УДК 517.9

УМОВИ ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ НЕТЕРОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

М. Лангерова*

Ун-т м. Жиліно, Словаччина

Т. Шовкопляс

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, Київ, просп. Акад. Глушкова, 2, корп. 6

We consider a weakly nonlinear boundary-value problem for a system of second order ordinary differential equations. We find a sufficient condition for existence of at least one solution of such a problem, and propose a convergent iteration procedure for finding the sought solution.

Розглянуто слабконелінійну крайову задачу для систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Знайдено достатню умову існування хоча б одного розв'язку такої задачі та запропоновано збіжний ітераційний алгоритм відшукання її розв'язку.

Будемо розглядати нетерову крайову задачу

$$(P(t)x'(t))' - Q(t)x(t) = f(t) + \varepsilon X(x(t,\varepsilon)), t, \varepsilon), \quad t \in [a,b],$$
$$lx(\cdot) = \alpha + \varepsilon J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \quad \alpha \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

де $x = x(t,\varepsilon)) = \mathrm{col}(x_1(t,\varepsilon)),\ldots,x_n(t,\varepsilon)))$ — n-вимірна двічі неперервно диференційовна на $[a,b]$ вектор-функція: $x(\cdot,\varepsilon)) \in C^2([a,b])$; $P(t), Q(t)$ — квадратні $(n\times n)$-вимірні матриці. Компоненти матриці $P(t)$ — дійсні неперервно диференційовні функції: $P(t) \in C^1[a,b]$, $\det P(t) \neq 0$, $t \in [a,b]$; компоненти матриці $Q(t)$ — дійсні неперервні на відрізку $[a,b]$ функції: $Q(t) \in C[a,b]$; $f(t) = \mathrm{col}(f_1(t), f_2(t),\ldots,f_n(t))$ — n-вимірна неперервна вектор-функція: $f(t) \in C[a,b]$; l — лінійний обмежений векторний функціонал, визначений на просторі n-вимірних неперервних на відрізку $[a,b]$ вектор-функцій: $l = \mathrm{col}(l_1,l_2,\ldots,l_m)$; $l : C[a,b] \to R^m$, $-\infty < a \leq b < +\infty$, $\alpha \in R^m$.

Відповідна породжуюча ($\varepsilon = 0$) для (1) крайова задача має вигляд

$$(P(t)x'(t))' - Q(t)x(t) = f(t), \quad t \in [a,b], \tag{2}$$

$$lx(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{3}$$

Нелінійна по x n-вимірна вектор-функція $X(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ є неперервно диференційовною по x в околі розв'язку x_0 породжуючої крайової задачі (2), (3): $X(\cdot,t,\varepsilon) \in C^1[\|x -$

* Підтримано грантом VEGA 1/3238/06 Словацької грантової агенції.

$-x_0\| \leq \delta]$, неперервна по $t : X(x,\cdot,\varepsilon) \in C[a,b]$, неперервна по $\varepsilon : X(x,t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$. Нелінійний обмежений m-вимірний вектор-функціонал $J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ є неперервно диференційовним по x у розумінні Фреше і неперервним по ε в околі породжуючого розв'язку; ε — малий невід'ємний параметр.

Позначимо через $X(t) = [X_1(t)X_2(t)]$ $(n \times 2n)$-вимірну фундаментальну матрицю лінійної однорідної $f(t) = 0$ системи (2), $X_i(t)$ — $(n \times n)$-вимірні матриці, вектор-стовпчики яких є лінійно незалежними розв'язками однорідної $f(t) = 0$ системи (2), $D := lX(\cdot)$ — $(m\times 2n)$-вимірна матриця, утворена дією функціонала на фундаментальну матрицю $X(t)$; P_D — $(2n\times 2n)$-вимірна матриця-ортопроектор, що проектує простір R^{2n} на нуль-простір $N(D) = P_D R^{2n}$ матриці D, P_{D^*} — $(m \times m)$-вимірна матриця-ортопроектор, що проектує простір R^m на нуль-простір $N(D^*) = P_{D^*} R^m$; матриця D^* є транспонованою до матриці D. Для породжуючої крайової задачі має місце така теорема [1 – 3].

