СПОГАДИ ПРО СПІЛЬНУ ПРАЦЮ З М.М. БОГОЛЮБОВИМ

Д.Я. ПЕТРИНА

Інститут математики НАН України
(Вул. Терещенківська, 3, Київ 01601)

У цій статті я хочу розповісти про один епізод із мого довголітнього спілкування з М.М. Боголюбовим. Цей період тривав один рік, коли писалася спільна з М.М. Боголюбовим робота "Математическое описание равновесного состояния классических систем на основе формализма канонического ансамбля". Цю роботу було опубліковано в журналі "Теоретическая и математическая физика" в 1969 р. та в препринті з такою ж назвою англійською мовою в Інституті теоретичної фізики[1].

Моє знайомство з Миколою Миколайовичем Боголюбовим почалося ще в студентські роки. Доцент О.І. Сіракомський читав нам курс нелінійної механіки за книгами Крилова та Боголюбова. Професор О.С. Парасюк читав нам курс якісної теорії диференціальних рівнянь за Немицьким та Степановим, і так я познайомився з теоремою Крилова та Боголюбова про існування інваріантної міри у динамічних системах.

Мої друзі фізики-теоретики опрацьовували монографію М.М. Боголюбова "Проблемы динамической теории в статистической физике". Вони вивчали рівняння для кореляційних функцій – тепер це називається ієрархією ББГКІ. Як відомо, це є ланцюжок рівнянь для безмежної послідовності кореляційних функцій. Цей ланцюжок може бути записано у вигляді одного рівняння у варіаційних похідних для твірного функціоналу. Пригадаю, що фізики-теоретики вже на четвертому курсі говорили про вторинне квантування, діаграми Фейнмана, континуальний інтеграл Фейнмана. Їхні однокурсники математики та механіки не мали жодного уявлення про ці математичні відкриття. Я твердо переконаний, що фізики-теоретики дістають більш широку та глибоку освіту, ніж чисті математики. Це підтверджує і мій досвід більш ніж тридцятирічного викладання фізикам-теоретикам та математичним фізикам.

Під час мого навчання в аспірантурі у О.С. Парасюка вийшли книги Боголюбова та Ширкова з квантової теорії поля і Боголюбова, Медведєва та Поліванова по дисперсійних співвідношеннях. О.С. Парасюк отримав їх ще в рукописах та читав по них спецкурси в Київському університеті. Ці книги стали моїми настільними, я вивчав їх дуже детально і знаю їх досконально. Спочатку деякі розділи я розумів формально з точки зору математика, наприклад, вторинне квантування, а потім заповнив і цю прогалину. Я твердо впевнений, що без глибокого знання цих книг не можна себе вважати спеціалістом з квантової теорії поля.

У цей час я зустрічався з Миколою Миколайовичем, він часто приїжджав до Києва, де жила його мати. Під час своїх візитів він виступав на семінарах в Інституті математики, розповідав про теорію надпровідності на основі гамільтоніана Фрьоліха та принципу компенсації небезпечних діаграм. Я тоді вже добре розумів, що бачу легендарну особу, геніального вченого.

До речі, М.М. Боголюбов був завжди елегантно одягнений у добротно зшитий костюм, лаковані туфлі. Влітку він одягав чесучовий костюм колоніального типу з короткими рукавами.

Я добре пам'ятаю свої виступи перед М.М. Боголюбовим. Вперше це було на міжнародній конференції в ОІЯД (Дубна). Тоді криком моди були дослідження аналітичних властивостей матриці розсіяння по енергії, переданому імпульсу та орбітальному моменту. На цей час я отримав солідні результати про аналітичні властивості внесків від діаграм Фейнмана. Використовуючи теореми теорії голоморфних функцій багатьох комплексних змінних, мною були доведені критерії справедливості представлення Мандельстама щодо поведінки кривих Ландау. Я виступав у перший же день після доповіді Тодорова, яка була першою. Головував Микола Миколайович.

[1] Ця робота була також опублікована в працях Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris) N 3, 1969, p. 47–73. В наш час стаття перевидана в книзі "Н.Н. Боголюбов. Собрание научных трудов в 12 т." М.: Наука (Классики науки), 2006, т. 6, с. 401 та в ювілейному номері Українського фізичного журналу "Золоті сторінки української фізики" (т. 53, 2008, с. 168).

