Актуальні проблеми математичної фізики та її застосувань

Інститут математики
Національної академії наук України

Збірник праць
Інституту математики НАН України
Т. 11 № 1

Головний редактор: *А.М. Самойленко*

Редакційна рада: *Ю.М. Березанський, М.Л. Горбачук, А.А. Дороговцев, Ю.А. Дрозд, Ю.Б. Зелінський, В.С. Королюк, А.Н. Кочубей, І.О. Луковський, В.Л. Макаров, А.Г. Нікітін, В.В. Новицький, М.В. Працьовитий, О.Л. Ребенко, А.С. Романюк, Ю.С. Самойлленко, С.Г. Солодкий, В.В. Шарко, О.М. Шарковський*

Інститут математики
Національної академії наук України

АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАНЬ

Київ — 2014

УДК 517.9+531.31+530.145

Актуальні проблеми математичної фізики та її застосувань / Відп. ред.: В.І. Герасименко, О.Л. Ребенко // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – Т. 11, № 1: – Київ: Ін-т математики НАН України, 2014. – 401 с.

ISSN 1815-2910

Представлено статті з актуальних проблем сучасної математичної фізики та її застосувань, які входили в коло наукових інтересів академіка Дмитра Яковича Петрини, видатного українського вченого в галузі математичної фізики.

Розраховано на наукових працівників, аспірантів, які цікавляться актуальними проблемами математичної фізики та її застосувань.

Видавнича група збірника: доктор фіз.-мат. наук, професор В.І. Герасименко, доктор фіз.-мат. наук, професор О.Л. Ребенко (відповідальні редактори).

Рецензенти: доктор фіз.-мат. наук, А.Н. Кочубей
доктор фіз.-мат. наук, професор І.О. Шевчук.

Затверджено до друку Вченою радою
Інституту математики НАН України,
протокол № 7 від 18.02.2014

Свідоцтво про державну реєстрацію – серія КВ № 8459,
видане 19 лютого 2004 р.

© **Ін-т математики НАН України, 2014**

Наукове видання

Збірник праць

Інституту математики НАН України

Т. 11 № 1

Актуальні проблеми математичної фізики та її застосувань

Підп. до друку 25.02.2014. Формат 60х84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 25,1. Ум. друк. арк. 23,3. Зам. 141. Тираж 300 пр.

Ін-т математики НАН України
01601, Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3

Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 3–4

Зміст

Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, N 1, 5–7

Дмитро Якович Петрина (до 80-річчя від дня народження)

Академік НАН України Дмитро Якович Петрина був і залишається видатним українським вченим в галузі сучасної математичної фізики. Він є одним з фундаторів нерівноважної математичної статистичної механіки і евклідової теорії поля.

Академік Д.Я. Петрина був яскравим представником наукової школи Боголюбова – Парасюка з сучасної математичної фізики. Його наукові дослідження стосуються математичних проблем квантової теорії поля і статистичної механіки. В 1961–1967 рр. Д.Я. Петриною сформульовано найбільш загальний критерій справедливості спектральних зображень для амплітуд розсіяння теорії збурень аналітичної матриці розсіяння. Доведено теорему про неможливість побудови нелокальної теорії поля з додатним спектром енергії-імпульсу. На початку 70-х років він запропонував системи рівнянь для коефіцієнтних функцій матриці розсіяння та встановлено зв'язок евклідової теорії поля і статистичної механіки. В 1969 р. була доведена теорема Боголюбова – Петрини – Хацета про існування термодинамічної границі рівноважних станів статистичних систем, на основі якої була розвинута сучасна математична статистична механіка. В працях 1972–2004 рр. Д.Я. Петриною була розроблена математична теорія нерівноважних статистичних систем. В цьому напрямку ним розроблені методи дослідження ієрархій рівнянь Боголюбова нескінченних динамічних систем та вперше доведено існування термодинамічної границі для нерівноважних станів. За допомогою цих результатів було розв'язано фундаментальну проблему обґрунтування кінетичного рівняння Больцмана для моделі твердих куль, яке широко використовується не лише при дослідженні газів, плазми та конденсованих станів систем багатьох частинок, але й для опису еволюційних процесів складних систем різноманітної природи. В статистичній теорії квантових систем Д.Я. Петрині належать класичні результати з дослідження спектрів модельних гамільтоніанів теорії надпровідності й надплинності у введених ним просторах

© Institute of Mathematics, 2014

трансляційно-інваріантних функцій, що, зокрема, дозволило відкрити нову гілку спектру гамільтоніанів теорії надпровідності (1970–1984 рр., 2000–2004 рр.).

Петрина Дмитро Якович народився 23 березня 1934 року у селі Торгановичі Старосамбірського району Львівської області. Вищу освіту отримав у Львівському державному університеті ім. Івана Франка (1956 р.). У 1956–1965 рр. працював в Інституті математики АН УРСР. Тут він захистив кандидатську (1961 р.) та докторську дисертації (1969 р.). У 1965–1986 рр. працював в Інституті теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України (з 1978 р. завідувач відділу статистичної механіки), у 1986–2006 рр. – в Інституті математики НАН України (завідувач відділу математичних методів в статистичній механіці). З 1985 року йому було присвоєно звання професора Київського державного університету імені Тараса Шевченка. В 1988 році Д.Я. Петрину було обрано член-кореспондентом АН УРСР та в 2006 році – академіком НАН України.

Головне місце в житті Дмитра Яковича займала наука. Науковий доробок Д.Я. Петрини складається з монографій, список яких наведено наприкінці статті, та понад 170 наукових праць. Його книги увійшли до циклу праць "Функціонально-аналітичні та групові методи сучасної математичної фізики" , удостоєного Державної премії України в галузі науки і техніки 2001 р. Серію його робіт було також відзначено премією НАН України імені ім. М.М. Крилова 1984 року та премією М.М. Боголюбова 2004 року.

Дмитру Яковичу була притаманна висока культура, щирість, доброзичливість. Його вирізняли висока працездатність, широта інтересів та ерудиція. За останнє десятиріччя ми є свідками бурхливого розвитку сучасної статистичної механіки, одним з фундаторів якої був академік Д.Я. Петрина. І вже навіть за цей короткий період, коли немає з нами Дмитра Яковича, стало зрозумілим, що перспектива розвитку його ідей і наукових результатів набагато більша, ніж це здавалось на початку.

1. Д.Я. Петрина, С.С. Иванов, А.Л. Ребенко, *Уравнения для коэффициентных функций матрицы рассеяния.* М.: Наука, 1979.

2. Д.Я. Петрина, *Квантовая теория поля.* Киев: Высшая школа, 1984.

3. Д.Я. Петрина, В.И. Герасименко, П.В. Малышев, *Математические основы классической статистической механики.* Киев: Наукова думка, 1985.

4. D.Ya. Petrina, V.I. Gerasimenko, P.V. Malyshev, *Mathematical foundations of classical statistical mechanics. Continuous systems.* N.Y.: Gordon and Breach Sci. Publ., 1989.
5. Д.Я. Петрина, *Математические основы квантовой статистической механики: Непрерывные системы.* Киев: Инст. математ., 1995.
6. D.Ya. Petrina, *Mathematical foundations of quantum statistical mechanics. Continuous systems.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995.
7. C. Cercignani, V.I. Gerasimenko, D.Ya. Petrina, *Many-particle dynamics and kinetic equations.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.
8. D.Ya. Petrina, V.I. Gerasimenko, P.V. Malyshev, *Mathematical foundations of classical statistical mechanics.* 2nd ed. London: Taylor and Francis, 2002.
9. D.Ya. Petrina, *Stochastic dynamics and Boltzmann hierarchy.* Kyiv: IM, 2008.
10. D.Ya. Petrina, *Stochastic dynamics and Boltzmann hierarchy.* Berlin: De Gruyter, 2009.
11. Д.Я. Петрина, *Квантовая теория поля.* Изд.2, М.: Едиториал УРСС, 2014.
12. Д.Я. Петрина, *Математические основы квантовой статистической механики: Непрерывные системы.* Изд.2, М.: Едиториал УРСС, 2014.
13. Д.Я. Петрина, В.И. Герасименко, П.В. Малышев, *Математические основы классической статистической механики.* Изд.2, М.: Едиториал УРСС, 2014.

Є.Д. Білоколос, В.І. Герасименко, М.Л. Горбачук, А.Г. Загородній, А.Г. Нікітін, О.Л. Ребенко, А.М. Самойленко

Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 11–29

УДК 517.9+531.19+530.145

L. Barletti, G. Borgioli, G. Frosali

(Dipartimento di Matematica e Informatica "U.Dini", Firenze, Italy)

luigi.barletti@unifi.it, giovanni.borgioli@unifi.it, giovanni.frosali@unifi.it

Semiclassical hydrodynamics of a quantum Kane model for semiconductors

In this paper we derive a semiclassical hydrodynamic system for electron densities and currents in the two energy bands of a semiconductor. We use the semiclassical Wigner equation with a $k \cdot p$ Hamiltonian and a BGK dissipative term to construct the first two moment equations. The closure of the moment system is obtained using the Maximum Entropy Principle, by minimizing a Gibbs free-energy functional under suitable constraints. We prove that the constraint equations can be uniquely solved, i.e. that the local equilibrium state can be parametrized by the density and velocity field. Some BGK-like models are proposed to mimic the quantum interband migration.

1 Introduction

Description of the charge carriers dynamics in semiconductor devices is certainly a severe task, especially if one wishes to keep together a rigorous (and complete, whenever possible) physical picture with a final result (set of equations) simple enough for the numerical implementation. Hydrodynamic approach is an excellent compromise between the two requirements. Our aim is the construction of hydrodynamic equations for the electron dynamics, by means of moment method, starting from the pseudo-kinetic formulation of quantum mechanics in terms of Wigner

© **Dipartimento di Matematica e Informatica, 2014**

functions. The physical framework adopted in this paper is based on the so called $k \cdot p$ method, [9, 13], a simple model for the description of charge transport in a semiconductor with two available energy bands.

The $k \cdot p$ Hamiltonian has been widely studied and employed in literature (see for instance the review [5]). In particular, it has been exploited in [3, 4] to derive a semi-classical two-band diffusive model, with weak or strong external fields.

The rigorous derivation of the $k \cdot p$ Hamiltonian from the complete Hamiltonian of an electron in a periodic potential, under a suitable homogenization scaling, is based on the concept of envelope functions and can be found in [2]. The result is a 2×2 matrix Hamiltonian, which means that electrons in the $k \cdot p$ description are pseudo-spinors (the pseudo-spin being related to the two energy bands). A fully-quantum treatment based on the $k \cdot p$ method leads to non-parabolic intraband dynamics as well as to interband quantum transitions.

However, in the present semiclassical treatment, the latter aspect is lost. Nevertheless, the non-parabolic dynamics is still present and leads to non-trivial fluid models.

The semiclassical kinetic equations, that we need to get the hydrodynamic model, can be naturally expressed in terms of Wigner functions, describing statistical states of electrons in terms of quasi-distributions in phase-space. Due to pseudo-spin, the standard scalar Wigner function has to be substituted by a matrix-valued Wigner function. Such a matrix can be projected on the two energy subspaces, thus obtaining two distributions of electrons, corresponding to the two energy bands. Then, the macroscopic fluid quantities can be obtained by taking moments of the band-projected Wigner function, which have the physical meaning of densities $n_\pm$ and velocity field $\mathbf{u}_\pm$, where the subscript $\pm$ means $+$, the upper band, and $-$, the lower band (see Eqs. (24) and (25). The Wigner formalism, moreover, permits the introduction of a well justified BGK term (see [1, 8]]) which takes in account the interaction phenomena leading to a local equilibrium relaxation. Thanks to this relaxation mechanism we can assume that, in a time-scale larger that the relaxation time, the system is in a local equilibrium state. The latter is chosen according to the Maximum Entropy Principle (MEP), i.e. as the most probable microscopic state, given the observed macroscopic moments $n_\pm$ and $\mathbf{u}_\pm$. This strategy, as usual, provides a closure of the moment equations.

The paper is organized in the following way: in section 2 we present the

$k \cdot p$ Hamiltonian. The presence of the two bands is treated introducing a pseudo-spinorial formulation via a representation on the Pauli matrices basis. In section 3 we deduce the Wigner-BGK equations for our model. The Wigner matrix is decomposed in its scalar part w_0 and its pseudo-spinorial part $\vec{w}$. $\vec{w}$ is further split in a part parallel to the direction of the pseudo-spinorial part of the Hamiltonian, w_S, and a part orthogonal to it, $\vec{w}_\perp$. This representation discovers itself useful in the evaluation of the moments for the Wigner equation, since the contribution of $\vec{w}_\perp$ vanishes. In Section 4 we deduce the moment equations of zeroth and first order, where appear the tensors $\mathbb{P}_\pm$ and $\mathbb{Q}_\pm$, which can be interpreted as the pressure and effective-mass tensors. In Section 5 the application of the MEP implies that these tensors depend on two Lagrange multipliers, a scalar one, $A_\pm$, and a vector one, $\mathbf{B}_\pm$. The closure of the moment equations requests the study of the dependence of the tensors on the macroscopic quantities, $n_\pm$, the numerical density and $\mathbf{u}_\pm$, the velocity field. In Theorem 1 we prove that $\mathbf{B}_\pm$ (and $A_\pm$, as a consequence) is a smooth globally invertible function of the macroscopic quantities.

Since in semiclassical limit the quantum interference terms between the two bands disappear, in Section 6 we examine some models that enable the reintroduction of this aspect. We propose there three different BGK-like terms which satisfy this condition.

2 The $k \cdot p$ model

The simplest possible description of an electron in a semiconductor crystal with two energy bands (e. g. "valence" and "conduction") is obtained from a periodic Hamiltonian by means of the $k \cdot p$ method [9, 13] and consists of a 2×2 Hamiltonian of the following form:

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + E_g/2 & -\frac{\hbar^2}{m}\mathbf{K}\cdot\nabla \\ \frac{\hbar^2}{m}\mathbf{K}\cdot\nabla & -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - E_g/2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Here, E_g is the band-gap and $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3)$ is the matrix element of the gradient operator between the Bloch functions $b_\pm$ of the upper $(+)$ and lower $(-)$ bands, evaluated at zero pseudo-momentum:

$$\mathbf{K} = \int_{lattice\ cell} \bar{b}_+(\mathbf{x})\,\nabla b_-(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\,,$$

$\hbar$ is Planck's constant over 2π and m is the electron mass. The $k \cdot p$ model has to be completed by adding an "external" potential term qV (where $q > 0$ denotes the elementary charge), accounting for all electric fields except the crystal one. The electric potential $V(\mathbf{x})$ can be either fixed or self-consistently given by a Poisson equation.

The $k \cdot p$ Hamiltonian H is the quantization of the classical matrix-valued symbol

$$h(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{p^2}{2m} + E_g/2 & -i\frac{\hbar}{m}\mathbf{K}\cdot\mathbf{p} \\ \\ i\frac{\hbar}{m}\mathbf{K}\cdot\mathbf{p} & \frac{p^2}{2m} - E_g/2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

where $p = |\mathbf{p}|$.

In this paper we make the choice to decompose any 2×2 complex matrix in the basis of Pauli matrices

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

(the coefficients of the decomposition will be real if the matrix is hermitian). The operators σ_1, σ_2, σ_3 are called "pseudo-spin components" in this context. Putting

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) := \frac{\hbar}{m}\,\mathbf{K} \quad \text{and} \quad \gamma := E_g/2, \tag{3}$$

we can write

$$h(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m}\,\sigma_0 + \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}\,\sigma_2 + \gamma\,\sigma_3 = h_0(\mathbf{p})\sigma_0 + \vec{h}(\mathbf{p})\cdot\vec{\sigma}, \tag{4}$$

where

$$h_0(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m}, \qquad \vec{h}(\mathbf{p}) = (0, \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}, \gamma),$$

and, as usual, $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ is the formal vector of Pauli matrices. Here and in the following we adopt the arrow notation for three-vectors, such as $\vec{h}(\mathbf{p})$, that are the pseudo-spinorial part of the Pauli coefficients. Instead, we do not use the arrow notation for "cartesian" three-vectors such as $\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{K}$, $\boldsymbol{\alpha}$, etc. The dispersion relation for the free Hamiltonian H is easily obtained by computing the ($\mathbf{p}$-dependent) eigencouples of the symbol $h(\mathbf{p})$. This yields to the energy bands

$$E_\pm(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} \pm \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})^2 + \gamma^2} = \frac{p^2}{2m} \pm |\vec{h}(\mathbf{p})| \tag{5}$$

and to the corresponding normalized energy eigenvectors

$$\psi_{\pm}^{p} = \frac{1}{\sqrt{2(1 \pm \nu_3(\mathbf{p}))}} \begin{pmatrix} \nu_3(\mathbf{p}) \pm 1 \\ \nu_1(\mathbf{p}) + i\nu_2(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

where we have introduced

$$\vec{\nu}(\mathbf{p}) = (\nu_1(\mathbf{p}), \nu_2(\mathbf{p}), \nu_3(\mathbf{p})) = \frac{\vec{h}(\mathbf{p})}{|\vec{h}(\mathbf{p})|} = \frac{(0, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}, \gamma)}{\sqrt{(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})^2 + \gamma^2}}. \tag{7}$$

The two eigenprojections $P_{\pm}(\mathbf{p})$, that we call band-projections, are therefore given by

$$P_{\pm}(\mathbf{p}) = \psi_{\pm}^{p} \otimes \psi_{\pm}^{p} = \frac{1}{2}(\sigma_0 \pm \vec{\nu}(\mathbf{p}) \cdot \vec{\sigma}) \tag{8}$$

and we can clearly write

$$h(\mathbf{p}) = E_{+}(\mathbf{p})P_{+}(\mathbf{p}) + E_{-}(\mathbf{p})P_{-}(\mathbf{p}). \tag{9}$$

Important quantities associated to the energy bands are the semiclassical velocities $\mathbf{v}_{\pm}$

$$\mathbf{v}_{\pm} = \nabla_{\mathbf{p}} E_{\pm}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}}{m} \pm \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{\sqrt{(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})^2 + \gamma^2}} \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{p}}{m} \pm \nu_2 \boldsymbol{\alpha} \tag{10}$$

and the effective-mass tensor $\mathbb{M}_{\pm}(\mathbf{p})$ defined by [2]

$$\mathbb{M}_{\pm}^{-1}(\mathbf{p}) = \nabla_{\mathbf{p}} \otimes \nabla_{\mathbf{p}} E_{\pm}(\mathbf{p}) = \frac{1}{m}\mathbb{I} \pm \frac{\gamma^2 \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\alpha}}{\left((\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})^2 + \gamma^2\right)^{3/2}}. \tag{11}$$

where $\mathbb{I}$ is the identity matrix.

3 Wigner-BGK equations for the $k \cdot p$ model

Let $\rho_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$, $1 \leq i, j \leq 3$, be the density matrix describing the quantum statistical state of electrons with Hamiltonian (1). The corresponding kinetic-like description is provided by the Wigner matrix $w_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ defined by [14, 16, 3]

$$w_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \rho_{ij}\left(\mathbf{x} + \frac{\boldsymbol{\xi}}{2}, \mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\xi}}{2}, t\right) \mathrm{e}^{-i\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\xi}/\hbar} d\boldsymbol{\xi}. \tag{12}$$

The Wigner matrix $w = (w_{ij})$ is hermitian,

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = w^*(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t),$$

and, consequently, its Pauli representation

$$w = w_0\sigma_0 + \vec{w} \cdot \vec{\sigma}, \qquad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \tag{13}$$

has real components $w_k(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$, $0 \le k \le 3$.

Considering $P_\pm$ and $\vec{\nu}$, as defined in (8) and (7), the two scalar functions

$$w_\pm = \mathrm{Tr}(P_\pm w) = w_0 \pm \vec{\nu} \cdot \vec{w} \tag{14}$$

can be semi-classically interpreted as the phase-space distributions of electrons in the two energy bands $E_\pm$ [3] and will play a central role in the following. Moreover, if $w_s = \vec{\nu} \cdot \vec{w}$, we have the obvious relations

$$w_\pm = w_0 \pm w_s, \qquad w_0 = \frac{w_+ + w_-}{2}, \qquad w_s = \frac{w_+ - w_-}{2}, \tag{15}$$

and w_s has therefore the meaning of "band polarization". It will be convenient, moreover, to introduce a notation for the perpendicular part of $\vec{w}$ with respect to $\vec{\nu}$ by putting

$$\vec{w} = w_s\vec{\nu} + \vec{w}_\perp. \tag{16}$$

Assume now that the dynamics of the density matrix $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ is given by the von Neumann equation (Schrödinger equation for mixed states)

$$i\hbar\,\frac{\partial \rho}{\partial t} = (H_\mathbf{x} - H_\mathbf{y})\rho + (V(\mathbf{x}) - V(\mathbf{y}))\,\sigma_0\rho,$$

where $H_\mathbf{x}$ and $H_\mathbf{y}$ denote the $k \cdot p$ Hamiltonian (1) acting, respectively, on the $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ variables, and V is an external and/or self-consistent electric field. Then, using (12) and (13), it is not difficult to prove that, up to terms of order $\hbar^2$, the evolution equations for the time dependent Pauli-Wigner functions are the following

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_0}{\partial t} + \dfrac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_\mathbf{x} w_0 + \mathbf{F} \cdot \nabla_\mathbf{p} w_0 + \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla_\mathbf{x} w_2 = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \vec{w}}{\partial_t} + \dfrac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_\mathbf{x} \vec{w} + \mathbf{F} \cdot \nabla_\mathbf{p} \vec{w} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla_\mathbf{x} w_0\,\vec{e}_2 - \dfrac{2}{\hbar}\,\vec{h}(\mathbf{p}) \times \vec{w} = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Here, $\vec{h}(\mathbf{p}) = (0, \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}, \gamma)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ and $\mathbf{F} = -\nabla V$ denotes the external force corresponding to the electric potential V.

In order to supplement system (17), which describes a conservative Hamiltonian dynamics, with a collisional mechanism, we insert a BGK (Bhatnaghar-Gross-Krook) collisional relaxation-time term. This term mimics the collisions that force the system towards a local equilibrium and it is characterized by the relaxation time τ_c, which is assumed to be the same constant for all components. The system, which will be referred to as "Wigner-BGK" (WBGK) equations, takes the new form

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_0}{\partial t} + \dfrac{\mathbf{p}}{m}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} w_0 + \mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}} w_0 + \boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} w_2 = \dfrac{g_0 - w_0}{\tau_c}, \\ \dfrac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \dfrac{\mathbf{p}}{m}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} \vec{w} + \mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}} \vec{w} + \boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} w_0\, \vec{e}_2 - \dfrac{2}{\hbar}\,\vec{h}(\mathbf{p})\times\vec{w} = \dfrac{\vec{g} - \vec{w}}{\tau_c}, \end{cases} \tag{18}$$

where $g = g_0\sigma_0 + \vec{g}\cdot\vec{\sigma}$ is a local-equilibrium Wigner matrix that will be specified later on.

We now extract from Eq. (18), equations for the band distributions w_+ and w_- (see definition (14)). For this purpose we introduce the orthonormal basis $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{\nu})$, where $\vec{n}_1 \equiv \vec{e}_1 = (1,0,0)$ and $\vec{n}_2$ is chosen such that $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{\nu}$. Using the decomposition $\vec{w} = w_s\vec{\nu} + \vec{w}_\perp$ (see ((16)) and taking account that $w_2 = w_s\vec{\nu}\cdot\vec{e}_2 + \vec{w}_\perp\cdot\vec{e}_2$, with

$$\vec{e}_2 = \frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}}{\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})^2+\gamma^2}}\vec{\nu} + \frac{\gamma}{\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})^2+\gamma^2}}\vec{n}_2, \tag{19}$$

we rewrite the first of equations (18) as

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} w_0 + \mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}} w_0 + \frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}}{\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})^2+\gamma^2}}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} w_s$$
$$+ \frac{\gamma}{\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})^2+\gamma^2}}\vec{n}_2\cdot(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\vec{w}_\perp) = \frac{g_0 - w_0}{\tau_c}. \tag{20}$$

Concerning the second of equations (18), using again (19), we have

$$\frac{\partial}{\partial t}(w_s\vec{\nu} + \vec{w}_\perp) + \frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}(w_s\vec{\nu} + \vec{w}_\perp) + \frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}\,\vec{\nu} + \gamma\,\vec{n}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})^2+\gamma^2}}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} w_0$$
$$+ \vec{\nu}\,\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}} w_s + (\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}\vec{\nu})\, w_s + \mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}\vec{w}_\perp$$
$$= \frac{2}{\hbar}\,\vec{h}(\mathbf{p})\times\vec{w}_\perp + \frac{g_s - w_s}{\tau_c}\vec{\nu} + \frac{\vec{g}_\perp - \vec{w}_\perp}{\tau_c}.$$

Decomposing this equation in the parallel and perpendicular parts with respect to $\vec{\nu}$, and using $\vec{\nu}\cdot(\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}\vec{\nu})=0$, we obtain an equation for w_s:

$$\frac{\partial w_s}{\partial t}+\frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}w_s+\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}w_s+\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}}{\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})^2+\gamma^2}}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}w_0 \\ +\vec{\nu}\cdot(\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}\vec{w}_\perp)=\frac{g_s-w_s}{\tau_c}, \quad (21)$$

and an equation for $\vec{w}_\perp$:

$$\frac{\partial \vec{w}_\perp}{\partial t}+\frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\vec{w}_\perp+(\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}})w_s+(\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}\vec{w}_\perp)_\perp \\ +\frac{\gamma\,\vec{n}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})^2+\gamma^2}}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}w_0=\frac{2}{\hbar}\,\vec{h}(\mathbf{p})\times\vec{w}_\perp+\frac{\vec{g}_\perp-\vec{w}_\perp}{\tau_c}, \quad (22)$$

(which will not be used in the following). Then, recalling (15) and (10), equations for w_+ and w_- are now readily obtained from (20) and (21):

$$\frac{\partial w_\pm}{\partial t}+\mathbf{v}_\pm\cdot\nabla_{\mathbf{x}}w_\pm+\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}w_\pm+\frac{\gamma}{\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})^2+\gamma^2}}\vec{n}_2\cdot(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\vec{w}_\perp) \\ \pm\vec{\nu}\cdot(\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}\vec{w}_\perp)=\frac{g_\pm-w_\pm}{\tau_c}. \quad (23)$$

4 Moment equations and entropy closure

The local equilibrium Wigner matrix $g=g_0\sigma_0+\vec{g}\cdot\vec{\sigma}$ is given by the MEP and is, therefore, the maximizer of a suitable entropy functional (which depends on the particle statistics) under the constraint of given macroscopic moments [10, 15]. We make the following assumptions:

1. the system is in thermal equilibrium at constant temperature $T>0$ (e.g. with a phonon bath);
2. the electron statistics is well approximated by Maxwell-Boltzmann distribution (in the semiclassical approach);
3. the observed macroscopic moments are the densities

$$n_\pm(\mathbf{x},t)=\int_{\mathbb{R}^3}w_\pm(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\,d\mathbf{p} \quad (24)$$

and the velocity field

$$\mathbf{u}_\pm(\mathbf{x},t) = \frac{1}{n_\pm(\mathbf{x},t)} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v}_\pm(\mathbf{p})\, w_\pm(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\, d\mathbf{p} \tag{25}$$

of the electrons in the two energy bands.

It follows from the above assumptions that the local equilibrium g must be sought as the minimizer of the Gibbs free-energy functional

$$\mathcal{E}(w) = \int_{\mathbb{R}^6} \mathrm{Tr}\,\{k_B T(w \log w - w) + hw\}\, d\mathbf{p}\, d\mathbf{x}, \tag{26}$$

among all positive-definite Wigner matrices w sharing the macroscopic moments (24) and (25). In (26), k_B is the Boltzmann constant, h is the matrix-valued symbol of the Hamiltonian (see (2)), and $\log w$ is the matrix logarithm. It can be shown [3] that the solution g of such constrained minimization problem is given by

$$g_\pm(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = \mathrm{e}^{-\beta E_\pm(\mathbf{p}) + \mathbf{B}_\pm \cdot \mathbf{v}_\pm(\mathbf{p}) + A_\pm}, \qquad \vec{g}_\perp = 0, \tag{27}$$

where $\beta = (k_B T)^{-1}$, and $A_\pm = A_\pm(\mathbf{x},t)$ and $\mathbf{B}_\pm = \mathbf{B}_\pm(\mathbf{x},t)$ are Lagrange multipliers to be determined from the constraint equations

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} g_\pm(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\, d\mathbf{p} = n_\pm(\mathbf{x},t), \\ &\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v}_\pm(\mathbf{p})\, g_\pm(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\, d\mathbf{p} = n_\pm(\mathbf{x},t)\mathbf{u}_\pm(\mathbf{x},t). \end{aligned} \tag{28}$$

Let us now assume that the time-scale over which the system is observed is much larger than the relaxation time τ_c (the so-called hydrodynamic asymptotics). In this limit, we have that $w \to g$ and we can rewrite Eq. (23) with $w_\pm = g_\pm$ and $\vec{w}_\perp = \vec{g}_\perp = 0$, obtaining that the local equilibrium function satisfies

$$\frac{\partial g_\pm}{\partial t} + \mathbf{v}_\pm \cdot \nabla_{\mathbf{x}} g_\pm + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} g_\pm = 0. \tag{29}$$

Remark 1 The quantum interference terms (i.e. the terms containing $\vec{w}_\perp$ in Eq. (23)), which are responsible for quantum coupling between the two bands [11], have disappeared in our semiclassical hydrodynamic picture because $\vec{g}_\perp = 0$. When dealing with the semiclassical diffusive limit, however, we have to consider terms of order $\hbar$ in the semiclassical expansion of the quantum equilibrium (our g is the leading order of such expansion) and band-coupling interference terms appear [3, 6]. □

Integrating Eq. (29) over $\mathbb{R}^3$, and using the constraints (28), we have

$$\frac{\partial n_\pm}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} (n_\pm \mathbf{u}_\pm) = 0 \tag{30}$$

that is the continuity equation for $n_\pm$. Multiplying Eq. (29) by $\mathbf{v}_\pm$ and integrating over $\mathbf{p}$, we obtain the first-order moment equation

$$\frac{\partial (n_\pm \mathbf{u}_\pm)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbb{P}_\pm - \mathbf{F} \cdot \mathbb{Q}_\pm = 0, \tag{31}$$

that is the momentum balance equation, where the tensors $\mathbb{P}_\pm$ and $\mathbb{Q}_\pm$ are defined as follows:

$$\mathbb{P}_\pm = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v}_\pm \otimes \mathbf{v}_\pm \, g_\pm \, d\mathbf{p}, \qquad \mathbb{Q}_\pm = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla_{\mathbf{p}} \otimes \mathbf{v}_\pm) \, g_\pm \, d\mathbf{p}. \tag{32}$$

Recalling (10) and (11), the tensor $\mathbb{Q}_\pm$, which "mediates" the action of the force $\mathbf{F}$, can be written as

$$\mathbb{Q}_\pm = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla_{\mathbf{p}} \otimes \nabla_{\mathbf{p}} E_\pm) \, g_\pm \, d\mathbf{p} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{M}_\pm^{-1}(\mathbf{p}) \, g_\pm \, d\mathbf{p}, \tag{33}$$

showing that $\mathbb{Q}_\pm$ is the average inverse effective-mass. For suitable values of $\boldsymbol{\alpha}$ and γ, $\mathbb{Q}_-$ can be negative: in this case the lower-band electrons behave like positive-charged carriers (holes).

We remark that the functions $g_\pm$ have been determined by the maximum entropy principle and depend implicitly on the moments $n_\pm$ and $\mathbf{u}_\pm$ because the constraints (28). In this sense, the tensors $\mathbb{P}_\pm$ and $\mathbb{Q}_\pm$ can be regarded as functions of $n_\pm$ and $\mathbf{u}_\pm$, making the hydrodynamic system (30) + (31) formally closed.

For future reference let us summarize here the hydrodynamic model that we have obtained: it consists of the moment equations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n_\pm}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} (n_\pm \mathbf{u}_\pm) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial (n_\pm \mathbf{u}_\pm)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbb{P}_\pm - \mathbf{F} \cdot \mathbb{Q}_\pm = 0, \end{cases} \tag{34}$$

and of the closure relations (32) and (28).

5 The constraint equations

In this section we study the problem of how writing in a more explicit way the moment equations, that is expressing the Lagrange multipliers A and $\mathbf{B}_\pm$, and consequently the tensors $\mathbb{P}_\pm$ and $\mathbb{Q}_\pm$, as functions of the moments $n_\pm$ and $\mathbf{u}_\pm$.

In order to simplify the notations we note that, both in the moment equations (34) and in the constraint equations (28), the $+$ and $-$ quantities are completely decoupled (unless coupling mechanisms are introduced, as we will discuss in Section 6). Then, we can safely drop the $\pm$ labels everywhere, bearing in mind, however, that the $+$ and $-$ problems are formally identical but physically different, because energies, velocities and effective-masses are different in the two bands.

In order to stress the dependence of the local-equilibrium on the Lagrange multipliers we put

$$\phi(A, \mathbf{B}, \mathbf{p}) = \mathrm{e}^{-\beta E(\mathbf{p}) + \mathbf{B}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{p}) + A}, \tag{35}$$

and rewrite the constraint equations (28) as follows:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi(A, \mathbf{B}, \mathbf{p})\, d\mathbf{p} = n, \qquad \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v}(\mathbf{p})\, \phi(A, \mathbf{B}, \mathbf{p})\, d\mathbf{p} = n\mathbf{u}, \tag{36}$$

(recall that we are suppressing the labels $\pm$, and that A, $\mathbf{B}$, n and $\mathbf{u}$ are functions of $(\mathbf{x}, t)$). Equations (36) have to be regarded as a system of four scalar equations in the unknowns A and $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$, for given $n > 0$ and $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$.

Let us introduce the function $f(\mathbf{B})$ defined by

$$\mathrm{e}^{f(\mathbf{B})} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-\beta E(\mathbf{p}) + \mathbf{B}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{p})}\, d\mathbf{p}. \tag{37}$$

By using

$$\mathbf{v}(\mathbf{p})\, \phi(A, \mathbf{B}, \mathbf{p}) = \nabla_{\mathbf{B}} \phi(A, \mathbf{B}, \mathbf{p}),$$

we obtain that the constraint system (36) is (formally) equivalent to

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{A} \mathrm{e}^{f(\mathbf{B})} = n, \\ \nabla_{\mathbf{B}} f(\mathbf{B}) = \mathbf{u}. \end{cases} \tag{38}$$

From Eq. (38) we see that $\mathbf{B}$ only depends on $\mathbf{u}$ and, once $\mathbf{B}$ is solved from the second equation as function of $\mathbf{u}$, the remaining unknown A is determined by $\mathrm{e}^A = n\,\mathrm{e}^{-f(\mathbf{B})}$. Moreover, using

$$\mathbf{v}(\mathbf{p}) \otimes \mathbf{v}(\mathbf{p})\,\phi(A,\mathbf{B},\mathbf{p}) = \nabla_{\mathbf{B}} \otimes (\nabla_{\mathbf{B}}\phi(A,\mathbf{B},\mathbf{p})),$$

the tensor $\mathbb{P}$ (see definition (32)) can be written as

$$\begin{aligned}\mathbb{P} &= \mathrm{e}^A \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_{\mathbf{B}} \otimes \left(\nabla_{\mathbf{B}} \mathrm{e}^{-\beta E(\mathbf{p}) + \mathbf{B}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{p})}\right)\, d\mathbf{p} \\ &= \mathrm{e}^A\, \nabla_{\mathbf{B}} \otimes \left(\nabla_{\mathbf{B}} \mathrm{e}^{f(\mathbf{B})}\right) = \mathrm{e}^A \nabla_{\mathbf{B}} \otimes \left(\mathrm{e}^{f(\mathbf{B})}\, (\nabla_{\mathbf{B}} f(\mathbf{B}))\right) \\ &= \mathrm{e}^A \mathrm{e}^{f(\mathbf{B})}\, [\nabla_{\mathbf{B}} f(\mathbf{B}) \otimes \nabla_{\mathbf{B}} f(\mathbf{B}) + \nabla_{\mathbf{B}} \otimes (\nabla_{\mathbf{B}} f(\mathbf{B}))]\end{aligned}$$

and therefore, using Eq. (38),

$$\mathbb{P} = n\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + n\nabla_{\mathbf{B}} \otimes (\nabla_{\mathbf{B}} f(\mathbf{B})). \tag{39}$$

This decomposition of $\mathbb{P}$ shows that $\nabla_{\mathbf{B}} \otimes (\nabla_{\mathbf{B}} f(\mathbf{B}))$ plays the role of pressure tensor in the Euler equations (34). Unfortunately, the "mass" tensor $\mathbb{Q}$ has not a similarly simple expression in terms of $f(\mathbf{B})$.

As already remarked, the form (38) of the constraint equations allows to reduce the problem of the solvability of $(A,\mathbf{B})$ as a function of $(n,\mathbf{u})$ to the solvability of $\mathbf{B}$ as a function of $\mathbf{u}$ from the equation

$$\nabla_{\mathbf{B}} f(\mathbf{B}) = \mathbf{u},$$

which is proven in the following theorem.

Theorem 1 *The mapping* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \nabla_{\mathbf{B}} f(\mathbf{B}) \in \mathbb{R}^3$ *is globally invertible.*

Proof. We first prove local invertibility. Let $\mathbf{u}(\mathbf{B}) := \nabla_{\mathbf{B}} f(\mathbf{B})$. Using (39), and recalling that $n > 0$ is given, we have that

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial B_j} &= \frac{\partial^2 f}{\partial B_i \partial B_j} = \frac{\mathbb{P}_{ij}}{n} - u_i u_j \\ &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^3} (v_i(\mathbf{p}) - u_i)(v_j(\mathbf{p}) - u_j)\, \phi(A,\mathbf{B},\mathbf{p})\, d\mathbf{p},\end{aligned}$$

showing that the Jacobian matrix of the transformation is the covariance matrix of $\mathbf{v}(\mathbf{p})$, relative to the probability density $\phi(A,\mathbf{B},\mathbf{p})/n$, which is semi-definite positive. The positive definiteness is readily proven by direct inspection, since

$$\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial B_j} \xi_i \xi_j = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{p}) - \mathbf{u})\right]^2 \phi(A, \mathbf{B}, \mathbf{p})\, d\mathbf{p} > 0$$

for every $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$ with $\boldsymbol{\xi} \neq 0$, which concludes the proof of local invertibility.

