УДК 517.929

СЛАБКОНЕЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ. КРИТИЧНИЙ ВИПАДОК ДРУГОГО ПОРЯДКУ*

І. А. Бондар

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна
e-mail: holovatska.iv@gmail.com

We establish the existence conditions for solutions of the impulsive weakly nonlinear boundary-value problem in the critical case of the second order and find the structure of these solutions. By using the theory of orthoprojectors and pseudoinverse Moore – Penrose matrices, we investigate the sufficient condition for the existence of solutions of these problems and propose an iterative algorithm for their construction. We show that the existence of a solution of the original boundary-value problem depends on the conditions obtained by means of nonlinearities and the second approximation to the required solution. We propose to consider the impulsive problem as an inner boundary-value problem.

Встановлено умови існування та структуру розв'язків слабконелінійної крайової задачі з імпульсним впливом у критичному випадку другого порядку. За допомогою теорії ортопроекторів та псевдообернених за Муром – Пенроузом матриць досліджено достатню умову існування розв'язків таких задач, запропоновано ітераційний алгоритм їх побудови. Показано, що існування розв'язку вихідної крайової задачі залежить від умов, отриманих за допомогою нелінійності і другого наближення до шуканого розв'язку. Запропоновано задачу з імпульсним впливом розглядати як внутрішню крайову задачу (“interface BVP's”).

Вступ. Розглянемо слабконелінійну систему інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу

$$\dot{x}(t) - \Phi(t)\int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)]ds = f(t) + \varepsilon\int_a^b K(t,s)Z(x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)ds, \tag{1}$$

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} := S_i x(\tau_i - 0) + \gamma_i + \varepsilon J_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{2}$$

$$t \neq \tau_i, \quad t \in [a,b], \quad \tau_i \in (a,b), \quad i = 1,2,\ldots,p,$$

$$\ell x(\cdot) = \alpha + \varepsilon J_2(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \quad \alpha \in \mathbb{R}^q. \tag{3}$$

Будемо використовувати такі припущення та позначення з робіт [1 – 5]: $A(t),\ B(t),\ \Phi(t),$ $K(t,s)$ — $(m\times n)$-, $(m\times n)$-, $(n\times m)$-, $(n\times n)$-вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a,b]$; вектор-стовпчики матриці $\Phi(t)$ лінійно-незалежні на $[a,b],\ f(t)$ — n-вимірна вектор-функція з $L_2[a,b];\ E_i,\ S_i$ — $(k_i\times n)$-вимірні матриці, γ_i — k_i-вимірний вектор-стовпчик констант, $\operatorname{rank}(E_i+S_i)=k_i,\ i=1,2,\ldots,p.$ Тут імпульси задаються не по всіх копонентах невідомої n-вимірної вектор-функції

$$x(t) = \operatorname{col}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{k_i}(t), \ldots, x_n(t)),$$

* Підтримано грантом НАН України дослідницькій групі молодих учених НАН України для проведення досліджень за пріоритетними напрямками розвитку науки і техніки 2019 р.

а лише по k_i її компонентах; ℓ — обмежений лінійний векторний функціонал, визначений в $D_2[a;b]$, $\ell = \operatorname{col}(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots, \ell_p)\colon D_2[a;b] \to \mathbb{R}^p$; $\alpha = \operatorname{col}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$; $Z(x(t,\varepsilon), t, \varepsilon)$ — нелінійна по першій компоненті n-вимірна вектор-функція, неперервно диференційовна по x в околі породжуючого розв'язку, інтегровна з квадратом по t і неперервна по ε: $Z(\cdot, t, \varepsilon) \in C^1\big[\|x - x_0\| \le \mu\big]$, $Z(x(\cdot,\varepsilon), \cdot, \varepsilon) \in L_2[a,b]$, $Z(x(t,\cdot), t, \cdot) \in$ $\in C[0,\varepsilon_0]$; $J_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$, $J_2(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелінійні обмежені, відповідно, p, q-вимірні вектор-функціонали, неперервно диференційовні по x у розумінні Фреше і неперервні по ε в околі породжуючого розв'язку.

Покажемо, аналогічно як і в [5], що досліджувати задачу з імпульсним впливом (1) – (3) можна, розглядаючи її як внутрішню крайову задачу ("interface BVP's" [6]). Для того щоб показати цей зв'язок, уведемо $\varphi x(\cdot)$ — k-вимірний лінійний обмежений векторний функціонал

$$\varphi := \operatorname{col}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)\colon D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I) \to \mathbb{R}^k, \quad k := k_1 + k_2 + \ldots + k_p,$$

$$\varphi_i\colon D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I) \to \mathbb{R}^{k_i}, \quad i = 1, \dots, p,$$

таким чином:

$$\begin{cases} \varphi_1 x := E_1 x(\tau_1+) - (E_1 + S_1) x(\tau_1-), \\ \varphi_2 x := E_2 x(\tau_2+) - (E_2 + S_2) x(\tau_2-), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_p x := E_p x(\tau_p+) - (E_p + S_p) x(\tau_p-) \end{cases}$$

та запишемо імпульсну дію (2) як крайову умову

$$\varphi x(\cdot) = \gamma + \varepsilon J_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{4}$$

де $\gamma = \operatorname{col}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p) \in \mathbb{R}^k$, $\gamma_i \in \mathbb{R}^{k_i}$. Об'єднаємо одержану в такий спосіб внутрішню крайову умову (4) із заданою крайовою умовою (3) і отримаємо $(k+q)$ умов на невідому n-вимірну вектор-функцію $x(t)$:

$$\mathfrak{L} x(\cdot) = \delta + \varepsilon J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \in R^{k+q}, \tag{5}$$

де

$$\mathfrak{L} := \begin{bmatrix} \varphi \\ \ell \end{bmatrix}, \quad \delta := \begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \delta \in R^{k+q}, \quad J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) := \begin{bmatrix} J_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \\ J_2(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \end{bmatrix}$$

— $(k+q)$-вимірний векторний функціонал, який неперервно диференційовний по x у розумінні Фреше та неперервний по ε в околі породжуючого розв'язку. Тепер слабконелінійну імпульсну крайову задачу (1) – (3) можна розглядати як слабконелінійну крайову задачу (1), (5).

Отже, шукаємо такий розв'язок $x = x(t,\varepsilon)$ крайової задачі (1), (5), який визначений у класі вектор-функцій $x = x(t,\varepsilon)\colon x(\cdot,\varepsilon) \in D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I)$, $\dot{x}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b]$, $x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, і при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків породжуючої крайової задачі

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int_a^b \big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\big] ds = f(t), \tag{6}$$

$$\mathfrak{L}x(\cdot) = \delta \in \mathbb{R}^{k+q}. \tag{7}$$

Далі, розв'язок породжуючої крайової задачі (6), (7) $x(t,0) = x_0\left(t, c_r^0\right)$ будемо називати *породжуючим розв'язком* слабконелінійної імпульсної крайової задачі (1) – (3), де $c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ — невідомий вектор констант, який буде визначено далі. Наведемо відомий [1, 5] критерій розв'язності даної задачі.

