Математичні методи у статистичній механіці

присвячено пам'яті
академіка Дмитра Петрини

Інститут математики
Національної академії наук України

Збірник праць
Інституту математики НАН України

Інститут математики
Національної академії наук України

Математичні методи у статистичній механіці

Київ — 2007

УДК 517.95:517.958:512.816(06)

Математичні методи у статистичній механіці // Зб. праць Інституту математики НАН України. – 2007. – Т. 4, № 3. – 248 с.

ISSN 1815–2910

Представлено статті з сучасних проблем математичної фізики, які входили в коло наукових інтересів академіка Дмитра Яковича Петрини, видатного українського вченого в галузі математичної фізики, квантової теорії поля та статистичної механіки.

Розраховано на наукових працівників, аспірантів, які цікавляться сучасними проблемами статистичної механіки та математичної фізики.

This collection of scientific papers is devoted to the memory of the academician of NAS of Ukraine Dmytro Yakovych Petrina, who was a great Ukrainian scientist in the field of mathematical physics, quantum field theory and statistical mechanics. Papers on modern problems of mathematical physics which got in to scientific interests of academician Dmytro Petrina are presented in the volume.

The volume is intended for scientists and post-graduate students interested in modern problems of statistical mechanics and mathematical physics.

Видавнича група: *В.І. Герасименко (відп. ред.), Ж.Я. Артемиченко,*
В.О. Штик

Рецензенти: доктор фіз.-мат наук, професор *А.Г. Нікітін*,
доктор фіз.-мат наук, професор *В.Г. Самойленко*

Свідоцтво про державну реєстрацію – серія КВ № 8459,
видане 19 лютого 2004

Збірник праць Інституту математики НАН України 2007, т.4, N 3, 7–8

Дмитро Якович Петрина

В.І. Герасименко, А.Г. Загородній

Цей збірник наукових праць присвячено пам'яті академіка НАН України Дмитра Яковича Петрини, видатного українського вченого в галузі математичної фізики, квантової теорії поля та статистичної механіки.

Д.Я. Петрина народився 23 березня 1934 р. у селі Торгановичі Старосамбірського району Львівської області в сім'ї селян. Після закінчення середньої школи в 1951 р. вступив до Львівського державного університету ім. Ів. Франка на механіко-математичний факультет, який закінчив у 1956 р. за спеціальністю механіка. Наприкінці 1956 р. вступив до аспірантури при Інституті математики АН УРСР. По закінченню аспірантури в 1959 р працював молодшим науковим співробітником, а згодом — старшим науковим співробітником цього інституту. В 1969 р. Д.Я. Петрину було призначено завідувачем лабораторії Інституту теоретичної фізики АН УРСР. Ця лабораторія стала основою відділу статистичної механіки, який Дмитро Якович створив у 1978 році. 1986 року відділ було переведено в Інституті математики НАН України. Дмитро Якович очолював його до останніх днів свого життя. Кандидатську дисертацію Дмитро Якович захистив під керівництвом академіка О.С. Парасюка у 1961 р., а у 1969 р. — докторську дисертацію в Інституті математики АН УРСР. У 1988 р. його було обрано членом-кореспондентом АН УРСР, а в травні 2006 р. — дійсним членом НАН України.

Головне місце в житті Дмитра Яковича займала наука. Він був великим трудівником, який віддав науці все своє життя. І наука віддячила йому, подарувавши світове визнання, повагу і любов учнів. Науковий здобуток академіка Д.Я. Петрини налічує понад 170 наукових праць, серед яких 6 монографічних оглядів і 8 монографій, широко відомих у світі. Свою дев'яту монографію він завершив, але не встиг побачити її виходу в світ. Праці вченого відзначено Державною премією України в галузі науки та техніки за 2001 рік, премією АН УРСР ім. М.М. Крилова та премією НАН України ім. М.М. Боголюбова.

Дмитро Якович був не лише видатним вченим, але й природженим педагогом. Протягом тридцяти років він викладав у Київському національному університеті ім. Тараса Шевченка на фізичному та механіко-математичному факультетах. У 1981 р. йому було присвоєно вчене звання професора кафедри теоретичної фізики. Він любив і вмів працювати з учнями, виховав великий науковий колектив, заснував наукову школу математичної статистичної механіки.

В особі академіка Д.Я. Петрина ми мали яскравого представника школи Боголюбова–Парасюка з математичної фізики. Він збагатив науку видатними результатами першорядного значення в галузі квантової теорії поля, класичної і квантової статистичної механіки та теорії граничних задач в областях зі складною структурою. Серед них всесвітньо відома теорема Боголюбова–Петрини–Хацета про існування термодинамічної границі рівноважних станів статистичних систем, на основі якої наприкінці XX ст. була розвинута сучасна математична статистична механіка. Класична теорема Петрини про неможливість існування нелокальної квантової теорії поля з додатним спектром енергії імпульсу визначила напрям розвитку квантової теорії поля на значний період. Вченим було сформульовано та досліджено рівняння для коефіцієнтних функцій матриці розсіювання квантової теорії поля, йому належать класичні результати з дослідження спектрів модельних гамільтоніанів теорії надпровідності й надплинності у введених ним просторах трансляційно-інваріантних функцій. У циклі недавніх робіт він відкрив нову гілку спектру гамільтоніана теорії надпровідності, що стало великою несподіванкою для дослідників у цій галузі. В останні дні свого життя Дмитро Якович працював над новою монографією, в якій розвивалися ці актуальні результати. З його робіт початку 70-х рр. XX ст. бере свої витоки математична теорія нерівноважних статистичних систем. У його піонерських працях в цьому напрямку була побудована теорія ланцюжків рівнянь Боголюбова нескінченних динамічних систем та вперше доведено існування термодинамічної границі для нерівноважних станів. В останні роки ним було розв'язано фундаментальну проблему обґрунтування кінетичного рівняння Больцмана, для моделі жорстких сфер, яке широко використовується не лише при дослідженні газів, плазми та конденсованих багаточастинкових систем, але й для опису різноманітних еволюційних процесів у сучасних технологіях, соціальних науках. Його життя обірвалось у момент, коли він був сповнений творчими планами, новими ідеями, інтенсивно працював, з оптимізмом дивлячись у майбутнє. В серцях учнів та колег Дмитра Яковича залишається світла пам'ять про нього — талановитого вченого, вчителя та українського патріота.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2007, т.4, N 3, 9–26

519.7

The Richardson Equations and the Laguerre Polynomials

E.D. Belokolos

Dept. Theor. Physics, Institute of Magnetism of NAS of Ukraine, Kiev

E-mail:bel@im.imag.kiev.ua

Для інтегровної раціональної моделі Годена побудовано розв'язок рівнянь Річардсона для спектра. За умови вузької зони цей розв'язок виражено через розподіл нулів масштабованих поліномів Лагерра. Досліджено асимптотичну границю розподілу нулів поліномів Лагерра і розраховано спектральну густину для раціональної моделі Годена.

For the integrable rational Gaudin model a solution of the Richardson equations for a spectrum is built. In the case of narrow band assumption the solution is presented in terms of a zero distribution of the scaled Laguerre polynomials. Asymptotic limit of the Laguerre polynomial zero distribution is studied and spectral density for the Gaudin model is calculated.

Introduction. In 1963 R.W. Richardson proved the integrability of the BCS pairing Hamiltonian for finite number of particles. Later on M.Gaudin developed the appropriate mathematical theory (1976, 1995) and proposed a lot of the integrable models which present an interest for a number of physical problems.

In this paper we discuss a spectrum of integrable Gaudin models which is defined by the Richardson equations

$$2\sum_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{M}\frac{1}{\omega_\beta-\omega_\alpha}=\sum_{l=1}^{N}\frac{1}{u_l-\omega_\alpha}-\frac{1}{G}.$$

Here the variables u_l, $l=1,\ldots,N$, are eigenvalues of the Hamiltonian without interaction, the variables ω_α, $\alpha=1,\ldots,M$, are eigenvalues of the Hamiltonian with interaction and G is a pairing interaction constant of the Hamiltonian. (For details see for example E.D. Belokolos (2007).)

A structure of the paper is follows. In chapter 1 we present a solution of the Richardson-Gaudin equations under "the narrow band assumption"in terms of a zero distribution of the scaled Laguerre polynomials. In chapter 2 we remind some basic facts on the Laguerre polynomials, in particular, when their indices are negative . The asymptotics for the zero distribution of the scaled Laguerre polynomials are presented in chapter 3. In conclusion we give a discussion of the obtained results.

1. The Richardson equations and the Laguerre polynomials. Let us study a solution of the Richardson equations in the rational case under assumption

$$u_l = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, N,$$

which we call "the narrow band assumption".

Theorem 1.1. *If in the Richardson equations for the rational case,*

$$2 \sum_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{M} \frac{1}{\omega_\beta - \omega_\alpha} = \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{u_l - \omega_\alpha} - \frac{1}{G},$$

the following conditions are satisfied

$$u_l = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, N,$$

then the Richardson equations have solutions

$$\omega_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, M,$$

where ω_α are zeros of the generalized Laguerre polynomial

$$L_M^{AM}\left(M\frac{\omega_\alpha}{B}\right).$$

Here

$$A = -\frac{N+1}{M}, \quad B = MG = -\frac{1}{A}(N+1)G.$$

Proof. Let the Richardson equations in the rational case,

$$2 \sum_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{M} \frac{1}{\omega_\alpha - \omega_\beta} + \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{u_l - \omega_\alpha} - \frac{1}{G} = 0,$$

satisfy the following conditions,

$$u_l = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, N,$$

then these equations attain the form

$$2 \sum_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{M} \frac{1}{\omega_\alpha - \omega_\beta} - \frac{N}{\omega_\alpha} - \frac{1}{G} = 0.$$

According to last equalities the polynomial

$$f(x) = \prod_{\beta=1}^{M} (x - \omega_\beta)$$

is a solution of the differential equation

$$x\frac{d^2 f}{dx^2} - \left(\frac{x}{G} + N\right)\frac{df}{dx} + \frac{M}{G} f = 0.$$

A unique polynomial solution of this equation is the scaled Laguerre polynomial

$$y(x) = L_M^{-(N+1)}\left(\frac{x}{G}\right).$$

It is convenient to introduce new parameters A, B and g in the following way

$$A = -\frac{N+1}{M}, \quad B = MG = -\frac{1}{A}(N+1)G = -\frac{g}{A}.$$

Then the polynomial

$$p_M(z) = L_M^{AM}\left(M\frac{x}{B}\right)$$

satisfies the differential equation

$$x\frac{d^2 p_M}{dx^2} - \left(\frac{M}{B}x - AM - 1\right)\frac{dp_M}{dx} + \frac{M^2}{B} p_M = 0.$$

Later on we study a zero distribution of the polynomial

$$p_M(z) = C\prod_{j=1}^{M} (z - a_j)$$

at the limit $M \to \infty$ with parameters A, B and g being constants. Since the parameter B defines just a scale of the variable x and therefore there is no problem to take it in account we put further $B = 1$ in order to simplify the further calculations.

2. Basic facts on the Laguerre polynomials. Here we remind some basic facts on the Laguerre polynomials which we use further.

2.1. Definition. We can define the Laguerre polynomial by means of degenerate hypergeometric function

$$L_n^{(\alpha)}(z) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)}\, F_1(-n,\ \alpha+1;\ z),$$

by means of power series,

$$L_n^{(\alpha)}(z) = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n+\alpha \\ n-k \end{array} \right) \frac{(-z)^k}{k!}$$

by means of the Rodrigues formula

$$L_n^{(\alpha)}(z) = \frac{(-1)^n}{n!} z^{-\alpha} e^z \left(\frac{d}{dz}\right)^n (z^{n+\alpha} e^{-z}),$$

or by means of the differential equation: the Laguerre polynomial $L_n^{(\alpha)}(z)$ is a unique (up to a constant factor) polynomial solution $y(z)$ of the differential equation

$$zy''(z) + (\alpha+1-z)y'(z) + ny(z) = 0.$$

Here $n \in \{0, 1, \ldots\}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}.$

Therefore, $L_n^{(\alpha)}(z)$ is a polynomial of the order n in the variable z. Since $L_n^{(\alpha)}(z)$ is also a polynomial of the order n in the variable α, therefore, $L_n^{(\alpha)}(z)$ is an analytic function with respect to the variable α.

2.2. Zeros of the Laguerre polynomials.

- $-1 < \alpha$. All n zeros of $L_n^{(\alpha)}(z)$ are simple and are located on a real half-line $[0, +\infty)$;

- $\alpha = -k \in \{-1, -2, \ldots, -n\}$. In this case $L_n^{(\alpha)}(z)$ has at $z = 0$ a zero of the order k, all the other $(n-k)$ zeros are simple and are located on a half-line $(0, +\infty)$. It follows from the relation

$$L_n^{(-k)}(z) = (-z)^k \frac{(n-k)!}{n!} L_{n-k}^{(k)}(z).$$

- $\alpha < -n$. All n zeros of $L_n^{(\alpha)}(z)$ are simple. If n is even these zeros are all complex pair-wise conjugated, if n is odd these zeros are all complex pair-wise conjugated but one.

2.3. The Laguerre polynomial with negative index α. The polynomial approximation of e^z with the Laguerre polynomials. The Szegö curve. The Laguerre polynomial $L_n^{(\alpha)}(z)$ at the limit $\alpha \to -n-m-1$ looks as follows

$$L_n^{(-n-m-1)}(z) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(m+n-k)!}{k!m!(n-k)!} z^k.$$

In particular,

$$L_n^{(-n-1)}(z) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}.$$

This is a partial sum of the power series for the function e^z. As a result of that the Laguerre polynomials with negative indices appear as the polynomial approximants of the exponential function e^z.

Let us consider the exponential function as a limit of the sequence of polynomials

$$e^w = \lim_{n\to\infty} t_n(w),$$

where

$$t_n(w) = \sum_{k=0}^{n} \frac{w^k}{k!} = (-1)^n L_n^{-n-1}(w).$$

Let us scale the independent variable

$$w = nz,$$

present the series $t_n(w)$ in the transformed (rescaled) form

$$T_n(z) = t_n(nz) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} z^k = (-1)^n L_n^{-n-1}(nz)$$

and define the transformed remainder term

$$E_n(z) = e^{nz} - T_n(z).$$

Let $Z_n = Z(T_n)$ denote the set of zeros of the polynomial $T_n(z)$ and $W_n = W(E_n)$ denote the set of zeros of the transformed remainder term $E_n(z)$.

Theorem 2.1. *(G. Szegö (1924)) As $n \to \infty$ then the zeros Z_n of the polynomial $T_n(z)$ cluster on the curve $S_0 \cap B$ and the zeros W_n of the transformed remainder term $E_n(z)$ cluster on the curve $S_0 \backslash B$ where the curve*

$$S_0 = \{z : |ze^{1-z}| = 1\}$$

is called the Szegö curve and

$$B = \{z : |z| < 1\}$$

is an open disc.

Thus the Taylor polynomial approximation of e^z leads to the Szegö curve. For recent publications on the Szegö curve see the paper I.E. Pritsker, R.S. Varga (1997).

3. The limit zero distribution of the scaled Laguerre Polynomials. Here we consider the zero distribution of the scaled Laguerre polynomials.

Theorem 3.1. *Let us consider a sequence of scaled Laguerre polynomials*

$$p_n(z) = L_n^{(\alpha_n)}(nz)$$

and a sequence of their zero measures

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{p_n(z)=0} \delta_z.$$

Then at the limit $n \to \infty$ and under the condition

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{n} = A$$

there exists a limit measure

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n$$

and a support of this measure Γ which is simple analytic arc, symmetric with respect to $\mathbb{R}$. These quantities are described in terms of parameters

$$\xi_\pm = A + 2 \pm 2\sqrt{A+1},$$

and the polynomial

$$D(z) = (z - \xi_+)(z - \xi_-).$$

More precisely,

1) *If* $A > 0$, *then* $\xi_-, \xi_+ \in \mathbb{R}$ *and* $\Gamma = [\xi_-, \xi_+] \subset \mathbb{R}$.
2) *If* $A < -1$, *then* $\xi_- = \bar{\xi}_+$ *and* Γ *is given by the equation*

$$\mathrm{Re} \int_{\xi_-}^{z} \frac{\sqrt{D(t)}}{t} dt = 0,$$

which, when computed explicitly, yields

$$\Big| \frac{z^A e^{\sqrt{D(z)}}}{4(A+1)} \frac{[z - \sqrt{D(z)} - (A+2)]^{A+2}}{[A(A + \sqrt{D(z)}) - z(A+2)]^A} \Big| = 1.$$

3) *If* $A = -1$, *then* $\xi_- = \xi_+ = 1$ *and* Γ *is the Szegö curve defined by the equation*

$$\left| z e^{1-z} \right| = 1, \quad |z| \leq 1,$$

which is closed curve around the origin passing through 1 and a point in $(-\infty, 0)$.

In all cases above the zero distribution measure μ *is absolutely continuous with respect to the linear Lebesgue measure on* Γ *and*

$$d\mu(z) = \frac{1}{\pi i} \frac{\sqrt{D(z)}}{z} dz, \quad z \in \Gamma.$$

4) *If* $A \in (-1, 0)$ *and there exists the limit*

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{dist}(\alpha_n, \mathbb{Z})]^{1/n} = 0,$$

then the zeros of $L_n^{\alpha_n}(nz)$ *accumulate on* $\Gamma = \{0\} \cup [\xi_-, \xi_+]$ *and the asymptotic zero distribution measure is*

$$d\mu(x) = -A\delta_0 + \frac{\sqrt{(x - \xi_-)(\xi_+ - x)}}{2\pi x} \chi_{[\xi_-, \xi_+]} dx.$$

5) *If $A \in (-1,0)$ and there exists the limit*

$$\lim_{n\to\infty}[\mathrm{dist}(\alpha_n,\mathbb{Z})]^{1/n} = e^{-r}, \quad 0 \le r < \infty,$$

then the zeros of $L_n^{\alpha_n}(nz)$ accumulate on $\Gamma = \Gamma_r \cup [\xi_-,\xi_+]$ and the asymptotic zero distribution measure is

$$d\mu_r(x) = d\nu_r + \frac{\sqrt{(x-\xi_-)(\xi_+-x)}}{2\pi x}\chi_{[\xi_-,\xi_+]}dx,$$
$$d\nu_r(s) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\sqrt{D(s)}}{s}ds, \quad s \in \Gamma_r,$$
$$\mathrm{Re}\int_{\xi_-}^{z}\frac{\sqrt{D(s)}}{s}ds = r, \quad z \in \Gamma_r.$$

The case $r = 0$ represents the typical one in the sense that if a sequence $\{\alpha_n\}$ is chosen randomly, then with probability one there is valid the equality

$$\lim_{n\to\infty}[\mathrm{dist}(\alpha_n,\mathbb{Z})]^{1/n} = 1.$$

So in the typical case the zeros cluster on $\Gamma_0 \cup [\xi_-,\xi_+]$. The case $0 < r < \infty$ is more special since in this case the members of sequence $\{\alpha_n\}$ should be very close to integers.

In this theorem the results 1)–3) are due to A. Martinez-Finkelshtein, P. Martinez-Gonzalez, R. Orive (2001) and the results 4), 5) are due to A.B.J. Kuijlaars, K.T-R. McLaughlin (2002).

Since these results were obtained in the papers above by different techniques, it is reasonable to present their proof below in equal manner.

The proof of the theorem is a result of a sequence of the following Lemmas. At first we consider the zero distribution of the Laguerre polynomials without multiple zeros.

Lemma 3.1.1. *The Cauchy transform*

$$\hat{\mu}(z) = \int \frac{d\mu(t)}{z-t}$$

of the limit zero distribution measure $\mu(z)$ for the Laguerre polynomials $p_n(z) = L_n^{(\alpha_n)}(nz)$ looks as follows,

$$\hat{\mu}(z) = \frac{1}{2} - \frac{A}{2z} - \frac{\sqrt{(z-A)^2-4z}}{2z} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{A}{2z} - \frac{\sqrt{(z-z_+)(z-z_-)}}{2z},$$

$$R(z) = \sqrt{(z-A)^2 - 4z} = \sqrt{(z-z_+)(z-z_-)},$$

$$z_\pm = A + 2 \pm 2\sqrt{A+1}.$$

Proof. We derive an expression for the Cauchy transform of the limit zero distribution $\mu(z)$ directly from the differential equation for the Laguerre polynomials.

The polynomial

$$p_n(z) = L_n^{(An)}(nz) = C\prod_{j=1}^{n}(z-a_j)$$

is a solution of the differential equation

$$\frac{z}{n}p_n''(z) + \left(A - z + \frac{1}{n}\right)p_n'(z) + np_n(z) = 0.$$

The zero distribution measure is

$$\mu_{p_n}(z) = \frac{1}{n}\sum_{p_n(z)=0}\delta(z),$$

and the Cauchy transform for the zero distribution measure is

$$\hat{\mu}_{p_n}(z) = \int \frac{d\mu_{p_n}(t)}{z-t}.$$

The expression of the Cauchy transform for the zero distribution measure in terms of the logarithmic derivative of the polynomial is

$$h_n(z) = \frac{1}{n}\frac{p_n'(z)}{p_n(z)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{z-a_j} = \int\frac{d\mu_{p_n}(t)}{z-t} = \hat{\mu}_{p_n}(z).$$

The differential equation for the Cauchy transform of the zero distribution measure looks as follows,

$$z\left(\frac{h_n'(z)}{n}+h_n^2(z)\right)+\left(A-z+\frac{1}{n}\right)h_n(z)+1=0.$$

Now let us consider the limit $n\to\infty$ under assumption A is constant and $|h_n(z)|$, $|h_n'(z)|$ are uniformly bounded. Then for the quantity

$$h(z)=\lim_{n\to\infty}h_n(z)=\lim_{n\to\infty}\hat{\mu}_{p_n}(z)=\hat{\mu}(z)$$

we obtain the algebraic quadratic equation

$$z\hat{\mu}^2(z)+(A-z)\hat{\mu}(z)+1=0.$$

Therefore,

$$\hat{\mu}(z)=\frac{z-A\pm\sqrt{(z-A)^2-4z}}{2z}$$

Since

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\sqrt{(z-A)^2-4z}}{z}=1$$

and

$$\lim_{z\to\infty}z\hat{\mu}(z)=1$$

we have

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(z)&=\frac{1}{2}-\frac{A}{2z}-\frac{\sqrt{(z-A)^2-4z}}{2z}=\\&=\frac{1}{2}-\frac{A}{2z}-\frac{\sqrt{(z-z_+)(z-z_-)}}{2z},\end{aligned}$$

$$R(z)=\sqrt{(z-A)^2-4z}=\sqrt{(z-z_+)(z-z_-)},$$

$$z_\pm=A+2\pm2\sqrt{A+1}.$$

Lemma 3.1.2. *The limit zero distribution measure looks as follows:*

$$d\mu(t) = \frac{1}{\pi i}\frac{D(t)}{t}dt, \quad t \in \Gamma.$$

Proof. The limit zero distribution measure $\mu(t)$ defines by means of the Cauchy type integral a piece-wise analytic function

$$\tilde{\mu}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\mu(t)}{t-z}dt, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma.$$

This function $\tilde{\mu}(z)$ is analytic on the complex plane everywhere besides the integration contour

$$\tilde{\mu}(z) \in A(\mathbb{C}\backslash\Gamma).$$

In terms of the piece-wise analytic function $\tilde{\mu}(z)$ the limit zero distribution measure $\mu(t)$ is defined by means of the Sokhotski–Plemelj formulae

$$\mu(t) = \tilde{\mu}^+(z) - \tilde{\mu}^-(z),$$

where $\tilde{\mu}^+(z)$ and $\tilde{\mu}^-(z)$ are values of the function $\tilde{\mu}(z)$ on two sides of the integration contour Γ.

In the case under consideration

$$\tilde{\mu}(z) = -\frac{1}{\pi i}\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{2z} - \frac{\sqrt{D(z)}}{2z}\right),$$
$$D(z) = (z-\xi_-)(z-\xi_+), \quad \xi_\pm = A + 2 \pm 2\sqrt{A+1}.$$

If the contour Γ consists of a single arc or a finite number of separate arcs then

$$d\mu(t) = \frac{1}{\pi i}\frac{D(t)}{t}dt, \quad t \in \Gamma.$$

Lemma 3.1.3. *If $A < -1$, then $\xi_- = \bar{\xi}_+$ and Γ is given by the equation*

$$\mathrm{Re}\int_{\xi_-}^{z} \frac{\sqrt{D(t)}}{t}dt = 0,$$

which, when computed explicitly, yields

$$\Big|\frac{z^A e^{\sqrt{D(z)}}}{4(A+1)}\frac{[z-\sqrt{D(z)}-(A+2)]^{A+2}}{[A(A+\sqrt{D(z)})-z(A+2)]^A}\Big| = 1.$$

Proof. This curve is defined by the equation

$$\mathrm{Re}\int_{\xi_-}^{z}\frac{\sqrt{D(t)}}{t}dt = 0, \quad D(t) = (t-\xi_-)(t-\xi_+).$$

Let us calculate the integral

$$\begin{aligned} I &= \int_{\xi_-}^{z}\frac{\sqrt{D(t)}}{t}dt = \int_{\xi_-}^{z}\frac{\sqrt{(t-\xi_-)(t-\xi_+)}}{t}dt = \\ &= \int_{\xi_-}^{z}\frac{\sqrt{(t-\alpha)^2+\beta^2}}{t}dt = \int_{\xi_- -\alpha}^{z-\alpha}\frac{\sqrt{x^2+\beta^2}}{x+\alpha}dx. \end{aligned}$$

Here we have used the expressions

$$\begin{aligned} &\xi_\pm = \alpha \pm i\beta = (A+2) \pm i2\sqrt{-A-1}, \\ &x = t-\alpha, \quad t = x+\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{\xi_- -\alpha}^{z-\alpha}\frac{\sqrt{x^2+\beta^2}}{x+\alpha}dx = \int_{\xi_- -\alpha}^{z-\alpha}\frac{x^2+\beta^2}{x+\alpha}\frac{dx}{\sqrt{x^2+\beta^2}} = \\ &= \int_{\xi_- -\alpha}^{z-\alpha}\Big(\frac{\alpha^2+\beta^2}{x+\alpha} - \alpha + x\Big)\frac{dx}{\sqrt{x^2+\beta^2}} = \\ &= (\alpha^2+\beta^2)\int_{\xi_- -\alpha}^{z-\alpha}\frac{dx}{(x+\alpha)\sqrt{x^2+\beta^2}} - \\ &\quad - \alpha\int_{\xi_- -\alpha}^{z-\alpha}\frac{dx}{\sqrt{x^2+\beta^2}} + \int_{\xi_- -\alpha}^{z-\alpha}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+\beta^2}}. \end{aligned}$$

Now using the well known integrals

$$\begin{aligned} &\int\frac{dx}{(x+\alpha)\sqrt{x^2+\beta^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\ln\Big(\frac{\beta^2-\alpha x-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{x^2+\beta^2}}{x+\alpha}\Big), \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\beta^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+\beta^2}),$$
$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+\beta^2}} = \sqrt{x^2+\beta^2},$$

we receive for the integral I the following expression

$$\begin{aligned} I =& \Bigg\{ \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\ \ln\bigg(\frac{\beta^2-\alpha x-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{x^2+\beta^2}}{x+\alpha}\bigg) - \\ &- \alpha\ \ln(x+\sqrt{x^2+\beta^2}) + \sqrt{x^2+\beta^2}\Bigg\}\Bigg|_{\xi_--\alpha}^{z-\alpha} = \\ =& \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\ \ln\bigg(\frac{\alpha^2+\beta^2-\alpha z+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{D(z)}}{-i\beta\xi_+}\ \frac{\xi_-}{z}\bigg) - \\ &- \alpha\ \ln\bigg(\frac{z-\alpha-\sqrt{D(z)}}{i\beta}\bigg) - \sqrt{D(z)}. \end{aligned}$$

Here we have taken in account the formulae

$$\beta^2 - i\alpha\beta = -i\beta\xi_-, \quad \sqrt{(z-\alpha)^2+\beta^2} = -\sqrt{D(z)}.$$

Therefore

$$\begin{aligned} I = \ln\Bigg\{ & \frac{[\alpha^2+\beta^2-\alpha z+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{D(z)}]^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{(-i\beta z)^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}\ \left(\frac{\xi_-}{\xi_+}\right)^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \times \\ & \times\ \frac{(i\beta)^\alpha}{[z-\alpha-\sqrt{D(z)}]^\alpha}\ e^{-\sqrt{D(z)}}\Bigg\}. \end{aligned}$$

The equation

$$\mathrm{Re}\ I = 0$$

is equivalent to the equation

$$\begin{aligned} \Bigg| & \frac{[\alpha^2+\beta^2-\alpha z+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{D(z)}]^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{(-i\beta z)^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}\ \left(\frac{\xi_-}{\xi_+}\right)^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \times \\ & \times\ \frac{(i\beta)^\alpha}{[z-\alpha-\sqrt{D(z)}]^\alpha}\ e^{-\sqrt{D(z)}}\Bigg| = 1. \end{aligned}$$

Taking in account the equalities

$$\left|(-1)^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right| = 1, \quad \left|(\xi_-/\xi_+)^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right| = 1,$$

we obtain

$$\left|\frac{[\alpha^2+\beta^2-\alpha z+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{D(z)}]^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{[z-\alpha-\sqrt{D(z)}]^{\alpha}} \; \frac{(i\beta)^{\alpha-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{z^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}e^{\sqrt{D(z)}}}\right| = 1.$$

Since

$$\alpha = A+2, \quad i\beta = 2\sqrt{A+1}, \quad \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = A,$$

we have finally

$$\left|\frac{[A(A+\sqrt{D(z)})-z(A+2)]^{A}}{[z-\sqrt{D(z)}-(A+2)]^{A+2}} \; \frac{4(A+1)}{z^{A}e^{\sqrt{D(z)}}}\right| = 1.$$

Lemma 3.1.4. *If* $A=-1$, *then* $\xi_- = \xi_+ = 1$ *and* Γ *is the Szegö curve defined by the equation*

$$\left|ze^{1-z}\right| = 1, \quad |z| \le 1,$$

which is closed curve around the origin passing through 1 and a point in $(-\infty, 0)$.

Proof. The Szegö curve is the curve of previous Lemma, given by the equation

$$\left|\frac{z^{A}e^{\sqrt{D(z)}}}{4(A+1)} \, \frac{[z-\sqrt{D(z)}-(A+2)]^{A+2}}{[A(A+\sqrt{D(z)})-z(A+2)]^{A}}\right| = 1,$$

at the limit $A \to -1$.

At this limit we have

$$\begin{aligned} & A \to -1, \quad \xi_\pm = A+2 \pm 2\sqrt{A+1} \to 1, \\ & D(z) = (z-A)^2 - 4z \to (z-1)^2, \\ & \sqrt{D(z)} = \sqrt{(z-A)^2-4z} \to z-1. \end{aligned}$$

Let us calculate the following two limits:

$$\lim_{A\to-1} \frac{z^{A}e^{\sqrt{D(z)}}}{[A(A+\sqrt{D(z)})-z(A+2)]^{A}} = \frac{z^{-1}e^{z-1}}{[-(-1+z-1)-z]^{-1}}$$

$$= \frac{2(1-z)}{ze^{1-z}}.$$

$$\lim_{A\to -1} \frac{[z-\sqrt{D(z)}-(A+2)]^{A+2}}{4(A+1)} = \lim_{A\to -1} \frac{[z-\sqrt{D(z)}-(A+2)]}{4(A+1)}$$
$$= -\lim_{A\to -1} \frac{\frac{d}{dA}[\sqrt{D(z)}+A]}{\frac{d}{dA}4A} = -\frac{1}{4}\lim_{A\to -1}\left[-\frac{z-A}{\sqrt{(z-A)^2-4z}}+1\right]$$
$$= -\frac{1}{4}\left(-\frac{z+1}{z-1}+1\right) = \frac{1}{2(z-1)}.$$

In order to calculate the last limit we have used the l'Hopital rule and the formula

$$\frac{d}{dA}\sqrt{D(z)} = -\frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dA}D(z)}{\sqrt{D(z)}} = -\frac{z-A}{\sqrt{(z-A)^2-4z}}.$$

Multiplying these two limit expressions we obtain an equation for the limit curve, which is the Szegö curve

$$|ze^{1-z}| = 1.$$

Now we consider the interval $A \in (-1, 0)$ where the Laguerre polynomials have multiple zeros. In this case results depend essentially on the way by which the sequence $\{\alpha_n\}$ tends to an integer.

Lemma 3.1.5. *If $A \in (-1, 0)$ and there exists the limit*

$$\lim_{n\to\infty} [\mathrm{dist}(\alpha_n, \mathbb{Z})]^{1/n} = 0,$$

then the zeros of $L_n^{\alpha_n}(nz)$ accumulate on $\Gamma = \{0\} \cup [\xi_-, \xi_+]$ and the asymptotic zero distribution measure is

$$d\mu(x) = -A\delta_0 + \frac{\sqrt{(x-\xi_-)(\xi_+-x)}}{2\pi x}\chi_{[\xi_-,\xi_+]}dx.$$

If $A \in (-1, 0)$ and there exists the limit

$$\lim_{n\to\infty} [\mathrm{dist}(\alpha_n, \mathbb{Z})]^{1/n} = e^{-r}, \quad 0 \le r < \infty,$$

then the zeros of $L_n^{\alpha_n}(nz)$ accumulate on $\Gamma = \Gamma_r \cup [\xi_-, \xi_+]$ and the asymptotic zero distribution measure is

$$d\mu_r(x) = d\nu_r + \frac{\sqrt{(x-\xi_-)(\xi_+-x)}}{2\pi x}\chi_{[\xi_-,\xi_+]}dx,$$

$$d\nu_r(s) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\sqrt{D(s)}}{s}ds, \quad s \in \Gamma_r,$$
$$\mathrm{Re}\int_{\xi_-}^{z}\frac{\sqrt{D(s)}}{s}ds = r, \quad z \in \Gamma_r.$$

Proof. Multiple zeros of the polynomial $y(z) = L_n^{(\alpha)}(z)$ occur only at the point $z = 0$. Indeed, if at some point $z_0 \neq 0$ we assume $y(z_0) = y'(z_0) = 0$ then, according to the differential equation

$$zy''(z) + (\alpha + 1 - z)y'(z) + ny(z) = 0,$$

we have $y^{(k)}(z) = 0,\ k = 0, 1, 2, \dots,$ and therefore, $y(z) = 0$.

If $\alpha = -k \in \{-1, -2, \dots, -n\}$ then at the point $z = 0$ the polynomial $L_n^{(\alpha)}(z)$ has a zero of the order k, all the other $(n-k)$ zeros are simple and are located on a half-line $(0, +\infty)$.

If the real parameter α tends from above to the integer $-k$ then k simple zeros of the $L_n^{(\alpha)}(z)$ approach the point $z = 0$ in the directions $(+1)^{1/k}$. If the real parameter α decreases below the integer $-k$ then k simple zeros of the $L_n^{(\alpha)}(z)$ emerge from the point $z = 0$ in the directions $(-1)^{1/k}$. If the real parameter α decreases further and tends from above to the integer $-k-1$ then k previous simple zeros and one of the $(n-k)$ simple zeros, located on a half-line $(0, +\infty)$, approach together the point $z = 0$ in the directions $(+1)^{1/(k+1)}$. And then all repeats again. It is similar to the behavior of the hypergeometric polynomials at points of multiple zeros (see K. Driver, P. Duren (2001)).

Now let us consider a sequence of real numbers $\{\alpha_n\}$. If the sequence $\{\alpha_n\}$ converges to an integer in such a way that there exists the limit

$$\lim_{n\to\infty}[\mathrm{dist}(\alpha_n, \mathbb{Z})]^{1/n} = 0,$$

then zeros of $L_n^{\alpha_n}(nz)$ accumulate on $\Gamma = \{0\} \cup [\xi_-, \xi_+]$ and the asymptotic zero distribution measure is

$$d\mu(x) = -A\delta_0 + \frac{\sqrt{(x-\xi_-)(\xi_+ - x)}}{2\pi x}\chi_{[\xi_-,\xi_+]}dx.$$

If the sequence $\{\alpha_n\}$ converges to an integer in such a way that there exists the limit

$$\lim_{n\to\infty}[\mathrm{dist}(\alpha_n, \mathbb{Z})]^{1/n} = e^{-r}, \quad 0 \leq r < \infty,$$

then, using an asymptotic for the scaled Laguerre polynomial $L_n^{\alpha_n}(nz)$, we prove easily that its zeros accumulate on the curve

$$\Gamma = \Gamma_r \cup [\xi_-, \xi_+], \quad \operatorname{Re} \int_{\xi_-}^{z} \frac{\sqrt{D(s)}}{s} ds = r, \quad z \in \Gamma_r$$

and the appropriate asymptotic zero distribution measure is

$$d\mu_r(x) = d\nu_r + \frac{\sqrt{(x-\xi_-)(\xi_+ - x)}}{2\pi x} \chi_{[\xi_-,\xi_+]} dx,$$
$$d\nu_r(s) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{D(s)}}{s} ds, \quad s \in \Gamma_r.$$

We skip details of these calculations since we do not need the results of this Lemma in order to discuss solutions of the rational Richardson equations.

The case $r = 0$ is the typical one. If a sequence $\{\alpha_n\}$ is chosen randomly then with probability one the equality

$$\lim_{n\to\infty} [\operatorname{dist}(\alpha_n, \mathbb{Z})]^{1/n} = 1$$

is valid. In this case the zeros cluster on $\Gamma_0 \cup [\xi_-, \xi_+]$.

The case $0 < r < \infty$ is much more special, in this case the sequence $\{\alpha_n\}$ should approximate some integer very closely.

Conclusion. Applying results of the Theorem 2 for the zero distribution of the scaled Laguerre polynomials to solutions of the Richardson equations in rational case we should take in account first of all that $N \geq M \geq 0$ and therefore $A \leq -1$. It means that the zero distribution measure of the Richardson equations is of the form

$$d\mu(z) = \frac{1}{\pi i} \frac{\sqrt{D(z)}}{z} dz, \quad z \in \Gamma$$

and is defined on the curve Γ which is given by the equation

$$\operatorname{Re} \int_{\xi_-}^{z} \frac{\sqrt{D(t)}}{t} dt = 0$$

or, which is the same, by the equation

$$\left| \frac{z^A e^{\sqrt{D(z)}}}{4(A+1)} \frac{[z - \sqrt{D(z)} - (A+2)]^{A+2}}{[A(A+\sqrt{D(z)}) - z(A+2)]^A} \right| = 1,$$

where

$$D(z) = (z - \xi_+)(z - \xi_-), \quad \xi_\pm = A + 2 \pm 2\sqrt{A+1}.$$

[1] Belokolos E.D. Integrable Superconductivity and Richardson equations // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 3. – P. 314–326.

[2] Driver K., Duren P. Trajectories of the Zeros of Hypergeometric Polynomials $F(-n, b; 2b; z)$ for $b < -1/2$ // Constr. Approx. – 2001. – **17**. – P. 169–179.

[3] Gaudin M. Diagonalization d'une class d'hamiltoniens de spin // J. de Physique. – 1976. – **37**, № 10. – P. 1087–1098.

[4] Gaudin M. Modèles exactement résolus // CEA Saclay-Service Physique Théorique, Les Editions de Physique. – 1995.

[5] Kuijlaars A.B.J., McLaughlin K.T-R. Asymptotic Zero Behavior of Laguerre Polynomials with Negative Parameter //math.CA/0205175. – 2002.

[6] Kuijlaars A.B.J., McLaughlin K.T-R. Riemann—Hilbert Analysis for Laguerre Polynomials with Large Negative Parameter //math.CA/0204248. – 2002.

[7] Martinez-Finkelshtein A., Martinez-Gonzalez P., Orive R. On Asymptotic Zero Distribution of Laguerre and Generalized Bessel Polynomials with Varying Parameters // J. Comput. Appl. Math. – 2001. – **133**. – P. 477–487.

[8] Pritsker I.E., Varga R.S. The Szegö curve, zero distribution and weighted approximation // Trans. Amer. Math. Soc. – 1997. – **349**. – P. 4085–4105.

[9] Richardson R.W. A restricted class of exact eigenstates of the pairing-force hamiltonian // Phys. Lett. – 1963. – **3**, № 6. – P. 277–279.

[10] Szegö G. Über eine Eigenschaft der Exponentialreihe // Sitzungsber. Berl. Math. Ges. – 1924. – **23**. – P. 50–64.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2007, т.4, N 3, 27–50

517.9+531.19+530.145

Задача Коші для ланцюжка нелінійних рівнянь фон Неймана[1]

В.І. Герасименко †, ***В.О. Штик*** ††

† *Інститут математики НАН України, Київ*
E-mail: gerasym@imath.kiev.ua

†† *Інститут теоретичної фізики ім.М.М. Боголюбова НАН України, Київ*
E-mail: vshtyk@bitp.kiev.ua

Присвячується пам'яті
академіка Дмитра Яковича Петрини

Досліджено задачу Коші для ланцюжка нелінійних рівнянь фон Неймана, якою описується еволюція всіх можливих станів квантових багаточастинкових систем в термінах кореляційних операторів. Побудовано розв'язок, який зображується розкладами по кластерах частинок, еволюція яких описується кумулянтами відповідного порядку груп еволюційних операторів рівнянь фон Неймана. Для початкових даних з простору послідовностей ядерних операторів доведено теорему існування та єдиності сильного та слабкого розв'язку. Обговорюється проблема зв'язку такого розв'язку з s-частинковими статистичними операторами, які є розв'язками ланцюжка рівнянь Боголюбова, та з s-частинковими кореляційними операторами.

The Cauchy problem of the von Neumann hierarchy of nonlinear equations is investigated. One describes the evolution of all possible states of quantum many-particle systems by correlation operators. A solution of such nonlinear equations is constructed in the form of an expansion over particle clusters whose evolution is described by the corresponding-order cumulant (semi-invariant) of evolution operators of the von Neumann equations. For the initial data from the space of sequences of trace class operators the existence of a strong and a weak solution of the Cauchy problem is proved. We discuss the relationships of this solution with the s-particle statistical operators, which are solutions of the BBGKY hierarchy, and with the s-particle correlation operators of quantum systems.

[1]Робота частково підтримана Українсько-Австрійським проектом № M/124 (UA 04/2007), Цільовою програмою ВФА НАН України та Науковою програмою НАН України № 0107U002333.

1. Вступ. В роботі досліджується ланцюжок нелінійних рівнянь фон Неймана, якими описується еволюція кореляцій квантових багаточастинкових систем. Такі еволюційні рівняння виникають в ряді актуальних проблем сучасної статистичної механіки, зокрема при виводі квантових кінетичних рівнянь [10, 13, 14, 21], описі нерівноважних квантових кореляцій в ультраохолоджених фермі- та бозе-газах [17]. В даній роботі показано, що ланцюжок нелінійних рівнянь фон Неймана може бути покладено в основу побудови еволюційних рівнянь, якими описується еволюція станів квантових систем нескінченного числа взаємодіючих частинок (ієрархій рівнянь Боголюбова [1, 4, 5]).

Сформульовані раніше способи виводу ієрархії квантових рівнянь Боголюбова обґрунтовано в просторі послідовностей ядерних операторів [5, 6, 8, 13]. Послідовностями операторів з такого простору описуються системи скінченного числа частинок. Фундаментальною відкритою математичною проблемою є побудова розв'язків таких рівнянь в більш загальних просторах, яким, зокрема, належать рівноважні стани [15, 20]. Природним простором для строгого розв'язання такої проблеми є простір послідовностей інтегровних трансляційно-інваріантних ядерних операторів. Ідея введення та застосування до опису станів нескінченних систем подібних просторів (простори трансляційно-інваріантних сумовних функцій) належить Д.Я. Петрині [7].

Зупинимось на структурі статті. В другому розділі побудовано ланцюжок нелінійних рівнянь фон Неймана для кореляційних операторів, якими описується еволюція всіх можливих станів квантових систем взаємодіючих частинок. В третьому розділі розглянуто різні підходи до виводу формули розв'язку задачі Коші для такого ланцюжка нелінійних рівнянь. Встановлено, що розклади для розв'язку визначаються кумулянтами (семіінваріантами) еволюційних операторів (лінійних) рівнянь фон Неймана (Додаток 2). Кумулянти є елементами кластерних розкладів (Додаток 1) еволюційних операторів фон Неймана подібно до побудови кореляційних операторів, що описують стани системи. У роботах [3, 4, 16] було встановлено, що кумулянти еволюційних операторів рівнянь фон Неймана лежать також в основі розкладів для розв'язків задачі Коші ієрархії рівнянь Боголюбова. Отже, кумулянтна структура розкладів для розв'язків еволюційних рівнянь багаточастинкових систем відображає природу динаміки таких систем. В четвертому розділі доведено теорему існування та єдиності класичного і слабкого розв'язку задачі Коші для ланцюжка нелінійних рівнянь фон Неймана в просторі послідовностей ядерних операторів. В п'ятому розділі обговорюється питання еквівалентності різних способів опису еволюції станів квантових багаточастинкових систем.

2. Способи опису еволюції станів квантових систем частинок. Розглянемо квантову систему нефіксованого числа тотожних (безспінових) частинок масою $m = 1$ в просторі $\mathbb{R}^\nu$, $\nu \geq 1$ (в термінології статистичної механіки — нерівноважний великий канонічний ансамбль [11]). Гамільтоніан такої системи $H = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n$ — самоспряжений оператор, визначений в області $\mathcal{D}(H) = \{\psi = \oplus\psi_n \in \mathcal{F}_\mathcal{H} \mid \sum_n \|H_n\psi_n\|^2 < \infty\} \subset \mathcal{F}_\mathcal{H}$, де $\mathcal{F}_\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n}$ — простір Фока над гільбертовим простором $\mathcal{H}$ ($\mathcal{H}^0 = \mathbb{C}$). Вважатимемо, що $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu)$ (координатне представлення), тоді елемент $\psi \in \mathcal{F}_\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2(\mathbb{R}^{\nu n})$ — це послідовність функцій $\psi = \big(\psi_0, \psi_1(q_1), \ldots, \psi_n(q_1, \ldots, q_n), \ldots\big)$ така, що $\|\psi\|^2 = |\psi_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int dq_1 \ldots dq_n |\psi_n(q_1, \ldots, q_n)|^2 < +\infty$. В підпросторі нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями $\psi_n \in L^2_0(\mathbb{R}^{\nu n}) \subset L^2(\mathbb{R}^{\nu n})$ n-частинковий гамільтоніан H_n діє згідно з формулою ($H_0 = 0$)

$$H_n\psi_n = -\frac{\hbar^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \Delta_{q_i}\psi_n + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1<\ldots<i_k=1}^{n} \Phi^{(k)}(i_1, \ldots, i_k)\psi_n. \qquad (1)$$

де $\Phi^{(k)}$ — k-кратний потенціал взаємодії між частинками, що задовольняє умови Като [5], $h = 2\pi\hbar$ – стала Планка.

Стан квантової системи нефіксованого числа частинок описується нескінченною послідовністю $D = (I, D_1, \ldots, D_n, \ldots)$ самоспряжених позитивних операторів (I — одиничний оператор), визначеною на просторі Фока $\mathcal{F}_\mathcal{H}$. Оператор густини D_n (вживається також термін статистичний оператор, ядро якого відоме як матриця густини [2]), визначений в n-частинковому гільбертовому просторі $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}^{\otimes n} = L^2(\mathbb{R}^{\nu n})$, будемо позначати $D_n(1, \ldots, n)$. Для системи тотожних частинок, що задовольняють статистику Максвела – Больцмана, справедлива рівність: $D_n(1, \ldots, n) = D_n(i_1, \ldots, i_n)$, якщо $\{i_1, \ldots, i_n\} \in \{1, \ldots, n\}$. Стан системи фіксованого N числа частинок описуються однокомпонентною послідовностю $D^{(N)} = (0, \ldots$

$\ldots, 0, D_N, 0, \ldots)$.

Будемо розглядати стани системи, що належать простору $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H}) = = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ послідовностей $f = \big(I, f_1, \ldots, f_n, \ldots\big)$ ядерних операторів $f_n = f_n(1, \ldots, n) \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$, які задовольняють зазначену вище умову симетрії, з нормою

$$\|f\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H})} = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Tr}_{1,\ldots,n}|f_n(1, \ldots, n)|.$$

Всюди щільну в $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ множину фінітних послідовностей вироджених операторів [5] з нескінченно диференційовними ядрами, зосередженими на компактах, будемо позначати $\mathfrak{L}^1_0(\mathcal{F}_\mathcal{H})$. Зауважимо, що простір $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ містить послідовності операторів більш загальних, ніж ті, якими визначаються стани систем частинок.

Еволюція всіх можливих станів описується задачею Коші для послідовності рівнянь фон Неймана [1]

$$\frac{d}{dt}D(t) = -\mathcal{N}D(t), \tag{2}$$

$$D(t)|_{t=0} = D(0), \tag{3}$$

де для $f \in \mathfrak{L}^1_0(\mathcal{F}_\mathcal{H}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{N}) \subset \mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ визначено оператор фон Неймана

$$(\mathcal{N}f)_n = -\frac{i}{\hbar}\big[f_n, H_n\big] := -\frac{i}{\hbar}\big(f_n H_n - H_n f_n\big). \tag{4}$$

В просторі послідовностей ядерних операторів $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ для абстрактної задачі Коші (2)–(3) справедлива така теорема.

Теорема 1. *Розв'язок початкової задачі (2)–(3) визначається формулою*

$$D(t) = \mathcal{U}(-t)D(0)\mathcal{U}^{-1}(-t), \tag{5}$$

де $\mathcal{U}(-t) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_n(-t)$,

$$\mathcal{U}_n(-t) = e^{-\frac{i}{\hbar}tH_n},$$

$$\mathcal{U}_n^{-1}(-t) = e^{\frac{i}{\hbar}tH_n}. \tag{6}$$

Для початкових даних $D(0) \in \mathfrak{L}^1_0(\mathcal{F}_\mathcal{H}) \subset \mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ *— це сильний (класичний) розв'язок, а для довільних* $D(0) \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ *— слабкий (узагальнений) розв'язок.*

Доведення теореми наведено в додатку 1.

Зауважимо, що походження позначень (6) для унітарних груп $e^{\pm\frac{i}{\hbar}tH_n}$ пов'язано з принципом відповідності квантових та класичних систем (для класичних систем в аналогічних термінах визначається еволюційний оператор рівняння Ліувілля для густини функції розподілу) і є наслідком існування двох підходів до опису еволюції систем, а саме, як еволюції спостережуваних або станів. Надалі еволюційний оператор, яким зображується розв'язок (5), для $f \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ будемо позначати

$$\mathcal{U}(-t)f\mathcal{U}^{-1}(-t) := \mathcal{G}(-t)f. \tag{7}$$

Зобразимо стан системи $D(t)$ у формі *кластерного розкладу* [1,20] по нових операторах $g(t) = (0, g_1(t,1), \ldots, g_n(t,1,\ldots,n), \ldots)$

$$\begin{aligned}
&D_1(t,1) = g_1(t,1),\\
&D_2(t,1,2) = g_2(t,1,2) + g_1(t,1)g_1(t,2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&D_n(t,Y) = \sum_{\mathtt{P}:\, Y=\bigcup_i X_i} \prod_{X_i \subset \mathtt{P}} g_{|X_i|}(t,X_i),\ n \geq 1,
\end{aligned} \tag{8}$$

де використано такі позначення: $Y \equiv (1,\ldots,n)$, $|Y| = n$ — кількість елементів множини Y, $\sum_{\mathtt{P}}$ — сума за всіма розбиттями $\mathtt{P}$ множини Y на $|\mathtt{P}|$ непорожніх підмножин X_i, що не перетинаються.

В термінах послідовності операторів $g(t)$ стан системи, очевидно, можна описати в еквівалентний спосіб. Оператори $g_n(t)$ інтерпретуються як *кореляційні оператори* системи частинок.

Еволюція кореляційних операторів описується задачею Коші для ланцюжка нелінійних рівнянь фон Неймана

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}g_n(t,Y) = &-\mathcal{N}_n(Y)g_n(t,Y) +\\
&+ \sum_{\substack{\mathtt{P}:\, Y=\bigcup X_i,\\ |\mathtt{P}|>1}} \Big(-\mathcal{N}^{\mathrm{int}}(X_1,\ldots,X_{|\mathtt{P}|})\Big) \prod_{X_i \subset \mathtt{P}} g_{|X_i|}(t,X_i),
\end{aligned} \tag{9}$$

$$g_n(t,Y)\big|_{t=0} = g_n(0,Y), \qquad n \geq 1. \tag{10}$$

В рівнянні (9) оператор фон Неймана $\mathcal{N}_n(Y) = \mathcal{N}_n$ для системи частинок з гамільтоніаном (1) визначається формулою (4) та

$$\mathcal{N}^{\mathrm{int}}(X_1, \ldots, X_{|\mathrm{P}|}) = \\ = \sum_{\substack{Z_1 \subset X_1,\\ Z \neq \emptyset}} \ldots \sum_{\substack{Z_{|\mathrm{P}|} \subset X_{|\mathrm{P}|},\\ Z \neq \emptyset}} \mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{\left(\sum\limits_{r=1}^{|\mathrm{P}|} |Z_r|\right)} \Big(Z_1, \ldots, Z_{|\mathrm{P}|}\Big), \quad (11)$$

де $\sum\limits_{Z_j \subset X_j}$ — сума по всіх непорожніх підмножинах $Z_j \subset X_j$ та для $k = 1, \ldots, n$

$$\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{(k)}(1, 2, \ldots, k) = -\frac{i}{\hbar}\big[\,\cdot\,, \Phi^{(k)}(1, 2, \ldots, k)\big]. \quad (12)$$

Наведемо приклади нелінійних рівнянь фон Неймана (9):

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} g_1(t,1) = -\mathcal{N}_1(1) g_1(t,1),\\
&\frac{d}{dt} g_2(t,1,2) = -\mathcal{N}_2(1,2) g_2(t,1,2) - \mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{(2)}(1,2) g_1(t,1) g_1(t,2),\\
&\frac{d}{dt} g_3(t,1,2,3) = -\mathcal{N}_3(1,2,3) g_3(t,1,2,3) +\\
&\quad + \big(-\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{(2)}(1,2) - \mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{(2)}(1,3) - \mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{(3)}(1,2,3)\big) g_1(t,1) g_2(t,2,3) +\\
&\quad + \big(-\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{(2)}(1,2) - \mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{(2)}(2,3) - \mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{(3)}(1,2,3)\big) g_1(t,2) g_2(t,1,3) +\\
&\quad + \big(-\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{(2)}(1,3) - \mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{(2)}(2,3) - \mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{(3)}(1,2,3)\big) g_1(t,3) g_2(t,1,2) +\\
&\quad - \mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{(3)}(1,2,3) g_1(t,1) g_1(t,2) g_1(t,3).
\end{aligned}$$

Для системи частинок з парним потенціалом взаємодії ($k = 2$) ланцюжок нелінійних рівнянь фон Неймана (9) спрощується: наприклад, у рівнянні для кореляційних операторів $g_3(t)$ відсутні члени, що містять оператори $\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{(3)}$. В цьому випадку нелінійні члени в ланцюжку рівнянь (9) мають вигляд

$$\sum_{\mathrm{P}:\, Y = X_1 \bigcup X_2} \sum_{i_1 \in X_1} \sum_{i_2 \in X_2} \big(-\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{(2)}(i_1, i_2)\big) g_{|X_1|}(t, X_1) g_{|X_2|}(t, X_2). \quad (13)$$

Для класичних систем ланцюжок рівнянь (9) з нелінійними членами (13) — еквівалентна форма запису відповідного ланцюжка нелінійних рівнянь Ліувілля [22], сформульованого в роботі Гріна [18].

Ланцюжок нелінійних рівнянь фон Неймана (9) формально можна вивести на основі розв'язків рекурентних співвідношень (8) (Додаток 2) та послідовності рівнянь фон Неймана (2).

Підкреслимо, що у випадку систем частинок, що задовольняють Фермі та Бозе статистикам, кластерні розклади (8) та ланцюжок рівнянь (9) мають іншу структуру. Відповідні рівняння будуть розглянуті в іншій публікації.

3. Формула для розв'язку ланцюжка нелінійних рівнянь фон Неймана. Розглянемо два підходи до побудови формули для розв'язку ланцюжка нелінійних рівнянь фон Неймана. Оскільки ланцюжок (9) має структуру рекурентних рівнянь, то розв'язок можна побудувати послідовним інтегруванням неоднорідних рівнянь фон Неймана. Дійсно, розв'язки двох перших рівнянь мають вигляд

$$\begin{aligned} &g_1(t,1) = \mathcal{G}_1(-t,1)g_1(0,1),\\[2ex] &g_2(t,1,2) = \mathcal{G}_2(-t,1,2)g_2(0,1,2) +\\ &+\int\limits_0^t dt_1 \mathcal{G}_2(-t+t_1,1,2)\big(-\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{(2)}(1,2)\big)\mathcal{G}_1(-t_1,1)\mathcal{G}_1(-t_1,2)\times\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\times g_1(0,1)g_1(0,2). \end{aligned} \tag{14}$$

Розглянемо оператор у другому доданку правої частини (14)

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^t dt_1 \mathcal{G}_2(-t+t_1,1,2)\big(-\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{(2)}(1,2)\big)\mathcal{G}_1(-t_1,1)\mathcal{G}_1(-t_1,2) =\\ &= -\mathcal{G}_2(-t,1,2)\int\limits_0^t dt_1 \frac{d}{dt_1}\Big(\mathcal{G}_2(t_1,1,2)\mathcal{G}_1(-t_1,1)\mathcal{G}_1(-t_1,2)\Big) =\\ &= \mathcal{G}_2(-t,1,2) - \mathcal{G}_1(-t,1)\mathcal{G}_1(-t,2). \end{aligned} \tag{15}$$

Оператор $\mathcal{G}_2(-t,1,2) - \mathcal{G}_1(-t,1)\mathcal{G}_1(-t,2) := \mathfrak{A}_2(t,1,2)$ — кумулянт другого порядку еволюційних операторів (7). Формула (15) є аналогом формули Дюамеля (рівність (15) для обмеженого потенціалу взаємодії є строгою [9]).

При $n>2$ розв'язок рівнянь (9), побудований у формі ряду ітерацій в результаті перетворень, аналогічних (15), зображується розкладом (18).

Формулу для розв'язку ланцюжка нелінійних рівнянь фон Неймана (9)–(10) формально можна вивести також на основі розв'язку $D(t) = (I, D_1(t,1), \ldots, D_n(t,1,\ldots,n), \ldots)$ послідовності рівнянь фон Неймана (5) (Теорема 1), якщо скористатись кластерним розкладом (8).

Дійсно, розв'язок рекурентних співвідношень (8) зображується таким розкладом (Додаток 2):

$$g_n(t,Y) = \sum_{\mathtt{P}:\, Y=\bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathtt{P}|-1}(|\mathtt{P}|-1)! \prod_{X_i\subset \mathtt{P}} D_{|X_i|}(t,X_i),\ n\geq 1, \quad (16)$$

де $\sum\limits_{\mathtt{P}}$ — сума за всіма розбиттями $\mathtt{P}$ множини $Y\equiv(1,\ldots,n)$ на $|\mathtt{P}|$ непорожніх підмножин X_i, що не перетинаються.

В результаті підстановки у співвідношення (16) виразу для розв'язку (5) рівнянь фон Неймана та на основі кластерних розкладів (8) при $t=0$, маємо

$$g_n(t,Y) = \sum_{\mathtt{P}:\, Y=\bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathtt{P}|-1}(|\mathtt{P}|-1)! \prod_{X_i\subset \mathtt{P}} \mathcal{G}_{|X_i|}(-t;X_i)\times$$
$$\times \sum_{\mathtt{P}_i:\, X_i=\bigcup_{k_i} Z_{k_i}} \prod_{Z_{k_i}\subset \mathtt{P}_i} g_{|Z_{k_i}|}(0,Z_{k_i}). \quad (17)$$

Згрупувавши у формулі (17) доданки з однаковими добутками початкових операторів $\prod_{X_i\subset \mathtt{P}} g_{|X_i|}(0,X_i)$, отримуємо таку формулу для розв'язку

$$g_n(t,Y) = \sum_{\mathtt{P}:\, Y=\bigcup_i X_i} \mathfrak{A}_{|\mathtt{P}|}(t,Y_{\mathtt{P}}) \prod_{X_i\subset \mathtt{P}} g_{|X_i|}(0,X_i), \quad n\geq 1, \quad (18)$$

де $Y=(1,\ldots,n)$, $Y_{\mathtt{P}}\equiv(X_1,\ldots,X_{|\mathtt{P}|})$ — множина, елементами якої є $|\mathtt{P}|$ підмножин $X_i\subset Y$ розбиття $\mathtt{P}:\ Y=\bigcup\limits_i X_i$, $\sum\limits_{\mathtt{P}:\, Y=\bigcup_i X_i}$ — сума за всіма розбиттями $\mathtt{P}$ множини Y на $|\mathtt{P}|$ непорожніх підмножин, що не перетинаються. Еволюційні оператори $\mathfrak{A}_{|\mathtt{P}|}(t)$ при кожному $|\mathtt{P}|\geq 1$ у формулі (18) визначаються розкладами

$$\mathfrak{A}_{|\mathtt{P}|}(t,Y_{\mathtt{P}}):=\sum_{\mathtt{P}':\,Y_{\mathtt{P}}=\bigcup_k Z_k}(-1)^{|\mathtt{P}'|-1}(|\mathtt{P}'|-1)!\prod_{Z_k\subset\mathtt{P}'}\mathcal{G}_{|Z_k|}(-t;Z_k). \tag{19}$$

Еволюційний оператор $\mathfrak{A}_{|\mathtt{P}|}(t)$ інтерпретується як *кумулянт (семіінваріант)* $|\mathtt{P}|$-го порядку еволюційних операторів (7) рівнянь фон Неймана [3]. Кумулянти (19) довільного порядку $|\mathtt{P}|\geq 2$ (крім кумулянта першого порядку) мають подібну структуру:
при $|\mathtt{P}|=1$

$$\mathfrak{A}_1(t,1\cup\ldots\cup n)=\mathcal{G}_n(-t,1,\ldots,n),$$

при $|\mathtt{P}|=2$

$$\mathfrak{A}_2(t,i_1\cup\ldots\cup i_{|X_1|},i_{|X_1|+1}\cup\ldots\cup i_{|Y|})=$$
$$=\mathcal{G}_{|Y|}(-t,1,\ldots,n)-\mathcal{G}_{|X_1|}(-t,i_1,\ldots,i_{|X_1|})\mathcal{G}_{|X_2|}(-t,i_{|X_1|+1},\ldots,i_n),$$

де $\{i_1,\ldots,i_{|Y|}\}\in\{1,\ldots,n\}$. Тут використано такі позначення: запис $(i_1\cup\ldots\cup i_{|X_1|},i_{|X_1|+1}\cup\ldots\cup i_{|Y|})$ відображає ту обставину, що множини $\{i_1,\ldots,i_{|X_1|}\}$ та $\{i_{|X_1|+1},\ldots,i_{|Y|}\}$ є зв'язними частинами (кластерами відповідно $|X_1|$ та $|X_2|$ частинок) розбиття множини $Y=(1,\ldots,|X_1|,|X_1|+1,\ldots,n)$ на 2 елементи.

Наведемо характерні властивості кумулянтів (19). Кумулянти $\mathfrak{A}_n(t)$, $n\geq 1$, еволюційних операторів (7) рівнянь фон Неймана є розв'язками таких рекурентних співвідношень:

$$\mathcal{G}_n(-t,Y)=\sum_{\mathtt{P}:\,Y=\bigcup_i X_i}\prod_{X_i\subset\mathtt{P}}\mathfrak{A}_{|X_i|}(t,X_i),\quad n\geq 1, \tag{20}$$

тобто кластерних розкладів груп еволюційних операторів (7), аналогічних до (8). Цей факт доведено у Додатку 2.

Для квантової системи невзаємодіючих частинок $\mathfrak{A}_n(t)=0$ при $n\geq 2$. Дійсно, внаслідок рівності

$$\sum_{\mathtt{P}:\,Y=\bigcup_i X_i}(-1)^{|\mathtt{P}|-1}(|\mathtt{P}|-1)!=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\mathtt{s}(n,k)(k-1)!=\delta_{n,1}, \tag{21}$$

де $\mathtt{s}(n,k)$ — числа Стірлінга другого роду та $\delta_{n,1}$ — символ Кронекера, якщо $\mathcal{G}_n(-t,1,\ldots,n)=\prod_{i=1}^n\mathcal{G}_1(-t,i)$, маємо

$$\mathfrak{A}_n(t,Y) = \sum_{\mathtt{P}:\, Y=\bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathtt{P}|-1}(|\mathtt{P}|-1)! \prod_{X_i\subset \mathtt{P}} \prod_{j_i=1}^{|X_i|} \mathcal{G}_1(-t,j_i) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\mathtt{s}(n,k)(k-1)! \prod_{i=1}^{n} \mathcal{G}_1(-t,i) = 0.$$

В загальному випадку генератор кумулянта n-го порядку $n \geq 2$ є оператор $(-\mathcal{N}_n^{int})$, який визначається через n-кратний потенціал взаємодії (12). Згідно з (21) для кумулянта n-го порядку при $n \geq 2$ в сенсі поточкової збіжності справедлива рівність

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\mathfrak{A}_n(t,Y)g_n =$$
$$= \sum_{\mathtt{P}:\, Y=\bigcup_k Z_k} (-1)^{|\mathtt{P}|-1}(|\mathtt{P}|-1)! \sum_{Z_k\subset \mathtt{P}} (-\mathcal{N}_{|Z_k|}(Z_k))g_n(Y) =$$
$$= \Big(-\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{(n)}(Y)\Big)g_n(Y). \qquad (22)$$

Наведемо приклади розкладів для розв'язку (18):

$$g_1(t,1) = \mathfrak{A}_1(t,1)g_1(0,1),$$
$$g_2(t,1,2) = \mathfrak{A}_1(t,1\cup 2)g_2(0,1,2) + \mathfrak{A}_2(t,1,2)g_1(0,1)g_1(0,2),$$
$$g_3(t,1,2,3) = \mathfrak{A}_1(t,1\cup 2\cup 3)g_3(0,1,2,3) +$$
$$+\mathfrak{A}_2(t,2\cup 3,1)g_1(0,1)g_2(0,2,3) +$$
$$+\mathfrak{A}_2(t,1\cup 3,2)g_1(0,2)g_2(0,1,3) +$$
$$+\mathfrak{A}_2(t,1\cup 2,3)g_1(0,3)g_2(0,1,2) +$$
$$+\mathfrak{A}_3(t,1,2,3)g_1(0,1)g_1(0,2)g_1(0,3).$$

Зауважимо, що в початковий момент $t = 0$ розв'язок (18) задовольняє початкову умову (10). Дійсно, при $|\mathtt{P}| \geq 2$ згідно з означенням (6): $\mathcal{U}_n^{\pm 1}(0) = I$ (I — одиничний оператор), тоді при виконанні рівності (21) маємо

$$\mathfrak{A}_{|\mathtt{P}|}(0,Y_{\mathtt{P}}) = \sum_{\mathtt{P}':\, Y_{\mathtt{P}}=\bigcup_k Z_k} (-1)^{|\mathtt{P}'|-1}(|\mathtt{P}'|-1)! I = 0.$$

Розглянемо структуру розв'язку (18) для одного фізично вмотивованого прикладу початкових даних, а саме: коли початкові дані задачі Коші (9)–(10) задовольняють умову хаосу (статистично незалежні частинки) [11], тобто послідовність кореляційних операторів є такою *однокомпонентною* послідовністю:

$$g(0) = (0, g_1(0,1), 0, 0, \ldots). \tag{23}$$

Для початкових даних (23) формула для розв'язку (18) задачі Коші (9)–(10) спрощується і набирає вигляду

$$g_n(t, 1, \ldots, n) = \mathfrak{A}_n(t, 1, \ldots, n) \prod_{i=1}^{n} g_1(0, i), \quad n \geq 1. \tag{24}$$

Таким чином, якщо в початковий момент в системі відсутні кореляції (23), то кореляції, що виникають в процесі еволюції системи, визначаються формулою (24), а саме, кумулянтами груп еволюційних операторів (7).

У випадку початкових даних (23) розв'язок (24) задачі Коші для ланцюжка нелінійних рівнянь фон Неймана може бути зображено ще і в такій формі. При $n = 1$ маємо

$$g_1(t, 1) = \mathfrak{A}_1(t, 1) g_1(0, 1).$$

Тоді за означенням кумулянта 1-го порядку $\mathfrak{A}_1(t)$ і оберненого до нього еволюційного оператора $\mathfrak{A}_1(-t)$ кореляційні оператори $g_n(t)$, $n \geq 2$, з формули (24) можна виразити через одночастинковий кореляційний оператор $g_1(t)$, а саме:

$$g_n(t, 1, \ldots, n) = \widehat{\mathfrak{A}}_n(t, 1, \ldots, n) \prod_{i=1}^{n} g_1(t, i), \quad n \geq 2,$$

де $\widehat{\mathfrak{A}}_n(t, 1, \ldots, n)$ — кумулянт n-го порядку *операторів розсіяння*

$$\widehat{\mathcal{G}}_t(1, \ldots, n) := \mathcal{G}_n(-t, 1, \ldots, n) \prod_{i=1}^{n} \mathcal{G}_1(t, i), \quad n \geq 1.$$

Генератор оператора розсіяння $\widehat{\mathcal{G}}_t(1, \ldots, n)$ визначається оператором:

$$-\sum_{k=2}^{n} \sum_{i_1 < \ldots < i_k = 1}^{n} \mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{(k)}(i_1, \ldots, i_k),$$

де $\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{(k)}$ діє за формулою (12).

4. Теорема існування та єдиності розв'язку ланцюжка нелінійних рівнянь фон Неймана. Для абстрактної задачі Коші (9)–(10) в просторі ядерних операторів $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ справедлива така теорема.

Теорема 2. *Розв'язок початкової задачі (9)–(10) для ланцюжка нелінійних рівнянь фон Неймана (9) визначається формулою (18). Для* $g_n(0) \in \mathfrak{L}_0^1(\mathcal{H}_n) \subset \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ *— це сильний (класичний) розв'язок, а для довільних початкових даних* $g_n(0) \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ *— слабкий (узагальнений) розв'язок.*

Доведення існування сильного розв'язку ґрунтується на такому твердженні.

Теорема 3. *Для* $g_n \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$, $n \geq 1$, *відображення*

$$t \to \Big(\mathfrak{A}_t(g)\Big)_n(Y) \equiv \sum_{\mathrm{P}:\, Y=\bigcup_i X_i} \mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t, Y_{\mathrm{P}}) \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} g_{|X_i|}(X_i) \tag{25}$$

є групою нелінійних операторів класу C_0. *На множині* $\mathfrak{L}_0^1(\mathcal{H}_n) \subset \subset \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ *інфінітезимальний генератор* $\mathcal{N}^{nl}(\cdot)$ *групи (18) визначається таким оператором:*

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{N}^{nl}(g)\big)_n(Y) &:= -\mathcal{N}_n(Y)g_n(Y) + \\ &+ \sum_{\substack{\mathrm{P}:\, Y=\bigcup_i X_i,\\ |\mathrm{P}|>1}} \Big(-\mathcal{N}^{\mathrm{int}}(X_1, \ldots, X_{|\mathrm{P}|})\Big) \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} g_{|X_i|}(X_i),\end{aligned} \tag{26}$$

де використано позначення формули (11).

Доведення. Відображення (18) визначено для $g_n \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$, $n \geq 1$, і тоді справедлива оцінка

$$\|\big(\mathfrak{A}_t(g)\big)_n\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)} \leq n! e^{2n+1} c^n, \tag{27}$$

де $c := \max\limits_{\mathrm{P}:\, Y=\bigcup_i X_i} \|g_{|X_i|}(X_i)\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{|X_i|})}$.

Дійсно, оскільки для оператора $g_n \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ має місце рівність (Додаток 2)

$$\mathrm{Tr}_{1,\ldots,n}|\mathcal{G}_n(-t)g_n| = \|g_n\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)},$$

отримуємо

$$\begin{aligned}
&\|\big(\mathfrak{A}_t(g)\big)_n\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)} \leq \\
&\leq \sum_{\mathtt{P}\colon Y=\bigcup\limits_i X_i} \ \sum_{\mathtt{P}'\colon Y_{\mathtt{P}}=\bigcup\limits_k Z_k} (|\mathtt{P}'|-1)! \prod_{X_i\subset \mathtt{P}} \|g_{|X_i|}\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{|X_i|})} \leq \\
&\leq \sum_{\mathtt{P}\colon Y=\bigcup\limits_i X_i} c^{|\mathtt{P}|} \sum_{k=1}^{|\mathtt{P}|} s(|\mathtt{P}|,k)(k-1)! \leq \sum_{\mathtt{P}\colon Y=\bigcup\limits_i X_i} c^{|\mathtt{P}|} \sum_{k=1}^{|\mathtt{P}|} k^{|\mathtt{P}|-1} \leq \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \leq n! e^{2n+1} c^n,
\end{aligned}$$

де $\mathtt{s}(|\mathtt{P}|,k)$ — числа Стірлінга другого роду, тобто $\big(\mathfrak{A}_t(g)\big)_n \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ для довільних $t\in\mathbb{R}^1$ при $n\geq 1$.