In order to prove the global result, we resort to the classical result of Hadamard, that a local diffeomorphism is global if an only if it is proper (the inverse image of a compact is compact). In the present case this reduces to prove that, for every sequence $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^3$ such that $|\mathbf{B}_k| \to \infty$, also the image sequence $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(\mathbf{B}_k) \in \mathbb{R}^3$ is such that $|\mathbf{u}_k| \to \infty$. Since $|\mathbf{B}_k| \to \infty$, we are interested in the asymptotic behavior of the distribution $\phi(A, \mathbf{B}, \mathbf{p})$ for large $|\mathbf{B}|$. Without loss of generality, we put here $m = 1$ and $\beta = 1$. The critical points of $\phi(A, \mathbf{B}, \mathbf{p})$ (as a function of $\mathbf{p}$) are determined by the condition

$$\nabla_{\mathbf{p}} \left(E(\mathbf{p}) - \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{p})\right) = 0.$$

Recalling (5) and (10), this leads to the condition

$$\mathbf{p} \pm \nabla_{\mathbf{p}} |\vec{h}(\mathbf{p})| - \mathbf{B} \mp \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{B}\, \nabla_{\mathbf{p}} \nu_2(\mathbf{p}) = 0,$$

that is

$$\mathbf{p} \pm \frac{(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})\, \boldsymbol{\alpha}}{\left[(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})^2 + \gamma^2\right]^{1/2}} - \mathbf{B} \mp \frac{(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{B})\, \boldsymbol{\alpha}\, \gamma^2}{\left[(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})^2 + \gamma^2\right]^{3/2}} = 0.$$

Making the change of variable

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{B}|},$$

we obtain the equation

$$\mathbf{q} \pm \frac{(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{q})\, \boldsymbol{\alpha}}{|\mathbf{B}| \left[(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{q})^2 + |\mathbf{B}|^{-2} \gamma^2\right]^{1/2}} - \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} \mp \frac{(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{B})\, \boldsymbol{\alpha}\, \gamma^2}{|\mathbf{B}|^4 \left[(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{q})^2 + |\mathbf{B}|^{-2} \gamma^2\right]^{3/2}} = 0,$$

which is asymptotically equivalent for $|\mathbf{B}| \to \infty$ to

$$\mathbf{q} - \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = 0,$$

i.e. to

$$\mathbf{p} = \mathbf{B}.$$

Thus, we have shown that, for large $|\mathbf{B}|$, the distribution $\phi(A, \mathbf{B}, \mathbf{p})$ has a single critical point (which is clearly a maximum) at $\mathbf{p} = \mathbf{B}$. Moreover, it decays like $\mathrm{e}^{-|\mathbf{p}|^2/2}$ away from the maximum. This gaussian-like behavior ensures that

$$\frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{p}\, \phi(A, \mathbf{B}, \mathbf{p})\, d\mathbf{p} \sim \mathbf{B}, \quad \text{as } |\mathbf{B}| \to \infty.$$

Finally, since $\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \pm \nu_2(\mathbf{p})\boldsymbol{\alpha}$, and $\nu_2(\mathbf{p})\boldsymbol{\alpha}$ is a bounded quantity, we also obtain

$$\mathbf{u} = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v}(\mathbf{p})\, \phi(A, \mathbf{B}, \mathbf{p})\, d\mathbf{p} \sim \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{p}\, \phi(A, \mathbf{B}, \mathbf{p})\, d\mathbf{p} \sim \mathbf{B},$$

which shows that $|\mathbf{u}_k| \to \infty$ if $|\mathbf{B}_k| \to \infty$, concluding the proof. □

6 Band coupling

As already remarked, the disappearance of the quantum interference terms in the semiclassical limit makes our hydrodynamic model decoupled with respect to the two bands. Coupling mechanisms can be introduced in two ways. First of all, we may assume that the electric potential is composed of two parts:

$$V = V_{\text{ext}} + V_{\text{int}},$$

where V_{ext} is the "external" part (taking account, e.g., of external bias, gate potentials, and heterostructure potentials), while V_{int} is the "internal" (or self-consistent) part, taking account of Coulomb repulsion between electrons. In the simple mean-field model, this is given by the Poisson equation

$$\varepsilon_s \Delta V_{\text{int}} = -q(n_+ + n_-), \tag{40}$$

where q is the elementary charge and ε_s is the permittivity of the semiconductor. The right-hand side depends on the total density $n_+ + n_-$, this coupling the upper-band and lower-band populations.

The other source of coupling derives from collisional mechanisms. In order to introduce them, we have to go back to the kinetic level and add to the WBGK equation (18) a suitable matrix-valued "interband" collisional operator $C(w)$ [12]. This is assumed to act on a much slower time scale with respect to τ_c (otherwise it would affect the hydrodynamic limit and destroy the structure of our MEP-based model). Thus, we rewrite Eq. (18) with the (generic) additional terms:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_0}{\partial t} + \dfrac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} w_0 + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} w_0 + \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} w_2 = \dfrac{g_0 - w_0}{\tau_c} + C_0(w), \\ \dfrac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \dfrac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \vec{w} + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \vec{w} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} w_0 \, \vec{e}_2 - \dfrac{2}{\hbar} \vec{h}(\mathbf{p}) \times \vec{w} = \dfrac{\vec{g} - \vec{w}}{\tau_c} + \vec{C}(w). \end{cases} \tag{41}$$

Following the same arguments that led to Eq. (29), we arrive at

$$\frac{\partial g_\pm}{\partial t} + v_\pm \cdot \nabla_{\mathbf{x}} g_\pm + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} g_\pm = C_\pm(g_+, g_-) \tag{42}$$

(where we adopted a notation that stresses the fact that g only depends on g_+ and g_-). Taking the zeroth-order and first-order moments of this equation we get a modified version of the hydrodynamic system (34):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n_\pm}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \left(n_\pm \mathbf{u}_\pm \right) = N_\pm(n_+, n_-, \mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-), \\ \dfrac{\partial (n_\pm \mathbf{u}_\pm)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbb{P}_\pm - \mathbf{F} \cdot \mathbb{Q}_\pm = \mathbf{U}_\pm(n_+, n_-, \mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-), \end{cases} \tag{43}$$

where, of course,

$$\begin{aligned} N_\pm &= \int_{\mathbb{R}^3} C_\pm(g_+, g_-) \, d\mathbf{p} \\ \mathbf{U}_\pm &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v}_\pm(\mathbf{p}) \, C_\pm(g_+, g_-) \, d\mathbf{p}, \end{aligned} \tag{44}$$

and the dependence on $(n_+, n_-, \mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-)$ follows from the MEP closure.

Le us now list some possible choice of $C(w)$ in a simple BGK (relaxation time) form, corresponding to different interband scattering mechanisms.

1. Band-flip The electron undergoes a collision which exchange its band label from $+$ to $-$, or from $-$ to $+$. Then we put

$$C^{bf}(w) = -\frac{w - w_0 \sigma_0}{\tau_{bf}} = -\frac{\vec{w} \cdot \vec{\sigma}}{\tau_{bf}} \tag{45}$$

(where τ_{bf} denotes the characteristic time of band-flip scattering, which we assume constant for simplicity), so that

$$C_{\pm}^{bf}(w) = \mp \frac{w_+ - w_-}{\tau_{bf}}$$

(from which the band-flip is evident). According to definition (44), therefore, we have

$$N_{\pm}^{bf} = \mp \frac{n_+ - n_-}{\tau_{bf}}, \qquad \mathbf{U}_{\pm}^{bf} = \mp \frac{n_+ \mathbf{u}_+ - n_- \mathbf{u}_-}{\tau_{bf}}. \tag{46}$$

Note that the band flip mechanism conserves the total density and the momentum and relaxes the polarization of density and momentum, (i.e. $n_+ - n_-$ and $\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-$).

2. Band relaxation An electron in the upper band undergoes a inelastic collision which scatters it to the lower band [7]. This mechanism is described by

$$C^{br}(w) = -\frac{w_0 \vec{\nu} - \vec{w}}{\tau_{br}} \cdot \vec{\sigma}, \tag{47}$$

so that

$$C_{\pm}^{bf}(w) = \mp \frac{w_+}{\tau_{br}},$$

(where τ_{br} denotes the characteristic time of band relaxation scattering, which we assume constant). From definition (44) we obtain

$$N_{\pm}^{br} = \mp \frac{n_+}{\tau_{br}}, \qquad \mathbf{U}_{\pm}^{br} = \mp \frac{n_+ \mathbf{u}_+}{\tau_{br}}. \tag{48}$$

Note that this mechanism conserves the total density an momentum and depletes the upper band in favor of the lower.

3. Isotropic interband scattering An electron undergoes a scattering event that changes its band label and re-distributes its momentum according to a isotropic, thermal distribution. This mechanism is described by

$$C^{is}(w) = -\frac{w - g^*}{\tau_{is}}, \tag{49}$$

where τ_{is} denotes the characteristic time of interband scattering, which we assume constant, and where g^* is the isotropic version, with inverted densities, of the MEP local equilibrium g, i.e.

$$g^*_\pm(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = \frac{n_\mp}{z_\pm}\, \mathrm{e}^{-\beta E_\pm(\mathbf{p})}, \qquad \vec{g^*}_\perp = 0, \tag{50}$$

where

$$z_\pm = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-\beta E_\pm(\mathbf{p})}\, d\mathbf{p}, \tag{51}$$

so that

$$\int_{\mathbb{R}^3} g^*_\pm(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\, d\mathbf{p} = n_\mp(\mathbf{x},t), \qquad \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v}_\pm(\mathbf{p})\, g^*_\pm(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\, d\mathbf{p} = 0$$

(note the inverted band-labels of the density). Then:

$$C^{is}_\pm(w) = -\frac{w_\pm - g^*_\pm}{\tau_{is}}$$

and

$$N^{is}_\pm = \mp\frac{n_+ - n_-}{\tau_{is}}, \qquad \mathbf{U}^{is}_\pm = -\frac{n_\pm \mathbf{u}_\pm}{\tau_{is}}, \tag{52}$$

Note, therefore, that this scattering mechanism relaxes the current in both bands and the density polarization .

7 Conclusions

We can finally summarize the hydrodynamic model emerged from our discussion. It consists of the Euler-Poisson-like system

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n_\pm}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}}\,(n_\pm \mathbf{u}_\pm) = N_\pm, \\[2mm] \dfrac{\partial (n_\pm \mathbf{u}_\pm)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (n\mathbf{u}_\pm \otimes \mathbf{u}_\pm + n\mathbb{T}_\pm) + \nabla_{\mathbf{x}}\,(V_{\mathrm{ext}} + V_{\mathrm{int}}) \cdot \mathbb{Q}_\pm = \mathbf{U}_\pm, \\[2mm] \varepsilon_s \Delta V_{\mathrm{int}} = -q(n_+ + n_-), \end{cases} \tag{53}$$

where:

$$N_\pm = N_\pm(n_+, n_-, \mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-), \qquad \mathbf{U}_\pm = \mathbf{U}_\pm(n_+, n_-, \mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-)$$

are the coupling terms discussed above,

$$\mathbb{T}_\pm = \nabla_{\mathbf{B}_\pm} \otimes \nabla_{\mathbf{B}_\pm} \log \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-\beta E_\pm(\mathbf{p}) + \mathbf{B}_\pm \cdot \mathbf{v}_\pm(\mathbf{p})} \, d\mathbf{p}$$

is the pressure tensor, described in Sec. 5,

$$\mathbb{Q}_\pm = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{M}_\pm^{-1}(\mathbf{p}) \, \mathrm{e}^{-\beta E_\pm(\mathbf{p}) + \mathbf{B}_\pm \cdot \mathbf{v}_\pm(\mathbf{p}) + A_\pm} d\mathbf{p},$$

is the effective-mass tensor, also described in Sec. 5, and the Lagrange multipliers $(A_\pm, \mathbf{B}_\pm)$ can be uniquely solved as functions of the moments $(n_\pm, \mathbf{u}_\pm)$ from the constraint equations

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-\beta E_\pm(\mathbf{p}) + \mathbf{B}_\pm \cdot \mathbf{v}_\pm(\mathbf{p}) + A_\pm} d\mathbf{p} = n_\pm, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v}_\pm(\mathbf{p}) \, \mathrm{e}^{-\beta E_\pm(\mathbf{p}) + \mathbf{B}_\pm \cdot \mathbf{v}_\pm(\mathbf{p}) + A_\pm} d\mathbf{p} = \mathbf{u}_\pm, \end{cases}$$

as proven in Theorem 1.

Acknowledgements

This work was dedicated to the memory of Prof. D.Ya. Petrina. The authors wish to recall the many opportunities they had to meet him and appreciate his outstanding personality. Many meetings had place during his permanence in Italy and, mainly, during his visits to our Department in Florence. Two of the authors had the chance to participate to the Conference "Recent Trends in Kinetic Theory and its Applications" (Kyiv, Ukraine, 2004) and to experience his warm hospitality, of which they will treasure memory.

References

[1] A. Arnold. *Self-consistent relaxation-time models in quantum mechanics.* Commun. Partial Differ. Equations **21(3-4)**, 473–506, (1996).

[2] L. Barletti, N. Ben Abdallah. *Quantum transport in crystals: effective mass theorem and k.p Hamiltonians.* Comm. Math. Phys. **307**, 567–607, (2011).

[3] L. Barletti, G. Frosali. *Diffusive limit of the two-band* $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ *model for semiconductors*. J. Stat. Phys. **139(2)**, 280–306, (2010).

[4] L. Barletti, G. Frosali. *Diffusive limits for a quantum transport model with a strong field*. Transport Theory Statist. Phys. **41(5-6)**, 473–493, (2012).

[5] L. Barletti, G. Frosali, O. Morandi. *Kinetic and Hydrodynamic Models for Multiband Quantum Transport in Crystals*. In M. Ehrhardt and M. Koprucki (Eds.), "Modern Mathematical Models and Numerical Techniques for Multiband Effective Mass Approximations", Lecture Notes in Computer Science, Engineering, Springer, Berlin, 2014, pp. 1–49 (to appear)

[6] L. Barletti, F. Méhats, F, (2010). *Quantum drift-diffusion modeling of spin transport in nanostructures*. J. Math. Phys. **51**, 053304 (2010).

[7] L.L. Bonilla, L. Barletti, M. Alvaro. *Nonlinear electron and spin transport in semiconductor superlattices*. SIAM J. Appl. Math. **69**(2), 494–513 (2008).

[8] P. Degond, C. Ringhofer. *Quantum moment hydrodynamics and the entropy principle*. J. Stat. Phys. **112**(3-4), 587–628 (2003).

[9] E.O. Kane. *The k·p method*. (In: Willardson, R.K., Beer, A.C. (eds.) Physics of III-V Compounds, Semiconductors and Semimetals), vol. 1, chap. 3. Academic Press, New York (1966).

[10] S. La Rosa, G. Mascali, V. Romano. *Exact maximum entropy closure of the hydrodynamical model for Si semiconductors: the 8-moment case*. Siam J. Appl. Math. **70**(3), 710–734, 2009.

[11] O. Morandi. *Wigner-function formalism applied to the Zener band transition in a semiconductor*. Phys. Rev. B **80**, 024301(12) (2009).

[12] A. Rossani, *Semiconductor spintronics in a participating phonon medium: Macroscopic equations*. AIP Advances **3**, 092122 (2013).

[13] W.T. Wenckebach. *Essential of Semiconductor Physics*. J.Wiley & Sons, Chichester (1999).

[14] E. Wigner. *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium*. Phys. Rev. **40**, 749–759 (1932).

[15] N. Wu. *The Maximum Entropy Method*. Springer Verlag, Berlin (1997).

[16] C.K. Zachos, D.B. Fairlie, T.L. Curtright (eds.): *Quantum mechanics in phase space*, World Scientific Series in 20th Century Physics, vol. 34. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ (2005). An overview with selected papers.

Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, ??–??

УДК 517.9+531.31+530.145

E.D. Belokolos

(Institute of Magnetism of NAS of Ukraine, Kyiv)

eugene.belokolos@gmail.com

Mathematical problems of the almost-periodic solids

In the paper we consider the problem .....

В роботі розглядається проблема ......

1 Introduction

It is well known that all solids are built of light electrons and heavy nuclei. The difference of masses is very large since an electron is about 2000 times lighter than a nucleon and a nucleus consists of tens or hundreds of nucleons. As a result of that we can imagine a solid as a collection of light and fast electrons moving quickly among heavy and slow nuclei. The slow nuclei form a potential for the fast electrons and in the first approximation the electrons follow to slow changes of the potential. It is an essence of the adiabatic hypothesis in the solid state physics.

The nuclei form a carcass of solid and an arrangement of nuclei in the carcass defines a structure of the solid. We classify the solids by a character of this structure.

If the solid is a crystal it leads to important consequences which allow to describe many properties of crystalline solids. First of all since the lattice has a symmetry of some space group the tensors which describe various properties of the crystal (tensor of elastic constants, tensor of dielectric or magnetic susceptibilities, tensor of conductivity etc.) have a symmetry of an appropriate point group. Secondly the nuclei, arranged

© **Institute of Mathematics, 2014**

in a lattice, form a periodic potential for the fast electrons and therefore an electron energy spectrum is a spectrum of the Schrödinger operator with the periodic potential. We can prove that this spectrum is absolutely continuous and has band structure, i.e. it is a union of closed segments of absolutely continuous spectrum. As a result of this fact all crystals are conductors in general.

If the nuclei are arranged randomly the solid has an amorphous structure. In this case electrons move in a random potential and therefore their energy spectrum is a spectrum of the Schrödinger operator with the random potential. If this potential is of the "white noise"type then we can prove that an appropriate spectrum is point. In this case amorphous solids are dielectrics. Electrons are allowed to move in electric field only by means of an electric breakdown.

We have described above two limit cases when nuclei arrangements (and also the corresponding electron potentials) are periodic or random functions. It appears that there exist a set of the almost-periodic functions which include periodic functions as a particular case and satisfy the condition of ergodicity which is the weakest possible exhibition of the randomness property. Therefore it looks reasonable to assume that in general case the nuclei arrangements in solid are almost-periodic [1]. Is is indeed the case and we shall discuss this idea now in details. Before that we explain what are the almost-periodic functions.

2 Almost-periodic structures

The theory of almost-periodic functions was created mainly by H. Bohr in 1924–1926 years and developed further by A. Besicovitch, S. Bochner, N. Bogoljubov, J. Favard, B. Levitan, J. von Neumann, V. Stepanov, H. Weyl and others. A particular but very important class of the almost-periodic functions (known now as quasi-periodic functions) was studied by P. Bohl and E. Esclangon as early as the end of XIX century.

Now we present essentials of the theory of almost-periodic functions and in order to make our exposition as simple as possible we consider only one-dimensional almost-periodic functions, a generalization of results for many-dimensial case is straightforward. We do not give proofs here, the reader can find them himself in the literature [].

Among many equivalent definition of the almost-periodic functions we choose the following one.

Definition 1 *Function $f(x)$ is called almost-periodic if it is a uniform limit in a space of trigonometrical polynomials $Trig(\mathbb{R})$, i.e. for any $\epsilon > 0$ there exist such a trigonometrical polynomial $P_\epsilon(x)$ that*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - P_\epsilon(x)| < \epsilon. \tag{1}$$

We denote the set of all continuous almost-periodic functions on $\mathbb{R}$ by $CAP(\mathbb{R})$. Every almost- periodic function $f(x)$ is bounded and therefore we may introduce the norm

$$||f|| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|. \tag{2}$$

With this norm the set almost-periodic functions becomes a commutative Banach algebra with the usual definition of addition and multiplication.

Now we enumerate some properties of the almost-periodic functions which we shall use further.

A. For any almost-periodic function there exist a mean value

$$M(f) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} \int_0^L f(x)dx. \tag{3}$$

It allows for any almost-periodic function to build a Fourier series

$$f(x) \simeq \sum_n A_n \exp(i\lambda_n x), \quad A_n = M(f(x)\exp(-i\lambda_n x)). \tag{4}$$

We designate the numbers λ_n as the Fourier frequencies and the numbers A_n as the Fourier coefficients of the function $f(x)$. By means of the Fourier series we can build approximative trigonometric polynomials for the almost-periodic function.

We say that a countable set of real numbers $\{\lambda_n\}_1^\infty$ has a rational basis $\{\alpha_n\}_1^\infty$ if the numbers α_n are linear independent and any number λ_n can be presented as their finite linear combination with rational coefficients, i.e.

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^{S_n} r_k^n \ \alpha_k, \quad r_k^n \in \mathbb{Q}. \tag{5}$$

We say that the basis is finite if it is finite set, we say that the basis is integer if all numbers r_k^n are integer numbers. If the a Fourier frequencies of the almost-periodic function have a finite and integer basis we designate the appropriate almost-periodic function as a quasi-periodic one. A quasi-periodic function with unique period is pure periodic one.

B.

Theorem 1 *(Kronecker–Weyl) Let $\lambda_k, \quad k = 1, \ldots, n$ be real linearly independent numbers, $\theta_k, \quad k = 1, \ldots, n$ be arbitrary real numbers, $\delta_k, \ k = 1, \ldots, n$ be arbitrary positive numbers. Let $\chi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ be a characteristic function of parallelepiped in $\mathbb{R}^n$ defined by inequalities*

$$\theta_k - \delta_k < x_k < \theta_k + \delta_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Continue the function $\chi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ to the whole $\mathbb{R}^n$ periodically with periods 2π in all variables $x_k, \ k = 1, \ldots, n$.

Then uniformly in L we have

$$\lim_{L \to \infty} \int_0^L \chi(\lambda_1 x - \theta_1, \ldots, \lambda_n x - \theta_n) dx = \pi^{-n} \delta_1 \ldots \delta_n. \tag{7}$$

C. A number τ is called an $\epsilon-$almost-period of the function $f(x), \ x \in \mathbb{R}$ if

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + \tau) - f(x)| < \epsilon. \tag{8}$$

It appears that any almost-periodic function has a relatively dense set of $\epsilon-$almost-periods for any $\epsilon > 0$, i.e. for any $\epsilon > 0$ there is such a number $l(\epsilon)$ that in any interval of the length $l(\epsilon)$ there exist at least one $\epsilon-$almost-period.

For the almost-periodic functions there exist close connection between $\epsilon-$almost-periods and the Fourier frequencies. Namely for any natural number n and any positive number $\delta < \pi$ there exist such a positive number $\epsilon(n, \delta)$ that all $\epsilon-$almost-periods of the almost-periodic function $f(x)$ satisfy the following system of inequalities

$$|\lambda_k \, \tau| < \delta, \ (\mod 2\pi), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

At the me time for any $\epsilon > 0$ we can point out such a natural number n and a positive number $\delta < \pi$ that any real number τ, which satisfy the system of inequalities

$$|\lambda_k \, \tau| < \delta, \ (\mod 2\pi), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

is an $\epsilon-$almost-period of the almost-periodic function $f(x)$.

D. Function $F(x_1, x_2, \ldots)$ of finite or countable set of variables, each of which admits all real values, is called limiting periodic if it is a uniform limit of periodic ones, i.e. if for any real positive number ϵ we can point out such an integer positive number $n(\epsilon)$ and such a periodic function $F_\epsilon(x_1, x_2, \ldots, x_{n(\epsilon)})$ that

$$\sup_{-\infty < x_k, k=1,2,\ldots < +\infty} |F(x_1, x_2, \ldots) - F_\epsilon(x_1, x_2, \ldots, x_{n(\epsilon)})| < \epsilon. \tag{10}$$

It appears that for any almost-periodic function $f(x)$ there exist such a limiting periodic function $F(x_1, x_2, \ldots)$ of finite or countable set of variables that

$$f(x) = F(x, x, \ldots) = F(x_1, x_2, \ldots)|_{x_1 = x_2 = \ldots = x}. \tag{11}$$

Thus any any almost-periodic function is restriction to a diagonal of some limiting periodic function. In other words we can also characterize every almost-periodic function by a sequence of periodic functions.

The properties of the limiting periodic function $F(x_1, x_2, \ldots)$ depends essentially on the basis of the Fourier frequencies of the function $f(x)$. If the basis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ of the almost-periodic function $f(x)$ is integer then the limiting periodic function $F(x_1, x_2, \ldots)$ is periodic with periods $2\pi/\alpha_1, 2\pi/\alpha_2, \ldots$. If the basis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ of the almost-periodic function $f(x)$ is finite then the limiting periodic function $F(x_1, x_2, \ldots)$ depends on finite set of variables. If the basis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ of the almost-periodic function $f(x)$ is finite and integer then the limiting periodic function $F(x_1, x_2, \ldots)$ is periodic function of finite set of variables.

E. Let $f(x)$ is a complex almost-periodic function and $\inf_x |f(x)| = k > 0$ then we can define $\arg f(x) = cx + \phi(x)$ where a constant c is called a meam motion, and $\phi(x)$ is some almost-periodic function. The a meam motion c and the Fourier frequencies of the almost-periodic function $\phi(x)$ are linear combinations with integer coefficients of Fourier frequencies of the function $f(x)$ (H. Bohr).

F. A continuous function $f(x)$ is almost-periodic iff a set of functions $\{f(x+h)\}, -\infty < h < +\infty$ is relatively compact, i.e. if from any infinite sequence $f(x+h_1), f(x+h_2), \ldots$ we can chose a subsequence which converges uniformly for all $x \in \mathbb{R}$ (S. Bochner). In other words the function $u(x)$ taken from a Banach space $C_b(\mathbb{R})$ of continuous bounded functions is called almost-periodic if the set $\{T_x(\cdot), x \in \mathbb{R}\}$, where $T_x(\cdot) = u(\cdot + x)$, is relatively compact in $C_b(\mathbb{R})$. A closure Ω of this set is known to be a compact in metrizable Abelian group. A normalized Haar measure μ on the set Ω turns out to be T_x-invariant and ergodic. Thus each almost-periodic function generates a probability space (Ω, μ, T_x). The operation of averaging on this space is given by

$$M(f) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(T_x u) dx = \int_\Omega f(u) \mu(du). \tag{12}$$

H. Bohr formulated also fundamentals of the harmonic and analytic almost-periodic functions. Various generalizations of the almost-periodic functions (e.g. for functional spaces with other metrics, for other groups etc.) were built by A. Besicovitch, B. Levitan, J. von Neumann, V. Stepanov, H. Weyl and others.

Now let us return to the idea that the nuclei arrangements in solids are almost-periodic in general and discuss different consequences.

The first important consequence of the above statement is a classification of solids in terms of nuclei structures and a corresponding partition solids into periodic solids (or crystals), random solids and properly almost-periodic solids. Such a classification of solids was proposed for the first time in [].

Crystals and amorphous solids are well known for a long time. We can obtain easily the properly almost- periodic nuclei arrangements in crystals by means of displacements of nuclei from equilibrium sites under influence of waves. Indeed the following theorem is valid.

Theorem 2 *Crystal, which is deformed by a finite (countable) set of waves with linearly independent frequencies, creates a quasi (an almost)-periodic potential.*

At first we consider the one-dimensional case.

Let us assume that nuclei, located in nodes of some lattice, create a periodic potentia $V(x)$. We suppose that the periodic potential $V(x)$ is continuous function and therefore it is uniformly continuous function. It means that for any $\epsilon' > 0$ there exist such $\delta' > 0$ that $|V(x_1) - V(x_2)| < \epsilon'$ as soon as $|x_1 - x_2| < \delta'$. Let us define $\epsilon = \min(\epsilon', \delta')$. Under deformation $u(x)$ a crystal point with a coordinate x is transformed to a coordinate $x + u(x)$ where $u(x)$ is a trigonometrical sum. If this sum contains infinite set of summands we shall assume that it converges at a whole real axis so that $u(x)$ appears to be an almost-periodic $u(x)$ function.

Let us consider the function $V(x+u(x))$ which describes the potential of a crystal lattice deformed by waves. For the number ϵ, defined above, let us construct a relatively dense set of the $\epsilon-$almost-periods τ common for the functions $V(x)$ and $u(x)$. As it is well known we can do it always. Each of thus constructed number τ is simultaneously $2\epsilon-$almost-period for the function $V(x+u(x))$. Indeed,

$$\begin{aligned}&|V(x+\tau+u(x+\tau))-V(x+u(x))| \leq \\ &|V(x+u(x+\tau))-V(x+u(x))|+\epsilon \leq 2\epsilon.\end{aligned} \tag{13}$$

Here the first inequality follows from the inequality $|V(x+\tau)-V(x)| \leq \epsilon$, and the second inequality follows from the inequality $|u(x+\tau)-u(x)| \leq \epsilon$ and the definition ϵ. Thus for any $\epsilon > 0$ we can construct a relatively dense set of $2\epsilon-$almost-periods for the function $V(x+u(x))$. And therefore as a result of that the function $V(x+u(x))$ is almost-periodic.

Let $u(x)$ is a finite trigonometrical polynomial with frequencies $\omega_s, s = 1, \ldots, m$ and the function $V(x)$ has a frequency ω_0. Then joint $\epsilon-$almost-periods of the functions $V(x), u(x)$ satisfy the system of the inequalities $|\omega_s \tau| < \delta(\mod 2\pi), s = 0, 1, \ldots, m$ for an appropriate δ. In accordance with the statement above they are simultaneously $2\epsilon-$ almost-periods for the function $V(x+u(x))$. Therefore the function $V(x+u(x))$ is quasi-periodic function.

In conclusion we remark that there is no problems to generalize this proof for the case of $d-$dimensional crystal.

Thus a vibrating lattice at a fixed moment of time is an almost-periodic arrangements of nuclei. In other words in adiabatic approximation an electron in solid moves, in general case, in an almost-periodic potential. By means of various reasons these wave disturbations of nuclei locations can be stabilized and in such a way these almost-periodic arrangements can be realized in equilibrium also.

We should only remember that in a solid there exist a lot of various of waves: the charge density waves, the magnetic (or spin) density waves, the concentration waves etc., and all these waves may have uncommensurable frequences. Thus the almost-periodicity in solids can have various physical manifestations.

In 1984 material scientist D. Shechtman discovered in Al-Mn alloys the quasi-periodic structure (quasi-crystal), and for this result was awarded the Nobel Prize in Chemistry in 2011. Today physicists know hundreds of quasi-periodic solids, they are ubiquitous in many metallic alloys and compositions. In 1992 the International Union of Crystallography acknowledged the possibility for solids to order either periodic or aperiodic.

3 Spectra of the Schrödinger operator with almost-periodic potential

Sudies of spectral properties of the Schrödinger operator with almost-periodic potential in connection with the quantum theory of solids were initiated E.D. Belokolos (1975, 1976), Ya.G. Sinai and E. Dinaburg (1975).

We shall consider the spectral properties of the Schrödinger operator

$$H = -\Delta + u(x), \tag{14}$$

where Δ is the Laplace and $u(x), x \in \mathbb{R}^d$ is a continuous almost-periodic potential. First of all we present basic results about this operator.

Theorem 3 *The Schrödinger operator with almost-periodic potential is self-adjoint essentially.*

For the Schrödinger operator with almost-periodic potential we can prove the existence of the number of states (or an integrated density of states) $N(\lambda)$ and other similar of spectral characteristics.

Theorem 4 *(Shubin, 1978) The Schrödinger operator with almost-periodic potentialt has a number of states*

$$N(\lambda) = \lim_{k\to\infty} |V_k|^{-1} N_{V_k}(\lambda), \tag{15}$$

where V_k is bounded domain in $\mathbb{R}^n$ with the Lebesgue measure $|V_k|$ and $N_{V_k}(\lambda)$ is the standard distribution function of the discrete spectrum in the domain V_k with some self-adjoint boundary conditions.

The number of states $N(\lambda)$ is non-decreasing function of λ and is defined by the above expression everywhere besides the points of discontinuity.

We can prove also the existence of other similar limits, e.g.

$$D(\lambda) = \lim_{k\to\infty} |V_k|^{-1} \sum_{\lambda_j < \lambda} (f\psi_j, g\psi_j), \tag{16}$$

where ψ_j are eigenfunctions and f, g are arbitrary almost-periodic functions.

By considering the inverse functions we can prove the existence of the Fermi energy

$$E^F(\rho) = \lim_{k/|V_k| \to \rho} \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j, \quad k \to \infty,\ |V_k| \to \infty,\ \rho > 0 - constant, \tag{17}$$

where $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ are the eigenvalues arranged into an increasing sequence with their multiplicity taken in account.

It is known that there exist a single-valued correspondence between any self-adjoint operator A and a projector-valued measure P_λ on a Hilbert space H which is expressed in such way

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dP_\lambda. \tag{18}$$

A point λ is said to belong to a spectrum $\sigma(A)$ of the operator A, $\lambda \in \sigma(A)$, iff $P_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)} \neq 0$ for any $\epsilon > 0$. We say that a point λ belongs to an essential spectrum, $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$, iff the projector $P_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)}$ is infinite-dimensional for any $\epsilon > 0$. We say that a point λ belongs to an discrete spectrum, $\lambda \in \sigma_{disc}(A)$, iff the projector $P_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)}$ is finite-dimensional for any $\epsilon > 0$. It is obvious that

$$\sigma(A) = \sigma_{ess}(A) \cup \sigma_{disc}(A). \tag{19}$$

It appears for the Schrödinger operator with almost-periodic potential that the spectrum is essential.

Theorem 5 *(G. Scharf, 1965) The spectrum of Schrödinger operator with almost-periodic potential is essential, i.e. it does not contain isolated eigenvalues of finite multiplicity.*

According to H. Weyl $\lambda \in \sigma(A)$ iff there exist such a sequence $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ that $\lim_{j\to\infty} ||(A - \lambda I)\psi_j|| = 0$. If this sequence is compact then $\lambda \in \sigma_{disc}(A)$, if this sequence is not compact then $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$.

Let us consider any function $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ such that $||\psi|| = 1$ and $||(A - \lambda I)\psi|| < \epsilon/2$. Shifting this function by sufficiently large $\delta-$almost periods of the potential $u(x)$ and its derivatives for a sufficiently small $\delta > 0$

we can construct an orthogonal system of functions $\{\psi_j,\ j = 1, 2 \ldots\}$ such that $||(A - \lambda I)\psi_j|| < \epsilon$ for all $j = 1, 2, \ldots$. By the above criterion it means that the spectrum of the operator H is essential.

In one-dimensional case no eigenvalue can have infinite multiplicity and that means that the spectrum is a perfect set, i.e. a closed without isolated points.

Sometimes it is important to have any information on possible gaps in essential spectrum. It appears that there exist a deep connection between a smoothness of potential $u(x)$ and a size of possible spectral gaps Δ. Appropriate studies for a one-dimensional case were initiated by P. Hartman and C.R. Putnam (1950).

Theorem 6 *(M.S.P. Eastham, 1976; V.I. Feigin, 1977) Let in a self-adjoint operator A in $L^2(\mathbb{R})$, defined by differential expression $-y'' + u(x)y$, a real function $u(x)$ at large $|x|$ has $p > 1$ derivatives. Then in an essential spectrum of the operator A a lacuna of a size Δ with center at a value λ satisfies an asymtotic equality*

$$\Delta = O(\lambda^{-p/2}). \tag{20}$$

Another decomposition of the spectrum $\sigma(A)$ is useful also. According to the spectral theorem any self-adjoint operator A is unitary equivalent to an operator multiplication on λ in $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ for some measure μ. Since any measure μ on $\mathbb{R}$ has unique decomposition in a sum

$$\mu = \mu_{pp} + \mu_{ac} + \mu_{sing}, \tag{21}$$

where μ_{pp} is pure point measure, μ_{ac} is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure, μ_{sing} continuous singular with respect to Lebesgue measure, therefore we have the following decomposition of the spectrum:

$$\sigma(A) = \sigma_{pp}(A) \cup \sigma_{cont}(A) = \sigma_{pp}(A) \cup \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_{sing}(A). \tag{22}$$

It appears that in one-dimensional case the number of states $N(\lambda)$ determines the spectrum $\sigma(H)$ of the Schrödinger operator H :

Theorem 7 *(Pastur, 1980)*

$$\sigma(H) = supp(dN). \tag{23}$$

The Lyapunov exponent $\gamma(\lambda)$ of the spectrum is defined as follows,

$$\gamma(\lambda) = \lim_{L\to\infty} |L|^{-1} \ln ||T_L||, \tag{24}$$

where T_L is a linear operator in $\mathbb{R}^2$ mapping $(\psi(0), \psi'(0))$ into $(\psi(L), \psi'(L))$ and ψ being a solution of the equation $H\psi = \lambda\psi$.

In terms of the Lyapunov exponent the absolutely continuous spectrum $\sigma_{ac}(H)$ of the Schrödinger operator H is described in such a way,

Theorem 8 *(Kotani, 1982)* $\sigma_{ac}(H) = \overline{\{\lambda \in \mathbb{R} : \gamma(\lambda) = 0\}}$.

The Lyapunov exponent $\gamma(\lambda)$ and the number of states $N(\lambda)$ are real and imaginery parts appropriately of a so called Floquet function which is analytic in the upper half of complex plane $\mathbb{C}_+$ of the spectral parameter λ. This fact leads to a following connection between the number of states and the Lyapunov exponent,

Theorem 9 *(Thouless, 1972; Avron and Simon, 1983) The Lyapunov exponent is*

$$\gamma(\lambda) = \gamma_0(\lambda) + \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|\lambda - \lambda'| d|N(\lambda') - N_0(\lambda')|, \tag{25}$$

where values $\gamma_0(\lambda) = [\max(0, -\lambda)]^{1/2}$ *and* $N_0(\lambda) = \pi^{-1}[\max(0, -\lambda)]^{1/2}$ *correspond to the case* $u(x) = 0$.

We can label the gaps of the spectrum by the elements of the frequency module of the almost-periodic potential similar as it has place for periodic one.

Theorem 10 *(Belokolos, 1975; Johnson and Moser, 1982) For the Schrödinger operator with the potential* $u(x) \in CAP(\mathbb{R})$ *and* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(H)$ *the number of states* $N(\lambda) \in \Omega_q$*, where* Ω_q *is the frequencies module of* q.

Now let us formulate and prove the main theorem.

Theorem 11 *(Belokolos, 1975; Dinaburg and Sinai, 1975)*

Consider the Schrödinger equation

$$(-\Delta + u(x))\psi(x) = \lambda\psi(x) \tag{26}$$

with quasi-periodic potential,

$$u(x) = U(\phi) = U(x\omega + \theta),$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad \phi = (\phi_1, \dots, \phi_n), \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n), \quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n). \tag{27}$$

Here

$$U(\phi) = U(\phi_1, \dots, \phi_n) \tag{28}$$

is continuous and periodic in any variable $\phi_k,\ k = 1, \dots, n$ function. We shall assume also that the potential $u(x)$ is small, i.e.

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |u(x)| = \sup_{\phi \in T^n} |U(\phi)| = \epsilon, \quad 0 < \epsilon \ll 1, \tag{29}$$

where T^n is a $n-$dimensional torus. Evidently we have

$$U(\phi) = \sum_{q \in \mathbb{Z}^n} U_q \exp(i(q, \phi)), \quad (q, \phi) = \sum_{s=1}^{n} q_s \phi_s, \tag{30}$$

and therefore

$$U(\phi) = \sum_{q \in \mathbb{Z}^n} U_q \exp(i(q, \omega)x + (q, \theta)). \tag{31}$$

For the Schrödinger equation in the zero approximation of the perturbation theory we have

$$\psi_0(x) = \exp(ikx), \quad \lambda_0 = k^2. \tag{32}$$

In the first approximation of the perturbation theory we have

$$\psi_0(x) + \psi_1(x) = \exp(ikx) \left(1 + \sum_{q \in \mathbb{Z}^n} \frac{U_q \exp(ix((q, \omega) - k))}{k^2 - (k - (q, \omega))^2}\right),$$
$$\lambda_0 + \lambda_1 = k^2 + \sum_{q \in \mathbb{Z}^n} \frac{|U_q|^2}{k^2 - (k - (q, \omega))^2}. \tag{33}$$

We have problems with the perturbation series written above only of the presence of small denominators

$$k^2 - (k - (q, \omega))^2 = (q, \omega)(2k - (q, \omega)). \tag{34}$$

For example if the wave vector k satisfies the generalized Bragg–Wulff condition

$$2k = (q, \omega), \quad |U_q| \neq 0, \tag{35}$$

then the standard perturbation series have no sense, we must use the secular perturbation theory that reveals an appearance of gaps in spectrum. But even if the wave vector k does not satisfy the generalized Bragg–Wulff condition the convergence of series is not obvious and depends on a rate of vanishing of numerators with growth of $|q|$.

A rate of vanishing of denominators depends on the arithmetical properties of the wave vector $2k$ and the vector of frequencies $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ of the quasi-periodic potential, or, more precisely, on how quickly the linear superpositions of frequencies (ω, q) approximate the wave vector $2k$. It appears that some real numbers $2k$ are approximated by the numbers (ω, q) quite well and some real numbers $2k$ are approximated by the numbers (ω, q) quite bad.

A rate of vanishing of numerators depends on the smoothness of the function $U(\phi)$ which determines how quickly vanish the Fourier amplitudes U_q of the potential $u(x)$. For example, if the potential $U(\phi)$ has p derivatives then $|U_q| \simeq |q|^{-p}$ and if the potential $U(\phi)$ is analytical function in the strip $|Im\phi| = \sup_{1\leq k\leq n} |Im\phi_k| < a$ then $|U_q| \simeq \epsilon \exp(-a|q|)$.