Теорема 1. *Нехай* $\operatorname{rank} Q = n_2 \leq \{k+q, r_1\}$. *Тоді однорідна крайова задача (6), (7)* $(f(t) = 0, \delta = 0)$ *має* r *лінійно незалежних розв'язків*

$$x(t, c_r) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} P_{Q_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

$$r = r_1 - \operatorname{rank} Q, \quad r_1 = m + n - \operatorname{rank} D.$$

Неоднорідна крайова задача (6), (7) є розв'язною тоді та тільки тоді, коли виконуються умови

$$P_{D^*_{d_1}} \tilde{b} = 0, \quad P_{Q^*_{d_2}} (\delta - \mathfrak{L}F(\cdot)) = 0, \tag{8}$$

$$d_1 = m - \operatorname{rank} D, \quad d_2 = k + q - \operatorname{rank} Q.$$

Більш того, вона має r*-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків*

$$x(t, c_r) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} P_{Q_r} c_r + \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+ (\delta - \mathfrak{L}F(\cdot)) + F(t) \quad \forall c_r \in \mathbb{R}^r. \tag{9}$$

Тут

$$\Psi_0(t) = [\Psi(t), I_n], \quad \Psi(t) = \int_a^t \Phi(s) ds,$$

де $\Psi_0(t),\ \Psi(t)$ — $(n \times (m+n))$- та $(n \times m)$-вимірні матриці відповідно;

$$D = \left[I_m - \int_a^b [A(s)\Psi(s) + B(s)\Phi(s)]\, ds - \int_a^b A(s) ds \right]$$

— $(m \times (m+n))$-вимірна матриця,

$$\tilde{f}(t) = \int_a^t f(s) ds, \quad \tilde{b} = \int_a^b \left[A(s)\tilde{f}(s) + B(s) f(s) \right] ds, \quad F(t) = \tilde{f}(t) + \Psi_0(t) D^+ \tilde{b};$$

I_m та I_n — одиничні матриці відповідних розмірностей; P_D та P_{D^*}, відповідно, $((m + n) \times (m+n))$-, $(m \times m)$-вимірні матриці-ортопроектори на ядро та коядро матриці D; $P_{D_{r_1}}$ $\left(P_{D^*_{d_1}}\right)$ — матриця, що складається з повної системи r_1 (d_1) лінійно незалежних стовпців (рядків) матриці (ортопроектора) P_D (P_{D^*}).

Матриця Q $((k+q) \times r_1)$-вимірна, побудована в [2]; матриця D^+ (Q^+) псевдообернена за Муром – Пенроузом до матриці D (Q). P_Q та P_{Q^*}, відповідно, $(r_1 \times r_1)$- та $((k+q) \times (k + q))$-вимірні матриці-ортопроектори на ядро та коядро матриці Q. Матриця P_{Q_r} $\left(P_{Q^*_{d_2}}\right)$ складається з повної системи r (d_2) лінійно незалежних стовпців (рядків) матриці P_Q $\left(P_{Q^*}\right)$ [2].

У роботі [5] встановлено умови існування та запропоновано алгоритм побудови розв'язку $x(t,\varepsilon)$ задачі (1) – (3):

$$x(t,\varepsilon)=x_0\left(t,c_r^0\right)+y(t,\varepsilon).$$

Наведемо відому [5] необхідну умову розв'язності слабконелінійної крайової задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь із імпульсним впливом.

Теорема 2 (необхідна умова)**.** *Нехай слабконелінійна крайова задача (1) – (3) має розв'язок* $x=x(t,\varepsilon)$*:*

$$x(\cdot,\varepsilon)\in D_2([a,b]\setminus\{\tau_i\}_I),\quad \dot{x}(\cdot,\varepsilon)\in L_2[a,b],\quad x(t,\cdot)\in C(0,\varepsilon_0],$$

який перетворюється при $\varepsilon=0$ *у породжуючий розв'язок* $x_0(t,c_r)$ *(9) з константою* $c_r=c_r^0$, $r=m+n-\operatorname{rank}D-\operatorname{rank}Q)$.

Тоді необхідно, щоб вектор констант c_r^0 *був дійсним коренем системи рівнянь*

$$P_{D^*_{d_1}}\int\limits_a^b\Bigg[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(\tau,s)Z(x_0(s,c_r^0),s,0)\,dsd\tau+$$

$$+B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)Z(x_0(\tau,c_r^0),\tau,0)d\tau\Bigg]ds=0, \tag{10}$$

$$P_{Q^*_{d_2}}\Bigg\{J\left(x_0\left(\cdot,c_r^0\right),0\right)-\mathfrak{L}\Bigg(\int\limits_a^{\cdot}\int\limits_a^b K(\tau,s)Z\left(x_0\left(s,c_r^0\right),s,0\right)ds\,d\tau+$$

$$+\Psi_0(\cdot)D^+\int\limits_a^b\Bigg[A(t)\int\limits_a^t\int\limits_a^b K(\tau,s)Z\left(x_0\left(s,c_r^0\right),s,0\right)ds\,d\tau+$$

$$+B(t)\int\limits_a^b K(t,s)Z\left(x_0\left(s,c_r^0\right),s,0\right)ds\Bigg]dt\Bigg)\Bigg\}=0, \tag{11}$$

$$d_1=m-\operatorname{rank}D,\qquad d_2=p-\operatorname{rank}Q.$$

У випадку періодичних задач векторна константа c_r^0 має фізичний зміст — це амплітуди породжуючого розв'язку, а система рівнянь (10), (11) є системою рівнянь для породжуючих амплітуд [7]. За аналогією, ми називаємо систему рівнянь (10), (11) *системою рівнянь для породжуючих констант* крайової задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь (1) – (3).

Якщо система рівнянь (10), (11) є розв'язною, то вектор $c_r=c_r^0\in\mathbb{R}^r$ визначає породжуючий розв'язок $x(t,c_r)=x_0(t,c_r^0)$ (9), який у свою чергу визначає розв'язок $x(t,\varepsilon)$ початкової крайової задачі (1) – (3) для $\varepsilon=0$. Якщо система (10), (11) не має розв'язку, то крайова задача (1) – (3) також не має шуканого розв'язку. У цьому випадку ми говоримо про дійсні корені системи рівнянь для породжуючих констант (10), (11).

Отже, необхідна умова розв'язності крайової задачі (1)–(3) виконується, якщо система рівнянь (10), (11) має хоча б один дійсний корінь $c_r = c_r^0 \in R^r$. Достатня умова існування розв'язку слабко нелінійної крайової задачі (1)–(3) суттєво залежить від побудованої $((d_1 + d_2) \times r)$-вимірної матриці

$$B_0 := \begin{bmatrix} P_{D_{d_1}^*} \int_a^b \Big[A(s)\tilde{h}_1(s) + B(s)h_1(s) \Big] ds \\ P_{Q_{d_2}^*} \left\{ \mathfrak{L}_1 X_r(\cdot) - \mathfrak{L} F_0^1(\cdot) \right\} \end{bmatrix},$$

