt, \quad b_s^k = \int\limits_{\Omega} \Phi_s(t)z_k(t)dt - \gamma_s, \tag{34}$$

$$\eta_i(t) = \xi_i(t) - \int\limits_{\Omega} K(t,\tau)\xi_i(\tau)d\tau, \quad i,s = \overline{1,m}. \tag{35}$$

Припустимо, що матриця Λ системи рівнянь (33) невироджена. Тоді послідовні наближення за формулами (30) – (32) будуються однозначно.

Як і в загальному випадку, неважко показати, що задача (26), (27) рівносильна задачі відшукання розв'язку інтегрального рівняння

$$z(t) = g(t) + \int\limits_{\Omega} M(t,\tau)z(\tau)d\tau + \varepsilon \int\limits_{\Omega} C(t,\tau)F[\tau, \int\limits_{\Omega} T(\tau,\xi)z(\xi)d\xi - r(\tau)]d\tau, \tag{36}$$

який задовольняє умову

$$\int\limits_{\Omega} R(t,\tau)z(\tau)d\tau = w(t), \tag{37}$$

де з урахуванням формул (5), (8)

$$g(t) = f(t) + \int\limits_{\Omega} K(t,\tau)h(\tau)d\tau, \quad M(t,\tau) = \int\limits_{\Omega} K(t,\xi)G(\xi,\tau)d\xi,$$

$$r(t) = \int\limits_{\Omega} K(t,\tau)w(\tau)d\tau, \quad T(t,\tau) = \delta(t-\tau) + \int\limits_{\Omega} K(t,\xi)R(\xi,\tau))d\xi,$$

$$h(t) = w(t) - r(t), \quad G(t,\tau) = T(t,\tau) - R(t,\tau), \tag{38}$$

$$w(t) = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i \xi_i(t), \quad R(t,\tau) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i(t)\Gamma_i(\tau),$$

$$\sigma_i = \sum_{s=1}^{m} c_{is}\gamma_s, \quad \Gamma_i(\tau) = \sum_{s=1}^{m} c_{is}\Phi_s(\tau), \quad i = \overline{1,m},$$

$\delta(t-\tau)$ — функція Дірака, а c_{is} — елементи матриці Λ^{-1}.

З урахуванням позначень (38) очевидно, що умова (37) рівносильна умові

$$\int\limits_{\Omega} \Gamma_i(\tau)z(\tau)d\tau = \sigma_i, \quad i = \overline{1,m}.$$

Покажемо, що ітераційний метод (30) – (32) зводиться до ітераційного методу для рівняння (36). Дійсно, розв'язок задачі (31), (32) з урахуванням рівностей (33) – (35), (38) зобразиться формулами

$$\begin{aligned} u_k(t) &= \int\limits_{\Omega} R(t,\tau)z_k(\tau)d\tau - w(t), \\ y_k(t) &= \int\limits_{\Omega} T(t,\tau)z_k(\tau)d\tau - r(t), \end{aligned} \tag{39}$$

а наближення $x_k(t)$ набере вигляду

$$x_k(t) = h(t) + \int\limits_{\Omega} G(t,\tau)z_k(\tau)d\tau. \tag{40}$$

Якщо підставити рівності (39), (40) у співвідношення (30) і врахувати позначення (38), то отримаємо ітераційний метод для рівняння (36):

$$z_k(t) = g(t) + \int\limits_{\Omega} M(t,\tau)z_{k-1}(\tau)d\tau + \varepsilon \int\limits_{\Omega} C(t,\tau)F[\tau, \int\limits_{\Omega} T(\tau,\xi)z_{k-1}(\xi)d\xi - r(\tau)]d\tau. \tag{41}$$

Припустимо, що система функцій $\{\eta_i(t), 1 \le i \le m\}$ лінійно незалежна. Нехай $U_m(\Omega) \subset \subset L_2(\Omega)$ — підпростір, породжений цією системою. Ядро оператора проектування простору $L_2(\Omega)$ на підпростір $U_m(\Omega)$ має вигляд

$$P(t,\tau) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\eta_i(t)\eta_j(\tau),$$

де c_{ij} — елементи матриці, оберненої до матриці з елементами

$$p_{ji} = \int\limits_{\Omega} \eta_j(t)\eta_i(t)dt, \quad i,j = \overline{1,m}.$$

Беручи до уваги властивість

$$\int\limits_{\Omega} G(t,\tau)\eta_i(\tau)d\tau = 0, \quad i = \overline{1,m},$$