If perturbation series for the wave function $\psi(x)$ and energy λ converge at a given wave vector k then we may build at this wave vector the appropriate quantities by the methods of the perturbation theory. If perturbation series for the wave function $\psi(x)$ and energy λ diverge at a given wave vector k then we can have at this wave vector a spectral gap and therefore must use a secular theory of perturbation.

If we have at some neighborhood of the vector k a proper arrangement of these gaps then we have at this domain an absolutely continuous spectrum with gaps, otherwise we can have a point spectrum or even singularly continuous one.

In order to deal with small denominators in the spectral problem of the Schrödinger operator with almost-periodic potential we can use the Kolmogorov–Arnold–Moser technique as it was done E.D. Belokolos (1975), E.I. Dinaburg and Ya.G. Sinai (1975).

New results in this problem a reader can find in a number of consequent publications.

References

[1] Е.Д. Белоколос (1975) Квантовая частица в одномерной деформированной решетке. Оценки размеров лакун в спектре. ТМФ, т. 23, № 3, с. 344-357

[2] Е.Д. Белоколос (1976) Квантовая частица в одномерной деформированной решетке. Зависимость энергии от квази-импульса. ТМФ, т. 26, № 1, с. 33-41

[3] Е.Д. Белоколос (1982) "Математические основы теории твердых тел с квази-периодической структурой". Диссертация, Институт теоретической физики АН УССР, Киев

[4] Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, А.М. Самойленко (1969) Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. К.: Наукова думка. с. 248

[5] Е.И. Динабург, Я.Г. Синай (1975) Об одномерном уравнении Шредингера с квазипериодическим потенциалом. Функц. анализ и его прилож. т. 9. № 4, с. 8-21

[6] Б.М. Левитан. (1953) Почти-периодические функции. М.: ГИТТЛ, с. 396

[7] Б.М. Левитан, В.В. Жиков. (1978) Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: МГУ, с. 205

[8] Б.М. Левитан. (1981) Почти-периодичность бесконечнозонных потенциалов. Известия АН СССР, сер. матем. т. 45, № 2, с. 291-320

[9] В.А. Марченко (1978) О спектре оператора Штурма-Лиувилля с почти-периодическим потенциалом. Функц. анализ, т. 11, № 2, с. 85-86

[10] М.А. Шубин (1976) Псевдодифференциальные почти-периодические операторы и алгебры фон Неймана. Труды Моск. матем. общества, т. 35, с. 103-163

[11] М.А. Шубин (1978) Плотность состояний самосопряженных эллиптических операторов с почти-периодическими коэффициентами. Труды семинара им. И.Г. Петровского, вып. 3. М.: Изд. МГУ, с. 243-275

[12] М.А. Шубин (1978) Почти-периодические функции и дифференциальные операторы с частными производными. УМН, т. 33, № 2, с. 3-47

[13] М.А. Шубин (1979) Спектральная теория и индексы эллиптических операторов с почти-периодическими коэффициентами. УМН, т. 34, № 2, с. 95-135

[14] В.И. Фейгин (1977) О непрерывном спектре дифференциальных операторов. Функц. анализ, т. 11 № 1, с. 43-54

[15] Р. де ла Яве (2003) Введение в КАМ-теорию. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, с. 176

[16] J.-P. Allouche, Y. Meyer (2014) Quasicrystals, model sets, and automatic sequences. arXiv:1401.3725

[17] L. Amerio, G. Prouse (1971) Almost-periodic functions and functional equations. New York: Van Nostrand, YII+184 p.

[18] Avron and Simon. (1983)

[19] A. Besicovitch (1932) Almost-periodic Functions. Cambridge: Cambridge University Press

[20] H. Bohr (1925) Zur Theorie fastperiodische Funktionen. I. Acta Mathematicae. v. 45, 580

[21] H. Bohr (1933) Fastperiodische Funktionen, Berlin: Springer. (пер. Г. Бор. Почти-периодические функции. М.: ОГИЗ, 1934)

[22] C. Corduneunu (1968) Almost periodic functions. N.Y.: Wiley Interscience, p. 237

[23] M.S.P. Eastham (1976) Asymptotic estimates fo the lengths of the gaps in the essential spectrum of the self-adjoint differential operators. Proc. Math. Soc. Edinburg, v. 74A, p. 239-252

[24] P. Hartman, C.R. Putnam (1950) The gaps in the essential spectra of wave equations. Amer. J. Math., v. 72, № 4, 849-862

[25] V.E. Korepin (1987) Completely integrable models in quasicrystals. Comm. Math. Phys., v. 110, № 1, 157-171

[26] S. Kotani (1982) Lyapunov indices determieскиene absolutely continuous spectra of stationary random one-dimensional Schroedinger operators (Taniguchi Symp. SA Katata 1982) p. 225-247

[27] R. Johnson, J. Moser (1982) Commun. Math. Phys., v. 84, p. 403-438

[28] L.A. Pastur (1980) Commun. Math. Phys., v. 75, p. 107-196

[29] A.L.T. Paterson (1999) Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras, p. 164

[30] G. Scharf (1965) Fastperiodische Potentiale, Helvetica Physica Acta, v. 38, fasc. 6, p. 573-605

[31] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, J. Cahn (1984) Metallic Phase with Long-Range Orientation Order and No Translation Symmetry. Phys. Rev. Lett., v. 50, № 20, 1951

[32] J.B. Suck, M. Schreiber, P. Haussler (2004) Quasicrystals: An Introduction to Structure, Physical Properties, and Applications. Berlin: Springer

[33] Thouless. (1972)

Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 35–55

УДК 517.9+531.31+530.145

V.I. Gerasimenko

(Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv)

gerasym@imath.kiev.ua

Mean field asymptotic behavior of quantum particles with initial correlations

Dedicated to the 80 th anniversary of Prof. D.Ya. Petrina

In the paper we consider the problem of the rigorous description of the kinetic evolution in the presence of initial correlations of quantum particles. One developed approach consists on the description of the evolution of quantum many-particle systems within the framework of marginal observables in mean field scaling limit. Another method based on the possibility to describe the evolution of states within the framework of a one-particle marginal density operator governed by the generalized quantum kinetic equation in case of initial states specified by a one-particle marginal density operator and correlation operators.

В роботі розглядається проблема строгого опису кінетичної еволюції за наявності початкових кореляцій квантових частинок. Один з розвинутих підходів полягає в описі еволюції квантових систем багатьох частинок в термінах маргінальних спостережуваних в скейлінґовій границі середнього поля. Ще один метод ґрунтується на можливості опису еволюції станів за допомогою одночастинкового маргінального оператора густини, який визначається узагальненим квантовим кінетичним рівнянням у випадку початкових станів заданих одночастинковим маргінальним оператором густини і кореляційними операторами.

© Institute of Mathematics, 2014

1 Introduction

As is known the collective behavior of quantum many-particle systems can be effectively described within the framework of a one-particle marginal density operator governed by the kinetic equation in a suitable scaling limit of underlying dynamics. At present the considerable advances in the rigorous derivation of the quantum kinetic equations in the mean (self-consistent) field scaling limit is observed [1]-[6]. In particular, the nonlinear Schrödinger equation [3]-[10] and the Gross–Pitaevskii equation [7]-[15] was justified.

The conventional approach to this problem is based on the consideration of an asymptotic behavior of a solution of the quantum BBGKY hierarchy for marginal density operators constructed within the framework of the theory of perturbations in case of initial data specified by one-particle marginal density operators without correlations, i.e. such that satisfy a chaos condition [16],[17]. We note, that for the first time a perturbative solution of the quantum BBGKY hierarchy was constructed by D. Petrina [18] (see also [19]).

In paper [20] it was developed more general method of the derivation of the quantum kinetic equations. By means of a non-perturbative solution of the quantum BBGKY hierarchy constructed in [21] it was established that, if initial data is completely specified by a one-particle marginal density operator, then all possible states of many-particle systems at arbitrary moment of time can be described within the framework of a one-particle density operator governed by the generalized quantum kinetic equation (see also [22]). Then the actual quantum kinetic equations can be derived from the generalized quantum kinetic equation in appropriate scaling limits, for example, a mean field limit [23].

Another approach to the description of the many-particle evolution is given within the framework of marginal observables governed by the dual quantum BBGKY hierarchy [24]. In paper [25] a rigorous formalism for the description of the kinetic evolution of observables of quantum particles in a mean field scaling limit was developed.

In this paper we consider the problem of the rigorous description of the kinetic evolution in the presence of initial correlations of quantum particles. Such initial states are typical for the condensed states of quantum gases in contrast to the gaseous state. For example, the equilibrium state of the Bose condensate satisfies the weakening of correlation condition specified by correlations of the condensed state [26]. Thus, our goal consists in the derivation of the mean field quantum kinetic equation including initial correlations.

We outline the structure of the paper. In section 2, we establish the mean field asymptotic behavior of marginal observables governed by the dual quantum BBGKY hierarchy. The limit dynamics is described by the set of recurrence evolution equations, namely by the dual quantum Vlasov hierarchy. Furthermore, the links of the dual quantum Vlasov hierarchy for the limit marginal observables and the quantum Vlasov-type kinetic equation with correlations are established. In section 3, we consider the relationships of dynamics described by marginal observables and within the framework of a one-particle marginal density operator governed by the generalized quantum kinetic equation including initial correlations. In section 4, we develop one more approach to the description of the quantum kinetic evolution with correlations in the mean field limit. We prove that a solution of the generalized quantum kinetic equation with correlations is governed by the quantum Vlasov-type equation with correlations. The property of the propagation of initial correlations is also established. Finally, in section 5, we conclude with some perspectives for future research.

2 The kinetic evolution within the framework of marginal observables

The kinetic evolution of many-particle systems can be described within the framework of observables. We consider this problem on an example of the mean field asymptotic behavior of a non-perturbative solution of the dual quantum BBGKY hierarchy for marginal observables. Moreover, we establish the links of the dual quantum Vlasov hierarchy for the limit marginal observables with the quantum Vlasov-type kinetic equation in the presence of initial correlations.

2.1 Many-particle dynamics of observables

We consider a quantum system of a non-fixed (i.e. arbitrary but finite) number of identical (spinless) particles obeying Maxwell–Boltzmann statistics in the space $\mathbb{R}^3$. We will use units where $h = 2\pi\hbar = 1$ is a Planck constant, and $m = 1$ is the mass of particles.

Let the space $\mathcal{H}$ be a one-particle Hilbert space, then the n-particle space $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}^{\otimes n}$ is a tensor product of n Hilbert spaces $\mathcal{H}$. We adopt the usual convention that $\mathcal{H}^{\otimes 0} = \mathbb{C}$. The Fock space over the Hilbert space $\mathcal{H}$ we denote by $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$.

The Hamiltonian H_n of the n-particle system is a self-adjoint operator with the domain $\mathcal{D}(H_n) \subset \mathcal{H}_n$

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} K(i) + \epsilon \sum_{i_1<i_2=1}^{n} \Phi(i_1, i_2), \tag{1}$$

where $K(i)$ is the operator of a kinetic energy of the i particle, $\Phi(i_1, i_2)$ is the operator of a two-body interaction potential and $\epsilon > 0$ is a scaling parameter. The operator $K(i)$ acts on functions ψ_n, that belong to the subspace $L_0^2(\mathbb{R}^{3n}) \subset \mathcal{D}(H_n) \subset L^2(\mathbb{R}^{3n})$ of infinitely differentiable functions with compact supports, according to the formula: $K(i)\psi_n = -\frac{1}{2}\Delta_{q_i}\psi_n$. Correspondingly, we have: $\Phi(i_1, i_2)\psi_n = \Phi(q_{i_1}, q_{i_2})\psi_n$, and we assume that the function $\Phi(q_{i_1}, q_{i_2})$ is symmetric with respect to permutations of its arguments, translation-invariant and bounded function.

Let a sequence $g = (g_0, g_1, \ldots, g_n, \ldots)$ be an infinite sequence of self-adjoint bounded operators g_n defined on the Fock space $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$. An operator g_n defined on the n-particle Hilbert space $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}^{\otimes n}$ will be also denoted by the symbol $g_n(1, \ldots, n)$. Let the space $\mathfrak{L}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ be the space of sequences $g = (g_0, g_1, \ldots,\, g_n, \ldots)$ of bounded operators g_n defined on the Hilbert space $\mathcal{H}_n$ that satisfy symmetry condition: $g_n(1, \ldots, n) = g_n(i_1, \ldots, i_n)$, for arbitrary $(i_1, \ldots, i_n) \in (1, \ldots, n)$, equipped with the operator norm $\|.\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H}_n)}$. We will also consider a more general space $\mathfrak{L}_{\gamma}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ with the norm

$$\|g\|_{\mathfrak{L}_{\gamma}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})} \doteq \max_{n\geq 0} \frac{\gamma^n}{n!} \|g_n\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H}_n)},$$

where $0 < \gamma < 1$. We denote by $\mathfrak{L}_{\gamma,0}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}) \subset \mathfrak{L}_{\gamma}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ the everywhere dense set in the space $\mathfrak{L}_{\gamma}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ of finite sequences of degenerate operators with infinitely differentiable kernels with compact supports.

For $g_n \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}_n)$ it is defined the one-parameter mapping

$$\mathbb{R}^1 \ni t \mapsto \mathcal{G}_n(t)g_n \doteq e^{itH_n} g_n e^{-itH_n}, \tag{2}$$

where the Hamilton operator H_n has the structure (1). On the space $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_n)$ one-parameter mapping (2) is an isometric $*$-weak continuous group of operators. The infinitesimal generator $\mathcal{N}_n$ of this group of operators is a closed operator for the $*$-weak topology, and on its domain of the definition $\mathcal{D}(\mathcal{N}_n) \subset \mathfrak{L}(\mathcal{H}_n)$ it is defined in the sense of the $*$-weak convergence of the space $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_n)$ by the operator

$$\mathrm{w}^*-\lim_{t\rightarrow 0}\frac{1}{t}\big(\mathcal{G}_n(t)g_n - g_n\big) = -i(g_n H_n - H_n g_n) \doteq \mathcal{N}_n g_n, \qquad (3)$$

where H_n is the Hamiltonian (1) and the operator $\mathcal{N}_n g_n$ is defined on the domain $\mathcal{D}(H_n) \subset \mathcal{H}_n$. Therefore on the space $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_n)$ a unique solution of the Heisenberg equation for observables of a n-particle system is determined by group (2) [22].

In what follows we shall hold abridged notations: $Y \equiv (1,\ldots,s)$, $X \equiv (j_1,\ldots,j_n) \subset Y$, and $\{Y \setminus X\}$ is the set, consisting of a single element $Y \setminus X = (1,\ldots,s) \setminus (j_1,\ldots,j_n)$, thus, the set $\{Y \setminus X\}$ is a connected subset of the set Y.

To describe the evolution within the framework of marginal observables we introduce a notion of the $(1+n)th$-order ($n \geq 0$) cumulant of groups of operators (2) as follows [21]

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A}_{1+n}(t,\{Y \setminus X\},X) \doteq \\ &\doteq \sum_{\mathrm{P}:\,(\{Y\setminus X\},\,X)=\bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)! \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} \mathcal{G}_{|\theta(X_i)|}(t,\theta(X_i)),\end{aligned} \qquad (4)$$

where the symbol $\sum_{\mathrm{P}}$ means the sum over all possible partitions P of the set $(\{Y \setminus X\}, j_1,\ldots,j_n)$ into $|\mathrm{P}|$ nonempty mutually disjoint subsets $X_i \subset (\{Y \setminus X\}, X)$, and $\theta(\cdot)$ is the declusterization mapping defined as follows: $\theta(\{Y \setminus X\},\, X) = Y$. For example,

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A}_1(t,\{Y\}) = \mathcal{G}_s(t,Y),\\ &\mathfrak{A}_2(t,\{Y\setminus (j)\},j) = \mathcal{G}_s(t,Y) - \mathcal{G}_{s-1}(t,Y\setminus (j))\mathcal{G}_1(t,j).\end{aligned}$$

In terms of observables the evolution of quantum many-particle systems is described by the sequence $B(t) = (B_0, B_1(t,1),\ldots,B_s(t,1,\ldots,s),\ldots)$ of marginal observables (or s-particle observables) $B_s(t,1,\ldots,s)$, $s \geq 1$, determined by the following expansions [24]:

$$B_s(t,Y) = \sum_{n=0}^{s}\frac{1}{n!}\sum_{j_1\neq\ldots\neq j_n=1}^{s} \mathfrak{A}_{1+n}(t,\{Y\setminus X\},X)\, B^{0,\epsilon}_{s-n}(Y\setminus X), \qquad (5)$$

where $B(0) = (B_0, B_1^{0,\epsilon}(1), \ldots, B_s^{0,\epsilon}(1,\ldots,s), \ldots) \in \mathfrak{L}_\gamma(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ is a sequence of initial marginal observables, and the generating operator $\mathfrak{A}_{1+n}(t)$ of expansion (5) is the $(1+n)th$-order cumulant of groups of operators (2) defined by expansion (4). The simplest examples of marginal observables (5) are given by the expressions:

$$B_1(t,1) = \mathfrak{A}_1(t,1)B_1^{0,\epsilon}(1),$$
$$B_2(t,1,2) = \mathfrak{A}_1(t,\{1,2\})B_2^{0,\epsilon}(1,2) + \mathfrak{A}_2(t,1,2)(B_1^{0,\epsilon}(1) + B_1^{0,\epsilon}(2)).$$

If $\gamma < e^{-1}$, for the sequence of operators (5) the estimate is true: $\|B(t)\|_{\mathfrak{L}_\gamma(\mathcal{F}_\mathcal{H})} \leq e^2(1-\gamma e)^{-1}\|B(0)\|_{\mathfrak{L}_\gamma(\mathcal{F}_\mathcal{H})}$.

We note that a sequence of marginal observables (5) is the non-perturbative solution of recurrence evolution equations known as the dual quantum BBGKY hierarchy [24].

2.2 A mean field asymptotic behavior of marginal observables

A mean field asymptotic behavior of marginal observables (5) is described by the following statement [25].

Theorem 1 *Let for* $B_n^{0,\epsilon} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}_n)$, $n \geq 1$, *in the sense of the* $*$*-weak convergence on the space* $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_s)$ *it holds:* $\mathrm{w}^*-\lim_{\epsilon\to 0}(\epsilon^{-n}B_n^{0,\epsilon} - b_n^0) = 0$, *then for arbitrary finite time interval there exists the mean field limit of marginal observables (5):* $\mathrm{w}^*-\lim_{\epsilon\to 0}(\epsilon^{-s}B_s(t) - b_s(t)) = 0$, $s \geq 1$, *that are determined by the following expansions:*

$$\begin{aligned}
b_s(t,Y) = &\sum_{n=0}^{s-1} \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \prod_{l_1\in Y} \mathcal{G}_1(t-t_1,l_1) \\
&\times \sum_{i_1\neq j_1=1}^{s} \mathcal{N}_{\mathrm{int}}(i_1,j_1) \prod_{l_2\in Y\setminus(j_1)} \mathcal{G}_1(t_1-t_2,l_2)\ldots \\
&\prod_{l_n\in Y\setminus(j_1,\ldots,j_{n-1})} \mathcal{G}_1(t_{n-1}-t_n,l_n) \sum_{\substack{i_n\neq j_n=1,\\ i_n,j_n\neq(j_1,\ldots,j_{n-1})}}^{s} \mathcal{N}_{\mathrm{int}}(i_n,j_n) \\
&\times \prod_{l_{n+1}\in Y\setminus(j_1,\ldots,j_n)} \mathcal{G}_1(t_n,l_{n+1}) b_{s-n}^0(Y\setminus(j_1,\ldots,j_n)).
\end{aligned} \tag{6}$$

In expansion (6) we denote by the symbol $\mathcal{N}_{\mathrm{int}}(i_1, j_2)$ the operator defined on $g_n \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}_n)$

$$\mathcal{N}_{\mathrm{int}}(i_1, j_2) g_n \doteq -i(g_n \Phi(i_1, j_2) - \Phi(i_1, j_2) g_n).$$

The proof of Theorem 1 is based on formulas for cumulants of asymptotically perturbed groups of operators (2).

For arbitrary finite time interval the asymptotically perturbed group of operators (2) has the following scaling limit in the sense of the $*$-weak convergence on the space $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_s)$:

$$\mathrm{w}^{*}\!-\lim_{\epsilon\rightarrow 0}\big(\mathcal{G}_s(t,Y)-\prod_{j=1}^{s}\mathcal{G}_1(t,j)\big)g_s=0. \tag{7}$$

Taking into account analogs of the Duhamel equations for cumulants of asymptotically perturbed groups of operators, in view of formula (7) we have

$$\begin{aligned}
&\mathrm{w}^{*}\!-\lim_{\epsilon\rightarrow 0}\Big(\epsilon^{-n}\frac{1}{n!}\mathfrak{A}_{1+n}\big(t,\{Y\setminus X\},j_1,\ldots,j_n\big)-\\
&\quad-\int\limits_0^t dt_1\ldots\int\limits_0^{t_{n-1}} dt_n\prod_{l_1\in Y}\mathcal{G}_1(t-t_1,l_1)\sum_{i_1\neq j_1=1}^{s}\mathcal{N}_{\mathrm{int}}(i_1,j_1)\\
&\quad\times\prod_{l_2\in Y\setminus(j_1)}\mathcal{G}_1(t_1-t_2,l_2)\ldots\prod_{l_n\in Y\setminus(j_1,\ldots,j_{n-1})}\mathcal{G}_1(t_{n-1}-t_n,l_n)\\
&\times\sum_{\substack{i_n\neq j_n=1,\\ i_n,j_n\neq(j_1,\ldots,j_{n-1})}}^{s}\mathcal{N}_{\mathrm{int}}(i_n,j_n)\prod_{l_{n+1}\in Y\setminus(j_1,\ldots,j_n)}\mathcal{G}_1(t_n,l_{n+1})\Big)g_{s-n}=0,
\end{aligned}$$

where we used notations accepted in formula (6) and $g_{s-n} \equiv g_{s-n}((1,\ldots,s)\setminus(j_1,\ldots,j_n))$, $n\geq 1$. As a result of this equality we establish the validity of Theorem 1 for expansion (5) of marginal observables.

If $b^0 \in \mathfrak{L}_\gamma(\mathcal{F}_\mathcal{H})$, then the sequence $b(t)=(b_0,b_1(t),\ldots,b_s(t),\ldots)$ of limit marginal observables (6) is a generalized global solution of the Cauchy problem of the dual quantum Vlasov hierarchy

$$\frac{\partial}{\partial t}b_s(t,Y)=\sum_{j=1}^{s}\mathcal{N}(j)\,b_s(t,Y)+\sum_{j_1\neq j_2=1}^{s}\mathcal{N}_{\mathrm{int}}(j_1,j_2)\,b_{s-1}(t,Y\setminus(j_1)), \tag{8}$$

$$b_s(t)\mid_{t=0}=b_s^0,\quad s\geq 1, \tag{9}$$

where the symbol $\mathcal{N}(j)$ denotes the infinitesimal generator defined on $g_n \in \mathfrak{L}_0(\mathcal{H}_n)$ of the group of operators $\mathcal{G}_1(t,j)$ of j particle

$$\mathcal{N}(j)g_n \doteq -i(g_n K(j) - K(j)g_n).$$

It should be noted that equations set (8) has the structure of recurrence evolution equations. We give several examples of the evolution equations of the dual quantum Vlasov hierarchy (8) in terms of operator kernels of the limit marginal observables

$$\begin{aligned}
&i\,\frac{\partial}{\partial t}b_1(t,q_1;q_1') = -\frac{1}{2}(-\Delta_{q_1} + \Delta_{q_1'})b_1(t,q_1;q_1'),\\
&i\,\frac{\partial}{\partial t}b_2(t,q_1,q_2;q_1',q_2') = \big(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(-\Delta_{q_i} + \Delta_{q_i'}) +\\
&\qquad +(\Phi(q_1'-q_2') - \Phi(q_1-q_2))\big)b_2(t,q_1,q_2;q_1',q_2') +\\
&\qquad +\big(\Phi(q_1'-q_2') - \Phi(q_1-q_2)\big)\big(b_1(t,q_1;q_1') + b_1(t,q_2;q_2')\big).
\end{aligned}$$

We consider the mean field limit of a particular case of marginal observables, namely the additive-type marginal observables $B^{(1)}(0) = (0, B_1^{0,\epsilon}(1), 0, \ldots)$. We remark that the k-ary marginal observables are represented by the sequence $B^{(k)}(0) = \big(0,\ldots,0,B_k^{0,\epsilon}(1,\ldots,k),0,\ldots\big)$. In case of additive-type marginal observables expansions (5) the following form:

$$B_s^{(1)}(t,Y) = \mathfrak{A}_s(t)\sum_{j=1}^{s} B_1^{0,\epsilon}(j), \quad s \geq 1, \tag{10}$$

where $\mathfrak{A}_s(t)$ is s-order cumulant (4) of groups of operators (2).

Corollary 1 *If for the additive-type marginal observable* $B_1^{0,\epsilon} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$, *it holds* $\mathrm{w}^*\!-\lim_{\epsilon\to 0}(\epsilon^{-1}B_1^{0,\epsilon} - b_1^0) = 0$, *then, according to the statement of Theorem 1, for additive-type marginal observable (10) we have* $\mathrm{w}^*\!-\lim_{\epsilon\to 0}(\epsilon^{-s}B_s^{(1),\epsilon}(t) - b_s^{(1)}(t)) = 0$, $s \geq 1$, *where the limit additive-type marginal observable* $b_s^{(1)}(t)$ *is determined by a special case of expansion (6)*

$$\begin{aligned}
b_s^{(1)}(t,Y) = \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^{t_{s-2}} dt_{s-1} \prod_{l_1\in Y}\mathcal{G}_1(t-t_1,l_1)\sum_{i_1\neq j_1=1}^{s}\mathcal{N}_{\mathrm{int}}(i_1,j_1) \qquad (11)\\
\times \prod_{l_2\in Y\setminus(j_1)}\mathcal{G}_1(t_1-t_2,l_2)\ldots\prod_{l_{s-1}\in Y\setminus(j_1,\ldots,j_{s-2})}\mathcal{G}_1(t_{s-2}-t_{s-1},l_{s-1})
\end{aligned}$$

$$\times \sum_{\substack{i_{s-1} \neq j_{s-1} = 1, \\ i_{s-1}, j_{s-1} \neq (j_1, \ldots, j_{s-2})}}^{s} \mathcal{N}_{\mathrm{int}}(i_{s-1}, j_{s-1})$$
$$\times \prod_{l_s \in Y \setminus (j_1, \ldots, j_{s-1})} \mathcal{G}_1(t_{s-1}, l_s) b_1^0(Y \setminus (j_1, \ldots, j_{s-1})).$$

We make several examples of expansions (11) for the limit additive-type marginal observables

$$b_1^{(1)}(t,1) = \mathcal{G}_1(t,1)\, b_1^0(1),$$
$$b_2^{(1)}(t,1,2) = \int_0^t dt_1 \prod_{i=1}^{2} \mathcal{G}_1(t-t_1,i)\mathcal{N}_{\mathrm{int}}(1,2) \sum_{j=1}^{2} \mathcal{G}_1(t_1,j)\, b_1^0(j).$$

Thus, for arbitrary initial states in the mean field scaling limit the kinetic evolution of quantum many-particle systems is described in terms of limit marginal observables (6) governed by the dual quantum Vlasov hierarchy (8).

2.3 The derivation of the quantum Vlasov-type kinetic equation with correlations

Furthermore, the relationships between the evolution of observables and the kinetic evolution of states described in terms of a one-particle marginal density operator are considered.

Let initial states specified by the one-particle marginal density operator $F_1^{0,\epsilon} \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H})$ in the presence of correlations, i.e. initial state is defined by the following sequence of density operators:

$$F^c = \big(1, F_1^{0,\epsilon}(1), g_2 \prod_{i=1}^{2} F_1^{0,\epsilon}(i), \ldots, g_n \prod_{i=1}^{n} F_1^{0,\epsilon}(i), \ldots\big), \tag{12}$$

where the bounded operators $g_n \equiv g_n(1,\ldots,n) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}_n)$, $n \geq 2$, are specified initial correlations. We note that such assumption about initial states is intrinsic for the kinetic description of a gas. On the other hand, initial data (12) is typical for the condensed states of quantum gases, for example, the equilibrium state of the Bose condensate satisfies the weakening of correlation condition with the correlations which characterize the condensed state [26].

We assume that for the initial one-particle marginal density operator $F_1^{0,\epsilon}\in\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})$ exists the mean field limit $\lim_{\epsilon\rightarrow 0}\big\|\epsilon\,F_1^{0,\epsilon}-f_1^0\big\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}=0$, then in the mean field limit initial state is defined by the following sequence of operators:

$$f^c=\big(1,f_1^0(1),g_2\prod_{i=1}^{2}f_1^0(i),\ldots,g_n\prod_{i=1}^{n}f_1^0(i),\ldots\big). \tag{13}$$

We consider links of the constructed mean field asymptotic behavior of marginal observables with the nonlinear Vlasov-type kinetic equation in case of initial states (13).

In case of initial states specified by sequence (13) the average values (mean values) of limit marginal observables (6) are determined by the following positive continuous linear functional [22]

$$\big(b(t),f^c\big)\doteq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\mathrm{Tr}_{1,\ldots,n}\,b_n(t,1,...,n)\,g_n(1,...,n)\prod_{i=1}^{n}f_1^0(i). \tag{14}$$

For $b(t)\in\mathfrak{L}_{\gamma}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ and $f_1^0\in\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})$, functional (14) exists under the condition that $\|f_1^0\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}<\gamma$.

Consequently, for the limit additive-type marginal observables (11) the following equality is true:

$$\begin{aligned}\big(b^{(1)}(t),f^c\big)&=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\,\mathrm{Tr}_{1,\ldots,s}\,b_s^{(1)}(t,1,\ldots,s)g_s(1,\ldots,s)\prod_{i=1}^{s}f_1^0(i)=\\&=\mathrm{Tr}_1\,b_1^0(1)f_1(t,1),\end{aligned}$$

where the operator $b_s^{(1)}(t)$ is given by expansion (11) and the limit marginal density operator $f_1(t,1)$ is represented by the series expansion

$$\begin{aligned}f_1(t,1)=&\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^t dt_1\ldots\int\limits_0^{t_{n-1}}dt_n\,\mathrm{Tr}_{2,\ldots,n+1}\mathcal{G}_1(-t+t_1,1)\\&\times\mathcal{N}^{*}_{\mathrm{int}}(1,2)\prod_{j_1=1}^{2}\mathcal{G}_1(-t_1+t_2,j_1)\ldots\prod_{i_n=1}^{n}\mathcal{G}_1(-t_n+t_n,i_n)\\&\times\sum_{k_n=1}^{n}\mathcal{N}^{*}_{\mathrm{int}}(k_n,n+1)\prod_{j_n=1}^{n+1}\mathcal{G}_1(-t_n,j_n)g_{1+n}(1,\ldots,n+1)\prod_{i=1}^{n+1}f_1^0(i).\end{aligned} \tag{15}$$

In series (15) the operator $\mathcal{N}^*_{\mathrm{int}}(j_1,j_2)f_n = -\mathcal{N}_{\mathrm{int}}(j_1,j_2)f_n$ is adjoint operator to operator (3) in the sense of functional (14). For bounded interaction potentials series (15) is norm convergent on the space $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})$ under the condition: $t < t_0 \equiv (2\,\|\Phi\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H}_2)}\|f_1^0\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})})^{-1}$.

The operator $f_1(t)$ represented by series (15) is a solution of the Cauchy problem of the quantum Vlasov-type kinetic equation with correlations

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}f_1(t,1) = -\mathcal{N}(1)f_1(t,1) + \qquad (16)\\ &+\mathrm{Tr}_2(-\mathcal{N}_{\mathrm{int}})(1,2)\prod_{i_1=1}^{2}\mathcal{G}_1(-t,i_1)g_1(\{1,2\})\prod_{i_2=1}^{2}\mathcal{G}_1(t,i_2)f_1(t,1)f_1(t,2),\end{aligned}$$

$$f_1(t)|_{t=0} = f_1^0. \qquad (17)$$

This fact is proved similarly as in case of a solution of the quantum BBGKY hierarchy represented by the iteration series [18],[22].

Thus, in case of initial states specified by one-particle marginal density operator (13) we establish that the dual quantum Vlasov hierarchy (8) for additive-type marginal observables describes the evolution of a system of quantum particles just as the quantum Vlasov-type kinetic equation with correlations (16).

2.4 The mean field evolution of initial correlations

The property of the propagation of initial chaos is a consequence of the validity of the following equality for the mean value functionals of the limit k-ary marginal observables in case of $k \geq 2$

$$\begin{aligned}\big(b^{(k)}(t),f^c\big) &= \sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\,\mathrm{Tr}_{1,\ldots,s}\,b_s^{(k)}(t,1,\ldots,s)g_s(1,\ldots,s)\prod_{j=1}^{s}f_1^0(j) = \qquad (18)\\ &= \frac{1}{k!}\mathrm{Tr}_{1,\ldots,k}\,b_k^0(1,\ldots,k)\prod_{i_1=1}^{k}\mathcal{G}_1(-t,i_1)g_1(\{1,\ldots,k\})\\ &\times\prod_{i_2=1}^{k}\mathcal{G}_1(t,i_2)\prod_{j=1}^{k}f_1(t,j), \quad k\geq 2,\end{aligned}$$

where the limit one-particle marginal density operator $f_1(t,i)$ is defined by series expansion (15) and therefore it is a solution of the Cauchy problem of the quantum Vlasov-type kinetic equation with correlations (16),(17).

This fact is proved similarly to the proof of a property on the propagation of initial chaos in a mean field limit [25].

Thus, in case of the limit k-ary marginal observables a solution of the dual quantum Vlasov hierarchy (8) is equivalent to a property of the propagation of initial correlations for the k-particle marginal density operator in the sense of equality (18) or in other words the mean field scaling dynamics does not create correlations.

We remark that the general approaches to the description of the evolution of states of quantum many-particle systems within the framework of correlation operators and marginal correlation operators were given in papers [28],[29] and [30], respectively (see also a review [22]).

3 On relationships of dynamics of observables and the kinetic evolution of states

We consider the relationships of dynamics of quantum many-particle systems described in terms of marginal observables and dynamics described within the framework of a one-particle marginal density operator governed by the generalized quantum kinetic equation in the presence of initial correlations. If initial states is completely specified by a one-particle marginal density operator, using a non-perturbative solution of the quantum dual BBGKY hierarchy we prove that all possible states at arbitrary moment of time can be described within the framework of a one-particle density operator governed by the generalized quantum kinetic equation with correlations.

3.1 Quantum dynamics of states and correlations

In case of initial states defined by sequence (12) the average values (mean values) of marginal observables (5) are defined by the positive continuous linear functional on the space $\mathfrak{L}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$

$$\big(B(t),F^c\big) \doteq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\mathrm{Tr}_{1,\ldots,n}\,B_n(t,1,\ldots,n)\,g_n(1,\ldots,n)\prod_{i=1}^{n}F_1^{0,\epsilon}(i). \quad (19)$$

For $F_1^{0,\varepsilon}\in\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})$ and $B_n^{0,\epsilon}\in\mathfrak{L}(\mathcal{H}_n)$ series (19) exists under the condition that $\|F_1^{0,\varepsilon}\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}<e^{-1}$.

For mean value functional (19) the following representation holds

$$\big(B(t),F^c\big)=\big(B(0),F(t\mid F_1(t))\big), \tag{20}$$

where $B(0)=(B_0,B_1^{0,\epsilon}(1),\ldots,B_s^{0,\epsilon}(1,\ldots,s),\ldots)\in\mathfrak{L}_\gamma(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ is a sequence of initial marginal observables, and $F(t\mid F_1(t))=(1,F_1(t),F_2(t\mid F_1(t)),\ldots,F_s(t\mid F_1(t)),\ldots)$ is a sequence of explicitly defined marginal functionals $F_s(t\mid F_1(t))$, $s\geq 2$, with respect to the one-particle marginal density operator

$$F_1(t,1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{2,\ldots,1+n}\ \mathfrak{A}_{1+n}(-t)g_{n+1}(1,\ldots,n+1)\prod_{i=1}^{n+1}F_1^{0,\epsilon}(i). \tag{21}$$

The generating operator $\mathfrak{A}_{1+n}(-t)\equiv\mathfrak{A}_{1+n}(-t,1,\ldots,n+1)$ of series expansion (21) is the $(1+n)th$-order cumulant of groups of operators $\mathcal{G}_n(-t)$, $n\geq 1$, adjoint to groups (2) in the sense of functional (19).

The marginal functionals of the state $F_s(t\mid F_1(t))$, $s\geq 2$, are represented by the following series expansions:

$$\begin{aligned}&F_s\big(t,Y\mid F_1(t)\big)\doteq\\ &\doteq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\,\mathfrak{G}_{1+n}\big(t,\{Y\},s+1,\ldots,s+n\big)\prod_{i=1}^{s+n}F_1(t,i),\end{aligned} \tag{22}$$

where the $(1+n)th$-order generating operator $\mathfrak{G}_{1+n}(t)$, $n\geq 0$, is determined by the expansion

$$\begin{aligned}&\mathfrak{G}_{1+n}(t,\{Y\},X\setminus Y)\doteq\\ &\doteq n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{n_1=1}^{n}\ldots\sum_{n_k=1}^{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}\frac{1}{(n-n_1-\ldots-n_k)!}\\ &\times\breve{\mathfrak{A}}_{1+n-n_1-\ldots-n_k}(t,\{Y\},s+1,\ldots,s+n-n_1-\ldots-n_k)\\ &\times\prod_{j=1}^{k}\ \sum_{\substack{\mathrm{D}_j:\,Z_j=\bigcup_{l_j}X_{l_j},\\ |\mathrm{D}_j|\leq s+n-n_1-\cdots-n_j}}\frac{1}{|\mathrm{D}_j|!}\\ &\times\sum_{i_1\neq\ldots\neq i_{|\mathrm{D}_j|}=1}^{s+n-n_1-\ldots-n_j}\ \prod_{X_{l_j}\subset\mathrm{D}_j}\frac{1}{|X_{l_j}|!}\,\breve{\mathfrak{A}}_{1+|X_{l_j}|}(t,i_{l_j},X_{l_j}).\end{aligned} \tag{23}$$

In formula (23) we denote by $\sum_{\mathrm{D}_j : Z_j = \bigcup_{l_j} X_{l_j}}$ the sum over all possible dissections of the linearly ordered set $Z_j \equiv (s+n-n_1-\ldots-n_j+1, \ldots, s+n-n_1-\ldots-n_{j-1})$ on no more than $s+n-n_1-\ldots-n_j$ linearly ordered subsets and we introduced the $(1+n)th$-order scattering cumulants

$$\begin{aligned}
&\breve{\mathfrak{A}}_{1+n}(t, \{Y\}, X \setminus Y) \doteq \\
&\doteq \mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{Y\}, X \setminus Y) g_{1+n}(\{Y\}, X \setminus Y) \prod_{i=1}^{s+n} \mathfrak{A}_1(t, i),
\end{aligned}$$

where it is used notations accepted above. We give examples of the scattering cumulants

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{G}_1(t, \{Y\}) = \breve{\mathfrak{A}}_1(t, \{Y\}) \doteq \mathfrak{A}_1(-t, \{Y\}) g_1(\{Y\}) \prod_{i=1}^{s} \mathfrak{A}_1(t, i), \\
&\mathfrak{G}_2(t, \{Y\}, s+1) = \mathfrak{A}_2(-t, \{Y\}, s+1) g_2(\{Y\}, s+1) \prod_{i=1}^{s+1} \mathfrak{A}_1(t, i) - \\
&\quad -\mathfrak{A}_1(-t, \{Y\}) g_1(\{Y\}) \prod_{i=1}^{s} \mathfrak{A}_1(t, i) \times \\
&\quad \times \sum_{i=1}^{s} \mathfrak{A}_2(-t, i, s+1) g_2(i, s+1) \mathfrak{A}_1(t, i) \mathfrak{A}_1(t, s+1).
\end{aligned}$$

If $\|F_1(t)\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})} < e^{-(3s+2)}$, then for arbitrary $t \in \mathbb{R}$ series expansion (20) converges in the norm of the space $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)$ [22].