яка визначає систему для знаходження невідомого вектора-констант $c = c_r \in \mathbb{R}^r$, а саме:

$$B_0 c = g,$$

де g — $((d_1 + d_2) \times 1)$-вимірна вектор-функція:

$$g := \begin{bmatrix} -P_{D_{d_1}^*} \int_a^b \big[A(s)\tilde{h}_2(s,\varepsilon) + B(s)h_2(s,\varepsilon) \big] ds \\ -P_{Q_{d_2}^*} \left\{ J\left(x_0\left(\cdot, c_r^0\right)\right) + \mathfrak{L}_1 y(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \mathfrak{L} F_0^2(\cdot,\varepsilon) \right\} \end{bmatrix},$$

$$h(t,\varepsilon) = \varepsilon \int_a^b K(t,s) \left[Z(x_0(s,c_r^0), s, 0) + A_1(s) y(s,\varepsilon) + R(y(s,\varepsilon), s, \varepsilon) \right] ds =$$

$$= \varepsilon \left(h_1(t) + h_2(t,\varepsilon) \right),$$

$$h_1(t) = \int_a^b K(t,s) A_1(s) X_r(s) ds, \quad h_2(t,\varepsilon) = \int_a^b K(t,s) \left[A_1(s) y(s,\varepsilon) + R(y(s,\varepsilon), s, \varepsilon) \right] ds,$$

$$F_0(t,\varepsilon) = \tilde{h}(t,\varepsilon) + \Psi_0(t) D^+ \tilde{b}_0(\varepsilon) = F_0^1(t) + F_0^2(t,\varepsilon),$$

$$F_0^1(t) = \tilde{h}_1(t) + \Psi_0(t) D^+ \int_a^b \Big[A(s)\tilde{h}_1(s) + B(s)h_1(s) \Big] ds,$$

$$F_0^2(t,\varepsilon) = \tilde{h}_2(t,\varepsilon) + \Psi_0(t) D^+ \int_a^b \Big[A(s)\tilde{h}_2(s,\varepsilon) + B(s)h_2(s,\varepsilon) \Big] ds,$$

$$\tilde{h}(t,\varepsilon) = \int_a^t h(s,\varepsilon) ds, \quad \tilde{h}_1(t) = \int_a^t h_1(s) ds, \quad \tilde{h}_2(t,\varepsilon) = \int_a^t h_2(s,\varepsilon) ds.$$

Теорема 3 (достатня умова)**.** *Припустимо, що виконуються всі наведені вище умови і система рівнянь (10), (11) має хоча б один дійсний корінь, породжуюча крайова задача (6),* *(7) має r-параметричну сім'ю розв'язків $x(t, c_r)$ (9) ($r = m + n - \operatorname{rank} D - \operatorname{rank} Q$). Тоді, якщо виконуються умови*

$$P_{B_0^*} N = 0, \quad P_{B_0} = 0 \tag{12}$$

для всіх дійсних значень вектора $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$, що задовольняє систему рівнянь (10), (11), то слабконелінійна крайова задача (1)–(3) має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$:

$$x(\cdot, \varepsilon) \in D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I), \quad \dot{x}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b], \quad x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0].$$

При $\varepsilon = 0$ цей розв'язок перетворюється у породжуючий розв'язок $x_0(t, c_r^0)$ (9) і визначається за допомогою співвідношення

$$x_k(t, \varepsilon) = x_0\left(t, c_r^0\right) + y_k(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

та збіжного ітераційного процесу

$$y_{k+1}(t, \varepsilon) = X_r(t) c_k + \bar{y}_{k+1}(t, \varepsilon),$$

$$c_k = B_0^+ \begin{bmatrix} -P_{D_{d_1}^*} \displaystyle\int_a^b \Big[A(s)\tilde{h}_2^k(s, \varepsilon) + B(s) h_2^k(s, \varepsilon)\Big] ds \\ -P_{Q_{d_2}^*} \big\{J(x_0(\cdot, c_r^0)) + \mathfrak{L}_1 \bar{y}_k(\cdot, \varepsilon) + \\ + R_1(y_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \mathfrak{L} F_k^2(\cdot, \varepsilon)\big\} \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_{k+1}(t, \varepsilon) = \varepsilon \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+ \big\{J(x_0(\cdot, c_r^0)) + \mathfrak{L}_1 y_k(\cdot, \varepsilon) + R_1(y_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \mathfrak{L} F_k(\cdot, \varepsilon)\big\} + F_k(t, \varepsilon).$$

У цій теоремі $((d_1 \times d_2) \times (m + n))$-вимірна матриця N має вигляд

$$N := \begin{bmatrix} P_{D_{d_1}^*} & (0)_{d_1 \times m} \\ (0)_{d_2 \times n} & P_{Q_{d_2}^*} \end{bmatrix},$$

$$F_k(t, \varepsilon) = \tilde{h}_k(t, \varepsilon) + \Psi_0(t) D^+ \int_a^b \Big[A(s)\tilde{h}_k(s, \varepsilon) + B(s) h_k(s, \varepsilon)\Big] ds = F_0^1(t) + F_k^2(t),$$

$$F_0^1(t) = \tilde{h}_1(t) + \Psi_0(t) D^+ \int_a^b \Big[A(s)\tilde{h}_1(s, c) + B(s) h_1(s, c)\Big] ds,$$

$$F_k^2(t, \varepsilon) = \tilde{h}_2^k(t, \varepsilon) + \Psi_0(t) D^+ \int_a^b \Big[A(s)\tilde{h}_2^k(s, \varepsilon) + B(s) h_2^k(s, \varepsilon)\Big] ds,$$

$$h_k(t, \varepsilon) = \varepsilon \Big(h_1(t, c) + h_2^k(t, \varepsilon)\Big), \quad \tilde{h}_k(t, \varepsilon) = \int_a^t h_k(s, \varepsilon)\, ds,$$

$$h_2^k(t,\varepsilon) = \int\limits_a^b K(t,s)\left[A_1(s)\bar{y}_{k-1}(s,\varepsilon) + R(y_{k-1}(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\right]ds, \quad \tilde{h}_2^k(t,\varepsilon) = \int\limits_a^t h_2^k(s,\varepsilon)ds;$$

$(0)_{d_1\times m},\ (0)_{d_2\times n}$ — нуль-матриці відповідних розмірностей, $P_{B_0^*}$ — $((d_1+d_2)\times(d_1+d_2))$-вимірна матриця (ортопроектор), що проектує простір $R^{d_1+d_2}$ у нуль-простір $N\left(B_0^*\right)$.

Теорема 3 доводиться аналогічно до теореми про достатню умову з [5].

Враховуючи викладене вище, для відхилення $y = y(t,\varepsilon)$ від породжуючого розв'язку $x_0\left(t,c_r^0\right)$ отримаємо внутрішню крайову задачу

$$\dot{y}(t) - \Phi(t)\int\limits_a^b \left[A(s)y(s) + B(s)\dot{y}(s)\right]ds = \varepsilon\int\limits_a^b K(t,s)Z\left(x_0\left(s,c_r^0\right) + y(s,\varepsilon),s,\varepsilon\right)ds, \qquad (13)$$

$$\mathfrak{L}y(\cdot) = \varepsilon J\left(x_0\left(\cdot,c_r^0\right) + y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right). \qquad (14)$$

Використовуючи неперервну диференційовність вектор-функції $Z(x,t,\varepsilon)$ та диференційовність за Фреше векторного функціонала $J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ по перших компонентах в околі точки $\varepsilon = 0$, виділяємо у вектор-функції $Z(x_0+y,t,\varepsilon)$ і у векторному функціоналі $J\left(x_0(\cdot,c_r^0)+y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right)$ лінійну частину по y і члени нульового порядку по ε. Тоді має місце розклад

$$Z(x_0+y,t,\varepsilon) = Z\left(x_0\left(t,c_r^0\right),t,0\right) + A_1(t)y(t,\varepsilon) + R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \qquad (15)$$

$$J\left(x_0(\cdot,c_r^0)+y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right) = J(x_0(\cdot,c_r^0)) + \mathfrak{L}_1 y(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \qquad (16)$$