Доповідь пройшла успішно, Микола Миколайович уважно слухав і підбадьорливо кивав мені головою. Коли після доповіді я розповів своїм приятелям із Києва про уважність Миколи Миколайовича до мене, вони сміючись сказали, що, напевно, Микола Миколайович боявся, щоб зі мною чогось не сталося, бо я протягом усієї доповіді тримав ліву руку на серці. Досі не знаю, чи це правда, чи жарт.

Друга моя доповідь була на семінарі О.С. Парасюка. Спочатку виступав М.М. з короткою доповіддю, а потім я реферував якусь журнальну статтю з реджистики. Пізніше Остап Степанович сказав мені, що моя доповідь сподобалася Миколі Миколайовичу і що він запитав Остапа Степановича, чи є ще в нього так добре підготовлені учні. Відповідь була позитивна. Остап Степанович Парасюк із своїми учнями отримали окремий відділ теоретичної фізики.

Третій мій виступ перед Миколою Миколайовичем був в Каневі на першій літній математичній школі. Згадую свій виступ на сесії відділення математики АН СРСР у Москві, коли Микола Миколайович високо оцінив мої результати. На сесії були присутні Ю.О. Митропольський та А.М. Самойленко. Потім було багато виступів, про які я вже не буду згадувати.

В 1965 році було організовано Інститут теоретичної фізики. Це ідея Миколи Миколайовича, який сам відбирав співробітників до свого інституту. О.С. Парасюк очолив відділ математичних методів у теоретичній фізиці. До відділу Микола Миколайович та Остап Степанович відібрали мене, В.П. Гачка, А.У. Клімика, В.А. Яцуна та І.М. Бурбана. Решта співробітників відділу теоретичної фізики залишилась в Інституті математики. Потім вони вихвалялися, що були великими патріотами Інституту математики і тому не перейшли в Інститут теоретичної фізики.

Зауважу, що я спонтанно почав цікавитися статистичною механікою. Можливо, певну роль відіграло те, що за освітою я наполовину математик, наполовину механік. Мене просто тягло в статистичну механіку. Я вивчав монографії, підручники зі статистичної механіки, і я мав солідну базу як в квантовій теорії поля, так і з функціонального аналізу. Особливо мене притягував ланцюжок рівнянь для кореляційних функцій, які вивів Микола Миколайович (тепер ці рівняння відомі як ієрархія рівнянь ББГКІ).

Я отримав змогу безпосередньо спілкуватися з М.М. Боголюбовим. При обговоренні моєї докторської дисертації я звернув увагу Миколи Миколайовича, що рівняння для коефіцієнтних функцій матриці розсіяння, які я вивів, нагадують його ланцюжок для кореляційних функцій. Він сказав мені, що давно після війни отримав певні результати разом з Б.Й. Хацетом про існування рівноважних кореляційних функцій і висловив побажання, щоб я ознайомився з цими результатами. Це було в червні 1967 року.

Результати М.М. Боголюбова були викладені в спільній коротенький замітці в ДАН СРСР та більш детально в статті Хацета у "Віснику житомирського педінституту". В замітці в ДАН були тільки сформульовані результати без доведень. У "Віснику" було викладено результати про існування розв'язку рівнянь Майера–Монтролля для рівноважних кореляційних функцій в межах канонічного ансамблю, але не було доведено існування термодинамічної границі, тобто що послідовність кореляційних функцій скінченої системи збігається до відповідної послідовності безмежної системи. Крім цього, розглядався тільки додатний, тобто відштовхувальний потенціал взаємодії.

Коли я ознайомився з цими роботами, то був вражений, що Микола Миколайович випередив французького вченого Д. Рюеля на цілих 15 років. Д. Рюель розглядав рівноважну класичну систему в межах більш простого великого канонічного ансамблю. Але він розглянув фізично більш прийнятний, вперше введений ним стійкий потенціал, який містить і відштовхування. Замість рівнянь Майера–Монтролля він розглянув рівняння Кірквуда–Зальцбурга. Він довів, що ці рівняння мають розв'язок в тому ж банаховому просторі, що був введений М.М. Боголюбовим для рівняння Майера–Монтролля. Йому вдалося довести існування термодинамічної границі для послідовності кореляційних функцій.