Для еволюційного оператора $\mathfrak{A}_t(\cdot)$, який визначається рівністю (25), справедлива групова властивість, тобто

$$\mathfrak{A}_{t_1}\big(\mathfrak{A}_{t_2}(g)\big) = \mathfrak{A}_{t_2}\big(\mathfrak{A}_{t_1}(g)\big) = \mathfrak{A}_{t_1+t_2}(g).$$

Справді, для $g_n\in\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$, $n\geq 1$, та довільних $t_1,\, t_2\in\mathbb{R}^1$, згідно з формулами (18) та (19), маємо

$$\begin{aligned}
&\big(\mathfrak{A}_{t_1}\big(\mathfrak{A}_{t_2}(g)\big)\big)_n(Y) = \sum_{\mathtt{P}\colon Y=\bigcup\limits_i X_i} \mathfrak{A}_{|\mathtt{P}|}(t_1, Y_{\mathtt{P}})\times \\
&\times \prod_{X_i\subset\mathtt{P}} \ \sum_{\mathtt{P}_i\colon X_i=\bigcup\limits_{l_i} Z_{l_i}} \mathfrak{A}_{|\mathtt{P}_i|}(t_2, \{X_i\}_{\mathtt{P}_i}) \prod_{Z_{l_i}\subset\mathtt{P}_i} g_{|Z_{l_i}|}(Z_{l_i}) = \\
&= \sum_{\mathtt{P}\colon Y=\bigcup\limits_i X_i} \ \sum_{\mathtt{P}'\colon Y_{\mathtt{P}}=\bigcup\limits_j Q_j} (-1)^{|\mathtt{P}'|-1}(|\mathtt{P}'|-1)! \prod_{Q_j\subset\mathtt{P}'} \mathcal{G}_{|Q_j|}(-t_1, Q_j)\times \\
&\times \prod_{X_i\subset\mathtt{P}} \ \sum_{\mathtt{P}_i\colon X_i=\bigcup\limits_{l_i} Z_{l_i}} \ \sum_{\mathtt{P}'_i\colon \{X_i\}_{\mathtt{P}_i}=\bigcup\limits_{k_i} R_{k_i}} (-1)^{|\mathtt{P}'_i|-1}(|\mathtt{P}'_i|-1)!\times \\
&\qquad\qquad\qquad \times \prod_{R_{k_i}\subset\mathtt{P}'_i} \mathcal{G}_{|R_{k_i}|}(-t_2, R_{k_i}) \prod_{Z_{l_i}\subset\mathtt{P}_i} g_{|Z_{l_i}|}(Z_{l_i}),
\end{aligned}$$

де $\{X_i\}_{\mathtt{P}_i}\equiv(Z_1,\ldots,Z_{|\mathtt{P}_i|})$ — множина, елементами якої є $|\mathtt{P}_i|$ підмножин $Z_{l_i}\subset X_i$ із розбиття $\mathtt{P}_i\,:\,X_i=\bigcup\limits_{l_i} Z_{l_i}$. Згрупувавши доданки при однакових добутках операторів g_n, $n\geq 1$, і враховуючи групову властивість еволюційних операторів $\mathcal{U}_n^{\pm 1}(-t)$, $n\geq 1$ (6), отримуємо

$$\begin{aligned}&\big(\mathfrak{A}_{t_1}\big(\mathfrak{A}_{t_2}(g)\big)\big)_n(Y) =\\ &= \sum_{\mathrm{P}:\,Y=\bigcup_i X_i}\ \sum_{\mathrm{P}':\,Y_{\mathrm{P}}=\bigcup_k Q_k} (-1)^{|\mathrm{P}'|-1}(|\mathrm{P}'|-1)! \prod_{Q_k\subset \mathrm{P}'} \mathcal{G}_{|Q_k|}(-t_1-t_2,Q_k)\times\\ &\times \prod_{X_i\subset\mathrm{P}} g_{|X_i|}(X_i) = \sum_{\mathrm{P}:\,Y=\bigcup_i X_i} \mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t_1+t_2,Y_{\mathrm{P}}) \prod_{X_i\subset\mathrm{P}} g_{|X_i|}(X_i) =\\ &\qquad\qquad = \big(\mathfrak{A}_{t_1+t_2}(g)\big)_n(Y).\end{aligned}$$

Аналогічно доводиться рівність

$$\mathfrak{A}_{t_2}\big(\mathfrak{A}_{t_1}(g)\big) = \mathfrak{A}_{t_1+t_2}(g).$$

Властивість сильної неперервності групи $\mathfrak{A}_t(g)$ нелінійних операторів (25) по параметру $t \in \mathbb{R}^1$ є наслідком сильної неперервності групи (5) рівнянь фон Неймана [12]. Дійсно, оскільки згідно з (21) справедлива рівність

$$\sum_{\mathrm{P}:\,Y=\bigcup_i X_i}\ \sum_{\mathrm{P}':\,Y_{\mathrm{P}}=\bigcup_k Z_k} (-1)^{|\mathrm{P}'|-1}(|\mathrm{P}'|-1)! \prod_{X_i\subset\mathrm{P}} g_{|X_i|}(X_i) = g_n(Y),$$

для $g_n \in \mathfrak{L}^1_0(\mathcal{H}_n) \subset \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$, $n \geq 1$, маємо

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\Big\| \sum_{\mathrm{P}:\,Y=\bigcup_i X_i}\ \sum_{\mathrm{P}':\,Y_{\mathrm{P}}=\bigcup_k Z_k} (-1)^{|\mathrm{P}'|-1}(|\mathrm{P}'|-1)!\times\\ &\times \prod_{Z_k\subset\mathrm{P}'} \mathcal{G}_{|Z_k|}(-t,Z_k) \prod_{X_i\subset\mathrm{P}} g_{|X_i|}(X_i) - g_n(Y)\Big\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)} \leq\\ &\leq \sum_{\mathrm{P}:\,Y=\bigcup_i X_i}\ \sum_{\mathrm{P}':\,Y_{\mathrm{P}}=\bigcup_k Z_k} (|\mathrm{P}'|-1)!\times\\ &\times\lim_{t\to 0}\Big\| \prod_{Z_k\subset\mathrm{P}'} \mathcal{G}_{|Z_k|}(-t,Z_k) \prod_{X_i\subset\mathrm{P}} g_{|X_i|}(X_i) - \prod_{X_i\subset\mathrm{P}} g_{|X_i|}(X_i)\Big\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)}.\end{aligned}$$

Далі, використовуємо властивість сильної неперервності групи $\mathcal{G}_n(-t)$ (7) (Додаток 2). Оскільки в сенсі збіжності за нормою простору $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ існує границя

$$\lim_{t\to 0}(\mathcal{G}_n(-t)g_n - g_n) = 0,$$

а для множин $X_i \subset Y$, які не перетинаються, —

$$\lim_{t\to 0}\Big(\prod_{Z_k\subset \mathtt{P}'}\mathcal{G}_{|Z_k|}(-t,Z_k)g_n-g_n\Big)=0$$

для $g_n \in \mathfrak{L}^1_0(\mathcal{H}_n) \subset \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$, то остаточно маємо:

$$\lim_{t\to 0}\|\big(\mathfrak{A}_t(g)\big)_n-g_n\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)}=0.$$

Побудуємо інфінітезимальний оператор $\mathcal{N}^{nl}(\cdot)$ групи операторів (25). Враховуючи, що для $g_n \in \mathfrak{L}^1_0(\mathcal{H}_n) \subset \mathcal{D}(\mathcal{N}^{nl}_n(\cdot))$, при умовах Като на потенціал взаємодії [5] справедлива формула (38), продиференціюємо вираз $\big(\mathfrak{A}_t(g)\big)_n\psi_n$ для $\psi_n \in \mathcal{D}(H_n) \subset \mathcal{H}_n$ в сенсі поточкової збіжності. Згідно з (22) для групи (25) маємо

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\big(\mathfrak{A}_t(g)\big)_n-g_n\Big)\psi_n=\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\sum_{\mathtt{P}:\,Y=\bigcup_i X_i}\mathfrak{A}_{|\mathtt{P}|}(t,Y_{\mathtt{P}})\prod_{X_i\subset \mathtt{P}}g_{|X_i|}(X_i)-g_n(Y)\Big)\psi_n=\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(\mathfrak{A}_1(t,Y)g_n-g_n\big)\psi_n+\\
&+\sum_{\substack{\mathtt{P}:\,Y=\bigcup_i X_i,\\ |\mathtt{P}|>1}}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\mathfrak{A}_{|\mathtt{P}|}(t,Y_{\mathtt{P}})\prod_{X_i\subset \mathtt{P}}g_{|X_i|}(X_i)\psi_n=\\
&=\big(-\mathcal{N}_n g_n\big)(Y)\psi_n+\sum_{\substack{\mathtt{P}:\,Y=\bigcup_i X_i,\\ |\mathtt{P}|>1}}\Big(-\mathcal{N}^{\mathrm{int}}(Y_{\mathtt{P}})\Big)\prod_{X_i\subset \mathtt{P}}g_{|X_i|}(X_i)\psi_n,
\end{aligned} \tag{28}$$

де $Y=(1,\ldots,n)$, $Y_{\mathtt{P}}\equiv(X_1,\ldots,X_{|\mathtt{P}|})$ — множина, елементами якої є $|\mathtt{P}|$ підмножин $X_i\subset Y$ розбиття $\mathtt{P}:\ Y=\bigcup_i X_i$.

Враховуючи (28) та доведення теореми 2 (Додаток 2) для $g_n \in \mathfrak{L}^1_0(\mathcal{H}_n) \subset \mathcal{D}(\mathcal{N}^{nl}_n(\cdot)) \subset \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$, $n\geq 1$ в сенсі збіжності за нормою простору $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$, остаточно маємо

$$\lim_{t\to 0}\Big\|\frac{1}{t}\big(\big(\mathfrak{A}_t(g)\big)_n-g_n\big)-\big(\mathcal{N}^{nl}(g)\big)_n\Big\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)}=0.$$

Теорема 3 доведена.

Доведення теореми 2. З твердження теореми 3 випливає, що для початкових даних $g_n(0) \in \mathfrak{L}^1_0(\mathcal{H}_n) \subset \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$, $n \geq 1$, формулою (18) визначається єдиний класичний розв'язок задачі Коші для ланцюжка нелінійних рівнянь фон Неймана (9)–(10).

Для доведення існування слабкого розв'язку розглянемо функціонал

$$\big(\varphi_n, g_n(t)\big) := \mathrm{Tr}_{1,\ldots,n}\, \varphi_n g_n(t), \tag{29}$$

де $\varphi_n \in \mathfrak{L}_0(\mathcal{H}_n)$, $n \geq 1$, — вироджені обмежені оператори з нескінченно диференційовними ядрами, які зосереджені на компактах; оператори $g_n(t)$, $n \geq 1$, визначаються формулою (18) для довільних початкових даних $g_n(0) \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$, $n \geq 1$. Згідно з оцінкою (27) для таких операторів функціонал (29) існує.

Запишемо функціонал (29) в такий спосіб:

$$\begin{aligned}
\big(\varphi_n, g_n(t)\big) &= \sum_{\mathrm{P}: Y = \bigcup_i X_i} \Big(\varphi_n, \mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t, Y_{\mathrm{P}}) \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} g_{|X_i|}(0, X_i)\Big) = \\
&= \sum_{\mathrm{P}: Y = \bigcup_i X_i} \; \sum_{\mathrm{P}': Y_{\mathrm{P}} = \bigcup_k Z_k} (-1)^{|\mathrm{P}'|-1}(|\mathrm{P}'|-1)! \times \\
&\times \Big(\prod_{Z_k \subset \mathrm{P}'} \mathcal{G}_{|Z_k|}(t, Z_k)\varphi_n, \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} g_{|X_i|}(0, X_i)\Big),
\end{aligned} \tag{30}$$

де $\mathcal{G}_n(t)$ — група операторів, спряжена в сенсі функціонала (29) до групи операторів $\mathcal{G}_n(-t)$.

Для $g_n(0) \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ та $\varphi_n \in \mathfrak{L}_0(\mathcal{H}_n)$ внаслідок теореми 2 (Додаток 2) справедлива рівність

$$\lim_{t \to 0} \Big(\big(\frac{1}{t}(\mathcal{G}_n(t)\varphi_n - \varphi_n), g_n(0)\big) - \big(\mathcal{N}_n \varphi_n, g_n(0)\big)\Big) = 0,$$

і отже,

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \to 0} \Big(\frac{1}{t}\big(\prod_{Z_k \subset \mathrm{P}'} \mathcal{G}_{|Z_k|}(t, Z_k)\varphi_n - \varphi_n\big), \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} g_{|X_i|}(0, X_i)\Big) = \\
&= \Big(\sum_{Z_l \subset \mathrm{P}'} \mathcal{N}_{|Z_l|}(Z_l)\varphi_n, \prod_{Z_k \subset \mathrm{P}'} \mathcal{G}_{|Z_k|}(-t; Z_k) \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} g_{|X_i|}(0, X_i)\Big).
\end{aligned}$$

Тоді для виразу (30) маємо

$$\frac{d}{dt}\big(\varphi_n, g_n(t)\big) = \Big(\mathcal{N}_n\varphi_n, g_n(t)\Big) + \\ + \sum_{\substack{\mathrm{P}:\, Y=\bigcup_i X_i,\\ |\mathrm{P}|>1}} \ \sum_{\mathrm{P}':\, Y_{\mathrm{P}}=\bigcup_k Z_k} (-1)^{|\mathrm{P}'|-1}(|\mathrm{P}'|-1)! \times \\ \times\Big(\sum_{Z_l\subset \mathrm{P}'} \mathcal{N}_{|Z_l|}(Z_l)\varphi_n, \prod_{Z_k\subset\mathrm{P}'} \mathcal{G}_{|Z_k|}(-t; Z_k) \prod_{X_i\subset\mathrm{P}} g_{|X_i|}(0, X_i)\Big) = \\ = \Big(\mathcal{N}_n\varphi_n, g_n(t)\Big) + \\ + \sum_{\substack{\mathrm{P}:\, Y=\bigcup_i X_i,\\ |\mathrm{P}|>1}} \Big(\mathcal{N}^{\mathrm{int}}(X_1,\ldots,X_{|\mathrm{P}|})\varphi_n, \prod_{X_i\subset\mathrm{P}} g_{|X_i|}(t, X_i)\Big),$$

де оператор $\mathcal{N}^{\mathrm{int}}(X_1,\ldots,X_{|\mathrm{P}|})$ визначено рівностями (11), (12).

Для функціонала (29) остаточно маємо

$$\frac{d}{dt}\big(\varphi_n, g_n(t)\big) = \Big(\big(\mathcal{N}_n\varphi_n\big)(Y), g_n(t,Y)\Big) + \\ + \sum_{\substack{\mathrm{P}:\, Y=\bigcup_i X_i,\\ |\mathrm{P}|>1}} \Big(\mathcal{N}^{\mathrm{int}}(X_1,\ldots,X_{|\mathrm{P}|})\varphi_n, \prod_{X_i\subset\mathrm{P}} g_{|X_i|}(t, X_i)\Big). \qquad (31)$$

Рівність (31) означає, що для довільних початкових даних $g_n(0) \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$, $n \geq 1$, формулою (18) визначається слабкий (узагальнений) розв'язок початкової задачі для ланцюжка нелінійних рівнянь фон Неймана (9)–(10).

5. Про інші способи опису еволюції станів квантових багаточастинкових систем. Вище сформульовано два еквівалентних підходи до опису еволюції станів квантових багаточастинкових систем, а саме, на основі рівнянь фон Неймана (2) для статистичних операторів $D(t)$ та ланцюжка нелінійних рівнянь фон Неймана (9) для кореляційних операторів $g(t)$. Для систем скінченного середнього числа частинок існують інші можливості опису еволюції станів: за допомогою послідовностей s-частинкових статистичних операторів, що задовольняють ланцюжок рівнянь Боголюбова [1] (ієрархія

ББГКІ), чи s-частинкових кореляційних операторів, які визначаються ланцюжком нелінійних рівнянь Боголюбова. Традиційно такі ланцюжки виводяться в просторах послідовностей ядерних операторів відповідно на основі розв'язків рівнянь фон Неймана (нерівноважний великий канонічний ансамбль [3,5,11] або канонічний ансамбль $[1, 8, 13]$), чи з використанням кластерних розкладів s-частинкових статистичних операторів.

Якщо описувати квантову систему частинок на основі ланцюжка нелінійних рівнянь фон Неймана (9), то s-частинкові статистичні оператори, які є розв'язками ланцюжка рівнянь Боголюбова, визначаються такими розкладами

$$\begin{aligned} &F_s(t,1,...,s) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n} g_{1+n}(t, 1\cup\ldots\cup s, s+1, \ldots, s+n), \quad s \geq 1, \end{aligned} \tag{32}$$

де $g_{1+n}(t, 1\cup\ldots\cup s, s+1, \ldots, s+n)$, $n \geq 0$, — кореляційні оператори, що задовольняють узагальнений ланцюжок нелінійних рівнянь фон Неймана (9) для системи, що складається з частинок та кластера s частинок ($1\cup\ldots\cup s$ — позначення до формули (19)).

Відповідно s-частинкові кореляційні оператори визначаються такими співвідношеннями

$$\begin{aligned} G_s(t,1,...,s) &= \sum_{\mathrm{P}:\, \{1,\ldots,s\} = \bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)! \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} F_{|X_i|}(t, X_i) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n} g_{s+n}(t, 1, \ldots, s+n), \quad s \geq 1, \end{aligned} \tag{33}$$

тобто безпосередньо через розв'язки ланцюжка нелінійних рівнянь фон Неймана (9). Зауважимо, що по кореляційних операторах (33) обчислюються флуктуації системи, наприклад, середні значення квадратів відхилень спостережуваної величини від її середнього значення (дисперсія), та макроскопічні величини, які не є середніми значеннями спостережуваних.

Додаток 1. Кластерні розклади. Розглянемо послідовності $f = (I, f_1, \ldots, f_n, \ldots)$ та $h = (0, h_1, \ldots, h_n, \ldots)$, що належать простору послідовностей ядерних операторів $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$.

Лема. *Розв'язок рекурентних співвідношень (кластерних розкладів)*

$$f_n(Y) = \sum_{\mathtt{P}:\, Y=\bigcup_i X_i} \prod_{X_i \subset \mathtt{P}} h_{|X_i|}(X_i), \quad n \geq 1, \tag{34}$$

визначається такими співвідношеннями:

$$h_n(Y) = \sum_{\mathtt{P}:\, Y=\bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathtt{P}|-1}(|\mathtt{P}|-1)! \prod_{X_i \subset \mathtt{P}} f_{|X_i|}(X_i), \quad n \geq 1, \tag{35}$$

де $Y = (1, \ldots, n)$, $\sum\limits_{\mathtt{P}:\, Y=\bigcup_i X_i}$ *— сума за всіма розбиттями* $\mathtt{P}$ *множини* Y *на* $|\mathtt{P}|$ *непорожніх підмножин* X_i, *що не перетинаються.*

Доведення. На елементах $f, g \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ визначимо тензорний $*$-добуток [15, 20]

$$(f * g)_{|Y|}(Y) = \sum_{Z \subset Y} f_{|Z|}(Z) g_{|Y \setminus Z|}(Y \setminus Z),$$

де $Y = (1, \ldots, n)$, $\sum\limits_{Z \subset Y}$ — сума за всіма підмножинами Z множини Y, підмножина $Y \setminus Z$ — множина елементів Y, які не належать підмножині Z.

Внаслідок означення $*$-добутку справедлива рівність (розклад експоненти в степеневий ряд з $*$-добутком), тобто

$$\sum_{\mathtt{P}:\, Y=\bigcup_i X_i} \prod_{X_i \subset \mathtt{P}} h_{|X_i|}(X_i) = \Big(\mathbf{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{h * \ldots * h}_{k}\Big)_n(Y), \tag{36}$$

де $h = (0, h_1, \ldots, h_n, \ldots)$, а $\mathbf{1} = (1, 0, 0, \ldots)$ — одинична послідовність. Обернене перетворення відповідає розкладу логарифму відносно $*$-добутку і визначається розкладом

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \underbrace{f * \ldots * f}_{k}\Big)_n(Y) =$$
$$= \sum_{\mathtt{P}:\, Y=\bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathtt{P}|-1}(|\mathtt{P}|-1)! \prod_{X_i \subset \mathtt{P}} f_{|X_i|}(X_i). \tag{37}$$

Наслідком цих рівностей є твердження леми.

Зауважимо, що співвідношення (34),(35) справедливі також для груп еволюційних операторів (20).

Додаток 2. Доведення теореми 1. Для доведення існування сильного розв'язку, який визначається формулою (5) покажемо, що в просторі $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ формулою (5) визначається відображення $t \to \to \mathcal{G}(-t)D(0)$ яке є ізометричною групою класу C_0.

Якщо $t \in \mathbb{R}^1$, групова властивість відображення $t \to \mathcal{G}(-t)D(0) = = \mathcal{U}(-t)D(0)\mathcal{U}^{-1}(-t)$ є наслідком групової властивості унітарних операторів (6) [12].

Обчислимо норму цієї групи. За означенням (5) та рівністю $\mathcal{U}^*(-t) = \mathcal{U}^{-1}(-t)$ маємо

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{U}(-t)D(0)\mathcal{U}^{-1}(-t)| = \\
&= \big(\mathcal{U}(-t)D(0)\mathcal{U}^{-1}(-t)(\mathcal{U}^{-1}(-t))^* D^*(0)\mathcal{U}^*(-t)\big)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \big(\mathcal{U}(-t)D(0)D^*(0)\mathcal{U}^{-1}(-t)\big)^{\frac{1}{2}} = \mathcal{U}(-t)\big(D(0)D^*(0)\big)^{\frac{1}{2}}\mathcal{U}^{-1}(-t),
\end{aligned}
$$

де $D^*(0)$ — спряжений до $D(0)$ оператор. Остання рівність справедлива внаслідок рівності між собою квадратів лівої та правої частин для самоспряженого оператора $D(0)$.

Внаслідок унітарності операторів $\mathcal{U}(-t), \mathcal{U}^{-1}(-t)$ та рівності $\mathrm{Tr}AB = \mathrm{Tr}BA$, справедливої для обмеженого A та ядерного B операторів, маємо

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{G}(-t)D(0)\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H})} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Tr}_{1,\ldots,n}\mathcal{U}_n(-t)|D_n(0)|\mathcal{U}_n^{-1}(-t) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Tr}_{1,\ldots,n}|D_n(0)| = \|D(0)\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H})}.
\end{aligned}
$$

Отже, в просторі $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ група, якою визначається розв'язок (5), є ізометричною.

Властивість сильної неперервності відображення $t \to \mathcal{G}(-t)D(0)$ в просторі $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ доведено в [5] і є наслідком сильної неперервності унітарних груп (6).

Для $D(0) \in \mathfrak{L}^1_0(\mathcal{F}_\mathcal{H}) \subset \mathcal{D}(-\mathcal{N})$ в сенсі збіжності за нормою простору $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ існує границя [5], якою визначається інфінітезимальний генератор $-\mathcal{N}=\bigoplus_{n=0}^{\infty}(-\mathcal{N}_n)$ групи еволюційних операторів (7)

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(\mathcal{G}(-t)D(0)-D(0)\big)=-\frac{i}{\hbar}(HD(0)-D(0)H):=-\mathcal{N}D(0), \quad (38)$$

де $H=\bigoplus_{n=0}^{\infty}H_n$ — гамільтоніан (1) системи частинок та оператор $-\frac{i}{\hbar}(HD(0)-D(0)H)$ визначено в області $\mathcal{D}(H)\subset\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$.

Зауважимо, що відображення (7) має такі властивості. Якщо $D(0)$ — послідовність самоспряжених операторів, то внаслідок унітарності операторів (6), послідовність $\mathcal{U}(-t)D(0)\mathcal{U}^{-1}(-t)$ є послідовністю самоспряжених операторів. Якщо $D(0)$ — послідовність позитивних операторів: $(\psi,D(0)\psi)\geq 0\ \forall\psi\in\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$, тоді

$$(\psi,\mathcal{U}(-t)D(0)\mathcal{U}^{-1}(-t)\psi)=(\mathcal{U}^{-1}(-t)\psi,D(0)\mathcal{U}^{-1}(-t)\psi)\geq 0,$$

тобто група, якою визначається розв'язок (5), зберігає властивість позитивності.

Таким чином, для $D(0)\in\mathfrak{L}_0^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})\subset\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ формулою (5) зображується єдиний класичний розв'язок задачі Коші послідовності рівнянь фон Неймана (2)–(3).

Для доведення твердження, що для довільних $D(0)\in\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ формулою (5) визначається слабкий розв'язок задачі Коші послідовності рівнянь фон Неймана (2)–(3), розглянемо функціонал

$$\big(g,D(t)\big)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\mathrm{Tr}_{1,\ldots,n}\,g_n(1,\ldots,n)D_n(t,1,\ldots,n), \quad (39)$$

де $g\equiv(0,g_1,\ldots,g_n,\ldots)\in\mathfrak{L}_0(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ — фінітні послідовності вироджених обмежених операторів з нескінченно диференційованими ядрами, які зосереджені на компактах, а послідовність $D(t)=\mathcal{G}(-t)D(0)$ покомпонентно визначається формулою (5). Оскільки g — фінітна послідовність обмежених, а $D(t)$ — послідовність ядерних операторів, то функціонал (39) існує.

Запишемо функціонал (39) таким чином:

$$\big(g,D(t)\big)=\big(g,\mathcal{G}(-t)D(0)\big)=\big(\mathcal{G}(t)g,D(0)\big), \quad (40)$$

де $\mathcal{G}(t)$ — група, спряжена до групи $\mathcal{G}(-t)$.

Для $g\in\mathfrak{L}_0(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ послідовність

$$\frac{1}{t}(\mathcal{G}(t)g-g)-\mathcal{N}g \quad (41)$$

при $t \to 0$ збігається до нуля в сенсі операторної норми.

Внаслідок того, що оператор $\mathcal{N}\mathcal{G}(t)g$ належить простору послідовностей обмежених операторів $\mathfrak{L}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ (оскільки $\mathcal{G}(t)g \in \mathfrak{L}_0(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ для $g \in \mathfrak{L}_0(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}) \in \mathfrak{L}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$), а оператор $D(0) \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$, можемо зробити висновок, що функціонал $\big(\mathcal{N}\mathcal{G}(t)g, D(0)\big)$ існує.

Отже, для довільних $D(0) \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ внаслідок (41) справедлива рівність

$$\lim_{t\to 0}\Big(\big(\frac{1}{t}(\mathcal{G}(t)g - g), D(0)\big) - \big(\mathcal{N}g, D(0)\big)\Big) = 0.$$

Оскільки

$$\big(\mathcal{N}\mathcal{G}(t)g, D(0)\big) = \big(\mathcal{G}(t)\mathcal{N}g, D(0)\big),$$

остаточно маємо

$$\frac{d}{dt}\big(g, D(t)\big) = \frac{d}{dt}\big(\mathcal{G}(t)g, D(0)\big) = \\ = \big(\mathcal{N}g, \mathcal{G}(-t)D(0)\big) = \big(\mathcal{N}g, D(t)\big). \quad (42)$$

Рівності (42) означають, що для довільних початкових даних $D(0) \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ формулою (5) визначається слабкий (узагальнений) розв'язок задачі Коші для послідовності рівнянь фон Неймана (2)–(3).

[1] Боголюбов Н. Н. Лекції з квантової статистики. – Київ: Рад. школа, 1949. – 227 с.

[2] Березин Ф.А., Шубин М.А. Уравнение Шредингера. – М.: МГУ, 1983. – 392 с.

[3] Герасименко В. І., Штик В. О. Початкова задача для ланцюжка рівнянь Боголюбова квантових систем частинок // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 9. – С. 1175–1191.

[4] Герасименко В. І., Штик В. О. Критерій існування кумулянтного представлення розв'язків ієрархії рівнянь Боголюбова квантових систем // Доп. НАН України. – 2006. – № 8. – С. 7–13.

[5] Като Т. Теория возмущения линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.

[6] Петрина Д.Я. О решениях кинетических уравнений Боголюбова. Квантовая статистика // Теорет. и мат. физика. – 1972. – **13**, № 3. – С. 391–405.

[7] Петрина Д. Я. О гамильтонианах квантовой статистики и о модельном гамильтониане теории сверхпроводимости // Теорет. и мат. физика. – 1970. – **4**, № 3. – 394–411 с.

[8] Arnold A. Mathematical Properties of Quantum Evolution Equations // to appear in Lecture Notes in Mathematics. – Berlin: Springer, 2008.

[9] Banasiak J., Arlotti L. Perturbations of Positive Semigroups with Applications. – Berlin: Springer, 2006. – 438 p.

[10] Benedetto D., Castella F., Esposito R. and Pulvirenti M. A short review on the derivation of the nonlinear quantum Boltzmann equations // Commun. Math. Sci. – 2007. – **5**. – P. 55–71.

[11] Cercignani C., Gerasimenko V. I., Petrina D. Ya. Many-particle dynamics and kinetic equations. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. – 252 p.

[12] Dautray R. and Lions J. L. Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. – Berlin: Springer-Verlag, 1992. – **5**. – 562 p.

[13] Erdös L., Salmhofer M. and Yau H.-T. On quantum Boltzmann equation // J. Stat. Phys. – 2004. – **116**. – P. 367–380.

[14] Erdös L., Schlein B., Yau H.-T. Rigorous derivation of the Gross–Pitaevskii equation // Phys. Rev. Lett. – 2007. – **98**, № 4. – 040404.

[15] Genibre J. Some Applications Functional Integrations in Statistical Mechanics // *Statistical Mechanics and Quantum Field Theory* S. de Witt and R. Stord (eds.). – New York: Gordon and Breach, 1971. – P. 329–427.

[16] Gerasimenko V. I. and Ryabukha T. V. Cumulant representation of solutions of the BBGKY hierarchy of equations // Ukrainian Math. J. – 2002. – **54**, № 10. – P. 1583–1601.

[17] Gottlieb A. D. and Mauser N. J. New measure of electron correlation // Phys. Rev. Let. – 2005. – **95**, № 12. – 123003.

[18] Green M. S. Boltzmann equation from the statistical mechanical point of view // J. Chem. Phys. – 1956. – **25**, № 5. – P. 836–855.

[19] Petrina D. Mathematical foundations of quantum statistical mechanics. – Amsterdam: Kluwer, 1995. – 624 p.

[20] Ruelle D. Statistical Mechanics. Rigorous Results. – New York: Benjamin, 1969. – 314 p.

[21] Spohn H. Kinetic Equations for quantum many-particle systems //arxiv:0706.0807v1. – 2007.

[22] Shtyk V.O. On the solutions of the nonlinear Liouville hierarchy // J. Phys. A: Math. Theor. – 2007. – **40**. – P. 9733–9742.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2007, т.4, N 3, 51–57

533.72

Перехідний режим між деякими локально-максвелівськими течіями

В.Д. Гордевський [†]***, Н.В. Андріяшева***

[†] *Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, Харків*

E-mail: [†] *gordevskyy2006@yandex.ru*

Побудовано бімодальний розподіл, який наближено описує низькотемпературний перехідний режим між двома локально-максвелівськими течіями спеціального типу в розрідженому газі з пружних куль. Знайдено деякі достатні мови довільної мализни рівномірно-інтегрального відхилу між частинами рівняння Больцмана.

Bimodal distribution, which approximately describes the low-temperature transitional regime between two local-Maxwellian flows of special type in a rarefied gas of hard spheres is constructed. Some sufficient conditions for infinitesimality of uniform-integral residual between the hides of Boltzmann equation are obtained.

1. Вступ. Рівняння Больцмана у випадку моделі пружних куль має вигляд [1, 2]:

$$D(f) = Q(f,f) \tag{1}$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} \tag{2}$$

$$Q(f,f) = \frac{d^2}{2}\int_{R^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha |(v - v_1, \alpha)| \cdot [f(t, v_1^{'}, x) f(t, v^{'}, x) - \\ - f(t, v_1, x) f(t, v, x)], \tag{3}$$

де шуканий розподіл $f(t,v,x)$ залежить від часу t, координати x та швидкості молекули v; $\frac{\partial f}{\partial x}$ — його градієнт, d — діаметр частки; швидкості $v^{'}, v_1^{'}$ після зіткнення відомим чином виражаються через відповідні величини v, v_1 до зіткнення; Σ — одинична сфера, якій належить вектор α.

Загальний вигляд локальних максвеліанів, тобто розв'язків системи:

$$D(M) = Q(M,M) = 0 \tag{4}$$

досліджено, зокрема, в [2]. В роботі [3] проведено ретельний аналіз можливих типів таких максвеліанів. Один з них має вигляд:

$$M = \rho \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta(v-\widetilde{v})^2}, \tag{5}$$

де

$$\rho = \overline{\rho} e^{\beta\left(\widetilde{v}^2 + 2\overline{u}x\right)} \tag{6}$$

— густина течії ($\overline{\rho} = \text{const}$); $\beta = \frac{1}{2T}$ — обернена температура газу, а масова швидкість задається формулою:

$$\widetilde{v} = \overline{v} - \overline{u}t, \tag{7}$$

де $\overline{v}, \overline{u}$ — довільні сталі вектори. Нерівноважні стани газу, які відповідають перехідному режиму між двома такими течіями з різними гідродинамічними параметрами, можна наближено описати за допомогою бімодального розподілу [3–5]:

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2, \tag{8}$$

де максвеліанам M_1, M_2 вигляду (5)–(7) відповідають параметри β_i, $\overline{\rho}_i$, $\overline{v}_i$, $\overline{u}_i$, $i = 1, 2$, а коефіцієнтні функції $\varphi_i = \varphi_i(t, x), i = 1, 2$, є гладкими та невід'ємними. За величину, яка характеризує "ступінь наближеності" розв'язку (8) приймемо рівномірно-інтегральний відхил [3–5]:

$$\Delta = \sup_{t,x} \int_{R^3} |D(f) - Q(f, f)| \, dv. \tag{9}$$

Проблема полягає у відшуканні таких функцій φ_1, φ_2 і такої поведінки зазначених парамтрів, щоб при досить низьких температурах потоків, тобто коли $\beta_1, \beta_2 \to +\infty$, відхил Δ був як завгодно малим. Наведемо один з можливих в цьому напрямку результатів.

2. Основні результати.

Теорема 1. *Нехай функції φ_i, $i = 1, 2$, мають вигляд:*

$$\varphi_i(t, x) = \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} C_i \left(x + \overline{u}_i \frac{(\overline{v}_i - \overline{u}_i t)^2}{2\overline{u}_i^2} \right), \quad i = 1, 2, \tag{10}$$

де константи l_i, D_i задовольняють умови:

$$D_i > 0; \quad l_i \geq \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \tag{11}$$

а функції C_i — невід'ємні, фінітні і належать C^1.

Нехай, крім того,

$$\overline{u}_i = \overline{u}_{oi}\beta_i^{-n_i}, \quad i = 1,2 \tag{12}$$

$$\overline{v}_i = \overline{v}_{oi}\beta_i^{-k_i}, \quad i = 1,2, \tag{13}$$

де

$$n_i \geq 1; \quad k_i \geq \frac{1}{2}; \quad k_i \geq \frac{1}{2}n_i, \quad i = 1,2 \tag{14}$$

($\overline{u}_{oi}, \overline{v}_{oi}$ —довільні фіксовані вектори). Тоді має місце твердження:

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0, \forall D_1, D_2 : 0 < D_1, D_2 < \delta; \exists\beta_0 > 0, \forall\beta_i > \beta_0 \quad (i = 1,2),$$

$$\Delta < \varepsilon. \tag{15}$$

Доведення. Якщо в розподілі (8) врахувати вигляд максвеліанів $M_i, i = 1,2$, відповідний до (5)–(7), і використати ту обставину, що для кожного з них виконується тотожність (4), то після підстановки функції f в рівняння Больцмана (1)–(3) і перетворень, оцінок та замін змінних, аналогічних тим, що запроваджені в [4, 5] і спираються на техніку, розвинуту в [3], для відхилу Δ вигляду (9) можна отримати таку оцінку зверху:

$$\Delta \leq \sup_{t,x} \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \left[\int_{R^3} \left| S_i(t,x) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} R_j(t,x) \int_{R^3} F_{ij} e^{-w^2} dw \right| \frac{\overline{\rho}_i(t,x)}{\pi^{3/2}} e^{-u^2} du +$$

$$\left. + \frac{1}{\pi^2} \overline{\rho}_j(t,x) R_i(t,x) \int_{R^6} e^{-w^2-u^2} F_{ij} dw du \right], \tag{16}$$

де

$$S_i(t,x) = \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{v}_i - \overline{u}_i t \right) \frac{\partial\varphi_i}{\partial x}, \tag{17}$$

$$R_i = d^2 \varphi_1 \varphi_2 \overline{\rho}_i(t,x), \quad i = 1,2, \tag{18}$$

$$F_{ij} = F_{ij}(u,t,w) = \left| \frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + (\overline{v}_i - \overline{v}_j) + (\overline{u}_j - \overline{u}_i)t - \frac{w}{\sqrt{\beta_j}} \right|, \quad i \neq j, \tag{19}$$

$$\overline{\rho}_i(t,x) = \overline{\rho}_i \exp\left\{\beta_i((\overline{v}_i - \overline{u}_i t)^2 + 2\overline{u}_i x)\right\}. \tag{20}$$

З'ясуємо коректність цієї оцінки. Збіжність інтегралів в правій частині (16) очевидна, а для того, щоб існував супремум по t, x, достатньо пересвідчитись, що величини

$$\varphi_i;\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial t};\ \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right|;\ t\varphi_i;\ t\left(\overline{u}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right), \quad i = 1,2 \tag{21}$$

разом з множником вигляду (20) за умови, що φ_i мають вигляд (10), будуть обмеженими на R^4 для кожного фіксованого значення параметрів (зокрема, для β_i, $i = 1,2$). Перевіримо це. Перший з зазначених добутків, тобто $\varphi_i \overline{\rho}_i(t,x)$ після такого перепозначення

$$y = x + \overline{u}_i \frac{(\overline{v}_i - \overline{u}_i t)^2}{2\overline{u}_i^2}, \tag{22}$$

набуває вигляду:

$$\overline{\rho}_i \exp\{2\beta_i \overline{u}_i y\} \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} C_i(y). \tag{23}$$

Але завдяки (11) та фінітності функцій $C_i(y)$, $i = 1,2$, з (23), очевидно, випливає обмеженість по t, y на R^4 не тільки самого цього виразу, а ще й його добутку на t. Аналогічний висновок залишається в силі і для решти добутків (21) та (20), оскільки з (10), знову переходячи до величин, легко можна знайти, що:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = -\frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} \left[\frac{2l_i t}{1+t^2} C_i(y) + \frac{(\overline{u}_i, \overline{v}_i) - t\overline{u}_i^2}{\overline{u}_i^2} \overline{u}_i C_i^{'}(y) \right], \tag{24}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} C_i^{'}(y), \quad i = 1,2. \tag{25}$$

Далі, припущення (12)–(14), що видно з (20), дають змогу при довільних фіксованих значеннях t й x перейти в цьому виразі до низькотемпературної границі. Результат залежить від значень інших гідродинамічних параметрів наступним чином:

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} \overline{\rho}_i(t,x) = \overline{\rho}_i T_i(x), \tag{26}$$

де

$$T_i(x) = \begin{cases} 1; \quad n_i > 1; \quad k_i > \frac{1}{2}, \\ \exp\{2\overline{u}_{oi}x\}; \quad n_i = 1; \quad k_i > \frac{1}{2}, \\ \exp\{\overline{v}_{oi} + 2\overline{u}_{oi}x\}; \quad n_i = 1; \quad k_i = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{27}$$

Вирази (19) рівномірно на кожному фіксованому компакті в R^7, очевидно, прямують до нуля:

$$F_{ij} \rightrightarrows 0; \quad \beta_1, \beta_2 \to +\infty; \quad i \neq j. \tag{28}$$

Крім того, з (22) після врахування (12), (13) випливає, що величина $y - x$ має вигляд:

$$\frac{\overline{u}_{oi}}{2\overline{u}_{oi}^2} \left(\beta_i^{\frac{1}{2}n_i - k_i} \overline{v}_{oi} - \beta_i^{-\frac{1}{2}n_i} \overline{u}_{oi} t \right)^2, \tag{29}$$

тобто припущення (14) гарантує, що ця величина теж має скінченну границю:

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} (y - x) = U_i, \quad i = 1, 2, \tag{30}$$

де

$$U_i = \begin{cases} 0; & k_i > \frac{1}{2}n_i, \\ \frac{\overline{u}_{oi}\overline{v}_{oi}^2}{2\overline{u}_{oi}^2}; & k_i = \frac{1}{2}n_i. \end{cases} \tag{31}$$

Таким чином, завдяки припущенню про гладкість, функції $C_i(y)$ та $C_i^{'}$ при $\beta_1, \beta_2 \to +\infty$ прямують до своїх значень в точці $x+U_i$, $i = 1, 2$. Разом з тим, множник при $C_i^{'}$ в (24), очевидно, прямує до нуля, отже, другий доданок в цьому виразі зникає при переході до границі. Оскільки вираз в дужках при $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}$ в (17) теж прямує до нуля, можна, застосовуючи лему 1 роботи [4] (її припущення легко перевіряються з (24)–(31) при врахуванні обмеженості й неперервності всіх виразів і хорошої збіжності всіх інтегралів в (16)), прейти до границі під знаками супремумів та інтегралів, що входять до (16). Після цього переходу й подальшого тривіального інтегрування по змінних

w та u отримуємо, що права частина в (16) має таку границю при $\beta_1, \beta_2 \to +\infty$:

$$2 \max_{i=1,2} \left(l_i \sup_t \frac{|t|}{(1+t^2)^{l_i+1}} \right) \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i D_i \sup_x \left\{ T_i(x) C_i(x+U_i) \right\}, \qquad (32)$$

де $T_i(x)$ задано в (26), а U_i або дорівнює 0, або має вигляд (31) (в обох випадках функція C_i залишається фінітною, що забезпечує існування скінченного супремума по x). Вираз (32), очевидно, можна зробити як завгодно малим при досить малих значеннях $D_1, D_2 > 0$, а оскільки він є границею при $\beta_1, \beta_2 \to +\infty$ оцінки зверху для відхилу Δ (див.(16)), то й сама величина Δ за таких умов стає довільно малою, що й можна записати у вигляді твердження (15). Теорему доведено.

Зауваження. Ця теорема дає достатню умову довільної мализни відхилу Δ, але твердження (15) можна трактувати лише як існування і рівність нулю деякої повторної границі в просторі тих параметрів, які до нього входять.

3. Висновки. Дослідження процесу взаємодії між двома максвелівськими течіями в розрідженому газі почалася ще в 40–50-х роках минулого сторіччя, перш за все в зв'язку з необхідністю аналітичного опису таких нерівноважних станів, як ударна хвиля або випарювання [1]. Спочатку розглядалися лише глобальні максвеліани (незалежні від t, x), але пізніше, в роботах [3–5] та інших було розроблено підхід, який дозволив досліджувати і більш складні — нестаціонарні та неоднорідні моди в бімодальному розподілі (8). Як відомо [2, 3], вони відповідають рухам газу, які є суперпозицією обертання, трансляції та стиску — розширення у всьому просторі, що може супроводжуватись і зміною температури. Загальний вигляд таких максвеліанів є надто складним, а тому в роботі [4] враховується лише обертання, а в [3, 5] — ще і поступальний рух.

Дана робота присвячена максвеліанам такого типу, які задаються формулами (5)–(7). Легко бачити, що температура відповідної течії (тобто параметр β) тут є сталою, а обертання відсутнє, зате масова швидкість (7) залежить від часу t, а густина (6) — ще й від координати x. Характер цієї залежності дозволяє говорити про те, що такі потоки прискорюються й згущуються (зростання $\widetilde{v}$ та ρ при $t \to +\infty$). Доведена в роботі теорема, як видно з (10), стосується лише випадку, коли коефіцієнтні функції φ_1, φ_2 явно не залежать від температур потоків (тобто β_1, β_2). Отже, знайдені достатні умови довільної мализни відхилу (9) — не єдино можливі, що відкриває певні перспективи для подальших досліджень.

[1] Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана: Пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 495 с.

[2] Карлеман Р. Математические задачи кинетической теории газов: Пер. с франц. – М.: ИЛ, 1960. –120 с.

[3] Gordevskyy V.D. On the non-stationary Maxwellians // Math. Meth. Appl. Sci (MMA 455). – 2004. – **27**. – P. 231-247.

[4] Гордевский В.Д. Двухпотоковые распределения с винтовыми модами // Теорет. и мат. физика. – 2001. – **126**, № 2. –С. 234–249.

[5] Gordevskyy V.D. Transitional regime between vortical states of a gas // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications (NA 3752). – 2003. – **53**, № 3–4. – P. 481–494.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2007, т.4, N 3, 58–87

УДК 517.98

Про аналітичні розв'язки еволюційних диференціально-операторних рівнянь в банаховому просторі [1]

Грушка Я.І.

Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: grushka@imath.kiev.ua

Знайдено достатню ознаку існування аналітичного розв'язку абстрактної задачі Коші вигляду $\frac{dy}{dt} = A(t)y, \; y(0) = y_0$, де $A(t)$, $t \in U_0$, — операторнозначна функція, визначена в деякому околі нуля $U_0 \subseteq \mathbb{C}$, значеннями якої є лінійні (взагалі кажучи необмежені) оператори в банаховому просторі $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$, y_0 — елемент простору $\mathfrak{X}$. Слід зазначити, що у випадку $A(t) \equiv \mathbf{const}$ теорему про існування та єдиність аналітичного розв'язку даної задачі отримав М.Л. Горбачук. Цей результат відомий як *операторний аналог теореми Коші–Ковалевської.*

The sufficient condition of existence of an analytical solution of the abstract Cauchy problem $\frac{dy}{dt} = A(t)y, \; y(0) = y_0$, is obtained, where $A(t)$, $t \in U_0$, is an operator-valued function, defined in some neighborhood of zero $U_0 \subseteq \mathbb{C}$, which values are linear (in the general case unbounded) operators in a Banach space $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ and y_0 is an element of the space $\mathfrak{X}$. It is necessary to mark, that in the case $A(t) \equiv \mathbf{const}$ the theorem about existence and uniqueness of an analytic solution of the given problem was received by M.L. Gorbachuk. This result is known as *operator analog of the Cauchy–Kovalevskaya theorem.*

1. Вступ. Проблему існування і єдиності аналітичного розв'язку задачі Коші для диференціальних рівнянь з частинними похідними досліджували О. Коші, К. Вейерштрасс та С.В. Ковалевська. Зокрема С.В. Ковалевська довела, що задача Коші для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними з аналітичними коефіцієнтами і початковими умовами завжди має аналітичний розв'язок, якщо ця система має нормальну форму відносно часу [1, с.428–429].

[1]Ця робота частково підтримана науковою програмою НАН України № 0107U002333.

Проблема існування і єдиності аналітичного або цілого розв'язку абстрактної задачі Коші для диференціально-операторних рівнянь в банаховому просторі була розглянута в роботах М.Л. Горбачука [2–4]. Зокрема в [2] розглянуто питання існування аналітичних розв'язків абстрактної задачі Коші:

$$\frac{dy}{dt} = Ay \tag{1}$$

$$y(0) = y_0, \tag{2}$$

де A — замкнений оператор в банаховому просторі $(\mathfrak{X}, \|\ \|)$ з областю визначення $\mathcal{D}(A)$. Нагадаємо, що вектор-функція $y(t) = y(t; y_0) : U_\delta(0) \mapsto \mathfrak{X}$ називається *аналітичним розв'язком задачі Коші* (1)–(2) в околі $U_\delta(0)$ (де $U_\eta(t_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - t_0| < \eta\}$ $(t_0 \in \mathbb{C}, \eta > 0)$), якщо:

1. Функція $y(t)$ диференційовна по змінній "t" за нормою простору $\mathfrak{X}$ в околі $U_\delta(0)$;
2. $y(t) \in \mathcal{D}(A)$, $t \in U_\delta(0)$, і для довільного $t \in U_\delta(0)$ має місце рівність (1);
3. при $t = 0$ має місце рівність (2).

В роботі [2] Горбачук М.Л. довів, що абстрактна задача Коші (1)–(2) має єдиний аналітичний в деякому околі нуля розв'язок $y(t; y_0)$ $(t \in U_\delta(0), \delta > 0)$ тоді і тільки тоді, коли y_0 є аналітичним вектором оператора A.

Нагадаємо, що *множиною аналітичних векторів* оператора A називається множина:

$$\mathcal{A}(A) = \{f \in C^\infty(A) \,|\, \exists\, \alpha > 0\, \exists\, C > 0\, \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \|A^n f\| \le C\alpha^n n!\},$$

де $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ і $C^\infty(A) = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^n)$ — *множина нескінченно-диференційовних векторів* оператора A. Елементи множин $\mathcal{A}(A)$ та $C^\infty(A)$ називаються відповідно *аналітичними* та *нескінченно-диференційовними* векторами оператора A. Зауважимо, що множину $\mathcal{A}(A)$ можна подати у вигляді

$$\mathcal{A}(A) = \bigcup_{\alpha > 0} \mathcal{A}_\alpha(A),$$

де $\mathcal{A}_\alpha(A) = \{f \in C^\infty(A) \mid \exists C > 0\ \forall n \in \mathbb{N}_0\ \ \|A^n f\| \le C\alpha^n n!\}$, $\alpha > 0$. При цьому для $\alpha > 0$ множина векторів $\mathcal{A}_\alpha(A)$ є банаховим простором відносно норми:

$$\|f\|_{\mathcal{A}_\alpha(A)} = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\|A^n f\|}{\alpha^n n!}.$$

Мета даної роботи — поширити деякі з результатів М.Л. Горбачука на більш широкий клас операторно-диференціальних рівнянь вигляду $\frac{dy}{dt} = A(t)y$ зі змінним (взагалі кажучи необмеженим) операторним коефіцієнтом $A(t),\ t \in U_\delta(0)$. А саме, в даній роботі встановлюються достатні ознаки існування аналітичного в околі нуля розв'язку абстрактної задачі Коші для такого рівняння.

2. Модельний випадок рівномірно-аналітичного операторного коефіцієнта. Нехай $\mathfrak{X}$ — комплексний банаховий простір і $A(t)\ :\ U_\delta(0) \mapsto \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ — аналітична в (комплексному) околі нуля $U_\delta(0)$ операторнозначна функція (тут $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ — *простір лінійних неперервних операторів* над простором $\mathfrak{X}$, а аналітичність $A(t)$ розуміється в сенсі рівномірної операторної топології). Тоді функцію $A(t)$ можна розкласти в степеневий ряд $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^{(k)}(0)$, $t \in U_\delta(0)$, причому ряд збігається за нормою простору $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ в околі $U_\delta(0)$ (тут $A^{(k)}(0)$ — k-та похідна в нулі функції $A(t)$ в рівномірній операторній топології, де, за визначенням, $A^{(0)}(t) \equiv A(t),\ t \in U_\delta(0)$).

Припустимо, що абстрактна задача Коші:

$$y'(t) = A(t)y(t), \tag{3}$$

$$y(0) = y_0 \tag{4}$$

має аналітичний в околі $U_\delta(0)$ розв'язок $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{c}_k$, $t \in U_\delta(0)$, де $\mathbf{c}_k \in \mathfrak{X}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Зі збіжності степеневих рядів, які представляють функції $A(t)$ і $y(t)$ випливає, що для довільного числа $\delta_1 \in (0, \delta)$ існує константа $M_{\delta_1} > 0$ така, що:

$$\|A^{(k)}(0)\| \le M_{\delta_1} \frac{k!}{\delta_1^k}\,, \quad \|\mathbf{c}_k\| \le M_{\delta_1} \frac{k!}{\delta_1^k}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{5}$$

Використовуючи оцінки (5) і виконуючи стандартні операції зі степеневими рядами (почленне диференціювання розкладу функції $y(t)$ в степеневий ряд в лівій частині (3) та розклади функцій $A(t)$ і $y(t)$ в степеневі ряди і групування доданків з однаковими степенями в правій частині (3)), неважко отримати рекурентне співвідношення для визначення векторних коефіцієнтів $\{\mathbf{c}_k\}$, а саме:

$$\mathbf{c}_0 = y_0; \quad \mathbf{c}_{n+1} = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{(k)}(0)\mathbf{c}_{n-k}, \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Якщо ввести рекурентно наступні позначення: [2]

$$\begin{cases} A^{[0]}(t) := \mathbb{I}, & t \in U_\delta(0), \\ A^{[n+1]}(t) := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} A^{(k)}(t) A^{[n-k]}(t), & t \in U_\delta(0),\ n \in \mathbb{N}_0, \end{cases} \tag{6}$$

то наведена вище рекурентна формула для обчислення векторних коефіцієнтів $\mathbf{c}_n$ набуде вигляду $\mathbf{c}_n = A^{[n]}(0)y_0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Отже, довільний аналітичний в околі нуля розв'язок задачі Коші (3)–(4) записується у вигляді ряду:

$$y(t; y_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^{[k]}(0) y_0. \tag{7}$$

Навпаки, нехай y_0 — довільний елемент простору $\mathfrak{X}$. Розглянемо формальний степеневий ряд, що задається рівністю (7). Використовуючи аналітичність операторнозначної функції $A(t)$ в рівномірній операторній топології, неважко довести, що ряд (7) має ненульовий радіус збіжності, і що функція $y(t; y_0)$, яка задається цим рядом є аналітичним розв'язком задачі (3)–(4) в околі нуля.

Тому і у випадку, коли оператори $\{A(t) \,|\, t \in U_\delta(0)\}$ необмежені, природно шукати розв'язок задачі (3)–(4) у вигляді степеневого ряду (7). Так виникає потреба визначити вираз $A^{[n]}(t)$ у випадку необмежених операторів $\{A(t)\}$. Слід зауважити, що для розв'язання поставленої задачі недостатньо класу замкнених операторів, оскільки у визначенні (6) використовуються операції додавання і множення операторів, а, наприклад, сума замкнених операторів вже може виявитись незамкненим оператором. Нижче визначається клас операторів, в межах якого можна надати зміст зазначеному виразу.

3. Клас операторів $\mathcal{LO}(\mathfrak{X})$ та його властивості. Нехай $(\mathfrak{X}, \|\ \|)$ — (комплексний) банахів простір. Позначимо через $\mathcal{LO}(\mathfrak{X})$ множину всіх лінійних операторів A над простором $\mathfrak{X}$, що діють з деякої множини $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathfrak{X}$ в простір $\mathfrak{X}$ (тобто $A : \mathcal{D}(A) \mapsto \mathfrak{X}$). Отже, на

[2] Тут і надалі через $\mathbb{I}$ будемо позначати тотожний (одиничний) оператор.

оператори, з яких складається $\mathcal{LO}(\mathfrak{X})$, наперед не накладається жодних умов — таких, як замкненість або щільність області визначення. Таким чином, $\mathcal{LO}(\mathfrak{X})$ — максимально загальний клас лінійних операторів над простором $\mathfrak{X}$. Зокрема, $\mathcal{LO}(\mathfrak{X})$ містить і "порожній" оператор, область визначення якого складається лише з нульового вектора. На множині $\mathcal{LO}(\mathfrak{X})$ введемо (стандартним чином) операції додавання і множення операторів та операцію множення оператора на комплексну сталу:

Нехай $A, B \in \mathcal{LO}(\mathfrak{X})$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

1) Сумою операторів A і B будемо називати оператор $A+B$, що визначається наступним чином:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A+B) &= \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B), \\ (A+B)x &= Ax + Bx, \quad x \in \mathcal{D}(A+B). \end{aligned}$$

2) Добутком операторів A і B будемо називати оператор AB:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(AB) &= \{x \in \mathcal{D}(B) \mid Bx \in \mathcal{D}(A)\}, \\ (AB)x &= A(Bx), \quad x \in \mathcal{D}(AB). \end{aligned}$$

3) Добутком оператора A на число $\alpha \in \mathbb{C}$ будемо називати оператор αA:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\alpha A) &= \mathcal{D}(A), \\ (\alpha A)x &= \alpha(Ax), \quad x \in \mathcal{D}(\alpha A) = \mathcal{D}(A). \end{aligned}$$

Нехай $A, B, C \in \mathcal{LO}(\mathfrak{X})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Елементарною перевіркою встановлюються такі властивості введених алгебраїчних операцій над операторами з $\mathcal{LO}(\mathfrak{X})$.

1. *$A(BC) = (AB)C$;*

2. *$(\lambda A)B = \lambda AB$, зокрема $(\lambda \mathbb{I})A = \lambda A$;*

3. *$A(\lambda B) \supseteq \lambda(AB)$,* [3] *якщо, додатково, $\lambda \neq 0$, то $A(\lambda B) = \lambda AB$;*

4. *$\lambda(\mu A) = \lambda\mu A$;*

[3] Тут включення операторів слід розуміти в теоретико-множинному сенсі (якщо оператор $Q \in \mathcal{LO}(\mathfrak{X})$ розглядати як множину пар $\{(f, Qf) : f \in \mathcal{D}(Q)\}$), тобто, іншими словами, для $P, Q \in \mathcal{LO}(\mathfrak{X})$ включення $P \subseteq Q$ (або $Q \supseteq P$) означає, що $\mathcal{D}(P) \subseteq \mathcal{D}(Q)$ і $Pf = Qf$, $f \in \mathcal{D}(P)$.

5. $A + B = B + A$*;*

6. $A + (B + C) = (A + B) + C$*;*

7. $(A + B)C = AC + BC$*;*

8. $C(A + B) \supseteq CA + CB$*, якщо, додатково,* $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$*, то* $C(A + B) = CA + CB$*;*

9. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$*;*

10. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$*.*

4. Нескінченно-диференційовні і аналітичні вектори операторнозначної функції та їхні властивості. Нехай $U \subseteq \mathbb{C}$ — відкрита, зв'язна множина. І нехай $A(\cdot) : U \mapsto \mathcal{LO}(\mathfrak{X})$ — операторнозначна функція з U в $\mathcal{LO}(\mathfrak{X})$. Поняття похідної довільного порядку для функції $A(t)$ вводиться за допомогою наступного рекурентного означення.

Означення 1.

а) Покладемо, $A^{(0)}(t) := A(t)$*,* $t \in U$*. Крім того, сильною похідною (першого порядку) функції* $A(t)$ *в точці* $t_0 \in U$ *будемо називати оператор* $A'(t_0) \in \mathcal{LO}(\mathfrak{X})$*:*

$$\mathcal{D}(A'(t_0)) = \{y \in \mathfrak{X} \,|\, \exists \delta > 0 \,:\, (U_\delta(t_0) \subseteq U) \,\&\, (y \in \mathcal{D}(A(t)),\ t \in U_\delta(t_0)) \,\&\, (\text{функція } A(t)y \text{ диференційовна в точці } t_0 \text{ за нормою простору } \mathfrak{X})\};$$

$$A'(t_0)y = (A(t)y)'|_{t=t_0} = \lim_{h\to 0} \frac{A(t_0 + h) - A(t_0)}{h} y, \quad y \in \mathcal{D}(A'(t_0)).$$

б) Нехай для $k \in \mathbb{N}_0$ *визначено* k*-ту похідну* $A^{(k)}(t) \in \mathcal{LO}(\mathfrak{X})$ *функції* $A(t)$ *в кожній точці* $t \in U$*. Тоді сильною похідною* $(k+1)$*-го порядку функції* $A(t)$ *в точці* $t_0 \in U$ *будемо називати оператор:*

$$A^{(k+1)}(t_0) = (A^{(k)})'(t_0).$$

Зауваження 1. Легко довести, що для $t \in U$ і $k \in \mathbb{N}_0$ $y \in \mathcal{D}(A^{(k)}(t))$ тоді і тільки тоді, коли існує окіл $V(t) \subseteq U$ точки t

такий, що $y \in \mathcal{D}(A(\tau))$, $\tau \in V(t)$, і функція $A(\tau)y$ має k-ту похідну в точці t. При цьому:

$$A^{(k)}(t)y = (A(t)y)^{(k)}.$$

Введені вище операції над операторами з $\mathcal{LO}(\mathfrak{X})$ та визначене в означенні 1 поняття похідної довільного порядку від операторнозначної функції $A(t)$ дають змогу для довільного $k \in \mathbb{N}_0$ визначити оператор $A^{[k]}(t)$, $t \in U$ за допомогою формули (6).

Тепер для операторнозначної функції $A(\cdot) : U \mapsto \mathcal{LO}(\mathfrak{X})$ ми можемо побудувати певні класи нескінченно-диференційовних векторів. Далі будемо використовувати такі позначення:

$$\mathbb{N}^{(\infty)} = \cup_{m\in\mathbb{N}}\mathbb{N}^m; \qquad \mathbb{N}_0^{(\infty)} = \cup_{m\in\mathbb{N}}\mathbb{N}_0^m,$$

де $\mathbb{N}^m$ і $\mathbb{N}_0^m$ — m-й декартовий степінь множин $\mathbb{N}$ і $\mathbb{N}_0$ відповідно. Покладемо:

1. $C^{[\infty]}(A(\cdot),t) := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^{[n]}(t))$, $t \in U$.

2. $C^{\infty}(A(\cdot),t) := \bigcap\limits_{\nu_1,\ldots,\nu_n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(A^{(\nu_1-1)}(t)\ldots A^{(\nu_n-1)}(t)) =$
   $= \bigcap\limits_{\nu\in\mathbb{N}^{(\infty)}} \mathcal{D}(A^{(\nu-1)}(t))$, $t \in U$,
   де

   $$\nu - 1 = (\nu_1-1,\ldots,\nu_n-1) \in \mathbb{N}_0^{(\infty)},\ \nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n) \in \mathbb{N}^{(\infty)};$$
   $$A^{(\nu)}(t) = A^{(\nu_1)}(t)\ldots A^{(\nu_n)}(t), \quad \nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n) \in \mathbb{N}_0^{(\infty)}.$$

3. $C^{\infty}(A(\cdot)) := \bigcap\limits_{\nu_1,\ldots,\nu_n\in\mathbb{N};\,\tau_1,\ldots,\tau_n\in U} \mathcal{D}(A^{(\nu_1-1)}(\tau_1)\ldots A^{(\nu_n-1)}(\tau_n))$.
   Якщо Ω — деяка відкрита множина, така, що $\Omega \subseteq U$, то через $C^{\infty}(A(\cdot),\Omega)$ будемо позначати множину
   $C^{\infty}(A(\cdot),\Omega) = \bigcap\limits_{\nu_1,\ldots,\nu_n\in\mathbb{N};\,\tau_1,\ldots,\tau_n\in\Omega} \mathcal{D}(A^{(\nu_1-1)}(\tau_1)\ldots A^{(\nu_n-1)}(\tau_n))$,
   зокрема $C^{\infty}(A(\cdot)) = C^{\infty}(A(\cdot),U)$.

Очевидно, що:

$$C^{\infty}(A(\cdot),\Omega) \subseteq C^{\infty}(A(\cdot),t), \quad t \in \Omega,$$
$$\text{зокрема } C^{\infty}(A(\cdot)) \subseteq C^{\infty}(A(\cdot),t), \quad t \in U.$$

В наступній лемі буде доведено, що

$$C^{\infty}(A(\cdot),t) \subseteq C^{[\infty]}(A(\cdot),t), \quad t \in U.$$

Лема 1. *Нехай* $x \in C^{\infty}(A(\cdot),t)$ *для деякого* $t \in U$. *Тоді* $x \in C^{[\infty]}(A(\cdot),t)$ *і для довільного* $n \in \mathbb{N}$ *має місце рівність:*

$$A^{[n]}(t)x = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^{(\infty)},\, |\nu|=n} Q^{[\nu]} A^{(\nu-1)}(t)x, \tag{8}$$

де $\quad |\nu| = \nu_1 + \cdots + \nu_m$, $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_m) \in \mathbb{N}_0^{(\infty)}$*;*

$$Q^{[\nu]} = \binom{\nu_1 + \cdots + \nu_m - 1}{\nu_1 - 1} \binom{\nu_2 + \cdots + \nu_m - 1}{\nu_2 - 1} \cdots \binom{\nu_m - 1}{\nu_m - 1} =$$

$$= \frac{|\nu|!}{\nu_1! \cdots \nu_m!} \frac{\nu_1 \cdots \nu_m}{(\nu_1 + \cdots + \nu_m)(\nu_2 + \cdots + \nu_m) \cdots \nu_m},$$

$$\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_m) \in \mathbb{N}^{(\infty)}.$$

Доведення. Нехай $t \in U$, $x \in C^{\infty}(A(\cdot),t)$. Необхідно довести, що *для довільного* $n \in \mathbb{N}$ $x \in \mathcal{D}(A^{[n]}(t))$ *і має місце рівність* (8).

При $n = 1$ останнє твердження встановлюється тривіальною перевіркою. Припустимо по індукції, що це твердження справедливе при всіх натуральних $k \le n$, де $n \in \mathbb{N}$.

Тоді, за індуктивним припущенням, $x \in \mathcal{D}(A^{[k]}(t))$, $k \in \overline{1,n}$, причому

$$A^{[k]}(t)x = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^{(\infty)},\, |\nu|=k} Q^{[\nu]} A^{(\nu-1)}(t)x, \quad k \in \overline{1,n},$$

де $\overline{M,N} = \{M, \ldots, N\}$ $(M, N \in \mathbb{Z},\ M \le N)$. З останньої рівності, зокрема, випливає, що $A^{[k]}(t)x \in C^{\infty}(A(\cdot),t)$, $k \in \overline{0,n}$ (при $k = 0$ дане співвідношення випливає з умови леми). Тому $x \in \mathcal{D}(A^{[n+1]}(t))$ і, використовуючи означення оператора $A^{[n+1]}(t)$ та індуктивне припущення, отримуємо:

$$A^{[n+1]}(t)x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{(k)}(t) A^{[n-k]}(t)x = \binom{n}{n} A^{(n)}(t)x +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu \in \mathbb{N}^{(\infty)},\, |\nu|=n-k} \binom{n}{k} Q^{[\nu]} A^{(k)}(t) A^{(\nu-1)}(t)x. \tag{9}$$

Зауважимо, що при $k \in \overline{0,\, n-1}$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m) \in \mathbb{N}_0^{(\infty)}$, $|\nu| = n-k$ має місце рівність:

$$\begin{gathered}
\binom{n}{k} Q^{[\nu]} = \binom{(k+1)+\nu_1+\cdots+\nu_m-1}{(k+1)-1} \times \\
\times \binom{\nu_1+\cdots+\nu_m-1}{\nu_1-1} \binom{\nu_2+\cdots+\nu_m-1}{\nu_2-1} \cdots \binom{\nu_m-1}{\nu_m-1} = Q^{[\widetilde{\nu}]}, \\
\widetilde{\nu} = ((k+1), \nu_1, \ldots, \nu_m) \in \mathbb{N}^{(\infty)}, \quad |\widetilde{\nu}| = n+1, \quad \widetilde{\nu}_1 = (k+1).
\end{gathered}$$

Навпаки, якщо $\widetilde{\nu} \in \mathbb{N}^{(\infty)}$, $|\widetilde{\nu}| = n+1$, $\widetilde{\nu}_1 = (k+1)$, то легко бачити, що число $Q^{[\widetilde{\nu}]}$ можна подати у вигляді $Q^{[\widetilde{\nu}]} = \binom{n}{k} Q^{[\nu]}$ де $\nu \in \mathbb{N}^{(\infty)}$, $|\nu| = n-k$. Отже, з (9) випливає:

$$\begin{aligned}
&A^{[n+1]}(t)x = Q^{[(n+1)]} A^{((n+1)-1)}(t)x + \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu \in \mathbb{N}^{(\infty)},\, |\nu|=n+1,\, \nu_1=k+1} Q^{[\nu]} A^{(\nu-1)}(t)x = \\
&\qquad\qquad = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^{(\infty)},\, |\nu|=n+1} Q^{[\nu]} A^{(\nu-1)}(t)x.
\end{aligned}$$

Лему доведено.

З леми 1 випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Нехай $x \in C^\infty(A(\cdot), t)$ для деякого $t \in U$. Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}_0$ $A^{[n]}(t)x \in C^\infty(A(\cdot), t)$, причому*

$$A^{(\mu)}(t) A^{[n]}(t)x = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^{(\infty)},\, |\nu|=n} Q^{[\nu]} A^{(\mu)}(t) A^{(\nu-1)}(t)x, \ \mu \in \mathbb{N}_0^{(\infty)}, n \in \mathbb{N}.$$

Означення 2. *Нехай $t \in U$. Покладемо:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(A(\cdot), t) := \{x \in C^\infty(A(\cdot)) \,|\, \exists \alpha > 0\, \exists C > 0\, \forall \nu \in \mathbb{N}^{(\infty)} \\
\|A^{(\nu-1)}(t)x\| \le C\alpha^{|\nu|} \nu!\},
\end{aligned}$$

де $\nu! = m!(\nu_1-1)! \ldots (\nu_m-1)!$, $\nu = (\nu_1, \ldots \nu_m) \in \mathbb{N}^{(\infty)}$.

Вектори з множини $\mathcal{A}(A(\cdot), t)$ будемо називати ***аналітичними векторами*** *операторнозначної функції $A(\cdot)$ в точці t.*

Легко бачити, що множину $\mathcal{A}(A(\cdot),t)$ можна подати у вигляді:

$$\mathcal{A}(A(\cdot),t)=\bigcup_{\alpha>0}\mathcal{A}_\alpha(A(\cdot),t),$$

де $\mathcal{A}_\alpha(A(\cdot),t)=\{f\in C^\infty(A(\cdot))\,|\,\exists C>0\ \forall\nu\in\mathbb{N}^{(\infty)}\ \|A^{(\nu-1)}(t)x\|\leq \leq C\alpha^{|\nu|}\nu!\},\quad \alpha>0$.

Лема 2. *Нехай $x\in\mathcal{A}_\alpha(A(\cdot),t)$, де $t\in U$ і $\alpha>0$. Тоді існує така константа $C=C(t,x)>0$, що для довільних $k,n\in\mathbb{N}_0$ мають місце нерівності:*

1) $\|A^{(k)}(t)A^{[n]}(t)x\|\leq(C2^n\alpha^{n+1}(n+1)!)\cdot\alpha^k k!$ *;*
2) $\|A^{[n]}(t)x\|\leq C\,(2\alpha)^n\,n!$ *.*

Доведення. 1) Нехай $x\in\mathcal{A}_\alpha(A(\cdot),t)$ $(\alpha>0)$. Тоді:

$$\exists C>0\ \forall\nu\in\mathbb{N}^{(\infty)}\ \ \|A^{(\nu-1)}(t)x\|\leq C\alpha^{|\nu|}\nu!\,, \tag{10}$$

причому, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $C\geq\|x\|$. Звідси, використовуючи наслідок 1, для $n,k\in\mathbb{N}_0$, $n\geq1$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\|A^{(k)}(t)A^{[n]}(t)x\|\leq&\sum_{\nu\in\mathbb{N}^{(\infty)},\,|\nu|=n}Q^{[\nu]}\|A^{(k)}(t)A^{(\nu-1)}(t)x\|\leq\\&\leq C\sum_{\nu\in\mathbb{N}^{(\infty)},|\nu|=n}Q^{[\nu]}\alpha^{|\nu^{(k)}|}(\nu^{(k)})!\,,\end{aligned}$$

де $\nu^{(k)}=(k+1,\nu_1,\ldots,\nu_m)$, $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_m)\in\mathbb{N}^{(\infty)}$; $\left|\nu^{(k)}\right|=|\nu|+ +k+1$, $(\nu^{(k)})!=k!\nu!(m+1)$. Тому:

$$\begin{aligned}\|A^{(k)}(t)A^{[n]}(t)x\|&\leq C\alpha^{n+k+1}k!\sum_{\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_m)\in\mathbb{N}^{(\infty)},\,|\nu|=n}Q^{[\nu]}\nu!(m+1)=\\&=C\alpha^{n+k+1}k!\sum_{\nu\in\mathbb{N}^{(\infty)},\,|\nu|=n}\frac{|\nu|!}{\nu_1!\cdots\nu_m!}\times\\&\qquad\times\frac{\nu_1\cdots\nu_m\cdot m!(m+1)(\nu_1-1)!\ldots(\nu_m-1)!}{(\nu_1+\cdots+\nu_m)(\nu_2+\cdots+\nu_m)\cdots\nu_m}=\\&=C\alpha^{n+k+1}k!\sum_{\nu\in\mathbb{N}^{(\infty)},\,|\nu|=n}\frac{n!m!(m+1)}{(\nu_1+\cdots+\nu_m)(\nu_2+\cdots+\nu_m)\cdots\nu_m}\leq\end{aligned}$$

$$\leq C\alpha^{n+k+1}k!\,n!(n+1)\sum_{\nu\in\mathbb{N}^{(\infty)},\,|\nu|=n} 1 = C\alpha^{n+k+1}k!(n+1)!\cdot 2^{n-1}\leq$$
$$\leq C\alpha^{n+k+1}k!(n+1)!\cdot 2^{n}\ .$$

Остання нерівність (якщо брати до уваги лише її ліву та праву частину), згідно з (10), має місце і при $n=0$.

2) З останньої нерівності при $n\in\mathbb{N}_0$, $n\geq 1$, отримуємо:

$$\|A^{[n]}(t)x\| = \left\|\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}A^{(k)}(t)A^{[n-1-k]}(t)x\right\|\leq$$
$$\leq C\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\alpha^{n}k!\,(n-k)!\,2^{n-k-1} = C\alpha^{n}(n-1)!\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)2^{n-k-1} = C\alpha^{n}(n-1)!((n-1)2^{n}+1)\leq C(2\alpha)^{n}n!.$$

Оскільки $C\geq\|x\|$, то остання нерівність (якщо брати до уваги лише її ліву та праву частину) має місце і при $n=0$.

Лему доведено.

Лема 3. *Нехай $x\in\mathcal{A}_\alpha(A(\cdot),t)$, де $t\in U$ і $\alpha>0$. Тоді:*

1) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{A^{[n]}(t)x}{n!}(\tau-t)^n$ абсолютно збігається за нормою простору $\mathfrak{X}$ при $\tau\in U_{\frac{1}{2\alpha}}(t)$;

2) для довільного $n\in\mathbb{N}_0$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{A^{(k)}(t)A^{[n]}(t)x}{k!}(\tau-t)^k$ збігається абсолютно при $\tau\in U_{\frac{1}{\alpha}}(t)$;

3) для довільних $n,k\in\mathbb{N}_0$ і $\tau\in U$ $x\in\mathcal{D}(A^{(k)}(\tau)A^{[n]}(t))$, причому для $\tau\in U\cap U_{\frac{1}{\alpha}}(t)$ має місце рівність:

$$A(\tau)A^{[n]}(t)x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{(k)}(t)A^{[n]}(t)x}{k!}(\tau-t)^k.$$

Доведення. Перший і другий пункти леми випливають з леми 2. Доведемо третій пункт леми.