де

$$Z\left(x_0\left(t,c_r^0\right),t,0\right)\in C[a,b], \quad J\left(x_0\left(\cdot,c_r^0\right)\right) = J\left(x_0\left(\cdot,c_r^0\right),0\right),$$

$$A_1(t) = A_1\left(t,c_r^0\right) = \left.\frac{\partial Z(x,t,0)}{\partial x}\right|_{x=x_0(t,c_r^0)} \in C[a,b],$$

$\mathfrak{L}_1 y(\cdot,\varepsilon)$ — лінійна частина векторного функціонала $J\left(x_0\left(\cdot,c_r^0\right)+y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right)$. Лінійний оператор $\mathfrak{L}_1 = J'(x_0)$ є похідною Фреше [2] від векторного функціонала $J\left(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right)$ в точці $x = x_0\left(t,c_r^0\right)$. Нелінійна вектор-функція $R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ належить до класу $C^1(\|y\|\le q)$, $L_2[a,b]$, $C[0,\varepsilon_0]$. При цьому маємо

$$R(0,t,0) = 0, \quad \frac{\partial R(0,t,0)}{\partial y} = 0, \quad R_1(0,0) = 0, \quad \frac{\partial R_1(0,0)}{\partial y} = 0.$$

Запишемо $((d_1+d_2)\times 1)$-вимірну вектор-функцію g як

$$g := N\bar{g},$$

$((m+n)\times 1)$-вимірна вектор-функція

$$\bar{g} := \begin{bmatrix} -\int_a^b \left[A(s)\tilde{h}_2(s,\varepsilon) + B(s)h_2(s,\varepsilon)\right]ds \\ -\left\{J\left(x_0\left(\cdot,c_r^0\right)\right) + \mathfrak{L}_1 y(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) - \mathfrak{L}F_0^2(\cdot,\varepsilon)\right\}\end{bmatrix}.$$

Тоді, якщо виконуються умови (12), то крайова задача (13), (14) має єдиний розв'язок

$$y(t,\varepsilon) = X_r(t)c + y^1(t,\varepsilon),$$

$$c = B_0^+ g, \tag{17}$$

$$y^1(t,\varepsilon) = \varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\left\{J\left(x_0\left(\cdot,c_r^0\right)\right) + \mathfrak{L}_1 y(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \mathfrak{L}F_0(\cdot,\varepsilon)\right\} + F_0(t,\varepsilon),$$

де $c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ задовольняє систему рівнянь для породжуючих векторних констант (10), (11). Тут $y(t,\varepsilon)\colon y(\cdot,\varepsilon) \in D_2([a,b]\setminus\{\tau_i\}_I),\ \dot y(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b],\ y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],\ y(t,0) = 0$, який перетворюється у нульовий розв'язок крайової задачі при $\varepsilon = 0$:

$$\dot y(t) - \Phi(t)\int_a^b [A(s)y(s) + B(s)\dot y(s)]\,ds = \varepsilon\int_a^b K(t,s)Z\left(x_0\left(s,c_r^0\right) + y(s,\varepsilon),s,\varepsilon\right)ds, \tag{18}$$

$$\mathfrak{L}y(\cdot) = \varepsilon J\left(x_0\left(\cdot,c_r^0\right) + y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right). \tag{19}$$

Основний результат. Припустимо, що $\operatorname{rank} B_0 < d_1 + d_2$, тобто $P_{B_0} \neq 0$. Тоді достатню умову існування розв'язку слабконелінійної крайової задачі з імпульсним впливом (1) – (3) у критичному випадку першого порядку не можна застосувати. Розглянемо крайову задачу з імпульсним впливом (1) – (3) у випадку, який згідно з [2, 8 – 12] будемо називати *критичним випадком другого порядку*. Він характерний тим, що дає відповідь на питання про існування розв'язку вихідної імпульсної крайової задачі після аналізу крайової задачі, яка дозволяє знайти друге наближення, а саме:

$$\dot y(t) - \Phi(t)\int_a^b [A(s)y(s) + B(s)\dot y(s)]\,ds = p(t,\varepsilon), \tag{20}$$

$$\mathfrak{L}y(\cdot) = \varepsilon\left\{J(x_0(\cdot,c_r^0)) + \mathfrak{L}_1 y(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right\}, \tag{21}$$

де

$$p(t,\varepsilon) := \varepsilon\int_a^b K(t,s)Z\left(x_0\left(s,c_r^0\right) + y(s,\varepsilon),s,\varepsilon\right)ds.$$

Далі буде показано, що існування розв'язку вихідної крайової задачі (1) – (3) залежить від умов, отриманих за допомогою нелінійності та першого наближення до розв'язку задачі (20), (21).

Нехай, як і в попередньому випадку, $P_Q \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank} Q = n_2 < r_1$, але, на відміну від попереднього, $P_{B_0} \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank} B_0 < d_1 + d_2$.

Для спрощення записів припустимо, що в розкладах (15), (16) вектор-функції $R(\cdot,t,\varepsilon) \in C^1[y],\ R(y,\cdot,\varepsilon) \in C[t],\ R(y,t,\cdot) \in C[\varepsilon],\ R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \in C^1[y],\ R_1(y,\cdot) \in C[\varepsilon]$, такі, що виконуються умови

$$R(0,t,0) = 0, \qquad \frac{\partial R(0,t,\varepsilon)}{\partial y} = 0,$$

$$R_1(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial R_1(0,\varepsilon)}{\partial y} = 0.$$

Друге рівняння системи (17) буде розв'язним тоді та тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{B_0^*} g = 0, \tag{22}$$

і при цьому матиме розв'язок у вигляді прямої суми

$$c = c^{(0)} + c^{(1)}, \tag{23}$$

де

$$c^{(0)} = B_0^+ g = (I_r - P_{B_0}) c^{(0)} \in \mathbb{R}^r \ominus N(B_0),$$

$c^{(1)}$ — довільна r-вимірна константа із $N(B_0)$:

$$c^{(1)} = P_{B_0} c = P_{B_0} c^{(1)} \in N(B_0).$$

Враховуючи представлення (23), із третього рівняння операторної системи (17) отримаємо

$$y^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+ \mathfrak{L}_1 \{X_r(\cdot)\} P_{B_0} c^{(1)} + y^{(2)}(t,\varepsilon), \tag{24}$$

де вектор-функція $y^{(2)}(t,\varepsilon)$ має вигляд

$$y^{(2)}(t,\varepsilon) := \varepsilon \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+ \Big\{ J\left(x_0\left(\cdot, c_r^0\right)\right) +$$

$$+ \mathfrak{L}_1 \Big(X_r(\cdot)(I_r - P_{B_0}) c^{(0)} + \Big(\varepsilon \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+ \mathfrak{L}_1 X_r(\cdot) P_{B_0} c^{(1)} + y^{(2)}(\cdot,\varepsilon) \Big) \Big) +$$

$$+ R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \mathfrak{L} F_0(\cdot,\varepsilon) \Big\} + F_0(t,\varepsilon).$$