Два слова про суть проблеми. Розглянемо рівноважну систему N-частинок, що взаємодіють через парний потенціал $\Phi(q)$, $q \in \mathbb{R}^3$ і розміщені в області (наприклад, кулі) Λ з об'ємом V при оберненій температурі β. Густина розподілу імовірностей задається в Λ^N функцією

$$Q^{-1}(N,V)\, e^{-\beta \sum\limits_{i<j=1}^{N} \Phi(q_i - q_j)},$$

де

$$Q(N,V) = \int\limits_{\Lambda^N} e^{-\beta \sum\limits_{i<j=1}^{N} \Phi(q_i - q_j)} dq_1 \dots dq_N.$$

Послідовність кореляційних функцій, $s \geq 1$, задається формулами

$$F_s^{(N)}(q_1,\ldots,q_s) = \frac{N(N-1)\ldots(N-s+1)}{Q(N,V)}\times$$

$$\times \int\limits_{\Lambda^{N-s}} e^{-\beta \sum\limits_{i<j=1}^{N} \Phi(q_i-q_j)} dq_{s+1}\ldots dq_N.$$

Нехай потенціал задовольняє умови інтегровності

$$\int |e^{-\beta\Phi(q)}-1|dq = c(\beta) < \infty$$

та стійкості

$$\sum_{i<j=1}^{N} \Phi(q_i-q_j) \geq -BN, \quad B>0, \quad N \geq 1.$$

Легко бачити, що $Q(N,V) \sim V^N$, тоді $F_s^{(N)}(q_1,\ldots,q_s) \sim \frac{V^N}{V^N}$ і треба довести, що існує границя, коли $V\to\infty$, $N\to\infty$, $\frac{N}{V}=\frac{1}{v}$, кореляційних функцій.

Я швидко зрозумів, що для отримання аналогічних результатів у межах канонічного ансамблю треба використовувати рівняння Кірквуда–Зальцбурга замість рівнянь Майєра–Монтролля. Я вивів співвідношення Кірквуда–Зальцбурга для скінченої системи.

Зауважу, що канонічний ансамбль складніший від великого канонічного ансамблю, бо для останнього і для скінченої системи справедливі справжні рівняння Кірквуда–Зальцбурга.

Ці співвідношення мають вигляд

$$F_s^{(N)}(q_1,\ldots,q_s) =$$

$$= a_N(V) e^{-\beta \sum\limits_{i=2}^{s} \Phi(q_1-q_i)} \Big(F_{s-1}^{(N-1)}(q_2,\ldots,q_s) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-s} \frac{1}{k!} \int\limits_{\Lambda} dy_1\ldots dy_k \prod_{i=1}^{k} (e^{-\beta\Phi(q_1-y_i)}-1)\times$$

$$\times F_{s-1+k}^{(N-1)}(q_2,\ldots,q_s,y_1,\ldots,y_k)\Big), \quad s \geq 1,$$

де $F_0 = 1$, $a_N(V) = N\frac{Q(N-1,V)}{Q(N,V)}$, $|\Lambda| = V$, або в абстрактному вигляді

$$F^{(N)} = a_N(V)\mathcal{K}^N F^{(N-1)} + a_N(V)F_0,$$

де $F^{(N)} = (F_1^{(N)}(q_1),\ldots,F_N^{(N)}(q_1,\ldots,q_N),0\ldots), F_0 = (1,0,\ldots)$. Якщо перейти формально до термодинамічної границі, то матимемо

$$F_s(q_1,\ldots,q_s) = a(v) e^{-\beta \sum\limits_{i=2}^{s} \Phi(q_1-q_i)} \Big(F_{s-1}(q_2,\ldots,q_s) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \int dy_1\ldots dy_k \prod_{i=1}^{k} (e^{-\beta\Phi(q_1-y_i)}-1)\times$$

$$\times F_{s-1+k}(q_2,\ldots,q_s,y_1,\ldots,y_k)\Big), \quad s \geq 1$$

або в абстрактному вигляді

$$F = a(v)\mathcal{K}F + a(v)F_0,$$

де $a(v) = \lim\limits_{N\to\infty, V\to\infty, \frac{N}{V}=\frac{1}{v}} a_N(V)$.