Теорема 1. *Нехай* $\operatorname{rank} D = n_1 \leq \min\{2n, m\}$, *тоді однорідна* $(f(t) = 0, \alpha = 0)$ *крайова задача (2), (3) має* r $(r = 2n - n_1)$ *і лише* r *лінійно незалежних розв'язків. Неоднорідна крайова задача (2), (3) розв'язна тоді і тільки тоді, коли вектор-функція* $f(t) \in C[a,b]$ *і векторна стала* $\alpha \in \mathbb{R}^m$ *задовольняють умову*

$$P_{D_d^*}\left[\alpha - l\int\limits_a^b K(\cdot,s)f(s)\,ds\right] = 0, \quad d = m - n_1.$$

При виконанні цієї умови породжуюча крайова задача (2), (3) має r*-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків вигляду*

$$x = x_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + (Gf)(t) + X(t)D^+\alpha \quad \forall c_r \in R^r, \quad t \in [a,b],$$

де $(Gf)(t)$, $t \in [a,b]$, — *узагальнений оператор Гріна, який діє на довільну вектор-функцію* $f(t) \in C[a,b]$ *таким чином:*

$$(Gf)(t) \stackrel{\text{df}}{=} \int\limits_a^b K(t,s)f(s)\,ds - X(t)D^+ l\int\limits_a^b K(\cdot,s)f(s)\,ds.$$

$K(t,s)$ — $(n \times n)$-вимірна матриця, визначена так само, як і в [3, 4]; $X_r(t) = X(t)\cdot P_{D_r}$, P_{D_r} — $(2n\times r)$-вимірна матриця, яка складається з r лінійно незалежних стовпчиків матриці P_D; $P_{D_d^*}$ — $(d \times m)$-вимірна матриця, яка складається з повної системи d лінійно незалежних рядків матриці P_{D^*}, D^+ — $(2n \times m)$-вимірна матриця, псевдообернена за Муром – Пенроузом до матриці D [1, 2].

Достатня умова існування розв'язків нелінійної крайової задачі (1) визначається наступним твердженням.

Теорема 2. *Нехай для нелінійної крайової задачі (1) має місце критичний випадок, тобто* $\operatorname{rank} D = n_1 < m$ *та крайова задача (2), (3) має* r*-параметричну сім'ю породжуючих розв'язків*

$$x_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + (Gf)(t) + X(t)D^+\alpha \quad \forall c_r \in R^r.$$

Тоді для кожного значення вектора $c_r = c_r^0 \in R^r$, *що задовольняє рівняння*

$$F(c_r^0) = P_{D_d^*}\left\{J(x_0(\cdot, c_r^0), 0) - l\int_a^b K(\cdot, s)X(x_0(s, c_r^0), s, 0)\,ds\right\} \equiv 0, \quad d = m - n_1, \tag{4}$$

при виконанні умови

$$\operatorname{rank}\left[B_0 = P_{D_d^*}\left\{l_1 X_r(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot, s)A_1(s)X_r(s)\,ds\right\}\right] = d$$

крайова задача (1) має хоча б один розв'язок $x(t,\varepsilon) : x(\cdot,\varepsilon) \in C^2[a,b]$, $x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, *який при* $\varepsilon = 0$ *перетворюється в породжуючий розв'язок*

$$x_0(t, c_r^0) = X_r(t)c_r^0 + (Gf)(t) + X(t)D^+\alpha$$

з векторною сталою $c_r^0 \in R^r$, *що задовольняє рівняння (4), та визначається за допомогою рівномірно збіжного на* $[0,\varepsilon_0]$ *ітераційного процесу*

$$c_k = -B_0^+ P_{D_d^*}\left\{l_1 z_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_0(z_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l\int_a^b K(\cdot,s)\Big[A_1(s)z_k^{(1)}(s,\varepsilon) + R(z_k(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]ds\right\},$$

$$z_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\left\{G(X\left(x_0(s,c_r^0),s,0\right) + A_1(s)\left(X_r(s)c_k + z_k^{(1)}(s,\varepsilon)\right) + R\left(z_k(s,\varepsilon),s,\varepsilon\right)\right\}(t) +$$
$$+ \varepsilon X(t)D^+ J\left(x_0(\cdot,c_r^0),0\right) + l_1\left(X_r(\cdot)c_k + z_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\right) + R_0\left(z_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right), \tag{5}$$

$$z_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_k + z_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon), \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

$$x_k(t,\varepsilon) = x_0(t,c_r^0) + z_k(t,\varepsilon), \quad k = 0,1,2,\ldots, \quad z_0(t,\varepsilon) = z_0^{(1)}(t,\varepsilon) = 0.$$

Доведення. В крайовій задачі (1) виконаємо заміну змінних

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t,c_r^0) + z(t,\varepsilon), \quad c_r^0 \in R^r, \tag{6}$$