We emphasize that marginal functionals of the state (22) characterize the correlations generated by dynamics of quantum many-particle systems in the presence of initial correlations.

3.2 On an equivalence of mean value functional representations

We establish the validity of equality (20) for mean value functional (19).

In a particular case of initial data specified by the additive-type marginal observables, i.e. $B^{(1)}(0) = (0, B_1^{0,\epsilon}(1), 0, \ldots)$, equality (20) takes the form

$$\big(B^{(1)}(t), F^c\big) = \mathrm{Tr}_1\, B_1^{0,\epsilon}(1) F_1(t, 1), \tag{24}$$

where the one-particle marginal density operator $F_1(t)$ is determined by series expansion (21). The validity of this equality is a result of the direct transformation of the generating operators of expansions (10) to adjoint operators in the sense of the functional (19).

In case of initial data specified by the s-ary marginal observables i.e. $B^{(s)}(0) = (0,\ldots,0,B_s^{0,\epsilon}(1,\ldots,s),0,\ldots)$, $s \geq 2$, equality (20) takes the following form:

$$\big(B^{(s)}(t),F^c\big) = \frac{1}{s!}\mathrm{Tr}_{1,\ldots,s}\, B_s^{0,\epsilon}(1,\ldots,s)F_s\big(t,1,\ldots,s \mid F_1(t)\big), \qquad (25)$$

where the marginal functional of the state $F_s(t \mid F_1(t))$ is represented by series expansion (22).

The proof of equality (25) is based on the application of cluster expansions to generating operators (4) of expansions (5) which is dual to the kinetic cluster expansions introduced in [20]. Then the adjoint series expansion can be expressed in terms of one-particle marginal density operator (21) in the form of the functional from the right-hand side of equality (25).

In case of the general type of marginal observables the validity of equality (20) is proven in much the same way as the validity of equalities (24) and (25).

3.3 The generalized quantum kinetic equation with correlations

As a result of the differentiation over the time variable of operator represented by series (21) in the sense of the norm convergence of the space $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)$, then the application of the kinetic cluster expansions [20] to the generating operators of obtained series expansion, for the one-particle marginal density operator we derive the identity [27]

$$\frac{\partial}{\partial t}F_1(t,1) = -\mathcal{N}(1)F_1(t,1) + \epsilon\,\mathrm{Tr}_2(-\mathcal{N}_{\mathrm{int}}(1,2))F_2(t,\{1,2\} \mid F_1(t)), \quad (26)$$

where the collision integral is determined by the marginal functional of the state (22) in case of $s = 2$. This identity we treat as the non-Markovian quantum kinetic equation. We refer to this evolution equation as the generalized quantum kinetic equation with correlations.

We emphasize that the coefficients in an expansion of the collision integral of kinetic equation (26) are determined by the operators specified initial correlations.

We remark, that for initial data (12) specified by a one-particle marginal density operator, the evolution of states described within the framework of a one-particle marginal density operator governed by the generalized quantum kinetic equation with correlations (26) is dual to the dual quantum BBGKY hierarchy for additive-type marginal observables with respect to bilinear form (19), and it is completely equivalent to the description of states in terms of marginal density operators governed by the quantum BBGKY hierarchy.

Thus, the evolution of quantum many-particle systems described in terms of marginal observables can be also described within the framework of a one-particle marginal density operator governed by the generalized quantum kinetic equation with correlations in the sense of functional (19).

4 The mean field asymptotic behavior of the generalized quantum kinetic equation

We establish a mean field asymptotics of a solution of the non-Markovian quantum kinetic equation with correlations constructed above. This asymptotics is governed by the quantum Vlasov-type kinetic equation with correlations derived above from the dual quantum Vlasov hierarchy for the limit marginal observables.

4.1 The mean field limit theorem

For solution (21) of the generalized quantum kinetic equation with correlations (26) the following mean field limit theorem is true [23].

Theorem 2 *If for the initial one-particle marginal density operator* $F_1^{0,\epsilon} \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H})$ *exists the limit* $\lim_{\epsilon\rightarrow 0} \|\epsilon\, F_1^{0,\epsilon} - f_1^0\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})} = 0$, *then for finite time interval* $t \in (-t_0, t_0)$, *where* $t_0 \equiv (2\,\|\Phi\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H}_2)}\|f_1^0\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})})^{-1}$, *there exists the mean field limit of solution (21) of the Cauchy problem of the generalized quantum kinetic equation with correlations (26)*

$$\lim_{\epsilon\rightarrow 0} \big\|\epsilon\, F_1(t) - f_1(t)\big\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})} = 0, \tag{27}$$

where the operator $f_1(t)$ *is represented by series (15) and it is a solution of the Cauchy problem of the quantum Vlasov-type kinetic equation with correlations* (16),(17).

The proof of this theorem is based on formulas of asymptotically perturbed cumulants of groups of operators $\mathcal{G}_n(-t)$, $n \geq 1$, adjoint to groups (2) in the sense of functional (19). Indeed, in a mean field limit for generating evolution operators (23) of series expansion (22) the following equalities are valid:

$$\lim_{\epsilon\rightarrow 0}\big\|\frac{1}{\epsilon^n}\mathfrak{G}_{1+n}(t,\{Y\},X\setminus Y)f_{s+n}\big\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{s+n})}=0, \quad n\geq 1, \tag{28}$$

and in case of the first-order generating evolution operator we have

$$\lim_{\epsilon\rightarrow 0}\big\|\big(\mathfrak{G}_1(t,\{Y\}) - \\ -\prod_{j_1=1}^{s}\mathcal{G}_1(-t,j_1)g_1(\{Y\})\prod_{j_2=1}^{s}\mathcal{G}_1(t,j_2)\big)f_s\big\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)}=0, \tag{29}$$

respectively.

In view that under the condition $t<t_0\equiv(2\,\|\Phi\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H}_2)}\|\epsilon\,F_1^{0,\epsilon}\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})})^{-1}$, for a bounded interaction potential the series for the operator $\epsilon\,F_1(t)$ is norm convergent, then for $t<t_0$ the remainder of solution series (21) can be made arbitrary small for sufficient large $n=n_0$ independently of ϵ. Then, using stated above asymptotic formulas, for each integer n every term of this series converges term by term to the limit operator $f_1(t)$ which is represented by series (15).

As stated above the mean field scaling limit (15) of solution (21) of the generalized quantum kinetic equation in the presence of initial correlations is governed by the quantum Vlasov-type kinetic equation with correlations (16).

Thus, we derived the quantum Vlasov-type kinetic equation with correlations (16) from the generalized quantum kinetic equation (26) in the mean field scaling limit. It is the same as the kinetic equation derived from the dual quantum Vlasov hierarchy for mean field limit marginal observables.

4.2 A mean field limit of marginal functionals of state

As we noted above the all possible correlations of a system of quantum particles are described by marginal functionals of the state (22).

Since solution (21) of initial-value problem of the generalized quantum kinetic equation with correlations (26) converges to solution (15) of initial-value problem of the quantum Vlasov-type kinetic equation with correlations (16) as (27), and equalities (28) and (29) hold, for a mean field asymptotic behavior of marginal functionals of the state (22) is true

$$\lim_{\epsilon\rightarrow 0}\big\|\epsilon^{s}F_{s}(t,1,\ldots,s\mid F_{1}(t))- \\ -\prod_{j_1=1}^{s}\mathcal{G}_{1}(-t,j_1)g_{1}(\{1,\ldots,s\})\prod_{j_2=1}^{s}\mathcal{G}_{1}(t,j_2)\prod_{l=1}^{s}f_{1}(t,l)\big\|_{\mathfrak{L}^{1}(\mathcal{H}_{s})}=0, \\ s\geq 2.$$

This equalities mean the propagation of initial correlations in time in the mean field scaling limit.

5 Conclusion and outlook

In the paper the concept of quantum kinetic equations in case of the kinetic evolution, involving correlations of particle states at initial time, for instance, correlations characterizing the condensed states, was considered. Two approaches were developed with a view to this purpose. One approach based on the description of the evolution of quantum many-particle systems within the framework of marginal observables. Another method consists in the possibility in case of initial states specified by a one-particle marginal density operator to describe the evolution of states within the framework of a one-particle marginal density operator governed by the generalized quantum kinetic equation with correlations.

In case of pure states the quantum Vlasov-type kinetic equation with correlations (16) can be reduced to the Gross–Pitaevskii-type kinetic equation. Indeed, in this case the one-particle density operator $f_1(t)=|\psi_t\rangle\langle\psi_t|$ is a one-dimensional projector onto a unit vector $|\psi_t\rangle\in\mathcal{H}$ and its kernel has the following form: $f_1(t,q,q')=\psi(t,q)\psi^{*}(t,q')$. Then, if we consider particles, interacting by the potential which kernel $\Phi(q)=\delta(q)$ is the Dirac measure, from kinetic equation (16) we derive the Gross–Pitaevskii-type kinetic equation

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,q)=-\frac{1}{2}\Delta_{q}\psi(t,q)+ \\ +\int dq'dq''\mathfrak{g}(t,q,q;q',q'')\psi(t,q'')\psi^{*}(t,q)\psi(t,q),$$

where the coupling ratio $\mathfrak{g}(t,q,q;q',q'')$ of the collision integral is the kernel of the scattering length operator $\prod_{i_1=1}^{2}\mathcal{G}_1(-t,i_1)g_1(\{1,2\})\prod_{i_2=1}^{2}\mathcal{G}_1(t,i_2)$. If we consider a system of quantum particles without initial correlations, then derived kinetic equation is the cubic nonlinear Schrödinger equation.

Observing that on the macroscopic scale of the variation of variables, groups of operators (2) of finitely many particles depend on microscopic time variable $\varepsilon^{-1}t$, where $\varepsilon \geq 0$ is a scale parameter, the dimensionless marginal functionals of the state are represented in the form $F_s(\varepsilon^{-1}t \mid F_1(t))$. As a result of the formal limit processing $\varepsilon \rightarrow 0$ in the collision integral, we establish the Markovian kinetic evolution with the corresponding coefficient $\mathfrak{g}(\varepsilon^{-1}t)$.

This paper deals with a quantum system of a non-fixed (i.e. arbitrary but finite) number of identical (spinless) particles obeying Maxwell–Boltzmann statistics. The obtained results can be extended to quantum systems of bosons or fermions [29].

We emphasize, that one of the advantages of the approach to the derivation of the quantum Vlasov-type kinetic equation from underlying dynamics governed by the generalized quantum kinetic equation with correlations enables to construct the higher-order corrections to the mean field evolution of quantum interacting particles.

References

[1] F. Golse, *On the dynamics of large particle systems in the mean field limit.* Preprint arXiv:1301.5494 [math.AP], (2013).

[2] L. Saint-Raymond, *Kinetic models for superfluids: a review of mathematical results.* C. R. Physique, **5**, (2004), 65—75.

[3] F. Pezzotti, M. Pulvirenti, *Mean-field limit and semiclassical expansion of quantum particle system.* Ann. Henri Poincaré, **10**, (2009), 145–187.

[4] J. Fröhlich, S. Graffi, S. Schwarz, *Mean-field and classical limit of many-body Schrödinger dynamics for bosons.* Commun. Math. Phys., **271**, (2007), 681–697.

[5] W. Bao, Y. Cai, *Mathematical theory and numerical methods for Bose–Einstein condensation.* Kinet. Relat. Models, **6**, (1), (2013), 1–135.

[6] L. Erdös, B. Schlein, *Quantum dynamics with mean field interactions: a new approach.* J. Stat. Phys., **134**, (5), (2009), 859–870.

[7] L. Erdös, B. Schlein, H.-T. Yau, *Derivation of the cubic nonlinear Schrödinger equation from quantum dynamics of many-body systems.* Invent. Math., **167**, (3), (2007), 515–614.

[8] J. Fröhlich, A. Knowles, *A microscopic derivation of the time-dependent Hartree–Fock equation with Coulomb two-body interaction.* J. Stat. Phys., **145**, (1), (2011), 23–50.

[9] P. Pickl, *A simple derivation of mean field limits for quantum systems.* Lett. Math. Phys., **97**, (2), (2011), 151—164.

[10] K. Kirkpatrick, B. Schlein, G. Staffilani, *Derivation of the two dimensional nonlinear Schrödinger equation from many body quantum dynamics.* Amer. J. Math., **133**, (2011), 91–130.

[11] L. Erdös, B. Schlein, H.-T. Yau, *Derivation of the Gross–Pitaevskii equation for the dynamics of Bose–Einstein condensate.* Ann. of Math., **172**, (2010), 291–370.

[12] E. Lieb, R. Seiringer, J.P. Solovej, J. Yngvason, *The mathematics of the Bose gas and its condensation.* Oberwolfach Seminars, **34**, Basel: Birkhäuser Verlag, 2005.

[13] A. Michelangeli, *Role of scaling limits in the rigorous analysis of Bose–Einstein condensation.* J. Math. Phys., **48**, (2007), 102102.

[14] T. Chen, N. Pavlovic, *The quintic NLS as the mean field limit of a Boson gas with three-body interactions.* J. Funct. Anal., **260**, (4), (2011), 959–997.

[15] X. Chen, *Second order corrections to mean field evolution for weakly interacting bosons in the case of three-body interactions.* Arch. Rational Mech. Anal. **203**, (2012), 455—497.

[16] H. Spohn, *Large Scale Dynamics of Interacting Particles.* Springer-Verlag, 1991.

[17] C. Cercignani, V.I. Gerasimenko, D.Ya. Petrina, *Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.

[18] D.Ya. Petrina, *On solutions of the Bogolyubov kinetic equations. Quantum statistics.* Theor. Math. Phys., **13**, (3), (1972), 391–405.

[19] D.Ya. Petrina, *Mathematical Foundations of Quantum Statistical Mechanics. Continuous Systems.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995; Second ed., M: LIBROKOM Publ., 2014.

[20] V.I. Gerasimenko, Zh.A. Tsvir, *A description of the evolution of quantum states by means of the kinetic equation.* J. Phys. A: Math. Theor., **43**, (48), (2010), 485203.

[21] V.I. Gerasimenko, V.O. Shtyk, *Initial-value problem of the Bogolyubov hierarchy for quantum systems of particles.* Ukrain. Math. J., **58**, (9), (2006), 1175–1191.

[22] V.I. Gerasimenko, *Hierarchies of quantum evolution equations and dynamics of many-particle correlations.* (In: Statistical Mechanics and Random Walks: Principles, Processes and Applications. N.Y.: Nova Science Publ., Inc., 2012), 233–288.

[23] V.I. Gerasimenko, Zh.A. Tsvir, *Mean field asymptotics of generalized quantum kinetic equation.* Reports on Math. Phys., **70**, (2), (2012), 135–147.

[24] G. Borgioli, V.I. Gerasimenko, *Initial-value problem of the quantum dual BBGKY hierarchy.* Nuovo Cimento, **33 C**, (1), (2010), 71–78.

[25] V.I. Gerasimenko, *Heisenberg picture of quantum kinetic evolution in mean-field limit.* Kinet. Relat. Models, **4**, (1), (2011), 385–399.

[26] M.M. Bogolyubov, *Lectures on Quantum Statistics. Problems of Statistical Mechanics of Quantum Systems.* K.: Rad. Shkola, 1949 (in Ukrainian).

[27] V.I. Gerasimenko, Zh.A. Tsvir, *On quantum kinetic equations of many-particle systems in condensed states.* Physica A: Stat. Mech. Appl., **391**, (24), (2012), 6362–6366.

[28] V.I. Gerasimenko, V.O. Shtyk, *Evolution of correlations of quantum many-particle systems.* J. Stat. Mech. Theory Exp., **3**, (2008), P03007, 24p.

[29] V.I. Gerasimenko, D.O. Polishchuk, *Dynamics of correlations of Bose and Fermi particles.* Math. Meth. Appl. Sci., **34**, (1), (2011), 76–93.

[30] V.I. Gerasimenko, D.O. Polishchuk, *A nonperturbative solution of the nonlinear BBGKY hierarchy for marginal correlation operators.* Math. Meth. Appl. Sci., **36**, (17), (2013), 2311–2328.

Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 56–81

УДК 531.19+533.7

V.N. Gorev, A.I. Sokolovsky

(Dnipropetros'k National University, Dnipropetrovs'k)

Investigation of nonequilibrium processes in vicinity of hydrodynamic states

alexsokolovsky@mail.ru

The Chapman–Enskog method is generalized for the investigation of processes in the vicinity of hydrodynamic states of a gas. The generalization is made on the basis of the Bogolyubov idea of the functional hypothesis. A theory that describes a nonequilibrium state of a gas by the usual hydrodynamic variables and arbitrary additional local variables is constructed. The gradients of all these parameters and the deviations of the latter variables from their hydrodynamic values are assumed to be small and are estimated by two independent small parameters. The proposed theory is nonlinear in the additional variables too. It leads to linear integral equations with an operator, given by the linearized collision integral. Some of them are eigenvalue problems for this operator and describe kinetic modes of the system.

The proposed theory is applied to the solution of a modified Grad problem in which nonequilibrium states of a gas are described by the usual hydrodynamic variables and small deviations of the energy and momentum fluxes from their hydrodynamic values. In the simplest approximation this leads to a theory of the Maxwell relaxation. It is shown that the distribution function of the 13-moment Grad approximation corresponds to the approximation of zero order in gradients and to small fluxes. Moreover, in that theory the investigation of the relaxation phenomena in the system is reduced to a very approximate solution of the abovementioned eigenvalue problems. The Bogolyubov idea of the functional hypothesis gives an adequate solution of the problem.

© **Institute of Mathematics, 2014**

Метод Чепмена–Енскога узагальнюється для дослідження процесів поблизу від гідродинамічних станів газу. Узагальнення робиться на основі ідеї функціональної гіпотези Боголюбова. Побудовано теорію, яка описує нерівноважні стани газу звичайними гідродинамічними змінними і довільними додатковими локальними змінними. Градієнти всіх цих параметрів і відхилення останніх змінних від їх гідродинамічних значень вважаються малими. Розроблена теорія є нелінійна також і по додаткових змінних. Вона веде до лінійних інтегральних рівнянь з оператором, що дається лінеаризованим інтегралом зіткнень. Деякі з них є спектральною задачею і описують кінетичні моди системи.

Розвинута теорія застосована до розв'язування модифікованої проблеми Греда, в якій нерівноважний стан газу описується звичайними гідродинамічними змінними і малими відхиленнями потоків енергії та імпульсу від їх гідродинамічних значень. У найпростішому наближенні це веде до теорії максвеллівської релаксації. Показується, що функція розподілу 13-моментного наближення Греда відповідає нульовому наближенню за градієнтами і малим потокам. Більше того, в цій теорії дослідження релаксаційних явищ в системі зводиться до дуже наближеного розв'язку вказаної спектральної задачі. Ідея функціональної гіпотези Боголюбова дає адекватний розв'язок проблеми.

1 Introduction

The problem of the solution of the Boltzmann equation in order to build hydrodynamic equations was posed by Boltzmann as soon as he derived his equation

$$\frac{\partial \mathrm{f}_p(x,t)}{\partial t} = -\upsilon_{lp}\frac{\partial \mathrm{f}_p(x,t)}{\partial x_l} + I_p(\mathrm{f}(x,t)), \tag{1}$$

which describes nonequilibrium states of a rarefied gas in terms of the distribution function (DF) $\mathrm{f}_p(x,t)$ ($I_p(\mathrm{f})$ is the collision integral, $\upsilon_{lp} \equiv p_l/m$; we restrict the discussion to a one-component system).

In any approach the starting point for the construction of hydrodynamic equations on the basis of the kinetic equation (1) is the energy, momentum, and particle number conservation laws in differential form, which follow from the relations

$$\int d^3p\,\zeta_{\mu p} I_p(\mathrm{f}) = 0, \qquad \left(\zeta_{\mu p}: \quad \varepsilon_p,\, p_l,\, m; \quad \varepsilon_p \equiv p^2/2m\right). \tag{2}$$

The above-mentioned conversation laws have the form

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\partial q_n}{\partial x_n}, \qquad \frac{\partial \pi_l}{\partial t} = -\frac{\partial t_{ln}}{\partial x_n}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \pi_n}{\partial x_n}, \tag{3}$$

where the energy density ε, the momentum density π_l, the mass density ρ (variables $\zeta_\mu(x,t)$), and the densities of the corresponding fluxes q_n, t_{ln}, π_n are given by the formulas

$$\varepsilon = \int d^3p\, \varepsilon_p \mathrm{f}_p, \quad \pi_n = \int d^3p\, p_n \mathrm{f}_p, \quad \rho = \int d^3p\, m \mathrm{f}_p;$$

$$q_n = \int d^3p\, \varepsilon_p \upsilon_{np} \mathrm{f}_p, \quad t_{ln} = \int d^3p\, p_l \upsilon_{np} \mathrm{f}_p. \tag{4}$$

The mass velocity υ_n and temperature T are defined by the relations

$$\pi_n = \rho \upsilon_n, \quad \varepsilon \equiv \varepsilon^o + \rho \upsilon^2/2, \quad \varepsilon^o = 3nT/2 \qquad (\rho \equiv mn)\,. \tag{5}$$

An important role in hydrodynamics is played by the Galilean transformation from the laboratory reference frame (LRF) to the accompanying reference frame (ARF)

$$q_n = q_n^o + t_{nl}^o \upsilon_l + (\varepsilon^o + \rho \upsilon^2/2)\upsilon_n, \quad t_{ln} = t_{ln}^o + \rho \upsilon_l \upsilon_n \tag{6}$$

(A^o is a quantity A in the ARF). Finally, the time equations for usual hydrodynamic variables $T(x,t), \upsilon_n(x,t), n(x,t)$ (denoted below by $\xi_\mu(x,t)$) become

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\upsilon_n \frac{\partial T}{\partial x_n} - \frac{2}{3n}\left(\frac{\partial q_l^o}{\partial x_l} + t_{ln}^o \frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_n}\right), \quad \frac{\partial \upsilon_l}{\partial t} = -\upsilon_n \frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_n} - \frac{1}{mn}\frac{\partial t_{ln}^o}{\partial x_n},$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial n \upsilon_l}{\partial x_l}. \tag{7}$$

The next step is to express the fluxes q_l^o, t_{nl}^o in terms of the hydrodynamic variables $\xi_\mu(x,t)$ by functionals $q_l^o(x,\xi(t))$, $t_{nl}^o(x,\xi(t))$ that leads to closed equations of the form

$$\frac{\partial \xi_\mu(x,t)}{\partial t} = M_\mu(x,\xi(t)) \tag{8}$$

($M_\mu(x,\xi)$ are some functionals of $\xi_\mu(x)$). The hydrodynamic variables $\xi_\mu(x,t)$ are expressed only in terms of the simplest moments of the distribution function $\mathrm{f}_p(x,t)$. Therefore the number of parameters that describe the system state is reduced as we go from kinetics to hydrodynamics. Therefore the parameters $\xi_\mu(x,t)$ (or equivalent variables $\zeta_\mu(x,t)$) may be called reduced description parameters (RDP) of the system.

A considerable contribution into the solution of this problem was made by Hilbert [1], who formulated the concept of the normal solution $\mathrm{f}_p(x,\xi(t))$ of the kinetic equation (1). This solution is a functional of the hydrodynamic variables $\xi_\mu(x,t)$ as functions of the coordinates, and it depends on the time only through their mediation. Hilbert developed a perturbation theory in a small parameter g for calculation DF $\mathrm{f}_p(x,\xi)$ on the basis of the estimates $I_p(\mathrm{f}) \sim g^{-1}$, $\mathrm{f}_p(x,t) \sim g^0$. The parameter g (the Knudsen number) is given by the formula $g = l/L$ where l is the gas mean free path, and L is a characteristic dimension of the system inhomogeneities. In the main order of the perturbation theory the DF $\mathrm{f}_p(x,\xi)$ coincides with the Maxwell distribution w_p

$$w_p = w^o_{p-mv}, \qquad w^o_p \equiv \frac{n}{(2\pi mT)^{3/2}} e^{-\frac{\varepsilon_p}{T}} \qquad (I_p(w) = 0). \tag{9}$$

In practical terms the Hilbert perturbation theory was improved by Enskog [2], who managed to derive hydrodynamic equations with account for dissipative processes. His method is called the Chapman–Enskog method [3], because the same results were obtained by Chapman on the basis of Maxwell's ideas. The Chapman–Enskog method reduces to the solution of linear integral equations of the form

$$\hat{K} g_p = h_p, \tag{10}$$

where g_p is the sought-for function, and h_p is a known function (the Fredholm integral equation of the first kind). The kernel $K_{pp'}$ of the operator $\hat{K}$ is defined by the linearized collision integral

$$\hat{K} g_p = \int d^3p' K_{pp'} g_{p'},$$

$$w_p K_{pp'} = -M_{pp'} w_{p'}, \quad M_{pp'} \equiv \left.\frac{\delta I_p(\mathrm{f})}{\delta \mathrm{f}_{p'}}\right|_{\mathrm{f}\to w}. \tag{11}$$

The integral equations are solved with additional conditions which follow from the definition of the hydrodynamic variables (4) and (5). In fact, in the Chapman–Enskog method the perturbation theory for the DF $\mathrm{f}_p(x,\xi)$ is built in small gradients of the hydrodynamic variables according to the estimate

$$\frac{\partial^s \xi_\mu(x)}{\partial x_{l_1}...\partial x_{l_s}} \sim g^s. \tag{12}$$

Burnett proposed the method of Sonine orthogonal polynomial $S_n^\alpha(x)$ expansion [4, 5] for the approximate solution of integral equations of the form (10) related to the Boltzmann equation. The use of these polynomials is due to the fact that the DF $\mathrm{f}_p(x,\xi)$ proves to be proportional to the Maxwell distribution, and therefore the orthogonality relation

$$\int d^3p w_p^o \varepsilon_p^{\alpha-1/2} S_s^\alpha(\beta\varepsilon_p) S_{s'}^\alpha(\beta\varepsilon_p) = nT^{\alpha-1/2}\frac{2\Gamma(s+\alpha+1)}{s!\pi^{1/2}}\delta_{ss'} \tag{13}$$

(α is some parameter; $\beta \equiv T^{-1}$) is obviously helpful. In fact, the polynomial series is truncated artificially, and one-, two-, etc. polynomial approximations are built. Kohler proposed a variational principle [6] for the solution of integral equations of the form (4) which is based on the Hilbert result that the bilinear form

$$\{g_p, h_p\} = \int d^3p\, d^3p' w_p K_{pp'} g_p h_{p'} \tag{14}$$

(g_p, h_p are arbitrary functions) has the properties

$$\{g_p, h_p\} = \{h_p, g_p\}, \quad \{g_p, g_p\} \geq 0;$$
$$\{g_p, g_p\} = 0 \quad \Rightarrow \quad g_p = \zeta_{\mu p}, \tag{15}$$

($\zeta_{\mu p}$ are defined in (2)). This variational principle justifies the convergence of the Burnett procedure of approximate solution of the integral equation (10) with increasing number of polynomials.

It is also worth noting at this point that on the basis of (15) it is easy to show, following Hilbert, the symmetry of the operator $\hat{K}$ (11), i.e. the relation $(g_p, \hat{K}h_p) = (\hat{K}g_p, h_p)$. Here, the scalar product is defined as

$$(g_p, h_p) = \langle g_p h_p\rangle, \quad \langle g_p\rangle \equiv \int d^3p\, w_p g_p. \tag{16}$$

The positiveness of the eigenvalues of the operator $\hat{K}$ also follows from (15). Its eigenfunctions can be assumed to be orthogonal in the introduced scalar product.

In this paper we construct theory which describes nonequilibrium states close to hydrodynamic ones. These states are described by usual hydrodynamic variables $\xi_\mu(x,t)$ (or $\zeta_\mu(x,t)$) and some additional variables $\varphi_i(x,t)$ that vanish at usual hydrodynamic evolution. Therefore, variables $\varphi_i(x,t)$ describe relaxation phenomena and one receives an opportunity to study forming the hydrodynamic evolution. The proposed theory is given by our generalization of the Chapman–Enskog method based on the Bogolyubov idea of the functional hypothesis [7] (see discussion this idea, for example, in [8]). Relaxation processes are considered at their end that allows to build a perturbation theory in magnitude of variables $\varphi_i(x,t)$ which is additional one to usual perturbation theory in gradients.

The idea of investigation of relaxation processes at their end was used in a series of papers: in theory of relaxation of polaron gas velocity and temperature in polar crystals [9], in hydrodynamics of phonon subsystem of dielectrics taking into account drift velocity relaxation [10], in hydrodynamics of two-component plasma taking into account temperature and velocity relaxation of the components [11].

Plan of the paper is as follows. In the Section 2 the Grad approach to solution of kinetic equations is discussed in connection with the Bogolyubov reduced description method. Particular attention is paid to the analysis of his 13-moment approximation (we call this theory the Grad problem). In the Section 3 the general theory is constructed which describes nonequilibrium processes in the vicinity of hydrodynamic states. Section 4 gives application of the developed theory to a modified Grad problem.

2 The Grad problem and the Bogolyubov reduced description method

Grad proposed a method [12] in which solutions of the Boltzmann equation are sought from the very outset as a truncated series in the orthogonal tensor Hermite polynomials $H_{l_1\ldots l_s}(\vec{x})$. The use of these polynomials is justified by the same reason as the use of the Sonine polynomials, namely, by the form of their normalization condition

$$\int d^3p\, w_p^o H_{l_1\ldots l_s}((\beta/m)^{1/2}\vec{p}) H_{l'_1\ldots l'_{s'}}((\beta/m)^{1/2}\vec{p}) = \\ = n\delta_{ss'}\sum_\sigma \delta_{l'_1 l_{\sigma(1)}}\ldots\delta_{l'_s l_{\sigma(s)}} \qquad (17)$$

(σ is an arbitrary permutation of the numbers $1, ..., s$). In the Chapman–Enskog method, a hydrodynamic gas state is described by moments of the DF $\mathrm{f}_p(x,t)$ with the functions $\zeta_{\mu p}$ defined in (2). In the 13-moment Grad approximation the system is described by the moments of the DF with the functions

$$\zeta_{\mu p}, \quad \varepsilon_p v_{lp}, \quad h_{ln}(p)/m \qquad \big(h_{ln}(p) \equiv p_n p_l - \delta_{nl} p^2/3\big)$$

which are taken in the ARF. According to (4) this state is defined by the variables $\zeta_\mu(x,t)$, $q^o_l(x,t)$,

$$\pi^o_{ln}(x,t) \equiv t^o_{ln}(x,t) - \delta_{ln} t^o_{mm}(x,t)/3$$

where $q^o_l(x,t)$, $t^o_{ln}(x,t)$ are the densities of the gas energy and momentum fluxes in the ARF ($\xi_\mu(x,t)$ can be used instead of $\zeta_\mu(x,t)$). The Grad equations for fluxes are obtained from the kinetic equation by direct substitution of the DF expansion in the Hermite polynomials, which leads to their quadratic nonlinearity because the collision integral $I_p(\mathrm{f})$ is a quadratic function of the DF $\mathrm{f}_{p'}$. In the G-13 approximation, equations (7) are final equations, and they are supplemented by the time equations for the fluxes $q^o_l(x,t)$, $\pi^o_{ln}(x,t)$.

The equations of the G-13 approximation were considered by Grad as a means to investigate nonequilibrium states that precede standard hydrodynamic ones. On this basis he discussed [13] the hydrodynamic evolution, studying normal according to Hilbert solutions, with the fluxes $q^o_l(x,t)$, $\pi^o_{ln}(x,t)$ that are functionals of the usual hydrodynamic variables $q^o_l(x,\zeta(t))$, $\pi^o_{ln}(x,\zeta(t))$.

The situation may be clarified further if we will base the consideration on the Bogolyubov *idea of the functional hypothesis* and his *idea of hierarchy of nonequilibrium states of a system during its evolution*. These ideas are basis of *the Bogolyubov reduced description method* (RDM) of nonequilibrium processes [7] and can be applied to investigation of evolution of a system described by the Liouville equation or kinetic equations (see review in [8]). On this basis the Chapman–Enskog method is generalized in the present paper.

Usual hydrodynamic states are realized in the system at times $t \gg \tau_0$, where τ_0 is the mean free time. Nonequilibrium Grad states are realized at $t \gg \tau_1$, where τ_1 is a characteristic time such that $\tau_1 \ll \tau_0$. According to the idea of *the functional hypothesis* we have

$$\mathrm{f}_p(x,t) \xrightarrow[t\gg\tau_1]{} \mathrm{f}_p(x,\zeta(t),q^o(t),\pi^o(t)), \tag{18}$$

i.e. at times $t \gg \tau_1$ the DF $\mathrm{f}_p(x,t)$ becomes a functional of the RDP $\zeta_\mu(x,t)$, $q_n^o(x,t)$, $\pi_{ln}^o(x,t)$ as functions of the coordinates and depends on the time only through their mediation. This *functional is universal* in the sense that only the RDP $\zeta_\mu(x,t)$, $q_l^o(x,t)$, $\pi_{ln}^o(x,t)$ on the right-hand side of (18) depend on the initial system state described by the DF $\mathrm{f}_p(x,t=0)$. To the functional hypothesis (18) *definitions of the RDP*

$$\begin{aligned}
&\int d^3p\, \varepsilon_p \upsilon_{lp}\, \mathrm{f}_{p+m\upsilon(x)}(x,\zeta,q^o,\pi^o) = q_l^o(x),\\
&\int d^3p\, h_{nl}(p)\mathrm{f}_{p+m\upsilon(x)}(x,\zeta,q^o,\pi^o)/m = \pi_{ln}^o(x),\\
&\int d^3p\, \zeta_{\mu p}\mathrm{f}_p(x,\zeta,q^o,\pi^o) = \zeta_\mu(x)
\end{aligned} \tag{19}$$

must be added.

The idea of the functional hypothesis is obviously a generalization of the Hilbert idea of normal solutions. However, in Bogolyubov's research it became a result of his investigations into non-linear dynamic systems, in which the synchronization of the solutions of their dynamic equations with the evolution of some parameters is observed. The term "the functional hypothesis" was introduced by Uhlenbeck. By now, thanks to Peletminsky's investigations, this idea has largely lost the status of a hypothesis. In some important cases it can be proven [14]-[16] (see also [8]). The right hand side of the functional hypothesis (18) contains asymptotic value of the distribution function $\mathrm{f}_p(x,t)$. Transition to asymptotics implies some coarsening procedure. This procedure corresponds to possibilities of experimental observations and make possible the reduced description of the system.

In fact in the G-13 approximation, the DF $\mathrm{f}_p(x,\zeta,q^o,\pi^o)$ is given by the formula

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}_p(x,\zeta,q^o,\pi^o) = w_p^o(n,T)\Big\{1 + \frac{1}{2mnT^2}p_n p_l \pi_{nl}^o(x) + \\
+\frac{1}{nT^2}p_l(\frac{2\varepsilon_p}{5T}-1)q_l^o(x)\Big\}_{\substack{p\to p-m\upsilon(x)\\ n\to n(x),\ T\to T(x)}},
\end{aligned} \tag{20}$$

to which there are no corrections in the framework of Grad's theory ($w_p^o(n,T) \equiv w_p^o$ in (9)). A comparison of (20) with the functional from (18) shows that (20) corresponds to an approximation of small fluxes $q_l^o(x,t)$,

$\pi^o_{ln}(x,t)$ and the zero-order approximation in gradients. Moreover, we show further on the basis of the developed in the Section 3 theory that expression (20) corresponds to one-polynomial approximation.

Below we call problem of reduced description of the nonequilibriun system by variables $\zeta_\mu(x,t)$, $q^o_l(x,t)$, $\pi^o_{ln}(x,t)$ *the Grad problem.*

3 Description of nonequilibrium processes in the vicinity of the hydrodynamic states

3.1 The basic equations of the theory

Consider a generalization of the Grad problem to the case of description of the system by arbitrary parameters that are additional to usual hydrodynamic variables. The corresponding stage of evolution precedes in time hydrodynamic stage. The use of the two reference frames (the laboratory and the accompanying ones) brings a certain complication to the theory. Therefore in this section we choose the densities of the integrals of motion $\zeta_\mu(x,t)$ as the basic hydrodynamic variables.

According to Bogolyubov, at the hydrodynamic stage of evolution the reduced description can be built on the basis of *the functional hypothesis*

$$\mathrm{f}_p(x,t)\xrightarrow[t\gg\tau_0]{}\tilde{\mathrm{f}}_p(x,\tilde{\zeta}(t));\qquad\int d^3p\,\zeta_{\mu p}\,\tilde{\mathrm{f}}_p(x,\tilde{\zeta})=\tilde{\zeta}_\mu(x). \tag{21}$$

Here, the second formula is the definition of the parameters $\tilde{\zeta}_\mu(x,t)$, for which the gas energy, momentum, and mass densities are taken (see (2) and (4)). Let at $t\gg\tau_1$ ($\tau_0\gg\tau_1$) the gas be described by the hydrodynamic parameters $\zeta_\mu(x,t)$ and the deviations $\varphi_i(x,t)$ of the parameters with the microscopic values θ_{ip} from their hydrodynamic values $\theta_i(x,t)$ (notation $\varphi_i(x,t)$ is less descriptive than $\delta\theta_i(x,t)$ but leads to compact formulas). Then *the functional hypothesis* at these times has the form

$$\mathrm{f}_p(x,t)\xrightarrow[t\gg\tau_1]{}\mathrm{f}_p(x,\zeta(t),\varphi(t));$$

$$\int d^3p\,\theta_{ip}\mathrm{f}_p(x,\zeta,\varphi)=\varphi_i(x)+\theta_i(x,\zeta),\qquad\int d^3p\,\theta_{ip}\,\tilde{\mathrm{f}}_p(x,\tilde{\zeta})\equiv\theta_i(x,\tilde{\zeta});$$

$$\int d^3p\,\zeta_{\mu p}\mathrm{f}_p(x,\zeta,\varphi)=\zeta_\mu(x), \tag{22}$$

where the last three formulas define the RDPs $\zeta_\mu(x,t)$ and $\varphi_i(x,t)$.