Мій основний внесок у спільну роботу з М.М. Боголюбовим та Б.Й. Хацетом полягає у використанні рівнянь Кірквуда–Зальцбурга для канонічного ансамблю, доведенні існування термодинамічної границі, тобто, що послідовність $F^{(N)}$ збігається в певному сенсі при $N\to\infty$, $V\to\infty$, $\frac{N}{V}=\frac{1}{v}=\text{const}$ до F. Ця задача на порядок важча, ніж у роботі Д. Рюеля, бо оператор $\mathcal{K}^{(N)}$ відмінний від $\mathcal{K}$, і треба ще доводити, що одночасно існує така термодинамічна границя: $\lim\limits_{N\to\infty, V\to\infty, \frac{N}{V}=\frac{1}{v}} a_N(V) = a(v)$. Крім того, було встановлено умови самоузгодження

$$\lim_{V\to\infty} \frac{1}{V} \int\limits_{\Lambda} F_{s+1}^{(N)}(q_1,\ldots,q_s,q_{s+1})dq_{s+1} = F_s(q_1,\ldots,q_s).$$

Було доведено справедливість віріальних розкладів, тобто збіжність рядів по щільності, якими представляються кореляційні функції, та доведено еквівалентність канонічного та великого канонічного ансамблів.

Хочу дещо сказати про обставини, за яких була написана робота. Основне навантаження лягло на мене, я був добре ознайомлений з роботою Д. Рюеля, вивчив статтю Б. Хацета у "Віснику житомирського пединституту", мій досвід у квантовій теорії поля та у функціональному аналізі дозволяв почуватися вільно. Про всі етапи роботи доповідав Миколі Миколайовичу, коли він бував у Києві, або я їздив до нього в Дубну. До Нового року робота була завершена. У її оформлені мені допомагав Хацет. Він був великим майстром гарно формулювати результати, напевно, це передалося йому від батька – відомого у Києві адвоката. Частина результатів попередньої роботи

М.М. Боголюбова органічно увійшла у нашу спільну роботу.

Із рукописом роботи Микола Миколайович поїхав у Париж, де він мав доповіді у Сорбонні та Еколь Нормаль. На його доповідях був присутній Д. Рюель, який сказав Миколі Миколайовичу, що не знав про його з Хацетом роботи, а статтю з "Вісника" він не зміг прочитати, бо в Парижі не знайшов перекладача з української. На це Микола Миколайович з іронією зауважив, що у всіх державних установах в Парижі до нього підходили службовці і розмовляли з ним українською мовою.

Пізніше Микола Миколайович звернув мою увагу, що в одній лемі треба зробити уточнення, тим паче, що воно потрібне для виконання умови узгодження. Я був дуже пригнічений, бо довго шліфував статтю і вірив, що вона абсолютно бездоганна. Я запитав Миколу Миколайовича, чи не виникло проблем на його доповідях у Парижі. Він сміючись сказав: "Я їм все це так подав, що комар носа не підточить". Потім додав, що в Парижі у нього були вільні вечори, і він детально та уважно прочитав увесь рукопис. Він сказав: "Я якщо читаю, то вже читаю, як належить".

Дуже швидко я розширив формулювання леми, поїхав у Дубну, і там Микола Миколайович з усім погодився. Він дуже наполягав на своїх умовах узгодження:

$$\lim_{N\to\infty, V\to\infty, \frac{N}{V}=\frac{1}{v}} \frac{1}{V}\int\limits_{\Lambda} F_{s+1}^{(N)}(q_1,\ldots,q_s,q_{s+1})dq_{s+1} =$$

$$= F_s(q_1,\ldots,q_s),$$

$$\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\int\limits_{\Lambda} F_{s+1}(q_1,\ldots,q_s,q_{s+1})dq_{s+1} = F_s(q_1,\ldots,q_s).$$