Враховуючи запис (24), із умов розв'язності (22) другого рівняння (17) приходимо до алгебраїчної системи для визначення $c^{(1)} \in N(B_0)$:

$$P_{B_0^*} \begin{bmatrix} P_{D_{d_1}^*} \displaystyle\int_a^b \left[A(s)\tilde{h}_2(s,\varepsilon) + B(s) h_2(s,\varepsilon) \right] ds \\ P_{Q_{d_2}^*} \left\{ J\left(x_0\left(\cdot, c_r^0\right)\right) + \mathfrak{L}_1 y^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_1\left(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right) - \mathfrak{L} F_0^2(\cdot,\varepsilon) \right\} \end{bmatrix} = 0,$$

$$P_{B_0^*} \begin{bmatrix} P_{D_{d_1}^*} \displaystyle\int_a^b \Big[A(s)\tilde{h}_2(s,\varepsilon) + B(s) h_2(s,\varepsilon) \Big] ds \\ P_{Q_{d_2}^*} \Big\{ J\left(x_0\left(\cdot, c_r^0\right)\right) + \mathfrak{L}_1 \Big[\varepsilon \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+ \mathfrak{L}_1 \{X_r(\cdot)\} P_{B_0} c^{(1)} + \\ + y^{(2)}(s,\varepsilon) \Big] + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \mathfrak{L} F_0^2(\cdot,\varepsilon) \Big\} \end{bmatrix} = 0,$$

$$h_2(t,\varepsilon) = \int\limits_a^b K(t,s) \Big[A_1(s) y^{(1)}(s,\varepsilon) + R(y(s,\varepsilon),s,\varepsilon) \Big] ds =$$

$$= \varepsilon \int\limits_a^b K(t,s)\left[A_1(s)\Psi_0(s)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1\{X_r(\cdot)\}P_{B_0}\right]ds c^{(1)}+$$

$$+\int\limits_a^b K(t,s)\big[A_1(s)y^{(2)}(s,\varepsilon)+R(y(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\big]ds,$$

$$\tilde{h}_2(t,\varepsilon)=\varepsilon\int\limits_a^t\int\limits_a^b K(\tau,s)\left[A_1(s)\Psi_0(s)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1\{X_r(\cdot)\}P_{B_0}\right]ds\,d\tau c^{(1)}+$$

$$+\int\limits_a^t\int\limits_a^b K(\tau,s)\big[A_1(s)y^{(2)}(s,\varepsilon)+R(y(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\big]dsd\tau,$$

$$P_{D^*_{d_1}}\int\limits_a^b\big[A(s)\tilde{h}_2(s,\varepsilon)+B(s)h_2(s,\varepsilon)\big]ds=$$

$$=\varepsilon B_1c^{(1)}+P_{D^*_{d_1}}\int\limits_a^b\Bigg[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(\tau,t)\big[A_1(t)y^{(2)}(t,\varepsilon)+R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\big]dtd\tau+$$

$$+B(s)\int\limits_a^b K(s,t)\big[A_1(t)y^{(2)}(t,\varepsilon)+R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\big]dt\Bigg]ds,$$

де $(d_1\times r)$-вимірна матриця B_1 має вигляд

$$B_1:=P_{D^*_{d_1}}\int\limits_a^b\Bigg[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(\tau,t)\left[A_1(t)\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1\{X_r(\cdot)\}P_{B_0}\right]dtd\tau+$$

$$+B(s)\int\limits_a^b K(s,t)\left[A_1(t)\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1\{X_r(\cdot)\}P_{B_0}\right]dt\Bigg]ds,$$

$$P_{Q^*_{d_2}}\left\{J\left(x_0\left(\cdot,c_r^0\right)\right)+\mathfrak{L}_1\left[\varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1\{X_r(\cdot)\}P_{B_0}c^{(1)}+y^{(2)}(s,\varepsilon)\right]+\right.$$

$$\left.+R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-\mathfrak{L}F_0^2(\cdot,\varepsilon)\right\}=$$

$$=\varepsilon B_2c^{(1)}+P_{Q^*_{d_2}}\left\{J\left(x_0\left(\cdot,c_r^0\right)\right)+\mathfrak{L}_1\left(y^{(2)}\left(\cdot,\varepsilon\right)\right)+R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-\mathfrak{L}F_0^2(\cdot,\varepsilon)\right\}$$

де $B_2:=P_{Q^*_{d_2}}\mathfrak{L}_1\left\{\Psi_0(\cdot)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1\left\{X_r(\cdot)\right\}P_{B_0}\right\}$ — $(d_2\times r)$-вимірна матриця.

Отримаємо алгебраїчну систему відносно невідомого вектора-констант $c^{(1)}$:

$$\varepsilon B_3c^{(1)}=-P_{B_0^*}g_1, \tag{25}$$

де g_1 — $((d_1+d_2)\times 1)$-вимірний векторний функціонал

$$g_1 := N \begin{bmatrix} \int_a^b \Big[A(s)\int_a^s\int_a^b K(\tau,t)\big[A_1(t)y^{(2)}(t,\varepsilon)+R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\big]dtd\tau + \\ +B(s)\int_a^b K(s,t)\big[A_1(t)y^{(2)}(t,\varepsilon)+R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\big]dt\Big]\, ds \\ \big\{J\left(x_0\left(\cdot,c_r^0\right)\right)+\mathfrak{L}_1\left(y^{(2)}(\cdot,\varepsilon)\right)+R_1\left(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right)-\mathfrak{L}F_0^2(\cdot,\varepsilon)\big\} \end{bmatrix},$$

а B_3 — $((d_1+d_2)\times r)$-вимірна матриця

$$B_3 := P_{B_0^*}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \tag{26}$$

матриця N побудована вище. Позначимо через P_{B_3} $(r\times r)$-вимірну матрицю (ортопроектор), що проектує r-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^r$ на нуль-простір $N(B_3)$ $((d_1+d_2)\times r)$-вимірної матриці B_3, а через $P_{B_3^*}$ — $((d_1+d_2)\times(d_1+d_2))$-вимірну матрицю (ортопроектор), що проектує (d_1+d_2)-вимірний простір $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$ на нуль-простір $N\left(B_3^*\right)$ $(r\times(d_1+d_2))$-вимірної матриці B_3^*. Тоді необхідна та достатня умова розв'язності системи (25) набирає вигляду

$$P_{B_3^*}P_{B_0^*}g_1 = 0. \tag{27}$$

При цій умові система (25) розв'язна відносно $\varepsilon c^{(1)} \in N(B_3)$:

$$\varepsilon c^{(1)} = -B_3^+ P_{B_0^*}g_1 + c^{(2)},$$

де $c^{(2)}$ — довільний вектор констант із $N(B_0)\cap N(B_3)$, $c^{(2)} = P_{B_3}c^{(1)} = P_{B_3}P_{B_0}c^{(1)} \in$ $\in N(B_0)\cap N(B_3)$.

Припустимо, що перетин нуль-просторів $N(B_0)$ та $N(B_3)$ нульовий, тоді (25) має єдиний розв'язок $(c^{(2)}=0)$.

Достатньою умовою виконання рівності (26) є вимога

$$P_{B_3^*}P_{B_0^*}N = 0.$$

Таким чином, при умовах

$$P_{B_0}\neq 0, \quad P_{B_0}P_{B_3}=0, \quad P_{B_3^*}P_{B_0^*}N=0, \tag{28}$$

від системи (17) приходимо до операторної системи

$$\begin{aligned} &y(t,\varepsilon) = X_r(t)(I_r-P_{B_0})c^{(0)} + \varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1\{X_r(\cdot)\}P_{B_0}c^{(1)} + y^{(2)}(t,\varepsilon), \\ &c^{(0)} = B_0^+ g, \qquad \varepsilon c^{(1)} = -B_3^+P_{B_0^*}g_1 + c^{(2)}, \\ &y^{(2)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\Big\{J(x_0(\cdot,c_r^0)) + \mathfrak{L}_1\Big(X_r(\cdot)(I_r-P_{B_0})c^{(0)} + \\ &\qquad + \Big(\varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1X_r(\cdot)P_{B_0}c^{(1)} + y^{(2)}(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big) + \end{aligned} \tag{29}$$

$$+ R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \mathfrak{L}F_0(\cdot,\varepsilon)\Big\} + F_0(t,\varepsilon).$$

У випадку $P_{B_0} \neq 0$ операторна система (17) не належить до класу систем, для розв'язання яких можна застосувати метод простих ітерацій. Виділяючи додаткову змінну, система (17) при умові (22) зводиться (регуляризується) до вигляду (29). При цьому r-вимірна векторна константа розкладається у пряму суму двох величин, які по-різному визначаються, і вимірність операторної системи (17) підвищується на $r = \dim N(Q)$. Це дає можливість за умов (28) замість $(2n+r)$-вимірної операторної системи (17) розглядати $2(n+r)$-вимірну операторну систему (29), для розв'язання якої можна застосовувати збіжний медот простих ітерацій.