Нехай $x\in\mathcal{A}_\alpha(A(\cdot),t)$ $(t\in U,\ \alpha>0)$ і $n\in\mathbb{N}_0$. Оскільки $x\in\mathcal{A}_\alpha(A(\cdot),t)$, то за означенням $x\in C^\infty(A(\cdot)):=$

$:= \bigcap\limits_{\nu_1,\ldots,\nu_n \in \mathbb{N};\, \tau_1,\ldots,\tau_n \in U} \mathcal{D}(A^{(\nu_1-1)}(\tau_1)\ldots A^{(\nu_n-1)}(\tau_n))$. Зокрема, з леми 1 випливає, що $x \in \mathcal{D}(A^{(k)}(\tau)A^{[n]}(t))$ для довільних $k \in \mathbb{N}_0$ і $\tau \in U$. Отже, згідно із зауваженням 1, функція $f_{n,t,x}(\tau) = A(\tau)A^{[n]}(t)x$ є означеною і нескінченно-диференційовною в будь-якій точці $\tau \in U$, причому:

$$f^{(k)}_{n,t,x}(\tau) = A^{(k)}(\tau)A^{[n]}(t)x, \qquad k \in \mathbb{N}_0,\ \tau \in U. \tag{11}$$

Розглянемо довільний лінійний неперервний функціонал $l \in \mathfrak{X}^*$. Покладемо:

$$\phi_{n,t,x,l}(\tau) := \langle f_{n,t,x}(\tau),\, l\rangle = \left\langle A(\tau)A^{[n]}(t)x,\, l\right\rangle, \qquad \tau \in U.$$

З (11) випливає, що комплекснозначна функція комплексного змінного $\phi_{n,t,x,l}(\tau)$ є нескінченно-диференційовною при всіх $\tau \in U$, а отже і аналітичною на U, причому:

$$\phi^{(k)}_{n,t,x,l}(\tau) = \left\langle A^{(k)}(\tau)A^{[n]}(t)x,\, l\right\rangle, \qquad \tau \in U, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{12}$$

З аналітичності функції $\phi_{n,t,x,l}(\tau)$ на U (і зокрема в околі точки $t \in U$) випливає існування такого числа δ_t ($0 < \delta_t \le \frac{1}{\alpha}$), що цю функцію можна розкласти в степеневий ряд на $U_{\delta_t}(t)$. Звідси, використовуючи (12), при $\tau \in U_{\delta_t}(t)$ отримуємо:

$$\phi_{n,t,x,l}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{(k)}_{n,t,x,l}(t)}{k!}(\tau - t)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left\langle A^{(k)}(t)A^{[n]}(t)x,\, l\right\rangle}{k!}(\tau - t)^k.$$

Але з п.2 даної леми випливає, що ряд в правій частині останньої рівності збігається абсолютно при $\tau \in U_{\frac{1}{\alpha}}(t)$. Тому, використовуючи теорему єдиності для аналітичних функцій та неперервність функціоналу l, маємо:

$$\left\langle A(\tau)A^{[n]}(t)x,\, l\right\rangle = \phi_{n,t,x,l}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left\langle A^{(k)}(t)A^{[n]}(t)x,\, l\right\rangle}{k!}(\tau - t)^k =$$

$$= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{(k)}(t)A^{[n]}(t)x}{k!}(\tau - t)^k,\, l\right\rangle, \qquad \tau \in U \cap U_{\frac{1}{\alpha}}(t)$$

(ряд в правій частині рівності збігається за нормою простору $\mathfrak{X}$). Далі, враховуючи, що остання рівність справедлива для довільного функціоналу $l \in \mathfrak{X}^*$, отримуємо істинність третього пункту леми.

Лему доведено.

5. Приклади нескінченно-диференційовних та аналітичних векторів. Нехай $M \in \mathbb{N}$ і $A_1, \ldots, A_M \in \mathcal{LO}(\mathfrak{X})$, і нехай функції $a_1(t), \ldots, a_M(t)$ — аналітичні в деякому околі $U \subseteq \mathbb{C}$. Розглянемо операторнозначну функцію:

$$A(t) = \sum_{k=1}^{M} a_k(t) A_k, \quad t \in U. \tag{13}$$

З означення алгебраїчних операцій над операторами з $\mathcal{LO}(\mathfrak{X})$ випливає, що $\mathcal{D}(A(t)) = \bigcap_{k=1}^{M} \mathcal{D}(A_k)$, $t \in U$. Враховуючи зауваження 1, отримуємо, що $\mathcal{D}(A^{(n)}(t)) = \bigcap_{k=1}^{M} \mathcal{D}(A_k) = \mathcal{D}(A(t))$, $t \in U$, $n \in \mathbb{N}_0$, причому $A^{(n)}(t)x = \sum_{k=1}^{M} a_k^{(n)}(t) A_k x$, $x \in \mathcal{D}(A(t)) = \bigcap_{k=1}^{M} \mathcal{D}(A_k)$. Отже,

$$A^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{M} a_k^{(n)}(t) A_k, \quad t \in U,\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{14}$$

Наслідуючи О.В. Стрільця [5], покладемо:

$$C^\infty\{A_1, \ldots, A_M\} := \bigcap_{k_1, \ldots, k_m \in \overline{1,M}} \mathcal{D}(A_{k_1}, \ldots A_{k_m});$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\{A_1, \ldots, A_M\} := \{ & x \in C^\infty\{A_1, \ldots, A_M\} \,:\, \exists c > 0\ \exists \alpha > 0 \\ & \forall m \in \mathbb{N}\ \forall k_1, \ldots, k_m \in \overline{1,M}\ \ \|A_{k_1}, \ldots A_{k_m} x\| \le c\alpha^m m! \} \,. \end{aligned}$$

Вектори з множин $C^\infty\{A_1, \ldots, A_M\}$ та $\mathcal{A}\{A_1, \ldots, A_M\}$ будемо називати відповідно ***сумісними*** *нескінченно-диференційовними* та *аналітичними* векторами для набору операторів $A_1, \ldots, A_M \in \mathcal{LO}(\mathfrak{X})$.

Твердження 1. *Нехай операторнозначна функція $A(t)$ задається формулою (13). Тоді:*

1) Якщо $x \in C^\infty\{A_1, \ldots, A_M\}$ то $x \in C^\infty(A(\cdot))$, причому для довільних $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m) \in \mathbb{N}^{(\infty)}$ і $t \in U$:

$$A^{(\nu-1)}(t)x = \sum_{k_1=1}^{M} \cdots \sum_{k_m=1}^{M} a_{k_1}^{(\nu_1-1)}(t) \cdots a_{k_m}^{(\nu_m-1)}(t)\, A_{k_1} \ldots A_{k_m} x. \tag{15}$$

2) Якщо $x \in \mathcal{A}\{A_1, \ldots, A_M\}$, то $x \in \mathcal{A}(A(\cdot), t)$ для довільного $t \in U$.

Доведення. 1) Використовуючи (14) і властивості алгебраїчних операцій на $\mathcal{LO}(\mathfrak{X})$, для довільних $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m) \in \mathbb{N}^{(\infty)}$ і $\tau_1, \ldots, \tau_m \in U$ отримуємо:

$$A^{(\nu_1-1)}(\tau_1) \cdots A^{(\nu_m-1)}(\tau_m) =$$
$$= \sum_{k_1=1}^{M} a_{k_1}^{(\nu_1-1)}(\tau_1) A_{k_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{M} a_{k_m}^{(\nu_m-1)}(\tau_m) A_{k_m} \supseteq$$
$$\supseteq \sum_{k_1=1}^{M} \cdots \sum_{k_m=1}^{M} a_{k_1}^{(\nu_1-1)}(\tau_1) \cdots a_{k_m}^{(\nu_m-1)}(\tau_m)\ A_{k_1} \cdots A_{k_m}.$$

З останнього включення випливає, що якщо $x \in C^\infty\{A_1, \ldots, A_M\}$, то $x \in C^\infty(A(\cdot))$, зокрема при $\tau_1 = \cdots = \tau_m = t$, де $t \in U$, отримуємо рівність (15).

2) Оскільки функції $a_1, \ldots, a_M$ — аналітичні в околі U, то для довільного $t \in U$ існують константи $c_1(t), \alpha_1(t) > 0$ такі, що

$$\forall n \in \mathbb{N}_0\ \forall k \in \overline{1, M} \quad |a_k^{(n)}(t)| \le c_1(t)(\alpha_1(t))^n n!\,. \tag{16}$$

Нехай $x \in \mathcal{A}\{A_1, \ldots, A_M\}$. Тоді $x \in C^\infty\{A_1, \ldots, A_M\}$ і існують константи $c > 0$ і $\alpha > 0$ такі, що

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \forall k_1, \ldots, k_m \in \overline{1, M} \quad \|A_{k_1} \cdots A_{k_m} x\| \le c\alpha^m m!\,. \tag{17}$$

Отже, згідно з п.1 даного твердження $x \in C^\infty(A(\cdot))$. Крім того, згідно з (15), (16) та (17), для довільних $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m) \in \mathbb{N}^{(\infty)}$ і $t \in U$ отримуємо:

$$\left\| A^{(\nu-1)}(t) x \right\| \le c \sum_{k_1=1}^{M} \cdots \sum_{k_m=1}^{M} \left| a_{k_1}^{(\nu_1-1)}(t) \cdots a_{k_m}^{(\nu_m-1)}(t) \right| \alpha^m m! \le$$
$$\le c \sum_{k_1=1}^{M} \cdots \sum_{k_m=1}^{M} (c_1(t))^m (\alpha_1(t))^{|\nu|-m} (\nu_1 - 1)! \cdots (\nu_m - 1)!\, \alpha^m m!$$
$$= c(\alpha c_1(t))^m (\alpha_1(t))^{|\nu|-m} \nu! \cdot M^m \le c(\max(M\alpha c_1(t), \alpha_1(t)))^{|\nu|} \nu!$$

Твердження доведено.

У випадку $A(t) \equiv A_1 = 1 \cdot A_1$, $t \in \mathbb{C}$, де $A_1 \in \mathcal{LO}(\mathfrak{X})$ з твердження 1 випливає що для оператора $A \in \mathcal{LO}(\mathfrak{X})$ $\quad C^\infty(A_1) \subseteq C^\infty(A(\cdot))$ і $\mathcal{A}(A_1) \subseteq \mathcal{A}(A(\cdot), t)$ для довільного $t \in \mathbb{C}$. Легко переконатись, що обернені включення при довільному $t \in \mathbb{C}$ також мають місце. Тому $C^\infty(A_1) = C^\infty(A(\cdot))$, $\mathcal{A}(A_1) = \mathcal{A}(A(\cdot), t)$, $\ t \in \mathbb{C}$. Отже, введені вище поняття нескінченно-диференційовних та аналітичних векторів операторнозначної функції є узагальненнями понять нескінченно-диференційовних та аналітичних векторів оператора.

Розглянемо приклад найпростішого диференціального оператора першого порядку вигляду

$$(A(t)x)(\xi) = f(t, \xi)\frac{dx}{d\xi} + g(t, \xi)x. \tag{18}$$

Для строгості викладу будемо вважати, що оператори $A(t)$, $t \in U$, діють в просторі $\mathfrak{X} = C([a, b])$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$ і їх областю визначення є $\mathcal{D}(A(t)) = C^1([a, b])$, $t \in U$, де $U \subseteq \mathbb{C}$ — відкрита і зв'язна множина, а функції f і g неперервні по сукупності змінних на $U \times [a, b]$. В цьому випадку введену вище операторнозначну функцію $A(t)$ можна подати у вигляді $A(t) = F(t)B + G(t)$, $\ t \in U$, де B — оператор диференціювання першого порядку у просторі $\mathfrak{X}$:

$$\mathcal{D}(B) = C^1([a, b]); \quad (Bx)(\xi) = \frac{dx}{d\xi}, \quad \xi \in [a, b],\ x \in \mathcal{D}(B), \tag{19}$$

а операторнозначні функції $F(t)$ і $G(t)$ визначаються за формулами:

$$(F(t)x)(\xi) = f(t, \xi)x(\xi);\ (G(t)x)(\xi) = g(t, \xi)x(\xi),\ \xi \in [a, b], t \in U.$$

Легко бачити, що $F(t), G(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $t \in U$.

В зв'язку з цим, перш, ніж розглядати операторнозначну функцію вигляду (18) в просторі $\mathfrak{X} = C([a, b])$, розглянемо більш абстрактний випадок, коли операторнозначна функція $A(\cdot)$ задається формулою

$$A(t) = F(t)B + G(t), \qquad t \in U, \tag{20}$$

в довільному банаховому просторі $\mathfrak{X}$, де $U \subseteq \mathbb{C}$ — відкрита і зв'язна множина, $B \in \mathcal{LO}(\mathfrak{X})$ і $F(t), G(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $t \in U$.

З твердження 1 випливає, що у випадку, коли функції F і G — скалярні і аналітичні по змінній "t", *довільний аналітичний вектор* *оператора B є аналітичним вектором операторнозначної функції* (20). Наступний крок — встановити умови на операторнозначні функції F і G, при яких останнє, виділене курсивом, твердження зберігає силу.

Означення 3. *Нехай $U \subseteq \mathbb{C}$ — відкрита, зв'язна множина і $B \in \mathcal{LO}(\mathfrak{X})$. Будемо говорити, що операторнозначна функція $F(\cdot): U \mapsto \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ є* ***аналітичною відносно оператора*** *B, якщо існують такі числа $C(F) > 0$ і $\alpha(F) > 0$, що для довільного $\alpha \geq \alpha(F)$ має місце умова:*

$$x \in \mathcal{A}_\alpha(B) \Rightarrow \forall t \in U \; F(t)x \in \mathcal{A}_\alpha(B) \text{ і } \|F(t)x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)} \leq C(F)\, \|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)},$$

де простір $\mathcal{A}_\alpha(B)$ і норма $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)}$ визначаються так само, як і у випадку замкнутого оператора B у вступній частині статті.

Приклад 1. Нехай $f(\cdot): U \mapsto \mathbb{C}$ — довільна обмежена на відкритій, зв'язній множині $U \subseteq \mathbb{C}$ комплекснозначна функція комплексної змінної ($|f(t)| \leq M,\, t \in U,$ де $M > 0$) і $B \in \mathcal{LO}(\mathfrak{X})$. Тоді легко перевірити, що функція $F(t) = f(t)\mathbb{I}$ є аналітичною відносно оператора B. Також легко бачити, що справедливе більш загальне твердження.

Довільна обмежена за операторною нормою операторнозначна функція $F(\cdot): U \mapsto \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ ($\|F(t)\| \leq M,\ t \in U,$ де $M > 0$), яка комутує з оператором B на аналітичних векторах цього оператора (тобто для довільного $x \in \mathcal{A}(B)$ $F(t)x \in \mathcal{D}(B)$ і $BF(t)x = F(t)Bx$), є аналітичною відносно оператора B.

Приклад 2. Нехай $U \subseteq \mathbb{C}$ — відкрита, зв'язна множина і нехай функція $f(t,\xi)$ аналітична по змінній "ξ" (при кожному $t \in U$) і обмежена на множині $U \times U_\delta([a,b])$ ($\delta > 0,\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b$), де $U_\delta(\Omega) = \{z \in \mathbb{C} : \exists \zeta \in \Omega\, |z - \zeta| < \delta\}$ — δ-окіл множини $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Використовуючи інтегральну формулу Коші, при $t \in U,\ \xi \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}_0$ отримуємо:

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial \xi^n} f(t,\xi)\right| \leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{\gamma_{\delta/2}(\xi)} \frac{|f(t,\zeta)|}{|\zeta - \xi|^{n+1}} |d\zeta| \leq \widetilde{C}\, \beta^n n!, \tag{21}$$

де $\gamma_\eta(z) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| = \eta\},\ z \in \mathbb{C}, \eta > 0,\ \widetilde{C} = \sup\limits_{U \times U_\delta([a,b])} (|f|)$, $\beta = 2/\delta$.

Нехай B — оператор диференціювання першого порядку у просторі $\mathfrak{X} = C([a,b])$, визначений вище, а операторнозначна функція

$F(t)$ задається формулою:

$$(F(t)x)(\xi) = f(t,\xi)x(\xi), \qquad \xi \in [a,b],\, t \in U. \tag{22}$$

Розглянемо довільне число $\alpha \in \mathbb{R}$ таке, що $\alpha > 2\beta$. Використовуючи (21), для довільної функції $x \in \mathcal{A}_\alpha(B)$ при $t \in U$, $\xi \in [a,b]$ і $n \in \mathbb{N}_0$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
&|(B^n F(t)x)(\xi)| = \left| \frac{\partial^n}{\partial \xi^n}(f(t,\xi)x(\xi)) \right| = \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^{n-k} f(t,\xi)}{\partial \xi^{n-k}} x^{(k)}(\xi) \right| \le \\
&\le \widetilde{C} \|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta^{n-k}(n-k)!\alpha^k k! = \\
&= \widetilde{C} \|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)} n! \sum_{k=0}^{n} \beta^{n-k}\alpha^k = \widetilde{C} \|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)} n! \, \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \le \\
&\le \widetilde{C} \|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)} n! \frac{\alpha \cdot \alpha^n}{\alpha - \beta} \le 2\widetilde{C} \|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)} \alpha^n n!\,.
\end{aligned}$$

Отже, $F(t)x \in \mathcal{A}_\alpha(B)$ і $\|F(t)x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)} \le 2\widetilde{C}\|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)}$, $t \in U$.

Таким чином, згідно з означенням 3, якщо функція $f(t,\xi)$ аналітична по змінній "ξ" і обмежена на множині $U \times U_\delta([a,b])$, де $\delta > 0$, то функція $F(\cdot)$, що задається формулою (22), є аналітичною відносно оператора B. Це означає, що на поняття аналітичності операторнозначної функції відносно оператора можна дивитись як на абстрактне, операторне узагальнення поняття аналітичності функції двох змінних по "просторовій" змінній.

Лема 4. *Нехай:*

а) B — замкнений оператор зі щільною областю визначення в банаховому просторі $\mathfrak{X}$.

б) Операторнозначна функція $F(\cdot) : U \mapsto \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ — аналітична відносно числової змінної та відносно оператора B в U.

Тоді:

1) Для довільних $x \in \mathcal{A}(B)$ і $n \in \mathbb{N}_0$ функція $B^n F(t)x$ — аналітична по змінній "t" в U.

2) Для довільних $x \in \mathcal{A}(B)$, $t \in U$ і $n, m \in \mathbb{N}_0$ $\quad F^{(m)}(t)x \in \mathcal{D}(B^n)$ і $(B^n F(t)x)^{(m)} = B^n F^{(m)}(t)x$.

3) Якщо $x \in \mathcal{A}_\alpha(B)$, де $\alpha > \alpha(F)$, то для довільних $t \in U$ і $m \in \mathbb{N}_0$ $F^{(m)}(t)x \in \mathcal{A}_\alpha(B)$, причому

$$\left\|F^{(m)}(t)x\right\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)} \leq C(F)\left(\frac{1}{\rho(t,\partial U)}\right)^m m!\,\|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)},$$

де числа $C(F)$ і $\alpha(F)$ — ті ж самі, що і в означенні 3 (тут $\rho(t,\partial U)$ — відстань від точки $t \in \mathbb{C}$ до границі області U (∂U)).

4) Нехай функція $G(\cdot) : U \mapsto \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ — аналітична відносно числової змінної та відносно оператора B в U і $A(t) = F(t)B + G(t)$, $t \in U$.

Тоді якщо $x \in \mathcal{A}_\alpha(B)$, де $\alpha \geq \alpha(F,G)$, то для довільних $\beta > \alpha$, $n \in \mathbb{N}_0$ і $t \in U$ $A^{(n)}(t)x \in \mathcal{A}_\beta(B)$, причому

$$\left\|A^{(n)}(t)x\right\|_{\mathcal{A}_\beta(B)} \leq \frac{C(F,G)\beta}{e\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)}\left(\frac{1}{\rho(t,\partial U)}\right)^n n!\|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)}$$

(тут $\alpha(F,G) = \max(e,\alpha(F),\alpha(G))$, $C(F,G) = C(F) + C(G)$).

Доведення. 1) Нехай $x \in \mathcal{A}(B)$. Тоді існує число $\alpha > \alpha(F)$ таке, що $x \in \mathcal{A}_\alpha(B)$. Тому, за означенням 3, функція $B^nF(t)x$ визначена при довільних $n \in \mathbb{N}_0$ і $t \in U$.

Перше твердження леми будемо доводити методом математичної індукції по n. При $n = 0$ справедливість цього твердження випливає з аналітичності функції $F(\cdot)$. Припустимо, що перше твердження леми справедливе для деякого числа $n \in \mathbb{N}_0$. Тоді для довільного $y \in \mathcal{D}(B^*)$ функція

$$\phi_y(t) = \left\langle B^{n+1}F(t)x, y\right\rangle = \left\langle B^nF(t)x, B^*y\right\rangle, \qquad t \in U,$$

буде аналітичною на U. Нехай $t \in U$ і число $\delta_t > 0$ — таке, що $U_{\delta_t}(t) \Subset U$, де символ "$\Subset$" означає компактне включення. Розглянемо довільне $\tau \in U_{\frac{\delta_t}{2}}(t)$. Враховуючи, що згідно з означенням 3

$$|\phi_y(\xi)| = \left|\left\langle B^{n+1}F(\xi)x, y\right\rangle\right| \leq \left\|B^{n+1}F(\xi)x\right\|\,\|y\| \leq$$

$$\leq \|F(\xi)x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)}\,\alpha^{n+1}(n+1)!\|y\| \leq C(F)\|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)}\alpha^{n+1}(n+1)!\|y\| =$$

$$= \widetilde{C}(n,x)\|y\|\ ,\xi \in U,$$

де $\widetilde{C}(n,x) = C(F)\|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)}\alpha^{n+1}(n+1)!$, використовуючи інтегральну формулу Коші, отримуємо:

$$|\phi_y(t)-\phi_y(\tau)| \le \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\gamma_{\delta_t}(t)} |\phi_y(\xi)|\left|\frac{1}{\xi-t}-\frac{1}{\xi-\tau}\right||d\xi| \le$$

$$\le \frac{\widetilde{C}(n,x)}{2\pi}\|y\|\oint\limits_{\gamma_{\delta_t}(t)}\left|\frac{1}{\xi-t}-\frac{1}{\xi-\tau}\right||d\xi| = \frac{\widetilde{C}(n,x)}{2\pi}\|y\|\oint\limits_{\gamma_{\delta_t}(t)}\frac{|t-\tau|\,|d\xi|}{\delta_t|\xi-\tau|} \le$$

$$\le \frac{\widetilde{C}(n,x)}{2\pi}\|y\|\frac{|t-\tau|}{\frac{1}{2}\delta_t^2}2\pi\delta_t = \frac{2\widetilde{C}(n,x)}{\delta_t}\,|t-\tau|\,\|y\|.$$

Отже, при $t\in U$ і $\tau \in U_{\frac{\delta_t}{2}}(t)$:

$$\left\langle B^{n+1}F(t)x - B^{n+1}F(\tau)x, y\right\rangle = |\phi_y(t)-\phi_y(\tau)| \le \frac{2\widetilde{C}(n,x)}{\delta_t}\,|t-\tau|\,\|y\|.$$

Звідси, внаслідок замкненості B та щільності $\mathcal{D}(B)$ (а отже і щільності $\mathcal{D}(B^*)$ в $\mathfrak{X}^*$),

$$\left\|B^{n+1}F(t)x - B^{n+1}F(\tau)x\right\| \le \frac{2\widetilde{C}(n,x)}{\delta_t}\,|t-\tau| \to 0, \quad \tau\to t.$$

Таким чином, функція $B^{n+1}F(t)x$ неперервна за нормою простору $\mathfrak{X}$ по змінній "t" на U. Крім того, використовуючи інтегральну формулу Коші, для довільного зімкненого контура $\gamma\subset U$ і для довільного $y\in\mathcal{D}(B^*)$ отримуємо:

$$\left\langle \oint_\gamma B^{n+1}F(\xi)x\,d\xi,\, y\right\rangle = \oint_\gamma \left\langle B^{n+1}F(\xi)x,\, y\right\rangle d\xi = \oint_\gamma \phi_y(\xi)\,d\xi = 0.$$

Далі, оскільки множина $\mathcal{D}(B^*)$ є щільна, то $\oint_\gamma B^{n+1}F(\xi)x\,d\xi = 0$ (для довільного зімкненого контура $\gamma\subset U$). Тому функція $B^{n+1}F(t)x$ — аналітична в U.

2) Друге твердження леми також будемо доводити методом математичної індукції по номеру n. При $n=0$ це твердження випливає з умови леми. Припустимо, що друге твердження леми справедливе для деякого $n\in\mathbb{N}_0$. З першого пункту леми (тобто з аналітичності функції $B^lF(t)x$ при $l\in\mathbb{N}_0$) випливає, що для $t\in U$,

$x \in \mathcal{A}(B)$ і $m \in \mathbb{N}_0$ $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h^m}\Delta_h^m B^l F(t)x = (B^l F(t)x)^{(m)}$, $l \in \mathbb{N}_0$, де $\Delta_h^m f(t) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k}\binom{m}{k} f(t+kh)$ (тут $f : U \mapsto \mathfrak{X}$ — векторнозначна функція і число $h \in \mathbb{C}$ таке, що $U_{mh}(t) \subseteq U$). Отже, враховуючи рівність

$$\frac{1}{h^m}\Delta_h^m B^{n+1}F(t)x = B\left(\frac{1}{h^m}\Delta_h^m B^n F(t)x\right), \qquad h \in \mathbb{C}, \quad U_{mh}(t) \subseteq U,$$

та замкненість оператора B, отримуємо:

$$(B^n F(t)x)^{(m)} \in \mathcal{D}(B), \quad B(B^n F(t)x)^{(m)} = (B^{n+1}F(t)x)^{(m)}. \tag{23}$$

Але, за індуктивним припущенням, $F^{(m)}(t)x \in \mathcal{D}(B^n)$ і $(B^n F(t)x)^{(m)} = B^n F^{(m)}(t)x$. Тому згідно з (23), $F^{(m)}(t)x \in \mathcal{D}(B^{n+1})$ і $(B^{n+1}F(t)x)^{(m)} = B^{n+1}F^{(m)}(t)x$.

3) Нехай $x \in \mathcal{A}_\alpha(B)$ ($\alpha > \alpha(F)$), $t \in U$, $n, m \in \mathbb{N}_0$ і нехай число $\delta > 0$ таке, що $U_\delta(t) \Subset U$. Використовуючи п.2 даної леми та інтегральну формулу Коші маємо:

$$\left\|B^n F^{(m)}(t)x\right\| = \left\|(B^n F(t)x)^{(m)}\right\| \le \frac{m!}{2\pi} \oint\limits_{\gamma_\delta(t)} \frac{\|B^n F(\xi)x\|}{|\xi - t|^{m+1}}|d\xi| =$$

$$= \frac{m!}{2\pi\delta^{m+1}} \oint\limits_{\gamma_\delta(t)} \|B^n F(\xi)x\|\,|d\xi| \le \frac{m!\alpha^n n!}{2\pi\delta^{m+1}} \oint\limits_{\gamma_\delta(t)} \|F(\xi)x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)}\,|d\xi| \le$$

$$\le \frac{m!\,\alpha^n n!}{2\pi\delta^{m+1}} C(F)\,\|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)} \oint\limits_{\gamma_\delta(t)} |d\xi| = C(F)\,\|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)} \left(\frac{1}{\delta}\right)^m m!\,\alpha^n n!\,.$$

Звідси, внаслідок довільності вибору числа $\delta > 0$ такого, що $U_\delta(t) \Subset U$, отримуємо третє твердження леми.

4) Із зауваження 1 випливає, що якщо $x \in \mathcal{D}(B)$, то для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $t \in U$ $\quad x \in \mathcal{D}(A^{(n)}(t))$, причому

$$A^{(n)}(t)x = F^{(n)}(t)Bx + G^{(n)}(t)x. \tag{24}$$

Нехай $x \in \mathcal{A}_\alpha(B)$ ($\alpha \ge \alpha(F,G)$). Тоді зі сказаного вище випливає, що $x \in \mathcal{D}(A^{(n)}(t))$ ($n \in \mathbb{N}_0$, $t \in U$). Далі, для довільних $m \in \mathbb{N}_0$ і $\beta > \alpha$ маємо:

$$\|B^m Bx\| = \left\|B^{m+1}x\right\| \le \|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)}\,\alpha(m+1)\,\alpha^m m! \le$$

$$\leq \|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)}\,\alpha\sup_{\tau\geq -1}\left((\tau+1)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\tau}\right)\beta^m m! = -\frac{\|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)}\,\alpha\beta^m m!}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)e\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} =$$

$$= \|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)}\left(\frac{\beta}{e\left(-\ln\left(1+\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)\right)\right)}\right)\beta^m m! \leq \frac{\beta\,\|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)}}{e\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)}\beta^m m!$$

Отже, $Bx \in \mathcal{A}_\beta(B)$, причому $\|Bx\|_{\mathcal{A}_\beta(B)} \leq \frac{\beta}{e\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)}\|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)}$. Звідси, використовуючи (24) та п.3 даної леми, враховуючи, що $\beta > \alpha \geq \geq \alpha(F,G) = \max(e, \alpha(F), \alpha(G))$, отримуємо:

$$A^{(n)}(t)x \in \mathcal{A}_\beta(B);$$

$$\begin{aligned}
&\left\|A^{(n)}(t)x\right\|_{\mathcal{A}_\beta(B)} \leq \\
&\leq \left(\frac{1}{\rho(t,\partial U)}\right)^n n!\left(C(F)\|Bx\|_{\mathcal{A}_\beta(B)} + C(G)\|x\|_{\mathcal{A}_\beta(B)}\right) \leq \\
&\leq \left(\frac{1}{\rho(t,\partial U)}\right)^n n!\left(\frac{C(F)\beta}{e\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)} + C(G)\right)\|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)} \leq \\
&\qquad\qquad \leq \frac{(C(F)+C(G))\beta}{e\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)}\left(\frac{1}{\rho(t,\partial U)}\right)^n n!\,\|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)}.
\end{aligned}$$

Лему доведено.

Твердження 2. *Нехай B — замкнений оператор зі щільною областю визначення в просторі $\mathfrak{X}$ і операторнозначні функції $F(\cdot), G(\cdot) : U \mapsto \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ — аналітичні відносно числової змінної та відносно оператора B в U.*

Тоді для операторнозначної функції $A(\cdot)$, що задається формулою (20), $\mathcal{A}(B) \subseteq \mathcal{A}(A(\cdot), t)$, $t \in U$.

Доведення. Нехай $x \in \mathcal{A}(B)$. Тоді існує число $\alpha \geq \alpha(F,G)$ таке, що $x \in \mathcal{A}_\alpha(B)$. Тому, згідно з лемою 4 (п.4), $x \in \mathcal{D}(A^{(n)}(t))$ і $A^{(n)}(t)$ $x \in \mathcal{A}(B)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $t \in U$. Отже,

$$x \in C^\infty(A(\cdot)) = \bigcap_{\nu_1,\ldots,\nu_n\in\mathbb{N};\,\tau_1,\ldots,\tau_n\in U} \mathcal{D}(A^{(\nu_1-1)}(\tau_1)\ldots A^{(\nu_n-1)}(\tau_n)).$$

Розглянемо довільний мультиіндекс $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m) \in \mathbb{N}^{(\infty)}$. З леми 4 (п.4) випливає, що при $t \in U$ $A^{(\nu-1)}(t)x = A^{(\nu_1-1)}(t)\cdots \cdots A^{(\nu_m-1)}(t)x \in \mathcal{A}_{\frac{\alpha}{\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^m}}(B)$, причому

$$\|A^{(\nu-1)}(t)x\| \leq \|A^{(\nu-1)}(t)x\|_{\mathcal{A}_{\frac{\alpha}{\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^m}}(B)} \leq$$

$$\leq \frac{C(F,G)\alpha \cdot \left(\frac{1}{\rho(t,\partial U)}\right)^{\nu_1-1}}{e\left(1-\frac{\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^m}{\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{m-1}}\right)\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^m}(\nu_1-1)!\ \cdots$$

$$\cdots\ \frac{C(F,G)\alpha \cdot \left(\frac{1}{\rho(t,\partial U)}\right)^{\nu_m-1}}{e\left(1-\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\right)\left(1-\frac{1}{m+1}\right)}(\nu_m-1)!\|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)} =$$

$$= \left(\frac{C(F,G)\alpha}{e}\right)^m \frac{(m+1)^m}{\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{\frac{m(m+1)}{2}}}\left(\frac{1}{\rho(t,\partial U)}\right)^{|\nu|-m}\frac{\nu!}{m!}\|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)} \leq$$

$$\leq (C(F,G)\alpha)^m\,(m+1)^m e^{\frac{(m+1)}{2}-m}\left(\frac{1}{\rho(t,\partial U)}\right)^{|\nu|-m}\frac{\nu!}{m!}\|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)} \leq$$

$$\leq \left(\max\left(C(F,G)\alpha, \frac{1}{\rho(t,\partial U)}\right)\right)^{|\nu|} C^{(!)}\frac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^m}{\sqrt{2\pi m}}e^{\frac{(m+1)}{2}}\nu!\|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)} \leq$$

$$\leq \frac{e^{3/2}}{\sqrt{2\pi}}C^{(!)}\|x\|_{\mathcal{A}_\alpha(B)}(\widetilde{\alpha}_t)^{|\nu|}\nu!\,,$$

де $\widetilde{\alpha}_t = \sqrt{e}\cdot\max\left(C(F,G)\alpha, \frac{1}{\rho(t,\partial U)}\right)$, $C^{(!)} = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\frac{\sqrt{2\pi k}k^k e^{-k}}{k!}$.

Твердження доведено.

Застосовуючи твердження 2 і результати прикладу 2 до операторнозначної функції $A(\cdot)$, що задається формулою (18), отримуємо такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай $U \subseteq \mathbb{C}$ — відкрита, зв'язна множина і нехай функції $f(t,\xi)$, $g(t,\xi)$ — аналітичні за сукупністю змінних на множині $U_\delta(U)\times U_\delta([a,b])$, де $\delta > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Тоді для операторнозначної функції $A(t)$, що задається формулою (18), кожна* *аналітична на відрізку* $[a,b]$ *функція, що допускає аналітичне продовження в деякий окіл* $U_\eta([a,b])$ $(\eta > 0)$ *цього відрізка належить до класу* $\mathcal{A}(A(\cdot),t)$, $t \in U$.

6. Існування аналітичного розв'язку абстрактної задачі Коші. Нехай U_0 — деякий зв'язний окіл нуля в $\mathbb{C}$ (тобто U_0 — відкрита і зв'язна множина, така, що $0 \in U_0$), $A(t) : U_0 \mapsto \mathcal{LO}(\mathfrak{X})$ — деяка операторнозначна функція. Тоді ми можемо розглянути абстрактну задачу Коші (3)–(4).

Означення 4. *Нехай* U_0' *— деякий окіл нуля в* $\mathbb{C}$, *такий, що* $U_0' \subseteq U_0$ *і нехай* y_0 *— довільний вектор простору* $\mathfrak{X}$. *Будемо говорити, що векторнозначна функція* $y(\cdot) : U_0' \mapsto \mathfrak{X}$ *є розв'язком задачі Коші (3)–(4) в околі* U_0', *якщо:*

1. *Функція* $y(t)$ *диференційовна в околі* U_0' *за нормою простору* $\mathfrak{X}$;
2. $y(t) \in \mathcal{D}(A(t))$, $\ t \in U_0'$;
3. *Для довільного* $t \in U_0'$ *має місце рівність (3);*
4. *При* $t = 0 \quad y(0) = y_0$, *тобто має місце рівність (4).*

Теорема 1. *Нехай:*

1) U_0 *— деякий зв'язний окіл нуля в* $\mathbb{C}$ *і* $A(\cdot) : U_0 \mapsto \mathcal{LO}(\mathfrak{X})$ *— операторнозначна функція така, що оператори* $A(t)$ *є замкненими при* $t \in U_0$.

2) $y_0 \in \mathcal{A}(A(\cdot),0)$.

Тоді існує таке число $\delta > 0$, *що:*

а) *Ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^{[n]}(0)y_0}{n!} t^n$ *абсолютно збігається при* $t \in U_\delta(0)$.

б) *Функція* $y(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^{[n]}(0)y_0}{n!} t^n$ *є аналітичним розв'язком задачі Коші (3)–(4) в околі* $U_0 \cap U_\delta(0)$.

Доведення. Нехай функція $A(\cdot) : U_0 \mapsto \mathcal{LO}(\mathfrak{X})$ задовольняє умови теореми і $y_0 \in \mathcal{A}(A(\cdot),0)$. Тоді існує таке число $\alpha > 0$, що $y_0 \in \mathcal{A}_\alpha(A(\cdot),0)$. Покладемо, $\delta := \frac{1}{2\alpha}$.

а) Згідно з лемою 3, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{A^{[n]}(0)y_0}{n!}t^n$ абсолютно збігається при $t\in U_\delta(0)=U_{\frac{1}{2\alpha}}(0)$.

б) Покладемо:

$$y(t) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^{[n]}(0)y_0}{n!}t^n, \qquad t\in U_0\cap U_\delta(0).$$

Тоді, за означенням функції $y(t)$, $\quad y(0)=A^{[0]}(0)y_0=y_0$. Доведемо, що $y(t)$ — розв'язок рівняння (3) в околі $U_0\cap U_\delta(0)$. Покладемо:

$$y_N(t) := \sum_{n=0}^{N}\frac{A^{[n]}(0)y_0}{n!}t^n, \qquad t\in U_0\cap U_\delta(0),\ N\in\mathbb{N}.$$

Тоді $\lim_{N\to\infty}y_N(t)=y(t)$, $t\in U_0\cap U_\delta(0)$, і згідно з теоремою про почленне диференціювання степеневого ряду:

$$y'(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^{[n+1]}(0)y_0}{n!}t^n=\lim_{N\to\infty}y_N'(t) \qquad t\in U_0\cap U_\delta(0). \tag{25}$$

Оскільки $y_0\in\mathcal{A}(A(\cdot),0)$, то $y_0\in C^\infty(A(\cdot))$. Тому, за лемою 1 та означенням $C^\infty(A(\cdot))$, $\quad A^{[n]}(0)y_0\in\mathcal{D}(A(t))$ $(t\in U_0,\ n\in\mathbb{N}_0)$ і $y_N(t)\in\mathcal{D}(A(t))$ $(N\in\mathbb{N},\ t\in U_0)$, причому:

$$A(t)y_N(t)=\sum_{n=0}^{N}\frac{A(t)A^{[n]}(0)y_0}{n!}t^n, \qquad t\in U_0\cap U_\delta(0),\ N\in\mathbb{N}.$$

Звідси, використовуючи лему 3 (п.3), при $t\in U_0\cap U_\delta(0)$ і $N\in\mathbb{N}$ отримуємо:

$$A(t)y_N(t)=\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{(k)}(0)A^{[n]}(0)y_0}{n!\,k!}t^{n+k}. \tag{26}$$

Згідно з лемою 2, п.1:

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\frac{A^{(k)}(0)A^{[n]}(0)y_0}{n!\,k!}t^{n+k}\right\|=\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left\|A^{(k)}(0)A^{[n]}(0)y_0\right\|}{n!\,k!}|t|^{n+k}\le$$
$$\le\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C(2^n\alpha^{n+1}(n+1)!)\cdot\alpha^k k!}{n!\,k!}|t|^{n+k}=$$

$$= \alpha C \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{\infty} (2\alpha)^n (n+1) \alpha^k |t|^{n+k} \le$$
$$\le \alpha C \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (2\alpha |t|)^{n+k} (n+1) < \infty, \quad t \in U_\delta(0) = U_{\frac{1}{2\alpha}}(0). \qquad (27)$$

Отже, подвійний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{(k)}(0)A^{[n]}(0)y_0}{n!\,k!} t^{n+k}$ збігається абсолютно за нормою простору $\mathfrak{X}$ при $t \in U_\delta(0)$. Звідси випливає існування границі при $N \to \infty$ виразу в правій (а отже і лівій) частині (26), причому:

$$\lim_{N\to\infty} A(t) y_N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{(k)}(0)A^{[n]}(0)y_0}{n!\,k!} t^{n+k}, \qquad t \in U_0 \cap U_\delta(0).$$

Тобто, приймаючи до уваги те, що $\lim_{N\to\infty} y_N(t) = y(t)$, і враховуючи замкненість операторів $A(t)$, маємо:

$$y(t) \in \mathcal{D}(A(t)),\ A(t)y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{(k)}(0)A^{[n]}(0)y_0}{n!\,k!} t^{n+k};\ t \in U_0 \cap U_\delta(0), \qquad (28)$$

де, згідно з (27), подвійний ряд в правій частині (28) збігається абсолютно за нормою простору $\mathfrak{X}$. Тому сума в правій частині (28) не залежить від порядку підсумовування, отже, в (28) можна згрупувати доданки з однаковими степенями змінної “t”:

$$A(t)y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n,k \in \mathbb{N}_0,\, n+k=m} \frac{A^{(k)}(0)A^{[n]}(0)y_0}{n!\,k!} \right) t^m =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} t^m \sum_{k=0}^{m} \frac{A^{(k)}(0)A^{[m-k]}(0)y_0}{k!\,(m-k)!} =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} A^{[m+1]}(t) y_0, \qquad t \in U_0 \cap U_\delta(0).$$

Звідси, враховуючи рівність (25), отримуємо:

$$y'(t) = A(t)y(t), \qquad t \in U_0 \cap U_\delta(0).$$

Теорему доведено.

7. Приклади і наслідки.

Нехай $M \in \mathbb{N}$ і $f_1, \ldots, f_M : U_0 \mapsto \mathbb{C}$ — функції, аналітичні в деякому зв'язному околі нуля U_0 ($U_0 \subseteq \mathbb{C}$). Розглянемо формальний диференціальний вираз першого порядку

$$\mathfrak{L}(t) = \sum_{k=1}^{M} f_k(t) \frac{\partial}{\partial \xi_k}. \tag{29}$$

Нехай $\mathfrak{P} = \mathop{\times}\limits_{k=1}^{M} [a_k b_k]$, де $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_k < b_k$ $(k \in \overline{1, M})$ і $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{M} [a_k, b_k] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_M, b_M]$ — декартовий добуток відрізків. Розглянемо простір $\mathfrak{X} = C(\mathfrak{P})$ неперервних за сукупністю змінних на $\mathfrak{P} = \mathop{\times}\limits_{k=1}^{M} [a_k, b_k]$ функцій. В такому просторі $\mathfrak{X}$ диференціальний вираз (29) породжує операторнозначну функцію:

$$\mathcal{D}(A(t)) = C^1(\mathfrak{P}), \qquad t \in U_0,$$

$$(A(t)x)(\xi_1, \ldots, \xi_M) = \sum_{k=1}^{M} f_k(t) \frac{\partial x(\xi_1, \ldots, \xi_M)}{\partial \xi_k};$$
$$x \in C^1(\mathfrak{P}),\ t \in U_0,\ (\xi_1, \ldots, \xi_M) \in \mathfrak{P}. \tag{30}$$

Означену таким чином операторнозначну функцію $A(t)$ можна подати у вигляді

$$A(t) = \sum_{k=1}^{M} f_k(t) A_k, \qquad t \in U_0,$$

де

$$\mathcal{D}(A_k) = \left\{ x \in \mathfrak{X} : \forall (\xi_1, \ldots, \xi_M) \in \mathfrak{P}\ \exists \frac{\partial x(\xi_1, \ldots, \xi_M)}{\partial \xi_k} \text{ i } \frac{\partial x}{\partial \xi_k} \in \mathfrak{X} \right\},$$
$$(A_k x)(\xi_1, \ldots, \xi_M) = \frac{\partial x(\xi_1, \ldots, \xi_M)}{\partial \xi_k},$$
$$x \in C^1(\mathfrak{P}),\ (\xi_1, \ldots, \xi_M) \in \mathfrak{P}, \quad k \in \overline{1, M}.$$

Легко перевірити, що так означені оператори $A_1, \ldots, A_M$ є замкненими.

Використовуючи інтегрування частинами, неважко переконатись, що оператори $\{A(t) \,:\, t \in U_0\}$ допускають замикання (див. [6, с. 365, теорема 2.3] для простору L_2). Крім того, легко бачити, що для довільного $t \in U_0$ область визначення $\mathcal{D}(A(t))$ щільна в просторі $\mathfrak{X}$. Нехай $\widetilde{A}(t)$ — замикання оператора $A(t)$ при $t \in U_0$.

Розглянемо задачу Коші:

$$y'(t) \;=\; \widetilde{A}(t)y(t); \tag{31}$$

$$y(0) \;=\; y_0, \tag{32}$$

де $y_0 : \mathfrak{P} \mapsto \mathbb{C}$ — функція, що допускає аналітичне продовження в деякий окіл $U_\delta(\mathfrak{P}) = \mathop{\times}\limits_{k=1}^{M} U_\delta([a_k, b_k])$ множини $\mathfrak{P}$ в просторі $\mathbb{C}^M$. Використовуючи інтегральну формулу Коші для аналітичної функції багатьох комплексних змінних [7, с. 273–274] неважко довести, що вектор $y_0 \in \mathfrak{X}$ є сумісним аналітичним вектором операторів для набору операторів $A_1, \ldots, A_M \in \mathcal{LO}(\mathfrak{X})$, а отже, згідно з твердженням 1, $y_0 \in \mathcal{A}(A(\cdot), t)$, $t \in U_0$. Звідси, враховуючи, що $A(t) \subseteq \widetilde{A}(t)$, легко отримати, що $y_0 \in \mathcal{A}(\widetilde{A}(\cdot), t)$ $(t \in U_0)$. Отже, за теоремою 1 задача Коші (31)–(32) має аналітичний розв'язок

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widetilde{A}^{[n]}(0)y_0}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{[n]}(0)y_0}{n!} t^n$$

в околі нуля. З твердження 1, п.1, випливає, що для довільних $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m) \in \mathbb{N}^{(\infty)}$ і $k \in \overline{1, M}$ $\quad A^{(\nu-1)}(0)y_0 \in \mathcal{D}(A_k)$, причому, враховуючи, що $y_0 \in \mathcal{A}\{A_1, \ldots, A_M\}$ і що функції $f_1, \ldots, f_m$ аналітичні в околі нуля, для деяких $C, \alpha > 0$, згідно з (15), маємо оцінку:

$$\begin{aligned}
&\left\| A_k A^{(\nu-1)}(0)y_0 \right\| \le \sum_{k_1=1}^{M} \cdots \sum_{k_m=1}^{M} \left| f_{k_1}^{(\nu_1-1)}(0) \cdots f_{k_m}^{(\nu_m-1)}(0) \right| \times \\
&\times \left\| A_k A_{k_1} \cdots A_{k_m} y_0 \right\| \le \sum_{k_1=1}^{M} \cdots \sum_{k_m=1}^{M} (C\alpha^{(\nu_1-1)}(\nu_1-1)!) \cdots \\
&\cdots (C\alpha^{(\nu_m-1)}(\nu_m-1)!) \cdot C\alpha^{m+1}(m+1)! \le \\
\le &\sum_{k_1=1}^{M} \cdots \sum_{k_m=1}^{M} C^{m+1}\alpha\alpha^{|\nu|}\nu!(m+1) = M^m C^{m+1}\alpha\alpha^{|\nu|}\nu!(m+1) \le
\end{aligned}$$

$$\leq C\alpha\,(2MC)^m\alpha^{|\nu|}\nu! \leq C\alpha\,\beta^{|\nu|}\nu!\,,\quad \nu\in\mathbb{N}^{(\infty)},\quad k\in\overline{1,M},$$

де $\beta=(2MC+1)\alpha$. Отже, за лемою 1, для довільних $n\in\mathbb{N}$ і $k\in\overline{1,M}$ $A^{[n]}(0)y_0\in\mathcal{D}(A_k)$, причому:

$$\left\|A_kA^{[n]}(0)y_0\right\| \leq \sum_{\nu\in\mathbb{N}^{(\infty)},\,|\nu|=n} Q^{[\nu]}\left\|A_kA^{(\nu-1)}(0)y_0\right\| \leq$$

$$\leq C\alpha\sum_{\nu\in\mathbb{N}^{(\infty)},\,|\nu|=n} Q^{[\nu]}\beta^{|\nu|}\nu! = C\alpha\,\beta^n \sum_{\nu=(\nu_1,\dots,\nu_m)\in\mathbb{N}^{(\infty)},\,|\nu|=n}\frac{|\nu|!}{\nu_1!\cdots\nu_m!}\times$$

$$\times\frac{\nu_1\cdots\nu_m\cdot m!(\nu_1-1)!\dots(\nu_m-1)!}{(\nu_1+\dots+\nu_m)(\nu_2+\dots+\nu_m)\cdots\nu_m}=$$

$$=C\alpha\,\beta^n n!\sum_{\nu=(\nu_1,\dots,\nu_m)\in\mathbb{N}^{(\infty)},\,|\nu|=n}\frac{m!}{(\nu_1+\dots+\nu_m)(\nu_2+\dots+\nu_m)\cdots\nu_m}\leq$$

$$\leq C\alpha\,\beta^n n!\sum_{\nu=(\nu_1,\dots,\nu_m)\in\mathbb{N}^{(\infty)},\,|\nu|=n} 1 = C\alpha\,\beta^n n!\cdot 2^{n-1}=\frac{C\alpha}{2}(2\beta)^n n!\,.$$

З останньої оцінки випливає, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{A_kA^{[n]}(0)y_0}{n!}t^n$ збігається за нормою простору $\mathfrak{X}$ в околі нуля. Отже, враховуючи замкненість операторів A_k ($k\in\overline{1,M}$), отримуємо, що в деякому околі нуля має місце співвідношення $y(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{A^{[n]}(0)y_0}{n!}t^n\in\mathcal{D}(A_k)$, $k\in\overline{1,M}$, а отже і співвідношення $y(t)\in\mathcal{D}(A(t))$.

Таким чином, справедливий такий наслідок з теореми 1.

Наслідок 3. *Нехай $y_0:\mathfrak{P}\mapsto\mathbb{C}$ — функція, що допускає аналітичне продовження в деякий окіл $U_\delta(\mathfrak{P})$ множини $\mathfrak{P}$ в просторі $\mathbb{C}^M$.*

Тоді існує таке число $\widetilde{\delta}>0$, що задача Коші (3)–(4) для операторнозначної функції $A(t)$, що задається співвідношенням (30), має аналітичний відносно змінної "t" розв'язок при $t\in U_0\cap U_{\widetilde{\delta}}(0)$.

Нехай $\mathfrak{X}=C([a,b])$ ($a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$) і функції $f,g:U_0\times[a,b]\mapsto\mathbb{C}$ допускають аналітичне продовження на множину $U_\delta(U_0)\times U_\delta([a,b])$, де $\delta>0$ (тут U_0 — деякий зв'язний окіл нуля). Розглянемо операторнозначну $A(t)$, $t\in U_0$, що задається рівністю (18), де $\mathcal{D}(A(t))=C^1([a,b])$, $t\in U_0$. Зауважимо, що так означену операторнозначну функцію $A(t)$ можна подати у вигляді $(A(t)x)(\xi)=$

$= \frac{\partial}{\partial\xi}(f(t,\xi)x(\xi)) + \Big(g(t,\xi) - \frac{\partial}{\partial\xi}f(t,\xi)\Big)x(\xi),\ \xi \in [a,b],\ x \in C^1([a,b]),$ тобто:

$$A(t) = BF_1(t) + G_1(t),$$

де

$$(F_1(t)x)(\xi) = f(t,\xi)x(\xi);\ (G_1(t)x)(\xi) = \Big(g(t,\xi) - \frac{\partial}{\partial\xi}f(t,\xi)\Big)x(\xi),$$
$$\xi \in [a,b], \quad x \in C^1([a,b]), \quad t \in U$$

(тут B — оператор диференціювання першого порядку, визначений в (19)). Оскільки функції f, g допускають аналітичне продовження на множину $U_\delta(U_0) \times U_\delta([a,b])$, то при кожному $t \in U_0$ оператори $F_1(t)$ і $G_1(t)$ є операторами множення на неперервну на $[a,b]$ функцію. Тому $F_1(t), G_1(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $t \in U_0$. Звідси випливає, що оператори $\{A(t)\ :\ t \in U_0\}$ є замкненими.

Враховуючи сказане вище і використовуючи наслідок 2, отримуємо наступний наслідок з теореми 1.

Наслідок 4. *Нехай $y_0\ :\ [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ — функція, що допускає аналітичне продовження в деякий комплексний окіл $U_\eta([a,b])$ $(\eta > 0)$ цього відрізка.*

Тоді існує таке число $\widetilde{\delta} > 0$, що задача Коші (3)–(4) для операторнозначної функції $A(t)$, що задається співвідношенням (18) ($\mathcal{D}(A(t)) = C^1([a,b])$), має аналітичний відносно змінної "t" розв'язок при $t \in U_0 \cap U_{\widetilde{\delta}}(0)$.

Наслідки 3 та 4 показують, що з теореми 1 можна отримувати різні частинні випадки теореми Коші–Ковалевської стосовно існування аналітичних розв'язків рівнянь з частинними похідними. Але, зрозуміло, що застосування теореми 1 цим не обмежується, оскільки дана теорема дає інструмент дослідження залежності існування аналітичних розв'язків задачі Коші від диференціальних властивостей початкових даних для рівнянь з частинними похідними, що не мають нормальної форми відносно часу. А цей випадок класичною теоремою Коші–Ковалевської вже не охоплюється.

[1] Рыбников К.А. История математики. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1974. – 456 с.

[2] Горбачук М.Л. Операторний підхід до теореми Коші–Ковалевської // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 1998. – **41**, № 2. – С. 7–12.

[3] Горбачук М.Л. Про аналітичні розв'язки диференціально-операторних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 5. – С. 596–607.

[4] Горбачук М.Л. О порядке роста операторной экспоненты на целых векторах // Функциональный анализ и его приложения. – 2002 – **36**, № 1. – С. 75–78.

[5] Стрілець О.В. Алгебри з додатковими структурами та їх зображення : Автореф. дис. . . . канд. фіз-мат. наук. – Київ. – 2002. – 20 с.

[6] Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. – Функциональный анализ. – Киев: Выща школа, 1990. – 600 с.

[7] Шабат. Б.В. Введение в комплексный анализ. – Москва: Наука, 1969. – 576 с.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2007, т.4, N 3, 88–95

Systems of Brownian Particles with Coalescing

Andrey A. Dorogovtsev

Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: adoro@imath.kiev.ua

Спільний час вільного пробігу до моменту зіткнення для систем часток у потоці Арратья вивчається як функція множини початкових значень. Наведено наближення такого функціонала його аналогами для гладких потоків.

The common time up to coalescing for system of the particles in the Arratia flow is studied as a functional of the set of initial points. Approximation of this functional for the smooth flow is presented.

1. Introduction. In the present there are a lot of mathematical models for the interacting particle systems (see for ex. [1–4]). The different characteristics of the system are studied. The important class of the models consists of such systems where the motion of every single particle is a Wiener process. In particular, in the [2] Arratia introduced the flow of coalescing Brownian particles on the real line. Speaking informally this is a flow of independent Brownian particles which move together after the first meeting. In different articles Arratia flow is considered as a limit of the interacting random walks or Brownian flows with smooth covariation. This article is devoted to coalescing phenomena in Arratia flow. Let us begin with the initial definition.

Definition 1 [6]. The Arratia flow $\{x(u,t); u \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ is the real-valued random field with the properties:

1) for every $u \in \mathbb{R}$ $x(u,\cdot)$ is the standard Wiener process starting at the point u,

2) for arbitrary $u_1 < u_2 < \ldots < u_n$

$$x(u_1,t) \leq x(u_2,t) \leq \ldots \leq x(u_n,t),\ t \geq 0,$$

3) for arbitrary $t > 0$, $u_1 < u_2 < \ldots < u_n$ the distribution of $x(u_1, s), \ldots, x(u_n, s))$, $s \in [0;t]$ on the set

$$\{\vec{f} \in C([0;t];\mathbb{R}^n): \ f_i(0) = u_i, \ i = 1, \ldots, n, f_1(t) < f_2(t) < \ldots < f_n(t)\}$$

coincides with the distribution of n-dimensional standard Wiener process starting from $(u_1, \ldots, u_n)$.

It is known, that x has a modification which is a càdlág Markov process in $C([0;+\infty))$ indeced by $u \in \mathbb{R}$. From now we will use such modification. Also, it is known, that for every positive t with probability one $x(\cdot, t)$ maps $\mathbb{R}$ onto countable locally finite set. Hence a lot of particles coalesce. It was proved in [5] that the common time up to the coalescing is finite with probability one for particles which start from every point of some interval. In this article we consider the common time up to coalescing $\zeta(\Delta)$ for system of the particles, which start from every point of arbitrary measurable set Δ and study the properties of ζ as a function on sets.

2. Common time up to coalescing. Let x be the Arratia flow described above. Consider a finite set of points $\Gamma = \{u_1, \ldots, u_n\}$ and a fixed positive t. Suppose that $u_1 < u_2 < \ldots < u_n$. Define the following random times

$$\tau_t(u_1) = t,$$
$$\tau_t(u_k) = \inf\{t; s: \ x(u_k, s) = x(u_{k-1}, s)\}, \ k = 2, \ldots, n.$$

Note that

$$\zeta_t(\Gamma) = \sum_{k=1}^{n} \tau_t(u_k)$$

is the common time up to coalescing before the time t. Take an arbitrary bounded set Δ.

Definition 2. Define $\zeta_t(\Delta)$ as

$$\zeta_t(\Delta) = \sup\{\zeta_t(\Gamma): \ \Gamma \subset \Delta, \ \Gamma \text{ is finite}\}.$$

Here we use the definition of sup for the set of random variables from [7]. I.e. this is a such random variable g, that

$$g \geq \zeta_t(\Gamma) \text{ a.s.} \tag{1}$$

for every finite $\Gamma \subset \Delta$, and $g \le h$ a.s. for every h which satisfies (1).

Theorem 1. *$\zeta_t(\Delta)$ is a random variable finite with probability one.*

Proof. We will use the following estimation for the standard Wiener process w. Suppose, that $w(0) = u > 0$ and define

$$\tau = \inf\{t;\ s : w(s) = 0\}$$

Then

$$E\tau \sim \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}u,\ u \to 0+, \tag{2}$$

and there exists such $C > 0$, that

$$E\tau \le Cu,\ u > 0. \tag{3}$$

Note, that (3) is a consequence of (2). To verify (2) let us recall, that for $s \in [0; t]$

$$P\{\tau \ge s\} = 2\int_0^u p_s(x)dx,$$

where p_s is the density of the centered normal distribution with the variance s. Then

$$E\tau = \int_0^t P\{\tau \ge s\}ds = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^u e^{-\frac{x^2}{2s}}dxds \sim$$
$$\sim u\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}}ds = u\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t},\ u \to 0+.$$

We will need in the similar estimation for the moments of the meeting of three Wiener processes. Take $u_1 < u_2 < u_3$ and consider the random time

$$\sigma = \inf\{t; s : x(u_2, s) \in \{x(u_1, s), x(u_3, s)\}\}.$$

Then

$$E\sigma \le (u_2 - u_1)r(u_3 - u_2), \tag{4}$$

where $r(\Delta) \to 0,\ \Delta \to 0+.$

To prove (4) consider Wiener process $\vec{w}$ in the space $\mathbb{R}^3$, which starts at the point (u_1, u_2, u_3). Define the random time

$$\sigma' = \inf\{t; s : \ w_2(s) \in \{w_1(s), w_2(s)\}\}.$$

It is evident, that σ' is equidistributed with σ. Note, that σ' is the first exit time from the angle between the planes $x = y$ and $y = z$ truncated at the level t. Value of the angle between $x = y$ and $y = z$ is $\pi/3$. Hence σ' is a trunkated exit time for two-dimensional Wiener process from the angle. Enlarge the angle to $\pi/2$. The distance from the starting point of the process to the sides of the new angle can be estimated as $C(u_2 - u_1)$ and $C(u_3 - u_2)$ for some positive constant C. Now, using the independence of the coordinates for planar Wiener process, one can conclude, that

$$\begin{aligned} E\sigma' &\leq 4\int_0^t \int_0^{C\Delta_1} p_s(x)dx \int_0^{C\Delta_2} p_s(x)dxds \leq \\ &\leq 4C\Delta_1 \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_0^{C\Delta_2} p_s(x)dxds = \Delta_1 r(\Delta_2), \end{aligned} \tag{5}$$

where $r(\Delta_2) \to 0+,\ \Delta_2 \to 0+$. Now take a sequence $\{u_n; n \geq 1\} \subset \Delta$ which is dense in the closure $\overline{\delta}$. Denote by Γ_n the set $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Then the sequence $\{\zeta_t(\Gamma_n); n \geq 1\}$ increase and, due to (3)

$$\sup_{n \geq 1} E\zeta_t(\Gamma_n) \leq 1 + C(\sup \Delta - \inf \Delta).$$

Consequently, with probability one there exists a limit

$$\varkappa = \lim_{n \to \infty} \zeta_t(\Gamma_n).$$

Let us prove, that $\varkappa = \zeta_t(\Delta)$. To do this consider an arbitrary finite $\Gamma \subset \Delta$. Denote the points of Γ in increasing order by $v_1, \ldots, v_m$. Then

$$\zeta_t(\Gamma) = \sum_{k=1}^m \tau_t(v_k).$$

For given $\varepsilon > 0$ consider n large enough, that $\forall\ v \in \Delta\ \exists\ i = 1, \ldots, n :$

$$|v - u_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Take the finite set Γ' which is the union of $\{v_1, \ldots, v_m\}$ and $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Let us note, that

$$\zeta_t(\Gamma') \geq \zeta_t(\Gamma).$$

Now compare $\zeta_t(\Gamma')$ and $\zeta_t(\Gamma_n)$. Firstly consider the points of Γ, which lies in the intervals $(-\infty; \min \Gamma_n)$ and $(\max \Gamma_n; +\infty)$. It can be verified with the help of (3), that the joint contribution of all these points into the expectation of $\zeta_t(\Gamma') - \zeta_t(\Gamma_n)$ is less then $C \cdot \varepsilon$. Consider the one interval $[u'; u'']$ from the partition, which is organized by the points of Γ_n. Without less of generality suppose, that

$$u' < v_1 < \ldots < v_k < u''.$$

Then, due to (5) the joint contribution of $v_1, \ldots, v_k$ into the expectation of the difference $\zeta_t(\Gamma') = \zeta_t(\Gamma)$ is less that

$$r(v_1 - u')(v_2 - v_1) + r(v_2 - u')(v_3 - v_2) + \ldots + r(v_k - u')(u'' - v_k) \leq \\ \leq r(\varepsilon)(u'' - u').$$

Hence

$$E(\zeta_t(\Gamma') - \zeta_t(\Gamma_n)) \leq C \cdot \varepsilon + r(\varepsilon)(\sup \Delta - \inf \Delta). \tag{6}$$

It follows from (6), that for arbitrary finite $\Gamma \subset \Delta$ and positive δ one can find the such n, that

$$P\{\zeta_t(\Gamma_n) > \zeta_t(\Gamma) - \delta\} > 1 - \delta. \tag{7}$$

Consequently, for every finite $\Gamma \subset \Delta$

$$\zeta_t(\Gamma) \leq \sup_{n \geq 1} \zeta_t(\Gamma_n), \text{ a.s.}$$

The theorem is proved.

Remark. It follows from the proof, that the value of $\zeta_t(\Delta)$ does not depend on the choice of the dense sequence $\{u_n; n \geq 1\}$.

As a consequence of the previous remark one can get the following statement.

Lemma 1. *For increasing sequence $\{A_n; n \geq 1\}$ with the bounded union the following relation holds*

$$\zeta_t\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \zeta_t(A_n) \text{ a.s.}$$

Proof. Take the sequence $\{u_k; k \geq 1\}$ which is dense in $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Then, as it was shown in the proof of the previous lemma,

$$\zeta_t\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{m\to\infty} \zeta_t(\Gamma_m) \text{ a.s.},$$

where $\Gamma_m = \{u_1, \ldots, u_m\}, m \geq 1$. From the other side, for every $m \geq 1$ there exists A_n such, that $\Gamma_m \subset A_n$. Hence

$$\zeta_t\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \zeta_t(A_n).$$

The lemma is proved.

The next lemma presents the property of continuity from above on the compact for ζ_t.

Lemma 2. *Let the sequence of compact sets* $\{K_n; n \geq 1\}$ *decrease. Then*

$$\zeta_t\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \lim_{n\to\infty} \zeta_t(K_n).$$

Proof. Denote $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = K$. Let $\{u_k; k \geq 1\}$ be a dense sequence in K. Take $m \geq 1$ such, that $\Gamma_m = \{u_1, \ldots, u_m\}$ is ε-net for K. Then, there exists such n, that $\{u_1, \ldots, u_m\}$ is 2ε-net for K_n. Hence, accordingly to the proof of the lemma 1,

$$E\zeta_t(K_n) - \zeta_t(\Gamma_m) \leq C \cdot \varepsilon.$$

Consequently,

$$E\zeta_t(K_n) - \zeta_t(K) \leq C \cdot \varepsilon.$$

Since ε can be taken arbitrary small and $\zeta_t(K_{n+1}) \leq \zeta_t(K_n)$ for every $n \geq 1$ then

$$\lim_{n\to\infty} \zeta_t(K_n) = \zeta_t(K) \text{ a.s.}$$

Lemma is proved.

The functional ζ_t has a finite value on the bounded sets due to the singular character of the interaction and has no mean for the smooth stochastic flows. Here we will consider the analog of ζ_t for the smooth flow and prove its convergence to ζ_t under approximation of Arratia flow. Consider an arbitrary stochastic flow y on $\mathbb{R}$. This is a measurable mapping $y: \ \Omega \times \mathbb{R} \times [0;+\infty) \to \mathbb{R}$. For every finite set $\Gamma \subset \mathbb{R}$, time $t>0$ and a positive define number ε

$$\zeta_t^\varepsilon(\Gamma) = \sum_{k=1}^{n} \tau_t^\varepsilon(u_k),$$

$$\tau_t^\varepsilon(u_k) = \inf\{t; s : y(u_k, s) \in \bigcup_{j=1}^{k-1} B(y(u_j, s), 2\varepsilon)\}, \tau_t^\varepsilon(u_1) = 1.$$

Here $u_1, \ldots, u_n$ are the points of Γ enumerated in the increasing order and

$$B(u, 2\varepsilon) = \{v : \ |u - v| \le 2\varepsilon\}.$$

In the work [6] the following approximation to Arratia flow was introduced. Let $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ be such, that supp $\varphi \subset [-1; 1]$,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi^2(u) du = 1.$$

Consider the stochastic flow, which is the solution to the stochastic differential equation with the Gaussian white noise W on $\mathbb{R} \times [0; +\infty)$

$$dx_\varepsilon(u,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \varphi\left(\frac{x_\varepsilon(u,t) - p}{\varepsilon}\right) W(dp, dt),$$

$$x_\varepsilon(u, 0) = u, \ u \in \mathbb{R}.$$

It was proved in [6] that the finite-dimensional distributions of x_ε related to the initial points $u_1, \ldots, u_n$ weakly converge to the finite-dimensional distributions of Arratia flow with the same initial points. Also note, that the single trajectories of the flow x_ε are the Wiener processes.

Define ζ_t^ε for x_ε. It can be expected, that ζ_t^ε tends to ζ_t under $\varepsilon \to 0+$. The next lemma shows, that this is true.

Lemma 3. *For arbitrary finite* Γ $\zeta_t^\varepsilon(\Gamma)$ *weakly converges to* $\zeta_t(\Gamma)$ *under* $\varepsilon \to 0+$.

Proof. It follows from the definition of ζ_t that it is enough to check the statement of the lemma in the case $\Gamma = \{u_1, u_2\}$. Suppose, that $u_1 < u_2$ and consider the random time

$$\tau_t^\varepsilon(u_2) = \inf\{t; s : |x_\varepsilon(u_2, s) - x_\varepsilon(u_1, s)| \le 2\varepsilon\}.$$

Also consider for Arratia flow x

$$\sigma_t^\varepsilon(u_2) = \inf\{t; s : |x(u_2, s) - x(u_1, s)| \le 2\varepsilon\}.$$

Then the process $\{(x(u_1, s), x(u_2, s)); s \le \sigma_t(u_2)\}$ is equidistributed with $\{(x_\varepsilon(u_1, s), x_\varepsilon(u_2, s)); s \le \tau_t^\varepsilon(u_2)\}$. In particular $\tau_t^\varepsilon(u_2) \overset{d}{=} \sigma_t^\varepsilon(u_2)$. Note now, that under $\varepsilon \to 0+$

$$\sigma_t^\varepsilon(u_2) \to \tau_t(u_2) = \inf\{t; s : x(u_2, s) = x(u_1, s)\} \text{ a.s.}$$

Hence

$$\tau_t^\varepsilon(u_2) \xrightarrow{d} \tau_t(u_2),\ \varepsilon \to 0+ .$$

Lemma is proved.

[1] Yves Le Jan, Olivier Raimond. Flows, coalescence and noise // The Annals of Probability. – 2004. – **32**, № 2. – P. 1247–1315.

[2] Arratia R.A. Brownian motion on the line. Ph.D dissertation. – Madison: Univ.Wisconsin, 1979.

[3] Newman C. M., Ravishankar K., Sun R. Convergence of coalescing nonsimple random walks to the Brownian web // Electron. J. Probab. – 2005. – **10**, № 2. – P. 21–60 (electronic).

[4] Darling R.W.R. Constructing nonhomeomorphic stochastic flows // Memoirs of AMS. – 1987. – **79**, № 376. – P. 1–97.

[5] Dorogovtsev A.A. Stochastic integral with respect to Arratia flow // Dokl. Akad. Nauk. – 2006. – **410**, № 2. (Russian).

[6] Dorogovtsev A.A. One Brownian stochastic flow // Theory of Stochastic Processes. – 2004. – **10** (26), № 3–4. – P. 21–25.

[7] Vakhania N.N., Tarieladze V.I., Chobanian S.A. Probability distributions in Banach spaces. – Moscow: Nauka, 1985. – 368 p.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2007, т.4, N 3, 96–109

517.9+531.19+530.145

Kinetic Theory of Dusty Plasmas and Effective Grain Interactions

A.G. Zagorodny

Інститут теоретичної фізики ім.М.М. Боголюбова НАН України, Київ

E-mail: azagorodny@bitp.kiev.ua

Обговорюється сучасний стан кінетичної теорії запорошеної плазми. Наведено рівняння для мікроскопічних фазових густин для плазмових частинок і порошинок. Показано, що, використовуючи такі рівняння, можна узагальнити ланцюжок рівнянь Боголюбова–Борна–Гріна–Кірквуда–Івона на випадок запорошеної плазми з урахуванням пружних і непружних зіткнень частинок та поглинання електронів та іонів порошинками. Розглянуто кінетичний опис ефективних потенціалів порошинок у плазмі.

The modern state of the consistent kinetic theory of dusty plasmas is discussed. The derivation of equations for microscopic phase densities of plasma particles and grains is presented. Using such equations it is possible to generalize the Bogolyubov–Born–Green–Kirkwood–Yvon hierarchy to the case of dusty plasmas and to derive the kinetic equations, taking into account both elastic and inelastic particle collisions. Kinetic description of effective grain-grain potentials is also presented.

1. Introduction. The interpretation of recent dusty plasma experiments requires more and more sophisticated description of dusty plasmas in terms of microscopic models. This concerns both analytical studies and numerical simulations.

In particular, the consistent kinetic theory of a dusty plasma gives a typical example of theoretical studies that should be done starting from the microscopic treatment of the problem. Only this approach makes it possible to formulate the basic points of the rigorous kinetic theory with due regard of grain charging and particle collisions (both elastic and inelastic). Though kinetic descriptions of dusty plasmas have been given in many papers, no such theory has been formulated as yet. Many theoretical studies in this field have been performed using phenomenological generalization of the results known from the kinetic theory of ordinary plasmas. In particular, this concerns the calculations of the collision integrals describing grain-plasma particle collisions in terms of absorption cross-sections for electrons and ions colliding with grains. Such treatment provides a possibility to describe the charge and momentum transfer from plasma particles to grains due to inelastic collisions, or the momentum exchange between the grains in course of grain-grain contact collisions. However, the influence of collective plasma effects (for example, dynamical particle screening) on charging processes and mutual influence of contact and elastic Coulomb collisions are disregarded.

Consistent treatment of these and other effects could be performed in terms of the kinetic theory formulated on the basis of the microscopic description of contact collisions and plasma particle absorption by grains [1, 2].

In some cases, for the sake of simplicity, it is reasonable to describe the collective behavior of grain subsystem using the effective grain-grain interaction potentials. Obviously, such potentials should be calculated taking into account plasma particle absorption by the grain, as well as the effects of nonlinear screening. Usually such potentials are calculated on the basis of numerical solution of the appropriate boundary-value problems, or by means of numerical simulations. However, the description of some interesting phenomena observed in dusty plasma experiments, such as dusty crystal formation, dust acoustic wave propagation, generation of nonlinear dust structure in a plasma requires analytical relations for effective potentials. Such relations can be obtained on the basis of kinetic equations with the effective point sinks [3] which follow from the rigorous equations discussed above.

The purpose of the present paper is to apply the microscopic model of a dusty plasma in order to formulate the basic principles of the kinetic theory and to find explicit relations for the effective grain potentials with regard to plasma particle collisions and the influence of external force fields, if present.

In Sec. 2 we reproduce rigorous equations for the microscopic phase densities (Klimontovich equations) with regard for the electron and ion absorption by grains and contact grain-grain collisions. Then we formulate an appropriate Bogolyubov–Born–Green–Kirkwood–Yvon (BBGKY) hierarchy for equations for dusty plasmas and consider the possibility of applying the hierarchy thus obtained to the derivation of kinetic equations (Sec. 3). In particular cases the results previously obtained by other authors are recovered. Application of the equations derived to the calculation of the effective grain potentials is given in Sec. 4. Some analysis of the stationary screening is presented in Sec. 5. The influence of plasma particle collisions on the effective grain-grain potential is studied and the problem of grain screening in the presence of external magnetic field is discussed.

2. Microscopic equations for dusty plasmas with regard for electron and ion absorption by grains. In the case of a dusty plasma consisting of electrons, ions, and monodispersed grains under the assumption that each grain absorbs all encountered electrons and ions the microscopic phase density of plasma particles is given by

$$\mathcal{F}_\alpha(X,t) = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \mathcal{F}_{i\alpha}(X,t) = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \delta\left(X - X_\alpha(t)\right)\theta(t_{i\alpha} - t), \quad (X \equiv \mathbf{r}\mathbf{v}), \quad (1)$$

where $t_{i\alpha}$ is the time of ith plasma particle collision with any grain (i.e., the time of ith particle absorption by a grain), $\theta(x)$ is the Heaviside step function, the subscript α labels the plasma particle species.

Combining the derivatives of $\mathcal{F}_\alpha(X,t)$ over t, $\mathbf{r}$, and $\mathbf{v}$, $\mathcal{F}_\alpha(X,t)$ can be shown to satisfy the equation (see Ref. [2])

$$\begin{aligned} &\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\right\}\mathcal{F}_\alpha(X,t) = -\int d\mathfrak{X}|\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v}-\mathbf{v}')|\times \\ &\quad \times \delta\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| - a\right)\mathcal{F}_g(\mathfrak{X}',t)\mathcal{F}_\alpha(X,t). \end{aligned} \quad (2)$$

Here $\mathbf{e}_\mathbf{r} = \mathbf{r}/r$ and $\mathcal{F}_g(\mathfrak{X},t)$ is the grain phase density

$$\mathcal{F}_g(\mathfrak{X},t) = \sum_{i=1}^{N_g}\sum_n \delta\left(\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_i^{(n)}(t)\right)\theta\left(t_{ig}^{(n+1)} - t\right)\theta\left(t - t_{ig}^{(n)}\right), \quad (3)$$

$\mathfrak{X} \equiv (\mathbf{r},\mathbf{v},q)$, $t_{ig}^{(n)}$ is the time of the nth collision of the ith grain with any other particle, $\mathfrak{X}_j^{(n)}(t)$ is the grain trajectory before the $(n+1)$th and after the nth collision, a is the grain radius.

Eq. (3) describes the microscopic state of the grain subsystem which is determined by the microscopic value of the grain charge q along with the grain coordinate and velocity with regard for the sharp changes of the grain charge and velocity.