М.М. Боголюбов вважав, що ці умови разом з існуванням стану, що задається послідовністю кореляційних функцій $F=(F_1(q_1),\ldots,F_s(q_1,\ldots,q_s),\ldots)$, визначають міру на конфігураційному просторі безмежної системи. Дійсно, $F_\infty(q_1,\ldots,q_s,\ldots)$ і є мірою, а усі кореляційні функції скінченого числа часток визначаються через міру F_∞ за допомогою умови узгодження. Зауважимо, що умови узгодження можна незалежно отримати із кластерних властивостей (умови послаблення кореляцій М.М. Боголюбов) вперше доведених Д. Рюелем.

Микола Миколайович дав дозвіл друкувати препринт англійською мовою. Коли препринт вийшов друком, він відіслав його Ж. Лере, і у супровідному листі було написано, що це його один із найкращих результатів у статистичній механіці, зроблений разом із його співробітниками Д.Я. Петриною та Б.Й. Хацетом. Микола Миколайович надавав цьому результату важливе значення, про це свідчить включення статті з Б.Й. Хацетом у тритомник вибраних творів М.М. Боголюбова (див. примітку).

Наша стаття вийшла у другому номері першого тому журналу "Теоретическая и математическая физика" у 1969 р. [1]. Вона широко цитується як у журналах, так і в монографіях. Напевно, по кількості цитувань вона стоїть на другому місці після статті М.М. Боголюбова та О.С. Парасюка про віднімальну процедуру.

Хочу також зупинитися на абсолютно безглуздих спекуляціях стосовно того, що таке стани безмежних систем – послідовності кореляційних функцій чи ймовірнісна міра. До речі, наша стаття називається "Математическое описание равновесного состояния классических систем на основе формализма канонического ансамбля". Насправді ці поняття еквівалентні, якщо існує послідовність кореляційних функцій, які задовольняють рівнянням Кірквуда–Зальцбурга чи Майера–Монтролля, то існує ймовірнісна міра і навпаки, якщо існує ймовірнісна міра, що задовольняє рівняння Добрушина–Ленфорда–Рюеля, то існує послідовність кореляційних функцій, які задовольняють свої рівняння.

Інша справа, що доведено існування розв'язків рівнянь для кореляційних функцій, але аналогічних результатів для міри немає. Середні від спостережуваних прямо визначаються через кореляційні функції, проблема фазових переходів теж пов'язана з властивостями кореляційних функцій. Усі ці результати детально викладено у спільній із В.І. Герасименком та П.В. Малишевим монографії "Математические основы классической статистической механики", яка витримала два видання англійською мовою [4].

Зауважу, що Микола Миколайович не любив зайвого узагальнення, чи пустого "бурбакізму". Коли в першому варіанті рукопису я писав, що потенціал вимірний, то він розсердився і сказав, що це пусте узагальнення, здоровий глузд підказує, що досить вважати потенціал неперервним з можливими сингулярностями. Були відкинуті мої намагання помістити у нашій статті так фетишизовану нашими ймовірнісниками трійцю (Ω,σ,P). Микола Миколайович сказав, що в нашому випадку це все тривіально, бо міра абсолютно неперервна відносно міри Лебега, а область Λ – це куля. До речі, ні в одній роботі зі статистичної механіки Микола Миколайович не вживає цього фетишу. Не робили цього і Д. Рюель, і ми.

Наприкінці ще декілька слів про два еквівалентні означення станів F та μ_Δ.

Стан F – це послідовність кореляційних функцій $F = (F_1(q_1), \ldots, F_s(q_1, \ldots, q_s), \ldots)$. Тут $F_s(q_1, \ldots, q_s)dq_1 \ldots dq_s$ – це імовірність знайти s частинок в об'ємах $dq_1 \ldots dq_s$ з центрами в точках $q_1, \ldots, q_s$, що належать до простору $\mathbf{R}^3$, при умові, що решта частинок знаходиться де завгодно в $\mathbf{R}^3$.