Ітераційний алгоритм. По аналогії з [5], за допомогою методу простих ітерацій для операторної системи (29) побудуємо ітераційний процес для відшукання розв'язку $y(t,\varepsilon)$: $y(\cdot,\varepsilon) \in D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I),\ \dot{y}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b],\ y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],\ y(t,0) = 0,$ крайової задачі (20), (21). При першому наближенні $y_1^{(2)}(t,\varepsilon)$ до $y^{(2)}(t,\varepsilon)$ маємо

$$y_1^{(2)}(t,\varepsilon) = \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+(\delta_1(\varepsilon) - \mathfrak{L}F_1(\cdot,\varepsilon)) + F_1(t,\varepsilon),$$

де

$$\delta_1(\varepsilon) = \varepsilon J\left(x_0\left(\cdot, c_r^0\right), 0\right), \qquad F_1(t,\varepsilon) = \tilde{p}_1(t,\varepsilon) + \Psi_0(t)D^+\tilde{b}_1(\varepsilon),$$

$$\tilde{p}_1(t,\varepsilon) = \int_a^t p_1(s,\varepsilon)ds, \quad \tilde{b}_1(\varepsilon) = \int_a^b \left[A(s)\tilde{p}_1(s,\varepsilon) + B(s)p_1(s,\varepsilon)\right]ds,$$

$$p_1(t,\varepsilon) = \varepsilon \int_a^b K(t,s)Z\left(x_0\left(s, c_r^0\right), s, 0\right)ds.$$

Вектор-функція $y_1^{(2)}(t,\varepsilon)$ — це розв'язок крайової задачі

$$\dot{y}(t) - \Phi(t)\int_a^b \left[A(s)y(s) + B(s)\dot{y}(s)\right]ds = \varepsilon \int_a^b K(t,s)Z\left(x_0\left(s, c_r^0\right), s, 0\right)ds,$$

$$\mathfrak{L}y(\cdot) = \varepsilon J\left(x_0\left(\cdot, c_r^0\right), 0\right).$$

Такий розв'язок існує внаслідок вибору $c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ із системи рівнянь для породжуючих констант [5].

Перше наближення $y_1(t,\varepsilon)$ до шуканого розв'язку $y(t,\varepsilon)$ крайової задачі (20), (21) вважаємо рівним $y_1^{(2)}(t,\varepsilon)$: $y_1(t,\varepsilon) = y_1^{(2)}(t,\varepsilon)$.

Друге наближення $y_2^{(2)}(t,\varepsilon)$ до $y^{(2)}(t,\varepsilon)$ є розв'язком крайової задачі

$$\dot{y}_2(t) - \Phi(t)\int_a^b \left[A(s)y_2(s) + B(s)\dot{y}_2(s)\right]ds = p_3(t,\varepsilon), \tag{30}$$

$$\mathfrak{L}y_2(\cdot) = \delta_3(\varepsilon), \tag{31}$$

де

$$p_3(t,\varepsilon) := \varepsilon \int\limits_a^b K(t,s)\Big[Z\left(x_0(s,c_r^*),s,0\right) + A_1\left(X_r(s)(I_r - P_{B_0})c_1^{(0)} + y_1^{(2)}(s,\varepsilon)\right) +$$

$$+ R(y_1^{(2)}(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]ds,$$

$$\delta_3(\varepsilon) := \varepsilon\left\{J\big(x_0(s,c_r^*),0\big) + \mathfrak{L}_1\left(X_r(s)(I_r - P_{B_0})c_1^{(0)} + y_1^{(2)}(s,\varepsilon)\right) + R_1(y_1^{(2)}(s,\varepsilon),\varepsilon)\right\}$$

і яка згідно з теоремою 1 є розв’язною тоді та тільки тоді, коли виконуються умови

$$P_{D_{d_1}^*}\tilde{b}_3 = 0, \qquad P_{Q_{d_2}^*}(\delta_3 - \mathfrak{L}F_3(\cdot)) = 0, \tag{32}$$

де

$$\tilde{p}_3(t,\varepsilon) = \int\limits_a^t p_3(s,\varepsilon)ds, \quad \tilde{b}_3 = \int\limits_a^b \left[A(s)\tilde{p}_3(s,\varepsilon) + B(s)p_3(s,\varepsilon)\right]ds,$$

$$F_3(t) = \tilde{p}_3(t,\varepsilon) + \Psi_0(t)D^+\tilde{b}_3.$$

Підставляючи ці значення в умови (32), отримуємо

$$P_{D_{d_1}^*}\tilde{b}_3 = P_{D_{d_1}^*}\int\limits_a^b\left[A(s)\int\limits_a^s p_3(\tau,\varepsilon)d\tau + B(s)p_3(s,\varepsilon)\right]ds =$$

$$= \varepsilon P_{D_{d_1}^*}\int\limits_a^b\Bigg[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(t,\tau)\Big[Z\big(x_0(\tau,c_r^*),\tau,0\big)+$$

$$+ A_1X_r(\tau)(I_r - P_{B_0})c_1^{(0)} + A_1y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon) + R(y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big]d\tau dt+$$

$$+ B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)\Big[Z\big(x_0(\tau,c_r^*),\tau,0\big)+$$

$$+ A_1X_r(\tau)(I_r - P_{B_0})c_1^{(0)} + A_1y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon) + R\left(y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon\right)\Big]d\tau\Bigg]ds = 0,$$

$$P_{Q_{d_2}^*}(\delta_3 - \mathfrak{L}F_3(\cdot)) = P_{Q_{d_2}^*}\Bigg(\varepsilon\bigg\{J(x_0(s,c_r^*),0) + \mathfrak{L}_1\left(X_r(s)(I_r - P_{B_0})c_1^{(0)} + y_1^{(2)}(s,\varepsilon)\right) +$$

$$+ R_1(y_1^{(2)}(s,\varepsilon),\varepsilon)\bigg\} - \mathfrak{L}(\tilde{p}_3(\cdot,\varepsilon) + \Psi_0(\cdot)D^+\tilde{b}_3)\Bigg) =$$

$$= \varepsilon P_{Q^*_{d_2}} \Bigg(\Bigg\{ J\big(x_0(s, c^*_r), 0\big) + \mathfrak{L}_1 \left(X_r(s)(I_r - P_{B_0})c_1^{(0)} + y_1^{(2)}(s, \varepsilon) \right) +$$

$$+ R_1 \left(y_1^{(2)}(s, \varepsilon), \varepsilon \right) \Bigg\} - \mathfrak{L} \Bigg(\int\limits_a^s \int\limits_a^b K(t, \tau) \Bigg[Z\big(x_0(\tau, c^*_r), \tau, 0\big) +$$