As it was shown in Ref. [2] the equation for $\mathcal{F}_g(\mathfrak{X}, t)$ has the form

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q}{m_g}\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right\} = \\
&- \sum_{\alpha=e,i} \int d\mathfrak{X}' \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - a) \{|\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v} - \mathbf{v}')| \mathcal{F}_g(\mathfrak{X}, t) - \\
&- |\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v} - \mathbf{v}' - \delta\mathbf{v}_\alpha)\mathcal{F}_g(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \delta\mathbf{v}_\alpha q - e_\alpha t)\} \mathcal{F}_\alpha(X', t) - \\
&- \int d\mathfrak{X}' \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - 2a) |\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v} - \mathbf{v}')| \{\mathcal{F}_g(\mathfrak{X}, t)\mathcal{F}_g(\mathfrak{X}', t) - \\
&- \mathcal{F}_g(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \delta\mathbf{v}_g, q - \delta q; t)\mathcal{F}_g(\mathbf{r}', \mathbf{v} + \delta\mathbf{v}_g, q'; t)\},
\end{aligned} \tag{4}$$

where

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{v}_\alpha &\equiv \delta\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = -\frac{m_\alpha}{m_g}(\mathbf{v} - \mathbf{v}'); \\
\delta\mathbf{v}_g &\equiv \delta\mathbf{v}_g(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} \left(\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v} - \mathbf{v}')\right); \\
\delta q &\equiv \delta q(q, q') = q' - q.
\end{aligned} \tag{5}$$

Notice that the integration over X' and $\mathfrak{X}'$ in Eqs. (2), (4) is performed within the domain $\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v}-\mathbf{v}') < 0$, or $\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v}-\mathbf{v}'-\delta\mathbf{v}_\alpha) < 0$, respectively. Eqs. (2), (4) generalize traditional microscopic equation for the case of electron and ion absorption by grains and contact collisions between the grains.

3. Bogolyubov–Born–Green–Kirkwood–Yvon hierarchy for dusty plasmas. In terms of notation

$$\mathcal{F}(\xi, t) \equiv \mathcal{F}_\alpha(\mathfrak{X}, t) = \begin{cases} \mathcal{F}_\alpha(X, t)\delta(q - e_\alpha), & \alpha = e, i \\ \mathcal{F}_g(\mathfrak{X}, t), & \alpha = g \end{cases} \tag{6}$$

$\xi \equiv (\mathfrak{X}, \alpha) = (\mathbf{r}, \mathbf{v}, q, \alpha)$, Eqs. (2), (4) can be written in the unified form

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}(\xi)\right\} \mathcal{F}(\xi, t) = \\
&= \int d\xi' \left\{\left[W^{(1)}(\xi, \xi') - \hat{V}(\xi, \xi')\right] \mathcal{F}(\xi, t)\mathcal{F}(\xi', t) - \right. \\
&\left. - W^{(2)}(\xi - \Delta_{\xi\xi'}, \xi' + \Delta'_{\xi\xi'})\mathcal{F}(\xi - \Delta_{\xi\xi'}, t)\mathcal{F}(\xi + \Delta'_{\xi\xi'}, t)\right\},
\end{aligned} \tag{7}$$

where

$$
\begin{aligned}
&\hat{L}(\xi) \equiv \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{m_\alpha}\mathbf{F}_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}};\\
&W^{(1),(2)}(\xi,\xi') \equiv W^{(1),(2)}_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \mathbf{v}-\mathbf{v}');\\
&W^{(1)}_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r},\mathbf{v}) = -\mathbf{e_r}\mathbf{v}\delta(r-a_{\alpha\alpha'})(\delta_{\alpha g}+\delta_{\alpha'\alpha}-\delta_{\alpha g}\delta_{\alpha' g})\theta(\vartheta-\frac{\pi}{2});\\
&W^{(2)}_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r},\mathbf{v}) = -\mathbf{e_r}\mathbf{v}\delta(r-a_{\alpha\alpha'})\delta_{\alpha g}\theta(\vartheta-\frac{\pi}{2}); \quad \theta = (\widehat{\mathbf{rv}});\\
&\hat{V}(\xi,\xi') = \frac{qq'}{m_\alpha}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}};\\
&\Delta_{\xi\xi'} = (0, \delta\mathbf{v}_{\alpha\alpha'}, \delta q_{\alpha\alpha'}, 0); \quad \Delta'_{\xi\xi'} = (0, \delta\mathbf{v}'_{\alpha\alpha'}, 0, 0);\\
&\delta q_{\alpha\alpha'} \equiv \delta q_{\alpha\alpha'}(q,q') = \delta_{\alpha g}\begin{cases} e_\alpha, & \alpha' = e, i;\\ q'-q, & \alpha' = g;\end{cases}\\
&\delta v_{\alpha\alpha'} \equiv \delta v_{\alpha\alpha'}(\mathbf{v}-\mathbf{v}') = \delta_{\alpha g}\begin{cases} -\frac{m_{\alpha'}}{m_g}(\mathbf{v}-\mathbf{v}'), & \alpha' = e, i;\\ \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{e}-\mathbf{r}-\mathbf{r}'(\mathbf{v}-\mathbf{v}')), & \alpha' = g;\end{cases}\\
&\delta v'_{\alpha\alpha'} = \delta_{\alpha g}\delta_{\alpha' g}\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v}-\mathbf{v}')),
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$\mathbf{F}_\alpha$ is the external force field, if present.

Representation (6) is the most convenient for the derivation of a generalized BBGKY hierarchy for dusty plasmas. Averaging Eq. (7) and its combinations yields

$$
\begin{aligned}
&\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}\hat{L}(\xi_i) - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i=1}^{N}\hat{V}(\xi_i,\xi_j)\right\} f_s(\xi_1\ldots\xi_s;t)+\\
&+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j\neq i=1}^{s}\Big[W^{(1)}(\xi_i,\xi_j)f_s(\xi_1\ldots\xi_s;t)-\\
&-W^{(2)}(\xi_i-\Delta_{ij},\xi_j+\Delta'_{ij})f_s(\xi_1\ldots\xi_i-\Delta_{ij}\ldots\xi_j+\Delta'_{ij}\ldots\xi_s;t)\Big] =\\
&=\sum_{i=1}^{s}\int d\xi_{s+1}\Big\{\hat{V}(\xi_i,\xi_{s+1})f_{s+1}(\xi_1\ldots\xi_{s+1;t}-\\
&-\big[W^{(1)}(\xi_i,\xi_{s+1})f_{s+1}(\xi_1\ldots\xi_{s+1};t)-\\
&-W^{(2)}(\xi_1-\Delta_{is+1},\xi_j+\Delta'_{is+1})f_{s+1}(\xi_1\ldots\xi_i-\\
&-\Delta_{is+1}\ldots\xi_j+\Delta'_{is+1}\ldots\xi_{s+1};t)\big]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

For the system with pure Coulomb interaction ($W^{(1)} = W^{(2)} = 0$), hierarchy (9) reduces to the hierarchy for ordinary plasmas. In the case of neutral grains as $a \to 0$ (the Boltzmann—Grad limit), the stochastic hierarchy for the hard-sphere gas [4] is recovered.

The hierarchy thus obtained makes it possible to introduce the kinetic equations. In particular, in the approximation of the dominant influence of contact collisions the asymptotics of the binary distribution functions can be written as

$$\begin{aligned} &\underset{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\gg a}{f^{(0)}_{\alpha g}}(\mathfrak{X},\mathfrak{X}',t) = f_\alpha(\mathfrak{X},t) f_g(\mathfrak{X}',t)\theta(\vartheta - \vartheta^{\alpha g}_{\min}), \quad \alpha = e,i \\ &\underset{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\gg a}{f^{(0)}_{gg}}(\mathfrak{X},\mathfrak{X}',t) = f_g(\mathfrak{X}) f_g(\mathfrak{X}',t)\left\{\theta(\vartheta - \vartheta^{g}_{\min}) + \theta(\vartheta^{gg}_{\min} - \vartheta)\right\}, \end{aligned} \tag{10}$$

where $\vartheta^\alpha_{\min}$ is given by

$$\sin^2 \vartheta^{\alpha g}_{\min} = \frac{a^2_{\alpha g}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\left(1 - \frac{2e_\alpha q}{a_{\alpha g} m_\alpha (\mathbf{v}-\mathbf{v}')^2}\right).$$

$a_{\alpha g} = a$, $\alpha = e,i$ and $a_{gg} = 2a$.

Using these relations for estimates of the main contributions to binary collision terms we can write the kinetic equations as

$$\begin{aligned} &\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\langle \mathbf{E}^{\mathrm{eff}}_\alpha\rangle \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right\} f_\alpha(X,t) = \\ &= - \int d\mathbf{v}' \int dq' \sigma_{\alpha g}(q', \mathbf{v}-\mathbf{v}')|\mathbf{v}-\mathbf{v}'| \times \\ &\times f_\alpha(X,t) f_g(\mathbf{r},\mathbf{v}',q',t) + I_\alpha, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q}{m_g}\langle \mathbf{E}^{\mathrm{eff}}_g\rangle \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right\} f_g(\mathfrak{X},t) = \\ &= - \sum_{\alpha=e,i} \int d\mathbf{v}' \left[\sigma_{\alpha' g}(q, \mathbf{v}-\mathbf{v}')|\mathbf{v}-\mathbf{v}'| f_g(\mathfrak{X},t) - \right. \\ &- \sigma_{\alpha' g}(q - e_\alpha, \mathbf{v}-\mathbf{v}'-\delta\mathbf{v}_{\alpha'})|\mathbf{v}-\mathbf{v}'-\delta\mathbf{v}_{\alpha'}| \times \\ &\times \left. f_g(\mathbf{r}, \mathbf{v}-\delta\mathbf{v}_{\alpha'}, q - e_{\alpha'}, t)\right] f_{\alpha'}(\mathbf{r},\mathbf{v}',t) - \\ &- \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int d\mathbf{v}' \int dq' |\mathbf{n}(\mathbf{v}-\mathbf{v}')| \times \\ &\times [\sigma_{gg}(q,q',\mathbf{v}-\mathbf{v}') f_g(\mathfrak{X},t) f_g(\mathbf{r},\mathbf{v}',q',t) - \\ &- \sigma_{\alpha g}(q - \delta q_g, q'; \mathbf{v}-\mathbf{v}') f_g(\mathbf{r}, \mathbf{v}-\delta\mathbf{v}_g, q - \delta q_g, t) \times \\ &\times f_g(\mathbf{r}, \mathbf{v}'+\delta\mathbf{v}_g, q', t)] + I_g, \end{aligned} \tag{12}$$

where I_α and I_g are the Coulomb collision terms which can be calculated in terms of the correlation functions of particle density fluctuations (similarly to the case of ordinary plasmas), $\sigma_{\alpha\beta}(q, \mathbf{v})$ is the charging cross-section. In the case of collisionless plasma with no external fields

$$\sigma_{\alpha g}(q, v) = \pi a_{\alpha g}^2 \left(1 - \frac{2e_\alpha q}{m_\alpha v^2 a_{\alpha g}}\right).$$

Applications of Eqs. (11), (12) to the calculation of stationary grain distributions are given in [2].

Thus, rigorous evolution equations for microscopic distributions of dusty plasma are formulated. These equations differ from the conventional Klimontovich equations by the presence of "microscopic" collision term generated by the electron and ion absorption by grain. The appropriate generalization of the BBGKY hierarchy is also presented.

4. Effective potential of charged grains (general relations). Now let us apply the obtained equation to the calculations of the effective grain potentials. In the case of single immovable grain $f_g(\mathbf{r}', \mathbf{v}', q') = \delta(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{v}')\delta(q' - q)$ Eq. (11) reduces to

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \frac{1}{m_\alpha}\mathbf{F}_\alpha(X, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right\} f_\alpha(X, t) = \\ &= I_\alpha - v\sigma_{\alpha q}(q, v) f_\alpha(X, t)\delta(\mathbf{r}),\end{aligned} \tag{13}$$

where $\mathbf{F}_\alpha(X, t)$ is the external force field, if present. In what follows, for the sake of simplicity, instead of the collision term calculated in terms of correlation functions of microscopic fluctuations we shall use the simple version of the model collision integral (simple Bhatnagar–Gross–Krook model) proposed in Ref. [5], namely

$$I_\alpha = -\nu_\alpha \left\{ f_\alpha(X, t) - \Phi_\alpha(\mathbf{v}) \int d\mathbf{v} f_\alpha(X, t) \right\}. \tag{14}$$

Here ν_α is the collision frequency, $\Phi_\alpha(\mathbf{v})$ is the distribution function generated in course of plasma particle collisions.

In view of the fact that plasma particle absorption considerably suppress the influence of nonlinearity we can suggest that the presence of sinks causes small perturbation of the effective electric field and thus to use the linearized version of Eq. (14).

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}+\frac{1}{m_\alpha}\mathbf{F}^{\rm ext}_\alpha\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right\}\delta f_\alpha(X,t)-\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\nabla\Phi(\mathbf{r},t)\frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}= \\ =-v\sigma_\alpha(q(t),v)f_{0\alpha}(\mathbf{v})-\nu_\alpha\left\{\delta f_\alpha(X,t)-\Phi_\alpha(\mathbf{v})\int d\mathbf{v}\delta f_\alpha(X,t)\right\}. \tag{15}$$

The potential $\Phi(\mathbf{r},t)$ is governed by the Poisson equation

$$\Delta\Phi(\mathbf{r},t)=-4\pi q(t)\delta(\mathbf{r})-4\pi\sum_\alpha e_\alpha n_\alpha\int d\mathbf{v}\delta f_\alpha(X,t). \tag{16}$$

The solution of Eq. (15) can be written as

$$\delta f_\alpha(X,t)=\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\int\limits_{-\infty}^{t}dt'\int dX'W_\alpha(X,X';t-t')\times \\ \times\frac{\partial\delta\Phi(\mathbf{r}',t')}{\partial \mathbf{r}'}\frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'}- \\ -\int\limits_{\infty}^{t}dt'\int dX'W_\alpha(X,X';t-t')S^{(0)}_\alpha(\mathbf{v}',t'), \tag{17}$$

where $W_\alpha(X,X';t-t')$ satisfies the equation

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}+\frac{1}{m_\alpha}\mathbf{F}^{\rm ext}_\alpha\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right\}W_\alpha(X,X';\tau)= \\ =-\nu_\alpha\left\{W_\alpha(X,X';\tau)-\Phi_\alpha(\mathbf{v})\int d\mathbf{v}W_\alpha(X,X';\tau)\right\} \tag{18}$$

with the initial condition

$$W_\alpha(X,X';0)=\delta(X-X'). \tag{19}$$

Substituting Eq. (17) into the Poisson equation (16) one obtains

$$\Phi_{\mathbf{k}\omega}=\frac{4\pi q_\omega}{k^2\varepsilon(\mathbf{k},\omega)}- \\ -\frac{4\pi}{k^2\varepsilon(\mathbf{k},\omega)}\sum_\alpha e_\alpha n_{0\sigma}\int d\mathbf{v}\int d\mathbf{v}'W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}')S^{(0)}_{\alpha\omega}(\mathbf{v}'), \tag{20}$$

where $\varepsilon(\mathbf{k}\omega)$ is the dielectric response function

$$
\begin{gathered}
\varepsilon(\mathbf{k}\omega) = 1 - i\sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2 n_{0\sigma}}{k^2}\int d\mathbf{v}\int d\mathbf{v}' W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}')\mathbf{k}\frac{\partial f_{0\sigma}(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'};\\
W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}') = \int d\mathbf{R}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}}\int_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau} W_\alpha(X, X', \tau),\\
\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'.
\end{gathered}
\tag{21}
$$

In the stationary case $q(t) = q$, and Eq. (20) reduces to

$$
\begin{gathered}
\Phi_\mathbf{k} = \frac{4\pi q}{k^2\varepsilon(\mathbf{k},0)} -\\
- \frac{4\pi}{k^2\varepsilon(\mathbf{k},0)}\sum_\alpha e_\alpha n_{0\sigma}\int d\mathbf{v}\int d\mathbf{v}' W_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{v},\mathbf{v}') S_\alpha^{(0)}(\mathbf{v}').
\end{gathered}
\tag{22}
$$

Here,

$$
\begin{gathered}
W_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{v},\mathbf{v}') = W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}')\Big|_{\omega=0}, \quad \varepsilon(\mathbf{k},0) = 1 + \frac{k_D^2}{k^2},\\
k_D^2 = \sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2 n_{0\sigma}}{T_\alpha}.
\end{gathered}
\tag{23}
$$

5. Influence of plasma properties on the effective grain potentials. Let us consider in more details the influence of plasma properties on the specific features of the effective potential of grain which charge is maintained by plasma currents. We start from the case of isotropic plasma with no external field. In this case

$$
\begin{gathered}
W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}') = \frac{i\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}')}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_\alpha} -\\
- \frac{i\nu_\alpha \Phi_\alpha(\mathbf{v})}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_\alpha)(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' + i\nu_\alpha)}\left[1 - i\nu_\alpha\int d\mathbf{v}\frac{\Phi_\alpha(\mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_\alpha}\right]^{-1}.
\end{gathered}
\tag{24}
$$

That leads to the following stationary grain potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{qe^{-k_D r}}{r} + \\ + i\sum_\alpha 4\pi e_\alpha n_\alpha \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{kr}}}{k^2+k_D^2}\frac{\int d\mathbf{v}\frac{v\sigma_\alpha(q,v)f_{0\sigma}(v)}{\mathbf{kv}-i\nu_\alpha}}{1+i\nu_\alpha\int d\mathbf{v}\frac{\Phi_\alpha(\mathbf{v})}{\mathbf{kv}-i\nu_\alpha}}. \tag{25}$$

In the collisionless limit ($\nu_\alpha \to 0$) this relation is especially simplified

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{qe^{-k_D r}}{r} + \\ + i\sum_\alpha 4\pi e_\alpha n_{0\sigma} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{kr}}}{k^2+k_D^2}\int d\mathbf{v}\frac{v\sigma_\alpha(q,v)f_{0\sigma}(v)}{\mathbf{kv}-i0} \tag{26}$$

that gives

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{qe^{-k_D r}}{r} - \frac{\widetilde{Q}}{r}g(k_D r), \tag{27}$$

where

$$g(X) = e^{-X}Ei(X) - e^{X}Ei(-X), \\ \widetilde{Q} = \frac{2\pi}{k_D}\sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \int_0^\infty dv\, v\sigma_\alpha(q,v)f_{0\sigma}(v). \tag{28}$$

At $k_D r \gg 1$ Eq. (25) gives the well-known result

$$\Phi(r) \simeq -\frac{2Q}{k_D r^2}.$$

In strongly collisional limit ($\nu_\alpha \gg ks_\alpha$, $s_\alpha = (T_\alpha/m_\alpha)$) Eq. (25) reduces to

$$\Phi(\mathbf{r}) = (q+\widetilde{S})\frac{e^{-k_D r}}{r} - \frac{\widetilde{S}}{r}, \tag{29}$$

where

$$\widetilde{S} = \sum_\alpha \frac{e_\alpha S_\alpha}{D_\alpha}; \qquad S_\alpha = n_\alpha \int d\mathbf{v}'\, v\sigma_\alpha(q,v)f_{0\alpha}(\mathbf{v}); \qquad D_\alpha = \frac{T_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha},$$

that is in agreement with the results obtained on the basis of the description in the drift-diffusion approximation [6, 7]. Deriving (29) we put $\Phi_\alpha(\mathbf{v}) = f_{0\sigma}(\mathbf{v})$.

If collisions are present, but $\nu_\alpha \ll ks_\alpha$

$$\begin{aligned}\Phi_k &= \frac{4\pi q}{k^2+k_D^2} - \\ &- \sum_\alpha \frac{8\pi^3 e_\alpha n_\alpha}{(k^2+k_D^2)}\frac{1}{k}\int\limits_0^\infty dv\, v^2 \sigma_\alpha(q,v) f_{0\alpha}(v)\left[1+\frac{\nu_\alpha}{ks_\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\right].\end{aligned} \tag{30}$$

In the coordinate representation one has

$$\begin{aligned}\Phi(r) &= (q+Q)\frac{e^{-k_D r}}{r} - \frac{\widetilde{Q}}{r} g(k_D r) - \frac{Q}{r}, \\ Q &= \frac{2\pi^2}{k_D}\sum_\alpha \frac{e_\alpha n_\alpha \nu_\alpha}{s_\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\int\limits_0^\infty dv v^2 \sigma_\alpha(q,v) f_{0\alpha}(v).\end{aligned} \tag{31}$$

Thus, we can conclude that plasma particle collisions generate the Coulomb-like behaviour of the effective potentials at large distances $(r > \lambda_D)$.

If the external magnetic field $\mathbf{B}_0 = \mathbf{e}_z B_0$ is present the transition probability is

$$\begin{aligned}W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}') &= \widetilde{W}_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}') + \\ &+ \frac{\nu_\alpha \int d\mathbf{v}' \widetilde{W}_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}')\Phi_\alpha(\mathbf{v}') \int d\mathbf{v} \Phi_\alpha(\mathbf{v}) \widetilde{W}_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}')}{1-\nu_\alpha \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' \widetilde{W}_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}')\Phi_\alpha(\mathbf{v}')},\end{aligned} \tag{32}$$

where

$$\widetilde{W}_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}') = W^{(0)}_{\alpha\mathbf{k}\omega+i\nu_\alpha}(\mathbf{v},\mathbf{v}'), \tag{33}$$

and $W^{(0)}_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}')$ is the Fourier representation of the transition probability for the collisionless plasma in external magnetic field. With regard to the symmetry properties of the charging cross-sections and unperturbed velocity distributions the quantity

$$W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}') = \int d\mathbf{v} W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}') \tag{34}$$

in terms of which $\Phi_{\mathbf{k}\omega}$ and $\varepsilon(\mathbf{k}\omega)$ are presented, can be written as

$$W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp'}{\Omega_\alpha}\right)\frac{i}{\omega - n\Omega_\alpha - k_z v_z t i\nu_\alpha}, \tag{35}$$

where $\Omega_\alpha = e_\alpha B_0/m_\alpha c$, $J_n(x)$ is the Bessel function.

Substituting Eq. (35) into Eq. (22) one obtains

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathbf{k}} = &\frac{4\pi q}{k^2 k_D^2} + \frac{4\pi i}{k^2+k_D^2}\times\\ &\times\sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int d\mathbf{v} J_n^2\left(\frac{\mathbf{k}_\perp \mathbf{v}_\perp}{\Omega_\alpha}\right)\frac{v\sigma_\alpha(q,v)f_{0\alpha}(v)}{k_z v_z + n\Omega_\alpha - i\nu_\alpha}\times\\ &\times\frac{1}{1 + i\nu_\alpha \sum_n \int d\mathbf{v} J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha}\right)\frac{f_{0\alpha}(\mathbf{v})}{k_z v_z + n\Omega_\alpha - i\nu_\alpha}}\,.\end{aligned} \tag{36}$$

This relation describes the grain potentials in collisional magnetoactive plasma provided that the cross-section $\sigma_\alpha(q,v)$ is known.

In the case of collisionless plasma Eq. (36) is simplified to

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathbf{k}} = &\frac{4\pi q}{k^2+k_D^2} - \frac{4\pi^2}{k^2+k_D^2}\times\\ &\times\sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int d\mathbf{v} J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha}\right) v\sigma_\alpha(q,v)\delta\left(k_z v_z + n\Omega_\alpha\right).\end{aligned} \tag{37}$$

In the case of strongly magnetized plasma ($B_0 \to \infty$) we can put

$$f_{0\sigma}(\mathbf{v}) = \delta(\mathbf{v}_\perp)\left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{m_\alpha v_z^2}{2T_\alpha}\right) \tag{38}$$

and thus

$$\Phi(r) = \frac{q e^{-k_D r}}{r} - \Phi_0 K_0(k_D r). \tag{39}$$

Here, $K_0(k_D r)$ is the modified Bessel function,

$$\begin{aligned}\Phi_0 = &\sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \pi a^2 \int dv_z \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha}\right)^{1/2}\times\\ &\times\exp\left(-\frac{m_\alpha v_z^2}{2T_\alpha}\right)\theta\left(v_z^2 - \frac{2e_\alpha q}{m_\alpha a}\right).\end{aligned} \tag{40}$$

The stationary value of q in this case satisfies the equation

$$\sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_z |v_z| \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_\alpha v_z^2}{2T_\alpha}\right) \times \\ \times \theta\left(v_z^2 - \frac{2e_\alpha q}{m_\alpha a}\right) = 0. \tag{41}$$

Thus, in the case of strongly magnetized collisionless plasma the effective potential is generated by the charged string which appears due to one-dimensional charging currents. Eq. (35) also shows that in the case $|z| \gg s_\alpha/\nu_\alpha$, $R_\perp > s_\alpha/|\Omega_\alpha|$ the relation of the type of Eq. (30) exists, but the effective charge $\widetilde{S}$ is dependent on the angle between $\mathbf{r}$ and $\mathbf{B}_0$.

6. Summary and Conclusions. Microscopic equations with regard to electron and ion absorption by grains are formulated and the BBGKY hierarchy for dusty plasma is presented.

Kinetic description of the effective grain potentials on the basis of the derived equation with regard to plasma particle collisions in terms of BGK-collision integral makes it possible to recover the results known from the numerical solutions of the drift-diffusion and collisionless kinetic equations.

With the appropriate choice of the grain charge and sink intensity, the obtained relations reproduce with good accuracy the numerical solutions of the nonlinear boundary-value problems.

Obtained general relations can be effectively used for the description of the effective grain potentials in the presence of external magnetic field.

[1] Schram P., Sitenko O., Trigger S., Zagorodny A. Kinetic description of dusty olasmas and problems of grain dynamics // Contrib. Plasma Phys. – 2001. – **41**, № 2-3. – P. 211–214.

[2] Schram P., Sitenko O., Trigger S., Zagorodny A. Statistical theory of dusty plasmas: Microscopic equations and Bogolyubov–Born–Green-Kirkwood–Yvon hierarchy // Phys. Rev. E. – 2001. – **63**, № 1. – 016403(1–17).

[3] Zagorodny A.G., Filippov A.V., Pal' A.F., Starostin A.N., and Momot A.I. Kinetic Description of Effective Grain Potentials in a

Plasma // Dusty Plasmas in Applications. 2-nd Intern. Conf. on the Physics of Dusty and Burning Plasmas (Odessa, August 20-30, 2007), Odessa. – 2007. – 176 p.

[4] Petrina D.Ya., Petrina E.D. Stochastic dynamics and Boltzmann hierarchy, I // Ukr. Math. J. – 1998. – **50**, № 2. – P. 195–211.

[5] Bhatnagar P.L., Gross P.E., Krook M.A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems // Phys. Rev. – 1954. – **94**. – P. 511–515.

[6] Zagorodny A.G., Filippov A.V., Pal' A.F., Starostin A.N., Momot A.I. // Problems of Atomic Science and Technology (Plasma Physics Series). – 2006. – № 12. – 99 p.

[7] Filippov A.V., Zagorodny A.G., Momot A.I., Pal' A.F., Starostin A.N. Charge screening in a plasma with an external ionization source // JETP. – 2007. – **104**, № 1. – P. 147–161.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2007, т.4, N 3, 110–122

530.145

Деформовані комутаційні співвідношення в квантових системах частинок

М.В. Кузьменко †***, І.В. Сименог*** ††

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова
НАН України, Київ

E-mail: †*kuzmenko@bitp.kiev.ua,* ††*ivsimenog@bitp.kiev.ua*

Світлої пам'яті видатного математика і фізика-теоретика та українського патріота Дмитра Яковича Петрини присвячуємо цю роботу.

На основі узагальнених деформованих комутаційних співвідношень для операторів координат та імпульсів різних квантових частинок отримано хвильові рівняння для одновимірних квантових систем двох та трьох частинок. Встановлено, що властивості квантових систем двох та трьох частинок з деформованими комутаційними співвідношеннями визначаються крім потенціалів взаємодії ще однією, своєю для кожної системи, функцією некомутативності суттєво квантового походження. Виконано попередній аналіз простих закономірностей в динаміці двочастинкової квантової системи в деформованому просторі.

On the basis of generalized deformed commutation relations for the operators of coordinates and momenta of different quantum particles, wave equations are obtained for one-dimensional two- and three-particle systems. It is established that properties of two- and three-particle quantum systems with deformed commutation relations are determined not only by potentials of interaction, but also by a specific (respectively for each system) function of noncommutativity of essentially quantum origin. A preliminary analysis of simple regularities in dynamics of two-particle quantum system in deformed space is performed.

1. Вступ. Ідея узагальнених комутаційних співвідношень Снайдера [1] між операторами просторових координат та часу в останні роки отримала найбільш широке узагальнення та застосування в щонайрізноманітніших напрямках квантової теорії. Нові узагальнені підходи некомутативної геометрії та некомутативних просторів проникли в теорію квантової гравітації і різноманітні розділи квантової теорії поля [2,3], а також в математичну теорію квантових груп [4,5]. Деформовані комутаційні співвідношення та відповідно узагальнена алгебра Гайзенберга досить популярні для опису різноманітних екзотичних квазічастинок в теорії конденсованого стану [6] та нових підходах до квазіточно розв'язуваних задач в квантовій механіці [7, 8]. Цікаві нові можливості виникають при узагальненні комутаційних співвідношень Гайзенберга на оператори координат та імпульсів різних частинок [9, 10]. Деформація співвідношень некомутативності Гайзенберга може істотно змінити рівняння Шредінгера на малих відстанях між частинками і породити нединамічний (непотенціальний) вплив різних частинок одна на одну. Тут ми виклали певні нові результати, отримані як розвиток ідей із [10] щодо динаміки одновимірних квантових систем з двох та трьох частинок в підході з деформованими комутаційними співвідношеннями операторів координат та імпульсів різних частинок.

2. Хвильове рівняння для системи двох частинок в деформованому просторі. Канонічна схема квантування відповідає тому, що класичному гамільтоніану

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V\left(|x_1 - x_2|\right) \tag{1}$$

системи двох частинок з координатами x_1 і x_2 та масами m_1 і m_2 ставиться у відповідність квантовий гамільтоніан, де координати x_1, x_2 є C-числами, а імпульси p_1, p_2 є операторами:

$$x_1 \to \hat{x}_1 = x_1, \quad x_2 \to \hat{x}_2 = x_2\ , \tag{2}$$

$$p_1 \to \hat{p}_1 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad p_2 \to \hat{p}_2 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_2}\ . \tag{3}$$

Координати та імпульси задовільняють комутаційні співвідношення Гайзенберга:

$$[\hat{x}_1, \hat{p}_1] = i\hbar\ ,\ [\hat{x}_2, \hat{p}_2] = i\hbar\ , \tag{4}$$

$$[\hat{x}_1, \hat{p}_2] = 0\ ,\ [\hat{x}_2, \hat{p}_1] = 0\ , \tag{5}$$

а координати двох частинок та відповідні імпульси є попарно незалежними між собою і комутують.

Нульові комутатори (5) означають, що вимірювання чи спостереження координати (або імпульсу) однієї частинки не збурює стан імпульсу (або координати) іншої частинки навіть за наявності потенціалу взаємодії між частинками. Тобто неявно ми припускаємо, що зміна силового впливу однієї частинки на іншу, викликана вимірюванням координати першої частинки, не є миттєвою, а відбувається за скінченний час. Це породжує певне протиріччя, оскільки у нерелятивістській квантовій механіці вважається, що швидкість поширення взаємодії є нескінченно великою. Такі протиріччя можна зняти, відмовившись від комутування операторів координат та імпульсів різних квантових частинок.

Нехай при збуренні положення однієї з частинок відбувається неконтрольована передача імпульсу не тільки цій частинці, а й усій системі в цілому. В той же час обмежимося припущенням, що комутатори операторів координат кожної частинки з оператором повного імпульсу системи двох частинок $\hat{P} = \hat{p}_1 + \hat{p}_2$ з урахуванням трансляційної інваріантності, як і для стандартної картини Гайзенберга—Шредінгера, дорівнюють:

$$\big[\hat{x}_1,\, \hat{P}\big] = i\hbar\,, \quad \big[\hat{x}_2\,,\, \hat{P}\big] = i\hbar\,. \tag{6}$$

При реалізаціїнаведених вище ідей будемо вважати [10], що узагальнені деформовані комутаційні співвідношення між координатами та імпульсами в системі двох частинок такі:

$$\big[\hat{x}_1, \hat{p}_2\big] = i\hbar\hat{\varepsilon}_{12}\,. \tag{7}$$

Тут $\hat{\varepsilon}_{12}$ — деякий ермітовий оператор, який може залежати в загальному випадку від відносних координати та імпульсу двох частинок в системі центра мас. Цей же оператор $\hat{\varepsilon}_{12}$ з урахуванням співвідношень (6) визначає також і узагальнене комутаційне співвідношення координати та імпульсу однієї і тієї ж частинки:

$$[\hat{x}_1, \hat{p}_1] = i\hbar(1 - \hat{\varepsilon}_{12})\,. \tag{8}$$

Якщо ж комутатор між координатою другої частинки та імпульсом першої частинки є

$$[\hat{x}_2, \hat{p}_1] = i\hbar\hat{\varepsilon}_{21}\,, \tag{9}$$

то тоді маємо

$$[\hat{x}_2, \hat{p}_2] = i\hbar(1 - \hat{\varepsilon}_{21}) \ . \tag{10}$$

Обмежимося тут припущенням, що оператори координат окремо (і відповідно імпульсів окремо) різних частинок комутують, як і в стандартному підході Гайзенберга—Шредінгера

$$[\hat{x}_1 \, , \, \hat{x}_2] = 0 \ , \quad [\hat{p}_1 \, , \, \hat{p}_2] = 0 \ , \tag{11}$$

що дозволяє використати оператори координат в якості незалежних змінних.

Скористаємося операторною тотожністю Якобі

$$\left[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]\right] + \left[\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]\right] + \left[\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]\right] = 0 \tag{12}$$

для трьох лінійних операторів $\hat{A}$, $\hat{B}$ і $\hat{C}$, що дозволяє накласти певні обмеження на властивості операторів некомутативності $\hat{\varepsilon}_{12}$ і $\hat{\varepsilon}_{21}$:

$$[\hat{p}_1 + \hat{p}_2, \hat{\varepsilon}_{12}] = 0 \ ; \ \ [\hat{p}_1 + \hat{p}_2, \hat{\varepsilon}_{21}] = 0 \ ; \ \ [\hat{x}_1, \hat{\varepsilon}_{21}] + [\hat{x}_2, \hat{\varepsilon}_{12}] = 0 \ . \tag{13}$$

Підкреслимо, що перші дві умови в (13) свідчать, що оператори некомутативності $\hat{\varepsilon}_{12}$ і $\hat{\varepsilon}_{21}$ комутують з повним імпульсом системи двох частинок. Якшо вибрати координати частинок в якості незалежних змінних $\hat{x}_1 = x_1$ і $\hat{x}_2 = x_2$, то повний імпульс системи в цьому випадку набуває вигляду:

$$\hat{P} = \hat{p}_1 + \hat{p}_2 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_1} - i\hbar\frac{\partial}{\partial x_2} \ . \tag{14}$$

Звідси випливає, що оператори некомутативності $\hat{\varepsilon}_{12}$ та $\hat{\varepsilon}_{21}$ є функціями (а не операторами) лише відносної координати двох частинок $\hat{\varepsilon}_{12} \equiv \varepsilon_{12}\,(x_1 - x_2)$ і $\hat{\varepsilon}_{21} \equiv \varepsilon_{21}\,(x_1 - x_2)$. При цьому співвідношення (13) виконуються автоматично.

Тепер оператори імпульсів для кожної з двох частинок через перші похідні за координатами та через функції некомутативності можуть бути представлені у вигляді

$$\hat{p}_1 = -i\hbar\,(1 - \varepsilon_{12})\,\frac{\partial}{\partial x_1} - i\hbar\varepsilon_{21}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{i\hbar}{2}\,(\varepsilon_{12})'_{x_1} - \frac{i\hbar}{2}\,(\varepsilon_{21})'_{x_2} \ , \tag{15}$$

$$\hat{p}_2 = -i\hbar\varepsilon_{12}\frac{\partial}{\partial x_1} - i\hbar\,(1 - \varepsilon_{21})\,\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{i\hbar}{2}\,(\varepsilon_{12})'_{x_1} + \frac{i\hbar}{2}\,(\varepsilon_{21})'_{x_2} \, . \tag{16}$$

Тут штрих означає частинну похідну за координатами відповідних частинок. Оператори ж (15) і (16) задовольняють комутативні співвідношення (7)–(11).

Зручно ввести відносну координату та координату центра мас

$$x = x_1 - x_2, \quad X = \frac{m_1}{M}x_1 + \frac{m_2}{M}x_2 \tag{17}$$

(тут M — повна маса) і вимагати розділення змінних відносного руху та руху центра мас у повному гамільтоніані системи. Тоді виникають додаткові умови на функції некомутативності $\varepsilon_{12}(x)$ і $\varepsilon_{21}(x)$:

$$m_1\varepsilon_{12}(x) - m_2\varepsilon_{21}(x) = 0, \;\; 1 - \varepsilon_{12}(x) - \varepsilon_{21}(x) \neq 0\,. \tag{18}$$

При цьому гамільтоніан системи можна записати у вигляді незалежних доданків

$$H = H_X + H_x\,, \tag{19}$$

де оператор кінетичної енергії центра мас має стандартний вигляд

$$H_X = -\frac{\hbar^{\mathbf{2}}}{2M}\frac{\partial^2}{\partial X^2}. \tag{20}$$

У координатах Якобі x і X оператори імпульсів частинок $\hat{p}_1$ і $\hat{p}_2$ можуть бути представлені у вигляді

$$\hat{p}_{\mathbf{1}} = -i\hbar\left(1 - \varepsilon_{12} - \varepsilon_{21}\right)\frac{\partial}{\partial x} - i\hbar\frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{i\hbar}{2}\left(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{12}\right)_x^{'}\,, \tag{21}$$

$$\hat{p}_2 = i\hbar\left(1 - \varepsilon_{12} - \varepsilon_{21}\right)\frac{\partial}{\partial x} - i\hbar\frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial X} - \frac{i\hbar}{2}\left(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{12}\right)_x^{'}\,. \tag{22}$$

Тоді гамільтоніан відносного руху буде

$$\begin{aligned} H_x = -\frac{\hbar^2}{2}\mu^{-1}\Big[\varepsilon^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\varepsilon(x)\varepsilon^{'}(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\varepsilon(x)\varepsilon^{''}(x) + \\ + \frac{1}{4}\left[\varepsilon^{'}(x)\right]^2\Big] + V(x), \end{aligned} \tag{23}$$

де $\mu^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-1}$ — зведена маса двох частинок, і сюди входить лише одна сумарна функція некомутативності $\varepsilon(x) = 1 - \varepsilon_{12}(x) -$

$\varepsilon_{21}(x)$. Функції некомутативності: $\varepsilon_{12}(x)$ і $\varepsilon_{21}(x)$ виражаються через цю сумарну ефективну функцію некомутативності $\varepsilon(x)$ таким чином:

$$\varepsilon_{12}(x) = \frac{m_2}{M}\big(1 - \varepsilon(x)\big), \quad \varepsilon_{21}(x) = \frac{m_1}{M}\big(1 - \varepsilon(x)\big) . \tag{24}$$

Оператор кінетичної енергії в гамільтоніані H_x (23) записано у вигляді, що відповідає кінетичній енергії в певних криволінійних координатах.

Квантове хвильове рівнянні відносного руху за змінною x з гамільтоніаном H_x (23) після заміни координати та хвильової функції

$$\psi(q) = \sqrt{\varepsilon(x)}\,\varphi(x), \quad \frac{dx}{dq} = \varepsilon(x) \tag{25}$$

істотно спрощується і остаточно набуває вигляду:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\psi(q)}{dq^2} + V(x(q))\psi(q) = E\psi(q) . \tag{26}$$

Потенціал взаємодії у квантовому хвильовому рівнянні (26) відносного руху двох частинок замість координати x залежить від нової криволінійної змінної q відповідно до другого рівняння в (25), в той же час кінетична енергія за змінною q має стандартний вигляд.

Рівняння (26) свідчить про те, що для опису квантової системи двох частинок необхідно задавати як потенціальну енергію взаємодії двох частинок $V(x)$, яка за визначенням є неквантовою, так і функцію $\varepsilon(x)$, яка відповідає за можливу некомутативність квантових операторів координат та імпульсів різних частинок. Природа введеної функції некомутативності $\varepsilon(x)$ може бути різною: 1) функція некомутативності $\varepsilon(x)$ повинна бути відмінною від одиниці лише на ультрамалих відстанях і може мати певний фундаментальний вигляд, незалежний від потенціалу взаємодії; 2) більш слабке твердження полягає в тому, що функція некомутативності $\varepsilon(x)$ визначається моделлю взаємодії і тоді для невзаємодіючих вільних частинок вона є одиницею (в такому випадку ніякої принципової відмінності від стандартної ситуації з двома вільними квантовими частинками немає); 3) нарешті функція некомутативності $\varepsilon(x)$ може певним чином моделювати релятивістські ефекти, коли істотне значення має скінченність швидкості передачі взаємодії, або неточковість частинок.

Виконаємо попередній аналіз можливих наслідків для розв'язків квантового хвильового рівняння (26) для двох частинок у випадку запропонованих вище деформованих комутаційних співвідношень і порівняємо такі результати зі стандартними розв'язками квантово-механічного рівняння Шредінгера. На великих відстанях між частинками функції некомутативності $\varepsilon_{12}(x)$ і $\varepsilon_{21}(x)$ повинні дорівнювати нулеві, а $\varepsilon(x)$ дорівнює одиниці (ми вважаємо також, що функція $\varepsilon(x)$ є парною) і тому асимптотично координати x та q на великих відстанях співпадають. Як можливий приклад виберемо $\varepsilon(x)$ у вигляді:

$$\varepsilon(x) = \sqrt{1 + \frac{A^2}{x^2}} \; . \tag{27}$$

Тоді

$$x = \sqrt{q(q + 2A)} \; . \tag{28}$$

Нехай потенціал взаємодії між двома частинками вибрано у формі гауссоїди $V(x) = g \exp(-x^2)$. В залежності від нової змінної q такий потенціал істотно деформується на малих відстанях. У випадку притягування потенціальна енергія зменшується, що призводить до зсуву енергетичних рівнів вгору. З іншого боку, якщо маємо взаємодію відштовхувальну, то внаслідок врахування некомутативності бар'єр звужується і коефіцієнт відбиття від нього зменшується, а прозорість бар'єру збільшується. Зауважимо також, що функція некомутативності $\varepsilon(x)$ повинна бути одиницею на великих відстанях, а на малих відстанях більше одиниці, і отже недіагональні функції некомутативності $\varepsilon_{12}(x)$ і $\varepsilon_{21}(x)$ тут стають від'ємними.

3. Хвильові рівняння для тричастинкових систем в деформованому просторі. Розглянемо тепер узагальнення деформованих комутаційних співвідношень для операторів координат $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ та $\hat{x}_3$ та імпульсів $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$ і $\hat{p}_3$ різних частинок на квантову систему трьох частинок. Нехай комутатор координати кожної частинки з оператором повного імпульсу системи $\hat{P} = \hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3$ є недеформованим

$$[\hat{x}_i \, , \, \hat{P}] = i\hbar, \quad i = 1, 2, 3 \; . \tag{29}$$

Введемо узагальнені деформовані комутаційні співвідношення для трьох частинок в одновимірному просторі

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\hat{\varepsilon}_{ij}, \quad i \neq j = 1, 2, 3 \; . \tag{30}$$

Тут $\hat{\varepsilon}_{ij}$ — деякі ермітові оператори, а з (29) випливає

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_i] = i\hbar\left(1 - \sum_{j\neq i=1}^{3} \hat{\varepsilon}_{ij}\right), \tag{31}$$

тобто діагональні (коли $i = j$) оператори некомутативності не є незалежними. Крім того, комутаційні співвідношення окремо для операторів координат (і окремо для імпульсів) різних частинок дорівнюють нулеві, що дає змогу використати в якості незалежних змінних координати частинок x_i.

Як і у двочастинковій задачі обмежимося припущенням, що оператори $\hat{\varepsilon}_{ij}$ є функціями (а не операторами) лише координат частинок. Тоді маємо для операторів імпульсів трьох частинок таке представлення:

$$\begin{aligned}\hat{p}_1 = -i\hbar\,(1 - \varepsilon_{12} - \varepsilon_{13})\,\frac{\partial}{\partial x_1} - i\hbar\varepsilon_{21}\frac{\partial}{\partial x_2} - i\hbar\varepsilon_{31}\frac{\partial}{\partial x_3} + \\ + \frac{i\hbar}{2}\left[(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13})'_{x_1} - (\varepsilon_{21})'_{x_2} - (\varepsilon_{31})'_{x_3}\right],\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\hat{p}_2 = -i\hbar\varepsilon_{12}\frac{\partial}{\partial x_1} - i\hbar\,(1 - \varepsilon_{21} - \varepsilon_{23})\,\frac{\partial}{\partial x_2} - i\hbar\varepsilon_{32}\frac{\partial}{\partial x_3} - \\ - \frac{i\hbar}{2}\left[(\varepsilon_{12})'_{x_1} - (\varepsilon_{21} + \varepsilon_{23})'_{x_2} + (\varepsilon_{32})'_{x_3}\right],\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}\hat{p}_3 = -i\hbar\varepsilon_{13}\frac{\partial}{\partial x_1} - i\hbar\varepsilon_{23}\frac{\partial}{\partial x_2} - i\hbar\,(1 - \varepsilon_{31} - \varepsilon_{32})\,\frac{\partial}{\partial x_3} - \\ - \frac{i\hbar}{2}\left[(\varepsilon_{13})'_{x_1} + (\varepsilon_{23})'_{x_2} - (\varepsilon_{31} + \varepsilon_{32})'_{x_3}\right]\end{aligned} \tag{34}$$

через функції некомутативності.

Використаємо тотожність Якобі (12) для операторів $\hat{A} = \hat{p}_i$, $\hat{B} = \hat{p}_j$ і $\hat{C} = \hat{x}_k$ $(i \neq j, k = 1, 2, 3)$, що накладає певні обмеження на властивості функцій некомутативності ε_{ij}. Так, недіагональні матричні функції ε_{ij} комутують з повним імпульсом системи

$$\left[\hat{P}\,, \hat{\varepsilon}_{ij}\right] = 0, \quad i \neq j = 1, 2, 3\,, \tag{35}$$

і задовольняють таку систему операторних рівнянь:

$$[\hat{p}_1\,, \varepsilon_{32}] = [\hat{p}_2\,, \varepsilon_{31}]\,, \tag{36}$$

$$[\hat{p}_1\, ,\, \varepsilon_{23}] = [\hat{p}_3\, ,\, \varepsilon_{21}]\ , \tag{37}$$

$$[\hat{p}_2\, ,\, \varepsilon_{13}] = [\hat{p}_3\, ,\, \varepsilon_{12}]\ . \tag{38}$$

Зручно замість декартових координат x_1, x_2, x_3 та декартових операторів імпульсів $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$ і $\hat{p}_3$ перейти до стандартних координат та імпульсів Якобі

$$q_1 = x_2 - x_3\ , \qquad \hat{P}_1 = \frac{m_3\hat{p}_2 - m_2\hat{p}_3}{m_2 + m_3}\ ;$$

$$q_2 = x_1 - \frac{m_2x_2 + m_3x_3}{m_2 + m_3}\ ,\ \ \hat{P}_2 = \frac{(m_2 + m_3)\hat{p}_1 - m_1(\hat{p}_2 + \hat{p}_3)}{m_1 + m_2 + m_3}\ ;$$

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}\ , \quad \hat{P} = \hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3\ ; \tag{39}$$

де X є координата центра мас системи, а $\hat{P}$ — сумарний імпульс. Рух центра мас системи відокремлюється від відносного руху за умов рівності нулю таких комутаторів:

$$\left[q_1\, ,\, \hat{P}\right] = 0\ , \quad \left[q_2\, ,\, \hat{P}\right] = 0\ , \tag{40}$$

$$\left[X\, ,\, \hat{P}_1\right] = 0\ , \quad \left[X\, ,\, \hat{P}_2\right] = 0\ . \tag{41}$$

Якщо умови (40) виконуються тотожньо, то співвідношення (41) дають дві додаткові умови на шість недіагональних функцій ε_{ij}

$$m_2\varepsilon_{21} - m_1\varepsilon_{12} + m_3\varepsilon_{31} - m_1\varepsilon_{13} = 0\ , \tag{42}$$

$$m_3\varepsilon_{32} - m_2\varepsilon_{23} + m_1\varepsilon_{12} - m_2\varepsilon_{21} = 0\ . \tag{43}$$

Всі функції некомутативності ε_{ij} комутують з оператором повного імпульсу системи і тому можуть залежати лише від двох відносних координат Якобі $\varepsilon_{ij}\,(q_1, q_2)$.

Запишемо тепер оператори імпульсів трьох частинок в координатах Якобі

$$\hat{p}_1 = -i\hbar\,\alpha\frac{\partial}{\partial q_1} - i\hbar\,\beta\,\frac{\partial}{\partial q_2} - i\hbar\,\frac{m_1}{M}\,\frac{\partial}{\partial X} - \frac{i\hbar}{2}\left(\alpha^{'}_{q_1} + \beta^{'}_{q_2}\right), \tag{44}$$

$$\hat{p}_2 = -i\hbar\,\gamma\frac{\partial}{\partial q_1} - i\hbar\,\delta\,\frac{\partial}{\partial q_2} - i\hbar\,\frac{m_2}{M}\,\frac{\partial}{\partial X} - \frac{i\hbar}{2}\left(\gamma^{'}_{q_1} + \delta^{'}_{q_2}\right), \tag{45}$$

$$\begin{aligned}\hat{p}_3 =& i\hbar\,(\alpha+\gamma)\frac{\partial}{\partial q_1} + i\hbar\,(\beta+\delta)\,\frac{\partial}{\partial q_2} - i\hbar\,\frac{m_3}{M}\,\frac{\partial}{\partial X} + \\ &+ \frac{i\hbar}{2}\left(\alpha^{'}_{q_1} + \gamma^{'}_{q_1} + \beta^{'}_{q_2} + \delta^{'}_{q_2}\right),\end{aligned} \tag{46}$$

де

$$\alpha = \varepsilon_{21} - \varepsilon_{31}\ , \tag{47}$$

$$\beta = 1 - \frac{M}{m_2+m_3}\left(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{13}\right)\ , \tag{48}$$

$$\gamma = 1 - \varepsilon_{21} - \varepsilon_{23} - \varepsilon_{32}\ , \tag{49}$$

$$\delta = -\frac{m_2}{m_2+m_3} + \frac{M}{m_2+m_3}\varepsilon_{12}\ . \tag{50}$$

Оператори імпульсів $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$ і $\hat{p}_3$ повинні комутувати між собою, що можливо при виконанні таких додаткових умов:

$$\alpha\,\frac{\partial\,\gamma}{\partial q_1} + \beta\,\frac{\partial\,\gamma}{\partial q_2} - \gamma\,\frac{\partial\,\alpha}{\partial q_1} - \delta\,\frac{\partial\,\alpha}{\partial q_2} = 0\ , \tag{51}$$

$$\alpha\,\frac{\partial\,\delta}{\partial q_1} + \beta\,\frac{\partial\,\delta}{\partial q_2} - \gamma\,\frac{\partial\,\beta}{\partial q_1} - \delta\,\frac{\partial\,\beta}{\partial q_2} = 0\ . \tag{52}$$

Рівняння (36) в координатах Якобі має вигляд

$$\alpha\,\frac{\partial\,\varepsilon_{32}}{\partial q_1} + \beta\,\frac{\partial\,\varepsilon_{32}}{\partial q_2} = \gamma\,\frac{\partial\,\varepsilon_{31}}{\partial q_1} + \delta\,\frac{\partial\,\varepsilon_{31}}{\partial q_2}\ . \tag{53}$$

Рівняння (37) співпадає з (53), якщо врахувати (51), а (38) співпадає з рівнянням (52).

Таким чином, для шести функцій некомутативності ε_{ij} ми маємо п'ять додаткових умов (42), (43), (51), (52) та (53), і тоді в загальному випадку можна очікувати, що для трьох частинок незалежною є лише одна функція некомутативності, як це було і для двох частинок.

При прямуванні i-ї частинки до нескінченності чотири функції некомутативності ε_{ij}, ε_{ji} $(i \neq j)$ прямують до нуля. Інші дві функції ε_{kj} $(k \neq i, j \neq i)$ прямують до функцій некомутативності двочастинкової задачі. При цьому всі п'ять умов (42), (43), (51), (52) та (53) виконуються автоматично.

Тепер гамільтоніан квантової системи трьох частинок в системі центра мас має вигляд

$$H = \frac{P_1^2}{2\mu_1} + \frac{P_2^2}{2\mu_2} + V\left(q_1, q_2\right) \ , \tag{54}$$

де

$$\hat{P}_1 = -i\hbar\, f \frac{\partial}{\partial q_1} - i\hbar\, \eta\, \frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{i\hbar}{2}\left(f^{'}_{q_1} + \eta^{'}_{q_2}\right), \tag{55}$$

$$\hat{P}_2 = -i\hbar\, \alpha \frac{\partial}{\partial q_1} - i\hbar\, \beta\, \frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{i\hbar}{2}\left(\alpha^{'}_{q_1} + \beta^{'}_{q_2}\right), \tag{56}$$

а $\mu_1^{-1} = m_2^{-1} + m_3^{-1}$, $\mu_2^{-1} = m_1^{-1} + (m_2+m_3)^{-1}$, $f = \gamma + \alpha m_2 (m_2+m_3)^{-1}$ і $\eta = \delta + \beta m_2 (m_2+m_3)^{-1}$, і його можна записати у вигляді

$$H = Q_{11}\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + Q_{22}\frac{\partial^2}{\partial q_2^2} + Q_{12}\frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_2} + Q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + Q_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + Q_0 + V\left(q_1, q_2\right) \ . \tag{57}$$

Тут

$$Q_{11} = -\hbar^2 \left(\frac{f^2}{2\mu_1} + \frac{\alpha^2}{2\mu_2} \right) , \tag{58}$$

$$Q_{22} = -\hbar^2 \left(\frac{\eta^2}{2\mu_1} + \frac{\beta^2}{2\mu_2} \right) , \tag{59}$$

$$Q_{12} = -\hbar^2 \left(\frac{f\eta}{\mu_1} + \frac{\alpha\beta}{\mu_2} \right) , \tag{60}$$

$$Q_1 = -\hbar^2 \left(\frac{2ff^{'}_{q_1} + f\eta^{'}_{q_2} + \eta f^{'}_{q_2}}{2\mu_1} + \frac{2\alpha\alpha^{'}_{q_1} + \alpha\beta^{'}_{q_2} + \beta\alpha^{'}_{q_2}}{2\mu_2} \right) , \tag{61}$$

$$Q_2 = -\hbar^2 \left(\frac{2\eta\eta^{'}_{q_2} + f\eta^{'}_{q_1} + \eta f^{'}_{q_1}}{2\mu_1} + \frac{2\beta\beta^{'}_{q_2} + \alpha\beta^{'}_{q_1} + \beta\alpha^{'}_{q_1}}{2\mu_2} \right) , \tag{62}$$

$$Q_0 = -\hbar^2 \left(\frac{\left(f^{'}_{q_1}\right)^2 + \left(\eta^{'}_{q_2}\right)^2 + 2f^{'}_{q_1}\eta^{'}_{q_2} + 2ff^{''}_{q_1q_1} + 2\eta\eta^{''}_{q_2q_2} + 2f\eta^{''}_{q_1q_2} + 2\eta f^{''}_{q_1q_2}}{8\mu_1} + \frac{\left(\alpha^{'}_{q_1}\right)^2 + \left(\beta^{'}_{q_2}\right)^2 + 2\alpha^{'}_{q_1}\beta^{'}_{q_2} + 2\alpha\alpha^{''}_{q_1q_1} + 2\beta\beta^{''}_{q_2q_2} + 2\alpha\beta^{''}_{q_1q_2} + 2\beta\alpha^{''}_{q_1q_2}}{8\mu_2} \right) .$$

Наголосимо, що кінетична енергія системи трьох частинок в системі центра мас має вигляд кінетичної енергії в криволінійних координатах. Кінетична енергія залежить від функцій некомутативності і тим самим залежить від усіх внутрішніх координат трьох частинок. Як наслідок, на ультрамалих відстанях між частинками, де власне і є нетривіальними функції некомутативності, можуть виникати відчутні аномальні ефекти істинно тричастинкових кореляцій чисто квантового походження.

Розвинутий вище підхід допускає розповсюдження на одновимірні багаточастинкові задачі з довільною кількістю частинок.

4. Висновки. В роботі запропоновано підхід до одновимірних квантових систем взаємодіючих частинок, що ґрунтується на припущенні щодо некомутативності операторів координат та імпульсів різних частинок. В загальному вигляді отримано представлення для операторів імпульсів в системах двох та трьох частинок і знайдено хвильові рівняння для дво- та тричастинкових квантових систем в системі центра мас. Гамільтоніан системи частинок, крім потенціалу взаємодії, ще задається певною однією функцією некомутативності, відповідно, для системи двох та трьох частинок, що може істотно модифікувати динаміку квантових частинок на ультрамалих міжчастинкових відстанях. Розглянута некомутативність може приводити до відчутного відштовхування між частинками на малих відстанях. На відносно більших відстанях залишається застосовним стандартне представлення Гайзенберга—Шредінгера для імпульсів частинок. Підхід з узагальненими комутаційними співвідношеннями для координат та імпульсів різних частинок може бути розповсюджено на одновимірні багаточастинкові системи.

Нових підходів вимагає розповсюдження принципу некомутативності координат та імпульсів різних частинок у дво- та тривимірному просторі. З загальної точки зору через некомутативність може виникати порушення на ультрамалих відстанях сферичної симетрії в квантових системах зі сферичносиметричними потенціалами взаємодії. Всі ці проблеми, як і застосування ідеї некомутативності до конкретних фізичних систем, вимагають спеціального дослідження.

Автори щиро вдячні О.М. Гаврилику, В.П. Гусиніну, А.Г. Загородньому і В.В. Кухтіну за корисні дискусії з питань, які розглядались в представленій роботі.

[1] Snyder H. S. Quantized Space-Time // Phys. Rev. – 1947. – **71**, № 1. – P. 38–41.

[2] Jackiw R., Pi S. Y. Covariant coordinate transformations on noncommutative space // Phys. Rev. Lett. – 2002. – **88**, № 11. – P. 111603–4.

[3] Szabo R. J. Quantum field theory on noncommutative spaces // Phys.Rept. – 2003. – **378**, № 4. – P. 207–299.

[4] Klimyk A., Schm*ü*dgen K. Quantum Groups and Their Representations. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1997. – 552 p.

[5] Kempf A. Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry // J. Math. Phys. – 1994. – **35**, № 9. – P. 4483–4496.

[6] Дюваль С., Хорвати П. А. Некоммутативные координаты, экзотические частицы и аномальные анионы в эффекте Холла // ТМФ. – 2005. – **144**, № 1. – С. 26—34.

[7] Fityo T. V., Vakarchuk I. O., Tkachuk V. M. One-dimensional Coulomb-like problem in deformed space with minimal length // J. Phys. A: Math. Gen. – 2006. – **39**, № 9. – P. 2143–2149.

[8] Вакарчук І. О. Квантова механіка. - Львів: Львів. нац. ун-т. – 2007. – 847 с.

[9] Kuzmenko M. V. Nonrelativistic wave equation for a system of interacting particles // Phys. Rev. A. – 2000. – **61**, № 1. –P. 014101–4.

[10] Кузьменко М. В., Сименог І. В. Узагальнення комутаційних співвідношень в квантовій механіці систем частинок // Доп. НАН України. Математика, природознавство, технічні наук. – 2008.– № 3. – С. 77–83.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2007, т.4, N 3, 123–135

519.7

Груповий аналіз та точні розв'язки моделі Фрьоліха—Пайерлса

О.В. Курікша

Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: gaponova@imath.kiev.ua

Проведено груповий аналіз та побудовано точні розв'язки моделі Фрьоліха—Пайерлса у нерівноважному стані в одновимірному випадку.

Group analysis of model Fröhlich—Peierls Hamiltonian in nonequilibrium state in the one dimensional case is carried out. Using group reduction exact solutions for this model are found.

1. Вступ. В роботі Д.Я. Петрини [6] отримано рівняння для рівноважних та нерівноважних станів моделі Фрьоліха—Пайерлса для електронів, що взаємодіють з фононами тільки при певних дискретних модах. В одновимірному випадку нерівноважні стани описуються системою зачеплених рівнянь:

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}W(t,x) + \omega_0^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(t,x) = -4\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}|\Psi(t,x)|^2, \quad (1)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x) = \left(-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu\right)\Psi(t,x) + W(t,x)\Psi(t,x), \quad (2)$$

де ω_0, m, μ, α — дійсні параметри.

Хвильова функція $\Psi(t,x)$ задовольняє рівняння Шрьодінгера з залежним від часу потенціалом, що задається дійсною функцією $W(t,x)$, яка є розв'язком неоднорідного рівняння Даламбера з правою частиною $-4\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}|\Psi(t,x)|^2$.

Д.Я. Петрина знайшов [6] частинний розв'язок рівнянь (1)–(2). Це розв'язок солітонного типу, який задається такими функціями:

$$W(t,x) = \frac{-16\alpha\eta^2}{\omega_0^2 - V^2}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{u}{2}(x - vt - x_0)}, \quad (3)$$

$$\Psi(t,x)=2i\eta\frac{\exp i\left(vmx-\left(\frac{v^2}{2}m-\frac{u^2}{8m}+\mu\right)t-\varphi_0\right)}{\operatorname{ch}\frac{u}{2}(x-vt-x_0)}, \tag{4}$$

де

$$v=-4\xi\sqrt{\frac{\alpha}{(\omega_0^2-V^2)m}},\quad u=4\eta\sqrt{\frac{4\alpha m}{\omega_0^2-V^2}},\quad \xi,\eta,x_0,\varphi_0 \text{ — константи.}$$

В даній роботі знайдено набагато більший клас точних розв'язків системи (1)–(2). Зауважимо, що ця проблема була сформульована самим Д.Я. Петриною незадовго до його смерті. Регулярний шлях для пошуку таких розв'язків надає груповий аналіз, створений Софусом Лі майже 150 років назад [2].

Алгоритм Лі пошуку точних розв'язків диференціальних рівнянь можна описати таким чином [1, 4, 5]:

1. Знаходимо всі групи неперервних перетворень, що залишають дане рівняння інваріантним.

2. Знаходимо алгебру Лі відповідної групи.

3. Знаходимо оптимальну систему всіх одновимірних підалгебр.

4. Кожній такій підалгебрі відповідає заміна змінних, що редукує рівняння до системи ЗДР другого порядку, проінтегрувати яку набагато легше ніж початкову систему (у даному випадку систему (1)–(2)).

2. Груповий аналіз моделі Фрьоліха—Пайерлса. Очевидно, що система рівнянь (1)–(2) не буде мати дуже широкі симетрії, оскільки ліва частина рівняння (1) інваріантна відносно перетворення Лоренца, а ліва частина рівняння (2) інваріантна відносно перетворення Галілея. Перед тим, як шукати симетрії системи рівнянь (1)–(2) пронормуємо коефіцієнти, зробивши заміну:

$$W(t,x)=\widetilde{W}(t,\tilde{x}),\quad \Psi(t,x)=\frac{\omega_0}{2\sqrt{\alpha}}e^{i\mu t}\widetilde{\Psi}(t,\tilde{x}),\quad \tilde{x}=\frac{x}{\omega_0}.$$

Тоді отримуємо систему:

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\widetilde{W}(t,\tilde{x})+\frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}^2}\widetilde{W}(t,\tilde{x})=-\frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}^2}|\widetilde{\Psi}(t,\tilde{x})|^2, \tag{5}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\Psi}(t,\tilde{x})=-\frac{1}{2m\omega_0^2}\frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}^2}\widetilde{\Psi}(t,\tilde{x})+\widetilde{W}(t,\widetilde{x})\widetilde{\Psi}(t,\widetilde{x}). \tag{6}$$

Представивши функцію $\widetilde{\Psi}(t,\widetilde{x})$ через амплітуду і фазу:

$$\widetilde{\Psi}(t,\widetilde{x}) = \rho(t,\widetilde{x})e^{i\varphi(t,\widetilde{x})}$$

зводимо систему (5)–(6) до системи вигляду:

$$\widetilde{W}_{tt} - \widetilde{W}_{\tilde{x}\tilde{x}} = 2\left(\rho_{\tilde{x}}^2 + \rho\rho_{\tilde{x}\tilde{x}}\right), \tag{7}$$

$$\rho_t = -\frac{1}{2m\omega_0^2}\left(2\rho_{\tilde{x}}\varphi_{\tilde{x}} + \rho\varphi_{\tilde{x}\tilde{x}}\right), \tag{8}$$

$$\rho\varphi_t = \frac{1}{2m\omega_0^2}\left(\rho_{\tilde{x}\tilde{x}} - \rho\varphi_{\tilde{x}}^2\right) - \widetilde{W}\rho. \tag{9}$$

Використовуючи стандартний алгоритм Лі [1,4,5] знаходимо, що інфінітезимальний оператор групи інваріантності системи (7)–(9) є лінійною комбінацією таких операторів:

$$e_1 = -\partial\varphi, \quad e_2 = -\partial_{\widetilde{W}} + t\partial\varphi, \quad e_3 = t\partial_{\widetilde{W}} - \frac{1}{2}t^2\partial_\varphi,$$
$$e_4 = \partial_t, \quad e_5 = \partial_{\tilde{x}}.$$

Переписуючи ці оператори в термінах $\widetilde{W}$ та $\widetilde{\Psi}$, приходимо до такого твердження.

Теорема 1. *Система рівнянь (5)–(6) допускає п'ятивимірну алгебру Лі, базисні елементи якої можна вибрати у вигляді:*

$$e_1 = -i\left(\widetilde{\Psi}\partial_{\widetilde{\Psi}} - \widetilde{\Psi}^*\partial_{\widetilde{\Psi}^*}\right), \quad e_2 = -\partial_{\widetilde{W}} + it\left(\widetilde{\Psi}\partial_{\widetilde{\Psi}} - \widetilde{\Psi}^*\partial_{\widetilde{\Psi}^*}\right),$$
$$e_3 = t\partial_{\widetilde{W}} - \frac{i}{2}t^2\left(\widetilde{\Psi}\partial_{\widetilde{\Psi}} - \widetilde{\Psi}^*\partial_{\widetilde{\Psi}^*}\right), \quad e_4 = \partial_t, \quad e_5 = \partial_{\tilde{x}}.$$

Знаходимо їх комутатори:

$$[e_2, e_4] = e_1, \quad [e_3, e_4] = e_2,$$

(решта комутаторів дорівнюють нулю), і приходимо до висновку, що отримані оператори утворюють алгебру $A_{4.1} \bigoplus A_1$ за класифікацією Мубаракзянова [3].

Наступним кроком є знаходження всіх одновимірних підалгебр знайденої алгебри інваріантності.

3. Одновимірні підалгебри алгебри $A_{4.1} \bigoplus A_1$**.** Нехай $e = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5$ — елемент алгебри $A_{4.1} \bigoplus A_1$, який будемо намагатися спростити, використовуючи приєднані відображення.

Щоб обчислити приєднані представлення, скористаємося рядами Лі [5]:

$$\mathrm{Ad}(\exp(\varepsilon e))e_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}(ade)^n(e_i) = e_i - \varepsilon[e, e_i] + \frac{\varepsilon^2}{2}[e,[e,e_i]] - ...$$

Наприклад,

$$\mathrm{Ad}(\exp(\varepsilon e_3))e_4 = e_4 - \varepsilon[e_3, e_4] + \frac{\varepsilon^2}{2}[e_3,[e_3,e_4]] - ... = e_4 - \varepsilon e_2.$$

Аналогічно знаходимо дію приєднаного представлення на інші базисні елементи алгебри. Результати цієї дії наведено у таблиці:

Таблиця 1.

Ad	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	e_1	e_2	e_3	$e_4 - \varepsilon e_1$	e_5
e_3	e_1	e_2	e_3	$e_4 - \varepsilon e_2$	e_5
e_4	e_1	$e_2 + \varepsilon e_1$	$e_3 + \varepsilon e_2$	e_4	e_5
e_5	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5

де на (i,j)-му місці вказано $\mathrm{Ad}(\exp(\varepsilon e_i))e_j$.

Використовуючи приєднані представлення з таблиці 1 знаходимо всі нееквівалентні одновимірні підалгебри алгебри $A_{4.1} \bigoplus A_1$.

Припустимо спочатку, що $a_4 \neq 0$. Тоді, не зменшуючи загальності, можна покласти $a_4 = 1$. У відповідності з таблицею 1, якщо на такий вектор подіяти перетворенням $\mathrm{Ad}(\exp(a_1 e_2))$, можна зробити коефіцієнт при e_1 нулем:

$$e' = \mathrm{Ad}(\exp(a_1 e_2))e = a_2' e_2 + a_3' e_3 + e_4 + a_5' e_5,$$

де a_2', a_3', a_5' — деякі числа, що залежать від a_1, a_2, a_3, a_5.

Далі, діємо на вектор e' перетворенням $\mathrm{Ad}(\exp(a_2' e_3))$, щоб перетворити на нуль коефіцієнт при e_2. Це приводить до вектора $e'' = a_3'' e_3 + e_4 + a_5'' e_5$.

Іншими словами, кожна одновимірна підалгебра, породжена вектором e з $a_4 \neq 0$, еквівалентна підалгебрі, породженої вектором $pe_3 + e_4 + \varkappa e_5$.

Решта одновимірних підалгебр породжуються векторами вказаного вище вигляду з $a_4 = 0$. Якщо $a_3 \neq 0$, можна розтягом зробити $a_3 = 1$, а потім подіяти на вектор e перетворенням $\mathrm{Ad}(\exp(-a_2 e_4))$, так що вектор e буде еквівалентним вектору $e' = a_1' e_1 + e_3 + a_5' e_5$.

Таким чином, будь-яка одновимірна підалгебра, породжена вектором e з $a_4 = 0$, $a_3 \neq 0$, еквівалентна підалгебрі, породженій вектором $qe_1 + e_3 + \varkappa e_5$.

Решта одновимірних підалгебр породжуються векторами вказаного вище вигляду з $a_3 = a_4 = 0$. Якщо ж $a_2 \neq 0$, можна розтягом зробити $a_2 = 1$, а потім подіяти перетворенням $\mathrm{Ad}(\exp(-a_1 e_4))$ на вектор e, так що цей вектор буде еквівалентним вектору $e' = e_2 + \varkappa e_5$.

Аналогічно можна показати, що в інших випадках ($a_2 = a_3 = a_4 = 0$) вектор e буде еквівалентним або $e_1 + \varkappa e_5$ ($a_1 \neq 0$), або e_5 ($a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$).

Отже, знайдена оптимальна система одновимірних підалгебр, яка описується теоремою 2.

Теорема 2. *Існує п'ять нееквівалентних одновимірних підалгебр алгебри $A_{4.1} \bigoplus A_1$ з точністю до групи внутрішніх автоморфізмів, базисні елементи яких можуть бути вибрані в такому вигляді:*

$$
\begin{aligned}
&pe_3 + e_4 + \varkappa e_5 = \partial_t + \varkappa\partial_{\tilde{x}} + pt\partial_{\widetilde{W}} - \frac{p}{2}t^2 i\left(\widetilde{\Psi}\partial_{\widetilde{\Psi}} - \widetilde{\Psi}^*\partial_{\widetilde{\Psi}^*}\right),\\
&qe_1 + e_3 + \varkappa e_5 = \varkappa\partial_{\tilde{x}} + t\partial_{\widetilde{W}} - \left(\frac{1}{2}t^2 + q\right) i\left(\widetilde{\Psi}\partial_{\widetilde{\Psi}} - \widetilde{\Psi}^*\partial_{\widetilde{\Psi}^*}\right),\\
&e_2 + \varkappa e_5 = \varkappa\partial_{\tilde{x}} - \partial_{\widetilde{W}} + ti\left(\widetilde{\Psi}\partial_{\widetilde{\Psi}} - \widetilde{\Psi}^*\partial_{\widetilde{\Psi}^*}\right),\\
&e_1 + \varkappa e_5 = \varkappa\partial_{\tilde{x}} - i\left(\widetilde{\Psi}\partial_{\widetilde{\Psi}} - \widetilde{\Psi}^*\partial_{\widetilde{\Psi}^*}\right),\\
&e_5 = \partial_{\tilde{x}}.
\end{aligned}
$$

4. Точні розв'язки моделі Фрьоліха–Пайерлса. Для кожної з отриманих одновимірних підалгебр можна знайти відповідну заміну змінних, яка редукує рівняння (7)–(9). В якості нових змінних вибираємо інваріанти відповідних груп перетворень.

Розглянемо детально випадок алгебри $pe_3 + e_4 + \varkappa e_5$. На першому кроці здійснюємо побудову базису інваріантів цієї алгебри. Для цього розв'язуємо рівняння

$$(p\tilde{e}_3 + \tilde{e}_4 + \varkappa\tilde{e}_5)(F(t, \tilde{x}, \widetilde{W}, \rho, \varphi)) = 0,$$

чи відповідні характеристичні рівняння

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\tilde{x}}{\varkappa} = \frac{d\widetilde{W}}{pt} = \frac{d\varphi}{-\frac{p}{2}t^2}.$$

Ця система має такі перші інтеграли:

$$\tilde{x} - \varkappa t = C_1, \quad \widetilde{W} - \frac{pt^2}{2} = C_2, \quad \rho = C_3, \quad \varphi + \frac{p}{6}t^3 = C_4.$$

Отже, базис інваріантів алгебри $pe_3 + e_4 + \varkappa e_5$ складають функції

$$\omega = \tilde{x} - \varkappa t, \quad u = \widetilde{W} - \frac{pt^2}{2}, \quad v = \rho, \quad y = \varphi + \frac{p}{6}t^3,$$

а тому покладемо

$$u = f(\omega), \quad v = h(\omega), \quad y = g(\omega),$$

звідки випливає

$$\widetilde{W} = f(\omega) + \frac{pt^2}{2}, \quad \rho = h(\omega), \quad \varphi = g(\omega) - \frac{p}{6}t^3, \quad \omega = \tilde{x} - \varkappa t.$$

Підстановка отриманих виразів для функцій $\widetilde{W}, \rho, \varphi$ у рівняння системи (7)–(9) приводить до системи

$$\ddot{f}(\varkappa^2 - 1) + p - 2(\dot{h}^2 + h\ddot{h}) = 0, \tag{10}$$

$$\ddot{g} + \frac{2\dot{h}}{h}(\dot{g} - m\omega_0^2\varkappa) = 0, \tag{11}$$

$$\ddot{h} - h\dot{g}^2 + 2m\omega_0^2 h\,(\varkappa\dot{g} - f) = 0, \tag{12}$$

де $\ddot{f} = \frac{d^2 f}{d\omega^2}$, $\dot{h} = \frac{dh}{d\omega}$, $\ddot{h} = \frac{d^2 h}{d\omega^2}$, $\dot{g} = \frac{dg}{d\omega}$, $\ddot{g} = \frac{d^2 g}{d\omega^2}$.