Стан μ_Δ – це послідовність густин розподілу імовірностей $\mu_\Delta = (\mu^1_\Delta(q_1), \ldots, \mu^s_\Delta(q_1, \ldots, q_s), \ldots)$. Тут $\mu^s_\Delta(q_1, \ldots, q_s)dq_1 \ldots dq_s$ – це імовірність знайдення s-частинок в об'ємах $dq_1, \ldots, dq_s$ з центрами в точках $(q_1, \ldots, q_s) \in \Delta^s$ при умові, що решта частинок знаходиться назовні області Δ. Для μ_Δ маємо таку формулу, що виражає їх через послідовність F:

$$\mu^s_\Delta(q_1, \ldots, q_s) =$$

$$= \frac{1}{s!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{\Delta^n} dq_{s+1} \ldots dq_{s+n} F_{s+n}(q_1, \ldots, q_{s+n}),$$

$$s \geq 1.$$

Для μ_Δ маємо такі умови узгодження:

$$\mu^s_\Delta(q_1, \ldots, q_s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s+n)!}{s!n!} \int_{\Delta' \setminus \Delta} dq_{s+1} \ldots$$

$$\ldots \int_{\Delta' \setminus \Delta} dq_{s+n} \mu^{s+n}_{\Delta'}(q_1, \ldots, q_s, q_{s+1}, \ldots, q_{s+n}),$$

де $\Delta \subset \Delta'$.

Таким чином, послідовність $\mu^s_\Delta(q_1, \ldots, q_s)$ задана всюди в Δ^s, а послідовність $F_s(q_1, \ldots, q_s)$ задана всюди в $\mathbb{R}^{3s}$, тобто відповідні міри є абсолютно неперервними відносно міри Лебега.

Наведемо формулу для визначення міри Гіббса множини (області) Λ^n згідно з роботою Р.А. Мінлоса (Функц. анал. и прил. с.60–73, 1967, формула (16)) в наших позначеннях

$$P(\Lambda^n) = \sum_{l=n}^{\infty} (-1)^{l-n} \frac{l!}{n!(l-n)!} \frac{1}{l!} \times$$

$$\times \int\limits_{\Lambda^l} \rho_l(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_l) \times$$

$$\times dx_1 \ldots dx_n dx_{n+1} \ldots dx_l =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{n!} \frac{1}{p!} \int\limits_{\Lambda^{n+p}} \rho_{n+p}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+p}) \times$$

$$\times dx_1 \ldots dx_n dx_{n+1} \ldots dx_{n+p} =$$

$$= \frac{1}{n!} \int\limits_{\Lambda^n} \mu_\Lambda(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

З наведеної формули легко бачити, що міра $P(\Lambda^n)$ визначається звичайним інтегралом Лебега від звичайної вимірної на Λ^n функції $\mu_\Lambda(x_1, \ldots, x_n)$. Ні про які дискретні послідовності, на яких немов би визначена $\mu_\Lambda(x_1, \ldots, x_n)$, мова не йде.

Зауважимо, що у всіх монографіях, журнальних статтях гамільтонова динаміка нескінчених систем, ієрархія ББГКІ для кореляційних функцій, інтегральні рівняння ДЛР (Добрушина–Ланфорда–Руелля) для міри Гіббса виражаються як звичайні диференціальні рівняння чи інтегродиференціальні рівняння, а не якимись побудованими на повному нерозумінні суті справи, різницевими рівняннями.

Іноді необізнані особи щось торочать про гіббсівські міри, задані на скінчених конфігураціях. Це є абсолютне нерозуміння суті справи. Ймовірність того, що в області Λ знаходиться більше, ніж m частинок, задовольняє оцінку

$$P(m|\Lambda) \leq e^{-\frac{\alpha m^2}{L^3} + \gamma m},$$

де $\alpha > 0, \gamma > 0$ певні константи, L – діаметр області Λ. Ця оцінка трактується як той факт, що гіббсівські міри зосереджені на скінчених конфігураціях, бо $\lim_{m \longrightarrow 0} P(m|\Lambda) = 0$ при $L < \infty$. Наголошую ще раз, гіббсівські міри задані у всьому $\mathbb{R}^{3\infty}$, а зосереджені на скінчених конфігураціях. Тому означати якісь різницеві оператори для гіббсівських мір є безглуздям.