According to kinetic equation (1), the introduced parameters satisfy the following time equations

$$\frac{\partial\tilde{\zeta}_\mu(x,t)}{\partial t} = \tilde{L}_\mu(x,\tilde{\zeta}(t)), \quad \tilde{L}_\mu(x,\tilde{\zeta}) \equiv -\frac{\partial}{\partial x_n}\int d^3p\,\zeta_{\mu p}\upsilon_{np}\tilde{\mathrm{f}}_p(x,\tilde{\zeta}); \tag{23}$$

$$\frac{\partial\zeta_\mu(x,t)}{\partial t} = L_\mu(x,\zeta(t),\varphi(t)),$$

$$L_\mu(x,\zeta,\varphi) \equiv -\frac{\partial}{\partial x_n}\int d^3p\,\zeta_{\mu p}\upsilon_{np}\mathrm{f}_p(x,\zeta,\varphi); \tag{24}$$

$$\frac{\partial\varphi_i(x,t)}{\partial t} = L_i(x,\zeta(t),\varphi(t)),$$

$$L_i(x,\zeta,\varphi) \equiv -\sum_\mu \frac{\delta\theta_i(x,\zeta)}{\delta\zeta_\mu(x')}L_\mu(x',\zeta,\varphi) - \frac{\partial}{\partial x_n}\int d^3p\,\theta_{ip}\upsilon_{np}\mathrm{f}_p(x,\zeta,\varphi) + $$

$$+\int d^3p\,\theta_{ip}I_p(\mathrm{f}(x,\zeta,\varphi)). \tag{25}$$

The considered problem implies that the relations

$$\zeta_\mu(x,t) \xrightarrow[t\gg\tau_0]{} \tilde{\zeta}_\mu(x,t), \qquad \varphi_i(x,t) \xrightarrow[t\gg\tau_0]{} 0;$$

$$\mathrm{f}_p(x,\zeta(t),\varphi(t)) \xrightarrow[t\gg\tau_0]{} \tilde{\mathrm{f}}_p(x,\tilde{\zeta}(t)) \tag{26}$$

are true, whence we have the identities

$$\mathrm{f}_p(x,\zeta,\varphi=0) = \tilde{\mathrm{f}}_p(x,\zeta), \quad L_\mu(x,\zeta,\varphi=0) = \tilde{L}_\mu(x,\zeta),$$

$$L_i(x,\zeta,\varphi=0) = 0. \tag{27}$$

According to Bogolyubov's MRD, *the asymptotic DF are the exact solutions of the kinetic equation*

$$\frac{\partial\tilde{\mathrm{f}}_p(x,\tilde{\zeta}(t))}{\partial t} = -\upsilon_{lp}\frac{\partial\tilde{\mathrm{f}}_p(x,\tilde{\zeta}(t))}{\partial x_l} + I_p(\tilde{\mathrm{f}}_p(x,\tilde{\zeta}(t))),$$

$$\frac{\partial\mathrm{f}_p(x,\zeta(t),\varphi(t))}{\partial t} = -\upsilon_{lp}\frac{\partial\mathrm{f}_p(x,\zeta(t),\varphi(t))}{\partial x_l} + I_p(\mathrm{f}_p(x,\zeta(t),\varphi(t))). \tag{28}$$

By their meaning, they describe the system state at $t \gg \tau_0$ and $t \gg \tau_1$, respectively. However, the solution of equations (26) can be continued to

$t = 0$, that introduces the effective initial conditions to time equations (23)-(25).

Equations (28) together with relations (23)-(25) yield the following integro-differential equations for the DF $\tilde{\mathrm{f}}_p(x, \tilde{\zeta})$ and $\mathrm{f}_p(x, \zeta, \varphi)$

$$\sum_\mu \int d^3x' \frac{\delta \tilde{\mathrm{f}}_p(x,\zeta)}{\delta \zeta_\mu(x')} \tilde{L}_\mu(x', \zeta) = -\upsilon_{lp} \frac{\partial \tilde{\mathrm{f}}_p(x,\zeta)}{\partial x_l} + I_p(\tilde{\mathrm{f}}_p(x,\zeta)), \tag{29}$$

$$\sum_\mu \int d^3x' \frac{\delta \mathrm{f}_p(x,\zeta,\varphi)}{\delta \zeta_\mu(x')} L_\mu(x', \zeta, \varphi) + \sum_i \int d^3x' \frac{\delta \mathrm{f}_p(x,\zeta,\varphi)}{\delta \varphi_i(x')} L_i(x', \zeta, \varphi) =$$

$$= -\upsilon_{lp} \frac{\partial \mathrm{f}_p(x,\zeta,\varphi)}{\partial x_l} + I_p(\mathrm{f}_p(x,\zeta,\varphi)). \tag{30}$$

They should be solved in a perturbation theory in the gradients g of the RDP $\zeta_\mu(x)$, $\tilde{\zeta}_\mu(x)$, $\varphi_i(x)$ and in the parameter λ that estimates the order of the variables $\varphi_i(x)$ according to

$$\frac{\partial^s \zeta_\mu(x)}{\partial x_{l_1} ... \partial x_{l_s}} \sim g^s, \quad \frac{\partial^s \tilde{\zeta}_\mu(x)}{\partial x_{l_1} ... \partial x_{l_s}} \sim g^s, \quad \frac{\partial^s \varphi_i(x)}{\partial x_{l_1} ... \partial x_{l_s}} \sim g^s \lambda^1. \tag{31}$$

In doing so,the RDP definitions (21) and (22) should be used as additional conditions.

3.2 Construction of the perturbation theory

According to (27), we can restrict ourselves to the solution of equation (30) only. The structure of its solution in the perturbation theory is given by the formulas

$$\mathrm{f}_p = \mathrm{f}_p^{(0)} + \mathrm{f}_p^{(1)} + O(g^2), \quad \mathrm{f}_p^{(0)} = \mathrm{f}_p^{(0,0)} + \mathrm{f}_p^{(0,1)} + \mathrm{f}_p^{(0,2)} + O(g^0\lambda^3),$$

$$\mathrm{f}_p^{(1)} = \mathrm{f}_p^{(1,0)} + \mathrm{f}_p^{(1,1)} + O(g^1\lambda^2);$$

$$\mathrm{f}_p^{(0,0)} = w_p, \quad \mathrm{f}_p^{(0,1)} = w_p \sum_i a_{ip}\varphi_i, \quad \mathrm{f}_p^{(0,2)} = w_p \sum_{ii'} b_{ii'p}\varphi_i\varphi_{i'};$$

$$\mathrm{f}_p^{(1,0)} = w_p^o \{1 + \frac{\partial T}{\partial x_n} A_p p_n + \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_l} B_p h_{nl}(p)\}_{p \to p - m\upsilon},$$

$$f_p^{(1,1)} = w_p \{\sum_i c_{ilp} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l} + \sum_{i\mu} d_{i\mu lp} \varphi_i \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_l}\}. \tag{32}$$

Here and in what follows, $A^{(m)}$ is the contribution of the order g^m, and $A^{(m,n)}$ is the contribution of the order $g^m\lambda^n$ to the quantity A, and the results are given in terms of the gradients of the variables $\xi_\mu(x,t)$, i.e. $T(x,t)$, $\upsilon_n(x,t)$, $n(x,t)$. In (32) a_{ip}, $b_{ii'p}$, c_{ilp}, $d_{i\mu lp}$ are some momentum functions to be computed. The contribution $\mathrm{f}_p^{(1,0)}$ coincides with the first-order approximation in gradients of the usual Chapman–Enskog method. The scalar functions A_p, B_p satisfy the known integral equations

$$\hat{K}^o A_p p_l = \frac{1}{mT}\left(\frac{5}{2} - \frac{\varepsilon_p}{T}\right) p_l, \qquad \langle A_p \varepsilon_p\rangle^o = 0;$$

$$\hat{K}^o B_p h_{nl}(p) = -\frac{1}{mT} h_{nl}(p), \tag{33}$$

where

$$\hat{K}^o h_p = \int d^3p' w_p^o K_{pp'}^o h_{p'}, \qquad K_{p,p'}^o = K_{p+m\upsilon,p'+m\upsilon};$$

$$\langle h_p\rangle^o = \int d^3p\, w_p^o h_p \tag{34}$$

(the kernel $K_{pp'}$ is defined in (11); h_p is an arbitrary function). The second formula in (33) is the additional condition that follows from the RDP definition in (22). The functions $\mathrm{f}_p^{(0,0)}$ and $\mathrm{f}_p^{(1,0)}$ define the main contributions $M_\mu^{(1,0)}$ and $M_\mu^{(2,0)}$ to the usual hydrodynamic equations (8)

$$M_0^{(1,0)} = -\upsilon_n \frac{\partial T}{\partial x_n} - \frac{2}{3} T \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_n}, \quad M_l^{(1,0)} = -\upsilon_n \frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_n} - \frac{T}{mn}\frac{\partial n}{\partial x_l} - \frac{1}{m}\frac{\partial T}{\partial x_l},$$

$$M_4^{(1,0)} = -\frac{\partial n \upsilon_l}{\partial x_l}; \tag{35}$$

$$M_0^{(2,0)} = -\frac{2}{3n}\left(\frac{\partial q_l^{o(1,0)}}{\partial x_l} + t_{ln}^{o(1,0)}\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_n}\right), \quad M_l^{(2,0)} = -\frac{1}{mn}\frac{\partial t_{ln}^{o(1,0)}}{\partial x_n},$$

$$M_4^{(2,0)} = 0. \tag{36}$$

In (35) the expressions for the reversible fluxes

$$q_n^{o(0,0)} = 0, \qquad t_{nl}^{o(0,0)} \equiv p\delta_{nl}, \qquad p = nT$$

are taken into account (p is the pressure). Equations (36) include the dissipative contributions to the fluxes

$$q_n^{o(1,0)} = -\kappa\frac{\partial T}{\partial x_n}, \qquad t_{ln}^{o(1,0)} = -\eta\left(\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_n} + \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_l} - \frac{2}{3}\delta_{ln}\frac{\partial \upsilon_m}{\partial x_m}\right),$$

$$\kappa \equiv -\frac{2}{3}\langle\varepsilon_p^2 A_p\rangle^o, \qquad \eta \equiv -\frac{4m}{15}\langle\varepsilon_p^2 B_p\rangle^o \tag{37}$$

where κ and η are the gas heat conductivity and shear viscosity, respectively.

According to (25) and (32), in the zero-order approximation in gradients the equation for the parameters φ_i has the form

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = L_i^{(0,1)} + L_i^{(0,2)} + O(g^0\lambda^3, g^1),$$

$$L_i^{(0,1)} = -\sum_{i'} \mu_{ii'}\varphi_{i'}, \qquad L_i^{(0,2)} = -\sum_{i'i''} \nu_{ii'i''}\varphi_{i'}\varphi_{i''}, \tag{38}$$

where the coefficients

$$\mu_{ii'} = \{\theta_{ip}, a_{i'p}\},$$

$$\nu_{ii'i''} = \{\theta_{ip}, b_{i'i''p}\} + \frac{1}{2}\int d^3p\, d^3p' w_p\theta_{ip}K_{pp'p''}a_{i'p'}a_{i''p''} \tag{39}$$

and the function $K_{pp'p''}$

$$w_pK_{pp'p''} = -M_{pp'p''}w_{p'}w_{p''}, \quad M_{pp'p''} \equiv \left.\frac{\delta^2 I_p(\mathrm{f})}{\delta \mathrm{f}_{p'}\delta \mathrm{f}_{p''}}\right|_{\mathrm{f}\to w}. \tag{40}$$

are introduced. According to (22) and (30), these coefficients $\mu_{ii'}$, $\nu_{ii'i''}$ and functions a_{ip}, $b_{ii'p}$ from (32) are the solutions of the integral equations with the additional conditions

$$\hat{K}a_{ip} = \sum_{i'} a_{i'p}\mu_{i'i}, \quad \langle a_{ip}\zeta_{\mu p}\rangle = 0, \quad \langle a_{ip}\theta_{i'p}\rangle = \delta_{ii'}; \tag{41}$$

$$\hat{K}b_{i'i''p} = \sum_i a_{ip}\nu_{ii'i''} + \sum_i (b_{ii'p}\mu_{ii''} + b_{ii''p}\mu_{ii'}) -$$

$$-\frac{1}{2}\int d^3p' d^3p'' K_{pp'p''}a_{i'p'}a_{i''p''}, \quad \langle b_{i'i''p}\zeta_{\mu p}\rangle = 0, \quad \langle b_{i'i''p}\theta_{ip}\rangle = 0. \tag{42}$$

Expressions (39) for the coefficients $\mu_{ii'}$, $\nu_{ii'i''}$ follow also from the integral equations (41) and (42) when the last relations in (41) and (42) are taken into account. However, as will be shown below, these expressions for $\mu_{ii'}$, $\nu_{ii'i''}$ are not needed for the solution of equations (41) and (42).

Further analysis of the integral equations (41) and (42) without specifying the parameters φ_i (and the functions θ_{ip}) is difficult. However, it is easy to show that the quantities φ_i are linear combinations of the gas kinetic modes φ_α. To demonstrate this, consider the right and left eigenfunctions of the matrix $\mu_{ii'}$

$$\sum_{i'} \mu_{ii'} u_{i'\alpha} = \lambda_\alpha u_{i\alpha}, \quad \sum_{i} \upsilon_{i\alpha} \mu_{ii'} = \lambda_\alpha \upsilon_{i'\alpha};$$
$$\sum_{i} u_{i\alpha} \upsilon_{i\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'}, \qquad \sum_{\alpha} u_{i\alpha} \upsilon_{i'\alpha} = \delta_{ii'}, \tag{43}$$

with additional normalization and completeness conditions. Then

$$\varphi_i = \sum_\alpha u_{i\alpha} \varphi_\alpha, \qquad \varphi_\alpha \equiv \sum_i \varphi_i \upsilon_{i\alpha} \tag{44}$$

and, according to (38), the quantities φ_α satisfy the equation

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t} = -\lambda_\alpha \varphi_\alpha - \sum_{\alpha'\alpha''} \nu_{\alpha\alpha'\alpha''} \varphi_{\alpha'} \varphi_{\alpha''} + O(g^0\lambda^3, g^1),$$
$$\nu_{\alpha\alpha'\alpha''} \equiv \sum_{ii'i''} \upsilon_{i\alpha} \nu_{ii'i''} u_{i'\alpha'} u_{i''\alpha''} \tag{45}$$

In this case, (41) gives the integral equation

$$\hat{K} a_{\alpha p} = \lambda_\alpha a_{\alpha p}, \quad \langle a_{\alpha p} \zeta_{\mu p} \rangle = 0, \quad \langle a_{\alpha p} \theta_{\alpha' p} \rangle = \delta_{\alpha\alpha'} \tag{46}$$

for the functions $a_{\alpha p} \equiv \sum_i a_{ip} u_{i\alpha}$ ($\theta_{\alpha p} \equiv \sum_i \theta_{ip} \upsilon_{i\alpha}$). Thus, we have arrived at a spectral problem for the operator $\hat{K}$, i.e. for the linearized collision operator. The positiveness of its eigenvalues λ_α and the possibility of considering its eigenfunctions to be orthogonal in the scalar product (16) are mentioned above. The spectral problem (46) describes the kinetic modes of the system because the second condition in (46) means that the eigenfunctions $a_{\alpha p}$ are orthogonal to the hydrodynamic ones $\zeta_{\mu p}$ ($\hat{K}\zeta_{\mu p} = 0$). Thus the variables φ_i, as the problem under consideration implies, really attenuate with the time. The functions φ_α are the gas kinetic modes. Relations (46) define the type of these modes.

The integral equation (42) should be solved for the quantities $b_{ii'p}$ and $\nu_{ii'i''}$. This equation is simplified if, using the eigenfunctions (43), we introduce the variable

$$b_{\alpha\alpha' p} = \sum_{ii'} b_{ii'p} u_{i\alpha} u_{i'\alpha'} \tag{47}$$

that yields the equations

$$\hat{K} b_{\alpha'\alpha'' p} = \sum_{\alpha} a_{\alpha p} \nu_{\alpha\alpha'\alpha''} + b_{\alpha'\alpha'' p}(\lambda_{\alpha'} + \lambda_{\alpha''}) + h_{\alpha'\alpha'' p};$$

$$\langle b_{\alpha\alpha' p}\, \zeta_{\mu p} \rangle = 0, \quad \langle b_{\alpha\alpha' p}\, \theta_{\alpha'' p} \rangle = 0, \quad \langle h_{\alpha\alpha' p}\, \zeta_{\mu p} \rangle = 0 \tag{48}$$

for the quantities $b_{\alpha\alpha' p}$ and $\nu_{\alpha\alpha'\alpha''}$ (equations (48) may be called equations (42) in the α-representation). Here, $a_{\alpha p}$ is the eigenfunction that is found from equation (46), and $h_{\alpha\alpha' p}$ is a known function that depends on $a_{\alpha p}$. Besides the eigenfunctions $a_{\alpha p}$ (their number equals to the number of the parameters φ_i), the operator $\hat{K}$ has eigenfunctions $a_{\mu p}$ and additional ones a_{sp}. All these functions are orthogonal each to other and $a_{\mu p}$ are obtained by the orthogonalization of the functions $\zeta_{\mu p}$ ($\hat{K}\zeta_{\mu p} = 0$). The solution of the integral equation (48) can be sought in the form of expansion in the operator $\hat{K}$ eigenfunctions

$$b_{\alpha'\alpha'' p} = \sum_{\alpha} b^{\alpha}_{\alpha'\alpha''} a_{\alpha p} + \sum_{s} b^{s}_{\alpha'\alpha''} a_{sp} + \sum_{\mu} b^{\mu}_{\alpha'\alpha''} a_{\mu p},$$

$$h_{\alpha'\alpha'' p} = \sum_{\alpha} h^{\alpha}_{\alpha'\alpha''} a_{\alpha p} + \sum_{s} h^{s}_{\alpha'\alpha''} a_{sp} + \sum_{\mu} h^{\mu}_{\alpha'\alpha''} a_{\mu p}. \tag{49}$$

The second and fourth formulas in (48) show that the coefficients $b^{\mu}_{\alpha'\alpha''}$, $h^{\mu}_{\alpha'\alpha''}$ are equal to zero. Then the integral equation (48) yields

$$b^{\alpha}_{\alpha'\alpha''} = \frac{\nu_{\alpha\alpha'\alpha''} + h^{\alpha}_{\alpha'\alpha''}}{\lambda_\alpha - (\lambda_{\alpha'} + \lambda_{\alpha''})}, \qquad b^{s}_{\alpha'\alpha''} = \frac{h^{s}_{\alpha'\alpha''}}{\lambda_s - (\lambda_{\alpha'} + \lambda_{\alpha''})}. \tag{50}$$

The coefficients $\nu_{\alpha\alpha'\alpha''}$ are now found from the third formula in (48) with account for the last relation in (46), which yields

$$b^{\alpha}_{\alpha'\alpha''} + \sum_{s} b^{s}_{\alpha'\alpha''} \langle a_{sp} \theta_{\alpha p} \rangle = 0. \tag{51}$$

So, the integral equation with the additional conditions (42) has an unique solution for the quantities $b_{ii'p}$ and $\nu_{ii'i''}$.

Let us now discuss the calculation of the first-order contribution in gradients $L_i^{(1)}$ to equation (25) for the parameters φ_i. According to (25), with account for (22) and (27) the main contribution can be written as

$$L_i^{(1,1)} = -\frac{\partial}{\partial x_n}\int d^3p\,\theta_{ip}\upsilon_{np}\mathrm{f}_p^{(0,1)} - \sum_\mu \frac{\partial\langle\theta_{ip}\rangle}{\partial\zeta_\mu}L_\mu^{(1,1)} +$$

$$+\int d^3p\,d^3p'\theta_{ip}M_{pp'}\mathrm{f}_{p'}^{(1,1)} + \int d^3p\,d^3p'\,d^3p''\theta_{ip}M_{pp'p''}\mathrm{f}_{\mathrm{p}'}^{(1,0)}\mathrm{f}_{\mathrm{p}''}^{(0,1)} \qquad (52)$$

($L_i^{(1,0)} = 0$). Here, $L_\mu^{(1,1)}$ is the right-hand sides of the hydrodynamic equations for the variables ζ_μ, and thus for any function h of the hydrodynamic variables the following formula can be used

$$\sum_\mu \frac{\partial h}{\partial\zeta_\mu}L_\mu^{(1,1)} = \sum_\mu \frac{\partial h}{\partial\xi_\mu}M_\mu^{(1,1)}. \qquad (53)$$

Expressions for functions $M_\mu^{(1,1)}$ follows from equations (7) and (8)

$$M_0^{(1,1)} = -\frac{2}{3n}\left(\frac{\partial q_l^{o(0,1)}}{\partial x_l} + t_{ln}^{o(0,1)}\frac{\partial\upsilon_l}{\partial x_n}\right), \quad M_l^{(1,1)} = -\frac{1}{mn}\frac{\partial t_{ln}^{o(0,1)}}{\partial x_n},$$

$$M_4^{(1,1)} = 0 \qquad (54)$$

with fluxes

$$q_n^{o(0,1)} = \sum_i \langle\varepsilon_p\upsilon_{np}a_{i,p-m\upsilon}\rangle^o\varphi_i, \quad t_{ln}^{o(0,1)} = \sum_i \langle p_l\upsilon_{np}a_{i,p-m\upsilon}\rangle^o\varphi_i. \quad (55)$$

Further simplification of formula (52) for $L_i^{(1,1)}$ requires the specification of the parameters φ_i and the corresponding microscopic quantities θ_{ip}.

According to (30) and (53), the contribution $\mathrm{f}_p^{(1,1)}$ to the DF satisfies the equation

$$\sum_\mu \frac{\partial\mathrm{f}_p^{(0,1)}}{\partial\xi_\mu}M_\mu^{(1,0)} + \sum_\mu \frac{\partial w_p}{\partial\xi_\mu}M_\mu^{(1,1)} + \sum_i \frac{\partial\mathrm{f}_p^{(0,1)}}{\partial\varphi_i}L_i^{(1,1)} + \upsilon_{np}\frac{\partial\mathrm{f}_p^{(0,1)}}{\partial x_n} +$$

$$+\sum_i \left(\frac{\partial \mathrm{f}_p^{(1,1)}}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial \mathrm{f}_p^{(1,1)}}{\partial \partial \varphi_i / \partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} \right) L_i^{(0,1)} =$$

$$= \int d^3p' d^3p'' M_{pp'p''} \mathrm{f}_{p'}^{(0,1)} \mathrm{f}_{p''}^{(1,0)} + \int d^3p' M_{pp'} \mathrm{f}_{p'}^{(1,1)}. \tag{56}$$

Taking into account expressions (32) for the DF and the expressions for the right-hand sides $M_\mu^{(1,0)}$, $L_i^{(0,1)}$, $L_i^{(1,1)}$, $M_\mu^{(1,1)}$ of the equations for RDP from (35), (38), (52), (54), we obtain the integral equations for the functions c_{inp}, $d_{i\mu np}$

$$\hat{K} c_{inp} = \sum_{i'} c_{i'np} \mu_{i'i} + \sum_{i'} a_{i'p} \alpha_{i'in} + h_{inp}, \tag{57}$$

$$\hat{K} d_{i\mu np} = \sum_{i'} d_{i'\mu np} \mu_{i'i} + \sum_{i'} a_{i'p} \beta_{i'i\mu n} + h_{i\mu np}, \tag{58}$$

which, according to (32), define the DF $\mathrm{f}_p^{(1,1)}$. Here h_{inp} and $h_{i\mu np}$ are known functions ($h_{i\mu np}$ depends on c_{inp}) and the coefficients $\alpha_{ii'n}$, $\beta_{ii'\mu n}$ are given by formulas

$$\alpha_{ii'n} = \{\theta_{ip}, c_{i'np}\}, \qquad \beta_{ii'\mu n} = \{\theta_{ip}, d_{i'\mu np}\}. \tag{59}$$

The additional conditions for equations (57), (58) are given by the formulas respectively

$$\langle \zeta_{\mu p} c_{inp} \rangle = 0, \quad \langle \theta_{ip}\, c_{i'np} \rangle = 0, \quad \langle \zeta_{\mu p} h_{inp} \rangle = 0; \tag{60}$$

$$\langle \zeta_{\mu p} d_{i\mu' np} \rangle = 0, \quad \langle \theta_{ip}\, d_{i'\mu np} \rangle = 0, \quad \langle \zeta_{\mu p} h_{i\mu' np} \rangle = 0. \tag{61}$$

Expressions (59) for the coefficients $\alpha_{ii'n}$, $\beta_{ii'\mu n}$ follow from equations (57), (58) with account for the relation $\langle a_{ip} \theta_{i'p} \rangle = \delta_{ii'}$ from (41). However, these relations are not needed for the solution of equations (57), (58), and the integral equations are linear (this is similar to the situation with the solution of equations (41) and (42) without regard for (39)). Equations (57), (58), and (60), (61) are simplified in the α-representation

$$\hat{K} c_{\alpha np} = c_{\alpha np} \lambda_\alpha + \sum_{\alpha'} a_{\alpha' p} \alpha_{\alpha' \alpha n} + h_{\alpha np},$$
$$\langle \zeta_{\mu p} c_{\alpha np} \rangle = 0, \quad \langle \theta_{\alpha p} c_{\alpha' np} \rangle = 0, \quad \langle \zeta_{\mu p} h_{\alpha np} \rangle = 0; \tag{62}$$
$$\hat{K} d_{\alpha\mu np} = d_{\alpha\mu np} \lambda_\alpha + \sum_{\alpha'} a_{\alpha' p} \beta_{\alpha' \alpha\mu n} + h_{\alpha\mu np},$$
$$\langle \zeta_{\mu p} d_{\alpha\mu' np} \rangle = 0, \quad \langle \theta_{\alpha p} d_{\alpha'\mu np} \rangle = 0, \quad \langle \zeta_{\mu p} h_{\alpha\mu' np} \rangle = 0. \tag{63}$$

The solution of these equations may be discussed in a similar way to the solution of equation (48) and needs more information about parameters φ_i.

The calculation of the DF $\mathrm{f}_p^{(1,1)}$ allows us to find the contribution $M_\mu^{(2,1)}$ to the right-hand side of the hydrodynamic equations (8). According to (8), the following formulas hold

$$M_0^{(2,1)} = -\frac{2}{3n}\left(\frac{\partial q_l^{o(1,1)}}{\partial x_l} + t_{ln}^{o(1,1)}\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_n}\right), \quad M_l^{(2,1)} = -\frac{1}{mn}\frac{\partial t_{ln}^{o(1,1)}}{\partial x_n},$$

$$M_4^{(2,1)} = 0 \tag{64}$$

with fluxes

$$q_n^{o(1,1)} = \int d^3p\varepsilon_p \upsilon_{np}\mathrm{f}_p^{(1,1)}, \quad t_{ln}^{o(1,1)} = \int d^3p p_l \upsilon_{np}\mathrm{f}_p^{(1,1)}. \tag{65}$$

In summary, we have investigated the equations for the RDP φ_i and ξ_μ in the following orders of the perturbation theory

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = L_i^{(0,1)} + L_i^{(0,2)} + L_i^{(1,1)} + O(g^0\lambda^3, g^1\lambda^2, g^2\lambda^1, g^3),$$

$$\frac{\partial \xi_\mu}{\partial t} = M_\mu^{(1,0)} + M_\mu^{(1,1)} + M_\mu^{(2,0)} + M_\mu^{(2,1)} + O(g^1\lambda^2, g^2\lambda^2, g^3), \tag{66}$$

where the quantities $L_i^{(0,1)}$, $L_i^{(0,2)}$, $L_i^{(1,1)}$, $M_\mu^{(1,0)}$, $M_\mu^{(1,1)}$, $M_\mu^{(2,0)}$, $M_\mu^{(2,1)}$ are given in formulas (35), (36), (38), (52), (54), (64). Clearly the above-described procedure of sequential calculation of the DF and the right-hand sides of the RDP time equations can be continued. A detailed analysis of the obtained integral equations for the contributions to the DF is only possible when the parameters φ_i and the corresponding microscopic quantities θ_{ip} are specified. This will allow us to use rotational invariance considerations, which can greatly simplify the calculations, and to perform the required Galilean transformation.

4 Modified Grad problem

Consider application of the developed theory to the Grad problem in which nonequilibrium states of a gas are described by hydrodynamic variables

$\zeta_\mu(x,t)$ as well as by energy flux $q^o_n(x,t)$ and traceless momentum flux $\pi^o_{ln}(x,t)$ taken in ARF. Specification of RDP simplifies the consideration because allows us to make Galilean transformation for transition from LRF to ARF and to use rotational invariance in calculations.

It was stressed above that solution of the Grad problem in framework of the RDM can be based on the functional hypothesis (18) supplemented by definition of the RDP (19). It is obvious that the Grad DF (20) corresponds to the zero order approximation in gradients and to an approximation of small fluxes. In this section according to the general theory developed in Section 3 a modified Grad problem is investigated. In this problem the deviations of the fluxes $\delta q^o_n(x,t)$, $\delta\pi^o_{ln}(x,t)$ from their hydrodynamic values $q^o_n(x,\zeta(t))$, $\pi^o_{ln}(x,\zeta(t))$, which are functionals of the hydrodynamic variables $\zeta_\mu(x,t)$, are taken as the RDP. These deviations are assumed to be small values of the same order λ. Specification of the result of Section 3 for the problem considered here is quite simple. For example, the functional hypothesis considers the DF as a functional of the form $\mathrm{f}_p(x,\zeta(t),\delta q^o(t),\delta\pi^o(t))$.

The time equations for the fluxes q^o_n, π^o_{ln} follow from their definitions (19) and kinetic equation (1) and can be written as

$$\frac{\partial\pi^o_{ln}}{\partial t}=-\upsilon_m\frac{\partial\pi^o_{ln}}{\partial x_m}-\pi^o_{ln}\frac{\partial\upsilon_m}{\partial x_m}-\left(\pi^o_{lm}\frac{\partial\upsilon_n}{\partial x_m}+\pi^o_{nm}\frac{\partial\upsilon_l}{\partial x_m}-\frac{2}{3}\delta_{ln}\pi^o_{sm}\frac{\partial\upsilon_s}{\partial x_m}\right)+$$

$$-nT\left(\frac{\partial\upsilon_l}{\partial x_n}+\frac{\partial\upsilon_n}{\partial x_l}-\frac{2}{3}\delta_{ln}\frac{\partial\upsilon_m}{\partial x_m}\right)-\frac{\partial\pi_{ln,m}(\mathrm{f})}{\partial x_m}+R_{ln}(\mathrm{f}),\qquad(67)$$

$$\frac{\partial q^o_l}{\partial t}=-\upsilon_n\frac{\partial q^o_l}{\partial x_n}-q^o_l\frac{\partial\upsilon_n}{\partial x_n}-\frac{5}{3}q^o_n\frac{\partial\upsilon_l}{\partial x_n}+\frac{1}{mn}\pi^o_{ln}\frac{\partial\pi^o_{nm}}{\partial x_m}+\frac{5}{2}\frac{T}{m}\frac{\partial\pi^o_{ln}}{\partial x_n}-$$

$$+\frac{1}{mn}(\pi^o_{ln}+\frac{5}{2}nT\delta_{ln})\frac{\partial nT}{\partial x_n}-\frac{\partial q_{ln}(\mathrm{f})}{\partial x_n}-\pi_{ln,m}(\mathrm{f})\frac{\partial\upsilon_n}{\partial x_m}+R_l(\mathrm{f})\qquad(68)$$

where the notation

$$R_{ln}(\mathrm{f})=\frac{1}{m}\int d^3p\,h_{ln}(p)I_{p+m\upsilon}(\mathrm{f}),\quad R_l(\mathrm{f})=\frac{1}{m}\int d^3p\,\varepsilon_p p_l I_{p+m\upsilon}(\mathrm{f});$$

$$\pi_{ln,m}(\mathrm{f})=\frac{1}{m^2}\int d^3p\,h_{ln}(p)p_m\mathrm{f}_{p+m\upsilon},$$

$$q_{ln}(\mathrm{f})=\frac{1}{m^2}\int d^3p\,\varepsilon_p p_l p_n\mathrm{f}_{p+m\upsilon}\qquad(69)$$

is introduced. Equations (67), (68) are satisfied by the functionals $q^o_n(x,\zeta(t)) \equiv \tilde{q}^o_n$, $\pi^o_{ln}(x,\zeta(t)) \equiv \tilde{\pi}^o_{ln}$ and the usual hydrodynamic DF $\tilde{\mathrm{f}}_p(x,\zeta) = w_p + \mathrm{f}^{(1,0)}_p + O(g^2)$ (see (27), (32)). Therefore, according to (67), (68) , the exact time equations for the deviations have the form

$$\frac{\partial\delta\pi^o_{ln}}{\partial t} = -\upsilon_m\frac{\partial\delta\pi^o_{ln}}{\partial x_m} - \delta\pi^o_{ln}\frac{\partial\upsilon_m}{\partial x_m} - \\ -\left(\delta\pi^o_{lm}\frac{\partial\upsilon_n}{\partial x_m} + \delta\pi^o_{nm}\frac{\partial\upsilon_l}{\partial x_m} - \frac{2}{3}\delta_{ln}\delta\pi^o_{sm}\frac{\partial\upsilon_s}{\partial x_m}\right) + \\ -\frac{\partial\delta\pi_{ln,m}}{\partial x_m} + \delta R_{ln} \equiv L_{ln}, \tag{70}$$

$$\frac{\partial\delta q^o_l}{\partial t} = -\upsilon_n\frac{\partial\delta q^o_l}{\partial x_n} - \delta q^o_l\frac{\partial\upsilon_n}{\partial x_n} - \frac{5}{3}\delta q^o_n\frac{\partial\upsilon_l}{\partial x_n} + \frac{5}{2}\frac{T}{m}\frac{\partial\delta\pi^o_{ln}}{\partial x_n} + \\ +\frac{1}{mn}\delta\pi^o_{ln}\frac{\partial\delta\pi^o_{nm}}{\partial x_m} + \frac{1}{mn}\tilde{\pi}^o_{ln}\frac{\partial\delta\pi^o_{nm}}{\partial x_m} + \frac{1}{mn}\delta\pi^o_{ln}\frac{\partial\tilde{\pi}^o_{nm}}{\partial x_m} + \\ +\frac{1}{mn}\delta\pi^o_{ln}\frac{\partial nT}{\partial x_n} - \frac{\partial\delta q_{ln}}{\partial x_n} - \delta\pi_{ln,m}\frac{\partial\upsilon_n}{\partial x_m} + \delta R_l \equiv L_l \tag{71}$$

where the notations

$$\delta R_{ln} \equiv R_{ln}(\mathrm{f}) - R_{ln}(\tilde{\mathrm{f}}), \quad \delta R_l \equiv R_l(\mathrm{f}) - R_l(\tilde{\mathrm{f}}); \\ \delta\pi_{ln,m} \equiv \pi_{ln,m}(\mathrm{f}) - \pi_{ln,m}(\tilde{\mathrm{f}}), \quad \delta q_{ln} \equiv q_{ln}(\mathrm{f}) - q_{ln}(\tilde{\mathrm{f}}) \tag{72}$$

are introduced. To continue the derivation of the time equations, one needs to calculate DF $\mathrm{f}_p(x,\zeta,\delta q^o,\delta\pi^o)$ using the general theory developed in Section 3 and substitute it into (72).

Here we restrict ourselves to the calculation of the contribution $\mathrm{f}^{(0)}_p$ of zero order in gradients to this DF. According to (32) in this approximation the DF $\mathrm{f}_p(x,\zeta,\delta q^o,\delta\pi^o)$ has the structure

$$\mathrm{f}^{(0)}_p = w^o_p\{1 + a_{np}\,\delta q^o_n + a_{lnp}\,\delta\pi^o_{ln} + O(g^0\lambda^2)\}_{p\to p-m\upsilon}, \\ a_{np} \equiv a_p p_n, \quad a_{nlp} \equiv b_p\,h_{nl}(p) \tag{73}$$

where a_p, b_p are some scalar functions. In view of (70)-(72), the time equations for the deviations of the fluxes q^o_n, π^o_{ln} in the zero order in gradients have the form

$$\frac{\partial\delta q^o_l}{\partial t} = -\lambda_q\delta q^o_l + O(g^0\lambda^2, g^1),$$

$$\frac{\partial \delta\pi^o_{ln}}{\partial t} = -\lambda_\pi \delta\pi^o_{ln} + O(g^0\lambda^2, g^1) \tag{74}$$

where

$$\lambda_q = \frac{1}{3m}\{p_l\varepsilon_p, p_l a_p\}^o, \quad \lambda_\pi = \frac{1}{5m}\{p_l p_n, h_{ln}(p)b_p\}^o. \tag{75}$$

These quantities are written using the following bilinear form

$$\{g_p, h_p\}^o = \int d^3p d^3p' w^o_p K^o_{pp'} g_p h_{p'} \tag{76}$$

which is a specification of the form (14) $\{g_p, h_p\}$ for the ARF (see also (9), (11), (34)). According to formulas (32), (41) of the general theory, the functions a_p, b_p from (73) satisfy the integral equations with the additional conditions

$$\hat{K}^o a_p p_l = \lambda_q a_p p_l, \quad \langle\varepsilon_p a_p\rangle^o = 0, \quad \langle\varepsilon^2_p a_p\rangle^o = 3/2; \tag{77}$$

$$\hat{K}^o b_p h_{ln}(p) = \lambda_\pi b_p h_{ln}(p), \quad \langle\varepsilon^2_p b_p\rangle^o = \frac{15}{8m}. \tag{78}$$

As would be expected, these equations are eigenvalue problems for the operator $\hat{K}^o$ defined in (34). According to the remark given after formulas (16), its eigenvalues are positive and equations (71) describe attenuation of the flux deviations $\delta q^o_n(x,t)$, $\delta\pi^o_{ln}(x,t)$ i.e. the processes

$$q^o_n(x,t) \xrightarrow[t\gg\tau_0]{} q^o_n(x,\zeta(t)), \qquad \pi^o_{ln}(x,t) \xrightarrow[t\gg\tau_0]{} \pi^o_{ln}(x,\zeta(t)). \tag{79}$$

This phenomenon is called the Maxwell relaxation. In the Grad theory [13] relaxation equations of the type (74) for fluxes $q^o_n(x,t)$, $\pi^o_{ln}(x,t)$ are obtained too, but describe simple attenuation of these fluxes.

Equations (74) give contributions $L^{(0,1)}_l$, $L^{(0,1)}_{ln}$ to the right-hand sides L_l, L_{ln} of the time equations for RDP (70), (71). According to the general theory, contributions to L_l, L_{ln} that do not depend on the parameters δq^o_n, $\delta\pi^o_{ln}$ are absent, and therefore

$$L^{(1,0)}_l = 0, \quad L^{(1,0)}_{ln} = 0; \quad L^{(2,0)}_l = 0, \quad L^{(2,0)}_{ln} = 0 \tag{80}$$

(see, for example, equations (66)). In the present paper other contributions will not be discussed. Consider only approximate solution of the integral equations (77), (78) using the Burnett method of a truncated Sonine polynomial expansion.

Solution of the equation (77) with account for its tensor dimensionality is found in the form of the series

$$a_p = \sum_{s=0}^{\infty} a_s S_s^{3/2}(\beta\varepsilon_p) \tag{81}$$

($\beta = T^{-1}$). Additional conditions (77) thus give

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = -2\beta^2/5n. \tag{82}$$

Integral equation (77) leads to the following infinite set of linear equations for the coefficients a_s

$$\sum_{s'=1}^{\infty} A_{ss'}\tilde{a}_{s'} = \tilde{\lambda}_q \tilde{a}_s \tag{83}$$

where the notations

$$A_{ss'} = \{p_l S_s^{3/2}(\beta\varepsilon_p), p_l S_{s'}^{3/2}(\beta\varepsilon_p)\}^o (x_s x_{s'})^{-1/2},$$

$$\tilde{a}_s = a_s x_s^{1/2}, \qquad \tilde{\lambda}_q = \frac{2mn}{\beta}\lambda_q, \qquad x_s \equiv \frac{2\Gamma(s+5/2)}{s!\pi^{1/2}} \tag{84}$$

are introduced. According to the properties of the bilinear form (76) the matrix $A_{ss'}$ is symmetric and positively defined. Solution of equations (83) in one- and two-polynomial approximations gives

$$a_1^{[1]} = a_1, \qquad \tilde{\lambda}_q^{[1]} = A_{11};$$

$$a_1^{[2]} = a_1, \qquad a_2^{[2]} = \frac{2}{7^{1/2}} \frac{\tilde{\lambda}_q^{[2]} - A_{11}}{A_{12}} a_1,$$

$$\tilde{\lambda}_q^{[2]} = \{(A_{11} + A_{22}) - [(A_{11} - A_{22})^2 + 4A_{12}^2]^{1/2}\}/2 \tag{85}$$

(here $A^{[n]}$ is a quantity A taken in n-polynomial approximation). Note that in the two-polynomial approximation eigenvalue $\tilde{\lambda}_q^{[2]}$ of the smallest value was chosen.