де вектор-функція $x_0(t,c_r^0)$ — розв'язок породжуючої крайової задачі (2), (3) з векторною сталою $c_r^0 \in R^r$, що задовольняє рівняння (4). Врахувавши, що вектор-функція $x_0(t,c_r^0)$ є розв'язком породжуючої крайової задачі (2), (3), від крайової задачі (1) перейдемо до задачі

$$\begin{gathered}(P(t)z(t,\varepsilon)')' - Q(t)z(t,\varepsilon) = \varepsilon X(x_0(t,c_r^0) + z(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \quad t \in [a,b],\\ lz(t,\varepsilon) = \varepsilon J(x_0(\cdot,c_r^0) + z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon).\end{gathered} \tag{7}$$

Врахувавши зазначені вище умови на нелінійності $X(x,t,\varepsilon)$, $J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$, розкладемо їх в ряди в околі точки $z=0, \varepsilon=0$:

$$X(x_0(t,c_r^0)+z,t,\varepsilon) = X(x_0(t,c_r^0),t,0)+A_1(t)z+R(z,t,\varepsilon),$$

$$A_1(t) = \left.\frac{\partial X(x,t,0)}{\partial x}\right|_{x=x_0(t,c_r^0)}, \quad R(0,t,0)=0, \quad \frac{\partial R(0,t,0)}{\partial z}=0, \tag{8}$$

$$J(x_0(t,c_r^0+z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) = J(x_0(t,c_r^0),0)+l_1z(\cdot,\varepsilon)+R_0(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),$$

$l_1z(\cdot,\varepsilon)$ — лінійна частина векторного функціонала $J(x_0(\cdot,c_r^0)+z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$,

$$R_0(0,0)=0, \quad \frac{\partial R_0(0,0)}{\partial z}=0.$$

У крайовій задачі (7) нелінійності будемо розглядати як неоднорідності та застосуємо до цієї задачі теорему 1. Тоді для розв'язку $z(t,\varepsilon)$ отримаємо

$$z(t,\varepsilon) = X_r(t)c+z^{(1)}(t,\varepsilon),$$

де сталий вектор $c=c(\varepsilon)\in R^r$ є невідомим і визначається з умови розв'язності крайової задачі (7), тобто з умови

$$P_{D_d^*}\left\{J(x_0\left(\cdot,c_r^0\right)+z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-l\int\limits_a^b K(\cdot,s)X(x_0(s,c_r^0)+z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\,ds\right\}=0, \tag{9}$$

а невідома вектор-функція $z^{(1)}(t,\varepsilon)$ — як частинний розв'язок задачі (7):

$$z^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon XD^+J\left(x_0(\cdot,c_r^0)+z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right)+\varepsilon G\left(X(x_0(s,c_r^0)+z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\right)(t).$$

Розклади (8) нелінійностей $X(x_0+z,t,\varepsilon)$ та $J(x_0+z,\varepsilon)$ підставимо в рівність (9):

$$P_{D_d^*}\Bigg\{J(x_0(\cdot,c_r^0),0)+l_1z(\cdot,\varepsilon)+R_0(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-l\int\limits_a^b K(\cdot,s)\Big[X(x_0(s,c_r^0),s,0)+$$

$$+A_1(s)z(s,\varepsilon)+R(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]\,ds\Bigg\}=0. \tag{10}$$

Тоді, врахувавши (9), від (10) перейдемо до рівності

$$P_{D_d^*}\Bigg\{J(x_0(\cdot,c_r^0),0)+l_1X_r(\cdot)c+l_1z^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R_0(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-l\int\limits_a^b K(\cdot,s)(X(x_0(s,c_r^0),s,0)+$$

$$+A_1(s)\left[X_r(s)c+z^{(1)}(s,\varepsilon)+R(z,s,\varepsilon)\right]\,ds\Bigg\}=0. \tag{11}$$

Таким чином, оскільки векторна стала $c_r^0 \in R^r$ задовольняє рівняння (4), (11) можна записати у вигляді

$$B_0 c = -P_{D_d^*}\left\{ l_1 z^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_0(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l\int_a^b K(\cdot,s)A_1(s)(z^{(1)}(s,\varepsilon) + R(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon))\,ds \right\}, \tag{12}$$

де

$$B_0 = P_{D_d^*}\left\{ l_1 X_r(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot,s)A_1(s)X_r(s)\,ds \right\}$$

— $(d \times r)$-вимірна матриця.