Таким чином, рівняння (7)–(9) редукуються до системи звичайних диференціальних рівнянь.

В таблиці 2 для кожної із одновимірних підалгебр подано відповідні анзаци та редуковані рівняння. Останні чотири редуковані системи дають такі точні розв'язки:

1) $W(t, x) = C_1 t + \dfrac{tx}{\varkappa\omega_0}$,

Таблиця 2.

Підалгебра	Інваріанти	Редуковані рівняння
$pe_3+e_4+\varkappa e_5$	$\widetilde{W}=f(\omega)+\frac{pt^2}{2}$, $\rho=h(\omega)$, $\varphi=g(\omega)-\frac{p}{6}t^3$, $\omega=\tilde{x}-\varkappa t$	$\dot{f}(\varkappa^2-1)+p-2(\dot{h}^2+h\ddot{h})=0$, $\ddot{g}+\frac{2\dot{h}}{h}(\dot{g}-m\omega_0^2\varkappa)=0$, $\ddot{h}-h\dot{g}^2+2m\omega_0^2h\,(\varkappa\dot{g}-f)=0$
$qe_1+e_3+\varkappa e_5$	$\widetilde{W}=f(\omega)+\frac{t\tilde{x}}{\varkappa}$, $\rho=h(\omega)$, $\omega=t$, $\varphi=g(\omega)-\left(\frac{1}{2}t^2+q\right)\frac{\tilde{x}}{\varkappa}$	$\dot{f}=0$, $\dot{h}=0$, $\dot{g}+\frac{1}{2m\omega_0^2\varkappa^2}\left(\frac{1}{2}\omega^2+q\right)^2+f=0$
$e_2+\varkappa e_5$	$\widetilde{W}=f(\omega)-\frac{\tilde{x}}{\varkappa}$, $\rho=h(\omega)$, $\omega=t$, $\varphi=g(\omega)+\frac{t\tilde{x}}{\varkappa}$	$\dot{f}=0$, $\dot{h}=0$, $\dot{g}+\frac{\omega^2}{2m\omega_0^2\varkappa^2}+f=0$
$e_1+\varkappa e_5$	$\widetilde{W}=f(\omega)$, $\rho=h(\omega)$, $\varphi=g(\omega)-\frac{\tilde{x}}{\varkappa}$, $\omega=t$	$\dot{f}=0$, $\dot{h}=0$, $\dot{g}+\frac{1}{2m\omega_0^2\varkappa^2}+f=0$
e_5	$\widetilde{W}=f(\omega)$, $\rho=h(\omega)$, $\varphi=g(\omega)$, $\omega=t$	$\dot{f}=0$, $\dot{h}=0$, $\dot{g}+f=0$

$$\Psi(t,x)=\frac{C_3\omega_0}{2\sqrt{\alpha}}\exp i\left(\left(\mu-\frac{q^2}{2m\omega_0^2\varkappa^2}-C_2\right)t-\frac{t^5}{40m\omega_0^2\varkappa^2}-\frac{qt^3}{6m\omega_0^2\varkappa^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{C_1}{2}t^2-\left(\frac{1}{2}t^2+q\right)\frac{x}{\varkappa\omega_0}\right);$$

2) $W(t,x)=C_1t-\dfrac{x}{\varkappa\omega_0}$,

$$\Psi(t,x)=\frac{C_3\omega_0}{2\sqrt{\alpha}}\exp i\left(\frac{tx}{\varkappa\omega_0}-\frac{t^3}{6m\omega_0^2\varkappa^2}-\frac{C_1}{2}t^2+(\mu-C_2)\,t\right);$$

3) $W(t,x)=C_1t$,

$$\Psi(t,x)=\frac{C_3\omega_0}{2\sqrt{\alpha}}\exp i\left(\left(\mu-\frac{1}{2m\omega_0^2\varkappa^2}-C_2\right)t-\frac{C_1}{2}t^2-\frac{x}{\varkappa\omega_0}\right);$$

4) $W(t,x)=C_1t$,

$$\Psi(t,x)=\frac{C_3\omega_0}{2\sqrt{\alpha}}\exp i\left((\mu-C_2)\,t-\frac{C_1}{2}t^2\right).$$

В цих розв'язках амплітуда є константою, а фаза має вигляд полінома порядка не вище п'ятого.

Для системи (10)–(12), яку проінтегрувати в загальному вигляді поки що не вдалося, було знайдено частинні розв'язки. З рівняння (10) та (11) можна знайти:

$$(\varkappa^2-1)f+\frac{p}{2}\omega^2+C_1\omega+C_2=h^2, \tag{13}$$

$$g=m\omega_0^2\varkappa\omega+C_3\int\frac{d\omega}{h^2}+C_4, \tag{14}$$

де $C_1,...,C_4$ — константи інтегрування.

Підставимо отримані вирази в рівняння (12), одержимо:

$$(\varkappa^2-1)\ddot{h}+m\omega_0^2h\left(p\omega^2+2C_1\omega+2C_2+m\omega_0^2\varkappa^2(\varkappa^2-1)\right)-$$
$$-2m\omega_0^2h^3-\frac{C_3^2(\varkappa^2-1)}{h^3}=0. \tag{15}$$

Частинні розв'язки цього рівняння вдається отримати для наступних значень параметрів:

1) $\varkappa^2-1=0;$

2) $\varkappa^2-1\neq 0,\quad C_1=p=0;$

3) $\varkappa^2-1\neq 0,\quad C_3=p=0,\quad C_2=\dfrac{m\omega_0^2\varkappa^2(1-\varkappa^2)}{2}.$

1) Розглянемо випадок $\varkappa=1$. Тоді розв'язки рівнянь (1)–(2):
1.1. При $C_1^2-2pC_2>0$

$$W(t,x)=\frac{\left(2pC_2-C_1^2-4C_3^2\right)\omega_0^2}{2m\left(p(x-t\omega_0)^2+2C_1\omega_0(x-t\omega_0)+2C_2\omega_0^2\right)^2}+\frac{m\omega_0^2+pt^2}{2},$$

$$\Psi(t,x)=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{p}{2}(x-t\omega_0)^2+C_1\omega_0(x-t\omega_0)+C_2\omega_0^2}\times$$
$$\times\exp i\Bigg(m\omega_0x+t(\mu-m\omega_0^2)-\frac{pt^3}{6}+$$
$$+\frac{C_3}{\sqrt{C_1^2-2pC_2}}\ln\left|\frac{p(x-t\omega_0)+C_1\omega_0-\omega_0\sqrt{C_1^2-2pC_2}}{p(x-t\omega_0)+C_1\omega_0+\omega_0\sqrt{C_1^2-2pC_2}}\right|\Bigg);$$

1.2. При $C_1^2-2pC_2=0$

$$W(t,x)=-\frac{2C_3^2p^2\omega_0^2}{m\left(p(x-t\omega_0)+C_1\omega_0\right)^4}+\frac{m\omega_0^2+pt^2}{2},$$

$$\Psi(t,x) = \frac{|p(x - t\omega_0) + C_1\omega_0|}{2\sqrt{2p\alpha}} \exp i\biggl(m\omega_0 x + t(\mu - m\omega_0^2) - \frac{pt^3}{6} - \\ - \frac{2C_3\omega_0}{p(x - t\omega_0) + C_1\omega_0}\biggr);$$

1.3. При $C_1^2 - 2pC_2 < 0$

$$W(t,x) = \frac{\left(2pC_2 - C_1^2 - 4C_3^2\right)\omega_0^2}{2m(p(x-t\omega_0)^2+2C_1\omega_0(x-t\omega_0)+2C_2\omega_0^2)^2} + \frac{m\omega_0^2+pt^2}{2},$$

$$\Psi(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{p}{2}(x - t\omega_0)^2 + C_1\omega_0(x - t\omega_0) + C_2\omega_0^2} \times \\ \times \exp i\biggl(m\omega_0 x + t(\mu - m\omega_0^2) - \frac{pt^3}{6} + \\ + \frac{2C_3}{\sqrt{2pC_2 - C_1^2}} \operatorname{arctg} \frac{p(x - t\omega_0) + C_1\omega_0}{\omega_0\sqrt{2pC_2 - C_1^2}}\biggr).$$

Випадок $\varkappa = -1$ розглядається аналогічно.

2) Розглянемо тепер випадок $\varkappa^2 - 1 \neq 0$, а $C_1 = p = 0$. Тоді рівняння (15) набуває вигляду:

$$\ddot{h} - \frac{2m\omega_0^2}{\varkappa^2 - 1}h^3 + m\omega_0^2 h\left(\frac{2C_2}{\varkappa^2 - 1} + m\omega_0^2\varkappa^2\right) - \frac{C_3^2}{h^3} = 0. \qquad (16)$$

Позначимо $\frac{2m\omega_0^2}{\varkappa^2-1} = a$, $\frac{2C_2 m\omega_0^2}{\varkappa^2-1} + m^2\omega_0^4\varkappa^2 = b$, тоді рівняння (16) можна переписати в такий спосіб:

$$\ddot{h} - ah^3 + bh - \frac{C_3^2}{h^3} = 0.$$

Помножимо це рівняння на $\dot{h}$ та проінтегруємо його:

$$\dot{h}\ddot{h} - ah^3\dot{h} + bh\dot{h} - \frac{C_3^2}{h^3}\dot{h} = 0,$$

$$\frac{\dot{h}^2}{2} - \frac{ah^4}{4} + \frac{bh^2}{2} + \frac{C_3^2}{2h^2} = \frac{k}{8}.$$

Далі, помножимо останнє рівняння на $h^2 = V$, отримуємо рівняння Вейєрштрасса:

$$\dot{V}^2 = 2aV^3 - 4bV^2 + kV - 4C_3^2.$$

Зробимо підстановку $V = U + \frac{2b}{3a}$:

$$\frac{1}{2a}\dot{U}^2 = U^3 + \left(\frac{k}{2a} - \frac{4b^2}{3a^2}\right)U + \left(\frac{bk}{3a^2} - \frac{16b^3}{27a^3} - \frac{2C_3^2}{a}\right).$$

Нехай $\tilde{p} = \frac{k}{2a} - \frac{4b^2}{3a^2}$, $\widetilde{q} = \frac{bk}{3a^2} - \frac{16b^3}{27a^3} - \frac{2C_3^2}{a}$, тоді:

$$\frac{1}{2a}\dot{U}^2 = U^3 + \tilde{p}U + \tilde{q}. \tag{17}$$

Розглянемо п'ять якісно різних випадки [7]:

$$27\tilde{q}^2 + 4\tilde{p}^3 = 0, \quad \tilde{q} > 0, \tag{18}$$

$$27\tilde{q}^2 + 4\tilde{p}^3 = 0, \quad \tilde{q} < 0, \tag{19}$$

$$\tilde{p} = \tilde{q} = 0, \tag{20}$$

$$27\tilde{q}^2 + 4\tilde{p}^3 < 0, \tag{21}$$

$$27\tilde{q}^2 + 4\tilde{p}^3 > 0. \tag{22}$$

Для умов (18)–(20) розв'язки (17) можуть бути виражені через елементарні функції, в той час як умови (21)–(22) породжують розв'язки в еліптичних функціях.

Розглядаючи всі ці випадки, отримуємо такі розв'язки системи (1)–(2):

$$2.1. \quad W(t,x) = \frac{4\nu^2}{\varkappa^2 - 1}\left(\mathrm{tg}^2\left(2\nu\xi(x - \varkappa\omega_0 t)\right) + \frac{2}{3}\right) + \frac{\eta - 2C_2}{3(\varkappa^2 - 1)},$$

$$\Psi(t,x) = \frac{\omega_0}{2\sqrt{\alpha}}\sqrt{4\nu^2\left(\mathrm{tg}^2\left(2\nu\xi(x - \varkappa\omega_0 t)\right) + \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\eta} \times$$

$$\times \exp i\left(m\omega_0\varkappa(x - \varkappa\omega_0 t) + \mu t + \frac{3C_3\,(x - \varkappa\omega_0 t)}{2\omega_0\,(\eta - 2\nu^2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{3\sqrt{3}C_3 \,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt{3}\nu\,\mathrm{tg}(2\nu\xi(x - \varkappa\omega_0 t))}{\sqrt{8\nu^2 + 2\eta}}}{4\omega_0\xi\,(\eta - 2\nu^2)\sqrt{8\nu^2 + 2\eta}}\right),$$

де $\xi = \sqrt{\dfrac{m}{\varkappa^2 - 1}}$, $\quad \eta = C_2 + \dfrac{1}{2}m\omega_0^2\varkappa^2(\varkappa^2 - 1)$;

$$2.2. \quad W(t,x) = \frac{2\nu^2}{\varkappa^2 - 1}\left(\mathrm{th}^2\left(\nu\xi\sqrt{2}(x - \varkappa\omega_0 t)\right) - \frac{2}{3}\right) + \frac{\eta - 2C_2}{3(\varkappa^2 - 1)},$$

$$\Psi(t,x)=\frac{\omega_0}{2\sqrt{\alpha}}\sqrt{2\nu^2\left(\operatorname{th}^2\left(\nu\xi\sqrt{2}(x-\varkappa\omega_0 t)\right)-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\eta}\times$$
$$\times\exp i\Bigg(m\omega_0\varkappa(x-\varkappa\omega_0 t)+\mu t+\frac{3C_3\,(x-\varkappa\omega_0 t)}{2\omega_0(\nu^2+\eta)}+$$
$$+\frac{3C_3\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\nu\sqrt{3}\operatorname{th}\left(\nu\xi\sqrt{2}(x-\varkappa\omega_0 t)\right)}{\sqrt{\eta-2\nu^2}}}{2\omega_0\xi(\nu^2+\eta)\sqrt{2\eta-4\nu^2}}\Bigg);$$

2.3. $$W(t,x)=\frac{2\nu^2}{\varkappa^2-1}\left(\operatorname{cth}^2\left(\nu\xi\sqrt{2}(x-\varkappa\omega_0 t)\right)-\frac{2}{3}\right)+\frac{\eta-2C_2}{3(\varkappa^2-1)},$$
$$\Psi(t,x)=\frac{\omega_0}{2\sqrt{\alpha}}\sqrt{2\nu^2\left(\operatorname{cth}^2\left(\nu\xi\sqrt{2}(x-\varkappa\omega_0 t)\right)-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\eta}\times$$
$$\times\exp i\Bigg(m\omega_0\varkappa(x-\varkappa\omega_0 t)+\mu t+\frac{3C_3\,(x-\varkappa\omega_0 t)}{2\omega_0(\nu^2+\eta)}+$$
$$+\frac{3C_3\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\nu\sqrt{3}\operatorname{cth}\left(\nu\xi\sqrt{2}(x-\varkappa\omega_0 t)\right)}{\sqrt{\eta-2\nu^2}}}{2\omega_0\xi(\nu^2+\eta)\sqrt{2\eta-4\nu^2}}\Bigg);$$

2.4. $$W(t,x)=\frac{4\nu^2}{\varkappa^2-1}\left(\operatorname{cth}^2\left(2\nu\xi(x-\varkappa\omega_0 t)\right)-\frac{2}{3}\right)+\frac{\eta-2C_2}{3(\varkappa^2-1)},$$
$$\Psi(t,x)=\frac{\omega_0}{2\sqrt{\alpha}}\sqrt{4\nu^2\left(\operatorname{cth}^2\left(2\nu\xi(x-\varkappa\omega_0 t)\right)-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\eta}\times$$
$$\times\exp i\Bigg(m\omega_0\varkappa(x-\varkappa\omega_0 t)+\mu t+\frac{3C_3\,(x-\varkappa\omega_0 t)}{2\omega_0(2\nu^2+\eta)}+$$
$$+\frac{3C_3\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\nu\sqrt{3}\operatorname{cth}(2\nu\xi(x-\varkappa\omega_0 t))}{\sqrt{2\eta-8\nu^2}}}{2\omega_0\xi(2\nu^2+\eta)\sqrt{2\eta-8\nu^2}}\Bigg);$$

2.5. $$W(t,x)=\frac{4\nu^2}{\varkappa^2-1}\left(\operatorname{th}^2\left(2\nu\xi(x-\varkappa\omega_0 t)\right)-\frac{2}{3}\right)+\frac{\eta-2C_2}{3(\varkappa^2-1)},$$
$$\Psi(t,x)=\sqrt{4\nu^2\left(\operatorname{th}^2\left(2\nu\xi(x-\varkappa\omega_0 t)\right)-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\eta}\times$$

$$\times \exp i\Bigg(m\omega_0\varkappa(x-\varkappa\omega_0 t)+\mu t+\frac{3C_3\,(x-\varkappa\omega_0 t)}{2\omega_0(2\nu^2+\eta)}+$$
$$+\frac{3C_3\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\nu\sqrt{3}\operatorname{th}(2\nu\xi(x-\varkappa\omega_0 t))}{\sqrt{2\eta-8\nu^2}}}{2\omega_0\xi(2\nu^2+\eta)\sqrt{2\eta-8\nu^2}}\Bigg);$$

2.6.
$$W(t,x)=\frac{1}{\xi^2\,(\varkappa^2-1)\,(x-\varkappa\omega_0 t)^2}+\frac{\eta-2C_2}{3(\varkappa^2-1)},$$
$$\Psi(t,x)=\frac{\omega_0}{2\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{1}{\xi^2\,(x-\varkappa\omega_0 t)^2}+\frac{2}{3}\eta}\times$$
$$\times \exp i\Bigg(m\omega_0\varkappa(x-\varkappa\omega_0 t)+\mu t+\frac{3C_3(x-\varkappa\omega_0 t)}{2\omega_0\eta}-$$
$$-\frac{3\sqrt{3}C_3\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\xi\sqrt{6\eta}\,(x-\varkappa\omega_0 t)}{2\omega_0\xi\eta\sqrt{2\eta}}\Bigg);$$

2.7. Для випадків (21) та (22) потенціал має наступний вигляд:

$$W(t,x)=\frac{2}{\varkappa^2-1}\wp\left(\xi\sqrt{2}(x-\varkappa\omega_0 t)\right)+\frac{\eta-2C_2}{3(\varkappa^2-1)}-$$
$$-\frac{p}{2(\varkappa^2-1)}\left(\frac{x}{\omega_0}-\varkappa t\right)^2-\frac{C_1}{\varkappa^2-1}\left(\frac{x}{\omega_0}-\varkappa t\right)+\frac{pt^2}{2},$$

де $\wp$ — двоперіодична функція Вейєрштрасса (див., наприклад, [8]), яка мероморфна на всій комплексній площині. Відповідно функцію $\Psi(t,x)$ можна знайти з рівняння (2).

3) Розглянемо випадок $\varkappa^2-1\neq 0$, $C_3=p=0$, $C_2=\frac{m\omega_0^2\varkappa^2(1-\varkappa^2)}{2}$. Тоді рівняння (15) набуває вигляду:

$$\ddot{h}=\frac{2m\omega_0^2}{\varkappa^2-1}(h^3-C_1\omega h). \tag{23}$$

Рівняння (23) є рівнянням Пенлеве-2, а відповідно функція h — функцією Пенлеве-2. Підставляючи цю функцію в (13) та (14), отримуємо розв'язок редукованої системи, а враховуючи вигляд анзаців, одержуємо і явні вирази для функцій $W(t,x)$ та $\Psi(t,x)$.

Всі розв'язки, отримані в даному параграфі, можна розмножити перетвореннями зсувів за змінними t та x.

5. Висновки. Таким чином, знайдені всі можливі редукції для системи рівнянь, що описує нерівноважні стани моделі Фрьоліха–Пайерлса, які можна було одержати класичними груповими методами. Відповідні розв'язки включають частинний точний розв'язок, отриманий Д.Я. Петриною, а також багато інших розв'язків, які перераховані в параграфі 4. Дана стаття обмежена тільки знаходженням точних розв'язків цієї моделі. Фізична інтерпретація отриманих результатів ще чекає своїх дослідників.

Авторка вдячна А.Г. Нікітіну за постановку задачі та корисні дискусії.

[1] Лагно В.І., Спічак С.В., Стогній В.І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу. – Київ: Ін-т математики НАН України – 2002. – 360 с.

[2] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen: Vol. 1–3. – Leipzig. – 1888, – 1890, – 1893. – 645 s., 568 s., 830 s.

[3] Мубаракзянов Г.М. Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка // Изв. высш. уч. завед. Матем. – 1963. – **34**, № 3. – С. 99–106.

[4] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 400 с.

[5] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 639 с.

[6] Petrina D.Ya. Equilibrium and nonequilibrium states of model Fröhlich – Peierls Hamiltonian // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, № 8. – P. 1069–1087.

[7] Fushchich W.I. and Nikitin A. G. Higher symmetries and exact solutions of linear and nonlinear Schrödinger equation // J. Math. Phys. – 1997. – **38**, № 11. – P. 5944–5959.

[8] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа: В 2-х т. – Москва: Физматгиз, 1963. Т.2: Трансцендентные функции. – 516 с.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2007, т.4, N 3, 136–147

УДК 517.9:958

Точні розв'язки системи Лотки—Вольтерра з поперечною дифузією

Л.П. Миронюк

Волинський державний університет імені Лесі Українки, Луцьк

E-mail:Liliia_Myroniuk@univer.lutsk.ua

Розглядається система двох рівнянь реакції-дифузії з поперечною дифузією. Система як частинний випадок містить відому модель Шіґесади—Кавасакі—Терамото, запропоновану в 1979. Знайдено нові неліївські анзаци, що редукують систему до систем звичайних диференціальних рівнянь. Побудовано точні розв'язки та подано їх асимптотичну поведінку. Запропоновано певну біологічну інтерпретацію розв'язків.

A system of two reaction-diffusion equations with cross-diffusion is considered. The system contains as a particular case the well-known model proposed by Shigesada et al. in 1979. New non-Lie Ansätze reducing the system to the ordinary differential equations system are obtained. Several families of exact solutions are constructed and their asymptotic behaviour are investigated. Some biological interpretation of the solutions is provided.

1. Вступ. В 1979 році Шіґесада та ін. запропонували математичну модель для опису двох біологічних популяцій, яка враховувала тиски однієї на іншу при дифузії популяцій, які змагаються [1]. Модель має вигляд

$$\begin{aligned} u_t &= [(d_1 + \rho_1 v)u]_{xx} + u(a_1 - b_1 u - c_1 v), \\ v_t &= [(d_2 + \rho_2 u)v]_{xx} + v(a_2 - b_2 u - c_2 v), \end{aligned} \tag{1}$$

де функції u та v — концентрації двох популяцій, d_1 та d_2 — коефіцієнти дифузії, ρ_1 та ρ_2 — коефіцієнти так званої поперечної дифузії, a_1 та a_2 — коефіцієнти народжуваності, b_1 та c_2 — коефіцієнти внутрішньо-видових змагань, b_2 та c_1 — коефіцієнти міжвидових змагань. Очевидно, ця система з $\rho_1 = \rho_2 = 0$ зводиться до класичної дифузійної системи Лотки—Вольтерра (ЛВ).

Починаючи з піонерських робіт [2, 3], умови існування, єдиності та глобальної стійкості розв'язків дифузійної системи ЛВ та системи Шіґесади—Кавасакі—Терамото (ШКТ) досліджувалися багатьма авторами (див. [4, 5] та цитовану там літературу). Проте, на скільки нам відомо, є лише кілька статей, в яких побудовано точні розв'язки цих систем в явному вигляді [6, 7].

В цій статті розглядається природне узагальнення системи ШКТ вигляду [4]

$$\begin{aligned} u_t &= [(d_1 + d_{11}u + d_{12}v)u]_{xx} + u(a_1 - b_1u - c_1v), \\ v_t &= [(d_2 + d_{21}u + d_{22}v)v]_{xx} + v(a_2 - b_2u - c_2v), \end{aligned} \tag{2}$$

де $d_{ij}, i = 1, 2,\ j = 1, 2,$ — дійсні сталі та $d_{12}^2 + d_{21}^2 \neq 0$. Зауважимо, що широкий клас точних розв'язків систем типу ЛВ зі степеневими дифузіями (без поперечних дифузій) було побудовано в нещодавно опублікованих статтях [8, 9].

Результати роботи викладено в такий спосіб. В параграфі 2 за допомогою методу додаткових породжуючих умов [10, 11] побудовано анзаци, які редукують систему (2) до систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). В параграфі 3 побудовано точні розв'язки та наведено їх асимптотичну поведінку. Запропоновано певну біологічну інтерпретацію отриманих розв'язків. Основні результати підсумовано в останньому параграфі.

2. Анзаци та редукція системи (2) до систем (ЗДР). Для проведення подальших міркувань запишемо систему (2) в еквівалентному вигляді:

$$\begin{aligned} u_t = {} & d_1u_{xx} + 2d_{11}uu_{xx} + d_{12}vu_{xx} + d_{12}uv_{xx} + \\ & +2d_{11}{u_x}^2 + 2d_{12}u_xv_x + a_1u - b_1u^2 - c_1uv, \\ v_t = {} & d_2v_{xx} + 2d_{22}vv_{xx} + d_{21}uv_{xx} + d_{21}vu_{xx} + \\ & +2d_{22}{v_x}^2 + 2d_{21}u_xv_x + a_2v - c_2v^2 - b_2uv. \end{aligned} \tag{3}$$

Оскільки (3) містить лише квадратичні нелінійності, то використовуємо підхід, запропонований в [10, 11]. Як додаткову породжуючу умову виберемо систему лінійних ЗДР третього порядку

$$\begin{aligned} &\beta_1(t)\tfrac{du}{dx} + \beta_2(t)\tfrac{d^2u}{dx^2} + \tfrac{d^3u}{dx^3} = 0, \\ &\beta_1(t)\tfrac{dv}{dx} + \beta_2(t)\tfrac{d^2v}{dx^2} + \tfrac{d^3v}{dx^3} = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

де $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ — довільні гладкі функції, а змінна t розглядається як параметр. З теорії ЗДР відомо, що в залежності від $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ розв'язки системи (4) можуть мати один з таких виглядів:

$$\begin{aligned} u &= \varphi_0(t) + \varphi_1(t)x + \varphi_2(t)x^2, \\ v &= \psi_0(t) + \psi_1(t)x + \psi_2(t)x^2, \end{aligned} \tag{5}$$

якщо $\beta_1 = \beta_2 = 0$;

$$\begin{aligned} u &= \varphi_0(t) + \varphi_1(t)x + \varphi_2(t)e^{\gamma(t)x}, \\ v &= \psi_0(t) + \psi_1(t)x + \psi_2 e^{\gamma(t)x}, \end{aligned} \tag{6}$$

якщо $\beta_1 = 0$;

$$\begin{aligned} u &= \varphi_0(t) + \varphi_1(t)e^{\gamma_1(t)x} + \varphi_2(t)e^{\gamma_2(t)x}, \\ v &= \psi_0(t) + \psi_1(t)e^{\gamma_1(t)x} + \psi_2 e^{\gamma_2(t)x}, \end{aligned} \tag{7}$$

якщо $\gamma_{1,2}(t) = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{D} - \beta_2)$, $D = \beta_2^2 - 4\beta_1 > 0$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$;

$$\begin{aligned} u &= \varphi_0(t) + e^{-\frac{\beta_2 x}{2}}(\varphi_1(t)\cos\tfrac{\sqrt{-D}}{2}x + \varphi_2(t)\sin\tfrac{\sqrt{-D}}{2}x), \\ v &= \psi_0(t) + e^{-\frac{\beta_2 x}{2}}(\psi_1(t)\cos\tfrac{\sqrt{-D}}{2}x + \psi_2(t)\sin\tfrac{\sqrt{-D}}{2}x), \end{aligned} \tag{8}$$

якщо $D < 0$;

$$\begin{aligned} u &= \varphi_0(t) + \varphi_1(t)e^{\gamma(t)x} + x\varphi_2(t)e^{\gamma(t)x}, \\ v &= \psi_0(t) + \psi_1(t)e^{\gamma(t)x} + x\psi_2(t)e^{\gamma(t)x}, \end{aligned} \tag{9}$$

якщо $D = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$.

В (5)–(9) $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$, $i = 0, 1, 2$, є новими невідомими функціями. Виявляється, що анзаци (5)–(9) зводять (3) до систем ЗДР для функцій $\varphi_i(t), \psi_i(t)$ лише при певних додаткових умовах на коефіцієнти (3).

Зокрема, анзац (5) при додаткових обмеженнях на коефіцієнти

$$\begin{aligned} &a_1 = a_2 = a, \quad b_1 = b_2 = b, \quad c_1 = c_2 = c, \\ &d_{11}c - d_{12}b = d_{21}c - d_{22}b \end{aligned} \tag{10}$$

і при додаткових співвідношеннях між функціями

$$\varphi_2 = C\varphi_1, \quad \psi_1 = \frac{-b}{c}\varphi_1, \quad \psi_2 = \frac{-b}{c}C\varphi_1 \tag{11}$$

(тут і нижче C — довільна стала), редукує систему РД (3) до системи ЗДР:

$$\begin{aligned}
&\dot{\varphi}_0 = a\varphi_0 - b\varphi_0^2 - c\varphi_0\psi_0 + 2C(2d_{11} - \tfrac{b}{c}d_{12})\varphi_0\varphi_1 + 2d_{12}C\varphi_1\psi_0 + \\
&\qquad +2d_1C\varphi_1 + 2(d_{11} - \tfrac{b}{c}d_{12})\varphi_1^2, \\
&\dot{\psi}_0 = a\psi_0 - c\psi_0^2 - b_2\varphi_0\psi_0 + 2C(2\tfrac{b}{c}d_{22} - d_{21})\varphi_1\psi_0 + 2d_{21}C\tfrac{b}{c}\varphi_0\varphi_1 + \\
&\qquad +2d_2C\tfrac{b}{c}\varphi_1 + 2(d_{22}(\tfrac{b}{c})^2 - \tfrac{b}{c}d_{21})\varphi_1^2, \\
&\dot{\varphi}_1 = \varphi_1(a - c\psi_0 - b\varphi_0 + 12C(d_{11} - \tfrac{b}{c}d_{12})\varphi_1).
\end{aligned} \tag{12}$$

Для анзацу (7) при $\gamma_2 = -\gamma_1 = -\gamma$ отримуємо два випадки:

1.

$$\gamma^2 = \frac{b_1}{4d_{11}} = \frac{c_1}{4d_{12}} = \frac{b_2}{4d_{21}} = \frac{c_2}{4d_{22}} > 0 \tag{13}$$

2.

$$\begin{aligned}
&\gamma^2 = \tfrac{a_2 - a_1}{d_1 - d_2} > 0, \\
&-\tfrac{4d_{11}\gamma^2 - b_1}{4d_{12}\gamma^2 - c_1} = -\tfrac{4d_{21}\gamma^2 - b_2}{4d_{22}\gamma^2 - c_2} = -\tfrac{d_{11}\gamma^2 - b_1}{d_{22}\gamma^2 - c_2} = \kappa, \\
&(2d_{11}d_{22} - d_{11}d_{12} - d_{21}d_{22})\gamma^4 - \\
&-((2c_2 - c_1)d_{11} + (2b_1 - b_2)d_{22} - b_1d_{12} - c_2d_{21})\gamma^2 - \\
&-b_1c_1 - b_2c_2 + 2b_1c_2 = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

і виконуються умови

$$\varphi_2 = C\varphi_1, \quad \psi_1 = \kappa\varphi_1, \quad \psi_2 = \kappa C\varphi_1. \tag{15}$$

Відповідні системи ЗДР набувають вигляду:

$$\begin{aligned}
&\dot{\varphi}_0 = a_1\varphi_0 - b_1\varphi_0^2 - c_1\varphi_0\psi_0 - 2b_1\varphi_1\varphi_2 - c_1\varphi_2\psi_1 - c_1\varphi_1\psi_2, \\
&\dot{\psi}_0 = a_2\psi_0 - c_2\psi_0^2 - b_2\varphi_0\psi_0 - 2c_2\psi_1\psi_2 - b_2\varphi_1\psi_2 - b_2\varphi_2\psi_1, \\
&\dot{\varphi}_1 = (a_1 + \tfrac{d_1b_1}{4d_{11}})\varphi_1 - \tfrac{3}{2}b_1\varphi_0\varphi_1 - \tfrac{3}{4}c_1\varphi_1\psi_0 - \tfrac{3}{4}c_1\varphi_0\psi_1, \\
&\dot{\psi}_1 = (a_2 + \tfrac{d_2b_1}{4d_{11}})\psi_1 - \tfrac{3}{2}c_2\psi_0\psi_1 - \tfrac{3}{4}b_2\varphi_0\psi_1 - \tfrac{3}{4}b_2\varphi_1\psi_0, \\
&\dot{\varphi}_2 = (a_1 + \tfrac{d_1b_1}{4d_{11}})\varphi_2 - \tfrac{3}{2}b_1\varphi_0\varphi_2 - \tfrac{3}{4}c_1\varphi_2\psi_0 - \tfrac{3}{4}c_1\varphi_0\psi_2, \\
&\dot{\psi}_2 = (a_2 + \tfrac{d_2b_1}{4d_{11}})\psi_2 - \tfrac{3}{2}c_2\psi_0\psi_2 - \tfrac{3}{4}b_2\varphi_0\psi_2 - \tfrac{3}{4}b_2\varphi_2\psi_0
\end{aligned} \tag{16}$$

та

$$\begin{aligned}
&\dot\varphi_0 = a_1\varphi_0 - b_1\varphi_0^2 - c_1\varphi_0\psi_0 - 2(b_1 + c_1\kappa)C\varphi_1^2,\\
&\dot\psi_0 = a_2\psi_0 - c_2\psi_0^2 - b_2\varphi_0\psi_0 - 2(c_2 + \tfrac{b_2}{\kappa})C\kappa^2\varphi_1^2,\\
&\dot\varphi_1 = (a_1 + d_1\gamma^2)\varphi_1 + (2(d_{11}\gamma^2 - b_1) + (d_{12}\gamma^2 - c_1)\kappa)\varphi_0\varphi_1 +\\
&+(d_{12}\gamma^2 - c_1)\varphi_1\psi_0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Для анзацу (8) в залежності від значення γ маємо два випадки:

1.

$$\gamma^2 = \frac{-b_1}{4d_{11}} = \frac{-c_1}{4d_{12}} = \frac{-b_2}{4d_{21}} = \frac{-c_2}{4d_{22}} > 0. \tag{18}$$

2.

Виконуються умови (15) і

$$\begin{aligned}
&\gamma^2 = \tfrac{a_1 - a_2}{d_1 - d_2} > 0,\\
&-\tfrac{4d_{11}\gamma^2 + b_1}{4d_{12}\gamma^2 + c_1} = -\tfrac{4d_{21}\gamma^2 + b_2}{4d_{22}\gamma^2 + c_2} = -\tfrac{d_{11}\gamma^2 + b_1}{d_{22}\gamma^2 + c_2} = \kappa,\\
&(2d_{11}d_{22} - d_{11}d_{12} - d_{21}d_{22})\gamma^4 +\\
&+((2c_2 - c_1)d_{11} + (2b_1 - b_2)d_{22} - b_1d_{12} - c_2d_{21})\gamma^2 -\\
&-b_1c_1 - b_2c_2 + 2b_1c_2 = 0
\end{aligned} \tag{19}$$

Відповідно отримуємо такі системи ЗДР:

$$\begin{aligned}
&\dot\varphi_0 = a_1\varphi_0 - b_1\varphi_0^2 - c_1\varphi_0\psi_0 - \tfrac{1}{2}b_1\varphi_1^2 - \tfrac{1}{2}c_1\varphi_1\psi_1 - \tfrac{1}{2}b_1\varphi_2^2 - \tfrac{1}{2}c_1\varphi_2\psi_2,\\
&\dot\psi_0 = a_2\psi_0 - c_2\psi_0^2 - b_2\varphi_0\psi_0 - \tfrac{1}{2}c_2\psi_1^2 - \tfrac{1}{2}b_2\varphi_1\psi_1 - \tfrac{1}{2}c_2\psi_2^2 - \tfrac{1}{2}b_2\varphi_2\psi_2,\\
&\dot\varphi_1 = (a_1 + \tfrac{d_1b_1}{4d_{11}})\varphi_1 - \tfrac{3}{2}b_1\varphi_0\varphi_1 - \tfrac{3}{4}c_1\varphi_1\psi_0 - \tfrac{3}{4}c_1\varphi_0\psi_1,\\
&\dot\psi_1 = (a_2 + \tfrac{d_2b_1}{4d_{11}})\psi_1 - \tfrac{3}{2}c_2\psi_0\psi_1 - \tfrac{3}{4}b_2\varphi_0\psi_1 - \tfrac{3}{4}b_2\varphi_1\psi_0,\\
&\dot\varphi_2 = (a_1 + \tfrac{d_1b_1}{4d_{11}})\varphi_2 - \tfrac{3}{2}b_1\varphi_0\varphi_2 - \tfrac{3}{4}c_1\varphi_2\psi_0 - \tfrac{3}{4}c_1\varphi_0\psi_2,\\
&\dot\psi_2 = (a_2 + \tfrac{d_2b_1}{4d_{11}})\psi_2 - \tfrac{3}{2}c_2\psi_0\psi_2 - \tfrac{3}{4}b_2\varphi_0\psi_2 - \tfrac{3}{4}b_2\varphi_2\psi_0
\end{aligned} \tag{20}$$

та

$$\begin{aligned}
&\dot\varphi_0 = a_1\varphi_0 - b_1\varphi_0^2 - c_1\varphi_0\psi_0 +\\
&\quad +(-2d_{11}\gamma^2 - b_1 + (-2d_{12}\gamma^2 - c_1)\kappa + 2d_{11}\gamma^2C^2 + 2d_{12}\gamma^2C^2\kappa)\varphi_1^2,\\
&\dot\psi_0 = a_2\psi_0 - c_2\psi_0^2 - b_2\varphi_0\psi_0 +\\
&\quad +((-2d_{22}\gamma^2 - c_2)\kappa^2 + (-2d_{21}\gamma^2 - b_2)\kappa + 2d_{21}\gamma^2C^2\kappa + 2d_{22}\gamma^2C^2\kappa^2)\varphi_1^2,\\
&\dot\varphi_1 = (a_1 - d_1\gamma^2)\varphi_1 - (2d_{11}\gamma^2 + 2b_1 + (d_{12}\gamma^2 + c_1)\kappa)\varphi_0\varphi_1 -\\
&\quad -(d_{12}\gamma^2 + c_1)\varphi_1\psi_0.
\end{aligned}$$

$$(21)$$

Анзаци (6) та (9) зводять (3) до систем ЗДР відповідно при умовах $\varphi_1(t)\varphi_2(t) = 0$ та $\varphi_2(t) = 0$, тобто тоді, коли вони зводяться до частинних випадків вже розглянутих анзаців.

3. Точні розв'язки та їх властивості. Щоб побудувати точні розв'язки узагальненої системи ШКТ (2), необхідно розв'язати системи ЗДР, наведені в параграфі 2. Відомо, що нелінійні системи ЗДР інтегровні лише в окремих випадках, тому нижче знайдено розв'язки системи (2) лише при додаткових обмеженнях на її коефіцієнти.

Система (16) при додаткових обмеженнях на коефіцієнти

$$\begin{aligned}
&b_1 = b_2 = b,\\
&c_1 = c_2 = c,\\
&a_2 = -\tfrac{c}{b}a_1,\\
&d_{12} = d_{22} = \tfrac{c}{b}d_{11}, \quad d_{21} = d_{11},\\
&d_2 = d_1 + 4d_{11}\tfrac{a_1}{b} + 4d_{11}\tfrac{a_1}{b}\tfrac{c}{b}
\end{aligned} \tag{22}$$

і співвідношеннях між функціями

$$\begin{aligned}
&\psi_0 = \varphi_0 - \tfrac{a_1}{b},\\
&\varphi_2 = C\varphi_1,\\
&\psi_1 = -\tfrac{b}{c}\varphi_1, \quad \psi_2 = -\tfrac{b}{c}C\varphi_1
\end{aligned} \tag{23}$$

зводиться до інтегровної системи двох ЗДР. В результаті отримуємо розв'язок

$$\begin{aligned}
u = {}& \frac{1}{K_1 e^{-\frac{a_1}{b}(b+c)t} + \frac{b}{a_1}} + \exp((a_1 + \tfrac{bd_1}{4d_{11}} + \tfrac{3}{4}\tfrac{a_1}{b}c)t)\times\\
&\times(e^{\frac{a_1}{b}(b+c)t} + \tfrac{a_1}{b}K_1)^{-\frac{3}{4}}(K_2\exp(\gamma x) + K_3\exp(-\gamma x)),\\
v = {}& \frac{-(\frac{a_1}{b})^2 K_1}{e^{\frac{a_1}{b}(b+c)t} + \frac{a_1}{b}K_1} - \tfrac{b}{c}\exp((a_1 + \tfrac{bd_1}{4d_{11}} + \tfrac{3}{4}\tfrac{a_1}{b}c)t)\times\\
&\times(e^{\frac{a_1}{b}(b+c)t} + \tfrac{a_1}{b}K_1)^{-\frac{3}{4}}(K_2\exp(\gamma x) + K_3\exp(-\gamma x)).
\end{aligned} \tag{24}$$

системи

$$\begin{aligned}
&u_t = [(d_1 + d_{11}u + \tfrac{c}{b}d_{11}v)u]_{xx} + u(a_1 - bu - cv),\\
&v_t = [(d_1 * + d_{11}u + \tfrac{c}{b}d_{11}v)v]_{xx} + v(-\tfrac{c}{b}a_1 - bu - cv),
\end{aligned} \tag{25}$$

де $d_1* = d_1 + 4d_{11}\frac{a_1}{b} + 4d_{11}\frac{a_1}{b}\frac{c}{b}$. Тут і нижче K_1, K_2, K_3 — довільні сталі.

Асимптотична поведінка розв'язку (24) істотно залежить від коефіцієнтів. Можливими є чотири випадки. Два з них подано нижче, а ще два отримуються простим перепозначенням коефіцієнтів і функцій u та v.

Випадок 1. Якщо

$$\frac{a_1}{b}(b+c) > 0, \quad a_1 + \frac{bd_1}{d_{11}} < 0, \tag{26}$$

то

$$(u, v) \to (\tfrac{a_1}{b}, 0), \quad t \to \infty. \tag{27}$$

Мовою біологічних термінів це означає, що змагання між популяціями двох видів u та v є безкомпромісним і, врешті-решт, один з видів повністю зникає.

Випадок 2. Якщо

$$\frac{a_1}{b}(b+c) > 0, \quad d_1 = -\frac{a_1}{b}d_{11}, \tag{28}$$

то

$$\begin{aligned} &(u, v) \to \\ &\to (\tfrac{a_1}{b} + K_2\exp(\gamma x) + K_3\exp(-\gamma x), -\tfrac{b}{c}K_2\exp(\gamma x) - \tfrac{b}{c}K_3\exp(-\gamma x)), \\ &t \to \infty. \end{aligned} \tag{29}$$

Це інтерпретується як випадок "м'якого" змагання між двома популяціями, яке допускає як завгодно довге співіснування видів (типовий приклад — паразит і його носій).

Зауважимо, що стаціонарний розв'язок (29) не є сталим на відміну від (27).

Розглянемо систему ЗДР (17). Покладаючи

$$\begin{aligned} &b_1 = b_2 = b, \quad c_1 = c_2 = c, \\ &\kappa = -\tfrac{b}{c}, \\ &d_{12} = d_{22} = \tfrac{c}{b}d_{11}, \quad d_{21} = d_{11}, \end{aligned} \tag{30}$$

отримуємо частинний розв'язок, який веде до точного розв'язку

$$\begin{aligned} u &= \tfrac{K_1}{e^{(a_2-a_1)t}+\frac{b}{a_1}K_1} + \exp((d_1\gamma^2 + \tfrac{a_1}{b}d_{11}\gamma^2)t)\times \\ &\quad\times(e^{(a_2-a_1)t} + \tfrac{b}{a_1}K_1)^{\frac{1}{b}d_{11}\gamma^2-1}(K_2\exp(\gamma x) + K_3\exp(-\gamma x)), \\ v &= \tfrac{\frac{a_2}{c}e^{(a_2-a_1)t}}{e^{(a_2-a_1)t}+\frac{b}{a_1}K_1} - \tfrac{b}{c}\exp((d_1\gamma^2 + \tfrac{a_1}{b}d_{11}\gamma^2)t)\times \\ &\quad\times(e^{(a_2-a_1)t} + \tfrac{b}{a_1}K_1)^{\frac{1}{b}d_{11}\gamma^2-1}(K_2\exp(\gamma x) + K_3\exp(-\gamma x)), \end{aligned} \tag{31}$$

системи

$$\begin{aligned} u_t &= [(d_1 + d_{11}u + \tfrac{c}{b}d_{11}v)u]_{xx} + u(a_1 - bu - cv), \\ v_t &= [(d_2 + d_{11}u + \tfrac{c}{b}d_{11}v)v]_{xx} + v(a_2 - bu - cv). \end{aligned} \tag{32}$$

Асимптотична поведінка розв'язку (31) знову залежить від коефіцієнтів і можливими є чотири випадки, проте знову лише два з них істотно різні.

Випадок 1. Якщо

$$a_2 < a_1, \quad d_1 + \tfrac{a_1}{b}d_{11} < 0, \tag{33}$$

то

$$(u, v) \to (\tfrac{a_1}{b}, 0), \quad t \to \infty. \tag{34}$$

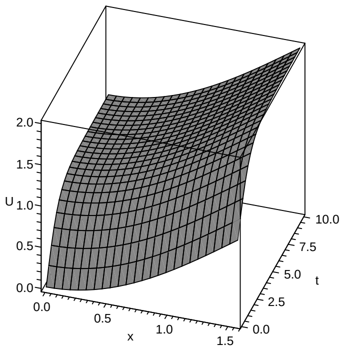
Випадок 2. Якщо

$$a_2 < a_1, \quad d_1 = -\tfrac{a_1}{b}d_{11}, \tag{35}$$

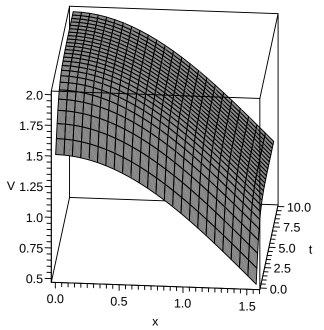
то

$$\begin{aligned} &(u, v) \to \\ &\to (\tfrac{a_1}{b} + K_4\exp(\gamma x) + K_5\exp(-\gamma x), -\tfrac{b}{c}K_4\exp(\gamma x) - \tfrac{b}{c}K_5\exp(-\gamma x)), \\ &t \to \infty, \end{aligned} \tag{36}$$

де $K_4 = K_2(\frac{a_1}{bK_1})^{\frac{a_2d_{11}+bd_2}{a_1d_{11}+bd_2}}$, $K_5 = K_3(\frac{a_1}{bK_1})^{\frac{a_2d_{11}+bd_2}{a_1d_{11}+bd_2}}$. Очевидно, можна дати біологічну інтерпретацію розв'язків (34) та (36), аналогічну до наведеної вище.



Мал. 1. Точний розв'язок (40) з $a_1 = 2, a_2 = 1, b = 1, d_1 = 2, d_2 = 1, d_{11} = -1, K_1 = 2, K_2 = -1$, компонента u.



Мал. 2. Точний розв'язок (40) з $a_1 = 2, a_2 = 1, b = 1, c = 1, d_1 = 2, d_2 = 1, d_{11} = -1, K_1 = 2, K_2 = -1$, компонента v.

В загальному випадку систему (20) проінтегрувати не вдалося, проте при обмеженнях на коефіцієнти (22) і при додаткових співвідношеннях між функціями (23) отримуємо інтегровну систему ЗДР, яка веде до точного розв'язку

$$\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{K_1 e^{-\frac{a_1}{b}(b+c)t} + \frac{b}{a_1}} + \exp((a_1 + \tfrac{bd_1}{4d_{11}} + \tfrac{3}{4}\tfrac{a_1}{b}c)t)\times \\ &\quad \times(e^{\frac{a_1}{b}(b+c)t} + \tfrac{a_1}{b}K_1)^{-\frac{3}{4}}(K_2\cos(\gamma x) + K_3\sin(\gamma x)), \\ v &= \tfrac{-(\frac{a_1}{b})^2 K_1}{e^{\frac{a_1}{b}(b+c)t} + \frac{a_1}{b}K_1} - \tfrac{b}{c}\exp((a_1 + \tfrac{bd_1}{4d_{11}} + \tfrac{3}{4}\tfrac{a_1}{b}c)t)\times \\ &\quad \times(e^{\frac{a_1}{b}(b+c)t} + \tfrac{a_1}{b}K_1)^{-\frac{3}{4}}(K_2\cos(\gamma x) + K_3\sin(\gamma x)) \end{aligned} \tag{37}$$

узагальненої системи ШКТ

$$u_t = [(d_1 + d_{11}u + \tfrac{c}{b}d_{11}v)u]_{xx} + u(a_1 - bu - cv), \tag{38}$$

$$v_t = [(d_1 + 4d_{11}\frac{a_1}{b} + 4d_{11}\frac{a_1}{b}\frac{c}{b} + d_{11}u + \frac{c}{b}d_{11}v)v]_{xx} + v(-\frac{c}{b}a_1 - bu - cv).$$

На відміну від розв'язків, наведених вище, цей розв'язок є періодичним за змінною x. Розв'язок (37) при (26) має асимптотичну поведінку (27).

У розв'язку (37) з (28) нова асимптотична поведінка:

$$
\begin{aligned}
&(u,v) \to \\
&\to (\tfrac{a_1}{b} + K_2\cos(\gamma x) + K_3\sin(\gamma x), -\tfrac{b}{c}(K_2\cos(\gamma x) + K_3\sin(\gamma x))), \\
&t \to \infty.
\end{aligned} \tag{39}
$$

Це можна проінтерпретувати таким чином: два види, що змагаються, мають тенденцію до періодичного за часом розподілу в просторі. Кажуть, що змагання в цьому випадку є слабким.

Розглядаємо систему (21) з $C = 0$. Якщо виконуються умови (30), то отримуємо точний розв'язок

$$
\begin{aligned}
u = {}& \tfrac{K_1}{e^{(a_2-a_1)t} + \frac{b}{a_1}K_1} + \exp(-(d_1\gamma^2 + \tfrac{a_1}{b}d_{11}\gamma^2)t)\times \\
&\times(e^{(a_2-a_1)t} + \tfrac{b}{a_1}K_1)^{-\frac{1}{b}d_{11}\gamma^2-1}K_2\cos(\gamma x), \\
v = {}& \tfrac{\frac{a_2}{c}e^{(a_2-a_1)t}}{e^{(a_2-a_1)t} + \frac{b}{a_1}K_1} - \tfrac{b}{c}\exp(-(d_1\gamma^2 + \tfrac{a_1}{b}d_{11}\gamma^2)t)\times \\
&\times(e^{(a_2-a_1)t} + \tfrac{b}{a_1}K_1)^{-\frac{1}{b}d_{11}\gamma^2-1}K_2\cos(\gamma x)
\end{aligned} \tag{40}
$$

узагальненої системи ШКТ

$$
\begin{aligned}
u_t &= [(d_1 + d_{11}u + \tfrac{c}{b}d_{11}v)u]_{xx} + u(a_1 - bu - cv), \\
v_t &= [(d_2 + d_{11}u + \tfrac{c}{b}d_{11}v)v]_{xx} + v(a_2 - bu - cv).
\end{aligned} \tag{41}
$$

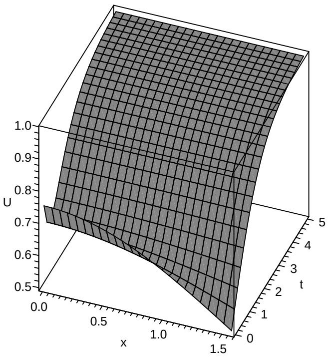
Розв'язок (40) при

$$
a_2 < a_1, \quad d_1 = -\tfrac{a_1}{b}d_{11} \tag{42}
$$

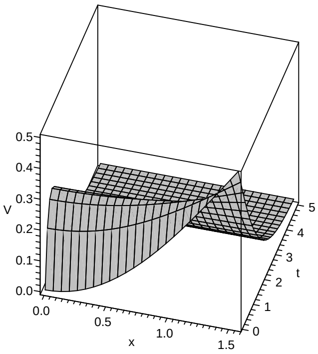
має асимптотичну поведінку

$$
(u,v) \to (\tfrac{a_1}{b} + K_3\cos(\gamma x), -\tfrac{b}{c}K_3\cos(\gamma x)), \quad t \to \infty, \tag{43}
$$

де $K_3 = K_2(\frac{a_1}{bK_1})^{\frac{a_2d_{11}+bd_2}{a_1d_{11}+bd_2}}$. Таким чином, знову отримали періодичний розподіл в просторі, як і для розв'язку (39) з (28). Приклад розв'язку (40) з такою асимптотичною поведінкою подано на Мал.1-2. Інший приклад розв'язку (40), що описує змагання між двома популяціями, коли вид u з часом повністю домінує, а вид v гине, подано на Мал.3-4.



Мал. 3. Точний розв'язок (40) з $a_1 = 2, a_2 = 1, b = 2, d_1 = 2, d_2 = 1, d_{11} = 2, K_1 = 1, K_2 = 1$, компонента u.



Мал. 4. Точний розв'язок (40) з $a_1 = 2, a_2 = 1, b = 2, c = 1, d_1 = 2, d_2 = 1, d_{11} = 2, K_1 = 1, K_2 = 1$, компонента v.

4. Висновки. В цій статті застосовано неліївські анзаци для редукції нелінійної системи (2) до систем ЗДР. За допомогою розв'язків систем ЗДР отримано точні розв'язки системи (2). Досліджено асимптотичну поведінку розв'язків та запропоновано відповідну біологічну інтерпретацію. Нами отримано також інші точні розв'язки системи з поперечною дифузією (2), які буде наведено в іншій роботі.

Варто зауважити, що лієвська симетрія системи (2) з довільними коефіцієнтами є тривіальною (тобто допускає лише оператори зсувів по часовій та просторовій змінних), проте нетривіальним завданням є опис всіх таких значень коефіцієнтів, коли нелінійна система (2) допускає алгебру інваріантності розмірності три і більше. Робота над цією проблемою триває.

[1] Shigesada N., Kawasaki K., Teramoto E. Spatial segregation of interacting species //J. Theoret. Biol. – 1979. – **79**. – P. 83–99.

[2] Conway E. and Smoller J. Diffusion and predator-prey interaction // SIAM J. Appl. Math. – 1977. – **33**. – P. 673–686.

[3] Brown P.N. Decay to uniform states in ecological interactions // SIAM J.Appl. Math. – 1980. – **38**. – P. 22–37.

[4] Lou Y. and Ni W.-M. Diffusion, self-diffusion and cross-diffusion //J. Diff. Eqs. – 1996. – **131**. – P. 79–131.

[5] Shim S.-A. Uniform boundedness and convergence of solutions to the systems with a single nonzero cross-diffusion //J. Math. Anal. Appl. – 2003. – **279**. – P. 1–21.

[6] Черніга Р.М. Нові точні розв'язки та їх властивості одного нелінійного рівняння математичної біології // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**. – С. 1409–1421.

[7] Черніга Р.М., Дутка В.А. Дифузійна система Лотки-Вольтерра: симетрії Лі, точні та числові розв'язки // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**. – С. 1395–1404.

[8] Cherniha R. & King J.R. Nonlinear Reaction-Diffusion Systems with Variable Diffusivities: Lie Symmetries, Ansätze and Exact Solutions // J. Math. Anal. Appl. – 2005. – **308**. – P. 11–35.

[9] Миронюк Л.П., Черніга Р.М. Редукція та розв'язки одного класу систем нелінійних рівнянь реакції-дифузії зі степеневими нелінійностями // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 2. – С. 217–224.

[10] Cherniha R. A constructive method for construction of new exact solutions of nonlinear evolution equations // Rep. Math. Phys. – 1996. – **38**, № 3. – P. 301–312.

[11] Cherniha R. New Non-Lie Ansätze and Exact Solutions of Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1998. – **31**. – P. 8179–8198.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2007, т.4, N 3, 148–159

517.9:958

Cluster Expansion and Uniqueness of Gibbs State Two-Body Potentials

S. N. Petrenko

Faculty of mechanics and mathematics,
Kyiv Shevchenko university, Ukraine

E-mail: Petrenko2003kiev@inbox.ru

В рамках класичної статистичної механіки розглядається нескінченна система тотожних точкових частинок, що взаємодіють за допомогою парного посилено надстійкого потенціалу безмежного радіуса дії. Використовуючи традиційний метод кластерних розкладів і кластерних розкладів по щільностям конфігурацій, доведено єдиність гіббсового стану для достатньо малих значень хімічної активності частинок z.

A continuous infinite system of point particles interacting via two-body infinite-range strong superstable potential is considered in the framework of classical statistical mechanics. Combining the traditional method of cluster expansions and cluster expansions in densities of configurations, the uniqueness of Gibbs state for sufficiently small values of chemical activity z is proved.

Introduction. The Gibbs measure plays an important part in the modern mathematical physics in studying of physical phenomena which take place in large systems of interacting particles. The Gibbs measure is a probability measure through which average values of all physical observables are expressed.

In spite of the fact that all physical phenomena occur in the limited area of space (in other words in the infinite volume), mathematical research with necessity assumes a so-called *thermodynamic limit*, that is under the condition of preservation of values of some physical parameters type of density or an average of particles in the unite volume, it is necessary to pass to an infinite volume of the system and an infinite number of particles in this volume.

Thus, there is a difficult enough mathematical problem of construction of the Gibbs measure and proofs of its uniqueness (or on the contrary not uniqueness) depending on values of such physical parameters as temperature, density and others.

The solution of these problems goes back to pioneer works by Dobrushin, Lenford and Ruelle at the end of 60th years of the last century. However, the proof of uniqueness (at small values of density or high temperatures) offered by Dobrushin, basically covers pair potentials of interaction with a finite range. Besides, the techniques of the proof is very awkward and difficult. The purpose of present work is to offer relatively simple method of the proof of uniqueness, which is based on techniques of cluster expansions for the basic characteristics of a measure–correlation functions which are analogues of the moments in the classical theory of measure. The proof is based on the quasicontinuous approximation of continuous system, proposed in [16]. The result is true for strong superstable potentials [10], [15] in the region of sufficiently small values of the parameter z, which is connected with the chemical activity.

1. Correlation functions.

1.1. Configuration spaces.

Let $\mathbb{R}^d$ be a d-dimensional Euclidean space. By $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ and $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ we denote the family of all open and Borel sets, respectively. $\mathcal{O}_c(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ denote the systems of all sets in $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, respectively, which are bounded.

The set of positions $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ of identical particles is considered to be a locally finite subset in $\mathbb{R}^d$ and the set of all such subsets creates the configuration space:

$$\Gamma = \Gamma_{\mathbb{R}^d} := \left\{ \gamma \subset \mathbb{R}^d \middle| \ |\gamma \cap \Lambda| < \infty, \text{ for all } \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d) \right\},$$

where $|A|$ denotes the cardinality of the set A. The symbol $|\cdot|$ may also represent the Lebesgue measure of the set, but the meaning will always be clear from the context. For any $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ we denote by γ_Λ the projection of γ on Λ and the corresponding configuration space by Γ_Λ. We also need to define the space of finite configurations Γ_0:

$$\Gamma_0 = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}_0} \Gamma^{(n)}, \quad \Gamma^{(n)} := \{\eta \subset \mathbb{R}^d \mid |\eta| = n\}, \quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

For every $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ one can define a mapping $N_\Lambda : \Gamma \to \mathbb{N}_0$ of the form

$$N_\Lambda(\eta) := |\eta \cap \Lambda|.$$

The Borel σ-algebra $\mathfrak{B}(\Gamma)$ is equal to $\sigma(N_\Lambda \,\big|\Lambda \in \mathfrak{B}_c(\mathbb{R}^d))$ and additionally one may introduce the following filtration

$$\mathfrak{B}_\Lambda(\Gamma) := \sigma(N_{\Lambda'} \,\big|\Lambda' \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d),\ \Lambda' \subset \Lambda),$$

see [6], [7] for details.

By $\mathfrak{B}(\cdot)$ we denote the corresponding σ-algebras on Γ_Λ and Γ_0. For a given intensity measure $\sigma = zdx$ $(z > 0)$ on $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ and any $n \in \mathbb{N}$ the product measure $\sigma^{\otimes n}$ can be considered by restriction as a measure on

$$\widetilde{(\mathbb{R}^d)^n} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^d)^n \middle|\ x_k \neq x_l \text{ if } k \neq l \right\}$$

and hence as a measure $\sigma^{(n)}$ on $\Gamma^{(n)}$ through the map (c.f. [1])

$$sym_n : \widetilde{(\mathbb{R}^d)^n} \ni (x_1, ..., x_n) \mapsto \{x_1, ..., x_n\} \in \Gamma^{(n)}.$$

Define the Lebesgue-Poisson measure λ_σ on $\mathfrak{B}(\Gamma_0)$ by the formula:

$$\lambda_\sigma := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sigma^{(n)}. \tag{1}$$

The restriction of λ_σ to $\mathfrak{B}(\Gamma_\Lambda)$ we also denote by λ_σ. For a more detailed structure of the configuration spaces Γ, Γ_0, Γ_Λ see [1].

Let $\lambda \in \mathbb{R}_+$ be arbitrary. For each $r \in \mathbb{Z}^d$ we define an elementary cube (see [18])

$$\Delta(r) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \lambda(r^i - 1/2) \leq x^i < \lambda(r^i + 1/2)\}.$$

These cubes form a partition of $\mathbb{R}^d$, which we denote by $\overline{\Delta}_\lambda$. We will sometimes write Δ instead of $\Delta(r)$, if a cube Δ is considered to be arbitrary and there is no reason to emphasize that it is centered at the concrete point $r \in \mathbb{Z}^d$. By $\mathcal{J}_\lambda(\mathbb{R}^d)$ we denote all finite unions of cubes of the form $\Delta(r)$ (such sets are used in the construction of the Jordan measure).

Define configuration spaces in which we will work in this paper.

$$\Gamma_\Lambda := \left\{ \gamma \subset \mathbb{R}^d \middle|\ \gamma_{X \setminus \Lambda} = \emptyset \right\},$$

for any bounded fixed set $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$. Let $X_n := (\bigcup\limits_{i=1}^{n} \Delta_i),\ \Delta_i \in \overline{\Delta}_\lambda$, $n \in \mathbb{N}$. Define a space of *dilute* configurations in X_n by

$$\Gamma_{X_n}^{dil} := \{\gamma \in \Gamma_{X_n} |\ |\gamma_\Delta| = 0 \vee 1 \text{ for all } \Delta \subset X_n\} \tag{2}$$

and a space of *dense* configurations in X_n by

$$\Gamma_{X_n}^{den} := \{\gamma \in \Gamma_{X_n} |\ |\gamma_\Delta| \geq 2 \text{ for all } \Delta \subset X_n\}\,. \tag{3}$$

We consider a general type of two-body interaction potential $\phi(x, y) = = \varphi(|x - y|)$, where $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Define energy functional as

$$U_\varphi(\eta) = U(\eta) := \sum_{\{x,y\}\subset\eta} \varphi(|x - y|), \quad \eta \in \Gamma_0 \tag{4}$$

where $\{\cdot, \cdot\}$ means sum over all possible different couples of particles from the configuration η. For a given $\gamma \in \Gamma_\Lambda$ define the interaction energy between $\eta \in \Gamma_\Lambda$, $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ and γ by

$$W(\eta; \gamma) := \sum_{\substack{x\in\eta \\ y\in\gamma}} \varphi(|x - y|). \tag{5}$$

Define also

$$U(\eta|\gamma) := U(\eta) + W(\eta; \gamma). \tag{6}$$

Following [18], [10], [15] let us define some important characteristics of interaction U.

Definitin 1.1. Interaction U is *stable* (S), if there exists $B \geq 0$ such that

$$U(\eta) \geq -|\eta|B, \quad \text{for all} \quad \eta \in \Gamma_0 \tag{7}$$

Definitin 1.2. Interaction U is *superstable* (SS), if there exist $A > 0$ and $B \geq 0$ such that

$$U(\eta) \geq \sum_{\Delta\in\overline{\Delta}} (|\eta_\Delta|^2 A - |\eta_\Delta|B), \qquad \text{for all} \quad \eta \in \Gamma_0 \tag{8}$$

Definitin 1.3. Interaction U is *strong superstable* (SSS), if there exist $A > 0$ and $B \geq 0$ and $p > 2$ such that

$$U(\eta) \geq \sum_{\Delta\in\overline{\Delta}} (A|\eta_\Delta|^p - B|\eta_\Delta|), \qquad \text{for all} \quad \eta \in \Gamma_0 \tag{9}$$

Definitin 1.4. Interaction U is *lower regular* (LR) if there exist a decreasing function Ψ on $\mathbb{N}_0$ such that

$$\sum_{r\in\mathbb{Z}^d} \Psi(|x|) < \infty \tag{10}$$

and interaction energy $W(\eta;\gamma)$ satisfies the following inequality:

$$W(\eta;\gamma) \geq -\frac{1}{2}\sum_{r,s\in\mathbb{Z}^d} \Psi(|r-s|)(|\eta_{\Delta_\lambda(r)}|^2 + |\gamma_{\Delta_\lambda(s)}|^2) \tag{11}$$

for all $\eta,\gamma\in\Gamma_0$.

Conditions (7)–(11) are rather general and guarantee uniform estimate for the family of finite volume correlation functions and the existence of Gibbs measure (see e.g. [12] and [4] for many-body case). The separating problem is to establish the condition on the potential φ, which ensures (7)–(11). In the article [15] a large class of interaction potentials were described which satisfy (SS) and (SSS) conditions. See, also, [12], [8] for discussion of this problem.

Consider decomposition of the potential $\varphi(|x|)$ into two parts:

$$\varphi(|x|) = \varphi^+(|x|) - \varphi^-(|x|), \tag{12}$$

where $\varphi^+(|x|) := \max\{0,\varphi(|x|)\}$, $\varphi^-(|x|) := -\min\{0,\varphi(|x|)\}$.

Using (12), for any fixed $\Delta_0\subset\mathbb{R}^d$ define values:

$$\upsilon_0(\lambda,\Delta_0) := \sum_{\Delta\in\overline{\Delta}} \sup_{x\in\Delta_0, y\in\Delta} \varphi^-(|x-y|) \tag{13}$$

and

$$b(\lambda,\Delta_0) := \inf_{\{x,y\}\subset\Delta} \varphi^+(|x-y|) \tag{14}$$

It's clear from the definition that υ_ε and b do not depend on the position of Δ_0. So we will write

$$\upsilon_0(\lambda,\Delta_0) = \upsilon_0(\lambda) = \upsilon_0,$$
$$b(\lambda,\Delta_0) = b(\lambda) = b.$$

1.2. Gibbs specification and correlation functions. Following [18] we are going to construct *tempered Gibbs measure*, which is supported on the set of *regular configurations* (see e.g. [19]) $S = \cup_{N\geq 0} S_N$, where for any cube $\Lambda \in \mathbb{R}^d$ of the volume $(2l+1)^d$

$$S_N \;=\; \Big\{ \gamma \in \Gamma \mid \sum_{\Delta \in \overline{\Delta} \cap \Lambda} |\gamma_\Delta|^2 \leq N^2 (2l+1)^d \Big\}.$$

Conditions (7)–(11) allow to define a Borel function $W(\gamma; \cdot)$ on S_N for any $\eta \in \Gamma_0$ by

$$W(\eta; \overline{\gamma}) \;:=\; \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d} W(\eta; \overline{\gamma}_{\Lambda^c}).$$

Then the finite volume Gibbs state with a fixed boundary configuration $\overline{\gamma} := \gamma \cap \Lambda^c$ for U, $z > 0$ and $\beta > 0$ is

$$\mu_\Lambda(d\eta \vert\, \overline{\gamma}) = \frac{\exp\{-\beta U(\eta \vert\, \overline{\gamma})\}}{Z_\Lambda(\overline{\gamma})} \lambda_\sigma(d\eta).$$

Under assumptions (8)–(11) the finite volume Gibbs state is well defined as $Z_\Lambda(\overline{\gamma}) < \infty$.

The corresponding finite-volume correlation functions with boundary configuration $\overline{\gamma} \in \Gamma$ have the following form

$$\rho^\Lambda(\eta \mid \overline{\gamma}) = \frac{1}{Z_\Lambda(\overline{\gamma})} \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta \cup \gamma \vert \overline{\gamma})} \lambda_\sigma(d\gamma), \quad \eta \in \Gamma_\Lambda. \tag{15}$$

$$Z_\Lambda(\overline{\gamma}) = \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma \vert \overline{\gamma})} \lambda_\sigma(d\gamma), \tag{16}$$

with $U(\cdot \mid \cdot)$ defined by (6).

Let $\{\pi_\Lambda\}$ denote the specification associated with z, β and the Hamiltonian U (see [13]), which is defined on Γ by

$$\pi_\Lambda(A \vert\, \overline{\gamma}) = \int_{A'} \mu_\Lambda(d\eta \vert\, \overline{\gamma}),$$

where $A' = \{\eta \in \Gamma_\Lambda :\; \eta \cup (\overline{\gamma}_{\Lambda^c}) \subset A\}$, $A \in \mathfrak{B}(\Gamma)$.

A probability measure μ on Γ is called a Gibbs state for U, β and z if

$$\mu(\pi_\Lambda(A \vert\, \overline{\gamma})) = \mu(A)$$

for every $A \in \mathfrak{B}(\Gamma)$ and every $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$.

This relation is the well known (DLR)-equation (Dobrushin-Lanford-Ruelle equation), see [3] for more details. The class of all Gibbs states which correspond to the specifications $\{\pi_\Lambda\}_{\Lambda\in\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)}$ we denote by $\mathcal{G}(U,z,\beta)$.

1.3. Main results.

Theorem 1.1. *Suppose that the interaction potential $\varphi(|x|)$ is strong superstable and lower regular. Then, for any $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ and any $\beta, z \geq 0$ there exists a constant $\xi = \xi(\beta,z)$ (independent of Λ and boundary conditions $\overline{\gamma}$) such that*

$$\rho(\eta \mid \overline{\gamma}_{\Lambda^c}) \;\leq\; \xi^{|\eta|}. \tag{17}$$

Theorem 1.2. *With the same assumptions as in Theorem 1.1 there exists $z_0 = z_0(\beta) > 0$ such that for any $0 < z < z_0$ the limit*

$$\rho(\eta) \;=\; \lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{R}^d} \rho^\Lambda(\eta \mid \overline{\gamma}), \quad \eta\in\Gamma_0 \tag{18}$$

exist and does not depend on boundary configuration $\overline{\gamma}$.

As a consequence of Theorem the following theorem is fulfilled.

Theorem 1.3. *With the same assumptions as in Theorem 1.2 there exists $z_0 = z_0(\beta) > 0$ such that for any $0 < z < z_0$ and $\beta \geq 0$ there exists an unique Gibbs measure μ_G which corresponds to the limit correlation function $\rho(\eta)$.*

Proof. Existence of the corresponding Gibbs state follows from the arguments which are based on the Lenard's theorem (see [5])

If for all bounded measurable $\Lambda \in \mathfrak{B}_c(\mathbb{R}^d)$ and all integer $j \geq 1$ the series

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\Gamma_\Lambda^{(j+k)}} \rho(\eta)\lambda_\sigma(d\eta) \right)^{-\frac{1}{k}}$$

diverges, then the measure μ_G is determined uniquely by the sequence of correlation functions

$$\rho_m := \rho(\eta) \restriction \Gamma_0^{(m)}.$$

2. The proof of the results.

2.1. Quasicontinuous approximation of the correlation functions. In the article [16] the authors proposed some approximation of the pressure and correlation functions which is based on the cluster expansion of the Lebesgue–Poisson integral for the correlation functions (15)–(16) into the series over dense configurations.

The main technical idea consists in separation of the *dilute* parts of configurations from the *dense* parts. In order to do this we define an indicator function for the configuration γ_Λ, $\Lambda \in \mathcal{J}_\lambda(\mathbb{R}^d)$ in the cube Δ. The indicator for *dilute* configurations is defined by

$$\chi_-^\Delta(\gamma) \ = \begin{cases} 1, & \text{for } \gamma \text{ with } |\gamma_\Delta| = 0 \vee 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

and for *dense* configurations by

$$\chi_+^\Delta(\gamma) \ = \ 1 - \chi_-^\Delta(\gamma).$$

To obtain an expansion we use the following partition of the unity for any $\gamma \in \Gamma_\Lambda$:

$$1 \ = \prod_{\Delta \in \overline{\Delta} \cap \Lambda} [\chi_-^\Delta(\gamma) + \chi_+^\Delta(\gamma)]$$

$$= \sum_{n=0}^{N_\Lambda} \sum_{\{\Delta_1,\dots,\Delta_n\}\subset\Lambda} \prod_{i=1}^{n} \chi_+^{\Delta_i}(\gamma) \prod_{\Delta\subset\Lambda\setminus\cup_{i=1}^n \Delta_i} \chi_-^\Delta(\gamma) \ =$$

$$= \sum_{\emptyset\subseteq X\subseteq\Lambda} \widetilde{\chi}_+^X(\gamma)\widetilde{\chi}_-^{\Lambda\setminus X}(\gamma), \tag{19}$$

where $N_\Lambda \ = \ |\Lambda|\diagup|\Delta|$ (here the symbol $|\cdot|$ means Lebesgue measure of the set) is the number of cubes Δ in the volume Λ, X is a union of cubes Δ for which $|\gamma_\Delta| \geq 2$ and

$$\widetilde{\chi}_\pm^X(\gamma) \ = \ \prod_{\Delta\subset X} \chi_\pm^\Delta(\gamma).$$

Inserting (19) into (15) we get

$$\rho_\Lambda(\eta \mid \overline{\gamma}) \ = \ \frac{1}{Z_\Lambda(\overline{\gamma})} \sum_{\emptyset\subseteq X\subseteq\Lambda} \int_{\Gamma_\Lambda} \widetilde{\chi}_+^X(\gamma)\widetilde{\chi}_-^{\Lambda\setminus X}(\gamma) e^{-\beta U(\eta\cup\gamma)} \lambda_\sigma(d\gamma). \tag{20}$$

Now, it is easy to define pure *dilute correlation functions*

$$\rho_\Lambda^{(-)}(\eta;\lambda \mid \overline{\gamma}) \;=\; \frac{1}{Z_\Lambda^{(-)}(\lambda;\overline{\gamma})}\int_{\Gamma_\Lambda\setminus X_\eta}\widetilde{\chi}_-^{\Lambda\setminus X_\eta}(\gamma)e^{-\beta U(\eta\cup\gamma)}\lambda_\sigma(d\gamma), \quad (21)$$

where X_η is a union of cubes $\Delta \in \overline{\Delta}$ such that $|\eta_\Delta| \neq 0$ and

$$Z_\Lambda^{(-)}(\lambda;\overline{\gamma}) \;=\; \int_{\Gamma_\Lambda}\widetilde{\chi}_-^{\Lambda}(\gamma)e^{-\beta U(\eta\cup\gamma)}\lambda_\sigma(d\gamma),$$

The functions $\rho_\Lambda^{(-)}(\eta;\lambda \mid \overline{\gamma})$ satisfy the Kirkwood-Salzburg equations (see [16]) (we write down them for the case of empty boundary conditions $\overline{\gamma} = \emptyset$):

$$\rho_\Lambda^{(-)}(\cdot;\lambda \mid \emptyset) \;=\; zK_\Lambda^{(-)}\rho_\Lambda^{(-)}(\cdot;\lambda \mid \emptyset) + \delta_\Lambda(\cdot), \quad (22)$$

where the operator $K_\Lambda^{(-)}$ is defined in the Banach space E_ξ in the following way:

$$(K_\Lambda^{(-)}f)(\eta) = e^{-\beta W(\eta_{\Delta_0};\eta\setminus\eta_{\Delta_0})}\sum_{\emptyset\subseteq X\subset\overline{\Delta}\cap\Lambda}\int_{\Gamma_X^{(dil)}}\prod_{\Delta\in\overline{\Delta}\cap X}(e^{-\beta W(\eta_{\Delta_0};\gamma_\Delta)}-$$

$$-1)f(\eta\setminus\eta_{\Delta_0}\cup\gamma)\lambda_\sigma(d\gamma). \quad (23)$$

In the case $|\eta| = 1$ the first term (at $X = \emptyset$) is zero and in the case $|\eta| > 1$ the first term (at $X = \emptyset$) is $f(\eta\setminus\eta_{\Delta_0})$. The vector $\delta_\Lambda = \{\delta_\Lambda(\eta)\}_{\eta\in\Gamma_\Lambda}$ and

$$\delta_\Lambda(\eta) \;=\; \begin{cases} z, & \text{for } \eta \text{ with } |\eta| = 1, \\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases} \quad (24)$$

Note, also, that in this case

$$W(\eta_{\Delta_0};\gamma_\Delta) = \phi(|x-y|), \quad x\in\Delta_0, \quad y\in\Delta,$$

and $\eta_{\Delta_0} = \{x_0\}$ some chosen point of a configuration η.