With account for the tensor dimensionality of equation (78) its solution is found as the following series expansion

$$b_p = \sum_{s=0}^{\infty} b_s S_s^{5/2}(\beta\varepsilon_p). \tag{86}$$

Additional condition (78) define the first coefficient of the expansion

$$b_0 = \beta^2/2mn. \tag{87}$$

Integral equation (78) leads to the infinite set of linear equations for the coefficients b_s

$$\sum_{s'=0}^{\infty} B_{ss'}\tilde{b}_{s'} = \tilde{\lambda}_\pi \tilde{b}_s \tag{88}$$

where the notations

$$B_{ss'} = \{h_{ln}(p)S_s^{5/2}(\beta\varepsilon_p), h_{ln}(p)S_{s'}^{5/2}(\beta\varepsilon_p)\}^o(y_s y_{s'})^{-1/2},$$

$$\tilde{b}_s = b_s y_s^{1/2}, \qquad \tilde{\lambda}_\pi = \frac{8m^2n}{3\beta^2}\lambda_\pi, \qquad y_s \equiv \frac{2\Gamma(s+7/2)}{s!\pi^{1/2}} \tag{89}$$

are introduced. According to the properties of the bilinear form (76) the matrix $B_{ss'}$ is symmetric and positively defined one. Solution of equations (88) in one- and two-polynomial approximations gives

$$b_0^{[1]} = b_0, \qquad \tilde{\lambda}_\pi^{[1]} = B_{00};$$

$$b_0^{[2]} = b_0, \qquad \tilde{b}_1^{[2]} = \frac{2^{1/2}}{7^{1/2}}\frac{\tilde{\lambda}_\pi^{[2]} - B_{00}}{B_{01}}b_0,$$

$$\tilde{\lambda}_\pi^{[2]} = \{(B_{00}+B_{11}) - [(B_{00}-B_{11})^2 + 4B_{01}^2]^{1/2}\}/2. \tag{90}$$

Note that in the two-polynomial approximation the eigenvalue $\tilde{\lambda}_\pi^{[2]}$ of the smallest value was chosen.

So, in the one-polynomial approximation the following expression for DF (73) of the zero order in gradients is obtained

$$\mathrm{f}_p^{(0)} = w_p^o \Big\{ 1 + \frac{1}{2mnT^2}p_n p_l \delta\pi_{ln}^o + + \frac{1}{nT^2}p_n(\frac{2}{5}\frac{\varepsilon_p}{T} - 1)\delta q_n^o + O(g^0\lambda^2) \Big\}_{p\to p-mv} \tag{91}$$

For the selected independent variables this expression coincides with the Grad DF (20). Therefore, the statement given at the end of section 2 is confirmed and his DF contains only contributions of the orders $g^0\lambda^0$, $g^0\lambda^1$ and takes them in the one-polynomial approximation.

In the one-polynomial approximation our attenuation constants are given by the formulas

$$\lambda_q^{[1]} = \frac{2}{15mnT^3}\{p_l\varepsilon_p, p_l\varepsilon_p\}^o = \frac{5}{2}\frac{nT}{m\kappa^{[1]}},$$
$$\lambda_\pi^{[1]} = \frac{1}{10m^2nT^2}\{h_{ln}(p), h_{ln}(p)\}^o = \frac{nT}{\eta^{[1]}} \tag{92}$$

where the expressions for the heat conductivity $\kappa^{[1]}$ and the shear viscosity $\eta^{[1]}$ in the same approximation are used to compare. Famous result of the theory [3] is given by the formula

$$\kappa^{[1]} = 15\eta^{[1]}/4m \tag{93}$$

which leads to the relations

$$\lambda_q^{[1]} = 2\lambda_\pi^{[1]}/3. \tag{94}$$

Note that the Grad theory [12] gives also expressions (92) for attenuation constants. However, in his theory this constants describe unphysical attenuation of the fluxes $q_l^o(x,t)$, $\pi_{ln}^o(x,t)$ to zero and cannot be corrected.

As the final remark note that it is not possible to rigorously prove the method of a truncated polynomial expansion for solution of eigenvalue problem for operator $\hat{K}$. However, the proposed calculations additionally show limitation of the Grad method as an alternative to the Bogolyubov reduced description method.

5 Conclusion

The Chapman–Enskog method has been generalized for the investigation of processes in the vicinity of hydrodynamic states of a gas. The generalization is made on the basis of the Bogolyubov idea of the functional hypothesis. A theory that describes a nonequilibrium state of a gas by the usual hydrodynamic variables $\zeta_\mu(x,t)$ and arbitrary additional local variables $\theta_i(x,t)$ has been constructed. The gradients of all these parameters and the deviations $\varphi_i(x,t)$ of the variables $\theta_i(x,t)$ from their hydrodynamic values $\theta_i(x,\zeta(t))$ are assumed to be small and are estimated by two independent small parameters g, λ. The proposed theory is nonlinear in the variables $\varphi_i(x,t)$ too.

The usual Chapman–Enskog method leads to the solution of Fredholm integral equations of the first kind with an operator $\hat{K}$ given by the linearized collision integral. The proposed theory leads to the solution of linear integral equations of a more complicated nature with the same operator $\hat{K}$. Some of them are eigenvalue problems for the operator $\hat{K}$ and describe the kinetic modes of the system.

The proposed theory is applied to the solution of a modified Grad problem. Grad formulated his problem in his 13-moment approximation for the solution of kinetic equations. In his theory nonequilibrium states of a gas are described, in addition to the usual hydrodynamic variables, by the fluxes of energy $q_n^o(x,t)$ and traceless momentum $\pi_{ln}^o(x,t) \equiv t_{ln}^o(x,t) - t_{mm}^o(x,t)\delta_{ln}/3$ in the accompanying reference frame. In fact these fluxes are considered as small quantities of the same order λ and the Grad distribution function includes only terms of the orders $g^0\lambda^0$, $g^0\lambda^1$. Moreover, it corresponds to the one-polynomial approximation. In our modification of the Grad problem a nonequilibrium state of a gas is described by the usual hydrodynamic variables and small deviations $\delta q_n^o(x,t)$, $\delta\pi_{ln}^o(x,t)$ of the above-mentioned fluxes from their hydrodynamic values $q_n^o(x,\zeta(t))$, $\pi_{ln}^o(x,\zeta(t))$. In the simplest approximation this leads to a theory of the Maxwell relaxation.

The consideration shows that in the 13-moment Grad approximation the investigation of the relaxation phenomena in the system is reduced to a very approximate solution of the eigenvalue problem for the operator $\hat{K}$. The Bogolyubov reduced description method, based on his idea of the functional hypothesis, gives an adequate solution of the problem.

The proposed theory can be applied to evolution described by arbitrary kinetic equations, and to the evolution of dense systems described by the Liouville equation.

References

[1] D. Hilbert. *Begrundung der kinetishen Gastheorie.* Math. Annalen. **72**, (1912), 562–577.

[2] D. Enskog. *Kinetische Theorie der Forgange in massig verdunten Gasen.* Dissertation, Uppsala, 1917.

[3] S. Chapman, T. Cowling. *The mathematical theory of non-uniform gases.* Cambridge: University Press, 1970, 422 p.

[4] D. Burnett *The distribution of velocities in a slightly non-uniform gas.* Proc. London Math. Soc., **39**, (1935), 385–430.

[5] D. Burnett *The distribution of molecular velocities and the mean motion in a non-uniform gas.* Proc. London Math. Soc., **40**, 1936, 382–435.

[6] M. Kohler *Behandlung von Nichtgleichgewichtsvorgangen mit Hilfe eines Extremalprincips.* Zs. Phys., **124**, (1948), 772–789.

[7] N.N. Bogoliubov. *Problems of dynamic theory in statistical physics.* Moscow: Gostekhizdat, 1946, 119 p. (in Russian); English transl., Technical Inform. Serv., Oak Ridge, 1960.

[8] A.I. Akhiezer, S.V. Peletminskii. *Methods of Statistical Physics.* Moscow: Nauka, 1977, 368 p. (in Russian); English transl. (Int. Ser. in Nat. Phil., Vol. 104), Oxford: Pergamon Press, 1981, 450 p.

[9] S.A. Sokolovsky. *Toward polaron kinetics in the Bogoliubov reduced description method.* Theor. and Math. Physics, **168**, No.2, (2011), 1150–1164.

[10] S.A. Sokolovsky. *Hydrodynamic states of phonons in insulators.* Condensed Matter Physics, **15**, No.4, (2012), 43007:1–9.

[11] V.N. Gorev, A.I. Sokolovsky. *Hydrodynamics of a completely ionized plasma taking into account relaxation phenomena.* Proc. of the Int. School-seminar "New Physics and Quantum Chromodynamics at External Conditions" (Dnipropetrovs'k, 22-24 May, 2013), (2013), 135–138.

[12] H. Grad. *On the kinetic theory of rarefied gases.* Commun. on Pure and Appl. Math., **2**, No.4, (1949), 331–407.

[13] H. Grad. *Principles of the Kinetic Theory of Gases.* (In: Handbuch der Physik, **12**, Berlin: Springer, 1958), 205–294.

[14] S.V. Peletminskii, V.I. Prikhod'ko, *Method of asymptotic operators in statistical mechanics I. Spatially homogeneous states.* Theor. and Math. Physics., **12**, No.1, (1972), 680–691.

[15] S.V. Peletminskii, V.I. Prikhod'ko, *Method of asymptotic operators in statistical mechanics II. Spatially inhomogeneous states.* Theor. and Math. Physics. **12**, No.2, (1972), 823–837.

[16] A.I. Sokolovsky. *Projection formulation of the Bogolyubov reduced description method and its application to fluctuation kinetics.* Ukr. Journ. of Phys. **45**, No.4-5, (2000), 548–553.

Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 90–104

УДК 517.96

S.V. Gryshchuk

(Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv)

gryshchuk@imath.kiev.ua

Power series and conformal mappings in one boundary value problem for monogenic functions of the biharmonic variable

Dedicated to the 80 th anniversary of Prof. D.Ya. Petrina

Considered a boundary value problem (BVP) for monogenic functions of biharmonic variable taking values in a two-dimensional commutative Banach algebra. This BVP is associated with the main biharmonic problem for biharmonic functions of two real variables. Developing a reduction's scheme for this BVP for monogenic functions to BVP in a disk by using of expansions in power series and conformal mappings in the complex plane. For some particular cases this problem is solved in a complete form.

Розглядається крайова задача для моногенних функцій бігармонічної змінної зі значеннями в двовимірній комутативній алгебрі. Дана задача асоційована з основною бігармонічною задачею на площині. Розробляється схема редукції цієї задачі для моногенних в однозв'язних областях функцій до відповідної крайової задачі в крузі бігармонічної площини, застосовуючи розвинення в степеневий ряд аналітичних функцій комплексної змінної та конформні відображення комплексної площини. Наведено частинні випадки, коли дана задача розв'язується у замкненій формі.

1. Introduction. Monogenic functions in a biharmonic plane. We say that an associative commutative two-dimensional algebra $\mathbb{B}$ with

© **Institute of Mathematics, 2014**

the unit 1 over the field of complex numbers $\mathbb{C}$ is *biharmonic* if in $\mathbb{B}$ there exists a *biharmonic basis*, i.e., a basis $\{e_1, e_2\}$ satisfying the conditions

$$(e_1^2 + e_2^2)^2 = 0, \qquad e_1^2 + e_2^2 \neq 0, \tag{1}$$

In [1], I. P. Mel'nichenko proved that there exists the unique biharmonic algebra $\mathbb{B}$ and all biharmonic bases form an infinite collection belonging to the algebra $\mathbb{B}$, moreover, $\mathbb{B}$ is generated by a non-biharmonic bases $\{e_1, \rho\}$, where $\rho^2 = 0$.

Here and elsewhere we mean by the biharmonic bases $\{e_1, e_2\}$ the following:

$$e_1 = 1, \quad e_2 = i - \frac{i}{2}\rho, \tag{2}$$

where i is an imaginary complex unit. Therefore, we have equalities $e_2^2 = 1 + 2ie_2$ and

$$\rho = 2 + 2ie_2. \tag{3}$$

Consider a biharmonic plane $\mu := \{\zeta = x\, e_1 + y\, e_2 : x, y \in \mathbb{R}\}$ which is a linear span of the elements e_1, e_2 of biharmonic basis over the field of real numbers $\mathbb{R}$.

Let D be a domain in the Cartesian plane xOy and $D_\zeta := \{\zeta = x + ye_2 : (x, y) \in D\}$ be a domain in μ, and $D_z := \{z = x + iy : (x, y) \in D\}$ be a domain in the complex plane $\mathbb{C}$. In what follows, $\zeta = x + ye_2, z = x + iy$ and $x, y \in \mathbb{R}$.

Inasmuch as divisors of zero do not belong to the biharmonic plane, one can define the derivative $\Phi'(\zeta)$ of the function $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ in the same way as in the complex plane:

$$\Phi'(\zeta) := \lim_{h \to 0,\, h \in \mu} \big(\Phi(\zeta + h) - \Phi(\zeta)\big)\, h^{-1}. \tag{4}$$

We say that a function $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ is *monogenic* in a domain D_ζ if and only if its derivative $\Phi'(\zeta)$ exists in every point $\zeta \in D_\zeta$. Note, that the limit (4) can be considered according to the euclidian norm $a := \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$, where $a = z_1 + z_2 e_2 \in \mathbb{B}$, z_1 and z_2 in $\mathbb{C}$.

In [2], it is established that a function $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ is monogenic in a domain D_ζ if and only if the following Cauchy–Riemann condition is satisfied:

$$\frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial y} = \frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial x}\, e_2 \ \forall \zeta = x + e_2 y \in D_\zeta. \tag{5}$$

Note, that in [2] the condition (5) is written in an equivalent form by each component.

In [3], [4], there were established basic analytic properties of monogenic functions similar to properties of holomorphic functions of the complex variable: the Cauchy integral theorem and integral formula, the Morera theorem, the uniqueness theorem, the Taylor and Laurent expansions, a property of monogenic functions to be infinitely times monogenic.

Any function of a type $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ is expressed in the form

$$\Phi(\zeta) = U_1(x,y) + U_2(x,y)\, i + U_3(x,y)\, e_2 + U_4(x,y)\, ie_2, \quad \zeta = x + ye_2, \tag{6}$$

where $U_k \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = \overline{1,4}$.

Every component U_k, $1 \le k \le 4$, of monogenic function (6) satisfies in the domain D the biharmonic equation

$$(\Delta_k)^m\, u(x,y) \equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) u(x,y) = 0,\ m = k = 2, \tag{7}$$

due to the relations (1), an existence of derivatives $\Phi^{(k)}$ of the order k, $1 \le k \le 4$, and the equality $(\Delta_2)^2\, \Phi(\zeta) = (e_1^2 + e_2^2)^2 \Phi^{(4)}(\zeta)$.

In [5], there were introduced hyperanalytic functions taking values in real Clifford algebras of an arbitrary dimension, so-called, holomorphic Cliffordian functions. Any real component of holomorphic Cliffordian function (similar to U_k in (6)) satisfies the polyharmonic equation of the type (7) with some $m \ge 2$ and $k = 2m$.

In [6], V.V.Karachic and N.A. Antropova used Almansi representation formula for solving the inhomogeneous Dirichlet problem for the homogeneous biharmonic equation with polynomial boundary data.

2. Statement of (1-3)-Problem for monogenic functions.

Consider the following boundary value problem: to find a monogenic function $\Phi \colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ which is continuous in the closure $\overline{D_\zeta}$ of the domain D_ζ by given boundary values u_1, u_3, respectively, of the first and the third components of the expansion (6):

$$U_1(x,y) = u_1(\zeta),\, U_3(x,y) = u_3(\zeta) \qquad \forall\, \zeta = x + e_2 y \in \partial D_\zeta. \tag{8}$$

Problems of this type was first considered by V.F. Kovalev [7] and was called as the biharmonic Schwarz problem because it is analogous in a certain sense to the classical Schwarz problem on finding an analytic function of complex variable when values of its real part are given on the boundary of domain. Note that V.F. Kovalev stated only a sketch of solving of the biharmonic Schwarz problems in an integral form for semi-plane and discussed a possibility of the reduction this problem for an arbitrary domain to an integro-differential equation without investigation conditions of solvability of these problems.

Certain relation between the (1-3)-problem and Theory of 2D-elasticity is discussed in [8] for a case of a disk. Dwell on a case of an arbitrary simply connected domain $D \in \mathbb{R}^2$ corresponding to the domain D_ζ in the biharmonic plane μ. The main biharmonic problem (see, for example, [9, p. 202]) is to find a biharmonic function $V : D \longrightarrow \mathbb{R}$ by given limiting values of its partial derivatives

$$\begin{aligned} &\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0),\,(x,y)\in D} \frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = u_1(x_0,y_0), \\ &\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0),\,(x,y)\in D} \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} = u_3(x_0,y_0) \qquad \forall\,(x_0,y_0)\in\partial D. \end{aligned} \tag{9}$$

In [7], there was considered a reduction scheme of the main biharmonic problem to the (1-3)-problem. Consider a modification of this scheme.

Let Φ_1 is monogenic in D_ζ function

$$\Phi_1(\zeta) := V(x,y)\,e_1 + V_2(x,y)\,ie_1 + V_3(x,y)\,e_2 + V_4(x,y)\,ie_2,$$

which has as the first component the required biharmonic function $V(x,y)$. It follows from the Cauchy–Riemann condition (5) with $\Phi = \Phi_1$ that $\partial V_3(x,y)/\partial x = \partial V(x,y)/\partial y$. Therefore,

$$\Phi_1'(\zeta) = \frac{\partial V(x,y)}{\partial x}\,e_1 + \frac{\partial V_2(x,y)}{\partial x}\,ie_1 + \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}\,e_2 + \frac{\partial V_4(x,y)}{\partial x}\,ie_2\,,$$

and the main biharmonic problem with the boundary conditions (9) can be reduced to the (1-3)-problem on finding a monogenic in D_ζ function $\Phi(\zeta) := \Phi_1'(\zeta)$, then, solving the latter problem, we recover functions $M(x,y) := \frac{\partial V(x,y)}{\partial x}$ and $N(x,y) := \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}$ defined in D. In a conclusion, obtain a solution of the main biharmonic problem in the form of the following curvilinear integral

$$V(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy,$$

where (x_0, y_0) is a fixed point in D, integration means along any piecewise smooth curve, which joints this point with a point with variable coordinates (x, y).

In [8], investigated the (1-3)-problem for a case, when D_ζ is an upper semi-plane of the biharmonic plane or a unit disk $\{\zeta \in \mu : \|\zeta\| \leq 1\}$. Solutions of these problems are found in an explicit form by means of some integrals similar to a classis Schwarz integral in the complex plane.

Below we consider the (1-3)-problem for a sufficiently large class of domains D_ζ using the technique of conformal mappings D_ζ to the disk $\mathcal{D}_1 := \{\zeta \in \mu : \|\zeta\| < 1\}$, which is generated by a conformal mapping of D_z to the unit disk in $\mathbb{C}$. We notice some sufficient condition to the domain D_ζ and boundary data u_1 and u_3 for a reduction of the (1-3)-problem to a suitable boundary value problem on finding some $\mathbb{B}$ – valued function defined in $\mathcal{D}_1$. For some particular cases of domains D_ζ this reduction recover a solution of the (1-3)-problem in an explicit form.

Proposed method of solving boundary value problems for monogenic functions of the biharmonic variable analogous to the method of N. I. Muskhelishvili of solving boundary value problems of 2D-Elasticity based on using a technique of conformal mappings of complex plane and power series expansions of analytic functions of complex variable (cf., e.g., [10, §63]).

3. Using technique of conformal mappings for (1-3)-problem in a simply connected domain. There is an expression (cf., e.g., [3] – [12]) of an arbitrary monogenic function $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ via two analytic functions F, F_0 of complex variable $z \in D_z$:

$$\Phi(\zeta) = F(z)e_1 - \left(\frac{iy}{2}\,F'(z) - F_0(z)\right)\rho \qquad \forall \zeta \in D_\zeta. \tag{10}$$

Consider a problem on solving of the (1-3)-problem in a domain D_ζ, which is congruent to a simply connected domain D_z. Let $\mathbb{N}$ be a set of natural numbers, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$ be a set of integer numbers. Taking into account any conformal mapping of the type $\omega\colon \mathcal{D}_1 \longrightarrow D_z$, we generale a domain D_ζ. Denote $\Gamma_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. For any complex-valued function of the type $G(z)$, $z = \omega(\tau)$, $\tau \in \mathcal{D}_1$, we will denote by $\widetilde{G}(\tau)$ an expression $G(\omega(\tau))$. For any τ in the disk $\mathcal{D}_1$ denote by (η, φ) its polar coordinates, i.e., $\tau = \eta \exp\{i\varphi\}$, by $(1, \theta)$ we will denote polar coordinates of points $\sigma = \exp\{i\theta\} \in \Gamma_1$. Obviously, that if a function G is analytic in D_z, then $\widetilde{G}$ is analytic in $\mathcal{D}_1$.

For any $z \in \mathbb{C}$ by Rez and Imz we mean, accordingly, real and imaginary parts of z: $z = \mathrm{Re}z + i\,\mathrm{Im}z$. Denote $\Phi_*(\tau) := \Phi\left(\mathrm{Re}\,\omega(\tau) + \mathrm{Im}\,\omega(\tau)\,e_2\right)$, $\tau \in \mathcal{D}_1$. Then the equality (10) transforms to the form

$$\Phi_*(\tau) = \widetilde{F}(\tau) - \left(\frac{i}{2}\,Y(\tau)\,\widetilde{F}'(\tau) - \widetilde{F}_0(\tau)\right)\rho \qquad \forall \tau \in \mathcal{D}_1, \tag{11}$$

where

$$Y(\tau) := \frac{\mathrm{Im}\,\omega(\tau)}{\omega'(\tau)}. \tag{12}$$

Therefore, receive that the (1-3)-problem for monogenic function Φ reduced to an ***auxiliary (1-3)-problem*** on finding the first, V_1, and the third component, V_3, for a function (11) ($\widetilde{F}$, $\widetilde{F}_0$ are unknown analytic in $\mathcal{D}_1$ functions of complex variable τ):

$$\Phi_*(\tau) = V_1(\tau) + V_2(\tau)i + V_3(\tau)e_2 + V_4(\tau)ie_2, \tag{13}$$

where $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, $\tau_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, $V_k : \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = \overline{1,4}$, furthermore, we assume, that Φ_* is continuous in $\overline{\mathcal{D}_1}$ and the following boundary conditions fulfilled

$$V_k(\sigma) = \widetilde{u}_k(\sigma),\ k = 1, 3, \qquad \forall\, \sigma \in \Gamma_1, \tag{14}$$

where $\widetilde{u}_k : \Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ are given continuous functions. Boundary functions $\widetilde{u}_k, k = 1, 2$, are connected with boundary data u_1 and u_3 (see (8)) of the (1-3)-problem for a function (6), which is monogenic in D_ζ, by means of the following relations:

$$\widetilde{u}_k(\sigma) = u_k(\zeta),\ \omega(\sigma) = z,\ k = 1, 3, \tag{15}$$

where $\sigma \in \Gamma_1$, $z = \omega(\sigma) := x + iy \in \mathbb{C}$, $\zeta := x + e_2 y \in \partial D_\zeta$.

Using polar coordinates, deliver equivalent denotations for boundary functions $\widetilde{u}_1$ and $\widetilde{u}_3$:

$$\widetilde{u}_k(\theta) \equiv \widetilde{u}_k(\cos\theta + \sin\theta\, e_2),\ k = 1, 3,\ 0 \le \theta \le 2\pi. \tag{16}$$

Let l_1 is a totaly of consequences of the type $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots)$, where $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$, and $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty$. Denote by $\{\alpha\}_m$, $m \in \mathbb{N}_0$, any consequence of the type $(\alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots) \in l_1$, and conversely.

We say, that the ordered quadruple of consequences $\left(\{\alpha^{(0)}\}_0, \{\beta^{(0)}\}_0, \{\alpha\}_0, \{\beta\}_1\right)$ *belongs to the class* $\mathcal{E}$ if and only if there exists a constant $M > 0$, natural number p and a sequence $\{\upsilon\}_p$, for which the following inequality fulfilled

$$|\alpha_k| + |\beta_k| \leq M \frac{|\upsilon_k|}{k} \quad \forall k \geq p. \tag{17}$$

This definition can be naturally generalized to an ordered quadruple of consequences of the type $\left(\{\alpha^{(0)}\}_{N_1}, \{\beta^{(0)}\}_{N_2}, \{\alpha\}_{N_3}, \{\beta\}_{N_4}\right)$, $N_m \in \mathbb{N}_0$, $m = \overline{1,4}$.

Theorem 2. *Let the following conditions fulfilled*:

1* *conformal mapping* $\omega \colon \mathcal{D}_1 \longrightarrow D_z$ *is such, that the series*

$$\frac{\operatorname{Im} \omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n \sigma^n \quad \forall \sigma \in \Gamma_1, \tag{18}$$

is absolutely convergent on Γ_1,

2* *boundary functions* $\widetilde{u}_1$, $\widetilde{u}_3$ *of the auxiliary (1-3)-problem expressed by absolutely and uniformly convergent on the segment* $[0, 2\pi]$ *the Fourier series*:

$$\widetilde{u}_1(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta\right), \tag{19}$$

$$\widetilde{u}_3(\theta) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a'_k \cos k\theta + b'_k \sin k\theta\right). \tag{20}$$

3* *The system of equations*

$$\alpha_0 + 2\alpha_0^{(0)} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\Big(\alpha_{k+1}\delta''_{-k} + \beta_{k+1}\delta'_{-k}\Big) = \frac{a_0}{2}, \tag{21}$$

$$\alpha_n + 2\alpha_n^{(0)} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\Big(\alpha_{k+1}\Lambda^{+}_{2,n,k} + \beta_{k+1}\Lambda^{+}_{1,n,k}\Big) = a_n \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

$$-\beta_n - 2\beta_n^{(0)} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\Big(\alpha_{k+1}\Lambda^{-}_{1,n,k} - \beta_{k+1}\Lambda^{-}_{2,n,k}\Big) = b_n \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{23}$$

$$-2\beta_0^{(0)} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\Big(\alpha_{k+1}\delta'_{-k} - \beta_{k+1}\delta''_{-k}\Big) = \frac{a'_0}{2}, \tag{24}$$

$$-2\beta_n^{(0)} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\Big(\alpha_{k+1}\Lambda^{+}_{1,n,k} - \beta_{k+1}\Lambda^{+}_{2,n,k}\Big) = a'_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{25}$$

$$-2\alpha_n^{(0)} - \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\Big(\alpha_{k+1}\Lambda^{-}_{2,n,k} + \beta_{k+1}\Lambda^{-}_{1,n,k}\Big) = b'_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{26}$$

where δ'_n, δ''_n *are, respectively, a real and an imaginary parts of coefficients* δ_n *in expression* (18): $\delta_n =: \delta'_n + i\delta''_n$ *for all* $n \in \mathbb{Z}$; $\Lambda^{\pm}_{1,n,k} := \delta'_{n-k} \pm \delta'_{-n-k}$, $\Lambda^{\pm}_{2,n,k} := \delta''_{n-k} \pm \delta''_{-n-k}$ *for* $n \in \mathbb{N}$ *and* $k \in \mathbb{N}_0$, *is solvable and its general solution belongs to the class* $\mathcal{E}$, *if, besides, the system of equations* (21) $-$ (26) *with* $a_k = a'_k = b_{k+1} = b'_{k+1} = 0$, $k = 0, 1, \ldots$, *is solvable and its general solution belongs to the class* $\mathcal{E}$.

Then a general solution of of the auxiliary (1-3)-problem is expressed by the following formula

$$\Phi_*(\tau) = \widetilde{F}(\tau) - \left(\frac{i}{2}\frac{\operatorname{Im}\omega(\tau)}{\omega'(\tau)}\,\widetilde{F}'(\tau) - \widetilde{F}_0(\tau)\right)\rho \qquad \forall \tau \in \mathcal{D}_1, \tag{27}$$

where

$$\widetilde{F}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \tau^n, \quad \widetilde{F}_0(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(0)} \tau^n \quad \forall \tau \in \mathcal{D}_1, \tag{28}$$

and an ordered quadruple of consequences $\big(\{\alpha^{(0)}\}_0, \{\beta^{(0)}\}_0, \{\alpha\}_0, \{\beta\}_1\big)$, *formed by real components* α_n, $\alpha_n^{(0)}$, $\beta_n^{(0)}$, β_{n+1}, $n = 0, 1, \ldots$, *of complex coefficients* $c_n = \alpha_n + i\beta_n$, $c_n^{(0)} = \alpha_n^{(0)} + i\beta_n^{(0)}$ *in the expression* (28), *is a general solution of the system* (21) $-$ (26).

Proof. Expansions (28) of the Taylor series hold for functions $\widetilde{F}$ and $\widetilde{F}_0$ in the disk $\mathcal{D}_1$ with unknown coefficients $c_n = \alpha_n + i\beta_n$, $c_n^{(0)} = \alpha_n^{(0)} + i\beta_n^{(0)}$, where $\alpha_n = \operatorname{Re} c_n$, $\beta_n = \operatorname{Im} c_n$, $\alpha_n^{(0)} = \operatorname{Re} c_n^{(0)}$, $\beta_n^{(0)} = \operatorname{Im} c_n^{(0)}$, $n = 0, 1, \ldots$.

It follows from (28) that

$$\widetilde{F}'(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}\,\tau^n \ \forall \tau \in \mathcal{D}_1. \tag{29}$$

Assume, that the series (28) and (29) are absolutely and uniformly convergent on $\overline{\mathcal{D}_1}$, and further, verify the validity of our assumption.

Using the following equalities for products of absolutely convergent on Γ_1 series $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\sigma^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k\sigma^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} h_{-k}\sigma^{-k}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\sigma^k \sum_{k=0}^{\infty} b_k\sigma^k = \sum_{n=0}^{\infty}\Bigl(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Bigr)\sigma^n,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\sigma^k \sum_{k=1}^{\infty} h_{-k}\sigma^{-k} = \sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{k=1}^{\infty} a_k h_{-k-n}\Bigr)\sigma^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\Bigl(\sum_{k=n}^{\infty} a_{k+1} h_{n-k-1}\Bigr)\sigma^n,$$

multiply series (29) and (18), obtain the equality

$$\widetilde{F}'(\sigma)\frac{\operatorname{Im}\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^*\sigma^n \quad \forall\sigma\in\Gamma_1, \tag{30}$$

where for any integer n:

$$c_n^* := \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}\delta_{n-k} =: c_{n,1}^* + ic_{n,2}^*,$$

$$c_{n,1}^* := \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\alpha_{k+1}\delta'_{n-k} - \beta_{k+1}\delta''_{n-k}\right), \tag{31}$$

$$c_{n,2}^* := \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\alpha_{k+1}\delta''_{n-k} + \beta_{k+1}\delta'_{n-k}\right). \tag{32}$$

Using the Moivre formula rewrite the equality (30) in the form

$$\begin{gathered}
\widetilde{F}'(\sigma)\frac{\operatorname{Im}\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = c_{0,1}^* + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_{-n,1}^* + c_{n,1}^*\right)\cos n\theta + \\
+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_{-n,2}^* - c_{n,2}^*\right)\sin n\theta + \\
+ic_{0,2}^* + i\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_{-n,2}^* + c_{n,2}^*\right)\cos n\theta + \\
+i\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_{n,1}^* - c_{-n,1}^*\right)\sin n\theta \quad \forall\sigma=\exp\{i\theta\}\in\Gamma_1.
\end{gathered} \tag{33}$$

Then using the equalities (3) deliver formulas for components V_1 and V_3 from the expression (13) on Γ_1:

$$V_1(\theta) := V_1(\sigma) = \alpha_0+2\alpha_0^{(0)}+c^*_{0,2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\alpha_n + 2\alpha_n^{(0)} + c^*_{-n,2} + c^*_{n,2}\Big)\cos n\theta+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(-\beta_n - 2\beta_n^{(0)} + c^*_{n,1} - c^*_{-n,1}\Big)\sin n\theta, \qquad (34)$$

$$V_3(\theta) := V_3(\sigma) = c^*_{0,1} - 2\beta_0^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(-2\beta_n^{(0)} + c^*_{-n,1} + c^*_{n,1}\Big)\cos n\theta+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(-2\alpha_n^{(0)} + c^*_{-n,2} - c^*_{n,2}\Big)\sin n\theta. \qquad (35)$$

Equating coefficients near $\cos n\theta$ and $\sin n\theta$, respectively, in the qualities (34) and (19), (35) and (20), receive, using the denotations (31) and (32), a system of equations (21) — (26) according to coefficients of required series (28).

Summarize obtained results, we have that restricting a solvability of the system (21) — (26) in the class $\mathcal{E}$, that means, firstly, a condition to the geometry of the domain D_ζ and, secondly, a condition to the choice of the boundary functions u_1 and u_3, obtain, that the series (28) and (29) are absolutely and uniformly convergent on $\overline{\mathcal{D}_1}$ and a function (27) is a general solution of the auxiliary (1-3)-problem. The theorem is proved.

Remark. A choice of the class $\mathcal{E}$ can be done by any another way, choosing conditions for functions of the class for which series (28) and (29) are absolutely convergent on Γ_1.

Theorem 3. *Let conditions of Theorem 1 are satisfied, then the formula*

$$\Phi(\zeta) \equiv \Phi_*(\tau) \quad \forall\zeta = x+ye_2 \in D_\zeta,\ \tau \in \mathcal{D}_1 : \omega(\tau) = z := x+ie_2 \in \mathbb{C} \quad (36)$$

generates a general solution of the (1-3)*-problem.*

Examples.

1. Let a domain D_ζ be a unit disk $\mathcal{D}_1$. Then a mapping ω is the identity mapping, i.e., $\omega(z) = z$ for all $z \in D_z$, $\operatorname{Im}\omega(\sigma) = \sin\theta$. The auxiliary (1-3)-problem coincides with the the (1-3)-problem for $\mathcal{D}_1$. Furthermore, $\delta''_{-1} = \frac{1}{2}$, $\delta''_1 = -\frac{1}{2}$, $\delta''_n = 0$ for another integer n, and $\delta'_k = 0$ for all integer k. It is easy to check, that for this particular case the system of equations (21) — (26) transforms to the system (22) — (31) from the paper [13] for $r = 1$, a condition of solvability of which can be written in the form $b_1 = a_1'$. The proposed method gives a required solution of the (1-3)-problem, for example, if boundary functions u_1 and u_3 satisfy conditions of Theorem 1 in the paper [13]. Note, that for our case in (17): $\upsilon_k = k^{-(1+\alpha)}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\alpha > 0$, and a general solution of the (1-3)-problem with zero data $u_1 = u_3 \equiv 0$ is a function $\Phi(\zeta) = i\,(b - ae_2 + c\zeta)$, where a, b and c are arbitrary real numbers.