Для більшої ясності наведу приклад розподілу Гаусса $e^{-\beta \sum_{i=1}^{\infty} q_i^2}$. Ця міра Гаусса визначена у всьому $\mathbb{R}^{3\infty}$, а зосереджена на l_2, тобто на множинах $\sum_{i=1}^{\infty} q_i^2 < \infty$.

На виправдання цим особам можна навести тільки певну неточність формулювання, бо деколи оцінку для $P(m|\Lambda)$ виражають словами: міра Гіббса визначена на скінчених конфігураціях, а правильно було б сказати, що вона зосереджена на скінчених конфігураціях.

На завершення скажу, що ідеї Миколи Миколайовича відносно ієрархії рівнянь ББГКІ, існування її розв'язків у термодинамічній границі, обґрунтування виведення кінетичних рівнянь продовжують розвиватись в основному у Києві. Крім великої кількості статей, надруковано чотири монографічні огляди в журналах "Успехи математических наук" та серії книжок "Soviet Scientific Review, sect. C: Mathematical Physics" [6–9], сім монографій, п'ять з яких англійською мовою [2–5] (монографію [5] було надруковано лише в минулому році). Рецензенти з Mathematical Review пишуть, що у наших монографіях підводиться підсумок досліджень з ієрархії рівнянь Боголюбова за півстоліття, і рекомендують їх як енциклопедії з цих питань.

Отже, спадщина М.М. Боголюбова – це величний здобуток сучасної математичної та теоретичної фізики.

1. Н.Н. Боголюбов, Д.Я. Петрина, Б.И. Хацет, Теор. Мат. Физ., **1**, 251 (1969).
2. D.Ya. Petrina, *Mathematical Foundations of Quantum Statistical Mechanics.* (Kluwer Acad./Plenum Publ., 1995).
3. C. Cercignani, V.I. Gerasimenko, D.Ya. Petrina, *Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations.* (Kluwer Acad. Publ., 1997).
4. D.Ya. Petrina, V.I. Gerasimenko, P.V. Malyshev, *Mathematical Foundations of Classical Statistical Mechanics.* (Second ed., Taylor and Francis Sci. Publ., 2002).
5. D.Ya. Petrina, *Stochastic Dynamics and Boltzmann hierarchy.* (K: Inst. Math., 2008).
6. V.I. Gerasimenko, D.Ya. Petrina, Uspekhi Mat. Nauk., **38**, 3 (1983).
7. D.Ya. Petrina, V.I. Gerasimenko, Sov. Sci. Rev., sect. C: Math. Phys. Rev., **5**, 1 (1985).
8. D.Ya. Petrina, V.I. Gerasimenko, P.V. Malyshev, Sov. Sci. Rev., sect. C: Math. Phys. Rev., **7**, 281 (1988).
9. V.I. Gerasimenko, D.Ya. Petrina, Uspekhi Mat. Nauk., **45**, 135 (1990).

ВОСПОМИНАНИЯ О СОВМЕСТНОЙ РАБОТЕ С Н.Н. БОГОЛЮБОВЫМ

Д.Я. Петрина

Р е з ю м е

В этой статье я хочу рассказать об одном эпизоде из моего многолетнего общения с Н.Н. Боголюбовым. Этот период длился один год, когда писалась совместная з Н.Н. Боголюбовым работа "Математическое описание равновесного состояния классических систем на основе формализма канонического ансамбля". Эта работа была опубликована в журнале "Теоретическая и математическая физика" в 1969 г. и в препринте с таким же названием на английском языке в Институте теоретической физики.

MEMORIES ABOUT THE JOINT WORK WITH M.M. BOGOLYUBOV

D.Ya. Petrina

Institute of Mathematics, Nat. Acad. of Sci. of Ukraine
(*3, Tereshchenkivs'ka Str., Kyiv 01601*)

S u m m a r y

In this article, I want to tell about one of the episodes of my long-term communications with M.M. Bogolyubov. This period lasted for one year, when our work "Mathematical description of equilibrium states of classic systems on the base of canonical ensemble formalism" was written. This work was published in the "Teoret. Matem. Fiz." journal in 1969 and as a preprint at the Institute for Theoretical Physics with the same title.