Using standard technique (see e.g.[2], [9], [17]) it is easy to calculate the norm of operator $K_\Lambda^{(-)}$ and $K^{(-)}$ in the Banach space E_ξ with some optimal $\xi = \xi_0$:

$$\|K_\Lambda^{(-)}\|_{E_{\xi_0}} \leq K_0 \quad (25)$$

uniformly in Λ. So, the same bound is true for the operator $K^{(-)}$.

It means that for sufficiently small z the series

$$\rho_\Lambda^{(-)}(\cdot;\lambda \mid \emptyset) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(K_\Lambda^{(-)}\right)^n \delta_\Lambda(\cdot) \tag{26}$$

is a unique solution of the equation (22). The same is true for the equation in thermodynamic limit. In the same way one can prove that

$$\lim_{\lambda\to 0} \rho_\Lambda^{(-)}(\eta;\lambda) = \rho_\Lambda(\eta). \tag{27}$$

The same result is true also in thermodynamic limit $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d$.

2.2. The proof of the Theorem 1.1. Due to convergence of the correlation functions $\rho_\Lambda^{(-)}(\eta;\lambda)$ to $\rho_\Lambda(\eta)$ it is sufficient to prove the estimate (17) for $\rho_\Lambda^{(-)}(\eta;\lambda)$. Using the definition of $v_0(\lambda)$ it is easy to see that

$$e^{-\beta W(\eta;\gamma)} \;=\; \prod_{x\in\eta} e^{-\beta \sum_{y\in\gamma} \varphi(|x-y|)} \le e^{\beta v_0(\lambda)|\eta|}$$

for any $\eta \in \Gamma_\Lambda$ and $\gamma \in \Gamma^{(dil)}$. Applying this inequality to (21) we get (17) with $\xi = ze^{\beta v_0}$.

2.3. The proof of the Theorem 1.2. To prove (18) we have to write down the Kirkwood-Salzburg equations for $\rho_\Lambda^{(-)}(\eta;\lambda \mid \overline{\gamma})$. It is easy to verify that these equations are similar to those above (see (22), (23)) with the factor $e^{-\beta W(\eta_{\Delta_0};\eta\setminus\eta_{\Delta_0})}$ replaced by $e^{-\beta W(\eta_{\Delta_0};\eta\setminus\eta_{\Delta_0}\cup\overline{\gamma})}$. Then we can introduce the corresponding operator $K_\Lambda^{(-)}(\overline{\gamma})$ and write down the correlation equation for $\rho_\Lambda^{(-)}(\cdot;\lambda \mid \overline{\gamma})$ in the form

$$\rho_\Lambda^{(-)}(\cdot;\lambda \mid \overline{\gamma}) \;=\; zK_\Lambda^{(-)}\rho_\Lambda^{(-)}(\cdot;\lambda \mid \overline{\gamma}) + \delta_\Lambda(\cdot \mid \overline{\gamma}), \tag{28}$$

where $\delta_\Lambda(\eta \mid \overline{\gamma}) \;=\; \delta_\Lambda(\eta)\exp\{-\beta W(\eta_{\Delta_0};\overline{\gamma})\}$ and $\delta_\Lambda(\eta)$ was defined by (24). Again it is easy to prove that

$$\|K_\Lambda^{(-)}(\overline{\gamma})\|_{E_{\xi_0}} \le K_0, \tag{29}$$

where K_0 does not depend on Λ and $\overline{\gamma}$ and for sufficiently small z the series

$$\rho_\Lambda^{(-)}(\cdot;\lambda \mid \overline{\gamma}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(K_\Lambda^{(-)}(\overline{\gamma})\right)^n \delta_\Lambda(\cdot) \tag{30}$$

is a unique solution of the equation (28) (see [19]). Now, using (26) and (30) and all above arguments, it is easy to calculate that

$$|\rho_{\Lambda}^{(-)}(\eta;\lambda \mid \overline{\gamma}) - \rho(\eta;\emptyset)| < const \cdot \varepsilon(\mathrm{dist}(\eta,\Lambda^c))), \tag{31}$$

where $\Lambda^c = \mathbb{R}^d \setminus \Lambda$ and

$$lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{R}^d}\varepsilon(\mathrm{dist}(\eta,\partial\Lambda))) = 0,$$

The r.h.s. of (31) goes to zero uniformly in $\overline{\gamma}$ at $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d$. Theorem 2.2 is proved.

Acknowledgments. The author is grateful to Prof. O. L. Rebenko for the setting of this problem and stimulating discussions concerning the subject of this paper.

[1] Albeverio S., Kondratiev Yu.G., and Röckner M. Analysis and geometry on configuration spaces // J. Funct. Anal. – 1998. – **154(2)**. – P. 444–500.

[2] Боголюбов Н. Н., Петрина Д. Я., Хацет Б. И. Математическое описание равновесного состояния классических систем на основе формализма канонического ансамбля // Теорет. и мат. физика. – 1969. – **1**, № 2. – С. 251–274.

[3] Georgii H. O. Gibbs measures and Phase Transitions. – Walter de Gruyter, 1982.

[4] Kutoviy O.V., Rebenko A.L., Existence of Gibbs state for continuous gas with many-body interection // J. Math. Phys. – 2004. – **45(4)**. – P. 1593–1605.

[5] Lenard A. Correlation Functions and the Uniqueness of the State in Classical Statistical Mechanics // Commun.Math.Phys. – 1973. – **30**. – P. 35–44.

[6] Lenard A. States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles. I // Arch. Rational Mech. Anal. – 1975. – **59**. – 219–239.

[7] Lenard A. States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles. II // Arch. Rational Mech. Anal. – 1975. – **59**. – P. 241–256.

[8] Lewis J.T., Pule J.V. and de Smedt P. The Superstability of Pair-Potentials of Positive Type // J. Stat. Phys. – 1984. – **35**. – P. 381–385.

[9] Minlos R.A. Introduction to Mathematical Statistical Physics. – Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1999.

[10] Park Y.M. Bounds on Exponentials of Local Number Operators in Quantum Statistical Mechanics // Commun. Math. Phys. – 1984. – **94**. – P. 1–33.

[11] Petrenko S.N., Rebenko A.L., Superstable criterion and superstable bounds for infinite range interaction I: two-body potentials // Math. Funct. Anal. and Topology. – 2007. – **13**. – P. 50–61.

[12] Petrina D.Ya., Gerasimenko V. I, Malishev P.V. Mathematical foundation of classical statistical mechanics. Continuous Systems. – N.Y.–London–Paris: Gordon and Breach Science, 1989.

[13] Preston C, Random Fields // Lecture notes in Mathematics. – 1976. – **534**. – N.Y.: Springer.

[14] Rebenko A.L. A New Proof of Ruelle's Superstability Bounds // J. Stat. Phys. – 1998. – **91**. – P. 815–826.

[15] Rebenko A.L., Tertychnyi M.V. On the Superstability and Strong Superstability of 2-Body Interaction Potentials // (to be published).

[16] Rebenko A.L., Tertychnyi M.V. Quasicontinuous Approximation of Statistical Systems with Strong Superstable interactions // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2007. – **4**, № 3. – 173–183.

[17] Ruelle D. Statistical Mechanics. Rigorous results.– N.Y.–Amsterdam: W.A. Benjamin, inc., 1969.

[18] Ruelle D. Superstable interactions in classical statistical mechanics // Commun. Math. Phys. – 1970. – **18**. – P. 127–159.

[19] Zagrebnov V.A. Correlation Equations for Classical Continuous Systems: Finite–Volume Solutions for Non-Empty Boundary Conditions // Preprint P5-80-458 of JINP, Dubna. – 1980.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2007, т.4, N 3, 160–171

УДК 517.9:519.46

Q-умовні симетрії і точні розв'язки систем рівнянь реакції-дифузії

О.Г. Плюхін

Інститут математики НАН України, Київ

E-mail:pliukhin@imath.kiev.ua

Побудовано широкий клас Q-умовних симетрій систем рівнянь реакції-дифузії зі степеневими коефіцієнтами дифузії. Отримано нові неліївські анзаци, які редукують системи рівнянь реакції-дифузії до систем звичайних диференціальних рівнянь, та приклади точних розв'язків.

A wide range of Q-conditional symmetries for reaction-diffusion systems with power diffusivities are constructed. The relevant non-Lie ansätze to reduce the systems to ODE systems and examples of exact solutions are obtained.

1. Вступ. Системою рівнянь реакції-дифузії

$$\begin{aligned} U_t &= [D^1(U)U_x]_x + F^1(U,V), \\ V_t &= [D^2(V)V_x]_x + F^2(U,V), \end{aligned} \tag{1}$$

де $D^1(U)$, $D^2(V)$, $F^1(U,V)$ та $F^2(U,V)$ — невідомі гладкі функції, нижні індекси t та x означають диференціювання за цими змінними, узагальнюється значна кількість математичних моделей, якими описуються різноманітні процеси фізики, біології, хімії. Природно, що актуальною задачею є знаходження точних розв'язків цієї системи. Для побудови розв'язків ми використаємо відомий алгоритм відшукання операторів Q-умовної симетрій [1,2], потім за цими операторами проведемо редукцію відповідних систем реакції-дифузії до систем звичайних диференціальних рівнянь та врешті-решт побудуємо точні розв'язки початкової системи. Вичерпний опис симетрій Лі для системи (1) отримано в роботах [3–5] (при сталих коефіцієнтах дифузії) та [6] (при змінних коефіцієнтах дифузії). Відшукання операторів

Q-умовної симетрій таких систем тут проводиться вперше. Зауважимо, що деякі Q-умовні симетрії системи (1) знайдено в роботі [7], але лише для випадку сталих коефіцієнтів дифузії.

Оскільки знаходження Q-умовних симетрій системи (1) є досить складною задачею, то в цій роботі ми розглянемо систему рівнянь реакції-дифузії зі степеневими коефіцієнтами дифузії

$$\begin{aligned} &U_t = [U^k U_x]_x + F^1(U,V), \quad l \neq -1, \\ &V_t = [V^l V_x]_x + F^2(U,V), \quad k \neq -1, \quad k^2 + l^2 \neq 0, \end{aligned} \tag{2}$$

яка є частковим випадком (1). Зауважимо, що в роботах [8–10] проведено повний опис Q-умовних симетрії скалярного рівняння реакції-дифузії зі степеневим коефіцієнтом дифузії

$$U_t = [U^k U_x]_x + F(U).$$

В роботах [11, 12] (детальніше див. [13, 14]) знайдено всі Q-умовні симетрії та побудовано низку точних розв'язків скалярного рівняння реакції-дифузії-конвекції

$$U_t = [U^m U_x]_x + \lambda U^n U_x + F(U), \ \lambda \neq 0; \quad n = m, \ m+1.$$

2. Q-умовні симетрії. Будемо шукати оператори вигляду

$$Q = \partial_t + \xi(t,x,U,V)\partial_x + \eta^1(t,x,U,V)\partial_U + \eta^2(t,x,U,V)\partial_V \tag{3}$$

для системи (2). Шукатимемо лише ті оператори, які не можуть бути зведені до ліївських. Для спрощення обрахунків використаємо таку заміну:

$$\begin{aligned} &u = U^{k+1}, \quad k \neq -1, \\ &v = V^{l+1}, \quad l \neq -1. \end{aligned} \tag{4}$$

Після заміни (4) система (2) і оператор (3) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} &u_{xx} = u^m u_t + C^1(u,v), \ m \neq -1 \\ &v_{xx} = v^n v_t + C^2(u,v), \ n \neq -1, \end{aligned} \tag{5}$$

де $m = -\frac{k}{k+1}, \ n = -\frac{p}{p+1}, \ C^1(u,v) = -(k+1)F^1\left(u^{\frac{1}{k+1}}, v^{\frac{1}{l+1}}\right),$
$C^2(u,v) = -(p+1)F^2\left(u^{\frac{1}{k+1}}, v^{\frac{1}{l+1}}\right),$

$$Q = \partial_t + \xi(t,x,u,v)\partial_x + \eta^1(t,x,u,v)\partial_u + \eta^2(t,x,u,v)\partial_v, \tag{6}$$

відповідно. Використовуючи відому процедуру [1, 2, 15], отримуємо систему визначальних рівнянь для відшукання коефіцієнтів операторів вигляду (6)

$$
\begin{aligned}
&1)\ \xi_{uu} = \xi_{vv} = \xi_{uv} = 0,\\
&2)\ \eta^1_{vv} = 0,\\
&3)\ \eta^2_{uu} = 0,\\
&4)\ 2\xi\xi_u u^m + \eta^1_{uu} - 2\xi_{xu} = 0,\\
&5)\ 2\xi\xi_v v^n + \eta^2_{vv} - 2\xi_{xv} = 0,\\
&6)\ \xi\xi_v(u^m + v^n) + 2\eta^1_{uv} - 2\xi_{xv} = 0,\\
&7)\ \xi\xi_u(u^m + v^n) + 2\eta^2_{uv} - 2\xi_{xu} = 0,\\
&8)\ \xi\eta^1_v(u^m - v^n) + 2\eta^1_{xv} - 2\xi_v C^1 - 2\xi_v\eta^1 u^m = 0,\\
&9)\ \xi\eta^2_u(v^n - u^m) + 2\eta^2_{xu} - 2\xi_u C^2 - 2\xi_u\eta^2 v^n = 0,\\
&10)\ (2\xi_u\eta^1 - \xi_t - \xi_v\eta^2 - 2\xi\xi_x)u^m - m\xi\eta^1 u^{m-1}+\\
&\quad +\xi_v\eta^2 v^n + 3\xi_u C^1 + \xi_v C^2 - 2\eta^1_{xu} + \xi_{xx} = 0,\\
&11)\ (2\xi_v\eta^2 - \xi_t - \xi_u\eta^1 - 2\xi\xi_x)v^n - n\xi\eta^2 v^{n-1}+\\
&\quad +\xi_u\eta^1 u^m + 3\xi_v C^2 + \xi_u C^1 - 2\eta^2_{xv} + \xi_{xx} = 0,\\
&12)\ m(\eta^1)^2 u^{m-1} + (\eta^1_t + \eta^2\eta^1_v + 2\xi_x\eta^1)u^m - \eta^2\eta^1_v v^n+\\
&\quad +\eta^1 C^1_u + \eta^2 C^1_v - \eta^1_u C^1 + 2\xi_x C^1 - \eta^1_v C^2 - \eta^1_{xx} = 0,\\
&13)\ n(\eta^2)^2 v^{n-1} + (\eta^2_t + \eta^1\eta^2_u + 2\xi_x\eta^2)v^n - \eta^1\eta^2_u u^m+\\
&\quad +\eta^1 C^2_u + \eta^2 C^2_v - \eta^2_u C^1 + 2\xi_x C^2 - \eta^2_v C^2 - \eta^2_{xx} = 0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Розв'язуючи систему (7) приходимо до висновку, що у випадку $\xi = a(t,x)u + b(t,x)v + c(t,x),\ a(t,x)^2 + b(t,x)^2 \neq 0$ система (5) не має операторів Q-умовної симетрії. Тому надалі $\xi = \xi(t,x)$. Використовуючи 1 – 7 рівняння системи (7), отримуємо

$$
\begin{aligned}
&\eta^1 = q^1(t)v + r^1(t,x)u + p^1(t,x),\\
&\eta^2 = q^2(t)u + r^2(t,x)v + p^2(t,x).
\end{aligned}
$$

В результаті розв'язування рівнянь 8 – 13 системи (7) одержуємо велику кількість неліївських симетрій. В залежності від значень функцій $q^1(t),\ q^2(t),\ \xi(t,x)$ природним чином виділяється три випадки:

(a) $q^1(t)^2 + q^2(t)^2 \neq 0,\ \xi(t,x) = 0;$

(b) $q^1(t) = q^2(t) = 0,\ \xi(t,x) = 0;$

(c) $q^1(t) = q^2(t) = 0,\ \xi(t,x) \neq 0.$

Зауважимо, що випадок $q^1(t)^2 + q^2(t)^2 \neq 0,\ \xi(t,x) \neq 0$ неможливий, оскільки тоді з рівнянь системи (7) випливає, що $m = n = 0$, а ми припустили, що $m^2 + n^2 \neq 0$. У випадку (c) було отримано лише ліївські оператори. Тут ми наводимо лише результати, отримані у випадку (a). Повний перелік Q-умовних симетрій з випадку (b) буде наведено в подальших роботах.

Випадок (a) поділяється, в свою чергу, на чотири підвипадки, а саме:

a1) $p^1_x = 0,\ p^2_x \neq 0.$

a2) $p^1_x \neq 0,\ p^2_x \neq 0.$

a3) $p^1_x = p^2_x = 0.$

Зауважимо, що підвипадок $p^2_x = 0,\ p^1_x \neq 0$ еквівалентний до a1). Виявляється, що випадок a2) не веде до жодних умовних симетрій. У випадку a3) отримано систему класифікаційних рівнянь:

$$
\begin{aligned}
&(q^1v + r^1u + p^1)C^1_u + (q^2u + r^2v + p^2)C^1_v - r^1C^1 - q^1C^2 + \\
&+(q^1(q^2u + r^2v + p^2) + q^1_tv + r^1_tu + p^1_t)u^m + \\
&+m(q^1v + r^1u + p^1)^2u^{m-1} - q^1(q^2u + r^2v + p^2)v^n = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(q^1v + r^1u + p^1)C^2_u + (q^2u + r^2v + p^2)C^2_v - r^2C^2 - q^2C^1 + \\
&+(q^2(q^1v + r^1u + p^1) + q^2_tu + r^2_tv + p^2_t)v^n + \\
&+n(q^2u + r^2v + p^2)^2v^{n-1} - q^2(q^1v + r^1u + p^1)u^m = 0,
\end{aligned}
$$

(тут $C^i = C^i(u,v),\ q^i = q^i(t),\ r^i = r^i(t),\ p^i = p^i(t),\ i = 1,2,$ — шукані функції), яку не вдається розв'язати. Випадок a1) нами повністю проаналізовано та отримано 16 систем реакції-дифузії (2), що допускають оператори Q-умовної симетрії, які не збігаються з операторами класичних симетрій Лі. Кожна з 16 систем мають ту особливість, що одне з двох рівнянь є автономним. Нижче подаємо отримані результати у такому порядку: нелінійна система реакції-дифузії, відповідний оператор Q-умовної симетрії, обмеження на коефіцієнти системи або оператора. Скрізь $f(u)$ є довільною гладкою функцією, а λ з індексами та β — довільними (якщо нема обмежень) сталими. У всіх системах, наведених нижче, $m \neq 0,\ p^2_x \neq 0$, крім (15), а в системі (15) — $m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + \lambda_1 u + \lambda_2,\\
&v_{xx} = v_t + \lambda_3 v + f(u),\\
&Q = \partial_t + (\lambda_4 \exp((\lambda_1 - \lambda_3)t)u + p^2)\partial_v,\\
&p_t^2 = p_{xx}^2 - \lambda_3 p^2 + \lambda_2\lambda_4 \exp((\lambda_1 - \lambda_3)t),\ \ \lambda_4 \neq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + f(u),\\
&v_{xx} = v_t + \lambda_1 v - \lambda_2 f(u) + \lambda_1\lambda_2 u + \lambda_3,
\end{aligned} \tag{8}$$

$$Q = \partial_t + (\lambda_4(\lambda_2 u + v) + p^2)\partial_v, \tag{9}$$

де

$$p_t^2 = p_{xx}^2 - \lambda_1 p^2 + \lambda_3\lambda_4,\ \ \lambda_2 \neq 0,\ \ \lambda_4 \neq 0.$$

$$\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + \lambda_1 - \lambda_2 u^m,\\
&v_{xx} = v_t + \lambda_3 v + \lambda_4 u^2 + \lambda_5 u + \lambda_6,\\
&Q = \partial_t + \lambda_2\partial_u + \left(\left(\lambda_7 \exp(-\lambda_3 t) - \tfrac{2\lambda_2\lambda_1}{\lambda_3}\right)u + p^2\right)\partial_v,\\
&p_t^2 = p_{xx}^2 - \lambda_3 p^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)\left(\lambda_7 \exp(-\lambda_3 t) - \tfrac{2\lambda_2\lambda_4}{\lambda_3}\right) - \lambda_2\lambda_5,\ \ \lambda_2 \neq 0,\\
&\lambda_3 \neq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + \lambda_1 - \lambda_2 u^m,\\
&v_{xx} = v_t + \lambda_3 u^2 + \lambda_4 u + \lambda_5,\\
&Q = \partial_t + \lambda_2\partial_u + ((-2\lambda_2\lambda_3 t + \lambda_6)u + p^2)\partial_v,\\
&p_t^2 = p_{xx}^2 + (2\lambda_2\lambda_3 t - \lambda_6)(\lambda_2 - \lambda_1) - \lambda_2\lambda_4,\ \ \lambda_2 \neq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + \lambda_1 - \lambda_2 u^m,\\
&v_{xx} = v_t + \lambda_3 v + \lambda_4 u + \lambda_5 \exp\left(\tfrac{\lambda_7}{\lambda_2}u\right) + \lambda_6,\\
&Q = \partial_t + \lambda_2\partial_u + \left(\left(\lambda_8 \exp(-\lambda_3 t) + \tfrac{\lambda_4\lambda_7}{\lambda_3}\right)u + \lambda_7 v + p^2\right)\partial_v,\\
&p_t^2 = p_{xx}^2 - \lambda_3 p^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)\left(\lambda_8 \exp(-\lambda_3 t) + \tfrac{\lambda_7\lambda_4}{\lambda_3}\right) - \lambda_2\lambda_4 + \lambda_6\lambda_7,\\
&\lambda_2 \neq 0,\ \ \lambda_3 \neq 0,\ \ \lambda_7 \neq 0.
\end{aligned}$$

$$
\begin{gathered}
u_{xx} = u^m u_t + \lambda_1 - \lambda_2 u^m,\\
v_{xx} = v_t + \lambda_3 u + \lambda_4 \exp(\tfrac{\lambda_6}{\lambda_2} u) + \lambda_5,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
Q = \partial_t + \lambda_2 \partial_u + ((\lambda_3\lambda_6 t + \lambda_7)u + \lambda_6 v + p^2)\partial_v,\\
p_t^2 = p_{xx}^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3\lambda_6 t + \lambda_7) - \lambda_2\lambda_3 + \lambda_5\lambda_6,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_6 \neq 0.
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
u_{xx} = u^m u_t + (\lambda_1 + \lambda_2(m+1))u - \lambda_2 u^{m+1},\\
v_{xx} = v_t + \lambda_1 v + \lambda_3 u^{m+1} - \lambda_3(m+1)u + \lambda_4,
\end{gathered}
\tag{10}
$$

$$
\begin{gathered}
Q = \partial_t + \tfrac{\lambda_2}{1-\lambda_5\exp(-m\lambda_2 t)} u\partial_u +\\
+\left(\tfrac{\lambda_3(\lambda_2(m+1)+\lambda_6(\lambda_5\exp(-m\lambda_2 t)-1))}{\lambda_2\lambda_5\exp(-m\lambda_2 t)} u + \lambda_6 v + p^2\right)\partial_v,
\end{gathered}
\tag{11}
$$

де

$$
p_t^2 = p_{xx}^2 - \lambda_1 p^2 + \lambda_4\lambda_6,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_5 \neq 0. \tag{12}
$$

$$
\begin{gathered}
u_{xx} = u^m u_t + (\lambda_1 + \lambda_2(m+1))u - \lambda_2 u^{m+1},\\
v_{xx} = v_t + \lambda_1 v + \lambda_3 u^{m+1} - \lambda_3(m+1)u + \lambda_4 \ln u + \lambda_5,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
Q = \partial_t + \tfrac{\lambda_2}{1-\lambda_6\exp(-m\lambda_2 t)} u\partial_u + \left(\tfrac{\lambda_3(m+1)\exp(m\lambda_2 t)}{\lambda_6} u + p^2\right)\partial_v,\\
p_t^2 = p_{xx}^2 - \lambda_1 p^2 + \tfrac{\lambda_2\lambda_4}{1-\lambda_6\exp(-m\lambda_2 t)},\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_6 \neq 0.
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
u_{xx} = u^m u_t + (u+\alpha)(\lambda_1 - \lambda_2 u^m),\\
v_{xx} = v_t + (\lambda_1 - \lambda_2)v + \lambda_3(u+\alpha)^\beta + \lambda_4(u+\alpha) + \lambda_5,
\end{gathered}
\tag{13}
$$

$$
Q = \partial_t + \lambda_2(u+\alpha)\partial_u + ((\lambda_2\lambda_4(\beta-1)t + \lambda_6)u + \lambda_2\beta v + p^2)\partial_v, \tag{14}
$$

де

$$
\begin{gathered}
p_t^2 = p_{xx}^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)p^2 + \lambda_2\beta\lambda_5 + \alpha(\lambda_2\lambda_4(\beta-1)+\\
+(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2\lambda_4(\beta-1)t + \lambda_6)),\ \lambda_2 \neq 0,\ \beta \neq 1,\ 0.
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + (u+\alpha)(\lambda_1 - \lambda_2 u^m),\\
&v_{xx} = v_t + \lambda_3 v + \lambda_4 (u+\alpha)^{\lambda_5} + \lambda_6 (u+\alpha) + \lambda_7,\\
&Q = \partial_t + \lambda_2 (u+\alpha)\partial_u + \left(\left(\lambda_8 \exp((\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)t) - \tfrac{\lambda_2\lambda_6(\lambda_5 - 1)}{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}\right) u + \right.\\
&\qquad \left. + \lambda_2 \lambda_5 v + p^2\right)\partial_v,\\
&p_t^2 = p_{xx}^2 - \lambda_3 p^2 + \lambda_2\lambda_5\lambda_7 + \alpha\Bigg((\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_8 \exp((\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)t) -\\
&\qquad - \tfrac{\lambda_2\lambda_3\lambda_6(\lambda_5 - 1)}{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}\Bigg),\ \lambda_3 \neq \lambda_1 - \lambda_2,\ \lambda_5 \neq 0,\ 1,\ \lambda_2 \neq 0\ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + (u+\alpha)(\lambda_1 - \lambda_2 u^m),\\
&v_{xx} = v_t + \lambda_3 v + \lambda_4 (u+\alpha)\ln(u+\alpha) + \lambda_5 (u+\alpha) + \lambda_6,\\
&Q = \partial_t + \lambda_2 (u+\alpha)\partial_u + \Bigg(\left(\lambda_7 \exp((\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)t) + \tfrac{\lambda_2\lambda_4}{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}\right) u +\\
&\qquad + \lambda_2 v + p^2\Bigg)\partial_v,\\
&p_t^2 = p_{xx}^2 - \lambda_3 p^2 + \alpha(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_7 \exp((\lambda_1 - \lambda_3 - \lambda_2)t) +\\
&\qquad + \tfrac{\alpha\lambda_2\lambda_3\lambda_4}{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3} - \lambda_2\lambda_6,\ \lambda_3 \neq \lambda_1 - \lambda_2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + (u+\alpha)(\lambda_1 - \lambda_2 u^m),\\
&v_{xx} = v_t + (\lambda_1 - \lambda_2) v + \lambda_3 (u+\alpha)\ln(u+\alpha) + \lambda_4 (u+\alpha) + \lambda_5,\\
&Q = \partial_t + \lambda_2 (u+\alpha)\partial_u + ((-\lambda_2\lambda_3 t + \lambda_6) u + \lambda_2 v + p^2)\partial_v,\\
&p_t^2 = p_{xx}^2 - (\lambda_1 - \lambda_2) p^2 + \alpha(\lambda_1 - \lambda_2)(-\lambda_2\lambda_3 t + \lambda_6) - \lambda_2(\alpha\lambda_3 - \lambda_5).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + (u+\alpha)(\lambda_1 - \lambda_2 u^m),\\
&v_{xx} = v_t + (\lambda_1 - \lambda_2) v + \lambda_3 \ln(u+\alpha) + \lambda_4 (u+\alpha) + \lambda_5,\\
&Q = \partial_t + \lambda_2 (u+\alpha)\partial_u + ((-\lambda_2\lambda_4 t + \lambda_6) u + p^2)\partial_v,\\
&p_t^2 = p_{xx}^2 - (\lambda_1 - \lambda_2) p^2 + \alpha(\lambda_1 - \lambda_2)(-\lambda_2\lambda_4 t + \lambda_6) - \lambda_2(\alpha\lambda_4 + \lambda_3).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + (u+\alpha)(\lambda_1 - \lambda_2 u^m),\\
&v_{xx} = v_t + \lambda_3 v + \lambda_4 \ln(u+\alpha) + \lambda_5 (u+\alpha) + \lambda_6,\\
&Q = \partial_t + \lambda_2 (u+\alpha)\partial_u +\\
&\qquad + \left(\left(\lambda_7 \exp((\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)t) + \tfrac{\lambda_2\lambda_5}{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}\right) u + p^2\right)\partial_v,\\
&p_t^2 = p_{xx}^2 - \lambda_3 p^2 + \alpha(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_7 \exp((\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)t) +\\
&\qquad + \lambda_2\left(\tfrac{\alpha\lambda_3\lambda_5}{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3} - \lambda_4\right),\ \lambda_3 \neq \lambda_1 - \lambda_2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t - \lambda_1 u^{m+1} - \lambda_2 u^m - \lambda_3 u^m v + \lambda_3 v + \lambda_4 u + \lambda_5,\\
&v_{xx} = v_t + (\lambda_4 - \lambda_1)v + \lambda_6,\\
&Q = \partial_t + (\lambda_3 v + \lambda_1 u + \lambda_2)\partial_u + (\lambda_7 u + \lambda_8 v + p^2)\partial_v,\\
&p^2_t = p^2_{xx} - (\lambda_4 - \lambda_1)p^2 + \lambda_7(\lambda_5 - \lambda_2) + \lambda_6\lambda_8,\\
&\lambda_3 \neq 0,\ \lambda_6 = \tfrac{\lambda_2\lambda_4 - \lambda_1\lambda_5}{\lambda_3}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + \tfrac{\lambda_1}{2} v^2 - \lambda_1 v u^m - \lambda_2 u^m + \lambda_3 u + \lambda_4,\\
&v_{xx} = v v_t + \lambda_3(v + \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}),\\
&Q = \partial_t + (\lambda_1 v + \lambda_2)\partial_u + p^2\partial_v,\\
&p^2_{xx} - (p^2)^2 - \lambda_3 p^2 = 0,\ p^2_t = 0,\ \lambda_1 \neq 0.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Оскільки при розв'язуванні системи (7) нелінійності системи (5) і відповідні оператори (6) отримуємо в термінах $u,\ v$, то нам необхідно ще зробити заміну (4), для того щоб отримати системи вигляду (2) і відповідні оператори (3) у термінах $U,\ V$. Зробимо цю заміну для деяких найбільш цікавих систем.

3. Анзаци та точні розв'язки. В цьому пункті побудуємо анзаци, запишемо редуковані рівняння, а інколи і точні розв'язки для деяких наведених вище операторів.

Розглянемо систему рівнянь (8) і відповідний оператор (9). Застосовуючи оператор (9), отримуємо анзац

$$
\begin{aligned}
&u = \varphi(x),\\
&v = -\lambda_2\varphi(x) + \exp(\lambda_4 t)\left(\psi(x) + \int p^2 \exp(-\lambda_4 t)dt\right).
\end{aligned} \tag{16}
$$

Підставивши анзац (16) у рівняння (8) одержимо редуковані рівняння

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{xx} = f(\varphi),\\
&\psi_{xx} = (\lambda_1 + \lambda_4)\psi.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Далі, розв'яжемо систему (17) при $f(\varphi) = \alpha\varphi$.

В залежності від значення сталої α отримуємо три типи розв'язків першого рівняння системи (17)

$$
\alpha = 0,\ \varphi = A_1 x + A_2, \tag{18}
$$

$$\alpha > 0,\ \varphi = A_1 \exp(\sqrt{\alpha}x) + A_2 \exp(-\sqrt{\alpha}x), \tag{19}$$

$$\alpha < 0,\ \varphi = A_1 \cos(\sqrt{-\alpha}x) + A_2 \sin(\sqrt{-\alpha}x), \tag{20}$$

тут і нижче $A_i = \mathrm{const},\ i = 1, 2, 3, 4$. В залежності від значення виразу $\lambda_1 + \lambda_4$, отримуємо три типи розв'язків другого рівняння системи (17):

$$\lambda_4 = -\lambda_1,\ \psi = A_3 x + A_4, \tag{21}$$

$$\lambda_4 + \lambda_1 > 0,\ \psi = A_3 \exp(\sqrt{\lambda_1 + \lambda_4}x) + A_4 \exp(-\sqrt{\lambda_1 + \lambda_4}x), \tag{22}$$

$$\lambda_4 + \lambda_1 < 0,\ \psi = A_1 \cos(\sqrt{-(\lambda_1 + \lambda_4)}x) + A_2 \sin(\sqrt{-(\lambda_1 + \lambda_4)}x). \tag{23}$$

Підставляючи попарно вирази (18)–(20), (21)–(23) в (16), отримуємо 9 різних розв'язків системи (8).

Розглянемо систему рівнянь (10) і відповідний оператор (11). Використовуючи оператор (11), одержуємо анзац

$$\begin{aligned} &u = \varphi(x)(\exp(m\lambda_2 t) - \lambda_5)^{\frac{1}{m}},\\ &v = \lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_5^{-1}\varphi(x)(\exp(m\lambda_2 t) - \lambda_5)^{\frac{1}{m}+1} +\\ &\qquad + \exp(\lambda_6 t)\left(\psi(x) + \int p^2 \exp(-\lambda_6 t)dt\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Підставивши анзац (24) у рівняння (10), отримуємо редуковані рівняння

$$\begin{aligned} &\varphi_{xx} = \lambda_2\lambda_5\varphi^{m+1} + (\lambda_1 + \lambda_2(m+1))\varphi,\\ &\psi_{xx} = (\lambda_1 + \lambda_6)\psi. \end{aligned} \tag{25}$$

Розв'язками другого рівняння системи (25) є вирази (21)–(23) з $\lambda_4 = \lambda_6$. Частковий розв'язок першого рівняння системи (25) отримано за допомогою пакета програм Mathematica 5.0

$$\begin{aligned} &\varphi = \left(-\frac{(m+2)(\lambda_1+\lambda_2(m+1))}{\lambda_2\lambda_5(1+\cosh(m\sqrt{\lambda_1+\lambda_2(m+1)}(x+A_3))}\right)^{\frac{1}{m}},\\ &m \neq -2,\ \lambda_1 \neq -\lambda_2(m+1). \end{aligned} \tag{26}$$

Отже, розв'язками системи (10) будуть вирази (24) з урахуванням (26) та (21)–(23) з $\lambda_4 = \lambda_6$.

Розглянемо систему (10) при $m = -\frac{1}{2},\ \lambda_4 = 0,\ \lambda_2 = 2\lambda_1$. Зробимо заміну (4), одержимо

$$\begin{aligned} &U_t = (UU_x)_x + \lambda_1 U(1-U),\\ &V_t = V_{xx} - \lambda_1 V - \lambda_3 U(1-\tfrac{1}{2}U). \end{aligned} \tag{27}$$

Перше рівняння системи — це добре відоме пористе рівняння Фішера [6,16,17], а друге — це класичне рівняння дифузії для компоненти V з нелінійністю, яка моделює взаємодію з компонентою U за так званим логістичним законом. Розв'язком системи (27) будуть вирази

$$\begin{aligned} &U = \tfrac{4}{3}\lambda_5 \cosh^2\left(\sqrt{\tfrac{\lambda_1}{8}}(x+A_3)\right)(\exp(-\lambda_1 t)-\lambda_5)^{-1},\\ &V = \tfrac{16}{9}\lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_5 \cosh^4\left(\sqrt{\tfrac{\lambda_1}{8}}(x+A_3)\right)(\exp(-\lambda_1 t)-\lambda_5)^{-1}+\\ &\qquad +\exp(\lambda_6 t)\left(\psi(x)+\textstyle\int p^2\exp(-\lambda_6 t)dt\right), \end{aligned} \tag{28}$$

де $\psi(x)$ визначається формулами (21)–(23) з $\lambda_4 = \lambda_6$, а p^2 є розв'язком рівняння (12).

Розглянемо систему (13) і відповідний оператор (14). Отримуємо анзац

$$\begin{aligned} &u = \varphi(x)\exp(\lambda_2 t) - \alpha,\\ &v = \psi(x)\exp(\lambda_2\beta t) - \exp(\lambda_2 t)\varphi(x)\left(\lambda_4 t + \tfrac{\lambda_4+\lambda_6}{\lambda_2(\beta-1)}\right) + \tfrac{\alpha\lambda_4(\beta-1)}{\beta}t+\\ &\qquad + \tfrac{\alpha(\lambda_4(\beta-1)+\beta\lambda_6)}{\lambda_2\beta^2} + \exp(\lambda_2\beta t)\textstyle\int p^2\exp(-\lambda_2\beta t)dt. \end{aligned} \tag{29}$$

Далі отримуємо редуковані рівняння

$$\begin{aligned} &\varphi_{xx} = \lambda_1\varphi,\\ &\psi_{xx} = (\lambda_1 + \lambda_2(\beta-1))\psi + \lambda_3\varphi^\beta. \end{aligned} \tag{30}$$

Розв'язками першого рівняння системи (30) будуть вирази (18)–(20) з $\alpha = \lambda_1$. Друге рівняння в загальному вигляді розв'язків не має, але його можна розв'язати при істотних обмеженнях на коефіцієнти, наприклад при $\lambda_1 = 0,\ \beta = 2,\ \lambda_2 > 0$.

Зауваження. Всі отримані вище анзаци мають ту особливість, що вони містять інтегральні члени вигляду $\int p^2\exp(-\lambda t)dt$, які є наслідком того, що відповідний оператор Q-умовної симетрії містить довільний розв'язок $p^2(t,x)$ лінійного рівняння дифузії.

4. Висновки. В цій роботі побудовано систему визначальних рівнянь для знаходження операторів Q-умовної симетрії вигляду (6) для систем (5). Отриману систему вдалося розв'язати поки що частково. Знайдені оператори використано для побудови анзаців, за допомогою яких побудовано редуковані системи звичайних диференціальних рівнянь. Для системи рівнянь реакції-дифузії (10), яка, на наш погляд, є цікавою для застосувань, побудовано точний розв'язок (28). В наступних роботах ми наведемо розв'язки для деяких інших нелінійних систем реакції-дифузії, які допускають оператори Q-умовної симетрії, та проаналізуємо їхні властивості.

Автор вдячний Р.М. Чернізі за постановку задачі та за допомогу в роботі над статтею.

[1] Bluman G., Cole I. The general similarity solution of the heat equation // J. Math. Mech. – 1969. – **18**. – P. 1025–42.

[2] Fushchych W., Shtelen W., Serov M. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer, 1993.

[3] Cherniha R., King J. Lie Symmetries of Nonlinear Multidimensional Reaction-Diffusion Systems: I //J. Phys. A: Math. Gen. –2000. – **33**. – P. 267–282, 7839–7841.

[4] Cherniha R., King J. Lie Symmetries of Nonlinear Multidimensional Reaction-Diffusion Systems: II // J. Phys. A: Math. Gen. – 2003. – **36**. – P. 405–425.

[5] Nikitin A. G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. II. Generalized Turing systems // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – **332**, № 1. – P. 666–690.

[6] Cherniha R., King J. Non-linear reaction–diffusion systems with variable diffusivities: Lie symmetries, ansätze and exact solutions //J. Math. Anal. Appl. – 2005. – **308**. – P. 11–35.

[7] Баранник Т. Симетрія і точні розв'язки нелінійних рівнянь дифузії: Автореф. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 2006. – 20 с.

[8] Серов Н. Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения теплопроводности // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**. – С. 1370–76.

[9] Clarkson P., Mansfield E. Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations // Physica D. – 1993. – **70**. – P. 250–288.

[10] Arrigo J., Hill M. Nonclassical symmetries for nonlinear diffusion and absorption // Stud. Appl. Math. – 1995. – **94**. – P. 21–39.

[11] Cherniha R. New Q-conditional Symmetries and Exact Solutions of Some Reaction-Diffusion-Convection Equations Arising in Mathematical Biology // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – **326**. – P. 783–799.

[12] Черніга Р., Плюхін О. Нові Q-умовні симетрії та розв'язки рівнянь типу реакції-дифузії-конвекції зі степеневими нелінійностями // Симетрія і інтегровність рівнянь математичної фізики (до 70-річчя від дня народження Вільгельма Ілліча Фущича): Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 2. – С. 316–330.

[13] Cherniha R., Pliukhin O. New conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction-difusion-convection equations. I // math-ph/0612078. – 2006.

[14] Cherniha R., Pliukhin O. New conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction-difusion-convection equations. II // 0706.0814 [math-ph]. – 2007.

[15] Cherniha R., Serov M. Nonlinear systems of the Burgers-type equations: Lie and Q-conditional symmetries, Ansatze and solutions // J. Math. Anal. Appl. – 2003. – **282**. – P. 305–328.

[16] Murray J. Mathematical Biology. – Berlin: Springer, 1989. – 750 p.

[17] Witelski T. Merging traveling waves for the porous-Fisher's equation // Applied Mathematics Letters. – 1995. – **8**, № 4. – P. 57–62.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2007, т.4, N 3, 172–182

519.7

Quasi-continuous Approximation of Statistical Systems with Strong Superstable Interactions

A. L. Rebenko [†]***, M.V. Tertychnyi*** [‡]

[†] *Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv*
E-mail: rebenko@imath.kiev.ua, rebenko@voliacable.com

[‡] *Faculty of physics,*
Kyiv Shevchenko university, Ukraine
E-mail: mt4@ukr.net

Введено поняття *квазінеперервної* системи, яка апроксимує певним чином неперервну систему класичного точкового газу, молекули якого взаємодіють за допомогою парного посилено надстійкого потенціалу взаємодії. В термодинамічній границі тиск апроксимованої системи збігається до тиску початкової системи, якщо параметр апроксимації $\lambda \to 0$.

A concept of quasicontinuous systems which approximate precisely somehow real continuous system of the classical point gas interacting by means of pair strongly superstable potential is defined. In the thermodynamic limit the pressure of the approximated system is close to value of pressure of initial system and coincides with it in the limit of approximation parameter $\lambda \to 0$.

1. Introduction. It is known, that the successes achieved in research of continuous systems of statistical mechanics are much more modest than similar researches in the description of lattice systems. The rigorous results obtained for continuous systems are full enough presented in the works by R.A.Minlos [8], D. Ruelle [16], N.N. Bogoliubov, D.Ya. Petrina, B.I. Khatzet [9] (see also [11]) and others. Actually they cover area of the diluted gases, that is systems with small value of density ρ (or fugasity z) or systems at high temperature (small $\beta = 1/kT$), for example high density plasma (see [2], [12]).

In the region of low temperatures and high densities where there are the most interesting physical phenomena such as phase transitions a rigorous results actually almost are absent. Exception are some exotic models which only conditionally can be considered as the models describing continuous systems of the classical statistical mechanics (see e.g. [15], [4]). The progress in the description of the critical phenomena in lattice models is well-known. Methods of research of lattice systems have been successfully applied to lattice gases which can be considered as some rough approximation of continuous systems describing a state of real gas.

In the present work we define a concept of quasicontinuous systems which in our opinion can approximate precisely somehow real continuous system of the classical point gas interacting by means of pair strongly superstable potential. Such quasicontinuous system is defined by means of partition of the Euclidean space $\mathbb{R}^d$in the nonintersected d-cubes with a rib λ. The grand partition function of the approximated system is defined in such a way that it includes only configurations for which in one cube is no more than one particle. For such thermodynamic function as pressure, we show that in a thermodynamic limit the pressure of the approximated system is close to value of pressure of initial system and coincides with it in the limit $\lambda \to 0$. The value of the chosen approximation depends only on the interaction potential and can be done for any positive parameters of system β, z.

2. Definitions and main result.

2.1. Configuration space. Let $\mathbb{R}^d$ be a d-dimensional Euclidean space. The set of positions $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ of identical particles is considered to be a locally finite subset in $\mathbb{R}^d$ and the set of all such subsets creates the configuration space:

$$\Gamma = \Gamma_{\mathbb{R}^d} := \left\{ \gamma \subset \mathbb{R}^d \middle| \ |\gamma \cap \Lambda| < \infty, \text{ for all } \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d) \right\},$$

where $|A|$ denotes the cardinality of the set A and $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ denote the systems of all bounded Borel sets in $\mathbb{R}^d$. We also need to define the space of finite configurations Γ_0:

$$\Gamma_0 = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}_0} \Gamma^{(n)}, \quad \Gamma^{(n)} := \{\eta \subset \mathbb{R}^d \mid |\eta| = n\}, \quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

For every $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ one can define a mapping $N_\Lambda : \Gamma \to \mathbb{N}_0$ of the form

$$N_\Lambda(\eta) := |\eta \cap \Lambda|.$$

The Borel σ-algebra $\mathfrak{B}(\Gamma)$ is equal to $\sigma(N_\Lambda \,\big|\Lambda \in \mathfrak{B}_c(\mathbb{R}^d))$ and additionally one may introduce the following filtration

$$\mathfrak{B}_\Lambda(\Gamma) := \sigma(N_{\Lambda'} \,\big|\Lambda' \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d),\ \Lambda' \subset \Lambda),$$

see [5], [6] for details.

By $\mathfrak{B}(\Gamma_\Lambda)$ we denote the corresponding σ-algebras on Γ_Λ and $\Gamma_{0,\Lambda}$. For a given intensity measure $\sigma = zdx$ $(z > 0)$ on $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ and any $n \in \mathbb{N}$ the product measure $\sigma^{\otimes n}$ can be considered as a measure on

$$\widetilde{(\mathbb{R}^d)^n} = \big\{ (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^d)^n \big|\ x_k \neq x_l \text{ if } k \neq l \big\}$$

and hence as a measure $\sigma^{(n)}$ on $\Gamma^{(n)}$ through the map

$$sym_n : \widetilde{(\mathbb{R}^d)^n} \ni (x_1, ..., x_n) \mapsto \{x_1, ..., x_n\} \in \Gamma^{(n)}.$$

For simplicity we will write $(x)_n$ instead of $\{x_1, ..., x_n\} \in \Gamma^{(n)}$.

Define the Lebesgue-Poisson measure λ_σ on $\mathfrak{B}(\Gamma_0)$ by the formula:

$$\lambda_\sigma := \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\sigma^{(n)}. \tag{1}$$

The restriction of λ_σ to $\mathfrak{B}(\Gamma_\Lambda)$ we also denote by λ_σ. For a more detailed structure of the configuration spaces Γ, Γ_0, Γ_Λ see [1].

Define, also, two additional configuration spaces Γ^{dil} — a space of *dilute* configurations and Γ^{den} — a space of *dense* configurations.

Let $\lambda > 0$ be arbitrary. For each $r \in \mathbb{Z}^d$ we define an elementary cube with rib λ and center r

$$\Delta_\lambda(r) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \lambda(r^i - 1/2) \leq x^i < \lambda(r^i + 1/2)\}.$$

We will write Δ instead of $\Delta_\lambda(r)$, if a cube Δ is considered to be arbitrary and there is no reason to emphasize that it is centered at the concrete point $r \in \mathbb{Z}^d$. Let $\overline{\Delta}$ be the partition of $\mathbb{R}^d$ into cubes $\Delta_\lambda(r)$. Without any restriction in general case, we consider only that $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ which is union of cubes $\Delta_\lambda(r)$. Then

$$\Gamma_\Lambda^{dil} := \{\, \gamma \in \Gamma_\Lambda |\ |\gamma_\Delta| = 0 \vee 1 \text{ for all } \Delta \subset \Lambda\} \tag{2}$$

and

$$\Gamma_\Lambda^{den} := \{\, \gamma \in \Gamma_\Lambda |\ |\gamma_\Delta| \geq 2 \text{ for all } \Delta \subset \Lambda\}\,. \tag{3}$$

2.2. Definition of the system. We consider a general type of two-body interaction potential $V_2(x, y) = \phi(|x-y|)$, where $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

The energy of any configuration $\eta \in \Gamma_\Lambda$ is defined by the following formula:

$$U_\phi(\eta) = U(\eta) := \sum_{\{x,y\} \subset \eta} \phi(|x-y|), \quad \eta \in \Gamma_\Lambda \tag{4}$$

where $\{\cdot, \cdot\}$ means sum over all possible different couple of particles from configuration η. For a given $\gamma \in \Gamma_\Lambda$ define the interaction energy between $\eta \in \Gamma_\Lambda$, $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ and $\gamma \in \Gamma_\Lambda$ by

$$W(\eta|\gamma) := \sum_{\substack{x \in \eta \\ y \in \gamma}} \phi(|x-y|). \tag{5}$$

Define some important characteristics of interaction U.

Definitin 2.1. Interaction U is *stable* (**S**), if exists $B \geq 0$ such that

$$U(\eta) \geq -B|\eta|, \quad \text{for all} \quad \eta \in \Gamma_0 \tag{6}$$

Definitin 2.2. Interaction U is *superstable* (**SS**), if exists $A > 0$ and $B \geq 0$ such that

$$U(\eta) \geq \sum_{\Delta \in \overline{\Delta}} (A|\eta_\Delta|^2 - B|\eta_\Delta|), \qquad \text{for all} \quad \eta \in \Gamma_0 \tag{7}$$

Definitin 2.3. Interaction U is *strong superstable* (**SSS**), if exists $A > 0$ and $B \geq 0$ and $p > 2$ such that

$$U(\eta) \geq \sum_{\Delta \in \overline{\Delta}} (A|\eta_\Delta|^p - B|\eta_\Delta|), \qquad \text{for all} \quad \eta \in \Gamma_0 \tag{8}$$

Definitin 2.4. Interaction U is *lower regular* (**LR**) if there exist a decreasing function Ψ on $\mathbb{N}_0$ such that

$$\sum_{r\in\mathbb{Z}^d}\Psi(|x|)\ <\ \infty \tag{9}$$

and interaction energy $W(\eta|\gamma)$ satisfy the following inequality:

$$W(\eta|\gamma)\ \geq\ -\frac{1}{2}\sum_{r,s\in\mathbb{Z}^d}\Psi(|r-s|)(|\eta_{\Delta_\lambda(r)}|^2+|\gamma_{\Delta_\lambda(s)}|^2) \tag{10}$$

for all $\eta,\gamma\in\Gamma_0$.

Conditions (6)–(10) are rather general and guarantee uniform estimate for the family of finite volume correlation functions and the existence of Gibbs measure [3] (see, also, [11]). The separating problem is to establish condition on the potential ϕ, which ensure (6)–(10). In the article [14] a large class of interaction potentials were described which satisfy **SS** and SSS conditions See, also, [11], [7] for the discussion of this problem.

Consider decomposition of the potential $\phi(|x|)$ into two parts:

$$\phi(|x|)=\phi^+(|x|)-\phi^-(|x|), \tag{11}$$

where $\phi^+(|x|):=\max\{0,\phi(|x|)\}$, $\phi^-(|x|):=-\min\{0,\phi(|x|)\}$.

Using (11), for any fixed $\Delta_0\subset\mathbb{R}^d$ define values:

$$\upsilon_0(\lambda,\Delta_0):=\sum_{\Delta\in\overline{\Delta}}\sup_{x\in\Delta}\sup_{y\in\Delta_0}\phi^-(|x-y|), \tag{12}$$

and

$$b(\lambda,\Delta_0):=\inf_{\{x,y\}\subset\Delta}\phi^+(|x-y|) \tag{13}$$

It's clear from the definition that υ_0 and b do not depend on the position of Δ_0. So we will write

$$\upsilon_0(\lambda,\Delta_0)\ =\ \upsilon_0(\lambda)\ =\ \upsilon_0,$$
$$b(\lambda,\Delta_0)\ =\ b(\lambda)\ =\ b.$$

It is clear that for **LR** potentials

$$\upsilon_0<+\infty$$

Remark 2.1 In this article we consider **SSS** and **LR** potentials and one can choose the values $A = 1/2b \sim 1/\lambda^p(p > d)$, and $B = \upsilon_0 \sim 1/\lambda^d$ (see for details [10] and [14])

2.3. Partition functions and corresponding pressure. A very important thermodynamic characteristic of statistical system is pressure. In the framework of the grand canonical ensemble it is defined by the following formula:

$$p(z,\beta) \;=\; \lim_{|\Lambda|\to\infty} p_\Lambda(z,\beta) \;=\; \frac{1}{\beta}\lim_{|\Lambda|\to\infty}\frac{1}{|\Lambda|}\log Z_\Lambda, \tag{14}$$

where

$$Z_\Lambda = \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)}\lambda_\sigma(d\gamma). \tag{15}$$

An existence of this limit for the system which we consider is well-known result. To define above mentioned approximation let us introduce the following partition function (see (3)):

$$\begin{aligned} Z_\Lambda^{(-)} \;&=\; Z_\Lambda^{(-)}(\lambda) \;=\; \int_{\Gamma_\Lambda^{(dil)}} e^{-\beta U(\gamma)}\lambda_\sigma(d\gamma) \;= \\ &= \int_{\Gamma_\Lambda} \prod_{\Delta\in\overline{\Delta}\cap\Lambda} \chi_-^\Delta(\gamma) e^{-\beta U(\gamma)}\lambda_\sigma(d\gamma), \end{aligned} \tag{16}$$

where

$$\chi_-^\Delta(\gamma) \;=\begin{cases} 1, & \text{for } \gamma \text{ with } |\gamma_\Delta| = 0 \vee 1, \\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{17}$$

The corresponding pressure is defined as

$$p^{(-)}(z,\beta;\lambda) \;=\; \lim_{|\Lambda|\to\infty} p_\Lambda^{(-)}(z,\beta;\lambda) \;:=\; \frac{1}{\beta}\lim_{|\Lambda|\to\infty}\frac{1}{|\Lambda|}\log Z_\Lambda^{(-)}. \tag{18}$$

Now we can formulate the main result of the work.

2.4. Main results.

Theorem 2.1. *Suppose that the interaction potential $\phi(|x|)$ is strong superstable and lower regular in the sense of def. 2.3 and def. 2.4. Then for any $\varepsilon > 0$ there exists $\lambda = \lambda(z,\varepsilon) > 0$ s.th.*

$$|p(z,\beta) - p^{(-)}(z,\beta;\lambda)| < \varepsilon \tag{19}$$

for all positive z, β.

Corollary 2.1. *The inequality (20) ensures an existence limit*

$$\lim_{\lambda \to 0} p^{(-)}(z, \beta; \lambda) = p(z, \beta)$$

for all positive z, β.

Remark 2.2. A similar result is true for family of correlation functions, but the proof of this result will be published later. Here we only write down the Kirkwood-Salsburg equations for the family $\rho := \{\rho^{(-)}(\eta; \lambda)\}_{\eta \in \Gamma_0}$ of the corresponding correlation functions:

$$\rho \;=\; zK^{(-)}\rho + \delta,$$

where the operator $K^{(-)}$ is defined in a Banach space E_ξ in the following way:

$$\left(K^{(-)}f\right)(\eta) = e^{-\beta W(\eta_{\Delta_0}; \eta \setminus \eta_{\Delta_0})} \sum_{\emptyset \subseteq X \subset \overline{\Delta}} \times$$
$$\times \int_{\Gamma_X^{(dil)}} \prod_{\Delta \in \overline{\Delta} \cap X} \left(e^{-\beta W(\eta_{\Delta_0}; \gamma_\Delta)} - 1\right) f(\eta \setminus \eta_{\Delta_0} \cup \gamma) \lambda_\sigma(d\gamma).$$

In the case $|\eta| = 1$ the first term (at $X = \emptyset$) is zero and in the case $|\eta| > 1$ the first term (at $X = \emptyset$) is $f(\eta \setminus \eta_{\Delta_0})$. The vector $\delta = \{\delta(\eta)\}_{\eta \in \Gamma_0}$ and

$$\delta(\eta) \;=\; \begin{cases} z, & \text{for } \eta \text{ with } |\eta| = 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Note, also, that in our case

$$W(\eta_{\Delta_0}; \gamma_\Delta) = \phi(|x - y|), x \in \Delta_0, y \in \Delta,$$

and $\eta_{\Delta_0} = \{x_0\}$ some chosen point of a configuration η.

3. The proof of Theorem 2.1. The proof is based on the expansion which was proposed in [13]. To arrange this expansion define also an indicator of the dense configuration in any cube $\Delta \in \overline{\Delta}$ as

$$\chi_+^\Delta(\gamma) \;=\; 1 - \chi_-^\Delta(\gamma).$$

Then we use the following partition of the unity for any $\gamma \in \Gamma_\Lambda$:

$$\begin{aligned}1 &= \prod_{\Delta\subset\Lambda}\left[\chi_-^{\Delta}(\gamma)+\chi_+^{\Delta}(\gamma)\right] = \\ &= \sum_{n=0}^{N_\Lambda}\sum_{\{\Delta_1,\dots,\Delta_n\}\subset\Lambda}\prod_{i=1}^{n}\chi_+^{\Delta_i}(\gamma)\prod_{\Delta\subset\Lambda\setminus\cup_{i=1}^{n}\Delta_i}\chi_-^{\Delta}(\gamma) = \\ &= \sum_{\emptyset\subseteq X_+\subseteq\Lambda}\widetilde{\chi}_+^{X_+}(\gamma)\widetilde{\chi}_-^{X_-}(\gamma), \quad X_-=\Lambda\setminus X_+,\end{aligned} \tag{20}$$

where $N_\Lambda = |\Lambda|/\lambda^d$ (here the symbol $|\cdot|$ means Lebesgue measure of the set) is the number of cubes Δ in the volume Λ, X_+ is a union of cubes Δ for which $|\gamma_\Delta|\geq 2$ and

$$\widetilde{\chi}_\pm^{X_\pm}(\gamma) = \prod_{\Delta\subset X_\pm}\chi_\pm^{\Delta}(\gamma). \tag{21}$$

Inserting (21) into (16) we get

$$Z_\Lambda = \sum_{\emptyset\subseteq X_+\subseteq\Lambda}\int_{\Gamma_\Lambda}\widetilde{\chi}_+^{X_+}(\gamma)\widetilde{\chi}_-^{X_-}(\gamma)e^{-\beta U(\gamma)}\lambda_\sigma(d\gamma). \tag{22}$$

It is easy to see that the first term in (23) (at $X_+=\emptyset$) coincides with $Z_\Lambda^{(-)}(\lambda)$ (see (17)). Using infinite devisable property of the Lebesgue-Poisson measure (see, for example, (2.5) in [13]) we have

$$Z_\Lambda = Z_\Lambda^{(-)}(\lambda)\left[1+\sum_{\emptyset\nsubseteq X_+\subseteq\Lambda}\int_{\Gamma_{X_+}}\rho_{X_-}^{(-)}(\gamma;\lambda)\lambda_\sigma(d\gamma)\right] := Z_\Lambda^{(-)}(\lambda)Z_\Lambda^{(+)}(\lambda), \tag{23}$$

where

$$\rho_{X_-}^{(-)}(\gamma_{X_+};\lambda) = \frac{e^{-\beta U(\gamma_{X_+})}}{Z_\Lambda^{(-)}(\lambda)}\int_{\Gamma_{X_-}}\widetilde{\chi}_-^{X_-}(\gamma')e^{-\beta U(\gamma_{X_+}|\gamma')}\lambda_\sigma(d\gamma'),$$

where $U(\gamma_{X_+}\mid\gamma') := W(\gamma_{X_+};\gamma')+U(\gamma')$. So, using the definitions (15) and (19), one can write

$$p_\Lambda(z,\beta) = p_\Lambda^{(-)}(z,\beta;\lambda)+p_\Lambda^{(+)}(z,\beta;\lambda).$$

An existence of thermodynamic limit of all pressure $p_\Lambda(z,\beta)$, $p_\Lambda^{(-)}(z,\beta;\lambda)$, and $p_\Lambda^{(+)}(z,\beta;\lambda)$ for the considered potentials is obvious. So, to prove the theorem we have to estimate the value of $p^{(+)}(z,\beta;\lambda)$. First of all, using **SSS** assumption (8), we can write that

$$e^{-\beta U(\gamma_{X_+})} \leq \prod_{\Delta\in\overline{\Delta}\cap X_+} e^{-\beta A|\gamma_\Delta|^p+B|\gamma_\Delta|}, \tag{24}$$

and taking account **LR**assumption and (5) we have

$$e^{-\beta W(\gamma_{X_+};\gamma'_{X_-})} \leq \prod_{\Delta\in\overline{\Delta}\cap X_+} e^{\beta v_0|\gamma_\Delta|}. \tag{25}$$

From (25)and (26) it is easy to get the following inequality

$$\int_{\Gamma_{X_+}} \rho_{X_-}^{(-)}(\gamma;\lambda)\lambda_\sigma(d\gamma) \leq$$

$$\leq \prod_{\Delta\in\overline{\Delta}\cap X_+} \int_{\Gamma_\Delta} e^{-\beta A|\gamma_\Delta|^p+B|\gamma_\Delta|+v_0|\gamma_\Delta|}\chi_+^\Delta(\gamma_\Delta)\lambda_\sigma(d\gamma_\Delta)\frac{Z_{X_-}^{(-)}}{Z_\Lambda^{(-)}}.$$

From the definition of the measure λ_σ (see (1)) and taking account Remark 2.1. the integral

$$\int_{\Gamma_\Delta} \lambda_\sigma(d\gamma_\Delta)\, e^{-\beta\, A\,|\gamma_\Delta|^p+\beta\,(B+v_0\,|\gamma_\Delta|)} \leq$$

$$\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda^d\, z)^n}{n!}\, e^{-\frac{1}{4}\beta\, b\, n^p+2\beta\, v_0\, n} \leq \epsilon(\lambda),$$

with

$$\epsilon(\lambda) = \frac{1}{2}\, z^2\lambda^{2d}\, e^{-\beta\,(1/4b-2v_0)} \exp\left\{z\lambda^d\, e^{-\beta\,(3/4b-2v_0)}\right\}. \tag{26}$$

Now from the definition of N_Λ, $Z_\Lambda^{(+)}$ (see (24)) and above estimates we have:

$$\log Z_\Lambda^{(+)} \leq \log\left[1+\sum_{\emptyset\not\subseteq X_+\subseteq\Lambda} \epsilon(\lambda)^{N_{X_+}}\right] =$$

$$= \log\left[1 + \sum_{k=1}^{N_\Lambda} \frac{N_\Lambda!}{k!(N_\Lambda - k)!}\epsilon(\lambda)^k\right] =$$

$$= \log\left[1 + \epsilon(\lambda)\right]^{N_\Lambda} = \frac{|\Lambda|}{\lambda^d}\log\left[1 + \epsilon(\lambda)\right].$$

As a result

$$p_+(z, \beta; \lambda) \leq \frac{1}{\beta\lambda^d}\log\left[1 + \epsilon(\lambda)\right].$$

So, due to $\epsilon(\lambda) \sim \lambda^{2d}$ (see (27))

$$\lim_{\lambda\to 0} p^{(+)}(z, \beta; \lambda) = 0.$$

The end of the proof.

[1] Albeverio S., Kondratiev Yu. G., and Röckner M. Analysis and geometry on configuration spaces // J. Funct. Anal. – 1998. – **154(2)**. – P. 444–500.

[2] Brydges D. C. and Federbush P. Debye screening in dilute classical Coulomb systems // Comm. Math. Phys. – 1980. – **73**. – P. 197–246.

[3] Kutoviy O. V., Rebenko A. L. Existence of Gibbs state for continuous gas with many-body interection // J. Math. Phys. – 2004. – **45(4)**. – P. 1593–1605.

[4] Lebowitz J. L., Mazel A., and Presutti E. Liquid-Vapor Phase Transition for Systems with Finite-Range Interactions // J. Stat. Phys. – 1999. – **94**. 5/6. – P. 955–1025.

[5] Lenard A. States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles. I // Arch. Rational Mech. Anal. – 1975. – **59**. – P. 219–239.

[6] Lenard A. States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles. II // Arch. Rational Mech. Anal. – 1975. – **59**. –P 241–256.

[7] Lewis J.T., Pule J.V., and de SmedtP. The Superstability of Pair-Potentials of Positive Type // J. Stat. Phys. – 1984. – **35**. – P 381–385.

[8] Минлос Р.А. Предельное распределение Гиббса // Функ. анал. и его приложения. – 1967. – **2**. – P. 60–73.

[9] Боголюбов Н.Н., Петрина Д.Я., Хацет Б.И. Математическое описание равновесного состояния классических систем на основе формализма канонического ансамбля // Теорет. и мат. физика. – 1969. – **1**. – P. 251–274.

[10] Petrenko S. N., Rebenko A. L. Superstable criterion and superstable bounds for infinite range interaction I: two-body potentials // Meth. Funct. Anal. and Topology. – 2007. – **13**. – P. 50–61.

[11] Petrina D. Ya.,Gerasimenko V. I., Malishev P. V. Mathematical foundation of classical statistical mechanics. Continuous Systems // Gordon and Breach Science, New York–London–Paris. – 1989. (рос. мовою – Київ: Наукова Думка, – 1985).

[12] Rebenko A. L. Mathematical Foundation of Equilibrium Classical Statistical Mechanics of Charged Particles // Russian Mathematical surveys. – 1988. – **43**, № 3. – P. 55–97.

[13] Rebenko A. L. New Proof of Ruelle's Superstability Bounds // J. Stat. Phys. – 1998. – **91**. – P. 815–826.

[14] Rebenko A. L., Tertychnyi M.V. On the Superstability and Strong Superstability of 2-Body Interaction Potentials // (*to be published*).

[15] Ruelle D. Existence of a Phase Transition in a Continuous Classical System // Phys. Rev. Lett. – 1971. – **27**, № 16. – P. 1040–1041.

[16] Ruelle D. Statistical Mechanics (Rigorous results) // Amsterdam: W.A. Benjamin, inc. N.Y, 1969.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2007, т.4, N 3, 183–200

517.9+531.19

Існування функціоналів середніх значень спостережуваних [1]

Т.В. Рябуха

Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: vyrtum@imath.kiev.ua

Для нескінченних систем частинок досліджено існування фунціоналів середніх значень спостережуваних у випадку еволюції станів, які описуються розв'язками ланцюжка рівнянь Боголюбова, та у випадку еволюції спростережуваних, які описуються розв'язками дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова.

The existence of the functionals of average values of observables was investigated for infinite particle systems in the case of evolution of states described by the solutions of the chain of Bogolyubov equations and in the case of evolution of observables described by the solutions of the dual chain of Bogolyubov equations.

1. Вступ. Як відомо, існує два способи опису еволюції багаточастинкових систем. Один з них — еволюція станів [1,2], яка описується розв'язками ланцюжка рівнянь Боголюбова для початкових даних з певного функціонального простору, наприклад, якому належать рівноважні стани. Інший спосіб — евалюція спостережуваних [2, 3], яка описується розв'язками дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова.

У першому випадку розв'язок задачі Коші для ланцюжка рівнянь Боголюбова одновимірних систем частинок з короткодіючим потенціалом побудовано Д.Я. Петриною в роботі [4] для початкових даних з простору послідовностей обмежених по конфігураційних змінних і

[1]Ця робота частково підтримана грантом Президента України № CP/F13/0097, грантом Міністерства освіти України № M/124 (UA 04/2007) та Науковою програмою НАН України № 0107U002333.

експоненціально спадних по імпульсних змінних функцій, в якій було сформульовано метод області взаємодії, що дозволив побудувати розв'язок на скінченному проміжку часу [5,6]. Метод області взаємодії [4–6] досі залишається єдиним методом побудови оцінок для дослідження збіжності розкладів, якими зображуються розв'язки рівнянь Боголюбова для нескінченних систем частинок [1]. Зауважимо, що для системи пружних куль подібні оцінки можна побудувати безпосередньо для ряду ітерацій цих рівнянь [7].

Для ланцюжка рівнянь Боголюбова та дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова в роботі [8] на основі нерівноважних кластерних розкладів побудовано кумулянтні зображення для розв'язків початкових задач таких рівнянь. Враховуючи структуру кумулянтного зображення та застосовуючи метод області взаємодії, в роботі [9] доведено існування регуляризованого зображення розв'язку початкової задачі для ланцюжка рівнянь Боголюбова для нескінченної одновимірної системи.

У даній роботі досліджуються існування функціоналів, якими визначаються середні значення спростережуваних систем нескінченного числа частинок. Основна проблема, яка при цьому виникає, — існування розбіжних інтегралів по конфігураційних змінних у таких функціоналах. Регуляризовані зображення для розв'язків дозволяють розв'язати цю проблему на основі методу області взаємодії.

У другому пункті наведено поняття функціоналів для середніх значень спостережуваних та сформульовано постановку задачі. У наступному пункті доведено існування функціоналів середніх значень спостережуваних для станів системи, які є регуляризованими розв'язками початкової задачі для ланцюжка рівнянь Боголюбова. Для початкової задачі для дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова в четвертому пункті побудовано регуляризований розв'язок у просторі послідовностей неперервних функцій. Для цього розв'язку в останньому пункті на основі методу області взаємодії доведено існування функціоналу для середніх значень квазіспостережуваних.

2. Середні значення спостережуваних. Розглянемо одновимірну систему тотожних частинок (довжиною σ та одиничної маси $m = 1$), що взаємодіють через короткодіючий парний потенціал з твердою серцевиною Φ, для якого виконуються такі умови:

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \Phi \in C^2([\sigma, R]), \quad 0 < \sigma < R < \infty,\\
&b) \quad \Phi(|q|) = \begin{cases} +\infty, & |q| \in [0, \sigma),\\ 0, & |q| \in (R, \infty),\end{cases}\\
&c) \quad \Phi'(\sigma + 0) = 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де R – радіус дії сил між частинками. Кожній i-ій частинці відповідають фазові координати $(q_i, p_i) \equiv x_i \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $i \geq 1$: q_i — положення центру i-ї частинки, p_i — її імпульс.

Для конфігурацій такої системи виконуються такі умови: $|q_i - q_j| \geq \sigma$, $i \neq j \geq 1$, тобто множина $W_n \equiv \big\{\{q_1, \ldots, q_n\} \in \mathbb{R}^n \mid \exists (i,j), i \neq j \in \{1, \ldots, n\} : |q_i - q_j| < \sigma\big\}$ — область заборонених конфігурацій у конфігураційному просторі системи $n \geq 2$ частинок.

Фазові траєкторії системи [1] з потенціалом взаємодії (1) визначені не для всіх початкових даних $\{x_1, \ldots, x_n\} \in (\mathbb{R}^n \setminus W_n) \times \mathbb{R}^n$, а майже скрізь на фазовому просторі $(\mathbb{R}^n \setminus W_n) \times \mathbb{R}^n$, тобто поза певною множиною $\mathcal{M}_n^0$ нульової Лебегової міри (множині $\mathcal{M}_n^0$ належать початкові дані $\{x_1, \ldots, x_n\} \in (\mathbb{R}^n \setminus W_n) \times \mathbb{R}^n$, для яких: а) в момент $t \in (-\infty, +\infty)$ в системі відбуваються потрійні й більшої кратності зіткнення частинок, б) за скінченний проміжок часу відбувається нескінченне число зіткнень [1, 7]).

Введемо простір C_γ послідовностей $g = \big(g_0, g_1(x_1), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_n), \ldots\big)$ обмежених (неперервних) функцій $g_n(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 0$ (g_0 — число), визначених на фазовому просторі $(\mathbb{R}^n \setminus W_n) \times \mathbb{R}^n$, симетричних (відносно перестановок аргументів x_i, $i = 1, \ldots, n$) і рівних нулю на множині W_n, з нормою

$$
\|g\|_{C\gamma} = \sup_{n \geq 0} \frac{\gamma^n}{n!} \sup_{x_1, \ldots, x_n} |g_n(x_1, \ldots, x_n)|, \tag{2}
$$

де γ, $0 < \gamma < 1$, — число. Через $C_{\gamma,0} \subset C_\gamma$ будемо позначати підпростір фінітних послідовностей неперервно диференційовних функцій з компактними носіями по конфігураційних змінних. Послідовність функцій $g \in C_{\gamma,0}$ інтерпретується як послідовність квазіспостережуваних (аналог локальних спостережуваних [1, 10]).

Нехай $L^\infty_{\xi,\beta}$ — простір послідовностей $f = \big(1, f_1(x_1), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n), \ldots\big)$ функцій $f_n(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 0$, які визначені на фазовому просторі $(\mathbb{R}^n \setminus W_n) \times \mathbb{R}^n$, симетричні (відносно перестановок аргументів x_i, $i = 1, \ldots, n$) та дорівнюють нулю в області заборонених конфігурацій W_n, з нормою

$$||f||_{L^\infty_{\xi,\beta}} = \sup_{n\geq 0} \xi^{-n} \sup_{x_1,\ldots,x_n} |f_n(x_1,\ldots,x_n)| \exp\left\{\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i^2}{2}\right\}, \tag{3}$$

де $\xi, \beta > 0$ — числа. Послідовностями з простору $L^\infty_{\xi,\beta}$ описують стани нескінченних систем [1, 4].