2. Let a boundary of the domain D_ζ be the Pascal's limacon $D_\zeta := \{x + e_2 y\}$, where $x = R\left(\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta\right)$, $y = R\left(\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)$, $0 \le \theta < 2\pi$, and any fixed constant $R > 0$. Then a function ω has a form

$$\omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{1}{4}\zeta^2\right) \quad \forall \zeta \in \overline{D_\zeta}. \tag{37}$$

Consider the (1-3)-problem with boundary conditions, for which

$$a_k = a_k' = 0, k = 0, 1, 2, \ b_k = b_k' = 0, k = 1, 2, \tag{38}$$

and the following inclusions holds

$$\left(\{a'\}_0, \{b\}_1, \{a\}_0, \{b'\}_1\right) \in \mathcal{E}, \ \left(\{a\}_0, \{b'\}_1, \{a'\}_0, \{b\}_1, \right) \in \mathcal{E}. \tag{39}$$

In this case an expression (18) has a form

$$\frac{\operatorname{Im}\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = i\frac{1}{8}\,\sigma^{-2} + i\frac{7}{16}\,\sigma^{-1} - i\frac{7}{32} - i\frac{25}{64}\,\sigma + i\frac{9}{32}\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \sigma^n \,\forall\sigma \in \Gamma_1.$$

Then

$$\delta_k' = 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}, \ \delta_{-n}'' = 0 \ \forall n \in \{3, 4, \ldots\}, \tag{40}$$

$$\delta_{-2}'' = \frac{1}{8}, \ \delta_{-1}'' = \frac{7}{16}, \ \delta_0'' = -\frac{7}{32}, \ \delta_1'' = -\frac{25}{64}, \tag{41}$$

$$\delta_n'' = \frac{9}{32}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \ \forall n \in \{2, 3, \ldots\}. \tag{42}$$

Denote for any symbol variable υ the expression

$$\psi_n(\upsilon) := \frac{9}{32}\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k}\upsilon_{k+1} - \frac{25}{64}n\upsilon_n -$$

$$-\frac{7}{32}(n+1)\upsilon_{n+1}+\frac{7}{16}(n+2)\upsilon_{n+2}+\frac{1}{8}(n+3)\upsilon_{n+3}\,\forall n\ge 3. \qquad (43)$$

Taking into account relations $\Lambda^+_{1,n,k}=\Lambda^-_{1,n,k}=0$ for $n\in\mathbb{N}$ and $k\in\mathbb{N}_0$, $\Lambda^+_{2,n,k}=\Lambda^-_{2,n,k}=\delta''_{n-k}$ for $n\ge 3$ and $k\in\mathbb{N}_0$, formulas (38) — (43), obtain, that the system of equations (21) — (26) transforms to a form

$$\alpha_0+2\alpha_0^{(0)}-\frac{7}{32}\,\alpha_1+\frac{7}{8}\,\alpha_2+\frac{3}{8}\,\alpha_3=0, \qquad (44)$$

$$\frac{67}{64}\,\alpha_1+2\alpha_1^{(0)}-\frac{3}{16}\,\alpha_2+\frac{21}{16}\,\alpha_3+\frac{1}{2}\,\alpha_4=0, \qquad (45)$$

$$\alpha_2+2\alpha_2^{(0)}+\frac{25}{128}\,\alpha_1-\frac{25}{32}\,\alpha_2-\frac{21}{32}\,\alpha_3+\frac{7}{4}\,\alpha_4+\frac{5}{8}\,\alpha_5=0, \qquad (46)$$

$$\alpha_n+2\alpha_n^{(0)}+\psi_n(\alpha)=a_n\,\forall n\in\{3,4,\dots\}, \qquad (47)$$

$$\frac{11}{64}\,\beta_1+2\beta_1^{(0)}-\frac{11}{16}\,\beta_2+\frac{21}{16}\,\beta_3+\frac{1}{2}\beta_4=0, \qquad (48)$$

$$-\frac{7}{128}\,\beta_1+2\beta_2^{(0)}+\frac{7}{32}\,\beta_2-\frac{21}{32}\,\beta_3+\frac{7}{4}\,\beta_4+\frac{5}{8}\,\beta_5=0, \qquad (49)$$

$$\beta_n+2\beta_n^{(0)}+\psi_n(\beta)=-b_n\,\forall n\in\{3,4,\dots\}, \qquad (50)$$

$$2\beta_0^{(0)}-\frac{7}{32}\,\beta_1+\frac{7}{8}\,\beta_2+\frac{3}{8}\,\beta_3=0, \qquad (51)$$

$$2\beta_1^{(0)}+\frac{3}{64}\,\beta_1-\frac{3}{16}\,\beta_2+\frac{21}{16}\,\beta_3+\frac{1}{2}\,\beta_4=0, \qquad (52)$$

$$2\beta_2^{(0)}+\frac{25}{128}\,\beta_1-\frac{25}{32}\,\beta_2-\frac{21}{32}\,\beta_3+\frac{7}{4}\,\beta_4+\frac{5}{8}\,\beta_5=0, \qquad (53)$$

$$2\beta_n^{(0)}+\psi_n(\beta)=-a'_n\,\forall n\in\{3,4,\dots\}, \qquad (54)$$

$$2\alpha_1^{(0)}-\frac{53}{64}\,\alpha_1-\frac{11}{16}\,\alpha_2+\frac{21}{16}\,\alpha_3+\frac{1}{2}\,\alpha_4=0, \qquad (55)$$

$$2\alpha_2^{(0)}-\frac{7}{128}\,\alpha_1-\frac{25}{32}\,\alpha_2-\frac{21}{32}\,\alpha_3+\frac{7}{4}\,\alpha_4+\frac{5}{8}\,\alpha_5=0, \qquad (56)$$

$$2\alpha_n^{(0)}+\psi_n(\alpha)=-b'_n\,\forall n\in\{3,4,\dots\}. \qquad (57)$$

Solving obtained system (44) – (57) conclude, that a solution of the required (1-3)-problem has the form:

$$\Phi(\mathrm{Re}\tau+e_2\mathrm{Im}\tau)=\widetilde{F}(\tau)-\left(\frac{i}{2}\,Y(\tau)\,\widetilde{F}'(\tau)-\widetilde{F}_0(\tau)\right)\rho \qquad \forall\tau\in\mathcal{D}_1, \quad (58)$$

where coefficients of expansions (28) are expressed by the formulas

$$c_0 = -2A + iC \qquad \forall A \,\text{and}\, C \in \mathbb{R},$$

$$c_1 = 4iB,\ c_2 = iB \qquad \forall B \in \mathbb{R},$$

$$c_n = a_n + b_n' + i\left(a_n' - b_n\right), n = 3, 4, \dots ,$$

$$c_0^{(0)} = -\frac{3}{16}\left(a_3 + b_3'\right) + A + i\frac{3}{16}\left(b_3 - a_3'\right) \qquad \forall A \in \mathbb{R},$$

$$c_1^{(0)} = -\frac{21}{32}\left(a_3 + b_3'\right) - \frac{1}{4}\left(a_4 + b_4'\right) + i\left(\frac{21}{32}\left(b_3 - a_3'\right) + \frac{1}{8}\left(b_4 - a_4'\right)\right),$$

$$c_2^{(0)} = \frac{21}{64}\left(a_3 + b_3'\right) - \frac{7}{8}\left(a_4 + b_4'\right) - \frac{5}{16}\left(a_5 + b_5'\right) +$$

$$+i\left(\frac{21}{64}\left(a_3' - b_3\right) + \frac{7}{8}\left(b_4 - a_4'\right) + \frac{5}{16}\left(b_5 - a_5'\right)\right),$$

$$c_3^{(0)} = \frac{75}{128}\,a_3 + \frac{11}{128}\,b_3' + \frac{7}{16}\left(a_4 + b_4'\right) - \frac{35}{32}\left(a_5 + b_5'\right) - \frac{3}{8}\left(a_6 + b_6'\right) +$$

$$+i\left(\frac{11}{128}\,a_3' - \frac{75}{128}\,b_3 + \frac{7}{16}\left(a_4' - b_4\right) - \frac{35}{32}\left(a_5' - b_5\right) - \frac{3}{8}\left(a_6' - b_6\right)\right),$$

$$c_4^{(0)} = -\frac{27}{256}\left(a_3 + b_3'\right) + \frac{25a_4 + 9b_4'}{32} + \frac{35}{64}\left(a_5 + b_5'\right) -$$

$$-\frac{21\left(a_6 + b_6'\right) 7\left(a_7 + b_7'\right)}{16} + i\left(\frac{27}{256}\left(b_3 - a_3'\right) + \frac{11a_4' - 25b_4}{32} +\right.$$

$$\left. + \frac{35}{64}\left(a_5' - b_5\right) - \frac{21}{16}\left(a_6' - b_6\right) - \frac{7}{16}\left(a_7' - b_7\right)\right),$$

$$c_n^{(0)} = \frac{9}{32}\sum_{k=2}^{n-2}(k+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}\left(a_{k+1} + b_{k+1}'\right) + \frac{25}{128}\,na_n +$$

$$+\frac{25n - 64}{128}\,b_n' + \frac{7}{64}(n+1)\left(a_{n+1} + b_{n+1}'\right) -$$

$$-\frac{7}{32}(n+2)\left(a_{n+2} + b_{n+2}'\right) - \frac{1}{16}(n+3)\left(a_{n+3} + b_{n+3}'\right) +$$

$$+i\left(\frac{9}{32}\sum_{k=2}^{n-2}(k+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}\left(a_{k+1}' - b_{k+1}\right) + \right.$$

$$+\frac{25n-64}{128}\,a'_n-\frac{25}{128}\,nb_n+\frac{7}{64}(n+1)\left(a'_{n+1}-b_{n+1}\right)-$$

$$\left.-\frac{7}{32}(n+2)\left(a'_{n+2}-b_{n+2}\right)-\frac{1}{16}(n+3)\left(a'_{n+3}-b_{n+3}\right)\right)\ \forall n\geq 5.$$

This research is partially supported by Grant of Ministry of Education and Science of Ukraine (Project No. 0112U000374).

References

[1] I.P. Melnichenko, *Biharmonic bases in algebras of the second rank*. Ukr. Math. J., **38**, (1986), 224—226; transl. from Ukr. Mat. Zh., **38**, No. 2, (1986), 252–254 (in Russian).

[2] V.F. Kovalev, I.P. Melnichenko, *Biharmonic functions on the biharmonic plane*. Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR, Ser. A., **8**, (1981), 25–27 (in Russian).

[3] S.A. Plaksa, S.V. Gryshchuk, *Monogenic functions in a biharmonic plane*. Reports Acad. Sci. Ukraine, No. 12, (2009), 13–20 (in Russian).

[4] S.A. Plaksa, S.V. Gryshchuk, *Basic Properties of Monogenic Functions in a Biharmonic Plane*, in "Complex Analysis and Dynamical Systems V", Contemporary Mathematics, **591**, (2013), Amer. Math. Soc.: Providence, RI, 127–134.

[5] G. Laville, I. Ramadanoff, *Holomorphic Cliffordian functions*. Adv. Appl. Clifford Algebras, **8**, No. 2., (1998), 323–340.

[6] V.V. Karachik, N.A. Antropova, *Polynomial solutions of the Dirichlet problem for the biharmonic equation in the ball*. Differential Equations. **49**, No. 2, (2013), 251–256; Differentsial'nye Uravneniya **49**, No. 2, (2013), 250–254.

[7] V.F. Kovalev, *Biharmonic Schwarz problem*. Preprint No. 86.16, Acad. Sci. Ukrain. SSR, Kiev, 1986 (in Russian).

[8] S.A. Plaksa, S.V. Gryshchuk, *Schwartz–type integrals in a biharmonic plane*. Intern. J. of Pure and Appl. Math, **83**, No. 1, (2013), 193–211.

[9] V.I. Smirnov, *A Course of Higher Mathematics*, Vol. 3, Part 2, Oxford: Pergamon Press., 1964.

[10] N.I. Muskhelishvili, *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Fundamental equations, plane theory of elasticity, torsion and bending*. English transl. from the 4th Russian edition (R. M. Radok), Leiden: Noordhoff International Publishing, 1977.

[11] S.A. Plaksa, S.V. Gryshchuk, *Monogenic functions in a biharmonic algebra.* Ukr. Math. J., **61**, No. 12, (2009), 1865–1876; transl. from Ukr. Mat. Jh., **61**, No. 12, (2009), 1587–1596 (in Russian).

[12] S.A. Plaksa, S.V. Gryshchuk, V.S. Shpakivskyi, *Commutative algebras of monogenic functions associated with classic equations of mathematical physic*, in "Complex Analysis and Dynamical Systems IV", Contemporary Mathematics, **553**, (2011), Amer. Math. Soc.: Providence, RI, 245–258.

[13] S.V. Gryshchuk, *Power series in a boundary value problem for monogenic functions of the biharmonic variable in a disk.* Zb. Pr. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine (Proc. Instit. of Math. Acad. Sci. Ukraine), **10**, No. 4–5, (2013), 432–441 (in Russian).

Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 105–119

УДК 533.7+538.93

P. Kostrobij [1]***, O. Viznovych*** [1]***, B. Markiv*** [2]***,***
M. Tokarchuk [1,2]

[1] *National University "Lviv Polytechnic", Lviv, Ukraine*
[2] *Institute for Condensed Matter Physics*
of the National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, Ukraine

mtok2010@ukr.net

Generalized kinetic equations for dense gases and liquids far from equilibrium in Renyi statistics

Dedicated to the 80 th anniversary of Prof. D.Ya. Petrina

Based on the Zubarev nonequilibrium statistical operator method and the maximum entropy principle for the Renyi entropy the nonequilibrium statistical operator and the generalized kinetic equations for the nonequilibrium one- and two-particle distribution functions are obtained for description of kinetic processes in gases and liquids far from equilibrium.

Для опису кінетичних процесів у газах та рідинах далеких від рівноваги на основі методу нерівноважного статистичного оператора Зубарєва та принципу максимуму ентропії Рені отримано нерівноважний статистичний оператор та узагальнені кінетичні рівняння для нерівноважних одночастинкової та двочастинкової функцій розподілу частинок.

1 Introduction

The ideas of D.Ya. Petrina for investigation of urgent problems in statistical theory of many-particle system based on the strict mathematical approach to the Bogoliubov equations [1, 2, 3, 4] remain important

© Institute of Mathematics, 2014

nowadays. The study of nonequilibrium processes in gases and liquids far from equilibrium or in finite quantum systems (nanosystems) are among them. These investigations are actively developed by the followers of D.Ya. Petrina [5, 6, 7, 8].

Different models and approaches are applied for the study of nonlinear kinetic fluctuations in dense gases, liquids and plasma far from equilibrium with the typical long-range interactions which remains urgent in statistical theory of nonequilibrium processes [9, 10, 11, 12, 13, 14].

In the present paper, for description of nonequilibrium processes in dense gases and liquids we propose to use the Renyi entropy which depends on parameter $q\,(0<q\leqslant 1)$ and coincide with the Shannon-Gibbs entropy at $q=1$. In reference [14] based on the Zubarev nonequilibrium statistical operator (NSO) method [15, 16] and the maximum entropy principle for the Renyi entropy there were obtained the NSO and the generalized transport equations for the parameters of the reduced-description of nonequilibrium processes in extensive statistical mechanics. Here, we apply this approach to description of kinetic processes in dense gases and liquids far from equilibrium, when the nonequilibrium one- and two-particle distribution functions are chosen for the reduced-description parameters.

2 Zubarev nonequilibrium statistical operator in Renyi statistics

Within the framework of the Zubarev NSO method, when the basic parameters of a reduced description $\langle\hat{P}_n\rangle^t$ are selected according to N.N. Bogoliubov, the nonequilibrium statistical operator $\rho\left(x_1,\ldots,x_N;t\right)=\rho\left(x^N;t\right)$ can be presented in general form as a solution of Liouville equation with taking into account a projection [15, 16]:

$$\begin{aligned}\rho(x^N;t) &= \rho_{rel}(x^N;t)\\ &- \int_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon(t'-t)}T(t,t')[1-P_{rel}(t')]iL_N\rho_{rel}(x^N;t')dt'.\end{aligned} \tag{1}$$

Here, $T\left(t,t'\right)=\exp_+\left\{-\int_{t'}^{t}\left[1-P_{rel}\left(t'\right)\right]iL_N dt'\right\}$ is the evolution operator with regard to projection, $\exp_+$ is the ordered exponential, iL_N is the Liouville operator for a system of interacting particles, which in classical case has the following form:

$$iL_N = \sum_{j=1}^{N} \frac{\vec{p}_j}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}_j} - \frac{1}{2} \sum_{l \neq j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_j} \Phi\left(r_{lj}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \vec{p}_j} - \frac{\partial}{\partial \vec{p}_l} \right).$$

We use the following notations: $x_j = \{\vec{p}_j, \vec{r}_j\}$ are the phase variables of the particle j, $\Phi\left(r_{lj}\right)$ is the interaction energy of two particles, $\vec{p}_j$ is the j-particle momentum and m its mass, $r_{lj} = |\vec{r}_l - \vec{r}_j|$ the distance between a pair of interacting particles. $P_{rel}(t')$ is the generalized Kawasaki–Gunton projection operator whose structure depends on the form of the relevant statistical operator:

$$P_{rel}\rho' = \left(\rho_{rel}(t) - \sum_n \frac{\delta \rho_{rel}(t)}{\delta \langle \hat{P}_n \rangle^t} \langle \hat{P}_n \rangle^t \right) \int d\Gamma_N \rho' + \sum_n \frac{\delta \rho_{rel}(t)}{\delta \langle \hat{P}_n \rangle^t} \int d\Gamma_N \hat{P}_n \rho'.$$

$\rho_{rel}(x^N; t')$ is the relevant statistical operator which is equal to $\rho(x^N; t)$ at the initial moment of time. We will determine $\rho_{rel}(x^N; t')$ using the Lagrange method from the condition of entropy functional maximum for the Renyi entropy [14]

$$S_R(\rho) = \frac{1}{1-q} \ln \int d\Gamma_N \rho^q(t).$$

The corresponding functional at fixed parameters of the reduced description, taking into account the normalization condition, has the following form:

$$L_R(\rho) = \frac{1}{1-q} \ln \int d\Gamma_N \rho^q(t) - \alpha \int d\Gamma_N \rho(t) - \sum_n F_n(t) \int d\Gamma_N \hat{P}_n \rho(t),$$

where, $F_n(t)$ are the Lagrange multipliers. Equalizing its functional derivative to zero $\frac{\delta L_R(\rho)}{\delta \rho} = 0$ and determining parameter $\alpha = \frac{q}{1-q} - \sum_n F_n(t) \langle \hat{P}_n \rangle^t$ we obtain the relevant statistical operator in the form:

$$\rho_{rel}(t) = \frac{1}{Z_R(t)} \left[1 - \frac{q-1}{q} \sum_n F_n(t) \delta \hat{P}_n \right]^{\frac{1}{q-1}}, \tag{2}$$

where

$$Z_R(t) = \int d\Gamma_N \left[1 - \frac{q-1}{q} \sum_n F_n(t) \delta \hat{P}_n \right]^{\frac{1}{q-1}}$$

is the partition function, $\delta\hat{P}_n = \hat{P}_n - \langle\hat{P}_n\rangle^t$. The Lagrange multipliers $F_n(t)$ are defined from the self-consistency conditions:

$$\langle\hat{P}_n\rangle^t = \langle\hat{P}_n\rangle^t_{rel}. \tag{3}$$

The variation derivative of the relevant statistical operator can be presented in the form:

$$\frac{\delta\rho_{rel}(t)}{\delta\langle\hat{P}_m\rangle^t} = \rho_{rel}(t)\delta\left[\frac{1}{q}\psi^{-1}(t)\left(F_m(t) - \sum_n \frac{\delta F_n(t)}{\delta\langle\hat{P}_m\rangle^t}\delta\hat{P}_n\right)\right],$$

where $\delta[\ldots] = [\ldots] - \langle[\ldots]\rangle^t_{rel}$ and we use the notation

$$\psi(t) = 1 - \frac{q-1}{q}\sum_n F_n(t)\delta\hat{P}_n. \tag{4}$$

We calculate the derivatives of the Lagrange multipliers with regard to the reduced-description parameters in the following way:

$$\frac{\delta F_n(t)}{\delta\langle\hat{P}_m\rangle^t} = \left(\frac{\delta\langle\hat{P}_m\rangle^t}{\delta F_n(t)}\right)^{-1}.$$

This can be done in general case. Thus,

$$\frac{\delta\langle\hat{P}_m\rangle^t}{\delta F_n(t)} = \int d\Gamma_N \hat{P}_m \frac{\delta\rho_{rel}(t)}{\delta F_n(t)}$$

and after calculating $\frac{\delta\rho_{rel}(t)}{\delta F_n(t)}$ in the right-hand side of relation we obtain the set of equations for the desired derivatives

$$\frac{\delta\langle\hat{P}_m\rangle^t}{\delta F_n(t)} = \langle\delta\hat{P}_m\frac{1}{q}\psi^{-1}(t)\rangle^t_{rel}\sum_l \frac{\delta\langle\hat{P}_l\rangle^t}{\delta F_n(t)} - \langle\delta\hat{P}_m\frac{1}{q}\psi^{-1}(t)\delta\hat{P}_n\rangle^t_{rel}.$$

The solution in matrix form is

$$\frac{\delta\langle\hat{P}\rangle^t}{\delta F(t)} = -\left[I - \langle\delta\hat{P}\frac{1}{q}\psi^{-1}(t)\rangle^t_{rel}F(t)\right]^{-1}\langle\delta\hat{P}\frac{1}{q}\psi^{-1}(t)\delta\hat{P}\rangle^t_{rel} = f(t),$$

where

$$\frac{\delta\langle\hat{P}_m\rangle^t}{\delta F_n(t)} = \left(\frac{\delta\langle\hat{P}\rangle^t}{\delta F(t)}\right)_{mn} = f_{mn}(t).$$

Thus, the functional derivative can be written in the form:

$$\frac{\delta\rho_{rel}(t)}{\delta\langle\hat{P}_m\rangle^t} = \rho_{rel}(t)\delta\left[\frac{1}{q}\psi^{-1}(t)\left(F_m(t) - \sum_n f_{mn}^{-1}\delta\hat{P}_n\right)\right].$$

Then, the Kawasaki–Gunton projection operator has the following structure:

$$\begin{aligned}
P_{rel}(t)\rho' &= \rho_{rel}(t)\int d\Gamma_N \rho' \\
&+ \sum_m \rho_{rel}(t)\delta\left[\frac{1}{q}\psi^{-1}(t)\left(F_m(t) + \sum_n f_{mn}^{-1}(t)\delta\hat{P}_n\right)\right] \\
&\times \left(\int d\Gamma_N \hat{P}_m \rho' - \langle\hat{P}_m\rangle^t \int d\Gamma_N \rho'\right).
\end{aligned}$$

It is further necessary to explore an action of the operators $P_{rel}(t)iL_N$ on the relevant statistical operator. Since

$$iL_N\rho_{rel}(t) = -\rho_{rel}(t)\frac{1}{q}\psi^{-1}(t)\sum_n F_n(t)\dot{\hat{P}}_n = A(t)\rho_{rel}(t),$$

then $P_{rel}(t)iL_N\rho_{rel}(t) = P_{rel}(t)A(t)\rho_{rel}(t) = [P(t)A(t)]\,\rho_{rel}(t)$, where $P(t)$ is the projection operator which now acts on dynamic variables:

$$\begin{aligned}
P(t)\ldots &= \langle\ldots\rangle_{rel}^t \\
&+ \sum_m \delta\left[\frac{1}{q}\psi^{-1}(t)\left(F_m(t) + \sum_n f_{mn}^{-1}(t)\delta\hat{P}_n\right)\right]\langle\ldots\delta\hat{P}_m\rangle_{rel}^t.
\end{aligned}$$

Since

$$A(t) = -\frac{1}{q}\psi^{-1}(t)\sum_n F_n(t)\dot{\hat{P}}_n,$$

we can present $[1 - P_{rel}(t)]\,iL_N\rho_{rel}(t)$ as follows:

$$\begin{aligned}
[1 - P_{rel}(t)]\,iL_N\rho_{rel}(t) &= [1 - P(t)]\,iL_N\rho_{rel}(t) \\
&= -\sum_n I_n(t)F_n(t)\rho_{rel}(t),
\end{aligned} \tag{5}$$

where

$$I_n(t) = [1 - P(t)]\,\frac{1}{q}\psi^{-1}(t)\dot{\hat{P}}_n$$

are the generalized flows. Taking into account (5), we can now write down an explicit expression for the nonequilibrium statistical operator (1):

$$\begin{aligned} \rho(x^N;t) &= \rho_{rel}(x^N;t) \\ &- \sum_n \int_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon(t'-t)} T(t,t') I_n(t') F_n(t') \rho_{rel}(x^N;t') dt'. \end{aligned} \tag{6}$$

This allows us to obtain the generalized transport equations for the reduced-description parameters. They can be presented in the form:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \hat{P}_m\rangle^t = \langle \dot{\hat{P}}_m\rangle^t_{rel} + \sum_n \int_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon(t'-t)} \varphi_{mn}(t,t') F_n(t') dt', \tag{7}$$

where

$$\varphi_{mn}(t,t') = \int d\Gamma_N \dot{\hat{P}}_m T(t,t') I_n(t') \rho_{rel}(t') \tag{8}$$

are the generalized transport kernels (memory functions) – the time correlation functions describing the dissipative processes in the system. They are built on the generalized flows $I_n(t)$. Transport equations (7) describe non-Markovian processes and when $\varphi_{mn}(t,t') \approx \varphi_{mn}\delta(t-t')$ describe Markovian processes. The set of transport equations is not closed. The nonequilibrium Lagrange multipliers in it (the nonequilibrium thermodynamic parameters in the case of hydrodynamic description) are determined from the self-consistency conditions (3). From this point of view, the set of transport equations is closed. Nonequilibrium statistical operator (6) and transport equations (7) compose a complete instrument for description of nonequilibrium processes when the reduced-description parameters $\langle \hat{P}_n\rangle^t$ are selected.

In the following section we apply the presented approach to description of nonlinear kinetic fluctuations in gases and liquids far from equilibrium.

3 Generalized kinetic equations in Renyi statistics

For description of kinetic processes in classical gases and liquids far from equilibrium the nonequilibrium one- and two-particle distribution functions can be selected as the basic parameters of the reduced description

$$f_1(x;t) = \langle \hat{n}_1(x)\rangle^t, \qquad f_2(x,x';t) = \langle \hat{n}_2(x,x')\rangle^t, \tag{9}$$

where

$$\hat{n}_1(x) = \sum_{j=1}^{N} \delta(x - x_j), \qquad \hat{n}_2(x, x') = \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \delta(x - x_j)\delta(x' - x_l)$$

are the microscopic phase densities of N particles in volume V. The latter completely satisfy conservation laws of particles density, momentum and energy since they define microscopic densities of particles number, momentum and energy:

$$\hat{n}(\vec{r}) = \int d\vec{p}\, \hat{n}_1(\vec{r}, \vec{p}), \qquad \hat{\vec{p}}(\vec{r}) = \int d\vec{p}\, \hat{n}_1(\vec{r}, \vec{p})\, \vec{p},$$

$$\hat{\varepsilon}^{kin}(\vec{r}) = \int d\vec{p}\, \hat{n}_1(\vec{r}, \vec{p}) \frac{p^2}{2m},$$

$$\hat{\varepsilon}^{int}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \int d\vec{p} \int d\vec{p}' \int d\vec{r}'\, \Phi(|\vec{r} - \vec{r}'|) \hat{n}_2(\vec{r}, \vec{p}; \vec{r}', \vec{p}')$$

and

$$\langle \hat{n}(\vec{r}) \rangle^t = \int d\vec{p} f_1(\vec{r}, \vec{p}; t), \qquad \langle \hat{\vec{p}}(\vec{r}) \rangle^t = \int d\vec{p} f_1(\vec{r}, \vec{p}; t) \vec{p},$$

$$\langle \hat{\varepsilon}^{kin}(\vec{r}) \rangle^t = \int d\vec{p} f_1(\vec{r}, \vec{p}; t) \frac{p^2}{2m},$$

$$\langle \hat{\varepsilon}^{int}(\vec{r}) \rangle^t = \frac{1}{2} \int d\vec{p} \int d\vec{p}' \int d\vec{r}'\, \Phi(|\vec{r} - \vec{r}'|) f_2(\vec{r}, \vec{p}; \vec{r}', \vec{p}'; t).$$

Conservation laws for average particles number, momentum and total energy have the following form:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{n}(\vec{r}) \rangle^t = -\frac{1}{m} \vec{\nabla} \cdot \langle \hat{\vec{p}}(\vec{r}) \rangle^t, \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{\vec{p}}(\vec{r}) \rangle^t = -\vec{\nabla} : \left(\langle \hat{\overleftrightarrow{T}}^{kin}(\vec{r}) \rangle^t + \langle \hat{\overleftrightarrow{T}}^{int}(\vec{r}) \rangle^t \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{\varepsilon}(\vec{r}) \rangle^t = -\vec{\nabla} \cdot \left(\langle \hat{\vec{j}}_E{}^{kin}(\vec{r}) \rangle^t + \langle \hat{\vec{j}}_E{}^{int}(\vec{r}) \rangle^t \right),$$

where $\langle \hat{\varepsilon}(\vec{r}) \rangle^t = \langle \hat{\varepsilon}^{kin}(\vec{r}) \rangle^t + \langle \hat{\varepsilon}^{int}(\vec{r}) \rangle^t$ is the nonequilibrium average value of total energy density and $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$.

$$\langle \hat{\overleftrightarrow{T}}^{kin}(\vec{r}) \rangle^t = \int d\vec{p}\, \frac{\vec{p}\,\vec{p}}{m} f_1(\vec{r}, \vec{p}; t)$$

is the nonequilibrium average value of the kinetic part of stress tensor density,

$$\begin{aligned}\langle \hat{\overset{\leftrightarrow}{T}}{}^{int}(\vec{r})\rangle^t &= \frac{1}{2}\int d\vec{p}\int d\vec{p}'\int d\vec{r}'\frac{\partial}{\partial|\vec{r}-\vec{r}'|}\Phi(|\vec{r}-\vec{r}'|) \\ &\times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}f_2(\vec{r},\vec{r}';\vec{p},\vec{p}';t)\end{aligned} \tag{11}$$

is the nonequilibrium average value of the potential part of stress tensor density,

$$\langle \hat{\vec{j}}{}_E^{kin}(\vec{r})\rangle^t = \int d\vec{p}\,\frac{p^2}{2m}\,\vec{p}\,f_1(\vec{r},\vec{p};t)$$

is the nonequilibrium average value of the kinetic part of energy flow density,

$$\begin{aligned}\langle \hat{\vec{j}}{}_E^{int}(\vec{r})\rangle^t &= \int d\vec{p}\int d\vec{p}'\int d\vec{r}'\Big[\frac{\vec{p}}{m}\Phi(|\vec{r}-\vec{r}'|) \\ &\quad -\Phi(|\vec{r}-\vec{r}'|)\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\Big]f_2(\vec{r},\vec{r}';\vec{p},\vec{p}';t)\end{aligned}$$

is the nonequilibrium average value of the potential part of energy flow density. It follows from the above relations that the nonequilibrium one-particle distribution function defines the macroscopic nonequilibrium densities of particles number, momentum as well as kinetic part of total energy, stress tensor and energy flow. Whereas, the two-particle nonequilibrium distribution function defines potential part of total energy, stress tensor and energy flow. Thus, in systems far from equilibrium the nonlinear hydrodynamic fluctuations are caused by the nonlinear fluctuations of nonequilibrium one- and two-particle distribution functions for which the kinetic equations should be built. Therefore, in the case when the nonequilibrium one- and two-particle distribution functions $f_1(x;t) = \langle \hat{n}_1(x)\rangle^t$ and $f_2(x,x';t) = \langle \hat{n}_2(x,x')\rangle^t$ are selected as the parameters of the reduced description, according to (2) the relevant distribution function has the following form:

$$\begin{aligned}\rho_{rel}(t) = \frac{1}{Z_R(t)}\Big\{1 &- \frac{q-1}{q}\Big[\int dx a(x;t)\delta\hat{n}_1(x;t) \\ &+ \int dx\int dx' b(x,x';t)\delta\hat{n}_2(x,x';t)\Big]\Big\}^{\frac{1}{q-1}},\end{aligned} \tag{12}$$

where

$$Z_R(t) = \int d\Gamma_N \Big\{ 1 \quad - \quad \frac{q-1}{q} \Big[\int dx a(x;t) \delta\hat{n}_1(x;t) \\ + \quad \int dx \int dx' b(x,x';t) \delta\hat{n}_2(x,x';t) \Big] \Big\}^{\frac{1}{q-1}}$$

is the partition function of the relevant distribution function. The parameters $a(x;t)$ and $b(x,x';t)$ are determined from the self-consistency conditions:

$$\langle \hat{n}_1(x) \rangle^t = \langle \hat{n}_1(x) \rangle^t_{rel}, \qquad \langle \hat{n}_2(x,x') \rangle^t = \langle \hat{n}_2(x,x') \rangle^t_{rel}. \tag{13}$$

The relevant distribution function (12) can be presented in a slightly different way

$$\rho_{rel}(t) = \frac{1}{Z_R(t)} \Big\{ 1 \quad - \quad \frac{q-1}{q} \Big[\int dx a'(x;t) \hat{n}_1(x) \\ + \quad \int dx \int dx' b'(x,x';t) \hat{n}_2(x,x') \Big] \Big\}^{\frac{1}{q-1}} \tag{14}$$

writing down the Lagrange parameters in the form:

$$a'(x;t) = a(x;t) \Big\{ 1 + \frac{q-1}{q} \\ \times \Big[\int dx a(x;t) f_1(x;t) + \int dx \int dx' b(x,x';t) f_2(x,x';t) \Big] \Big\}^{-1},$$

$$b'(x,x';t) = b(x,x';t) \Big\{ 1 + \frac{q-1}{q} \\ \times \Big[\int dx a(x;t) f_1(x;t) + \int dx \int dx' b(x,x';t) f_2(x,x';t) \Big] \Big\}^{-1}.$$

It is important to note that in the case of $q = 1$, $a'(x;t) = a(x;t)$, $b'(x,x';t) = b(x,x';t)$ and we obtain the relevant distribution function corresponding to Gibbs statistics.

Now we can present the nonequilibrium statistical operator as follows:

$$\begin{aligned}\rho(t) \quad = \quad & \rho_{rel}(t) + \int dx' \int_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon(t'-t)} T(t,t') a(x';t') I_n^{(1)}(x';t') \rho_{rel}(t) dt' \qquad (15)\\ + \quad & \int dx' \int dx'' \int_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon(t'-t)} T(t,t') b(x',x'';t') I_n^{(2)}(x',x'';t') \rho_{rel}(t) dt'.\end{aligned}$$

Here,

$$I_n^{(1)}(x;t) = [1 - P(t)] \frac{1}{q} \psi^{-1}(t) i L_N \hat{n}_1(x),$$

$$I_n^{(2)}(x,x';t) = [1 - P(t)] \frac{1}{q} \psi^{-1}(t) i L_N \hat{n}_2(x,x')$$

are the generalized flows in which the function $\psi(t)$ equals to

$$\psi(t) = 1 - \frac{q-1}{q} \left[\int dx\, a(x;t) \delta\hat{n}_1(x;t) + \int dx \int dx' b(x,x';t) \delta\hat{n}_2(x,x';t) \right].$$

Using the NSO (15) we obtain a set of the generalized kinetic equations for the reduced-description parameters (9) $f_1(x;t) = \langle \hat{n}_1(x) \rangle^t$ and $f_2(x,x';t) = \langle \hat{n}_2(x,x') \rangle^t$ according to (7):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{n}_1(x) \rangle^t = & \int dx' \Phi_{nn}^{11}(x,x';t) a(x';t) \qquad (16)\\ & + \int dx' \int dx'' \Phi_{nn}^{12}(x;x',x'';t) b(x',x'';t)\\ & + \int dx' \int_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon(t'-t)} \varphi_{nn}^{11}(x,x';t,t') a(x';t') dt'\\ & + \int dx' \int dx'' \int_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon(t'-t)} \varphi_{nn}^{12}(x;x',x'';t,t') b(x',x'';t') dt',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{n}_2(x,x') \rangle^t = & \int dx'' \Phi_{nn}^{21}(x,x';x'';t) a(x'';t) \qquad (17)\\ & + \int dx'' \int dx''' \Phi_{nn}^{22}(x;x';x'',x''';t) b(x'',x''';t)\\ & + \int dx'' \int_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon(t'-t)} \varphi_{nn}^{21}(x,x';x''t,t') a(x'';t') dt'\\ & + \int dx'' \int dx''' \int_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon(t'-t)} \varphi_{nn}^{22}(x;x';x'',x''';t,t') b(x'',x''';t') dt'.\end{aligned}$$

Here,

$$\Phi_{pp}^{\alpha\beta}(x,x';t) = \int d\Gamma_N p_\alpha(x)\frac{1}{q}\psi^{-1}iL_N p_\beta(x')\rho_{rel}(x^N;t), \tag{18}$$

$$\varphi_{I_pI_p}^{\alpha\beta}(x;x';t,t') = \int d\Gamma_N iL_N p_\alpha(x)T(t,t')I_p^\beta(x';t')\rho_{rel}(x^N;t'), \tag{19}$$

are the kinetic transport kernels, where we use the notation $p_\alpha(x) = \{\hat{n}_1(x),\hat{n}_2(x,x')\}$. Neglecting the two-particle correlation at $q=1$ the generalized kinetic equation in Renyi statistics transforms into the kinetic equation within Gibbs statistics [16] with the transport kernel calculated using the relevant distribution function $\rho_{rel}(t) = \prod_{j=1}^{N}\frac{f_1(x_j;t)}{e}$. In this case, at $q=1$, within the NSO method [15, 16] the Liouville equation should be solved with the boundary condition

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x^N;t) + iL_N\rho(x^N;t) = -\varepsilon\left(\rho(x^N;t) - \prod_{j=1}^{N}\frac{f_1(x_j;t)}{e}\right),$$

that corresponds to the Bogolyubov hypothesis of weakening of correlations between particles.

For a more detailed calculation of structure of correlation functions (18) and transport kernels (19) let us consider an action of the Liouville operator on $\hat{n}_1(x)$ and $\hat{n}_2(x,x')$:

$$iL_N\hat{n}_1(x) = -\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\cdot\frac{1}{m}\hat{\vec{j}}(\vec{r},\vec{p}) + \frac{\partial}{\partial\vec{p}}\cdot\hat{\vec{F}}(\vec{r},\vec{p}), \tag{20}$$

where

$$\hat{\vec{j}}(\vec{r},\vec{p}) = \sum_{j=1}^{N}\vec{p}_j\delta(\vec{r}-\vec{r}_j)\delta(\vec{p}-\vec{p}_j) \tag{21}$$

is the microscopic momentum density in the space of coordinates and impulses,

$$\hat{\vec{F}}(\vec{r},\vec{p}) = \sum_{l\neq j}\frac{\partial}{\partial\vec{r}_j}\Phi(|\vec{r}_j-\vec{r}_l|)\delta(\vec{r}-\vec{r}_j)\delta(\vec{p}-\vec{p}_j) \tag{22}$$

is the microscopic force density in the space of coordinates and impulses.

$$\begin{aligned} iL_N\hat{n}_2(x,x') &= -\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\cdot\frac{1}{m}\hat{\vec{j}}(\vec{r},\vec{p})\hat{n}_1(x') - \hat{n}_1(x)\frac{\partial}{\partial\vec{r}'}\cdot\frac{1}{m}\hat{\vec{j}}(\vec{r}',\vec{p}') \\ &+\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\cdot\hat{\vec{F}}(\vec{r},\vec{p})\hat{n}_1(x') + \hat{n}_1(x)\frac{\partial}{\partial\vec{p}'}\cdot\hat{\vec{F}}(\vec{r}',\vec{p}'). \end{aligned} \tag{23}$$

Taking into account calculations (20)-(23) we obtain, particularly:

$$\Phi^{11}_{nn}(x,x';t) = \left[\Omega_{nj}(x,x';t)\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}'} - \Omega_{nF}(x,x';t)\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{p}'}\right], \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{11}_{nn}(x,x';t,t') = -\Bigg[&\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\cdot D_{jj}(x,x';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}'} \\ &-\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\cdot D_{Fj}(x,x';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}'} - \frac{\partial}{\partial\vec{r}}\cdot D_{jF}(x,x';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{p}'} \\ &+\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\cdot D_{FF}(x,x';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{p}'}\Bigg],\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}&\varphi^{22}_{nn}(x,x',x'',x''';t,t') = \\ &-\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\cdot\left[D_{jnjn}(x,x',x'',x''';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}''} + D_{jnnj}(x,x',x'',x''';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}'''}\right] \\ &-\frac{\partial}{\partial\vec{r}'}\cdot\left[D_{njjn}(x,x',x'',x''';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}''} + D_{njnj}(x,x',x'',x''';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}'''}\right] \\ &+\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\cdot\left[D_{Fnjn}(x,x',x'',x''';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}''} + D_{Fnnj}(x,x',x'',x''';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}'''}\right] \\ &+\frac{\partial}{\partial\vec{p}'}\cdot\left[D_{nFjn}(x,x',x'',x''';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}''} + D_{nFnj}(x,x',x'',x''';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}'''}\right] \\ &+\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\cdot\left[D_{jnFn}(x,x',x'',x''';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{p}''} + D_{jnnF}(x,x',x'',x''';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{p}'''}\right] \\ &+\frac{\partial}{\partial\vec{r}'}\cdot\left[D_{njFn}(x,x',x'',x''';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{p}''} + D_{njnF}(x,x',x'',x''';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{p}'''}\right] \\ &-\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\cdot\left[D_{FnFn}(x,x',x'',x'';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{p}''} + D_{FnnF}(x,x',x'',x''';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{p}'''}\right] \\ &-\frac{\partial}{\partial\vec{p}'}\cdot\left[D_{nFFn}(x,x',x'',x'';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{p}''} + D_{nFnF}(x,x',x'',x''';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{p}'''}\right],\end{aligned} \tag{26}$$

where

$$D_{jj}(x,x';t,t') = \int d\Gamma_N \hat{\vec{j}}(x)T(t,t')(1-P(t'))\frac{1}{q}\psi^{-1}(t)\hat{\vec{j}}(x')\rho_{rel}(x^N;t'),$$

$$D_{FF}(x,x';t,t') = \int d\Gamma_N \hat{\vec{F}}(x)T(t,t')(1-P(t'))\frac{1}{q}\psi^{-1}(t)\hat{\vec{F}}(x')\rho_{rel}(x^N;t'),$$

are the generalized diffusion and friction coefficients in the spatially-impulse space within Renyi statistics. Herewith,

$$\int d\vec{p} \int d\vec{p}\,' D_{jj}(x,x';t,t') = D_{jj}(\vec{r},\vec{r}\,';t,t'),$$

$$\int d\vec{p} \int d\vec{p}\,' D_{FF}(x,x';t,t') = D_{FF}(\vec{r},\vec{r}\,';t,t')$$

which at $q = 1$ become the generalized diffusion and friction coefficients in Gibbs statistics. The obtained kinetic equations contain correlation functions of the second, the third and the fourth order Ω_{nj}, Ω_{nF}, Ω_{nnj}, Ω_{nnF}, Ω_{nnjn}, Ω_{nnFn} in dynamic variables $\hat{n}(x)$, $\hat{\vec{j}}(x)$, $\hat{\vec{F}}(x)$. Ω are the correlation functions describing nondissipative processes. D are the generalized memory functions – the time correlation functions built on the dynamic variables $\hat{n}(x)$, $\hat{\vec{j}}(x)$, $\hat{\vec{F}}(x)$, $[1-P(t)]\hat{\vec{j}}(x)$, $[1-P(t)]\hat{\vec{F}}(x)$ – and describe non-Markovian dissipative processes in the system. At $q = 1$ they transform to the memory function of Gibbs statistics. Memory functions like D_{njnj} and D_{nFnF} have an interesting structure

$$\begin{aligned} &D_{njnj}(x,x',x'',x''';t,t') = \\ &= \int d\Gamma_N \hat{n}(x)\hat{\vec{j}}(x')T(t,t')[1-P(t')]\frac{1}{q}\psi^{-1}(t)\hat{n}(x'')\hat{\vec{j}}(x''')\rho_{rel}(x^N;t'), \\ &D_{nFnF}(x,x',x'',x''';t,t') = \\ &= \int d\Gamma_N \hat{n}(x)\hat{\vec{F}}(x')T(t,t')[1-P(t')]\frac{1}{q}\psi^{-1}(t)\hat{n}(x'')\hat{\vec{F}}(x''')\rho_{rel}(x^N;t'), \end{aligned}$$

they can be approximated in the following way:

$$D_{njnj} \approx D_{nn}D_{jj} + D_{nj}D_{jn}, \qquad D_{nFnF} \approx D_{nn}D_{FF} + D_{nF}D_{Fn}.$$

This corresponds to the ideology of the mode-coupling theory.