Нехай P_{B_0} — $(r \times r)$-вимірна матриця-ортопроектор, $P_{B_0} : R^r \longrightarrow N(B_0)$, $N(B_0)$ — нуль-простір матриці B_0, а $P_{B_0^*}$ — $(d \times d)$-вимірна матриця-ортопроектор, $P_{B_0^*} : R^d \longrightarrow$ $\longrightarrow B_0^*$, B_0^* — $(r \times d)$-вимірна матриця, транспонована до матриці B_0. У цьому випадку рівняння (12) розв'язне тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$P_{B_0^*}P_{D_d^*}\left\{ l_1 z^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_0(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell\int_a^b K(\cdot,s)[A_1(s)z^{(1)}(s,\varepsilon) + R(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)]\,ds \right\} = 0. \tag{13}$$

Якщо $P_{B_0^*} = 0$, то умова (13) завжди виконується. Тому при виконанні однієї з еквівалентних умов

$$P_{B_0^*} = 0 \quad \text{або} \quad \operatorname{rank} B_0 = d \tag{14}$$

рівняння (12) розв'язне і один з його розв'язків можна подати у вигляді

$$c = -B_0^+ P_{D_d^*}\left\{ l_1 z^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_0(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l\int_a^b K(\cdot,s)[A_1(s)z^{(1)}(s,\varepsilon) + R(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)]\,ds \right\}.$$

Тут матриця $B_0^+ \in (r \times d)$-вимірною псевдооберненою за Муром – Пенроузом до матриці B_0.

Отже, при умові (14) на множині двічі неперервно диференційовних по змінній $t \in$ $\in [a,b]$ вектор-функцій $z(t,\varepsilon)$, $z(t,0) = 0$, крайова задача (7) еквівалентна операторній системі

$$z(t,\varepsilon) = X_r(t) + z_1^{(1)}(t,\varepsilon), \tag{15}$$

$$c = -B_0^+ P_{D_d^*}\left\{ l_1 z^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_0(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l\int_a^b K(\cdot,s)(A_1(s)z^{(1)}(s,\varepsilon) + R(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon))\,ds \right\},$$

$$z_1^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\left[X(x_0(s,c_r^*,s,0)) + A_1(s)(X_r(s)c + z^{(1)}(s,\varepsilon))\right] + R(z^{(1)}(s,\varepsilon),s,\varepsilon)(t)+$$

$$+\varepsilon X(t)D^+\left[J(x_0(\cdot,c_r^*),0) + l_1X_r(\cdot)c + z^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_0(z^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right].$$

Відомо, що для розв'язання операторної системи (15) можна застосувати метод простих ітерацій [1, 2].

Ітераційний алгоритм. Перше наближення $z_1^{(1)}(t,\varepsilon)$ до $z^{(1)}(t,\varepsilon)$ покладемо таким:

$$z_1^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon(G(X(x_0(s,c_r^0),s,0)))(t) + \varepsilon X(t)D^+J(x_0(\cdot,c_r^0),0).$$

Вектор-функція $z_1^{(1)} = z_1^{(1)}(t,\varepsilon)$ є частинним розв'язком крайової задачі

$$(P(t)z_1'(t))' - Q(t)z_1(t) = \varepsilon X(x_0(t,c_r^0),t,0), \quad lz_1(\cdot) = \varepsilon J(x_0(\cdot,c_r^0),0).$$

Цей розв'язок існує завдяки вибору сталої $c_r^0 \in R^r$ з рівняння (4). Вважаємо, що перше наближення $z_1(t,\varepsilon)$ до шуканого розв'язку $z(t,\varepsilon)$ крайової задачі (7) дорівнює $z_1^{(1)}(t,\varepsilon)$. Друге наближення

$$z_2^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\left\{G(X(x_0(s,c_r^0),s,0) + A_1(s)(X_r(s)c_1 + z_1^{(1)}(s,\varepsilon)) + R(z_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon))\right\}(t)+$$

$$+\varepsilon X(t)D^+\left\{J(x_0(\cdot,c_r^0),0) + l_1(X_r(\cdot)c_1 + z_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon)) + R_0(z_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right\}.$$

Вектор-функція $z_2^{(1)}(t,\varepsilon)$ є частинним розв'язком крайової задачі

$$(P(t)z_2'(t))' - Q(t)z_2(t) = \varepsilon\left\{X(x_0(t,c_r^0),t,0) + A_2(t)(X_r(t)c_1 + z_1^{(1)}(t,\varepsilon)) + R(z_1,t,\varepsilon)\right\},$$

$$lz_2(\cdot) = \varepsilon\left\{J(x_0(\cdot,c_r^0),0) + l_1[X_r(\cdot)c_1 + z_1^{(1)}] + R_0(z_1,\varepsilon)\right\},$$