Величина середнього значення (математичного сподівання) в початковий момент $t = 0$ спостережуваної $G(0) = (G_0, G_1(0, x_1), \ldots$ $\ldots, G_s(0, x_1, \ldots, x_s), \ldots)$ системи частинок, яка знаходиться в стані $F(0) = \big(1, F_1(0, x_1), \ldots, F_s(0, x_1, \ldots, x_s), \ldots\big)$, визначається таким функціоналом [1, 3]:

$$\begin{aligned}\langle G\rangle(0) &= \langle G(0)|F(0)\rangle = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\int\limits_{(\mathbb{R}^s\setminus W_s)\times\mathbb{R}^s} dx_1\ldots dx_s\, G_s(0,x_1,\ldots,x_s)\, F_s(0,x_1,\ldots,x_s).\end{aligned} \tag{4}$$

Якщо $F(0) \in L^\infty_{\xi,\beta}$ та $G(0) \in C_{\gamma,0}$, функціонал (4) існує за умови, що

$$\xi < \frac{\gamma}{C}\sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}, \tag{5}$$

де $C = \max_{i=1,\ldots,s}|l_i(0)|$, а $|l_i(0)|$ — довжина інтервалу $l_i(0)$, $i = 1, \ldots, s$, з компакту $\Omega_s(0) = l_1(0) \times \ldots \times l_s(0)$, на якому зосереджено функцію $G_s(0)$.

Дійсно, якщо $F(0) \in L^\infty_{\xi,\beta}$ та $G(0) \in C_{\gamma,0}$, для функціоналу (4) отримуємо таку оцінку

$$|\langle G(0)|F(0)\rangle| \leq ||G(0)||_{C_\gamma}\, ||F(0)||_{L^\infty_{\xi,\beta}} \sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{C\,\xi}{\gamma}\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}\right)^s, \tag{6}$$

тобто функціонал (4) існує за умови (5).

Зауважимо, що для спостережуваної адитивного типу $G^{(1)}(0) =$ $= \big(0, a_1(0, x_1), 0, \ldots, 0, \ldots\big)$ формула (4) набуває вигляду

$$\langle G^{(1)}\rangle(0) = \langle G^{(1)}(0)|F(0)\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} dx_1\, a_1(0,x_1)\, F_1(0,x_1), \tag{7}$$

і, якщо $F(0) \in L^{\infty}_{\xi,\beta}$ та $G(0) \in C_{\gamma,0}$, функціонал (7) існує для довільних значень параметра ξ, оскільки

$$|\langle G^{(1)}(0)|F(0)\rangle| \leq ||G^{(1)}(0)||_{C_\gamma}\, ||F(0)||_{L^{\infty}_{\xi,\beta}} \frac{C\xi}{\gamma}\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} < \infty.$$

У довільний момент часу $t \in \mathbb{R}^1$ середні значення спостережуваних визначаються або таким функціоналом [1]:

$$\begin{aligned}\langle G\rangle(t) &= \langle G(0)|F(t)\rangle = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \int\limits_{(\mathbb{R}^s\setminus W_s)\times\mathbb{R}^s} dx_1 \dots dx_s\, G_s(0,x_1,\dots,x_s)\, F_s(t,x_1,\dots,x_s),\end{aligned} \tag{8}$$

де $F(t) = \big(1, F_1(t,x_1),\dots,F_s(t,x_1,\dots,x_s),\dots\big)$ — розв'язок задачі Коші для ланцюжка рівнянь Боголюбова [2] з початковими даними $F(0)$, або еквівалентним функціоналом

$$\begin{aligned}\langle G\rangle(t) &= \langle G(t)|F(0)\rangle = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \int\limits_{(\mathbb{R}^s\setminus W_s)\times\mathbb{R}^s} dx_1 \dots dx_s\, G_s(t,x_1,\dots,x_s)\, F_s(0,x_1,\dots,x_s),\end{aligned} \tag{9}$$

де $G(t) = \big(1, G_1(t,x_1),\dots,G_s(t,x_1,\dots,x_s),\dots\big)$ — розв'язок задачі Коші для дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова [2] з початковими даними $G(0)$.

Доведемо існування функціоналів (8) та (9) для початкових даних $F(0) \in L^{\infty}_{\xi,\beta}$ та $G(0) \in C_{\gamma,0}$.

3. Функціонал середніх значень спостережуваних: еволюція станів. Нехай $\{x_1,\dots,x_s\} \equiv Y$, $\{Y, x_{s+1},\dots,x_{s+n}\} \equiv X$, тобто $X \setminus Y = \{x_{s+1},\dots,x_{s+n}\}$, $dx_{s+1}\dots dx_{s+n} \equiv d(X\setminus Y)$, $|X|$ — число елементів множини X, $|X| = |Y| + |X\setminus Y| = s+n$. Через X_Y позначимо множину X, елементами якої є $Y, x_{s+1},\dots,x_{s+n}$, тобто $|X_Y| = |X\setminus Y| + 1 = n+1$.

Введемо еволюційний оператор $S_{|Y|}(t,Y)$, який на множині послідовностей функцій $f \in L^{\infty}_{\xi,\beta}$ визначається такою формулою [1]:

$$S_{|Y|}(t,Y)\,f_{|Y|}(Y) =$$
$$=\begin{cases} f_{|Y|}\big(\mathtt{X}_1(t,Y),\ldots,\mathtt{X}_{|Y|}(t,Y)\big), & Y \in \big((\mathbb{R}^{|Y|}\setminus W_{|Y|})\times\mathbb{R}^{|Y|}\big)\setminus\mathcal{M}^0_{|Y|},\\ 0, & Y\in\big(W_{|Y|}\times\mathbb{R}^{|Y|}\big)\cup\mathcal{M}^0_{|Y|}, \end{cases} \tag{10}$$

де $\mathtt{X}_j(t,Y)$, $j=1,\ldots,|Y|$, — фазова траєкторія [1] системи $|Y|$ частинок з початковими даними $\mathtt{X}_j(0,Y)=x_j$, $S_{|Y|}(0)=I$ — одиничний оператор. При умовах (1) на потенціал Φ взаємодії частинок еволюційний оператор (10) існує для $t\in(-\infty,+\infty)$ [1].

Еволюція станів визначається розв'язком початкової задачі для ланцюжка рівнянь Боголюбова [9] (*регуляризований розв'язок*)

$$F_{|Y|}(t,Y) = \mathfrak{A}_1(t,Y)F_{|Y|}(0,Y)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(\mathbb{R}^n\setminus W_n)\times\mathbb{R}^n} d(X\setminus Y)\sum_{\substack{Z\subset X\setminus Y\\ Z\neq\emptyset}}(-1)^{|X\setminus(Y\cup Z)|}\mathfrak{A}_2(t,Y,Z)\,F_{|X|}(0,X),$$
$$|X\setminus Y|\geq 1, \tag{11}$$

де $\sum\limits_{\substack{Z\subset X\setminus Y\\ Z\neq\emptyset}}$ — сума за всіма непорожніми підмножинами Z множини $X\setminus Y$, еволюційний оператор $\mathfrak{A}_1(t,Y)$ — кумулянт 1-го порядку еволюційних операторів (10):

$$\mathfrak{A}_1(t,Y) = S_{|Y|}(-t,Y), \tag{12}$$

еволюційний оператор $\mathfrak{A}_2(t,Y,Z)$ — кумулянт 2-го порядку:

$$\mathfrak{A}_2(t,Y,Z) = S_{|Y\cup Z|}(-t,Y,Z) - S_{|Y|}(-t,Y)S_{|Z|}(-t,Z). \tag{13}$$

Якщо потенціал взаємодії Φ задовольняє умови (1), справедливою є нерівність

$$\Big|\sum_{i<j=1}^{n}\Phi(q_i-q_j)\Big|\leq bn, \tag{14}$$

де $b\equiv\sup\limits_{q\in[\sigma,R]}\big|\Phi(q)\big|\big(\big[\frac{R}{\sigma}\big]\big)$, а $\big[\frac{R}{\sigma}\big]$ — ціла частина числа $\frac{R}{\sigma}$, і справджується таке твердження.

Твердження 1. *Якщо* $F(0) \in L^{\infty}_{\xi,\beta}$, $G(0) \in C_{\gamma,0}$, *то за умов*

$$\xi < \min\biggl(\frac{\gamma}{C}; \frac{2}{(2\tilde{C}_1+1)^2-1}\biggr)\mathrm{e}^{-2\beta b-1}\sqrt{\frac{\beta''}{2\pi}} \tag{15}$$

та

$$0 \le t < t_0 \equiv \frac{1}{2\tilde{C}_2}\Biggl(-2\tilde{C}_1 - 1 + \sqrt{1+\frac{2\mathrm{e}^{-2\beta b-1}}{\xi}\sqrt{\frac{\beta''}{2\pi}}}\Biggr), \tag{16}$$

функціонал (8) для середніх значень спостережуваних існує й справджується така оцінка

$$|\langle G(0)|F(t)\rangle| \le 2e^{C}||F(0)||_{L^{\infty}_{\xi,\beta}}||G(0)||_{C_\gamma}\sum_{s=0}^{\infty}\biggl(\frac{C\xi\mathrm{e}^{2\beta b+1}}{\gamma}\sqrt{\frac{2\pi}{\beta''}}\biggr)^{s}\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\biggl(2\xi\mathrm{e}^{2\beta b+1}(\tilde{C}_1+\tilde{C}_2 t)(1+\tilde{C}_1+\tilde{C}_2 t)\sqrt{\frac{2\pi}{\beta''}}\biggr)^{n}, \tag{17}$$

де $C = \max_{i=1,\dots,s}|l_i(0)|$, $\tilde{C}_1 = \max(2R,1)$, $\tilde{C}_2 = \max\bigl(2(4b+1), \frac{2}{\beta'}\bigr)$ *та* $\beta = \beta' + \beta''$.

Дійсно, нехай $G(0) \in C_{\gamma,0}$, $F(0) \in L^{\infty}_{\xi,\beta}$, а послідовність $F(t)$ у функціоналі (8) покомпонентно визначається розкладами (11). В n-му члені ряду (11) підінтегральний вираз дорівнює нулю, якщо за проміжок часу $[0,t)$ частинки з множини $X \setminus Y$, тобто $(s+1,\dots$ $\dots, s+n)$-ті частинки, не взаємодіють з частинками з множини Y, конфігурації якої в початковий момент належать компакту $\Omega_s(0)$ (множині, на якій зосереджено спостережувану $G_s(0)$). Тоді для довільної підмножини $Z \subset X \setminus Y$ має місце така рівність:

$$\mathfrak{A}_2(t,Y,Z)F_{|X|}(0,X) = 0.$$

Тому область інтегрування по конфігураційних змінних, в якій підінтегральні функції в розкладах (11) відмінні від нуля, — це область взаємодії $\Omega_{|X\setminus Y|}(t)$ частинок з множини $X \setminus Y$ з частинками з множини Y за проміжок часу $[0,t)$. Така область має скінченний об'єм $V_{\Omega_{|X\setminus Y|}}(t)$, для якого справедливою є оцінка [9]

$$V_{\Omega_{|X\setminus Y|}}(t) \le \Bigl(C + (C_1+C_2 t)(s+n) + t\sum_{i=1}^{s+n}p_i^2\Bigr)^{n}, \tag{18}$$

де $C = \max_{i=1,\dots,s}|l_i(0)|$, $C_1 \equiv 2R$, $C_2 \equiv 2(4b+1)$ та b визначено умовою (14).

У першому члені функціоналу (8) підінтегральна функція зосереджена на компакті конфігураційних змінних, оскільки $G(0) \in C_{\gamma,0}$. У решті доданків враховується оцінка (18) на об'єм області взаємодії. Внаслідок цього для функціоналу $\langle G(0)|F(t)\rangle$ (8) середніх значень спостережуваних справджується нерівність

$$\begin{aligned}
&|\langle G(0)|F(t)\rangle| \leq 2||F(0)||_{L^\infty_{\xi,\beta}}\,||G(0)||_{C_\gamma}\times\\
&\times\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(\xi \mathrm{e}^{2\beta b})^s}{\gamma^s}\int\limits_{\Omega_{|Y|}(0)\times\mathbb{R}^s} dY\,\exp\Big\{-\beta\sum_{i=1}^{s}\frac{p_i^2}{2}\Big\}\times\\
&\qquad\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\xi \mathrm{e}^{2\beta b})^n}{n!}\int\limits_{\Omega_{|X\setminus Y|}(t)\times\mathbb{R}^n} d(X\setminus Y)\,\exp\Big\{-\beta\sum_{i=s+1}^{s+n}\frac{p_i^2}{2}\Big\},
\end{aligned}\tag{19}$$

де враховано оцінку

$$\begin{aligned}
&\Big(\mathfrak{A}_1(t,Y)+\sum_{\substack{Z\subset X\setminus Y\\ Z\neq\varnothing}}\mathfrak{A}_2(t,Y,Z)\Big)\exp\Big\{-\beta\sum_{i=1}^{s+n}\frac{p_i^2}{2}\Big\}\leq\\
&\qquad\qquad\leq 2^{|X\setminus Y|}\mathrm{e}^{2\beta b|X|}\exp\Big\{-\beta\sum_{i=1}^{s+n}\frac{p_i^2}{2}\Big\},
\end{aligned}\tag{20}$$

яка є наслідком інваріантності гамільтоніана n-частинкової системи відносно дії еволюційного оператора $S_n(-t)$ (10), області взаємодії та умов на потенціал (14).

Вираз для оцінки (18) зобразимо в такій формі:

$$\begin{aligned}
&\Big(C+(C_1+C_2t)s+t\sum_{i=1}^{s}p_i^2+(C_1+C_2t)n+t\sum_{i=s+1}^{s+n}p_i^2\Big)^n=\\
&=\sum_{k=0}^{n}n!\sum_{l=0}^{k}\frac{C^l}{l!}\sum_{m=0}^{k-l}\frac{s^m}{m!}(C_1+C_2t)^m\frac{t^{k-l-m}}{(k-l-m)!}\Big(\sum_{i=1}^{s}p_i^2\Big)^{k-l-m}\times\\
&\qquad\times\sum_{r=0}^{n-k}\frac{n^r}{r!}(C_1+C_2t)^r\frac{t^{n-k-r}}{(n-k-r)!}\Big(\sum_{i=s+1}^{s+n}p_i^2\Big)^{n-k-r}.
\end{aligned}\tag{21}$$

Після інтегрування по конфігураційних змінних у кожному члені ряду в правій частині нерівності (19), враховуючи рівність (21) та нерівність

$$\left(\sum_{i=1}^{s} p_i^2\right)^{k-l-m} \exp\Big\{-\beta' \sum_{i=1}^{s} \frac{p_i^2}{2}\Big\} \leq (k-l-m)! \left(\frac{2}{\beta'}\right)^{k-l-m}, \quad (22)$$

обчислимо інтеграли по імпульсних змінних. У результаті отримаємо

$$|\langle G(0)|F(t)\rangle| \leq 2||F(0)||_{L^{\infty}_{\xi,\beta}} ||G(0)||_{C_\gamma} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{C\xi \mathrm{e}^{2\beta b}}{\gamma}\right)^s \left(\frac{2\pi}{\beta''}\right)^{\frac{s}{2}} \times$$
$$\times \sum_{n=0}^{\infty} (2\xi \mathrm{e}^{2\beta b})^n \left(\frac{2\pi}{\beta''}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} \frac{C^l}{l!} \sum_{m=0}^{k-l} \frac{s^m}{m!} (C_1 + C_2 t)^m \left(\frac{2t}{\beta'}\right)^{k-l-m} \times$$
$$\times \sum_{r=0}^{n-k} \frac{n^r}{r!} (C_1 + C_2 t)^r \left(\frac{2t}{\beta'}\right)^{n-k-r}, \quad (23)$$

де $\beta = \beta' + \beta''$.

Покладемо $\tilde{C}_1 = \max(C_1, 1)$, $\tilde{C}_2 = \max\big(C_2, \frac{2}{\beta'}\big)$. Тоді для довільного $t > 0$ мають місце такі нерівності:

$$\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t \geq 1 \quad \text{та} \quad (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t) \frac{\beta'}{2t} \geq 1,$$

а тому

$$(C_1 + C_2 t)^r \left(\frac{2t}{\beta'}\right)^{n-k-r} \leq (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t)^n. \quad (24)$$

Далі, приймаючи до уваги, що

$$\sum_{l=0}^{k} \frac{C^l}{l!} \leq \mathrm{e}^C, \ \sum_{m=0}^{k-l} \frac{s^m}{m!} \leq \mathrm{e}^s, \ \sum_{r=0}^{n-k} \frac{n^r}{r!} \leq \mathrm{e}^n \quad (25)$$

та

$$\sum_{k=0}^{n} (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t)^k \leq (1 + \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t)^n,$$

оцінку (23) можемо записати у вигляді (17).

З нерівності (17) випливає: якщо ξ задовольняє умову (15), то розклад (8) збігається за умови (16).

Для спостережуваної адитивного типу $G^{(1)}(0) = \big(0, a_1(0,x_1), 0, \ldots, 0, \ldots\big)$ функціонал (8) має вигляд

$$\langle G^{(1)}\rangle(t) = \langle G^{(1)}(0)|F(t)\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} dx_1\, a_1(0,x_1)F_1(t,x_1), \tag{26}$$

де $F_1(t,x_1)$ визначається за формулою (11) для $|Y|=1$.

Функціонал (26) існує за умови, що

$$\xi < \frac{2\mathrm{e}^{-2\beta b-1}}{(2\tilde{C}_1+1)^2-1}\sqrt{\frac{\beta''}{2\pi}},$$

при $0 \leq t < t_0$, де t_0 визначено в (16).

4. Регуляризований розв'язок дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова. Нехай $\{x_1,\ldots,x_s\} = Y$, $\{x_{j_1},\ldots,x_{j_{s-n}}\} = Y\setminus X$, $\{j_1,\ldots,j_{s-n}\} \subseteqq \{1,\ldots,s\}$, і отже, $X = \{x_1, \overset{j_1}{\vee}\cdots\overset{j_{s-n}}{\vee}, x_s\}$, де використано позначення $\{x_1,\overset{j_k}{\vee},x_s\} \equiv \{x_1,\ldots,x_{j_{k-1}},x_{j_{k+1}},\ldots,x_s\}$, $0 \leq |X| = n \leq s$. Через $Y_{Y\setminus X}$ будемо позначати множину Y, яка містить підмножину $Y\setminus X$ як елемент, тобто $|Y_{Y\setminus X}| = |X|+1 = n+1$.

Для спостережуваних $G(0) \in C_\gamma$, за умови, що $\gamma < e^{-1}$, розв'язок початкової задачі для дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова зображується формулою [8, 12]

$$G_{|Y|}(t,Y) = \sum_{n=0}^{s}\ \sum_{1=j_1<\ldots<j_{s-n}}^{s} \mathfrak{A}^{+}_{|X|+1}(t,Y_{Y\setminus X})\, G_{|Y\setminus X|}(0,Y\setminus X), \tag{27}$$

де еволюційний оператор $\mathfrak{A}^{+}_{|X|+1}(t,Y_{Y\setminus X})$ — дуальний кумулянт $(|X|+1)$-го порядку еволюційних операторів $S_{|Y|}(t,Y)$ (10), $|Y|\geq 1$. Він визначається такою формулою [8, 12]:

$$\mathfrak{A}^{+}_{|X|+1}(t,Y_{Y\setminus X}) = \sum_{\mathtt{P}:\, Y_{Y\setminus X} = \bigcup_i Y_i} (-1)^{|\mathtt{P}|-1}(|\mathtt{P}|-1)! \prod_{Y_i\subset \mathtt{P}} S_{|Y_i|}(t,Y_i), \tag{28}$$

де $\sum_{\mathtt{P}}$ — сума за всіма можливими розбиттями $\mathtt{P}$ множини $Y_{Y\setminus X}$ на $|\mathtt{P}|$ непорожніх підмножин $Y_i \subset Y_{Y\setminus X}$, що взаємно не перетинаються,

$Y_i \bigcap Y_j = \emptyset$, $i \neq j$, а множина $Y \setminus X$ належить до однієї з підмножин Y_i; $\prod\limits_{Y_i \subset \mathtt{P}}$ — добуток за всіма непорожніми підмножинами Y_i з розбиття $\mathtt{P}$.

Дуальні кумулянти 1-го та 2-го порядку відповідно мають вигляд:

$$\mathfrak{A}_1^{+}(t, Y) = S_{|Y|}(t, Y), \tag{28a}$$

$$\mathfrak{A}_2^{+}(t, Y \setminus x_s, x_s) = S_{|Y|}(t, Y) - S_{|Y|-1}(t, Y \setminus x_s)\, S_1(t, x_s), \tag{28b}$$

де $Y \setminus x_s \equiv \{x_1, \ldots, x_{s-1}\}$.

Лема 1. *Для дуального кумулянта $(n{+}1)$-го порядку $\mathfrak{A}^{+}_{|X|+1}(t, Y_{Y \setminus X})$ (28) справджується рівність*

$$\mathfrak{A}^{+}_{|X|+1}(t, Y_{Y \setminus X}) = \\ = \sum_{\substack{Z \subset X \\ Z \neq \emptyset}} \mathfrak{A}_2^{+}(t, Y \setminus X, Z) \sum_{\mathtt{Q}:\, X \setminus Z = \bigcup_l X_l} (-1)^{|\mathtt{Q}|} |\mathtt{Q}|! \prod_{X_l \subset \mathtt{Q}} \mathfrak{A}_1^{+}(t, X_l), \tag{29}$$

де $\sum\limits_{Z}$ — сума за всіма непорожніми підмножинами Z множини X; множини $Y \setminus X$ та Z — зв'язні частини (групи з $|Y \setminus X|$ та $|Z|$ частинок відповідно) розбиття множини $(Y \setminus X) \cup Z$ на дві підмножини; $\sum\limits_{\mathtt{Q}}$ — сума за всіма можливими розбиттями $\mathtt{Q}$ множини $X \setminus Z$ на $|\mathtt{Q}|$ непорожніх підмножин $X_l \subset X \setminus Z$, які взаємно не перетинаються, $X_k \cap X_l = \emptyset$, $k \neq l$; $\prod\limits_{X_l \subset \mathtt{Q}}$— добуток за всіма непорожніми підмножинами $X_l \subset X \setminus Z$ розбиття $\mathtt{Q}$.

З урахуванням твердження леми 1 розв'язок (27) має вигляд

$$G_{|Y|}(t, Y) = \mathfrak{A}_1^{+}(t, Y)\, G_{|Y|}(0, Y) + \\ + \sum_{n=1}^{s} \sum_{1 = j_1 < \ldots < j_{s-n}}^{s} \sum_{\substack{Z \subset X \\ Z \neq \emptyset}} \mathfrak{A}_2^{+}(t, Y \setminus X, Z) \sum_{\mathtt{Q}:\, X \setminus Z = \bigcup_l X_l} (-1)^{|\mathtt{Q}|} |\mathtt{Q}|! \times \\ \times \prod_{X_l \subset \mathtt{Q}} \mathfrak{A}_1^{+}(t, X_l)\, G_{|Y \setminus X|}(0, Y \setminus X), \quad 1 \leq |X| = n \leq s, \tag{30}$$

де використано позначення до формули (29).

Оскільки в розкладі (30) кумулянти першого порядку $\mathfrak{A}_1^+(t,X_l)$ діють на змінні функції $G_{|Y\setminus X|}(0,Y\setminus X)$, від яких вона не залежить, $X_l\subset X\setminus Z$, $X_l\not\subset Y\setminus X$, то, враховуючи, що

$$\sum_{\mathtt{Q}\colon X\setminus Z=\bigcup\limits_l X_l}(-1)^{|\mathtt{Q}|}|\mathtt{Q}|!=\sum_{k=1}^{|X\setminus Z|}(-1)^k k!\,s(|X\setminus Z|,k),$$

де $s(|X\setminus Z|,k)\equiv s(m,k)$ — числа Стірлінга 2-го роду, для яких має місце рівність

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^k k!\,s(m,k)=(-1)^m,\quad m\geq 1,\tag{31}$$

еквівалентним представленням до розв'язку (30) початкової задачі для дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова буде розклад (*дуальний регуляризований розв'язок*)

$$\begin{aligned}G_{|Y|}(t,Y)&=\mathfrak{A}_1^+(t,Y)\,G_{|Y|}(0,Y)+\\&+\sum_{n=1}^{s}\sum_{1=j_1<\ldots<j_{s-n}}^{s}\sum_{\substack{Z\subset X\\Z\neq\emptyset}}(-1)^{|X\setminus Z|}\mathfrak{A}_2^+(t,Y\setminus X,Z)\,G_{|Y\setminus X|}(0,Y\setminus X),\\&\qquad 1\leq|X|=n\leq|Y|=s,\end{aligned}\tag{32}$$

який у свою чергу еквівалентний розкладу, побудованому в [2, 3].

Лема 2. *Якщо* $G(0)\in C_\gamma$, *то за умови, що* $0<\gamma<1$, *для розкладу (32) справедливою є така оцінка*

$$|G_{|Y|}(t,Y)|\leq 2e^2\|G(0)\|_{C_\gamma}\frac{s!}{\gamma^s}.\tag{33}$$

Доведення. Нехай $G(0)\in C_\gamma$. Згідно з формулами (28a), (28b) та визначенням (10), виконуються такі нерівності:

$$\left|\mathfrak{A}_1^+(t,Y)\,G_{|Y|}(0,Y)\right|\leq\|G(0)\|_{C_\gamma}\frac{|Y|!}{\gamma^{|Y|}},\tag{34}$$

$$\left|\mathfrak{A}_2^+(t,Y\setminus X,Z)\,G_{|Y\setminus X|}(0,Y\setminus X)\right|\leq 2\|G(0)\|_{C_\gamma}\frac{|Y\setminus X|!}{\gamma^{|Y\setminus X|}}.\tag{35}$$

Враховуючи (34) та (35), для розкладу (32) отримуємо оцінку

$$|G_{|Y|}(t,Y)| \leq 2||G(0)||_{C_\gamma} \sum_{n=0}^{s} \sum_{1=j_1<\ldots<j_{s-n}}^{s} 2^n \frac{(s-n)!}{\gamma^{s-n}}. \tag{36}$$

Оскільки $0<\gamma<1$ та $\sum\limits_{1=j_1<\ldots<j_{s-n}}^{s} 1 = \frac{s!}{(s-n)!n!}$, внаслідок нерівності $\sum\limits_{n=0}^{s} \frac{2^n}{n!} \leq e^2$, оцінка (36) набуде вигляду (33).

5. Функціонал середніх значень спостережуваних: еволюція спостережуваних. Якщо парний потенціал взаємодії Φ задовольняє умови (1), для розв'язку початкової задачі для дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова, який визначається розкладом (32), справедливим є таке твердження.

Твердження 2. *Якщо $F(0)\in L^\infty_{\xi,\beta}$ та $G(0)\in C_{\gamma,0}$, то за умови*

$$\xi < \frac{\gamma}{e\,\tilde{C}_1}\sqrt{\frac{\beta''}{2\pi}}, \tag{37}$$

при $0\leq t<t_0$, де $t_0\equiv \frac{1}{\tilde{C}_2}\bigg(-\tilde{C}_1+\frac{\gamma}{e\,\xi}\sqrt{\frac{\beta''}{2\pi}}\bigg)$, функціонал (9) для середніх значень спостережуваних існує, і для нього справджується оцінка

$$\begin{aligned}&\big|\langle G(t)|F(0)\rangle\big| \leq \\ &\leq 2e^{2+C}||F(0)||_{L^\infty_{\xi,\beta}}||G(0)||_{C_\gamma}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\xi^s}{\gamma^s}\left(\frac{2\pi}{\beta''}\right)^{\frac{s}{2}} e^s(\tilde{C}_1+\tilde{C}_2 t)^s,\end{aligned} \tag{38}$$

де $C=\max_{i=j_1,\ldots,j_{s-n}}|l_i(0)|$, а $|l_i(0)|$ — довжина інтервалу $l_i(0)$, з компакту $\Omega_{|Y\setminus X|}(0)=l_{j_1}(0)\times\ldots\times l_{j_{|Y\setminus X|}}(0)$, на якому зосереджено функцію $G_{s-n}(0)$, $\tilde{C}_1=\max(2R,1)$, $\tilde{C}_2=\max\big(2(4b+1),\frac{2}{\beta'}\big)$, $\beta=\beta'+\beta''$, $b\equiv\sup\limits_{q\in[\sigma,R]}\big|\Phi(q)\big|\big(\big[\frac{R}{\sigma}\big]\big)$, а $\big[\frac{R}{\sigma}\big]$ — ціла частина числа $\frac{R}{\sigma}$.

Дійсно, якщо $G_s(t,x_1,\ldots,x_s)$ — розв'язок (32) дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова [8,12], то вираз для функціонала (9) має вигляд

$$
\langle G(t)|F(0)\rangle = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\int\limits_{(\mathbb{R}^s\setminus W_s)\times\mathbb{R}^s} dY\,\Big(\mathfrak{A}_1^{+}(t,Y)\,G_{|Y|}(0,Y)+
$$

$$
+\sum_{n=1}^{s}\sum_{1=j_1<\ldots<j_{s-n}}^{s}\sum_{\substack{Z\subset X\\ Z\neq\emptyset}}(-1)^{|X\setminus Z|}\mathfrak{A}_2^{+}(t,Y\setminus X,Z)\,G_{|Y\setminus X|}(0,Y\setminus X)\Big)\times
$$

$$
\times F_{|Y|}(0,Y),\qquad 1\leq|X|=n\leq|Y|=s. \quad (39)
$$

Для дуальних кумулянтів 2-го порядку (28b) характерна така властивість: якщо за проміжок часу $[0,t)$ частинки з довільної підмножини $Z\subset X$ не взаємодіють з частинками з множини $Y\setminus X = \{x_{j_1},\ldots,x_{j_{s-n}}\}$, то справджується рівність

$$
\mathfrak{A}_2^{+}(t,Y\setminus X,Z)\,G_{|Y\setminus X|}(0,Y\setminus X)=0. \quad (40)
$$

Нехай $F(0)\in L^{\infty}_{\xi,\beta}$ та $G(0)\in C_{\gamma,0}$. Тоді для початкових даних частинок з множини $Y\setminus X$, що належать компакту $\Omega_{|Y\setminus X|}(0) = l_{j_1}(0)\times\ldots\times l_{j_{|Y\setminus X|}}(0)$, на якому зосереджена функція $G_{|Y\setminus X|}(0,Y\setminus X)$, область інтегрування по конфігураційних змінних з множини X в s-му члені ряду (39), в якій підінтегральна функція відмінна від нуля, — область взаємодії $\Omega_{|X|}(t)$ частинок з множини X з частинками з множини $Y\setminus X$ за проміжок часу $[0,t)$ — має скінченний об'єм $V_{\Omega_{|X|}}(t)$, для якого має місце оцінка

$$
V_{\Omega_{|X|}}(t)\leq\Big(C+(C_1+C_2t)s+t\sum_{i=1}^{s}p_i^2\Big)^n, \quad (41)
$$

де $C=\max_{i=j_1,\ldots,j_{s-n}}|l_i(0)|$, $C_1\equiv 2R$, $C_2\equiv 2(4b+1)$ та b визначено умовою (14).

Для функціонала (39) згідно з (41) справедливою є така оцінка

$$
\big|\langle G(t)|F(0)\rangle\big|\leq 2||F(0)||_{L^{\infty}_{\xi,\beta}}\,||G(0)||_{C_\gamma}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\xi^s}{\gamma^s}\times
$$

$$
\times\int\limits_{\mathbb{R}^s}dp_1\ldots dp_s\,\exp\Big\{-\beta\sum_{i=1}^{s}\frac{p_i^2}{2}\Big\}\sum_{n=0}^{s}\frac{2^n}{n!}\times
$$

$$
\times\Big(C+(C_1+C_2t)s+t\sum_{i=1}^{s}p_i^2\Big)^n C^{s-n}. \quad (42)
$$

Приймаючи до уваги лему 2, співвідношення

$$\left(C + (C_1 + C_2 t)s + t\sum_{i=1}^{s} p_i^2\right)^s =$$
$$= \sum_{k=0}^{s} \frac{C^k}{k!} \sum_{r=0}^{s-k} \frac{s^r}{r!}(C_1 + C_2 t)^r \frac{t^{s-k-r}}{(s-k-r)!}\left(\sum_{i=1}^{s} p_i^2\right)^{s-k-r}$$

і нерівність (22), обчислимо інтеграли по імпульсних змінних у виразі (42), маємо

$$\left|\langle G(t)|F(0)\rangle\right| \leq 2e^2 ||F(0)||_{L^\infty_{\xi,\beta}} ||G(0)||_{C_\gamma} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\xi^s}{\gamma^s}\left(\frac{2\pi}{\beta''}\right)^{\frac{s}{2}} \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{s} \frac{C^k}{k!} \sum_{r=0}^{s-k} \frac{s^r}{r!}(C_1 + C_2 t)^r \left(\frac{2t}{\beta'}\right)^{s-k-r}, \quad (43)$$

де $\beta = \beta' + \beta''$.

Враховуючи нерівності (24), (25), з оцінки (43) отримаємо (38).

Отже, з нерівності (38) випливає, що за умови (37) існує функціонал (39) для середніх значень спостережуваних, який відповідає функціоналу (9) у випадку регуляризованого зображення розв'язку початкової задачі для дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова.

Відмітимо, що регуляризований розклад (32) для початкових спостережуваних адитивного типу (7) має вигляд

$$G^{(1)}(t) = (0, G_1^{(1)}(t, x_1), G_2^{(1)}(t, x_1, x_2), \ldots, G_s^{(1)}(t, x_1, \ldots, x_s), \ldots), \quad (44)$$

де

$$G_1^{(1)}(t, x_1) = \mathfrak{A}_1^+(t, x_1) a_1(0, x_1), \quad (44a)$$

$$G_2^{(1)}(t, x_1, x_2) = \mathfrak{A}_2^+(t, x_1, x_2) a_1(0, x_1) + \mathfrak{A}_2^+(t, x_1, x_2) a_1(0, x_2), \quad (44b)$$

$$G_s^{(1)}(t, x_1, \ldots, x_s) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{\substack{Z \subset Y \setminus x_j \\ Z \neq \emptyset}} (-1)^{|Y \setminus Z| - 1} \mathfrak{A}_2^+(t, x_j, Z) a_1(0, x_j),$$
$$s \geq 2. \quad (44c)$$

Якщо $F(0) \in L^\infty_{\xi,\beta}$ та $G^{(1)}(0) \in C_{\gamma,0}$, то для функціоналу

$$\langle G^{(1)}\rangle(t) = \langle G^{(1)}(t)|F(0)\rangle =$$
$$= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \int\limits_{(\mathbb{R}^s \setminus W_s)\times\mathbb{R}^s} dx_1 \ldots dx_s \, G_s^{(1)}(t, x_1, \ldots, x_s) \, F_s(0, x_1, \ldots, x_s), \tag{45}$$

де $G_s^{(1)}(t, x_1, \ldots, x_s)$ визначається за формулою (44c), справедливою є оцінка, подібна до (38), а саме,

$$\Big|\langle G^{(1)}(0)|F(t)\rangle\Big| \leq \frac{C\xi}{\gamma} e^{C+1} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta''}} ||F(0)||_{L^\infty_{\xi,\beta}} ||G^{(1)}(0)||_{C_\gamma} \times$$
$$\times \sum_{s=0}^{\infty} (2e\xi)^s \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\beta''}}\right)^s (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t)^s (1 + \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t)^s. \tag{46}$$

Справді, нехай $F(0) \in L^\infty_{\xi,\beta}$ та $G^{(1)}(0) \in C_{\gamma,0}$, причому $G^{(1)}(0)$ — спостережувана адитивного типу, яка визначається за формулами (44a)–(44c), а функцію $a_1(0, x_i)$, $i = j_1, \ldots, j_{s-1}$, зафіксовано на компакті $\Omega_1(0)$, який є відрізком $l_i(0)$ довжини $|l_i(0)|$. Тоді аналогічно доведенню оцінки (38), отримуємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} dx_1 \, |\mathfrak{A}_1^+(t, x_1) a_1(0, x_1)| \, |F_1(0, x_1)| \leq$$
$$\leq \frac{\xi}{\gamma} \, C(t) ||F(0)||_{L^\infty_{\xi,\beta}} ||G^{(1)}(0)||_{C_\gamma} \tag{47}$$

де $C(t) \equiv |l_1(0)| \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} + \frac{2t}{\beta}$, та

$$\sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{s!} \int\limits_{\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^s} dx_1 \ldots dx_s \sum_{j=1}^{s} \sum_{\substack{Z \subset \{x_1,\ldots,x_s\}\setminus x_j \\ Z \neq \varnothing}} |\mathfrak{A}_2^+(t, x_j, Z) \, a_1(0, x_j)| \times$$
$$\times |F_s(0, x_1, \ldots, x_s)| \leq \frac{C\xi}{\gamma} e^{C+1} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta''}} ||F(0)||_{L^\infty_{\xi,\beta}} ||G^{(1)}(0)||_{C_\gamma} \times$$
$$\times \sum_{s=1}^{\infty} (2e\xi)^s \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\beta''}}\right)^s (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t)^s (1 + \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t)^s, \tag{48}$$

де використано позначення оцінки (43). Згідно з (47) та (48) отримуємо оцінку (46).

Зауважимо, що існування функціоналів для спостережуваної s-кратного типу також розглядалось у роботі [11] для іншого зображення розв'язку дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова, сформульованого в роботах [2, 3].

Відмітимо, що використовуючи такий самий підхід, як при доведенні існування функціоналів середніх значень спостережуваних, можна провести й доведення існування функціоналів для відхилень від середніх значень спостережуваних (наприклад, дисперсії), якими описуються флуктуації в нерівноважних системах.

[1] Cercignani C., Gerasimenko V. I., Petrina D. Ya. Many-particle dynamics and kinetic equations – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. – 1997. – 252 p.

[2] Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В. Математические основы классической статистической механики. – Киев: Наук. думка. – 1985. – 264 с.

[3] Borgioli G., Gerasimenko V. The dual BBGKY hierarchy for the evolution of observables // Riv. Mat. Univ. Parma. – 2001. – **4**, № 6. – P. 251–267.

[4] Петрина Д. Я. Математическое описание эволюции бесконечных систем классической статистической физики. Локально возмущённые одномерные системы // Теорет. и мат. физика. – 1979. – **38**, № 2. – С. 230–250.

[5] Петрина Д. Я., Герасименко В. И. Математическое описание эволюции состояния бесконечных систем классической статистической механики // Успехи мат. наук. – 1983. – **38**, № 5. – С. 3–58.

[6] Petrina D. Ya., Gerasimenko V. I. Evolution of states of infinite systems in classical statistical mechanics // Sov. Sci. Rev., Ser. C: Math. Phys. – 1985. – **5**. – P. 1–52.

[7] Петрина Д. Я., Герасименко В. И. Математические проблемы статистической механики системы упругих шаров // Успехи мат. наук. – 1990. – **45**, № 3. – С. 135–182.

[8] Герасименко В. И., Рябуха Т. В. Кумулянтне зображення розв'язків ланцюжків рівнянь Боголюбова // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 10. – С. 1313–1328.

[9] Ryabukha T. V. On regularized solution for BBGKY hierarchy of one-dimensional infinite system // SIGMA 2. – 2006. – **053**. – 8 p.

[10] Боголюбов М.М. Рівняння гідродинаміки в статистичній механіці // Збірник праць Інституту математики АН УРСР. – 1948. – № 10. – С. 41–59.

[11] Gerasimenko V. I., Kondratiev Yu. U., Kuna T., Petrina D. Ya. Evolution of observables and quasiobservables in classical statistical mechanics // Condensed matter physics. – 2000. – **154**, № 2. – P. 239–264.

[12] Герасименко В. И., Рябуха Т. В. Дуальні нерівноважні кластерні розклади // Доп. НАН України. – 2003. – № 3. – С. 16–22.

[13] Gerasimenko V. I., Ryabukha T. V., Stashenko M. O. On the structure of expansions for the BBGKY Hierarchy Solutions // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004. – **37**, № 42. – P. 9861–9872.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2007, т.4, N 3, 201–231

530.1, 517.9

Когерентизация энергии тепловых флуктуаций двухканальной билинейной системой управления

Ю.И. Самойленко

Інститут математики НАН України, Київ

Ця робота презентує фізично реалізовну математичну модель Лагранжа–Релея–Найквіста відкритої білінійної двоканальної системи керування, яка дозволяє здійснювати часткову когерентизацію енергії однотемпературних теплових флуктуацій та трансформувати її у періодичні зовнішні керуючі поля, збільшуючи їхню загальну енергію, яка має когерентну форму.

This paper proposes a physically realizable Lagrange–Rayleigh–Nyquist mathematical model of open bilinear two-channels control system which can perform partial coherentization of one-temperature heat fluctuations energy and transport it to periodic external controlling fields enlarging their total energy having coherent form.

1. Физическое введение. Общая характеристика проблемы. Прежде, чем рассматривать конкретную модель "когерентизатора" тепловых флуктуаций, полезно некоторое внимание уделить более широкому ви́дению проблемы преобразования тепловой энергии в механическую, понимая последнюю в широком смысле слова [1]. История вопроса восходит к периоду становления термодинамики, творцами которой были С. Карно (1824), Р. Клаузиус (1850), В. Томсон (лорд Кельвин) (1851) и разработчик общей теории тепловых машин шотландец В. Ранкин (1851). В последующих работах (1859, 1864, 1865) Р. Клаузиус вводит понятие энтропии, а В. Томсон приходит к заключению, что применение принципа возрастания энтропии ко вселенной в целом равносильно признанию неизбежности так назывемой тепловой смерти. В качестве второго начала термодинамики Р. Клаузиус выдвигает постулат: "Теплота не может "сама собою" перейти от более холодного тела к более теплому", который дополнил первое начало — постулат сохранения энергии. Однако уже тогда некоторые физики справедливо усматривали, что категоричность второго начала означала бы, вообще говоря, неспособность энергии к обратимым превращениям.

К числу осторожных критиков второго начала относился и Джеймс Максвелл, сделавший огромный вклад не только в электродинамику и статистическую физику, но и в основы теории автоматического регулирования [2]. И не случайно, повидимому, он в одном из разделов своей книги "Теория теплоты" (1871), названном "ограничения второго начала термодинамики", предложил идею автомата, сортирующего молекулы по скоростям и создающего достаточные условия для получения механической энергии из тепловой, как бы вопреки второму началу термодинамики. В знак уважения к Джеймсу Максвеллу В. Томсон предложил называть подобное гипотетическое устройство "демон Максвелла", возможно, признавая отчасти справедливость критического восприятия теории, к разработке которой он имел прямое отношение. (Пример, достойный подражания и в наше время!)

Как вскоре выяснилось, даже в принципе, а не только в силу технических проблем, измерения на микроуровне требуют затрат энергии, имеющих ненулевой нижний предел. Следовательно, затраты на работу коллектива "демонов Максвелла" неизбежно растут, по меньшей мере, пропорционально добываемой при их помощи механической энергии. Насколько нам известно, несмотря на быстрый прогресс в создании генераторов когерентных колебаний в квантовой и молекулярной электронике с применением тепловой, химической или иной некогерентной накачки, до сих пор не удавалось осуществить превышение энергетического выхода над энергозатратами на пути реализации идеи "максвеллова демона" [3]. Тем самым, по существу, признается, что как и в случае квазиравновесных циклических процессов, реализуемых в технической термодинамике, в генераторах когерентных колебаний, использующих неравновесные состояния рабочих сред, к.п.д. преобразования η тепловой энергии в корегентную форму определяется разностью температур нагревателя T_1 и холодильника T_2, отнесенной к температуре нагревателя T_1:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \tag{1}$$

Эта формула, установленная еще в 1824 г. С. Карно [4], продолжает быть основой расчета и для таких искусственно создаваемых неравновесных ансамблей, которые удается разделить на горячие и холодные подансамбли, как, например, это делается в молекулярном генераторе на аммиаке, названном в [5] "демоном Максвелла" XX века. Здесь роль "демона", по мнению автора этой монографии, играет неоднородное электрическое поле, разделяющее пучок молекул аммиака на возбужденную и невозбужденную составляющие. Благодаря относительной простоте подобной схемы, удается получить оценку ее энергетической эффективности и показать, что она не может превысить предел, даваемый формулой (2).

Более обстоятельный анализ термодинамической цены квантового измерения со ссылкой на работу [6] воспроизведен в [3], где также формула (2) рассматривается как ограничение.

Автором представляемого здесь сообщения еще в 1971 г. была предложена идея реализации вычислительной машины на управляемых квантовых переходах, в которой вместо вывода каждой из элементарных операций на макроуровень, сопровождающегося в соответствии с [6] выделением тепла и нежелательными проявлениями квантовой неопределенности Гейзенберга, выводу подлежала только результирующая информация, переводимая практически без потерь на макроуровень [7]. Эта работа и цикл последующих публикаций автора послужили основой для написания совместно с А.Г. Бутковским монографии [8], а также ее переработанного варианта, изданного на английском языке [9] в Нидерландах. В предисловии к ней редактора серии профессора М. Хазевинкеля книга [9] отмечена как первая, посвященная данному весьма актуальному направлению. Этот приоритет неоднократно подтверждают и другие зарубежные авторы. Так, в [10], — сборнике статей по управлению процессами на микроуровне, — это отмечено в предисловии редакторов сборника, и, кроме того, в ряде статей сделаны ссылки на монографию [9].

Рассматривая проблему когерентизации энергии тепловых флуктуаций, восходящую к идее Максвелла, не только как физическую, но и кибернетическую, следует привлекать такой раздел науки об управлении, как теорию синтеза пространственно распределенных и функционально интегрированных билинейных систем. С общей методологией, моделями и методами, в разработке которых принимали участие автор и его коллеги, можно ознакомиться по главам книги [11], относящимся к вопросам синтеза активных управляющих сред с заданными динамическими характеристиками. Решение многих рассмотренных в ней задач основано на асимптотических методах теории колебаний, создание и обоснование которых во многом обязано Н.М. Крылову, Н.Н. Боголюбову, Ю.А. Митропольскому, А.М. Самойленко и другим представителям Киевской школы математиков (см. [12]). С другой стороны, углубленное изучение неравновесных и флуктуационных процесов в многочастичных физических системах, которому посвящены многие работы Н.Н. Боголюбова, Д.Я. Петрины, В.И. Герасименко и их коллег [18], побуждают к поиску еще не в полной мере раскрытых возможностей на пути решения фундаментальных и прикладных проблем энергетики.

Известно несколько, на первый взгляд эквивалентных формулировок второго начала термодинамики [13]:
— тепло не может само собой (т. е. без вмешательства окружения) перейти от системы с меньшей температурой к системе с большей температурой (Р. Клаузиус);
— невозможно получать работу, только охлаждая отдельное тело ниже температуры самой холодной части окружающей среды (В. Кельвин);
— невозможен вечный двигатель второго рода, т. е. периодически работающая машина, которая производила бы подъем груза только за счет охлаждения теплового резервуара (В. Оствальд, М. Планк);
— при реальных процессах энтропия замкнутой системы возрастает (А. Зоммерфельд).

По поводу второго начала Р. Кубо в [1] высказался таким образом: "Кто когда-либо видел, чтобы вода в котелке закипела бы сама собой, забрав тепло от куска льда, на который был поставлен котелок?" И далее:

"Второй закон термодинамики отрицает возможность существования демона Максвелла. Возможно, вам удастся найти демона, который начнет необычайно тонкую работу по разделению молекул, проходящих через отверстие. Но он никогда не сможет продолжать свою работу бесконечно долго. Вскоре он ослепнет, забелеет и прекратит свою деятельность. Тогда вся система, молекулы газа и сам демон снова придут в состояние теплового равновесия, исчезнет разность температур, однажды созданная демоном, а у демона начнется лихорадка с температурой, равной температуре газа. Казалось бы, что живой организм похож на демона Максвелла, но это не так. Живой организм является открытой системой, которая обменивается с внешней средой материей, энергией и энтропией. Но сама жизнь не может нарушить термодинамические законы."

Весьма поучительным является ставший уже хрестоматийным пример об артели обезьян, пытающихся напечатать произведение В. Шекспира "Гамлет". Часто воспроизводимая оценка такова, что 10^{10} обезьян за время существования Вселенной могли бы случайно это сделать (а кто бы смог "выловить"результат?!) лишь с вероятностью $10^{-164316}$ (Ч. Киттель "Статистическая термодинамика"). На это С.П. Капица (ред.) справедливо заметил: "В рассуждении автора упущено то, что за миллион лет эволюции обезьяна может превратиться в человека и потому сможет написать книгу, и не одну!" Именно такого рода процессы игнорируются, когда по вероятности оцениваются только реализации состояний, а не выборки из пространства генерирующих их всевозможных структур.

Менее категорично по этому поводу высказывался Л. Больцман, рассматривая, как и Дж. Максвелл, возможность флуктуаций в реальных системах, но, однако, с тем меньшей вероятностью и частотой, чем они ближе к средним величинам наблюдаемых физических величин.

Сказанное классиками науки по поводу постулата, именуемого вторым началом термодинамики, относится только к замкнутым, квазиравновесным системам. Но реальные системы (и не только космического масштаба) далеко не всегда являются замкнутыми, а для них второе начало указывает лишь общий принцип наиболее эффективного использования квазиравновесных циклических процессов. И то, что пока еще не были реализованы циклические существенно неравновесные процессы с более высоким к. п. д., чем условно определяемым формулой Карно (1), еще не означает их принципиальную невозможность без наличия холодильника в явном виде. На это совершенно справедливо обратил внимание Б.Г. Кузнецов [14]: "Оно (второе начало. – Ю.С.) указывает лишь на те условия, при которых энтропия не может уменьшаться, а соответственно позволяет найти (и создать!) условия, при которых энтропия уменьшается."

Подводя итог обсуждению исторического экскурса и общей характеристики проблемы, вынесенной в заголовок этой статьи, полезно выразить еще и следующее суждение.

Если бы при оценке вероятности убывания энтропии сравнению подлежали бы не только различные начальные состояния одного и того же статистического ансамбля со вполне определенной фиксированной заранее динамикой, но также и различные по динамическим свойствам ансамбли с нетривиальной структурой элементарных подсистем, то с гораздо большей вероятностью встречались бы реализации моделей с преобладающим убыванием энтропии. А если эта гипотеза не ошибочна по существу, то есть смысл осуществить направленный перебор вариантов реализаций, начиная с подсистем малой размерности пространства состояний и простейшей структурой сил внутренних и внешних взаимодействий. Именно этот замысел был положен в основу поисковых исследований, цитируемых и частично воспроизводимых ниже, которые, как оказалось, подтвердили предполагавшуюся возможность.

2. Качественные предпосылки и предварительные результаты. Одним из условий выполнения намеченной программы рассматривается необходимость аналитического конструирования тех функциональных элементов, на которые предполагается возложить операции распознавания состояния подсистем, выработки управляющих воздействий и их фактическое применение в каждой элементарной подсистеме, причем без информирования систем верхнего уровня иерархии, осуществляющих только заранее программированное координирующее воздействие. Решение этой задачи потребовало, в свою очередь, синтеза структуры сил методом программируемых резонансных воздействий и параметрического усиления [15].

Разработанный подход был применен при попытке реализовать тепловую машину циклического действия на резонансных эффектах в связке двух осцилляторов, возбуждаемых флуктуациями Найквиста и имеющих, вообще говоря, различные температуры [16]. Результат оказался в полном соответствии с принципами термодинамики. В частности, если частоты осцилляторов ω_1, ω_2 и температуры их резисторов T_1, T_2 удовлетворяли соотношению $\frac{T_2}{T_1} > \frac{\omega_2}{\omega_1}$, обеспечивающему инверсную заселенность энергетических уровней, то система могла преобразовать часть энергии тепловых флуктуаций в когерентную составляющую управляющих колебаний (накачки). При обратном соотношении температур и частот, когда $\frac{T_2}{T_1} < \frac{\omega_2}{\omega_1}$, оказалось возможным не только нагревать в резисторы обоих осцилляторов, но также и, нагревая более горячий из них, охлаждать более холодный. Попытка получить дополнительную энергию от флуктуаций Найквиста, преобразованную в когерентную форму при равенстве температур $T_1 = T_2$ в рамках модели, исследованной в [16], не удавалось ни при каких ее настройках. Не помогло и применение асимметричной относительно обращения времени пилообразных управляющих колебаний.

Рассмотрение возникающей ситуации с более общих позиций возможно при помощи следующего результата, полученного автором и его коллегами при решении оптимизационной задачи управления квантовым статистическим ансамблем по энергетическому критерию. Его подробное изложение приведено в [11].

Теорема *(об оптимальных перестановках). Пусть группа управляемости G, генерируемая гамильтонианом управляемой системы $\hat{H}(t,u)$, гомоморфна симметрической группе S_n, причем* $\mathrm{Hom}: G \to S_n$ *реализуется действием сопряжения $g^{-1}\hat{\lambda}g = \hat{\pi}(\hat{\lambda})$, $g \in G$, $\hat{\lambda} \in \Lambda(n)$, $\hat{\pi} \in S_n$, где $\Lambda(n)$ — пространство диагональных матриц размерности n. Тогда решение оптимизационной задачи с моментным энергетическим функционалом существует и принадлежит прообразу S_n в G.*

Из теоремы об энергетической оптимальности перестановок в спектре немедленно следует необходимость затрат энергии на любую операцию по управлению состоянием термодинамически равновесного ансамбля, поскольку такой ансамбль характеризуется монотонным убыванием (с учетом вырождения) заселенностей по энергетической шкале. Фактически это утверждение можно рассматривать как одну из эквивалентных математических формулировок, отражающих физический смысл второго начала термодинамики. Теперь становится понятным, почему для рассмотренной в [16] модели тепловой машины только в случае различных температур подансамблей осцилляторов с одноканальным резонансным управлением удается получить положительный энергетический выход. Причина состоит не в том, что было применено управляющее воздействие, симметричное относительно реверса во времени, а в равновесности совокупности двух подансамблей при равенстве их температур ($T_1 = T_2$) и в использовании только одного канала управления в виде модулированной потенциальной связи.

3. Дополнение элементарных подсистем гироскопическими связями. Принципиально иной путь создания неравновесной ситуации в ансамбле подсистем с двумя степенями свободы, имеющими постоянный термический контакт с однотемпературным резервуаром (одно- или двухемкостным) тепловой энергии, был исследован на модельном уровне в работе [17]. Чтобы избежать повторения тупиковой ситуации, когда используется простейшая двухосцилляторная модель подсистемы ансамбля, имеющая только взаимодействие между двумя осциляторами в виде модулированной упругой связи, структура сил была дополнена гироскопической составляющей. Ввиду усложнения процедуры составления необходимых для асимптотического анализа "укороченных" уравнений, на первом этапе модуляция коэффициента гироскопической связи не предусматривалась, а модулировалась только потенциальная энергия взаимодействия в пределах каждой подсистемы. На втором этапе включались уже оба вида модуляции.

Анализ зависимости от параметров настройки усредненной по времени и статистически выходной мощности, предпринятый в [17] с применением формулы Найквиста для случая $T_1 = T_2$, дал такие результаты:

– без модуляции любого из двух каналов положительный суммарный энергетический выход невозможен ни при каких параметрах настройки;

– при синхронной модуляции как потенциальной связи, так и гироскопической (с фазовым опережением $\frac{\pi}{2}$) существует непустая область параметров настройки, при которых сумма усредненных энергетических выходов, получаемых от обоих каналов, имеет положительное значение.

Под усредненными энергетическими выходами подразумеваются средние (по скользящему интервалу "быстрого" времени и статистическому распределению δ-коррелированных флуктуационных сил Найквиста) мощности, развиваемые совместным силовым воздействием флуктуаций (взаимнокоррелированных управляющими колебаниями в пределах каждой элементарной подсистемы) на обобщенных скоростях изменения во времени обобщенных координат модуляторов коэффициентов связей.

Полученные результаты объясняются следующими причинами:

– каждый из каналов управления в отдельности не может генерировать достаточно полную группу управляемости, способную вызывать значительные, учитываемые в ε-приближении отклонения от статистического равновесия однотемпературного ансамбля элементарных подсистем; соответственно и теорема об оптимальных перестановках предопределяет невозможность положительного энергетического выхода;

– некоммутативность операторов управляющих воздействий по гироскопическому и потенциальному каналам позволяет генерировать группу управляемости настолько полную, что она оказывается достаточной для отклонения управляемого ансамбля от равновесия на величину, учитываемую асимптотическим ε-приближением.

Замечание. Хотя в [17] модуляция вводилась не в лагранжиан, а непосредственно в систему уравнений, что не эквивалентно и не корректно с точки зрения физической реализации, это не привело к принципиально ошибочному выводу, однако повлияло на вид результирующих формул. Ниже этот дефект исходной модели устранен.

4. Представление модели в лагранжевой форме. Продолжая исследования, предпринятые в [16] и [7], положим, что предлагаемая модель состоит из большого числа $N \gg 1$ не связанных между собой, но синхронно модулируемых билинейной системой управления структурно идентичных друг другу элементарных подсистем с двумя гироскопически связанными осцилляторными степенями свободы. Энергия теплового возбуждения рабочей среды δ-коррелированными силами Найквиста вводится в каждую из элементарных подсистем через включенные в них резисторы. Используя удобные для анализа обозначения [17], запишем лагранжиан исследуемой элементарной подсистемы в виде

$$L = L_0 + \varepsilon L^{(u)} + \varepsilon L^{(g)} + \varepsilon L^{(f)} \qquad (0 < \varepsilon \ll 1), \tag{2}$$

где

$$L_0 = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}g(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1) - \frac{1}{2}\Big(\mu x_1^2 + \frac{1}{\mu}x_2^2\Big), \tag{3}$$

$$L^{(u)} = -x_0^{(u)} x_1 x_2, \quad L^{(g)} = -\frac{1}{2}x_0^{(g)}(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1), \tag{4}$$

$$x_0^{(u)} = 2k_0 \sin\Omega t, \quad x_0^{(g)} = 2l_0 \cos\Omega t, \tag{5}$$

$$L^{(f)} = f_1 x_1 + f_2 x_2. \tag{6}$$

Здесь x_α, $\dot{x}_\alpha$, f_α $(\alpha = \overline{1,2})$ — обобщенные координаты, скорости и силы соответственно, относящиеся к исследуемой элементарной подсистеме управляемого ансамбля, $x_0^{(u)}$, $x_0^{(g)}$ — обобщенные координаты органов управления (модуляторов), действующих, соответственно, по каналам потенциального и гироскопического взаимодействий.

Параметрически модулирующие управляющие воздействия по этим каналам представлены сдвинутыми на $\frac{\pi}{2}$ простыми гармоническими колебаниями с амплитудами k_0, l_0 и с одной и той же частотой

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{\nu}} - \sqrt{\nu}, \tag{7}$$

равной разности собственных частот $\frac{1}{\sqrt{\nu}}$ и $\sqrt{\nu}$ элементарной подсистемы при наличии гироскопической связи с коэффициентом g. Отношение собственных частот при $g = 0$ обозначено через μ.

Характеристическое уравнение порождающей системы, иначе говоря, системы начального (нулевого по ε) приближения, соответствующей невозмущенному лагранжиану L_0, связывает μ и ν с коэффициентом g соотношением

$$\mu\nu g^2 = (\mu - \nu)(1 - \mu\nu), \tag{8}$$

а также условиями

$$0 < \nu < \mu < 1, \qquad \nu \neq \frac{1}{3}, \tag{9}$$

из которых первое обеспечивает положительность g^2, а второе, что будет понятно далее, — отсутствие некоторых нежелательных параметрических резонансов.

Силы вязкого трения вводятся в модель посредством диссипативной функции Рэлея

$$R = \varepsilon\frac{1}{2}(r_1\dot{x}_1^2 + r_2\dot{x}_2^2). \tag{10}$$

Уравнения Лагранжа, дополненные силами вязкого трения, имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_\alpha} = 0 \quad (\alpha = \overline{1,2}). \tag{11}$$

В развернутой форме они записываются следующим образом:

$$\ddot{x}_1 - g\dot{x}_2 + \mu x_1 + \varepsilon r_1\dot{x}_1 + \varepsilon x_0^{(u)}x_2 - \varepsilon x_0^{(g)}\dot{x}_2 - \varepsilon\frac{1}{2}\dot{x}_0^{(g)}x_2 = \varepsilon f_1,$$

$$\ddot{x}_2 + g\dot{x}_1 + \frac{1}{\mu}x_2 + \varepsilon r_2\dot{x}_2 + \varepsilon x_0^{(u)}x_1 + \varepsilon x_0^{(g)}\dot{x}_1 + \varepsilon\frac{1}{2}\dot{x}_0^{(g)}x_1 = \varepsilon f_2.$$

Более компактная запись этих уравнений достигается применением векторно-матричных обозначений: $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ — вектор обобщенных координат, $\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$ — вектор сторонних сил (сил Найквиста), $\hat{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} 1 & , & 0 \\ 0 & , & 1 \end{bmatrix}$ — единичная матрица, $\hat{\mathrm{J}} = \begin{bmatrix} 0 & , & -1 \\ 1 & , & 0 \end{bmatrix}$ — элементарная симплектическая матрица, $\hat{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} 0 & , & 1 \\ 1 & , & 0 \end{bmatrix}$ — перестановочная матрица,

$$\hat{\mathrm{M}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu} & , & 0 \\ 0 & , & \frac{1}{\sqrt{\mu}} \end{bmatrix} \text{ — матрица собственных частот при } g = 0, \tag{12}$$

$$\hat{\mathrm{N}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\nu} & , & 0 \\ 0 & , & \frac{1}{\sqrt{\nu}} \end{bmatrix} \text{ — матрица собственных частот при } g \neq 0, \tag{13}$$

$$\hat{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} r_1 & , & 0 \\ 0 & , & r_2 \end{bmatrix} \text{ — матрица диссипативных параметров,} \tag{14}$$

$$\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{I}}\frac{d^2}{dt^2} + g\hat{\mathrm{J}}\frac{d}{dt} + \hat{\mathrm{M}}^2 \text{ — матричный оператор порождающей системы,} \tag{15}$$

$$\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{R}}\frac{d}{dt} + x_0^{(u)}\hat{\mathrm{P}} + x_0^{(g)}\hat{\mathrm{J}}\frac{d}{dt} + \frac{1}{2}\dot{x}_0^{(g)}\hat{\mathrm{J}} \text{ — матричный оператор,} \tag{16}$$

выражающий действие диссипативных сил и параметрической модуляции.

Теперь уравнения (11) можно записать так:

$$\hat{\mathrm{A}}\vec{x} + \varepsilon\hat{\mathrm{B}}\vec{x} = \varepsilon\vec{f}. \tag{17}$$

Таким образом, исследуемая модель, формально говоря, представлена линейной неоднородной системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Эта система характеризуется наличием малого параметра ε в правых частях уравнений, силах вязкого трения, а также при периодических коэффициентах и сторонних силах флуктуационно-диссипативной термической природы (силах Найквиста).

Выбором параметров настройки следует распорядиться так, чтобы система сохраняла устойчивость по отношению к раскачке собственных колебаний, но чтобы вынужденные колебания, вызываемые силами Найквиста, приобретали взаимную корреляцию за счет синхронной параметрической модуляции коэффициентов по двум каналам — потенциальному и гироскопическому. Ввиду отсутствия непосредственного взаимодействия между элементарными подсистемами, обменивающимися энергией только с общей системой управления и собственными диссипативными нагретыми элементами, генерирующими флуктуационные силы Найквиста, энергетический баланс достаточно определить для любой из этих эквивалентных подсистем.

Если система управления предполагается открытой системой в физическом значении этого определения, то наряду с координатами, относящимися к внутренним степеням свободы (здесь — это x_1 и x_2), в представлении ее состояния на момент t участвуют и координаты управляющих исполнительных органов (в данном случае это $x_0^{(u)}$ и $x_0^{(g)}$). Обобщенная сила $f_0^{(u)}$, действующая со стороны управляемой подсистемы (пребывающей в данный момент времени t в положении, заданном значениями координат x_1, x_2) на модулятор потенциальной связи (находящийся в этот же момент времени в состоянии, определяемом значением его обобщенной координаты $x_0^{(u)}$) выражается согласно обычной формуле лагранжевой механики:

$$f_0^{(u)} = \frac{\partial L^{(u)}}{\partial x_0^{(u)}} = -x_1 x_2. \tag{18}$$

Следует обратить внимание на то, что это — сила реакции объекта управления, воздействие которой на себя воспринимает модулятор потенциальной связи.

Мощность, передаваемая в момент t от объекта управления исполнительному органу управляющего устройства (модулятору потенциальной связи), есть произведение силы (18) на скорость $\dot{x}_0^{(u)}$ изменения обобщенной координаты $x_0^{(u)}$, определяющей положение на момент t исполнительного органа:

$$W_{\text{out}}^{(u)}(t) = -\dot{x}_0^{(u)} x_1 x_2. \tag{19}$$

Совершенно аналогично, частным дифференцированием $L^{(g)}$ по обобщенной координате $x_0^{(g)}$ модулятора гироскопической связи, находится сила воздействия со стороны управляемой подсистемы на модулятор этой связи с той лишь разницей, что данная сила, в отличие от $f_0^{(u)}$, зависит как от x_1, x_2, так и от $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$:

$$f_0^{(g)} = \frac{\partial L^{(g)}}{\partial x_0^{(g)}} = -\frac{1}{2}(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1). \tag{20}$$

Мгновенное значение мощности, развиваемой силой $f_0^{(g)}$ при изменении координаты $x_0^{(g)}$ со скоростью $\dot{x}_0^{(g)}$, дается формулой

$$W_{\text{out}}^{(g)}(t) = -\frac{1}{2}\dot{x}_0^{(g)}(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1). \tag{21}$$

Усреднение формул (19), (21) по скользящему интервалу "быстрого" времени и статистически дает возможность с практически приемлемой точностью определить энергетические выходы по каждому из каналов параметрической модуляции, а также суммарный выход по обоим каналам:

$$W_{\text{out}}^{(u)} = -\widetilde{\overline{\dot{x}_0^{(u)} x_1 x_2}}, \tag{22}$$

$$W_{\text{out}}^{(g)} = -\frac{1}{2}\widetilde{\overline{\dot{x}_0^{(g)}(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1)}}, \tag{23}$$

$$W_{\text{out}}^{(\Sigma)} = W_{\text{out}}^{(u)} + W_{\text{out}}^{(g)}. \tag{24}$$

Здесь и ниже сплошная черта над выражением обозначает усреднение по времени, а волнистая — статистическое усреднение.

5. Вывод и решение "укороченных" уравнений, определяющих эволюцию комплексных амплитуд осцилляций переменных x_1, x_2. Получение асимптотических выражений x_1, x_2, необходимых для подстановки в (22), (23), упрощается, если воспользоваться приемом комплексификации предполагаемых решений системы (17) и последующего их овеществления по В.И. Арнольду. Положив $\varepsilon = 0$ в системе (17), получим однородную порождающую систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2}+\mu, & -g\frac{d}{dt} \\ \\ g\frac{d}{dt}, & \frac{d^2}{dt^2}+\frac{1}{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ \\ x_2^0 \end{bmatrix} = 0. \tag{25}$$

Предполагая зависимость $\vec{x}^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$ от t пропорциональной $e^{i\omega t}$, составим характеристическое уравнение для системы (25):

$$\det \begin{bmatrix} \mu-\omega^2, & -i\omega g \\ \\ i\omega g, & \frac{1}{\mu}-\omega^2 \end{bmatrix} = \omega^4 - \left(g^2+\mu+\frac{1}{\mu}\right)\omega^2 + 1 = 0. \tag{26}$$

Подстановкой $\omega^2 = \lambda$ оно приводится к квадратному уравнению $\lambda^2 - \left(g^2+\mu+\dfrac{1}{\mu}\right)\lambda + 1 = 0$. По теореме Виета произведение его корней равно единице, а сумма их равна $g^2+\mu+\dfrac{1}{\mu}$. Полагая, что решения порождающей системы имеют характер свободных незатухающих колебаний, делаем вывод, что λ должно быть положительным вещественным числом, принимающим значения ν и $\frac{1}{\nu}$, так что $\nu + \dfrac{1}{\nu} = g^2+\mu+\dfrac{1}{\mu}$. При этом коэффициент гироскопической связи g является вещественным, если соблюдено условие (9). Очевидно, что равенство (8) действительно является прямым следствием характеристического уравнения (26), а матрица (13) составлена из положительных значений собственных частот системы (25), которые при $g \to 0$ стремятся к соответствующим элементам матрицы (12).

Комплексифицированное общее решение $\vec{x}^0$ однородной системы (25), как нетрудно проверить, имеет вид

$$\vec{x}^0 = \hat{\mathrm{S}}\hat{\Lambda}\vec{a}^0, \tag{27}$$

где

$$\vec{a}^0 = \begin{bmatrix} a_1^0 \\ a_2^0 \end{bmatrix} \text{ — вектор комплексных амплитуд,} \tag{28}$$

играющих роль (при $\varepsilon = 0$) произвольных констант интегрирования,

$$\hat{\Lambda} = \begin{bmatrix} e^{it\sqrt{\nu}}, & 0 \\ 0, & e^{it\frac{1}{\sqrt{\nu}}} \end{bmatrix} \tag{29}$$

— матрица осцилляций с единичными амплитудами,

$$\hat{\mathrm{S}} = \begin{bmatrix} 1, & -\dfrac{i\alpha}{\sqrt{\mu}} \\ -i\alpha\sqrt{\mu}, & 1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

— матрица модальных столбцов, где

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu-\nu}{1-\mu\nu}}\ , \tag{31}$$

причем

$$\det\hat{\mathrm{S}} = \frac{(1+\mu)(1-\nu)}{1-\mu\nu} \neq 0\ .$$

Таким образом,

$$\begin{bmatrix} x_1^0 \\ \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -i\alpha\sqrt{\mu} \end{bmatrix} a_1^0 e^{it\sqrt{\nu}} + \begin{bmatrix} -i\alpha\frac{1}{\sqrt{\mu}} \\ \\ 1 \end{bmatrix} a_2^0 e^{it\frac{1}{\sqrt{\nu}}}. \tag{32}$$

Здесь представлена сумма двух эллиптически поляризованных двумерных колебаний с противоположными вращениями на частотах $\sqrt{\nu}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{\nu}}$. Общая ориентация этих вращений зависит от знака g и, соответственно, знака параметра α, который далее считаем фиксированным, для определенности — положительным. Амплитуды и фазы пока произвольны.

Овеществление решения можно осуществить как формальным выделением вещественной части $\mathrm{Re}\,\vec{x}^0$ из комплексифицированного решения $\vec{x}^0$, так и сложением $\vec{x}^0$ с его комплексно сопряженным выражением $(\vec{x}^0)^*$, что, разумеется, дает $2\mathrm{Re}\,\vec{x}^0$.

В физических приложениях более распространенным является второй способ, на котором здесь остановимся.

Перейдем к формальному построению асимптотического решения ε-возмущенной векторно-метричной системы (17), применяя метод медленно меняющихся амплитуд, имеющий в линейном случае строгое обоснование, если не допускаются резонансы, понижающие порядки членов ε-приближения. Теперь "разморозим" комплексные амплитуды и будем искать решение вещественной векторно-матричной системы (17) в виде вещественного вектора

$$\vec{x} = \hat{\mathrm{S}}\hat{\Lambda}\vec{a} + (\hat{\mathrm{S}}\hat{\Lambda}\vec{a})^*, \tag{33}$$

где $\vec{a} = \vec{a}(\tau)$ — комплекснозначная вектор-функция вещественного "медленного" времени

$$\tau = (\varepsilon t)\frac{1}{\theta}, \tag{34}$$

в определении которого присутствует, кроме малого параметра ε $(0 < \varepsilon \ll 1)$, постоянная времени θ нулевого по ε порядка:

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{\mu\nu}}\left[(\mu-\nu)(1+\mu\nu)^2 + (\mu+\nu)^2(1-\mu\nu)\right] \sim \varepsilon^0, \tag{35}$$

которая в дальнейшем сокращается.