$$+ A_1 X_r(\tau)(I_r - P_{B_0})c_1^{(0)} + A_1 y_1^{(2)}(\tau, \varepsilon) + R \left(y_1^{(2)}(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon \right) \Bigg] d\tau dt +$$

$$+ \Psi_0(\cdot) D^+ \int\limits_a^b \Bigg[A(s) \int\limits_a^s \int\limits_a^b K(t, \tau) \Bigg[Z\big(x_0(\tau, c^*_r), \tau, 0\big) +$$

$$+ A_1 X_r(\tau)(I_r - P_{B_0})c_1^{(0)} + A_1 y_1^{(2)}(\tau, \varepsilon) + R \left(y_1^{(2)}(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon \right) \Bigg] d\tau dt +$$

$$+ B(s) \int\limits_a^b K(s, \tau) \Bigg[Z\left(x_0(\tau, c^*_r), \tau, 0\right) + A_1 X_r(\tau)(I_r - P_{B_0})c_1^{(0)} +$$

$$+ A_1 y_1^{(2)}(\tau, \varepsilon) + R(y_1^{(2)}(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \Bigg] d\tau \Bigg] ds \Bigg) \Bigg) = 0,$$

а також алгебраїчну систему для визначення $c_1^{(0)} \in \mathbb{R}^r$:

$$B_0 c_1^{(0)} = g_3, \tag{33}$$

де $((d_1 + d_2) \times r)$-вимірна матриця B_0 має вигляд

$$B_0 := \left[\begin{array}{c} P_{D^*_{d_1}} \displaystyle\int_a^b \Bigg[A(s) \int_a^s \int_a^b K(t, \tau) A_1 X_r(\tau)(I_r - P_{B_0}) d\tau dt + \\ \qquad + B(s) \displaystyle\int_a^b K(s, \tau) A_1 X_r(\tau)(I_r - P_{B_0}) d\tau \Bigg] ds \\ P_{Q^*_{d_2}} \Bigg(\left\{ \mathfrak{L}_1 \left(X_r(s)(I_r - P_{B_0}) \right) \right\} - \mathfrak{L} \Bigg(\displaystyle\int_a^s \int_a^b K(t, \tau) \left[A_1 X_r(\tau)(I_r - P_{B_0}) \right] d\tau dt + \\ + \Psi_0(\cdot) D^+ \displaystyle\int_a^b \Bigg[A(s) \int_a^s \int\limits_a^b K(t, \tau) \left[A_1 X_r(\tau)(I_r - P_{B_0}) \right] d\tau dt + \\ + B(s) \displaystyle\int_a^b K(s, \tau) \left[A_1 X_r(\tau)(I_r - P_{B_0}) \right] d\tau \Bigg] ds \Bigg) \Bigg) \end{array} \right],$$

$((d_1 + d_2) \times 1)$-вимірний вектор-стовпчик має вигляд

$$g_3 := N \left[\begin{array}{l} -\int_a^b \Big[A(s) \int_a^s \int_a^b K(t,\tau) \Big[Z\big(x_0(\tau, c_r^*), \tau, 0\big) + A_1 y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon) + R\Big(y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon\Big)\Big] d\tau dt + \\ \qquad + B(s) \int_a^b K(s,\tau) \Big[Z\big(x_0(\tau,c_r^*),\tau,0\big) + A_1 y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon) + R\left(y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon\right)\Big] d\tau \Big] ds \\ \Big\{ J\big(x_0(s,c_r^*),0\big) + \mathfrak{L}_1\left(y_1^{(2)}(s,\varepsilon)\right) + R_1\left(y_1^{(2)}(s,\varepsilon),\varepsilon\right)\Big\} - \\ \quad - \mathfrak{L}\Bigg(\int_a^s \int_a^b K(t,\tau) \Bigg[Z\big(x_0(\tau,c_r^*),\tau,0\big) + A_1 y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon) + \\ \quad + R\left(y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon\right)\Bigg] d\tau dt + \Psi_0(\cdot) D^+ \int_a^b \Bigg[A(s) \int\limits_a^s \int\limits_a^b K(t,\tau) \Bigg[Z\big(x_0(\tau,c_r^*),\tau,0\big) + \\ \quad + A_1 y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon) + R\left(y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon\right)\Bigg] d\tau dt + \\ \quad + B(s) \int_a^b K(s,\tau) \Big[Z\big(x_0(\tau,c_r^*),\tau,0\big) + A_1 y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon) + R\Big(y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon\Big)\Big] d\tau \Bigg] ds \Bigg) \end{array} \right].$$

Існування розв'язку $y_2^{(2)}(t,\varepsilon) = y^{(2)}(t,\varepsilon)$ крайової задачі (30), (31) забезпечується вибором векторної константи $c_1^{(0)} \in \mathbb{R}^r$ із умови розв'язності даної задачі:

$$P_{B_0^*} g_3 = 0, \tag{34}$$

але, враховуючи вигляд вектор-функції $g_3 \in R^{d_1+d_2}$, умову (34) досить складно перевірити, тому для існування розв'язку $c_1^{(0)}$ системи (33) достатньо, щоб виконувалася умова

$$P_{B_0^*} N = 0.$$

Тоді система (33) буде мати розв'язок $c_1^{(0)} = B_0^+ g_3$, що є першим наближенням до $c^{(0)} \in \mathbb{R}^r$.

Розв'язок $y_2^{(2)}(t,\varepsilon)$ крайової задачі (30), (31) визначається таким чином: $y_2^{(2)}(t,\varepsilon) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} P_{Q_r} c_1^{(0)} + \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+(\delta_3(\cdot) - \mathfrak{L} F_3(\cdot)) + F_3(t)$. Тоді друге наближення $y^{(2)}(t,\varepsilon)$ до розв'язку крайової задачі (20), (21) має вигляд

$$y^{(2)}(t,\varepsilon) = X_r(t)\,(I_r - P_{B_0})\,c_1^{(0)} + y_2^{(2)}(t,\varepsilon).$$

З операторної системи (29) для визначення розв'язку $y(t,\varepsilon)$ крайової задачі (13), (14) отримаємо ітераційний процес

$$\varepsilon c_{k-1}^{(1)} = -B_3^+ P_{B_0^*} g_{k+2}, \tag{35}$$

$$c_k^{(0)} = B_0^+ g_{k+2},$$

$$y_{k+1}^{(2)}(t,\varepsilon) = \varepsilon \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+ \Bigg(J\big(x_0(s,c_r^*),0\big) + \mathfrak{L}_1 \Bigg(X_r(s)(I_r - P_{B_0}) c_k^{(0)} + $$

$$+ \varepsilon \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+ \mathfrak{L}_1 X_r(\cdot) P_{B_0} c_{k-1}^{(1)} + y_k^{(2)}(s,\varepsilon)\Bigg) + R_1\big(y_k^{(2)}(s,\varepsilon),\varepsilon\big)\Bigg) +$$

$$+\varepsilon\int\limits_a^t\int\limits_a^b K(\tau,s)\Bigg[Z\left(x_0(s,c_r^*),s,0\right)+A_1\Bigg(X_r(s)(I_r-P_{B_0})c_k^{(0)}+$$

$$+\varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1X_r(\cdot)P_{B_0}c_{k-1}^{(1)}+y_k^{(2)}(s,\varepsilon)\Bigg)+R\left(y_k^{(2)}(s,\varepsilon),s,\varepsilon\right)\Bigg]dsd\tau+$$