при цьому необхідна та достатня умова розв'язності останньої задачі має вигляд

$$B_0c_1 + P_{D_d^*}\left\{l_1z_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_0(z_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l\int_a^b K(\cdot,s)[A_1(s)z_1^{(1)}(s,\varepsilon) + R(z_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon)]ds\right\} = 0. \tag{16}$$

Перше наближення c_1 до $c(\varepsilon)$ з (16) є таким:

$$c_1 = -B_0^+P_{D_d^*}\left\{l_1z_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_0(z_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l\int_a^b K(\cdot,s)\left[A_1(s)z_1^{(1)}(s,\varepsilon) + R(z_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\right]ds\right\}.$$

Умова (14) гарантує розв'язність алгебраїчної системи (16) відносно $c_1 \in R^r$. Отже, друге наближення $z_2(t,\varepsilon)$ до шуканого розв'язку $z(t,\varepsilon)$ запишемо таким чином:

$$z_2(t,\varepsilon) = X_r(t)c_1 + z_2^{(1)}(t,\varepsilon).$$

Продовживши ітераційний процес далі, отримаємо, що наближення $z_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon)$ до $z^{(1)}(t,\varepsilon)$ визначається за формулою

$$z_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\left\{G\left[X(x_0(s,c_r^0),s,0) + A_1(s)(X_r(s)c_k + z_k^{(1)}(s,\varepsilon)) + R(z_k(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\right]\right\}(t) +$$

$$+\varepsilon X(t)D^+(J(x_0(\cdot,c_r^0),0) + l_1[X_r(\cdot)c_k + z_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + R_0(z_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)),$$

як частинний розв'язок крайової задачі

$$(P(t)z_{k+1}'(t))' - Q(t)z_{k+1}(t) = \varepsilon\left\{X(x_0(t,c_r^0),t,0) + A_1(t)(X_r(t)c_k + z_k^{(1)}(t,\varepsilon)) + R(z_k,t,\varepsilon)\right\},$$

$$lz_{k+1}(\cdot) = \varepsilon\left\{J(x_0(\cdot,c_r^0),0) + l_1[X_r(\cdot)c_k + z_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + R_0(z_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right\}.$$

З необхідної та достатньої умови розв'язності цієї крайової задачі приходимо до алгебраїчної системи

$$B_0c_k + P_{D_{d^*}}\left\{l_1z_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_0(z_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -\right.$$

$$\left. - l\int_a^b K(\cdot,s)\left[A_1(s)z_k^{(1)}(s,\varepsilon) + R(z_k(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\right]\,ds\right\} = 0, \tag{17}$$

з якої знаходимо k-те наближення c_k до $c(\varepsilon)$:

$$c_k = -B_0^+P_{D_{d^*}}\left\{l_1z_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_0(z_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -\right.$$

$$\left. - l\int_a^b K(\cdot,s)\left[A_1(s)z_k^{(1)}(s,\varepsilon) + R(z_k(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\right]\,ds\right\}.$$

Умова (14) гарантує розв'язність алгебраїчної системи (17) відносно $c_k \in R^r$ на кожному кроці ітераційного процесу. Наближення $z_{k+1}(t,\varepsilon)$ до шуканого розв'язку запишеться у вигляді

$$z_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_k + z_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon).$$

Враховуючи заміну змінних (6), для відшукання розв'язку $x(t,\varepsilon) : x(\cdot,\varepsilon) \in C[a,b], x(t,\cdot) \in \in C[0,\varepsilon_0], x(t,0) = x_0(t,c_r^0)$ крайової задачі (1) отримаємо схему (5).

Доведення збіжності та отримання оцінок, що характеризують ітераційний процес (5), проводяться за схемою методу мажорант Ляпунова [5, 1].

1. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.

2. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 317 p.

3. *Шовкопляс Т. В.* Критерій розв'язності лінійної крайової задачі для системи другого порядку // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 6. — С. 861 – 864.

4. *Langerova M.* Boundary value problem for weakly perturbed linear differential equation of the second order // 5-th Int. Conf. APLIMAT-2006. — Bratislava: Slovak Univ. Technol., 2006. — P. 273 – 278.

5. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.

Одержано 23.12.2005