При подстановке (33) с учетом (34) в (17) используем следующие формулы и обозначения:

$$\frac{d}{dt}\left(\hat{\mathrm{S}}\hat{\Lambda}\vec{a}\right) = i\hat{\mathrm{S}}\hat{\mathrm{N}}\hat{\Lambda}\vec{a} + \frac{\varepsilon}{\theta}\hat{\mathrm{S}}\hat{\Lambda}\frac{d}{d\tau}\vec{a}, \tag{36}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\hat{\mathrm{S}}\hat{\Lambda}\vec{a}\right) = -\hat{\mathrm{S}}\hat{\mathrm{N}}^2\hat{\Lambda}\vec{a} + \frac{\varepsilon}{\theta}2i\hat{\mathrm{S}}\hat{\mathrm{N}}\hat{\Lambda}\frac{d}{d\tau}\vec{a} + \frac{\varepsilon^2}{\theta^2}\hat{\mathrm{S}}\hat{\Lambda}\frac{d^2}{d\tau^2}\vec{a}, \tag{37}$$

$$\hat{\mathrm{M}}^2\hat{\mathrm{S}} - \hat{\mathrm{S}}\hat{\mathrm{N}}^2 + ig\hat{\mathrm{J}}\hat{\mathrm{S}}\hat{\mathrm{N}} = \hat{0}, \quad \text{учитывая (8)}, \tag{38}$$

$$\begin{aligned}&\left(\hat{\mathrm{I}}\frac{d^2}{dt^2} + g\hat{\mathrm{J}}\frac{d}{dt} + \hat{\mathrm{M}}^2\right)\hat{\mathrm{S}}\hat{\Lambda}\vec{a} = \\ &= \left(\hat{\mathrm{M}}^2\hat{\mathrm{S}} - \hat{\mathrm{S}}\hat{\mathrm{N}}^2 + ig\hat{\mathrm{J}}\hat{\mathrm{S}}\hat{\mathrm{N}}\right)\hat{\Lambda}\vec{a} + \\ &\qquad + \frac{\varepsilon}{\theta}\left(2i\hat{\mathrm{S}}\hat{\mathrm{N}} + g\hat{\mathrm{J}}\hat{\mathrm{S}}\right)\hat{\Lambda}\frac{d}{d\tau}\vec{a} + \frac{\varepsilon^2}{\theta^2}\hat{\mathrm{S}}\hat{\Lambda}\frac{d^2}{d\tau^2}\vec{a}.\end{aligned} \tag{39}$$

В итоге, используя (38), формулу (39) можно упростить:

$$\left(\hat{\mathrm{I}}\frac{d^2}{dt^2} + g\hat{\mathrm{J}}\frac{d}{dt} + \hat{\mathrm{M}}^2\right)\hat{\mathrm{S}}\hat{\Lambda}\vec{a} = \frac{\varepsilon}{\theta}\left(\hat{\mathrm{T}}\hat{\Lambda}\frac{d\vec{a}}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{\theta}\hat{\mathrm{S}}\hat{\Lambda}\frac{d^2\vec{a}}{d\tau^2}\right). \tag{40}$$

Здесь

$$\hat{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\nu}}\begin{bmatrix} i\sqrt{\mu}(\mu+\nu), & (1+\mu\nu)\alpha \\ (1+\mu\nu)\alpha & i\frac{1}{\sqrt{\mu}}(\mu+\nu)\end{bmatrix}, \tag{41}$$

причем

$$\hat{\mathrm{T}}^{-1} = -\frac{1-\mu\nu}{\theta}\begin{bmatrix} i\frac{1}{\sqrt{\mu}}(\mu+\nu), & -(1+\mu\nu)\alpha \\ \\ -(1+\mu\nu)\alpha & i\sqrt{\mu}(\mu+\nu) \end{bmatrix}. \tag{42}$$

Поскольку матричный оператор (15) вещественный, для получения результата его действия на второе слагаемое в правой части выражения (33), определяющего $\vec{x}$, достаточно применить операцию $(\cdot)^*$ комплексного сопряжения к обеим частям формулы (40), что дает:

$$\left(\hat{\mathrm{I}}\frac{d^2}{dt^2} + g\hat{\mathrm{J}}\frac{d}{dt} + \hat{\mathrm{M}}^2\right)\left(\hat{\mathrm{S}}\hat{\Lambda}\vec{a}\right)^* = \frac{\varepsilon}{\theta}\left(\hat{\mathrm{T}}^*\hat{\Lambda}^*\frac{d\vec{a}^*}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{\theta}\hat{\mathrm{S}}^*\hat{\Lambda}^*\frac{d^2\vec{a}^*}{d\tau^2}\right). \tag{43}$$

Складывая равенства (40) и (43), получаем:

$$\hat{\mathrm{A}}\vec{x} = \frac{\varepsilon}{\theta}\hat{\mathrm{T}}\hat{\Lambda}\left[\frac{d\vec{a}}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{\theta}\hat{\Lambda}^{-1}(\hat{\mathrm{T}}^{-1}\hat{\mathrm{S}})\hat{\Lambda}\frac{d^2\vec{a}}{d\tau^2}\right] +$$
$$+\frac{\varepsilon}{\theta}\hat{\mathrm{T}}\hat{\Lambda}\left[\hat{\Lambda}^{-1}(\hat{\mathrm{T}}^{-1}\hat{\mathrm{T}}^*)\hat{\Lambda}^{-1}\frac{d\vec{a}^*}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{\theta}\hat{\Lambda}^{-1}(\hat{\mathrm{T}}^{-1}\hat{\mathrm{S}}^*)\hat{\Lambda}^{-1}\frac{d^2\vec{a}^*}{d\tau^2}\right]. \tag{44}$$

Здесь использована обратимость матриц $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\mathrm{T}}$. Первая из них — диагональная с заведомо ненулевыми элементами, а $\hat{\mathrm{T}}^{-1}$ существует при любых μ и ν в силу (9) и (35). Кроме того, здесь учтено, что $\hat{\Lambda}^* = \hat{\Lambda}^{-1}$.

Представление первого слагаемого, стоящего в левой части уравнения (17), в виде (44) является подготовительным этапом для применения процедуры усреднения по "быстрому" времени t, от которого явным образом зависят произведения матриц, содержащие быстро осциллирующие матрицы $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\Lambda}^{-1}$. Действия, аналогичные приведенным выше, произведем и с остальными, возмущающими членами уравнения (17). Так как при них уже стоит малый коэффициент ε и они не содержат сингулярно возмущающих дифференциальных операторов второго порядка, то при подстановке производных, представляемых в форме (36) (или сопряженной с ней) достаточно учитывать только первое слагаемое, имеющее нулевой порядок по ε.

Руководствуясь целесообразностью выделения перед усреднением общего множителя $\dfrac{1}{\theta}\hat{\mathrm{T}}\hat{\Lambda}$ из всех членов уравнения (17), произведем нужные выкладки и получим для них приведенный ниже список формул с соблюдением оговоренной точности:

$$1)\quad \theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{\mathrm{T}}^{-1}\hat{\mathrm{R}}\frac{d}{dt}\vec{x} = \theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{\mathrm{T}}^{-1}\hat{\mathrm{R}}\frac{d}{dt}\left(\hat{\mathrm{S}}\hat{\Lambda}\vec{a} + \hat{\mathrm{S}}^*\hat{\Lambda}^*\vec{a}^*\right) =$$
$$= \hat{\Lambda}^{-1}\left(i\theta\hat{\mathrm{T}}^{-1}\hat{\mathrm{R}}\hat{\mathrm{S}}\hat{\mathrm{N}}\right)\hat{\Lambda}\vec{a} - \hat{\Lambda}^{-1}\left(i\theta\hat{\mathrm{T}}^{-1}\hat{\mathrm{R}}\hat{\mathrm{S}}^*\hat{\mathrm{N}}\right)\hat{\Lambda}^{-1}\vec{a}^* +$$
$$+ O_1(\varepsilon), \quad (45)$$

$$2)\quad \theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{\mathrm{T}}^{-1}x_0^{(u)}\hat{\mathrm{P}}\vec{x} = x_0^{(u)}\theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{\mathrm{T}}^{-1}\hat{\mathrm{P}}\left(\hat{\mathrm{S}}\hat{\Lambda}\vec{a} + \hat{\mathrm{S}}^*\hat{\Lambda}^*\vec{a}^*\right) =$$
$$= 2k_0\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}} - \sqrt{\nu}\right)t\left[\hat{\Lambda}^{-1}\left(\theta\hat{\mathrm{T}}^{-1}\hat{\mathrm{P}}\hat{\mathrm{S}}\right)\hat{\Lambda}\vec{a} +\right.$$
$$\left. + \hat{\Lambda}^{-1}\left(\theta\hat{\mathrm{T}}^{-1}\hat{\mathrm{P}}\hat{\mathrm{S}}^*\right)\hat{\Lambda}^{-1}\vec{a}^*\right], \quad (46)$$

$$3)\quad \theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{\mathrm{T}}^{-1}x_0^{(g)}\hat{\mathrm{J}}\frac{d}{dt}\vec{x} = x_0^{(g)}\theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{\mathrm{T}}^{-1}\hat{\mathrm{J}}\frac{d}{dt}\left(\hat{\mathrm{S}}\hat{\Lambda}\vec{a} + \hat{\mathrm{S}}^*\hat{\Lambda}^*\vec{a}^*\right) =$$
$$= 2l_0\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}} - \sqrt{\nu}\right)t\left[\hat{\Lambda}^{-1}\left(i\theta\hat{\mathrm{T}}^{-1}\hat{\mathrm{J}}\hat{\mathrm{S}}\hat{\mathrm{N}}\right)\hat{\Lambda}\vec{a} -\right.$$
$$\left. - \hat{\Lambda}^{-1}\left(i\theta\hat{\mathrm{T}}^{-1}\hat{\mathrm{J}}\hat{\mathrm{S}}^*\hat{\mathrm{N}}\right)\hat{\Lambda}^{-1}\vec{a}^*\right] + O_2(\varepsilon), \quad (47)$$

$$4)\quad \frac{1}{2}\theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{\mathrm{T}}^{-1}\dot{x}_0^{(g)}\hat{\mathrm{J}}\vec{x} = \frac{1}{2}\dot{x}_0^{(g)}\theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{\mathrm{T}}^{-1}\hat{\mathrm{J}}\left(\hat{\mathrm{S}}\hat{\Lambda}\vec{a} + \hat{\mathrm{S}}^*\hat{\Lambda}^*\vec{a}^*\right) =$$
$$= -l_0\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}} - \sqrt{\nu}\right)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}} - \sqrt{\nu}\right)t\left[\hat{\Lambda}^{-1}\left(\theta\hat{\mathrm{T}}^{-1}\hat{\mathrm{J}}\hat{\mathrm{S}}\right)\hat{\Lambda}\vec{a} +\right.$$
$$\left. + \hat{\Lambda}^{-1}\left(\theta\hat{\mathrm{T}}^{-1}\hat{\mathrm{J}}\hat{\mathrm{S}}^*\right)\hat{\Lambda}^{-1}\vec{a}^*\right]. \quad (48)$$

Что касается правой части уравнения (17), то, благодаря резонансным избирательным свойствам левой части этого уравнения, на широкополосное (вследствие δ-коррелированности) силовое воздействие тепловых флуктуаций Найквиста система реагирует так же, как если бы на нее действовали модулированные "белым" шумом внешние силы, осциллирующие со средними частотами $\pm\sqrt{\nu}$ и $\pm\dfrac{1}{\sqrt{\nu}}$.

Поэтому, конкретизируя стороннее силовое воздействие, условимся представлять $\vec{f}$ в следующем виде:

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} \\ \\ f_{21} \end{bmatrix} e^{it\sqrt{\nu}} + \begin{bmatrix} f_{12} \\ \\ f_{22} \end{bmatrix} e^{it\frac{1}{\sqrt{\nu}}} +$$

$$+ \begin{bmatrix} f_{11}^* \\ \\ f_{21}^* \end{bmatrix} e^{-it\sqrt{\nu}} + \begin{bmatrix} f_{12}^* \\ \\ f_{22}^* \end{bmatrix} e^{-it\frac{1}{\sqrt{\nu}}}. \quad (49)$$

Здесь все $f_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = \overline{1,2})$ представляют собой δ-коррелированные комплекснозначные случайные функции "медленного" времени τ. Предполагается еще, что, собственно отражает природу сил Найквиста, отсутствие взаимной корреляции между любыми двумя функциями $f_{\alpha\beta}$, если у них не совпадают оба индекса. Фурье-изображение функции $f_{\alpha\beta}$, которое будем обозначать $f_{\alpha\beta}(\omega)$, ввиду использования двух масштабов времени, с необходимостью должно обращаться тождественно в нуль за пределами полосы частот $|\omega| < \varepsilon^{-1}\theta$, чтобы избежать перекрытия спектров в натуральном масштабе частот. Но поскольку полоса пропускания исследуемой системы как резонансного фильтра в масштабе "медленного" времени имеет ширину порядка ε^0, то при интегрировании по ω выражений, содержащих частотную характеристику системы, можно считать пределы интегрирования бесконечными, не совершая ошибку, выходящую за пределы допустимой относительной погрешности.

Интенсивности силовых воздействий тепловых флуктуаций определяются, согласно [17], формулой Найквиста. В исследуемой модели каждая из двух степеней свободы элементарной подсистемы имеет отдельный диссипативный элемент (резистор) со своей температурой. Но в гироскопически связанных осцилляторах каждая из степеней свободы участвует в колебаниях на общих для всей подсистемы несущих частотах $\pm\sqrt{\nu}$ и $\pm\dfrac{1}{\sqrt{\nu}}$. Поэтому следует считать спектральные плотности мощности силовых воздействий флуктуаций Найквиста, вообще говоря, различными для различных степеней свободы x_1 и x_2 (даже при одинаковых температурах), но одинаковыми для различных частотных полос в окрестностях частот $\pm\sqrt{\nu}$ и $\pm\dfrac{1}{\sqrt{\nu}}$ при рассмотрении одной и той же степени свободы. Не предполагая пока для общности анализа, что $T_1 = T_2$, зададим спектральные плотности мощности флуктуаций Найквиста в виде

$$|\widetilde{f_{11}(\omega)}|^2 = |\widetilde{f_{12}(\omega)}|^2 = \frac{1}{\pi} r_1 T_1, \quad |\widetilde{f_{21}(\omega)}|^2 = |\widetilde{f_{22}(\omega)}|^2 = \frac{1}{\pi} r_2 T_2. \quad (50)$$

Заканчивая список формул, полезный для приведения возмущенной системы (17) к виду, удобному для выполнения процедуры усреднения, применяем оператор $\theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{\mathrm{T}}^{-1}$ к (49) и получаем:

$$5)\ \theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{\mathrm{T}}^{-1}\vec{f} = \hat{\Lambda}^{-1}\left\{\theta\hat{\mathrm{T}}^{-1}\begin{bmatrix} f_{11}e^{it\sqrt{\nu}} + f_{12}e^{it\frac{1}{\sqrt{\nu}}} \\ f_{21}e^{it\sqrt{\nu}} + f_{22}e^{it\frac{1}{\sqrt{\nu}}} \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. +\theta\hat{\mathrm{T}}^{-1}\begin{bmatrix} f_{11}^{*}e^{-it\sqrt{\nu}} + f_{12}^{*}e^{-it\frac{1}{\sqrt{\nu}}} \\ f_{21}^{*}e^{-it\sqrt{\nu}} + f_{22}^{*}e^{-it\frac{1}{\sqrt{\nu}}} \end{bmatrix}\right\}. \quad (51)$$

Умножим теперь все члены уравнения (17) слева на $\varepsilon^{-1}\theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{\mathrm{T}}^{-1}$, сгруппируем и перенесем в правую часть те слагаемые, которые имеют порядки ε и выше. К оставшимся членам полученного в результате уравнения, в т. ч. содержащим $\vec{a}^*$, применяем операцию усреднения по скользящему интервалу "быстрого времени", которое еще сохранилось в осциллирующих матрицах $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\Lambda}^{-1}$. От выбора длины интервала, разумеется, будет зависеть величина относительной погрешности. По порядку величины интервал сглаживания следует выбирать достаточно большим относительно наибольшего из периодов быстрых осцилляций на основных частотах и встречающихся комбинационных частотах. С другой стороны, этот интервал должен быть достаточно малым, чтобы не вносить заметных погрешностей в определение медленно меняющегося вектора $\vec{a}$ комплексных амплитуд, через который, в конечном счете, выражается $\vec{x}$. В принципе, такую возможность можно реализовать, если длина интервала сглаживания имеет порядок $\sqrt{\varepsilon}$. Но фактически ее можно существенно уменьшать при благоприятном соотношении μ и ν и малых r_1, r_2.

Получение строгой оценки погрешности достаточно трудоемко и не относится к существу решаемых в данной статье вопросов. После получения окончательных расчетных формул энергетического баланса и определения оптимизирующих параметров, можно будет воспользоваться не только методом усреднения, но и другими аналитическими или численными методами. Однако на данном уровне рассмотрения принципиальная сторона проблемы преобразования тепловой энергии представляется более важной, чем повышение точности расчетов, поскольку уже она достаточна для сравнения выходной и затрачиваемой мощностей по их усредненным значениям.

Производя выкладки, предусмотренные формулами (44)–(48) и (51), сочетая их с процедурой усреднения, помогающей устранять возникающие громоздкие выражения, в итоге можно прийти к системе линейных уравнений 4-го порядка для a_1, a_2, a_1^*, a_2^* с флуктуационными правыми частями. Однако тогда очень большое число комбинаций параметров настройки существенно затрудняет поиск оптимальных вариантов. Но оказалось, что эту систему можно разложить на две несвязанные подсистемы 2-го порядка — для a_1, a_2 и a_1^*, a_2^* соответственно, если $\nu \neq \frac{1}{3}$, что отражено в условиях (9). При этом в использовании уравнений для a_1^*, a_2^* уже не возникает необходимости, поскольку уравнения для a_1, a_2 им эквивалентны.

Замечание. Точность выполнения достаточного условия $\nu \neq \dfrac{1}{3}$ разложения системы должна быть соблюдена такой, чтобы "отстроиться" от резонанса $\Omega = 2\sqrt{\nu}$ в пределах точности сглаживания, т. е. на уровне $\pm\sqrt{\varepsilon}$. Более определенно об этом можно сказать после выбора оптимальных параметров μ, ν, r_1, r_2. Подготовленные к усреднению выражения составлены таким образом, что в каждом из них имеются удобные для вычислений блоки в виде произведений постоянных матриц, а также предшествующей им осциллирующей диагональной матрицы $\hat{\Lambda}^{-1}$ и замыкающей матричные произведения матрицы $\hat{\Lambda}$ (либо $\hat{\Lambda}^{-1}$). В модулированных потенциальных или гироскопических матричных выражениях имеются еще множители вида $\sin\Omega t$ и $\cos\Omega t$. При такой конструкции легко сразу же выделить блоки, не обращающиеся в нуль под действием усредняющей по скользящему интервалу "быстрого" времени операции сглаживания.

Благодаря предусмотренному условию $\nu \neq \dfrac{1}{3}$, члены, содержащие $\vec{a}^*$, в т. ч. при $\Omega = 2\nu$, исчезают в нулевом по ε приближении (имея в виду, что перед усреднением все члены уравнения (17) были умножены слева на $\varepsilon^{-1}\theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{\mathrm{T}}^{-1}$). Оставшиеся члены нулевого порядка по ε образуют требуемую систему "укороченных" уравнений, позволяющую с достаточной асимптотической точностью исследовать эволюцию комплексных амплитуд a_1, a_2 под воздействием стационарных случайных сил Найквиста, представленных в правой части этой системы, которая имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{d\tau}+\eta_1, & m\frac{1}{\sqrt{\mu}} \\ -m\sqrt{\mu}, & \frac{d}{d\tau}+\eta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}. \tag{52}$$

Здесь применены такие обозначения:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \sqrt{\nu}\left[\tfrac{1}{\sqrt{\mu}}r_1(\mu+\nu)(1-\mu\nu)+\sqrt{\mu}r_2(\mu-\nu)(1+\mu\nu)\right], \\ \eta_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{\nu}}\left[\sqrt{\mu}r_2(\mu+\nu)(1-\mu\nu)+\tfrac{1}{\sqrt{\mu}}r_1(\mu-\nu)(1+\mu\nu)\right]; \end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned} h_1 &= (1+\mu\nu)\sqrt{(\mu-\nu)(1-\mu\nu)}f_{21}-i\tfrac{1}{\sqrt{\mu}}(\mu+\nu)(1-\mu\nu)f_{11}, \\ h_2 &= (1+\mu\nu)\sqrt{(\mu-\nu)(1-\mu\nu)}f_{12}-i\sqrt{\mu}(\mu+\nu)(1-\mu\nu)f_{22}; \end{aligned} \tag{54}$$

$$m = 2k_0\mu(1-\nu^2)-l_0\nu(1-\mu^2)(\frac{1}{\sqrt{\nu}}+\sqrt{\nu}). \tag{55}$$

Систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами естественно заменить эквивалентной ей системой алгебраических уравнений, получаемой из (52) методом преобразования Фурье при $\dfrac{d}{dt} \to i\omega$, условившись изображения a_1, a_2 и h_1, h_2 обозначать теми же буквами, что и оригиналы. Теперь $a_1 = a_1(\omega)$, $a_2 = a_2(\omega)$ находятся как результат решения алгебраической системы

$$\begin{bmatrix} \eta_1+i\omega, & m\frac{1}{\sqrt{\mu}} \\ -m\sqrt{\mu}, & \eta_2+i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \tag{56}$$

с главным определителем

$$\Delta(\omega) = a^2-\omega^2+i\omega b, \tag{57}$$

где $a^2 = m^2+\eta_1\eta_2$, $b = \eta_1+\eta_2$.

Вектор-столбец комплексных амплитуд $a_1 = a_1(\omega)$, $a_2 = a_2(\omega)$, являющийся решением системы (56), имеет вид

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\omega)} \begin{bmatrix} \eta_2 + i\omega, & -m\frac{1}{\sqrt{\mu}} \\ \\ m\sqrt{\mu}, & \eta_1 + i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \\ h_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta(\omega)} \begin{bmatrix} (\eta_2 + i\omega)h_1 - m\frac{1}{\sqrt{\mu}}h_2 \\ \\ m\sqrt{\mu}h_1 + (\eta_1 + i\omega)h_2 \end{bmatrix}. \quad (58)$$

Переход к оригиналам Фурье-изображений для исследования энергетического баланса фактически не потребуется, так как по формуле Найквиста интенсивности флуктуационных сил, действующих на входы исследуемой линейной системы, выражены именно через спектральные плотности мощности, т. е. через квадраты модулей Фурье-спектров. С другой стороны, формулы (22), (23) для мгновенных выходных мощностей после усреднения по "быстрому" времени, статистического усреднения и последующего интегрирования по ω в интервале $-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < \omega < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ приводятся к выражениям, содержащим общий множитель

$$I = \frac{1}{1-\mu\nu} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}[a_1 \widetilde{(\omega) a_2^*}(\omega)] d\omega + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}). \quad (59)$$

Эти формулы имеют вид:

$$W_{\text{out}}^{(u)} = -2k_0\Omega(1+\mu)(1-\nu)I, \quad (60)$$

$$W_{\text{out}}^{(g)} = l_0\Omega(\frac{1}{\sqrt{\nu}} + \sqrt{\nu})(1-\mu)(1+\nu)I. \quad (61)$$

Необходимые для их получения выкладки приведены ниже.

$$W_{\text{out}}^{(u)} = \overline{\widetilde{W_{\text{out}}^{(u)}(t)}} = -2k_0 \left(\frac{1}{\sqrt{\nu}} - \sqrt{\nu}\right) \overline{\widetilde{x_1 x_2 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}} - \sqrt{\nu}\right) t}},$$

$$2\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}} - \sqrt{\nu}\right) t = e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t},$$

где $\Omega = \frac{1}{\sqrt{\nu}} - \sqrt{\nu}$. В сомножителе $x_1 x_2$ выделяем члены с $e^{\pm i\Omega t}$:

$$
\begin{aligned}
x_1x_2 &= \Big(a_1e^{it\sqrt{\nu}} - i\alpha\frac{1}{\sqrt{\mu}}a_2e^{it\frac{1}{\sqrt{\nu}}} + a_1^*e^{-it\sqrt{\nu}} + i\alpha\frac{1}{\sqrt{\mu}}a_2^*e^{-it\frac{1}{\sqrt{\nu}}}\Big)\times\\
&\times\big(i\alpha\sqrt{\mu}a_1e^{it\sqrt{\nu}} + a_2e^{it\frac{1}{\sqrt{\nu}}} + i\alpha\sqrt{\mu}a_1^*e^{-it\sqrt{\nu}} + a_2^*e^{-it\frac{1}{\sqrt{\nu}}}\big) =\\
&= (\text{нерезонансные члены}) + (1+\alpha^2)(a_1a_2^*e^{-i\Omega t} + a_1^*a_2e^{i\Omega t}) =\\
&= (\text{нерезонансные члены}) + \frac{(1+\mu)(1-\nu)}{1-\mu\nu}(a_1a_2^*e^{-i\Omega t} + a_1^*a_2e^{i\Omega t}),
\end{aligned}
$$

где $1+\alpha = 1+\frac{\mu-\nu}{1-\mu\nu} = \frac{(1+\mu)(1-\nu)}{1-\mu\nu}$, $a_1 = a_1(\omega)$, $a_2 = a_2(\omega)$.

Подстановка и усреднение приводят к выражению

$$
\begin{aligned}
&W_{\text{out}}^{(u)}(\omega) =\\
&= -k_0\Omega\frac{(1+\mu)(1-\nu)}{1-\mu\nu}\overline{(a_1a_2^*e^{-i\Omega t} + a_1^*\widetilde{a_2e^{i\Omega t})(e^{i\Omega t}} + e^{-i\Omega t})} =\\
&\qquad\qquad = -k_0\Omega\frac{(1+\mu)(1-\nu)}{1-\mu\nu}\operatorname{Re}\left[a_1\widetilde{(\omega)a_2^*}(\omega)\right],
\end{aligned}
$$

которое после интегрирования по ω дает формулу для определения $W_{\text{out}}^{(u)}$.

Вывод формулы для $W_{\text{out}}^{(g)}$ аналогичен по технике, но больше по объему вычислений, поскольку требует усреднения двухчленного выражения:

$$
W_{\text{out}}^{(g)} = -\frac{1}{2}\overline{\dot{x}_0^{(g)}(\dot{x}_1\widetilde{x_2 - \dot{x}_2}x_1)}.
$$

Здесь $x_0^{(g)} = 2l_0\cos\Omega t$, $\dot{x}_0^{(g)} = -2l_0\Omega\sin\Omega t = il_0\Omega(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t})$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \hat{\mathrm{S}}\hat{\Lambda}\vec{a} + \text{к.с.}$, $\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = i\hat{\mathrm{S}}\hat{\mathrm{N}}\hat{\Lambda}\vec{a} + \text{к.с.}$ (к.с. — комплексно сопряженные члены). Выделяя из мономов только члены с $e^{\pm i\Omega t}$, будем иметь:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1x_2 &= (\text{нерез. чл.}) + i\sqrt{\nu}(a_1a_2^*e^{-i\Omega t} + a_1^*a_2e^{i\Omega t}) -\\
&\qquad\qquad - i\frac{\alpha^2}{\sqrt{\nu}}(a_1a_2^*e^{-i\Omega t} + a_1^*a_2e^{i\Omega t}),
\end{aligned}
$$

$$
-\dot{x}_2x_1 = (\text{нерез. чл.}) + i\frac{1}{\sqrt{\nu}}(a_1a_2^*e^{-i\Omega t} + a_1^*a_2e^{i\Omega t}) -
$$

$$- i\alpha^2\sqrt{\nu}(a_1 a_2^* e^{-i\Omega t} + a_1^* a_2 e^{i\Omega t}).$$

Использование этих фрагментов в усредняемом выражении непосредственно дает спектральную плотность мощности, передаваемой в когерентной форме органу гироскопической модуляции:

$$W_{\mathrm{out}}^{(g)}(\omega) = l_0\Omega\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}} - \sqrt{\nu}\right)\frac{(1+\mu)(1-\nu)}{1-\mu\nu}\mathrm{Re}[a_1\widetilde{(\omega)a_2^*}(\omega)].$$

Полная мощность $W_{\mathrm{out}}^{(g)}$ получается интегрированием по ω и представлена приведенной выше формулой. Вычисление I упрощается, если обратить внимание на отсутствие парных корреляций между f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22} и воспользоваться формулой Найквиста для выражения интенсивностей флуктуационных сил по каждой из двух степеней свободы. Соответственно, находим, что $h_1\widetilde{(\omega)h_2^*}(\omega) = 0$, а средние квадраты модулей $h_1(\omega)$ и $h_2(\omega)$ не зависят от частоты ω:

$$\widetilde{|h_1(\omega)|^2} = \frac{1}{\pi}[r_2T_2(\mu-\nu)(1-\mu\nu)(1+\mu\nu)^2 + \frac{1}{\mu}r_1T_1(\mu+\nu)^2(1-\mu\nu)^2],$$

$$\widetilde{|h_2(\omega)|^2} = \frac{1}{\pi}[r_1T_1(\mu-\nu)(1-\mu\nu)(1+\mu\nu)^2 + \mu r_2T_2(\mu+\nu)^2(1-\mu\nu)^2].$$

В результате получаем, что с относительной погрешностью, которая по порядку не превышает величины ε, выражение для I, содержащее табличный интеграл

$$I_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{|\Delta(\omega)|^2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{(a^2-\omega^2)^2+\omega^2b^2} =$$
$$= \frac{1}{a^2b} = \frac{1}{(\eta_1+\eta_2)(m^2+\eta_1\eta_2)}, \quad (62)$$

можно представить в следующей форме:

$$I = mI_0r_1r_2\left[(\mu^2-\nu^2)(1-\mu^2\nu^2)(1-\nu^2)\sqrt{\frac{\mu}{\nu}}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}T_1\frac{r_1}{r_2} + \right.\right.$$
$$\left. + \sqrt{\mu}T_2\frac{r_2}{r_1}\right) + (\mu+\nu)^3(1-\mu\nu)^2\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}T_1 - \sqrt{\nu}T_2\right) +$$
$$\left. + (\mu-\nu)^2(1+\mu\nu)^3\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}T_2 - \sqrt{\nu}T_1\right)\right]. \quad (63)$$

В интересующем нас варианте равенства температур, когда $T_1 = T_2 = T$, при выполнении ранее оговоренного условия физической реализуемости $0 < \nu < \mu < 1$ знак этого выражения совпадает со знаком результирующего коэффициента модуляции m. Действительно, в этом случае $I\,|_{T_1=T_2=T} = I_T$ принимает вид:

$$I_T = mT\Omega I_0\Psi, \tag{64}$$

$$\Psi = (r_1^2 + \mu r_2^2)(1+\nu)(\mu^2 - \nu^2)(1 - \mu^2\nu^2) + \\ + r_1 r_2[(\mu+\nu)^3(1-\mu\nu)^2 + (\mu-\nu)^2(1+\mu\nu)^3].$$

Очевидно, что Ψ строго положительно, как и коэффициент $T\Omega I_0$, так что $\mathrm{sgn} I_T = \mathrm{sgn}\, m$.

Отсюда следует, что при использовании только одного канала управления никакие параметры настройки данной модели не могут обеспечить положительный энергетический выход, если $T_1 = T_2$. Чтобы в этом убедиться, достаточно поочередно полагать $k_0 = 0$ или $l_0 = 0$ в (55), (60), (61):

$$\begin{aligned} &1)\quad k_0 = 0 \Rightarrow m < 0, \quad I = I_T < 0, \quad , W_{\text{out}}^{(u)} = 0, \quad W_{\text{out}}^{(g)} < 0;\\ &2)\quad l_0 = 0 \Rightarrow m > 0, \quad I = I_T > 0, \quad , W_{\text{out}}^{(u)} < 0, \quad W_{\text{out}}^{(g)} = 0. \end{aligned} \tag{65}$$

Но при $T_2 > \dfrac{1}{\nu}T_1$ достаточно малая величина разности $\mu - \nu > 0$ (если $\mu + \nu \sim 1$) дает возможность сделать знаки I и m противоположными: $\mathrm{sgn}\, I\,|_{\mu\to\nu} = -\mathrm{sgn}\, m$. При этом условии все же возможен положительный выход энергии даже в одноканальной управляемой системе, как было показано в работе [16] для модулированной потенциальной связи, когда $g = 0$, $\nu = \mu = \frac{1}{2}$. Теперь остается дать ответ на основной вопрос о существовании в пространстве физически реализуемых параметров модели с двумя каналами управления непустой подобласти, для которой сумма энергетических выходов по обоим каналам в случае $T_1 = T_2 = T$ положительна.

6. Достаточные условия положительного суммарного энергетического выхода при $T_1 = T_2 = T$. Просуммируем (60) и (61), подставив в них значение $I = I_T$, выраженное по формуле (64), в которой m представим согласно (55). Это даст общее представление суммарной усредненной мощности, являющейся выходной для управляемой элементарной подсистемы и, в то же время, входной для двухканальной системы управления, пополняющей (в сумме) энергию ее когерентных колебаний. В итоге получим:

$$W_{\text{out}}^{(\Sigma)} = W_{\text{out}}^{(u)} + W_{\text{out}}^{(g)} = \\ = T\Omega^2 I_0 \Psi \left[2k_0\mu(1-\nu^2) - l_0\nu(1-\mu^2)\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}+\sqrt{\nu}\right)\right] \times \\ \times \left[l_0(1-\mu)(1+\nu)\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}+\sqrt{\nu}\right) - 2k_0(1+\mu)(1-\nu)\right] = CQ, \tag{66}$$

где

$$C = 4T\Omega^2 k_0^2 I_0 \Psi \mu(1-\nu^2)(1+\mu)(1-\nu), \tag{67}$$

$$Q = (1-ax)(bx-1) = -abx^2 + (a+b)x - 1, \tag{68}$$

$$a = \frac{\nu(1-\mu^2)}{\mu(1-\nu^2)}, \quad b = \frac{(1-\mu)(1+\nu)}{(1+\mu)(1-\nu)}, \quad x = \frac{l_0}{2k_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}+\sqrt{\nu}\right). \tag{69}$$

Теперь результат зависит от дискриминанта квадратичного трехчлена Q. В данном случае для любых μ и ν ($0 < \nu < \mu < 1$):

$$\operatorname{Dis} Q = (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 > 0. \tag{70}$$

Из (68) следует, что $Q = 0$ при $x = \dfrac{1}{a}$ и $x = \dfrac{1}{b}$ и что $Q > 0$ при $\dfrac{1}{b} < x < \dfrac{1}{a}$, т. е. когда

$$\frac{(1+\mu)(1-\nu)}{(1-\mu)(1+\nu)} < \frac{l_0}{2k_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}+\sqrt{\nu}\right) < \frac{\mu(1-\nu^2)}{\nu(1-\mu^2)}, \tag{71}$$

причем это двойное неравенство не противоречит условию

$$0 < \nu < \mu < 1, \quad \text{ибо} \quad b - a = \frac{(\mu-\nu)(1-\mu\nu)}{\mu(1+\mu)(1-\nu^2)} > 0. \tag{72}$$

Таким образом, при выполнении неравенства (71) суммарный усредненный энергетический выход при $T_1 = T_2 = T$ принимает положительные значения. Так как $bx > 1$ в указанном интервале $x \in$

$\in \left(\dfrac{1}{b},\ \dfrac{1}{a}\right)$, то канал модуляции потенциальной связи имеет отрицательную производительность, а канал модуляции гироскопической связи — положительную, перекрывающую потребление энергии предыдущим каналом, обеспечивая тем самым $W^{(\Sigma)}_{\text{out}} > 0$.

7. Оптимизация коэффициентов модуляции по критерию максимума суммарной выходной мощности. Максимальное значение суммарного энергетического выхода соответствует максимуму Q по l_0/k_0. Для оптимального значения $x = x_0$ из (68)–(69) находим его выражение через a и b:

$$x_0 = \frac{a+b}{2ab}.$$

Подстановка $x = x_0$ в (68) дает выражение $Q_0 = \dfrac{(b-a)^2}{4ab}$. В свою очередь, через x_0 и Q_0 определяются

$$\left(\frac{l_0}{k_0}\right)_{\text{opt}} = \Omega\frac{1+\mu}{1-\mu}\left[\frac{\mu}{(1+\mu)^2} + \frac{\nu}{(1+\nu)^2}\right] \quad \left(\Omega = \frac{1}{\sqrt{\nu}} - \sqrt{\nu}\right), \tag{73}$$

$$Q_{\max} = \frac{(\mu-\nu)^2(1-\mu\nu)^2}{4\mu\nu(1+\mu)^2(1+\nu)^2}, \tag{74}$$

а также оптимальное значение результирующего коэффициента модуляции (55):

$$m = m_{\text{opt}} = k_0(\mu-\nu)(1-\mu\nu)\frac{1-\nu}{1+\nu}. \tag{75}$$

Подстановка (74) в (66) с учетом (67) приводит к выражению для максимальной по $\left(\frac{l_0}{k_0}\right)$ суммарной выходной мощности

$$W^{(\Sigma)}_{\max} = T\Omega^4 k_0^2 I_0 \Psi \frac{(\mu-\nu)^2(1-\mu\nu)^2}{(1+\mu)(1+\nu)}. \tag{76}$$

Наконец, применение формул (62) и (75) дает окончательный результат:

$$W^{(\Sigma)}_{\max} = T\Omega^4 \frac{\Psi(1+\nu)}{(\eta_1+\eta_2)(1+\mu)(1-\nu)^2}\left(1 + \frac{\eta_1\eta_2}{m^2_{\text{opt}}}\right)^{-1}, \tag{77}$$

Дальнейшая оптимизация возможна за счет варьирования μ, ν, r_1, r_2, что уже потребует конкретизации условий физической реализации.

Замечание. Пропорциональность выходной мощности температуре T и четвертой степени частоты Ω^4: $W_{\max}^{(\Sigma)} = \mathrm{const} T\Omega^4$ ассоциируется с формулой Рэлея–Джинса для спектральной плотности мощности теплового излучения при фиксированном интервале длин волн.

8. Общий вывод. Предложена и исследована математическая модель открытой билинейной системы управления для преобразования тепловой энергии в когерентную форму. Показано, что использование комбинационного параметрического резонанса, создаваемого системой управления в однотемпературном ансамбле слабо диссипативных упруго-гироскопических подсистем, позволяет получить положительный энергетический выход при помощи только системы управления, не применяя какого-либо охлаждающего устройства.

Данная модель демонстрирует принципиальную возможность преобразования энергии флуктуаций, возбуждаемых в элементарных подсистемах δ-коррелированными силами Найквиста, в энергию, передаваемую в когерентизированной форме макроскопическим колебаниям параметрического резонансного управления. При этом не является обязательным использование разности температур между диссипативными элементами, генерирующими тепловые флуктуации. Благодаря наличию двух некоммутативных каналов управления, созданы достаточные условия как для локального возмущения термодинамического равновесия ансамбля, находящегося в термическом контакте с однотемпературным источником тепловой энергии, так и для генерации когерентной составляющей энергии за счет возникающей неравновесности. В результате, рабочая среда, состоящая из элементарных подсистем с двумя степенями свободы, взаимодействующая с однотемпературным источником тепла, а также с управляющими макроскопическими колебаниями, передает последним энергию в когерентизированной форме.

Рассмотренный вариант реализации положительного энергобаланса в тепловых машинах класса так называемых "демонических холодильников" [6], насколько известно автору по последним публикациям [10], пока еще не имеет аналогов. Можно предположить возможность реализации и других моделей, однако общность лагранжевой модели с учетом инерционных, гироскопических, диссипативных потенциальных и флуктуационных сторонних сил при учете взаимодействия со сторонними полями, управляющими процессами переноса энергии, исчерпывает все реально осуществимые ситуации, по крайней мере, в рамках классического и квазиклассического уровней описания. Заметим, наконец, что физическая реализация, хотя и не конкретизирована в даной работе, допускает широкое разнообразие вариантов как лабораторного, так и космического масштабов.

[1] Кубо Р. Статистическая механика. – М.: Мир, 1967. – 452 с.

[2] Максвелл Дж.К. О регуляторах // В кн.: Теория автоматического регулирования (Под. ред. Андронова А.А. и Вознесенского И.Н.). – М.: Изд-во АН СССР. – 1949. – С. 9–29.

[3] Lloyd S. Quantum-Mechanical Maxwell's Demon // Phys. Rev. A. – 1997. – **56**, № 5. – P. 3374–3382.

[4] Карно С. Рамышления о движущей силе огня и о машинах, способных развивать силу // Пер. с франц. – В кн.: Второе начало термодинамики (Под ред. А.К. Тимирязева). – М. - Л.: ОНТИ. – 1934. – С. 17–61.

[5] Поплавский Р.П. Термодинамика информационных процессов. – М.: Наука. –1981. –256 с.

[6] Ландауер Р. Необратимость и выделение тепла в процессе вычислений // В кн. "Квантовый компьютер и квантовые вычисления", Регулярная и Хаотическая Динамика. – 1999. – С. 9–32. (Русский перевод статьи: Landauer R. IBM J.Res. Dev. –1961, 5, 183.)

[7] Самойленко Ю.И. Электромагнитное управление заряженными частицами с учетом случайных и квантовых эффектов // Управляемые случайные процессы и системы: Тр. первой школы - семинара Ин-та кибернетики и Ин-та математики АН УССР, Киев - Жукин, 1971. – Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1972. – С. 120–140.

[8] Бутковский А.Г., Самойленко Ю.И. Управление квантовыми процессами. – М.: Наука. – 1984. – 256 с.

[9] Butkovskiy A.G., Samoilenko Yu.I. Control of Quantum-Mechanical Processes and Systems. –Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990. –232 p.

[10] Управление молекулярными и квантовыми системами: (Сб. науч. трудов) Ред. А.А. Фрадков, О.А. Якубовский // Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003. – 416 с.

[11] Самойленко Ю.И. Проблемы и методы физической кибернетики // Праці Ін-ту математики НАН Украины. –2006. –**56**. –644 с.

[12] Самойленко А.М. Н.Н. Боголюбов и нелинейная механика // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 5(299). –С. 103–146.

[13] Зоммерфелд А. Термодинамика и статистическая физика. – М.: 1955. –42 с.

[14] Кузнецов Б.Г. Принципы классической физики. – М.: Изд-во АН СССР. – 1958. – 164 с.

[15] Логинов А.А., Самойленко Ю.И. Эволюционные процессы в параметрически модулированной системе линейных осцилляторов при воздействии внешних сил. Часть I. Системный анализ структуры сил // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 3. – С. 5–18.

[16] Логинов А.А. Эволюционные процессы в параметрически модулированной системе линейных осцилляторов при воздействии внешних сил. Часть II. Системный анализ управляемого переноса энергии в связке двух осцилляторов // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 5. – С. 5–11.

[17] Самойленко Ю.И. Преобразование энергии тепловых флуктуаций в когерентную форму при параметрической модуляции гироскопически связанных осцилляторов // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – Т. 2, № 3. С. –292 с.

[18] Cercignani C., Gerasimenko V., Petrina D.Ya. Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. – 1997. – 252 p.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2007, т.4, N 3, 232–246

517.9

Класифікація симетрійних властивостей диференціальних рівнянь за допомогою перетворень Q-умовної еквівалентності

М. І. Сєров, І. В. Рассоха, Т. О. Карпалюк

Полтавський нац. технічний університет ім. Юрія Кондратюка
E-mail: k26@pntu.edu.ua

Введено поняття Q-умовної еквівалентності та вказано алгоритм відшукання групи Q-умовної еквівалентності. На прикладах дослідження нелінійного рівняння теплопровідності та еволюційного рівняння другого порядку показано застосування Q-умовної еквівалентності до розв'язання задачі групової класифікації.

The conception of Q-conditional equivalence is introduced and the algorithm of finding of the Q-conditional equivalence group is worked out. An application of Q-conditional equivalence to a group classification problem is illustrated by the investigation of the nonlinear heat equation and the second order evolutional equation.

1. Вступ. Більшість диференціальних рівнянь, як правило, містять одну чи кілька довільних функцій і тому утворюють певні класи рівнянь. Виникає запитання: яке рівняння з певного класу найбільш точно та досконало описує явище, яке досліджується. Часто таке рівняння підбирається емпіричними методами. Але, як відомо, більшість рівнянь, що описують реальні фізичні процеси, володіють широкими симетрійними властивостями. Тому наявність широкої симетрії рівняння може служити критерієм відбору його в якості математичної моделі опису того чи іншого процесу.

У зв'язку з цим досить актуальною є задача дослідження симетрійних властивостей диференціального рівняння в залежності від вигляду довільних елементів, що входять в нього. Ця задача носить назву задачі групової класифікації диференціальних рівнянь. Її розв'язанню приділяли увагу багато авторів. Так, у працях [1–3] з цією метою застосовується метод С. Лі, а в [4, 5] цей метод дещо модифіковано на основі використання перетворення еквівалентності рівнянь та теорії абстрактних алгебр Лі.

У даній статті на основі поняття умовної інваріантності диференціальних рівнянь, що було введене в низці статей [6–13], запропоновано поняття Q-умовної еквівалентності диференціальних рівнянь, яке застосовано до розв'язування задачі групової класифікації нелінійного рівняння теплопровідності та еволюційного рівняння другого порядку. Відзначимо, що в [14] описано поняття умовної групи еквівалентності нормалізованого класу диференціальних рівнянь.

2. Нелінійне рівняння теплопровідності. Розглянемо нелінійне рівняння теплопровідності

$$u_0 = u_{11} + F(u), \tag{1}$$

де $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1)$, $u_0 = \frac{\partial u}{\partial x_0}$, $u_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$, $F(u)$ — довільна гладка функція. Добре відомі результати групової класифікації рівняння (1) одержано в рамках методу С. Лі (див., наприклад, [15]). Якщо застосувати даний метод до дослідження симетрійних властивостей рівняння (1), то одержимо систему визначальних рівнянь:

$$\xi^0_1 = \xi^0_u = \xi^1_u = 0, \quad \xi^0_0 = 2\xi^1_1, \quad \xi^1_0 + 2\eta_{1u} = 0, \quad \eta_{uu} = 0, \tag{2}$$

$$\eta \dot{F} = (\eta_u - 2\xi^1_1)F + \eta_0 - \eta_{11}. \tag{3}$$

Проаналізувавши всеможливі розв'язки системи (2), (3) одержимо вигляд функції $F(u)$ та відповідну їй максимальну алгебру інваріантності (МАІ) рівняння (1). Справедливе твердження.

Твердження 1. *Нехай $\lambda_i \neq 0$, $i = \overline{1,5}$, $k \neq 0; 1$, θ — довільні сталі. Максимальна алгебра інваріантності рівняння (1) визначаеться:*

у випадку рівняння $u_0 = u_{11} + f(u)$, де $f(u)$ — довільна гладка функція, – операторами ∂_0, ∂_1;

у випадку рівняння $u_0 = u_{11} + \lambda_1 e^{ku}$ — операторами

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad D_1 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - \frac{2}{k}\partial_u; \tag{4}$$

у випадку рівняння $u_0 = u_{11} + \lambda_2(u+\theta)^k$ *— операторами*

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad D_2 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + \frac{2}{1-k}(u+\theta)\partial_u; \tag{5}$$

у випадку рівняння $u_0 = u_{11} + \lambda_3(u+\theta)\ln(u+\theta)$ *— операторами*

$$\partial_0,\ \partial_1,\ G = e^{\lambda_3 x_0}(\partial_1 - \frac{1}{2}\lambda_3 x_1(u+\theta)\partial_u), \quad M = e^{\lambda_3 x_0}(u+\theta)\partial_u; \tag{6}$$

у випадку рівняння $u_0 = u_{11} + \lambda_4(u+\theta)$ *— операторами*

$$\partial_0,\ \partial_1, \quad G_1 = x_0\partial_1 - \frac{1}{2}x_1(u+\theta)\partial_u, \quad X_1 = \gamma(x_0,x_1)\partial_u, \tag{7}$$

$$M_1 = (u+\theta)\partial_u, \quad D_3 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2\lambda_4 x_0(u+\theta)\partial_u, \tag{8}$$

$$\Pi_1 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x_1^2 + x_0)(u+\theta)\partial_u + \lambda_4 x_0^2(u+\theta)\partial_u, \tag{9}$$

де $\gamma(x_0,x_1)$ *— розв'язок рівняння* $\gamma_0 = \gamma_{11} + \lambda_4(\gamma+\theta)$*;*

у випадку рівняння $u_0 = u_{11} + \lambda_5$ *— операторами*

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad M_2 = (u - \lambda_5 x_0)\partial_u, \quad X_2 = \sigma(x_0,x_1)\partial_u, \tag{10}$$

$$G_2 = x_0\partial_1 - \frac{1}{2}x_1(u-\lambda_5 x_0)\partial_u, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2\lambda_5 x_0\partial_u, \tag{11}$$

$$\Pi_2 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x_1^2 + x_0)u\partial_u + \frac{\lambda_5}{4}x_0(x_1^2 + 6x_0)\partial_u, \tag{12}$$

де $\sigma(x_0,x_1)$ *— розв'язок рівняння* $\sigma_0 = \sigma_{11}$.

У [4, 5] запропоновано інший метод симетрійної класифікації диференціальних рівнянь, який базується на знаходженні групи еквівалентності даного рівняння. Згідно з цим методом для класифікації симетрійних властивостей диференціального рівняння використовується умова

$$\tilde{E}\Phi(y,F)|_{\Phi=0} = 0, \tag{13}$$

де $\tilde{E}$ — продовження інфінітезимального оператора групи еквівалентності

$$E = \xi^0(x,u)\partial_0 + \xi^1(x,u)\partial_1 + \eta(x,u)\partial_u + \zeta(y,F)\partial_F, \tag{14}$$

y — сукупність усіх змінних, від яких може залежати довільний елемент F, що входить у рівняння, Φ — довільна гладка функція.

Відомо, що максимальною групою неперервних перетворень еквівалентності рівняння (1) є група, координати інфінітезимального оператора якої мають вигляд

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2æ_1 x_0 + d_0, \quad \xi^1 = æ_1 x_1 + d_1, \\ \eta &= æ_2 u + d_2, \quad \zeta = (æ_2 - 2æ_1)F, \end{aligned} \tag{15}$$

де $æ_a$, d_μ — групові параметри, $a = 1; 2$, $\mu = \overline{0, 2}$.

Застосуємо умову (13) до класифікації симетрійних властивостей рівняння (1). Оскільки $\Phi = \Phi(u, F)$, то дана умова має вигляд

$$\eta \Phi_u + \zeta \Phi_F = 0. \tag{16}$$

Загальний розв'язок рівняння (16) (див. наприклад, [16]) виражається через перший інтеграл звичайного диференціального рівняння

$$\frac{du}{\eta} = \frac{dF}{\zeta}$$

або, враховуючи формули (15),

$$\frac{du}{æ_2 u + d_2} = \frac{dF}{(æ_2 - 2æ_1)F} \, . \tag{17}$$

Перший інтеграл рівняння (17) залежить від значень сталих $æ_1$, $æ_2$, d_2. Можливі три нееквівалентні випадки:

1. $æ_1 = æ_2 = d_2 = 0$. У цьому випадку рівняння (1) має вигляд

$$u_0 = u_{11} + f(u), \tag{18}$$

де $f(u)$ — довільна гладка функція.

2. $æ_1 \neq 0$, $æ_2 = 0$, $d_2 \neq 0$.

Проінтегрувавши рівняння (17), в явному вигляді одержимо функцію $F(u)$, якій відповідає рівняння

$$u_0 = u_{11} + \lambda_1 e^{ku} \tag{19}$$

де $k = -\frac{2æ_1}{d_2}$, λ_1 — стала інтегрування.

3. $æ_2 \neq 0$. Загальний розв'язок рівняння (17) має вигляд

$$F = \lambda_2 (u + \theta)^k, \tag{20}$$

де $\theta = \frac{d_2}{æ_2}$, $k = 1 - \frac{2æ_1}{æ_2}$, λ_2 — стала інтегрування. Рівняння (1) у даному випадку має вигляд

$$u_0 = u_{11} + \lambda_2 (u + \theta)^k. \tag{21}$$

Порівнюючи одержані результати з результатами, що подані вище (див. (4)–(12)), бачимо, що до класу рівнянь (18), (19), (21) не входить рівняння

$$u_0 = u_{11} + \lambda_3 (u + \theta) \ln(u + \theta), \tag{22}$$

яке за допомогою локальної підстановки не може бути зведеним до будь-якого розглянутого вище рівняння вигляду (1), оскільки розмірність його максимальної алгебри еквівалентності не співпадає з розмірністю алгебр, що відповідають цим рівнянням.

3. Q-умовна еквівалентність. Позбутися недоліку, вказаного в попередньому пункті, можна, ввівши поняття оператора Q-умовної еквівалентності диференціальних рівнянь, яке є аналогом поняття Q-умовної інваріантності (див. [17]).

Означення. Оператор

$$Q = A\partial_x + B\partial_u + C\partial_F \tag{23}$$

називається оператором Q-умовної еквівалентності системи рівнянь

$$S\left(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{p}{u}, F, \underset{1}{F}, \underset{2}{F}, \ldots, \underset{k}{F}\right) = 0, \tag{24}$$

якщо він породжується групою перетворень еквівалентності даної системи за умови

$$\tilde{Q}F = 0, \tag{25}$$

тобто

$$\tilde{Q}S = f^0 S + f^1(\tilde{Q}F), \tag{26}$$

де $\tilde{Q}F = \chi F_y - C$, $\chi = \left(A, B, C, \underset{1}{C}, \underset{2}{C}, \ldots, \underset{k}{C}\right)$, $\tilde{Q}$ — продовження оператора Q, $\underset{s}{C}$ — продовження s-го порядку функцій C, $u = u(x)$,

$x \in R^n$, $u \in R^m$,$F = F\left(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{m}{u}\right) \in R^l$ — довільні гладкі функції; $\underset{\alpha}{u}$, $\underset{\beta}{F}$ — сукупність всеможливих похідних відповідно порядку α від функцій u та порядку β від функцій F; f^0, f^1 — деякі функції; $n,\ m,\ l\ \in\ N$.

Система (24) називається Q-умовно еквівалентною щодо оператора (23), якщо вона допускає перетворення еквівалентності, породжені даним оператором.

Зауваження. У зв'язку з введенням поняття оператора Q-умовної еквівалентності групу еквівалентності, що одержана за допомогою запропонованого в [4] методу будемо називати основною групою перетворень еквівалентності диференціального рівняння і позначати BEG.

Таким чином, при дослідженні Q-умовної еквівалентності серед рівнянь класу (24) виділяєємо підклас, який може мати іншу групу перетворень еквівалентності, порівняно з BEG.

Використаємо введене вище поняття оператора Q-умовної еквівалентності для класифікації всеможливих нелінійностей рівняння (1), при яких це рівняння має різні максимальні алгебри інваріантності. Справедливе таке твердження.

Теорема 1. *Оператор Q вигляду* (23) *є оператором Q-умовної еквівалентності рівняння* (1), *якщо його коефіцієнти мають вигляд:*

$$A^0 = c_1,\ A^1 = c_2,\ B = 0,\ C = 0$$

— у випадку рівняння (18);

$$A^0 = 2c_1x_0 + c_2,\ \ A^1 = c_1x_1 + c_3,\ \ B = -\frac{2}{k}c_1,\ \ C = -2c_1\lambda_1 e^{ku}$$

— у випадку рівняння (19);

$$A^0 = 2c_1x_0+c_2,\ A^1 = c_1x_1+c_3,\ B = \frac{2c_1}{1-k}(u+\theta),\ C = \frac{2c_1\lambda_2 k}{1-k}(u+\theta)^k$$

— у випадку рівняння (21);

$$A^0 = c_1,\ \ A^1 = c_2 + c_3e^{\lambda_3 x_0},\ \ B = -\frac{\lambda_3}{2}(c_3x_1 + c_4)e^{\lambda_3 x_0}(u+\theta),$$

$$C = -\frac{\lambda_3^2}{2}e^{\lambda_3 x_0}(c_3x_1 + c_4)(u + \theta)(\ln(u + \theta) + 1)$$

— *у випадку рівняння* (22);

$$A^0 = c_1x_0^2 + 2c_2x_0 + c_3, \quad A^1 = (c_1x_0 + c_2)x_1 + c_4x_0 + c_5,$$

$$B = -\frac{1}{2}[\frac{c_1}{2}x_1^2 + c_4x_1 - 2c_1\lambda_4x_0^2 + (c_1 - 4\lambda_4c_2)x_0 + +c_6](u + \theta) + c_7\gamma,$$

$$C = -\frac{\lambda_4}{2}[\frac{c_1}{2}x_1^2 + c_4x_1 - 2c_1\lambda_4x_0^2 + (c_1 - 4\lambda_4c_1)x_0 + c_6](u + \theta) + \lambda_4c_7\gamma$$

—*у випадку рівняння* $u_0 = u_{11} + \lambda_4(u + \theta)$;

$$A^0 = c_6x_0^2 + 2c_5x_0 + c_1, \quad A^1 = (c_6x_0 + c_5)x_1 + c_3x_0 + c_2, \quad C = 0,$$

$$B = -\frac{1}{2}[c_6(\frac{1}{2}x_1^2 + x_0) + c_3x_1 - 2c_4]u +$$

$$+\frac{\lambda_5}{2}x_0[c_6(\frac{1}{2}x_1^2 + 3x_0) + c_3x_1 - 2c_4 + 4c_5] + c_7\sigma,$$

— *у випадку рівняння* $u_0 = u_{11} + \lambda_5$.

Тут k, λ, θ, c_i, $i = \overline{1,7}$, *— довільні сталі; функції* $\gamma = \gamma(x_0, x_1)$, $\sigma = \sigma(x_0, x_1)$ *описано вище.*

Доведення. З умови Q-умовної еквівалентності рівняння (1)

$$\tilde{Q}(u_0 - u_{11} - F)|_{M=0} = 0, \quad \tilde{Q}F_\mu|_{M=0} = 0, \tilde{Q}F_{u_\mu}|_{M=0} = 0,$$

де M — многовид, що визначається співвідношеннями

$$u_0 = u_{11} + F, \qquad F_\mu = 0, \qquad F_{u_\mu} = 0, \tag{27}$$

$$B\dot{F} = C, \tag{28}$$

отримуємо систему для визначення коефіцієнтів A, B, C оператора Q в (23) та зображень F:

$$A_1^0 = A_u^0 = A_u^1 = 0, \; A_0^0 = 2A_1^1, \; A_0^1 + 2B_{1u} = 0, \; B_{uu} = 0, \tag{29}$$

$$C = (B_u - 2A_1^1)F + B_0 - B_{11}, \tag{30}$$

$$BC_\mu = CB_\mu, \quad BC_{u_\mu} = CB_{u_\mu}. \tag{31}$$

Підставивши (28) у рівняння (30), одержимо рівняння (3). Отже, система рівнянь (29), (30) за умови (28) повністю співпадає із системою (2), (3), звідки випливає, що функція $F(u)$ в (1) має вигляд однієї з правих частин рівняння (1), що розглянуті в твердженні 1. Вигляд функцій C можна уточнити за допомогою рівнянь (31). Таким чином, теорему доведено.

Таким чином, запропонований метод дозволяє знайти всі зображення функцій F для рівняння (1), сформульованих в твердженні 1.

4. Еволюційне рівняння другого порядку. Розглянемо еволюційне рівняння

$$w_0 = wf(w_{11}w^3), \tag{32}$$

де $w = w(x)$, $x = (x_0, x_1)$, f — довільна гладка функція.

Рівняння (32) розглянуто в [18] для ілюстрації теореми про те, що алгебра інваріантності еволюційного рівняння складається не більше, ніж з $n + 5$ операторів, де n — порядок рівняння. Це є рівняння, яке в [19] було одержане як еволюційне рівняння, що інваріантне відносно конформної алгебри. Застосуємо введене вище поняття оператора Q-умовної еквівалентності для класифікації симетрійних властивостей рівняння (32).

Для зручності дослідження за допомогою заміни

$$w = e^u \tag{33}$$

перейдемо до еквівалентного рівняння вигляду

$$u_{11} + u_1^2 = e^{-4u}F(u_0), \tag{34}$$

де F — довільна гладка функція.

При класифікації симетрійних властивостей рівняння (34) за методом С. Лі приходимо до розв'язування системи визначальних рівнянь вигляду [19]:

$$\begin{gathered} \xi^0_1 = \xi^0_u = 0,\ \xi^1_{uu} - \xi^1_u = 0,\ \eta_{uu} - \eta_u - 2\xi^1_{1u} = 0, \\ (\xi^1_u u_0 + \xi^1_0)\dot{F} - 3\xi^1_u F + (2\eta_{1u} + 2\eta_1 - \xi^1_{11})e^{4u} = 0, \\ [(\eta_u - \xi^0_0)u_0 + \eta_0]\dot{F} - (\eta_u + 4\eta - 2\xi^1_1)F + \eta_{11}e^{4u} = 0. \end{gathered} \tag{35}$$

Розв'язавши систему (35), одержимо вигляд функцій ξ^0, ξ^1, η, F. Має місце твердження.

Твердження 2. *Нехай $\varphi = \varphi(u_0)$ — довільна гладка функція, $\lambda_i \neq 0$, $i = \overline{1,7}$, — довільні сталі. Максимальна алгебра інваріантності рівняння (34) визначається:*

у випадку рівняння $u_{11} + u_1^2 = \varphi(u_0)e^{-4u}$ *– операторами* ∂_0, ∂_1, $D = 2x_1\partial_1 + \partial_u$, $K = x_1^2\partial_1 + x_1\partial_u$;

у випадку рівняння $u_{11} + u_1^2 = \lambda_1 e^{mu_0 - 4u}$ *— операторами* ∂_0, ∂_1, D, K, $X_1 = e^{\frac{4}{m}x_0}\partial_u$;

у випадку рівняння $u_{11} + u_1^2 = \lambda_2 e^{-4u}(u_0 + \theta)^m$ *— операторами* ∂_0, ∂_1, D, K, $X_2 = e^{\frac{4\theta}{m}x_0}(\partial_0 - \theta\partial_u)$, *де* $m \neq 0; \pm 3$;

у випадку рівняння $u_{11} + u_1^2 = \lambda_3 e^{-4u}u_0^m$ *– операторами* ∂_0, ∂_1, D, K, $D_0 = 2x_0\partial_0 + mx_1\partial_1$, *де* $m \neq 0; \pm 3$;

у випадку рівняння $u_{11} + u_1^2 = \lambda_4 e^{-4u}(u_0 + \theta)^{-3}$ *— операторами* ∂_0, ∂_1, D, K, D_0, $X_3 = x_1 e^{-\theta x_0 - u}\partial_u$, $X_4 = e^{-\theta x_0 - u}\partial_u$, *де* $m = -3$;

у випадку рівняння $u_{11} + u_1^2 = \lambda_5 e^{-4u}u_0^{-3}$ *— операторами* ∂_0, ∂_1, D, K, D_0, X_3, X_4, *де* $m = -3, \theta = 0$;

у випадку рівняння $u_{11} + u_1^2 = \lambda_6 e^{-4u}(u_0 + \theta)^3$ *— операторами* ∂_0, ∂_1, D, K, D_0, $X_5 = e^{\theta x_0 + u}\partial_1$, $X_6 = e^{\theta x_0 + u}(x_1\partial_1 + \partial_u)$, *де* $m = 3$;

у випадку рівняння $u_{11} + u_1^2 = \lambda_7 e^{-4u}u_0^3$ *— операторами* ∂_0, ∂_1, D, K, D_0, X_5, X_6, *де* $m = 3, \theta = 0$.

Основною групою перетворень еквівалентності рівняння (34), як це встановлено в [19], є група, координати інфінітезимального оператора якої задаються формулами

$$\xi^0 = c_1x_0 + c_2,\ \xi^1 = c_3x_1^2 + (2c_4 + c_5)x_1 + c_6,\ \eta = c_3x_1 + c_4, \quad (36)$$

$$\zeta = -2c_5F. \quad (37)$$

Прокласифікуємо нееквівалентні зображення функції F за допомогою основної групи перетворень еквівалентності.

Лема. *Нееквівалентні рівняння вигляду* (34) *з точністю до перетворень основної групи еквівалентності мають вигляд*

$$u_{11} + u_1^2 = \varphi(u_0)e^{-4u} \quad (38)$$

$$u_{11} + u_1^2 = \lambda e^{-4u}u_0^m, \quad (39)$$

де $\lambda \neq 0$, $m \neq 0$ *— довільні сталі,* $\varphi = \varphi(u_0)$ *— довільна гладка функція.*

Доведення. Подіявши оператором (14) на многовид

$$\Phi(u_0, F) = 0,$$

одержимо

$$^0\eta\Phi_{u_0} + \zeta\Phi_F = 0, \tag{40}$$

де $^0\eta$ — продовження функцій η за змінною x_0. Підставивши (36) у (40) та врахувавши, що $^0\eta = -c_1 u_0$, одержимо

$$c_1 u_0 \Phi_{u_0} + 2c_5 F\Phi_F = 0.$$

Можливі два різні випадки:

1. $c_1 = c_5 = 0$. У цьому випадку

$$F = \varphi(u_0),$$

де $\varphi = \varphi(u_0)$ — довільна гладка функція, що приводить до рівняння (38).

2. $c_1 \neq 0$, c_5 — довільна стала. Розв'язуючи останнє рівняння, встановлюємо вигляд функції F:

$$F = \lambda u_0^m,$$

де $m = \frac{2c_5}{c_1}$, λ — стала інтегрування, та відповідне рівняння (39).

Лему доведено.

Порівнявши результати леми 2 з твердженням 2, приходимо до висновку, що, як і у випадку рівняння (1), метод класифікації симетрійних властивостей рівняння (34) за допомогою перетворень BEG не приводить до всіх нееквівалентних випадків, одержаних за допомогою методу С. Лі.

Запишемо вигляд нееквівалентних представлень рівняння (34) та прокласифікуємо його симетрійні властивості за допомогою поняття оператора Q-умовної еквівалентності.

Теорема 2. *Оператор* (23) *є оператором Q-умовної еквівалентності рівняння* (34), *якщо його коефіцієнти мають вигляд:*

$$A^0 = c_1,\ A^1 = c_2 x_1^2 + 2c_3 x_1 + c_4,\ B = c_2 x_1 + c_3,\ C = 0$$

— у випадку рівняння $u_{11} + u_1^2 = \varphi(u_0)e^{-4u}$;

$$A^0 = c_1,\ A^1 = c_3 x_1^2 + 2c_4 x_1 + c_2,$$

$$B = c_3 x_1 + \frac{c_5}{m}\, e^{\frac{4}{m}x_0} + c_4,\ C = \frac{4\lambda_1 c_5}{m}\, e^{\frac{4}{m}x_0 + mu_0}$$

— *у випадку рівняння* $u_{11}+u_1^2=\lambda_1 e^{mu_0-4u}$, *де* $m\neq 0$;

$$A^0=-\frac{c_4}{m}e^{4\frac{\theta}{m}x_0}+c_1,\ A^1=c_3x_1^2+2c_4x_1+c_2,$$

$$B=c_3x_1+\frac{c_5\theta}{m}e^{\frac{4\theta}{m}x_0}+c_4,\ C=\frac{4\lambda_2\theta c_5}{m}e^{\frac{4\theta}{m}x_0}(u_0+\theta)^m$$

— *у випадку рівняння*

$$u_{11}+u_1^2=\lambda_2 e^{-4u}(u_0+\theta)^m,\quad \text{де}\quad m\neq 0,\ \pm 3; \tag{41}$$

$$A^0=\frac{4}{m}c_5x_0+c_1,\ A^1=c_3x_1^2+(c_5+c_4)x_1+c_2,$$

$$B=c_3x_1+c_4,\ C=2\lambda_3(c_4-c_5)u_0^m$$

— *у випадку рівняння*

$$u_{11}+u_1^2=\lambda_3 e^{-4u}u_0^m,\quad \text{де}\quad m\neq 0,\ \pm 3; \tag{42}$$

$$A^0=c_4e^{-\frac{4}{3}\theta x_0}+c_7,\ A^1=c_3x_1^2+2c_5x_1+c_6,$$

$$B=(c_1x_1+c_2)e^{-\theta x_0-u}+c_3x_1-\theta c_4e^{-\frac{4}{3}\theta x_0}+c_5,$$

$$C=3\lambda_4 e^{-\theta x_0}[(c_1x_1+c_2)e^{-u}-\frac{4}{3}\theta c_4e^{-\frac{\theta}{3}x_0}](u_0+\theta)^{-3}$$

— *у випадку рівняння*

$$u_{11}+u_1^2=\lambda_4 e^{-4u}(u_0+\theta)^{-3}; \tag{43}$$

$$A^0=c_5x_0+c_6,\ A^1=c_3x_1^2+2(c_4-\frac{3}{4}c_5)x_1+c_7,$$

$$B=(c_1x_1+c_2)e^{-u}+c_3x_1+c_4,$$

$$C=3\lambda_5[(c_1x_1+c_2)e^{-u}+c_5]u_0^{-3}$$

— *у випадку рівняння*

$$u_{11}+u_1^2=\lambda_5 e^{-4u}u_0^{-3}; \tag{44}$$

$$A^0=c_4e^{\frac{4}{3}\theta x_0}+c_1,\ A^1=(c_5x_1+c_6)e^{\theta x_0+u}+c_3x_1^2+2c_7x_1+c_2,$$

$$B=c_5e^{\theta x_0+u}+c_3x_1-\theta c_4e^{\frac{4}{3}\theta x_0}+c_7,$$

$$C = 3\lambda_6 e^{\theta x_0}[(c_5 - u_1(c_5x_1 + c_6))e^u - \frac{4}{3}\theta c_4 e^{\frac{\theta}{3}x_0}](u_0 + \theta)^3$$

— *у випадку рівняння*

$$u_{11} + u_1^2 = \lambda_6 e^{-4u}(u_0 + \theta)^3; \tag{45}$$

$$A^0 = c_7x_0 + c_1,\ A^1 = (c_5x_1 + c_6)e^u + c_3x_1^2 + 2(\frac{3}{4}c_7 + c_4)x_1 + c_2,$$

$$B = c_5e^u + c_3x_1 + c_4,\ C = 3\lambda_7[(c_5 - u_1(c_5x_1 + c_6))e^u - c_7]u_0^3$$

— *у випадку рівняння*

$$u_{11} + u_1^2 = \lambda_7 e^{-4u}u_0^3. \tag{46}$$

Доведення. З умови визначення оператора Q-умовної еквівалентності рівняння (34) знаходимо:

$$\tilde{Q}(u_{11} + u_1^2 - Fe^{-4u})|_{M=0} = 0,$$

$$\tilde{Q}F_\mu|_{M=0} = 0, \qquad \tilde{Q}F_u|_{M=0} = 0, \qquad \tilde{Q}F_{u_1}|_{M=0} = 0,$$

де M — многовид, що задається співвідношеннями:

$$u_{11} + u_1^2 = Fe^{-4u},\ F_\mu = 0,\ F_u = 0,\ F_{u_1} = 0, \tag{47}$$

$$^0BF_{u_0} = C, \tag{48}$$

$\tilde{Q}$ — продовження оператора Q, знаходимо систему рівнянь для визначення функцій A^0, A^1, B, C, F:

$$A_1^0 = A_u^0 = 0, \tag{49}$$

$$C = (B_u + 4B - 2A_1^1 - 3A_u^1u_1)F + [(A_u^1 - A_{uu}^1)u_1^3 + \tag{50}$$

$$+B_{11} + (2B_{1u} - A_{11}^1 + 2B_1)u_1 + (B_{uu} + B_u - 2A_{1u}^1)u_1^2]e^{4u},$$

$$BC_\mu = CB_\mu, \quad BC_u = CB_u, \quad BC_{u_1} = CB_{u_1}. \tag{51}$$

Якщо (48) підставити в (50) та розщепити одержану рівність за різними степенями u_1, то одержимо систему рівнянь, яка співпаде з системою (35), тому їх розв'язки приводять до результатів, поданих у твердженні 2. Уточнивши вигляд функцій C із системи (51), одержимо результати, подані у теоремі 2. Теорему 2 доведено.

Спростимо вигляд деяких рівнянь, що згадуються у теоремі 2, за допомогою додаткових перетворень еквівалентності. Проаналізувавши вигляд рівнянь з теореми 2, приходимо до висновку, що за допомогою заміни

$$t = -\frac{m}{4\theta} e^{-\frac{4\theta}{m} x_0}, \quad x = x_1, \quad w = u + \theta x_0 \tag{52}$$

рівняння (41), (43), (45), зводяться до рівнянь (42), (46) відповідно.

Врахувавши заміну (33), знаходимо локально нееквівалентні рівняння вигляду (32) та їх максимальні алгебри еквівалентності. Має місце твердження, що описує симетрійні властивості локально нееквівалентних рівнянь (32).

Твердження 3. *Нехай –* λ_i, $i = \overline{1,4}$, *— довільні сталі. Максимальна алгебра інваріантності рівняння вигляду* (32) *визначається:*

у випадку рівняння $w_0 = wf(w_{11}w^3)$ *— операторами* ∂_0, ∂_1, $D = 2x_1\partial_1 + w\partial_w$, $K = x_1^2\partial_1 + x_1 w\partial_w$;

у випадку рівняння $w_0 = \lambda_1 w(w_{11}w^3)^m$, *де* $m \neq \pm\frac{1}{3}$, *— операторами* ∂_0, ∂_1, D, K, $D_0 = 4mx_0\partial_0 - w\partial_w$;

у випадку рівняння $w_0 = \lambda_2 w(w_{11}w^3)^{-\frac{1}{3}}$, *де* $m = -\frac{1}{3}$, *— операторами* ∂_0, ∂_1, D, K, D_0, $x_0\partial_w$, ∂_w;

у випадку рівняння $w_0 = \lambda_3 w(w_{11}w^3)^{\frac{1}{3}}$, *де* $m = \frac{1}{3}$, *— операторами* ∂_0, ∂_1, D, K, D_0, $w\partial_1$, $K_1 = x_1 w\partial_1 + w^2\partial_w$;

у випадку рівняння $w_0 = \lambda_4 w \ln(w_{11}w^3)$ *— операторами* ∂_0, ∂_1, D, K, $Y = e^{4x_0} w\partial_w$.

Зазначимо, що для рівнянь (1), (32) нееквівалентні зображення нелінійностей, отримані стандартним методом С. Лі та за допомогою дослідження оператора Q-умовної еквівалентності цих рівнянь, співпадають.

Таким чином, дослідження рівнянь (1), (32) разом з додатковою умовою (25) дозволяє повністю розв'язати задачу групової класифікації даних рівнянь за допомогою перетворень групи Q-умовної еквівалентності.

Висновок. Введено поняття оператора Q-умовної еквівалентності рівняння та вказано алгоритм відшукання таких операторів. Застосування операторів Q-умовної еквівалентності для класифікації симетрійних властивостей проілюстровано на прикладах нелінійного рівняння теплопровідності (1) та еволюційного рівняння другого порядку (32).

[1] Lie S. Über Integration durch bestimmente Integrale von einer Klasse lineare partiellen Differentialgleichungen 6. – Leipzig, 1881. – P. 328–368.

[2] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука. –1978. –400 с.

[3] Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. – 1959. – **125**. – 492 с.

[4] Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Современные проблемы математики. Новейшие достижения: Итоги науки и техники. – М.: ВИНИТИ АН СССР. – 1989. – **34**. – С. 3.

[5] Лагно В. І., Спічак С. В., Стогній В. І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу // Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. – 2002. – **45.** – 359 с.

[6] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. –639 с.

[7] Фущич В. И., Никитин А. Г. Симметрия уравнений Максвелла. – Киев: Наукова думка, 1983. – 200 с.

[8] Blumen G. W., Cole J. D. The general similarity solution of the heat equation // J. Math. Mech. – 1969. – **18**. – P. 1025–1042.

[9] Fushchych W. I., Tsyfra I. M. On a reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. – 1987. – **20**. – P. L45–L48.

[10] Фущич В. И., Серов Н. И., Чопик В. И. Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 9. – С. 17–20.

[11] Фущич В. И., Чопик В. И. Условная инвариантность нелинейых уравнений Шредингера // Докл. АН УССР. – 1990. – № 4. – С. 30–33.

[12] Popovych R. O. On reduction and Q-conditional symmetry // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics"(Kyiv , July 7-13, 1997). – Kyiv: Institute of Mathematics. – 1997. – **2**. – P. 437-443.

[13] Popovych R. O. Equivalence Q-conditional symmetries under group of local transformation // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2000. – **30**. – С. 184–189.

[14] Popovych R. O. Classification of admissible transformations of differential equations //Сб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 2. – С. 239–254.

[15] Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником // Журнал вычислительной математики и математической физики. –1982. –**22**, № 6. – С. 1393–1409.

[16] Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958. – 468 с.

[17] Fushchych W., Shtelen W., Serov M. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics // Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 436 p.

[18] Магадеев Б. А. Структура симметрии эволюционных уравнений: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Уфа, 1990. – 103 с.

[19] Ічанська Н. В. Ліївська та умовна симетрії деяких нелінійних еволюційних рівнянь: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Полтава, 2005. – 148 с.

Зміст

Наукове видання

Збірник праць
Інституту математики НАН України

Том 4 № 3

Математичні методи в статистичній механіці

Комп'ютерний оригінал-макет *Ж.Я. Артемиченко*

Редактор *В.Е. Гонтковсъка*

Підписано до друку 25.12.2007 Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 15,8 Умов. друк. арк. 14,7. Зам. № 313. Тираж 300 пр.

Інститут математики НАН України
01601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3