$$+\varepsilon\Psi_0(t)D^+\int\limits_a^b\Bigg[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(\tau,t)\Bigg[Z\left(x_0(t,c_r^*),t,0\right)+A_1\Bigg(X_r(t)(I_r-P_{B_0})c_k^{(0)}+$$

$$+\varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1X_r(\cdot)P_{B_0}c_{k-1}^{(1)}+y_k^{(2)}(t,\varepsilon)\Bigg)+R(y_k^{(2)}(t,\varepsilon),s,\varepsilon)\Bigg]dtd\tau+$$

$$+B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)\Bigg[Z\left(x_0(s,c_r^*),\tau,0\right)+A_1\Bigg(X_r(\tau)(I_r-P_{B_0})c_k^{(0)}+$$

$$+\varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1X_r(\cdot)P_{B_0}c_{k-1}^{(1)}+y_k^{(2)}(\tau,\varepsilon)\Bigg)+R\big(y_k^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon\big)\Bigg]d\tau\Bigg]ds,$$

$$y_{k+1}(t,\varepsilon)=\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}P_{Q_r}c_k^{(0)}+\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}P_{Q_r}c_{k-1}^{(1)}+y_{k+1}^{(2)}(t,\varepsilon),$$

$$k=0,1,2,\ldots,\quad y_0(t,\varepsilon)=y_0^{(2)}(t,\varepsilon)=0,$$

$((d_1+d_2)\times 1)$ — вимірний вектор-стовпчик

$$g_{k+2}:=N\left[\begin{array}{l}
-\int_a^b\Bigg[A(s)\int_a^s\int_a^b K(t,\tau)\Bigg[Z\big(x_0(\tau,c_r^*),\tau,0\big)+\\
\qquad+A_1y_k^{(2)}(\tau,\varepsilon)+R\big(y_k^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon\big)\Bigg]d\tau dt+\\
\qquad+B(s)\int_a^b K(s,\tau)\Bigg[Z\big(x_0(\tau,c_r^*),\tau,0\big)+A_1y_k^{(2)}(\tau,\varepsilon)+R\big(y_k^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon\big)\Bigg]d\tau\Bigg]ds\\
\Big\{J\big(x_0(s,c_r^*),0\big)+\mathfrak{L}_1\big(y_k^{(2)}(s,\varepsilon)\big)+R_1\big(y_k^{(2)}(s,\varepsilon),\varepsilon\big)\Big\}-\\
\qquad-\mathfrak{L}\Bigg(\int_a^s\int_a^b K(t,\tau)\Bigg[Z\big(x_0(\tau,c_r^*),\tau,0\big)+\\
\qquad+A_1y_k^{(2)}(\tau,\varepsilon)+R\big(y_k^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon\big)\Bigg]d\tau dt+\\
\qquad+\Psi_0(\cdot)D^+\int_a^b\Bigg[A(s)\int_a^s\int_a^b K(t,\tau)\Bigg[Z\left(x_0(\tau,c_r^*),\tau,0\right)+\\
\qquad+A_1y_k^{(2)}(\tau,\varepsilon)+R\big(y_k^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon\big)\Bigg]d\tau dt+\\
\qquad+B(s)\int_a^b K(s,\tau)\Bigg[Z\big(x_0(\tau,c_r^*),\tau,0\big)+A_1y_k^{(2)}(\tau,\varepsilon)+R\big(y_k^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon\big)\Bigg]d\tau\Bigg]ds\Bigg)
\end{array}\right].$$

Збіжність ітераційного процесу (35) доводиться методом мажоруючих рівнянь Ляпунова, схема якого описана в [12]. Для встановлення факту існування розв'язку крайової задачі з імпульсним впливом у фіксований момент часу (1) – (3) достатньо звести її до внутрішньої крайової задачі (1), (5) і встановити умови зведення даної вже крайової задачі до операторної (29). Таким чином, справедливе таке твердження.

Теорема 4. *Нехай слабконелінійна крайова задача для системи інтегро-диференціальних рівнянь із імпульсним впливом (1) – (3) задовольняє вказані вище умови так, що має місце критичний випадок* ($\operatorname{rank} Q = n_2 \leq r_1$) *і відповідна породжуюча крайова задача з імпульсним впливом (6), (7) при умовах (8) і лише при них має r-параметричну сім'ю породжуючих розв'язків (9). Нехай також*

$$P_{B_0} \neq 0, \qquad P_{B_0} P_{B_3} = 0.$$

Тоді для кожного значення вектора $c_r = c_r^* \in R^r$ $(r = r_1 - \operatorname{rank} Q,\ r_1 = m + n - \operatorname{rank} D)$, що задовольняє систему рівнянь для породжуючих констант, при виконанні умови

$$P_{B_3^*} P_{B_0^*} N = 0,$$

внутрішня крайова задача (18), (19) має єдиний розв'язок $y = y(t, \varepsilon)$:

$$y(\cdot, \varepsilon) \in D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I), \quad \dot{y}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b], \quad y(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в нуль. Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного на $[0, \varepsilon_0]$ ітераційного процесу (35). Крайова задача з імпульсним впливом (1) – (3) має при цьому єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$:

$$x(\cdot, \varepsilon) \in D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I), \quad \dot{x}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b], \quad x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],$$

який перетворюється у породжуючий $x_0(t, c_r^0)$. Цей розв'язок визначається за допомогою ітераційного процесу (35) і формули

$$x_k(t, \varepsilon) = x_0\left(t, c_r^0\right) + y_k(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Література

1. *Самойленко А. М., Бойчук О. А., Кривошея С. А.* Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1576 – 1579.
2. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – Utrecht, Boston: VSP, 2004. – 317 p.; 2nd ed. – Walter de Gruyter GmbH, 2016. – 314 p.
3. *Головацька І. А.* Слабконелінійні системи інтегро-диференціальних рівнянь // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2013. – **1**. – С. 71 – 74.
4. *Бойчук О. А., Головацька І. А.* Слабконелінійні системи інтегро-диференціальних рівнянь // Нелін. коливання. – 2013. – **16**, № 3. – С. 314 – 321.
5. *Bondar I., Gromyak M., Kozlova N.* Weakly nonlinear impulsive boundary-value problems for systems of integrodifferential equations // Miskolc Math. Notes. – 2016. – **17**, № 1. – P. 69 – 84.
6. *Zettl A.* Adjoint and self-adjoint boundary value problems with interface conditions // SIAM J. Appl. Math. – 1968. – **16**, № 4. – P. 851 – 859.
7. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.

8. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.

9. *Бойчук О. А., Покутний О. О.* Обмежені розв'язки лінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Нелін. коливання. – 2006. – **9**, № 1. – С. 3 – 14; ***English translation:*** Nonlinear Oscil. – 2006. – **9**, № 1. – P. 1 – 12.

10. *Boichuk A., Diblik J., Khusainov D., Ruzickova M.* Boundary-value problems for weakly nonlinear delay differential systems // Abstr. Appl. Anal. – 2011. – Article ID 631412. – 19 p.

11. *Самойленко А. М., Перестюк М. О.* Диференціальні рівняння з імпульсною дією. – Київ: Вища шк., 1987. – 287 с.

12. *Бойчук А. А.* Конструктивні методи аналізу крайових задач. – Київ: Наук. думка, 1990. – 96 с.

Одержано 20.02.19,
після доопрацювання — 01.05.19