рівність (41) можна записати у вигляді системи

$$z_k(t) = g(t) + \int_\Omega M(t,\tau)v_{k-1}(\tau)d\tau + \varepsilon \int_\Omega C(t,\tau)F\left[\tau, \int_\Omega T(\tau,\xi)z_{k-1}(\xi)d\xi - r(\tau)\right]d\tau,$$
$$v_k(t) = d(t) + \int_\Omega L(t,\tau)v_{k-1}(\tau)d\tau + \varepsilon \int_\Omega D(t,\tau)F\left[\tau, \int_\Omega T(\tau,\xi)z_{k-1}(\xi)d\xi - r(\tau)\right]d\tau, \tag{42}$$

де

$$v_k(t) = \int_\Omega Q(t,\tau)z_k(\tau)d\tau, \quad d(t) = \int_\Omega Q(t,\tau)g(\tau)d\tau,$$

$$L(t,\tau) = \int_\Omega Q(t,\xi)M(\xi,\tau)d\xi, \quad D(t,\tau) = \int_\Omega Q(t,\xi)C(\xi,\tau)d\xi,$$

а $Q(t,\tau) = \delta(t-\tau) - P(t,\tau)$.

Таким чином, дослідження збіжності методу (30) – (32) звелося до дослідження збіжності ітераційного методу (42).

Нехай виконуються нерівності

$$\int_\Omega \left| \int_\Omega |D(t,\tau)l(\tau)||g(\tau)|d\tau \right|^2 dt \le b^2 \int_\Omega g^2(t)dt,$$
$$\int_\Omega \left| \int_\Omega T(t,\tau)g(\tau)d\tau \right|^2 dt \le d_1^2 \int_\Omega g^2(t)dt,$$
$$\int_\Omega \left| \int_\Omega M(t,\tau)g(\tau)d\tau \right|^2 dt \le d_2^2 \int_\Omega |g(t) - g_m(t)|^2 dt, \tag{43}$$
$$\int_\Omega \left| \int_\Omega L(t,\tau)g(\tau)d\tau \right|^2 dt \le d_3^2 \int_\Omega |g(t) - g_m(t)|^2 dt,$$

де

$$g_m(t) = \int_\Omega P(t,\tau)g(\tau)d\tau \quad \forall g \in L_2(\Omega).$$

Тоді на підставі співвідношень (28), (29), (43) та (15), (16) елементи матриці A мають вигляд

$$\sigma = \varepsilon a d_1, \quad \gamma = \varepsilon b d_1, \quad \alpha = d_2, \quad \delta = d_3.$$

Достатні умови збіжності методу (30) – (32) сформульовано в теоремі 4.

Побудову наближень за методом (30) – (32) можна здійснити таким чином. Спершу задаємо систему лінійно незалежних функцій $\{\xi_i(t), 1 \le i \le m\}$. Будуємо матрицю Λ, елементи якої обчислюємо за формулами (34), (35), і знаходимо Λ^{-1}. Із задачі (31), (32) при $k = 0$ і заданій функції $z_0(t)$ визначаємо початкове наближення $x_0(t), u_0(t)$.

Нехай наближення $x_{k-1}(t), u_{k-1}(t)$ побудовано. Тоді знаходимо функцію

$$y_{k-1}(t) = x_{k-1}(t) + u_{k-1}(t)$$

і виконуємо ітерацію (30), в результаті чого отримуємо функцію $z_k(t)$. Потім формуємо вектор $b_k = (b_1^k, \ldots, b_m^k)$, координати якого обчислюємо за другою з формул (34). Після цього знаходимо вектор

$$\lambda_k = \Lambda^{-1} b_k = (\lambda_1^k, \ldots, \lambda_m^k)$$

і будуємо k-те наближення

$$x_k(t) = z_k(t) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \eta_i(t),$$

$$u_k(t) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \xi_i(t).$$

1. *Бойчук А.А.,Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.
2. *Лучка А.Ю.* Методи розв'язання рівнянь з обмеженнями і проекційно-ітеративний метод Ю.Д. Соколова // Укр. мат. журн. — 1996 .— **48**, № 11. — С. 1501 – 1509.
3. *Лучка А.Ю.* Интегральные уравнения с ограничениями и методы их решения // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 3. — С. 82 – 96.
4. *Лучка А.Ю., Кучерук Т.А.* Ітераційний метод побудови розв'язків лінійних рівнянь з обмеженнями // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 4. — С. 472 – 482.
5. *Лучка А.Ю.* Проекционно-итеративные методы. — Киев: Наук. думка, 1993. — 287 с.

Одержано 15.06.2000