Generalized kinetic equations (16), (17) with regard to (24)-(26) by their structure are the equations of Fokker-Planck type. They can serve as a basis for transition to the generalized hydrodynamic equations which are based on the set of equations of conservation laws for particles number, momentum and energy densities (10). Indeed, multiplying the set of transport equations (16), (17) by the first moments of the nonequilibrium one-particle distribution function $f_1(\vec{r},\vec{p};t)$: $(1,\vec{p},p^2/2m)$ and by $\frac{1}{2}\Phi(|\vec{r}-\vec{r}'|)$, we obtain the generalized equations of hydrodynamics with the defined generalized viscosity and heat conductivity coefficients having separated kinetic and potential contributions.

4 Summary

By means of the Zubarev NSO method and the maximum entropy principle for the Renyi entropy we obtained the nonequilibrium statistical operator and the generalized kinetic equations for the nonequilibrium one- and two-particle distribution functions $f_1(x;t) = \langle\hat{n}_1(x)\rangle^t$ and $f_2(x,x';t) = \langle\hat{n}_2(x,x')\rangle^t$ for description of kinetic processes in gases and liquids far from equilibrium. We investigated an inner structure of generalized memory functions which permitted to show that the kinetic equations contain correlation functions of the second and higher order (Ω_{nj}, Ω_{nF}, Ω_{nnj}, Ω_{nnF}, Ω_{nnjn}, Ω_{nnFn}) in dynamic variables $\hat{n}(x)$, $\hat{\vec{j}}(x)$, $\hat{\vec{F}}(x)$. By contrast to Ω describing non-dissipative processes, the dissipative processes in the system are described by the memory functions of the kinetic equations D built on the variables $\hat{n}(x)$, $\hat{\vec{j}}(x)$, $\hat{\vec{F}}(x)$, $[1-P(t)]\hat{\vec{j}}(x)$ and $[1-P(t)]\hat{\vec{F}}(x)$.

References

[1] D.Ya. Petryna, V.I. Gerasimenko, P.V. Malyshev. *Mathematical foundations of classical statistical mechanics.* Naukova Dumka, 1985.

[2] D.Ya. Petryna, V.I. Gerasimenko. *A mathematical description of the evolution of the state of infinite systems of classical statistical mechanics* Usp. Mat. Nauk, **38**, No.5(233), (1983), 3–58.

[3] D.Ya. Petryna. *Thermodynamic limit for solutions of Bogolubov 's equations.* Proc. Steklov Inst. Math., **191**, (1989), 192–200.

[4] C. Cercignani, V.I. Gerasimenko, D.Ya. Petryna. *Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations.* Kluwer. Acad. Publ., 1997.

[5] V.I. Gerasimenko, T.V. Ryabukha, M.O. Stashenko. *On the structure of expansions for the BBGKY hierarchy solutions.* J. Phys. A: Math. Gen., **37**, No.42, (2004), 9861–9872.

[6] V.I. Gerasimenko. *Approaches to derivation of quantum kinetic equations.* Ukr. J. Phys., **54**, No.8/9, (2009), 834–846.

[7] V.I. Gerasimenko, Zh.A. Tsvir. *A description of the evolution of quantum states by means of the kinetic equations.* J. Phys. A: Math. Gen., **43**, No.48, (2010), 485203.

[8] I.V. Gapyak, V.I. Gerasimenko. *Hard sphere dynamics and the Enskog equation.* Kinet. Relat. Models, **5**, (3), (2012), 459–484.

[9] G. Kaniadakis. *Non-linear kinetics underlying generalized statistics.* Physica A, **296**, (2001), 405–425.

[10] C.A.B. Silva, A.R. Vasconcellos, J.G. Ramos, R. Luzzi. *Generalized Kinetic Equation for Far-from-Equilibrium Many-Body Systems.* J. Stat. Phys., **143**, (2011), 1020–1034.

[11] C.A.B. Silva, J.G. Ramos, A.R. Vasconcellos, R. Luzzi. *Nonlinear higher-order hydrodynamics: Unification of kinetic and hydrodynamic within a nonequilibrium statistical ensemble formalism.* arXiv: 1210.7280 [physics. flu-dyn], 2012.

[12] V.N. Tsytovich, U. de Andelis. *Kinetic theory of dusty plasmas.V. The hydrodynamic equiations.* Phys. Plasmas, **11**, (2004), 496–506.

[13] T.D. Frank. *Nonlinear Fokker-Planck Equations. Fundamentals and Applications.* Springer, 2004.

[14] B. Markiv, R. Tokarchuk, P. Kostrobij, M. Tokarchuk. *Nonequilibrium statistical operator method in the Renyi statistics.* Physica A, **390**, (2011), 785–791.

[15] D.N. Zubarev. *Nonequilibrium Statistical Thermodynamics.* Consultant Bureau, 1974.

[16] D.N. Zubarev, V.G. Morozov, G. Röpke. *Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes. Vol. 1: Basic Concepts, Kinetic Theory.* Akademie Verlag, 1996.

Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 112–129

УДК 517.9+531.19+530.145

Valentin A. Zagrebnov

(Département de Mathématiques, Université d'Aix-Marseille and Institut de Mathématiques de Marseille - UMR 7373, France)

Valentin.Zagrebnov@univ-amu.fr

The Bogoliubov c-number approximation for random boson systems

Dedicated to the 80 th anniversary of academician D.Ya. Petrina

We justify the Bogoliubov c-number approximation for the case of interacting Bose gas in a homogeneous random media. To this aim we take into account occurrence of generalized extended/fragmented Bose-Einstein condensation in an infinitesimal band of low kinetic-energy modes, to generalize the c-number substitution procedure for this band of low-momenta modes.

1 Introduction

One of the key developments in the theory of the Bose gas, especially the theory of the low density gases currently at the forefront of experiment, is Bogoliubov's 1947 analysis [2], [3] of the many-body Hamiltonian by means of a c-number substitution for the most relevant operators in the problem. These are the zero-momentum mode boson operators, namely $b_0 \to z$, $b_0^* \to z^*$. Later this idea triggered a more general *The Approximating Hamiltonian Method* [6]. Naturally, the appropriate value of z has to be determined by some sort of consistency or variational principle, which might be complicated, but the concern is whether this sort of substitution is legitimate, i.e., error free.

© **Institute of Mathematics, 2014**

The rigorous justification for this *substitution*, as far as calculating the pressure of interacting (superstable) boson gas is concerned, was done for the first time in the paper by Ginibre [10]. Later it was revised and essentially improved by Lieb-Seiringer-Yngvason (LSY) [15], [16]. In textbooks it is often said, for instance, that it is tied to the imputed "fact"that the expectation value of the *zero-mode* particle number operator $N_0 = b_0^* b_0$ is of order $V =$ volume. This was the *second* Bogoliubov ansatz: the Bose-Einstein condensation (BEC) *justifies* the substitution [26].

As Ginibre pointed out, however, that BEC has nothing to do with it. The z substitution still gives the right answer for any value of the Gibbs average of the operator N_0. On the other hand, the zero-mode translation invariant condensation (the *first* Bogoliubov ansatz) plays a distinguished role in the Bogoliubov Weakly Imperfect Bose theory [26].

The problem of justification becomes delicate in a (*bona fide*) homogeneous random external potential: first of all because of the translation invariance breaking and secondly because of the problem with nature of the *generalized* BEC for this case even for the perfect Bose-gas [11], [12]. The aim of the present note is to elucidate this problem for interacting boson gas in a homogeneous random potential following the LSY method. The later allows to simplify and make more transparent the arguments of [13] versus the *generalized* condensation *à la* Van den Berg-Lewis-Pulé [24].

This note is based on the lecture delivered by the author on the Workshop "Mathematical Horizons for Quantum Physics: Many-Particle Systems"(09 - 27 September 2013) in the Institute for Mathematical Sciences of the National University of Singapore. Invitation and financial support extended to the author by the Institute for Mathematical Sciences and the Centre for Quantum Technologies (NUS) are greatly acknowledged.

2 The Bogoliubov c-number approximation

2.1 Imperfect Bose gas

Let interacting bosons of mass m be enclosed in a *cubic* box $\Lambda = L \times L \times L \subset \mathbb{R}^3$ of the volume $V \equiv |\Lambda| = L^3$, with (for simplicity) periodic boundary conditions on $\partial\Lambda$: $t_\Lambda := (-\hbar^2 \Delta / 2m)_{p.b.c.}$. Let $u(x)$ be *isotropic* two-body interaction with *non-negative* Fourier transformation:

$$v(q) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x\ u(x)e^{-iqx},\ u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$$

The second-quantized Hamiltonian of the *imperfect* Bose-gas acting as operator *in* the boson Fock space $\mathfrak{F} := \mathfrak{F}_{boson}(\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\Lambda))$ is

$$H_\Lambda = \sum_{k\in\Lambda^*} \varepsilon_k b_k^* b_k + \frac{1}{2V} \sum_{k_1,k_2,q\in\Lambda^*} v(q)\, b_{k_1+q}^* b_{k_2-q}^* b_{k_2} b_{k_1}$$

where (*dual*) set $\Lambda^* = \left\{k \in \mathbb{R}^3 : ,\, k_\alpha = 2\pi n_\alpha/L \text{ et } n_\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha = 1,2,3\right\}$ and $\{\varepsilon_k\}_{k\in\Lambda^*} = \mathrm{Spec}(t_\Lambda)$. Here $\{\varepsilon_k = \hbar^2 k^2/2m \geq 0\}_{k\in\Lambda^*}$ is the one-particle excitations spectrum. The *perfect* Bose-gas Hamiltonian and *particle-number* operators are

$$T_\Lambda := \sum_{k\in\Lambda^*} \varepsilon_k\, b_k^* b_k \quad , \quad N_k := b_k^* b_k \ , \quad N_\Lambda := \sum_{k\in\Lambda^*} N_k \ .$$

Here $\{b_k^*, b_k\}_{k\in\Lambda^*}$ are boson creation and annihilation operators in the one-particle eigenstates (kinetic-energy modes) verifying the CCR $[b_k, b_q^*] = \delta_{k,q}$:

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\ e^{ikx}\ \chi_\Lambda(x) \in \mathcal{H},\ k \in \Lambda^*$$

$$b_k := b(\psi_k) = \int_\Lambda dx\ \overline{\psi_k}(x)\, b(x) \ , \ b_k^* = (b(\psi_k))^*$$

Here $b^{\#}(x)$ are boson-field operators in the Fock space over $\mathcal{H}$.

2.2 Grand-canonical (β, μ)-ensemble

Recall that the grand-canonical (β, μ)-state generated by H_Λ on algebra of observables $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ [20], is define by

$$\langle A\rangle_{H_\Lambda} := \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}(e^{-\beta(H_\Lambda-\mu N_\Lambda)}\ A)/\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}} e^{-\beta(H_\Lambda-\mu N_\Lambda)} \ , \ A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{F}) \ .$$

The grand-canonical pressure: $p[H_\Lambda](\beta, \mu) := (\beta V)^{-1} \ln \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}} e^{-\beta(H_\Lambda-\mu N_\Lambda)}$ corresponds to the temperature β^{-1} and to the chemical potential μ.

Example 1. For the *perfect* Bose-gas T_Λ one must put $\mu < 0$, then the expectation value of the particle number in mode k is

$$\langle b_k^* b_k \rangle_{T_\Lambda} := \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1} \ , \quad \varepsilon_k \geq 0 \ .$$

The expectation value of the *total* density of bosons in Λ is

$$\rho_\Lambda(\beta,\mu) := \frac{1}{V}\langle b_0^* b_0 \rangle_{T_\Lambda} + \frac{1}{V}\sum_{k\in\Lambda^*\setminus\{0\}} \langle b_k^* b_k \rangle_{T_\Lambda} = \frac{1}{V}\frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} + \rho_\Lambda(\beta,\mu)$$

Then the *critical* density (if finite) is define by the limit:

$$\rho_c(\beta) := \lim_{\mu\uparrow 0}\lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{R}^3} \rho_\Lambda(\beta,\mu) < \infty$$

.

2.3 Conventional Bose-Einstein condensation

For a fixed density ρ, let $\mu_\Lambda(\beta,\rho)$ be solution of the equation

$$\rho = \rho_\Lambda(\beta,\mu) \quad \Rightarrow \quad \rho \equiv \rho_\Lambda(\beta,\mu_\Lambda(\rho)) \qquad (\textit{always exists}!).$$

- *low* density : $\lim_\Lambda \ \mu_\Lambda(\rho < \rho_c(\beta)) = \mu_\Lambda(\rho) < 0$
- *high* density: $\lim_\Lambda \ \mu_\Lambda(\rho \geq \rho_c(\beta)) = 0$, and

$$\rho_0(\beta) = \rho - \rho_c(\beta) = \lim_\Lambda \frac{1}{V} \ \left\{e^{-\beta\,\mu_\Lambda(\rho\geq\rho_c(\beta))} - 1\right\}^{-1} \Rightarrow$$
$$\mu_\Lambda(\rho \geq \rho_c(\beta)) = -\frac{1}{V} \ \frac{1}{\beta(\rho - \rho_c(\beta))} + o(1/V) \ .$$

- Since $\varepsilon_k = \hbar^2 \sum_{j=1}^d (2\pi n_j/V^{1/3})^2/2m$, the BEC is in $\mathbf{k}$=$\mathbf{0}$-mode:

$$\lim_\Lambda \frac{1}{V}\left\{e^{\beta(\varepsilon_{k\neq 0} - \mu_\Lambda(\rho))} - 1\right\}^{-1} = 0 \ ,$$

This type of condensation based on the concept of the one-level macroscopic occupation is known as the *conventional* zero-mode (or *type I*) BEC [9], [17].

2.4 Generalised Bose-Einstein condensation

This type of condensation was predicted by Casimir [8] and elucidated by Van den Berg-Lewis-Pulé in [22], [23], [24].

Let $\Lambda = L_1 \times L_2 \times L_3 = V^{\alpha_1} \times V^{\alpha_2} \times V^{\alpha_3}$, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 > 0$, and $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

• The *Casimir box* (1968): Let $\alpha_1 = 1/2$, i.e. $\alpha_{2,3} < 1/2$.

Since $\varepsilon_{k_1,0,0} = \hbar^2(2\pi n_1/V^{1/2})^2/2m \sim 1/V$, then again the asymptotics of solution:

$$\rho \equiv \rho_\Lambda(\beta, \mu_\Lambda(\rho)) \Rightarrow \mu_\Lambda(\rho \geq \rho_c(\beta)) = -A/V + o(1/V),\ A \geq 0$$

$$\lim_\Lambda \left\{ \frac{1}{V}\frac{1}{e^{-\beta\mu_\Lambda(\rho)}-1} + \frac{1}{V}\sum_{k\in\{\Lambda^*:n_1\neq 0, n_2=n_3=0\}} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu_\Lambda(\rho))}-1} \right\}$$
$$= \rho - \rho_c(\beta) > 0\ ,\ \lim_\Lambda \frac{1}{V}\left\{e^{\beta(\varepsilon_{k\neq 0}-\mu_\Lambda(\rho))}-1\right\}^{-1} \neq 0, \varepsilon_{k\neq 0} = \varepsilon_{k_1,0,0}$$

$$\lim_\Lambda \frac{1}{V}\left\{e^{\beta(\varepsilon_{k\neq 0}-\mu_\Lambda(\rho))}-1\right\}^{-1} = 0,\ \varepsilon_{0,k_{2,3}\neq 0} = \hbar^2(2\pi n_{2,3}/V^{\alpha_{2,3}})^2/2m$$

The generalized *type II* BEC [23]:

$$\rho - \rho_c(\beta) = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{V}\sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\left\{e^{\beta(\hbar^2(2\pi n_1/V^{1/2})^2/2m-\mu_\Lambda(\rho))}-1\right\}^{-1}$$
$$= \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{\beta^{-1}}{\hbar^2(2\pi n_1)^2/2m + A} \Rightarrow \lim_\Lambda \frac{1}{V}\langle b_0^* b_0\rangle_{T_\Lambda(\mu_\Lambda(\rho))} < \rho - \rho_c(\beta).$$

Here $A \geq 0$ is a *unique root* of the above equation. Note that BEC in the zero mode is less than the total amount of the condensation density.

For $\alpha_1 = 1/2$ the BEC is still mode by mode macroscopic, but it is infinitely *fragmented*. This type of BEC is also known as *quasi-condensate* and it was observed in the *rotating* condensate (2000) and in the condensate with *chaotic* phases (2008), [18].

• The *Van den Berg box* (1982): $\alpha_1 > 1/2$.

Proposition 1. There is no macroscopic occupation of *any* kinetic-energy mode:

$$\lim_\Lambda \frac{1}{V}\left\{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu_\Lambda(\rho))}-1\right\}^{-1} = 0.$$

This is the generalized BEC of *type III* [Van den Berg-Lewis-Pulé (1978)]. It occurs one-direction anisotropy $\alpha_1 > 1/2$ i.e. $\alpha_2 + \alpha_3 < 1/2$. Since $\varepsilon_{k_1,0,0} = (2\pi n_1/V^{\alpha_1})^2/2 \sim 1/V^{2\alpha_1}$, $2\alpha_1 > 1$, then the solution $\mu_\Lambda(\rho)$ has a *new* asymptotics:

$$\mu_\Lambda(\rho \geq \rho_c(\beta)) = -B/V^\delta + o(1/V^\delta),\ B \geq 0,\ \delta = 2\,(1-\alpha_1) < 1\ ,$$

$$0 < \rho - \rho_c(\beta) = (2\pi\beta)^{-1/2} \int_0^\infty d\xi\ e^{-\beta B \xi}\ \xi^{-1/2}\ .$$

Here parameter $B = B\,(\beta,\rho) > 0$ is a *unique* root of the equation:

$$\rho - \rho_c(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\beta^2 B(\beta,\rho)}}\ .$$

The generalized BEC of *type III* yields for the one-mode particle occupation

$$\lim_\Lambda \frac{1}{V} \langle N_k \rangle_{T_\Lambda} (\beta, \mu_\Lambda\,(\rho > \rho_c(\beta))) = 0 \text{ for all } k \in \{\Lambda^*\}\ .$$

For the *"renormalised"* k_1-modes occupation "density"one obtains:

$$\lim_\Lambda \frac{1}{V^{1-\epsilon}} \langle N_k \rangle_{T_\Lambda} (\beta, \mu_\Lambda\,(\rho > \rho_c(\beta))) = 2\beta\,(\rho - \rho_c(\beta))^2\,,$$

where $k \in \{\Lambda^* : (n_1, 0, 0)\}$ and $1 - \epsilon = \delta < 1$.
Definition 1.[24] In kinetic-energy modes the amount of the generalized BEC is defined as

$$\rho - \rho_c(\beta) := \lim_{\eta \to +0} \lim_\Lambda \frac{1}{V} \sum_{\{k \in \Lambda^*, \|k\| \leq \eta\}} \left\{ e^{\beta(\varepsilon_k - \mu_\Lambda(\beta,\rho))} - 1 \right\}^{-1}\ .$$

Remark 1. [22],[24] Saturation and *ρ_m-problem*: is it possible that there is a new critical density ρ_m such that $\rho_c \leq \rho_m \leq \infty$ and the *type III (or II)* condensation transforms into conventional *type I* BEC when $\rho \geq \rho_m$? The answer is positive. Recently the second critical density ρ_m was discovered for a cigar-type harmonic anisotropy [1]. There it was also proved that the *type I* and the *type III* condensations may coexist.

2.5 The Bogoliubov theory and the zero-mode c-number substitution

The first Bogoliubov ansatz. If one expects that the Bose-Einstein condensation, which occurs in the mode $k = 0$ for the perfect Bose-gas, *persists* for a *weak* two-body interaction $u(x)$, then one can to truncate Hamiltonian: $H_\Lambda \to H_\Lambda^B$, and to keep in H_Λ^B only the *most important condensate* terms, in which at least *two* zero-mode operators b_0^*, b_0 are involved. This approximation gives the Bogoliubov Weakly Imperfect Bose-Gas (WIBG) Hamiltonian H_Λ^B [26].
The second Bogoliubov ansatz. Since for a large volume (thermodynamic limit) the *condensate* operators $b_0^*/\sqrt{V}$, $b_0/\sqrt{V}$ *almost* commute: $[b_0/\sqrt{V}, b_0^*/\sqrt{V}] = 1/V$, one may use *substitutions*:

$$b_0/\sqrt{V} \to c \cdot \mathbb{I} \ , \ b_0^*/\sqrt{V} \to c^* \cdot \mathbb{I} \ , \quad c \in \mathbb{C} \ ,$$

in the truncated grand-canonical WIBG Hamiltonian $H_\Lambda^B(\mu) := H_\Lambda^B - \mu N_\Lambda \to H_\Lambda^B(c,\mu)$ to produce a diagonalizable bilinear operator form.

2.6 The zero-mode c-number approximation

For the periodic boundary conditions on $\partial\Lambda$, let $\mathfrak{F}_0 := \mathfrak{F}_{boson}(\mathcal{H}_0)$ be the boson Fock space constructed on the one-dimensional Hilbert space $\mathcal{H}_0$ spanned by $\psi_{k=0}(x) = \chi_\Lambda(x)/\sqrt{V}$.
Let $\mathfrak{F}_0' := \mathfrak{F}_{boson}\left(\mathcal{H}_0^\perp\right)$ be the Fock space constructed on the orthogonal complement $\mathcal{H}_0^\perp$. Then $\mathfrak{F}_{boson}(\mathcal{H}) = \mathfrak{F}_{boson}(\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0^\perp)$ is isomorphic to the *tensor product*:

$$\mathfrak{F}_{boson}\left(\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0^\perp\right) \approx \mathfrak{F}_{boson}(\mathcal{H}_0) \otimes \mathfrak{F}_{boson}(\mathcal{H}_0^\perp) = \mathfrak{F}_0 \otimes \mathfrak{F}_0',$$

For any complex number $c \in \mathbb{C}$ the coherent vector in $\mathfrak{F}_0$ is

$$\psi_{0\Lambda}(c) := e^{-V|c|^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sqrt{V} c\right)^k (b_0^*)^k \, \Omega_0 = e^{(-V|c|^2/2 + \sqrt{V} c \, b_0^*)} \ \Omega_0 \ ,$$

where Ω_0 is the vacuum of $\mathfrak{F}$. Notice that

$$\frac{b_0}{\sqrt{V}} \ \psi_{0\Lambda}(c) = c \ \psi_{0\Lambda}(c) \equiv c \cdot \mathbb{I} \ \psi_{0\Lambda}(c) \, .$$

Definition 2. The *c-number* Bogoliubov approximation of the grand-canonical Hamiltonian ($N_\Lambda := \sum_{k\in\Lambda^*} b_k^* b_k := b_0^* b_0 + N'_\Lambda$)

$$H_\Lambda(\mu) := H_\Lambda - \mu N_\Lambda \ , \ \mathrm{dom}(H_\Lambda(\mu)) \subset \mathfrak{F} \approx \mathfrak{F}_{boson}(\mathcal{H}_0) \otimes \mathfrak{F}_{boson}(\mathcal{H}_0^\perp)$$

is a *self-adjoint operator* $H_\Lambda(c,\mu)$ defined in $\mathfrak{F}'_0 = \mathfrak{F}_{boson}\left(\mathcal{H}_0^\perp\right)$, for any fixed vector $\psi_{0\Lambda}(c)$, by the closable sesquilinear form:

$$(\psi'_1, H_\Lambda(c,\mu)\psi'_2)_{\mathfrak{F}'_0} \equiv (\psi_{0\Lambda}(c) \otimes \psi'_1, H_\Lambda(\mu)\, \psi_{0\Lambda}(c) \otimes \psi'_2)_{\mathfrak{F}} \ ,$$

for vectors $(\psi_{0\Lambda}(c) \otimes \psi'_{1,2}) \in$ *form-domain* of the operator $H_\Lambda(\mu)$.

Remark 2. Since $(b_0/\sqrt{V}) \ \ \psi_{0\Lambda}(c) \ = \ c \cdot \mathbb{I} \ \ \psi_{0\Lambda}(c)$, the *c-number* approximation is *equivalent* to *substitutions*:

$$b_0/\sqrt{V} \to c \cdot \mathbb{I} \ , \ b_0^*/\sqrt{V} \to c^* \cdot \mathbb{I}$$

in the Hamiltonian
$H_\Lambda(\mu) \to H_\Lambda(c,\mu) =: H'_\Lambda(z) - \mu(|z|^2\,\mathbb{I} + N'_\Lambda) \ , \quad z := c\,\sqrt{V}.$

2.7 Exactness of the c-number approximation

Definition 3. The grand-canonical pressure for Hamiltonian $H_\Lambda(\mu)$ and for its *c-number* Bogoliubov approximation $H'_\Lambda(z,\mu)$, are defined by:

$$p_\Lambda(\mu) := \frac{1}{\beta V} \ln \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}} \exp[-\beta H_\Lambda(\mu)]$$
$$p'_\Lambda(\mu) := \frac{1}{\beta V} \ln \int_{\mathbb{C}} d^2 z \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}'_0} \exp[-\beta H'_\Lambda(z,\mu)]$$

Proposition 2.(Variational Principle) [10], [15].

$$e^{\beta V p_\Lambda(\mu)} \geq \int_{\mathbb{C}} d^2 z \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}'_0} \exp[-\beta H'_\Lambda(z,\mu)] \geq$$
$$\sup_\zeta \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}'_0} \exp[-\beta H'_\Lambda(\zeta,\mu)] =: e^{\beta V p_{\Lambda,max}(\mu)}$$

Proposition 3.

$$\lim_\Lambda p_\Lambda(\mu) = \lim_\Lambda p'_\Lambda(\mu) = \lim_\Lambda p_{\Lambda,max}(\mu) \ ,$$

with the *rate* of convergence:

$$0 \leq p_\Lambda(\mu) - p_{\Lambda,max}(\mu) \leq \mathcal{O}((\ln V)/V),$$

see [15]. The *rate* of convergence proved by the *Approximating Hamiltonian Method*(AHM) is

$$0 \leq p_\Lambda(\mu) - p_{\Lambda,max}(\mu) \leq \mathcal{O}(1/\sqrt{V}) \ ,$$

see [10], [26].

Remark 2. Although in [10] and in [15] the use of *coherent states* is essential, the method of the last paper efficiently exploits the Peierls-Bogoliubov and Berezin-Lieb inequalities instead of the AHM. To be more flexible, this method covers also the case of *infinitely* many k-modes, provided the card$\{k : k \in I_\Lambda \subset \Lambda^*\} < c\ V^{1-\gamma}$, $\gamma > 0$, and it gives also more accurate estimates. The Bogoliubov c-Number Approximation is *exact* on the thermodynamic level (AHM) [6], .

2.8 The c-number approximation for ideal Bose gas

The c-number substitution in the grand-canonical Hamiltonian $T_\Lambda(\mu) := T_\Lambda - \mu N_\Lambda$ is

$$T_\Lambda(\mu) \to T_\Lambda(c,\mu) = \sum_{k \in \Lambda^* \setminus \{0\}} (\varepsilon_k - \mu) b_k^* b_k - V\mu|c|^2$$

Then one gets for the pressures (note that $\mu < 0$ and $\varepsilon_{k=0} = 0$):

$$p[T_\Lambda(\mu)] = \frac{1}{\beta V} \ln \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}} \exp[-\beta T_\Lambda(\mu)] = \frac{1}{\beta V} \sum_{k \in \Lambda^*} \ln(1 - e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)})^{-1}$$

$$p[T_\Lambda(c,\mu)] = \frac{1}{\beta V} \sum_{k \in \Lambda^* \setminus \{0\}} \ln(1 - e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)})^{-1} + \mu|c|^2$$

$$0 \leq p[T_\Lambda(\mu)] - p[T_\Lambda(c,\mu)] = \frac{1}{\beta V} \ln(1 - e^{\beta\mu})^{-1} - \mu|c|^2 =: \Delta_\Lambda(c,\mu)$$

Variational Principle: $\{c : \inf_c \lim_\Lambda \Delta_\Lambda(c,\mu)\} = \{c_*(\mu)\} \Rightarrow$
$c_*(\mu < 0) = 0 \vee (\mu c_*(\mu)) \mid_{\mu=0} = 0$. Hence, the BEC density is *not* defined.

2.9 Gauge invariance and Bogoliubov quasi-averages

Since $[H_\Lambda, N_\Lambda] = 0$ (*total particle number conservation law*),

$$H_\Lambda = e^{i\varphi N_\Lambda} H_\Lambda e^{-i\varphi N_\Lambda} \ , \ U(\varphi) := e^{i\varphi N_\Lambda} \ ,$$

H_Λ is invariant w.r.t. gauge transformations $U(\varphi)$.
Corollary 1. The grand-canonical expectation value:

$$\left\langle b_0/\sqrt{V}\right\rangle_{H_\Lambda}(\beta,\mu)=0.$$

Let $H_{\Lambda,\nu}(\mu):=H_\Lambda(\mu)-\sqrt{V}(\nu\, b_0^*+\nu^* b_0)$, $\nu\in\mathbb{C}$. Then

$$\left\langle \frac{b_0}{\sqrt{V}}\right\rangle_{H_{\Lambda,\nu}}(\beta,\mu)\neq 0\ ,\left\langle \frac{b_{k\neq 0}}{\sqrt{V}}\right\rangle_{H_{\Lambda,\nu}}(\beta,\mu)=0\ .$$

Remark 4. Whether the limit: $\lim_{\nu\to 0}\lim_\Lambda \left\langle \frac{b_0}{\sqrt{V}}\right\rangle_{H_{\Lambda,\nu}}(\beta,\mu)=:c_0\neq 0$?
If it is the case this yields a spontaneous breaking of the gauge symmetry. Here c_0 is the Bogoliubov *quasi-average* [4], [5]. The idea of quasi-averages allowed Bogoliubov to prove his famous $1/q^2$-Theorem for interacting Bose-gas as well as to advance later in elucidating the c-Number Approximation, see [15], [16], [21], [26].
Example 2.(Ideal Bose-Gas) The gauge-breaking sources imply

$$\begin{aligned}&T_{\Lambda,\nu}(\mu):=T_\Lambda(\mu)-\sqrt{V}(\nu\, b_0^*+\nu^* b_0)=\\&-\mu(b_0^*+\sqrt{V}\overline{\nu}/\mu)(b_0+\sqrt{V}\nu/\mu)+T_\Lambda^{(k\neq 0)}(\mu)+V|\nu|^2/\mu.\end{aligned}$$

The c-number substitution gives:

$$T_{\Lambda,\nu}(\mu)\to T_{\Lambda,\nu}(c,\mu)=-\mu V(\overline{c}+\overline{\nu}/\mu)(c+\nu/\mu)+T_\Lambda^{(k\neq 0)}(\mu)+V|\nu|^2/\mu$$

One gets for the pressure (note that $\mu<0$ and $\varepsilon_{k=0}=0$):

$$\begin{aligned}&p[T_{\Lambda,\nu}(\mu)]=p[T_\Lambda(\mu)]-|\nu|^2/\mu\ ,\\&p[T_{\Lambda,\nu}(c,\mu)]=p[T_\Lambda^{(k\neq 0)}(\mu)]+\mu V(\overline{c}+\overline{\nu}/\mu)(c+\nu/\mu)-|\nu|^2/\mu\ ,\\&0\leq p[T_{\Lambda,\nu}(\mu)]-p[T_{\Lambda,\nu}(c,\mu)]=\\&\frac{1}{\beta V}\ln(1-e^{\beta\mu})^{-1}-\mu|c+\eta/\mu|^2=:\Delta_{\Lambda,\nu}(c,\mu)\ .\end{aligned}$$

The Variational Principle:$\{c:\inf_c\lim_\Lambda \Delta_{\Lambda,\nu}(c,\mu)\}=\{c_*(\mu,\nu)=-\nu/\mu\}$ implies that the variational BEC density ρ_{0*} is defined by the limit $|\nu/\mu(\nu)|\underset{\nu\to 0}{\longrightarrow}\sqrt{\rho_{0*}}$ or equivalently by

$$\rho_{0*}:=\lim_{\substack{\nu\to 0\\ \mu=\mu(\nu)\to 0}}|c_*(\mu,\nu)|^2=\lim_{\substack{\nu\to 0\\ \mu=\mu(\nu)\to 0}}\lim_{V\to\infty}\langle\frac{b_0^*}{\sqrt{V}}\rangle_{T_{\Lambda,\nu}(\mu)}\langle\frac{b_0}{\sqrt{V}}\rangle_{T_{\Lambda,\nu}(\mu)}\ .$$

The relation of BEC versus the *quasi-average* BEC and the maximizer ρ_{0*} takes the form:

$$\text{zero} - \text{mode BEC } \rho_0 \Rightarrow \frac{1}{V}\langle b_0^* b_0\rangle_{T_{\Lambda,\nu=0}(\mu)} = \frac{1}{V}\frac{1}{e^{-\beta\mu}-1} \;\; \leq$$
$$\frac{|\nu|^2}{\mu^2} + \frac{1}{V}\frac{1}{e^{-\beta\mu}-1} = \frac{1}{V}\langle b_0^* b_0\rangle_{T_{\Lambda,\nu}(\mu)} \Rightarrow \text{quasi} - \text{average BEC} \; .$$

Then by the Variational Principle for the c-Number Approximation one obtains:

$$\lim_{\substack{\nu\to 0\\ \mu=\mu(\nu)\to 0}} \lim_{V\to\infty} \frac{1}{V}\langle b_0^* b_0\rangle_{T_{\Lambda,\nu}(\mu)} \stackrel{!}{=} \lim_{\substack{\nu\to 0\\ \mu=\mu(\nu)\to 0}} \lim_{V\to\infty} \langle \frac{b_0^*}{\sqrt{V}}\rangle_{T_{\Lambda,\nu}(\mu)} \langle \frac{b_0}{\sqrt{V}}\rangle_{T_{\Lambda,\nu}(\mu)}$$
$$\Rightarrow \text{gauge} - \text{symmetry breaking BEC} = \lim_{\substack{\nu\to 0\\ \mu=\mu(\nu)\to 0}} |c_*(\mu,\nu)|^2 = \rho_{0*} \; .$$

Remark 5. Is it possible that $\rho_0 < \rho_{0*}$? The answer is positive: one can prove this inequality for the *ideal* as well as for an *interacting* Bose-gas [7] if they manifest *generalised* BEC of the type II or III.
Proposition 4 [15], [16]. The $k = 0$ – mode BEC $\Rightarrow$ quasi-average BEC $\Leftrightarrow$ spontaneous gauge-symmetry breaking BEC $\Leftrightarrow$ non-zero c-number approximation for the mode $k = 0$.

The proof is based on Griffith's arguments and on the following two Propositions:
Proposition 5 For a real ν one gets equality between the limits:

$$\lim_{\Lambda} p_\Lambda(\mu;\nu) = \lim_{\Lambda} p'_\Lambda(\mu;\nu) = \lim_{\Lambda} p_{\Lambda,max}(\mu;\nu) \; ,$$

which are convex in ν.
Proposition 6 (Gauge-Symmetry Breaking and BEC)

$$\lim_{|\nu|\to 0,\ \arg(\nu)} \lim_{\Lambda} \left\langle \frac{b_0}{\sqrt{V}} \right\rangle_{H_{\Lambda,\nu}} (\beta,\mu) =$$
$$\lim_{|\nu|\to 0,\ \arg(\nu)} \lim_{\Lambda} |z_{\Lambda,max}(\nu)| \; e^{i\ \arg(\nu)}/\sqrt{V} =: c_0 \; .$$

Here by the Variational Principle: $z_{\Lambda,max}(\nu) = |z_{\Lambda,max}(\nu)| \; e^{i\ \arg(\nu)}$,

$$\sup_{\zeta} \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}'_0} \exp[-\beta H'_\Lambda(\zeta,\mu;\nu)] = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}'_0} \exp[-\beta H'_\Lambda(z_{\Lambda,max}(\nu),\mu;\nu)]$$
$$= \exp\,[\beta V p_{\Lambda,z_{\Lambda,max}(\nu)}(\mu;\nu)] =: \exp\,[\beta V p_{\Lambda,max}(\mu;\nu)],$$

and $z_{\Lambda,max}(0) = |z_{\Lambda,max}(0)|\, e^{i\phi}$, $p_{\Lambda,z_{\Lambda,max}(\nu)}(\mu;\nu)|_{\nu=0} = p_{\Lambda,max}(\mu)$.

Corollary 2. One obtains for the quasi-average condensate density and for the condensate density equation:

$$\rho_0(\beta,\mu) = \lim_{|\nu|\to 0,\ \arg(\nu)} \lim_{\Lambda} \left\langle \frac{b_0^* b_0}{V} \right\rangle_{H_{\Lambda,\nu}} (\beta,\mu) = \lim_{\Lambda} |c_{0,\Lambda,max}|^2(\beta,\mu) \ .$$

where $c_{0,\Lambda,max}$ is a maximizer of the *variational problem*:

$$\sup_{c_0} \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}_0'} \exp[-\beta H_\Lambda'(c_0\sqrt{V},\mu)] = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}_0'} \exp[-\beta H_\Lambda'(c_{0,\Lambda,max}\sqrt{V},\mu)]$$

3 Random homogeneous (ergodic) external potentials.

3.1 Random and kinetic-energy eigenfunctions

For the *almost surely* (a.s.) self-adjoint random Schrödinger operator in $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ one has:

$$h_\Lambda^\omega\, \phi_j^\omega = (t_\Lambda + v^\omega)_\Lambda\, \phi_j^\omega = E_j^\omega\, \phi_j^\omega \ , \text{ for almost all(a.a.) } \omega \in \Omega \ ,$$

where $\{\phi_j^\omega\}_{j\geq 1}$ are the *random* eigenfunctions. In the limit $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d$ the spectrum $\sigma(h^\omega)$ of this operator is a.s. nonrandom [19].

Let $N_\Lambda(\phi_j^\omega)$ be particle-number operator in the eigenstate ϕ_j^ω.

$$N_\Lambda := \sum_{j\geq 1} N_\Lambda(\phi_j^\omega) := \sum_{j\geq 1} b^*(\phi_j^\omega) b(\phi_j^\omega)$$

is the *total* number operator in the boson Fock space $\mathfrak{F}(\mathcal{L}^2(\Lambda))$, $b(\phi_j^\omega) := \int_\Lambda dx\, \overline{\phi_j^\omega}(x)\, b(x)$, and $\{\phi_j^\omega\}_{j\geq 1}$ is a.s. a (random) basis in $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\Lambda)$.

Let $t_\Lambda\, \psi_k = \varepsilon_k\, \psi_k$ be the kinetic-energy operator eigenfunctions $\{\psi_k\}_{k\in\Lambda^*}$ with eigenvalues $\varepsilon_k = \hbar^2\, k^2/2m$. Recall that one of the *key hypothesis* of the conventional Bogoliubov Theory is the existence of translation-invariant *ground-state* (i.e. the zero-mode $\psi_{k=0}$) Bose condensation.

Random Hamiltonian H_Λ^ω of interacting Bosons in $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$:

$$H_\Lambda^\omega := T_\Lambda^\omega + U_\Lambda \ = \ \text{random Schrodinger operator} + \text{interaction} \ ,$$

where the kinetic-energy operator has two forms:

$$d\Gamma(h^{\omega}_{\Lambda}) := T^{\omega}_{\Lambda} = \sum_{j\geq 1} E^{\omega}_{j}\ b^{*}(\phi^{\omega}_{j})b(\phi^{\omega}_{j}) = \sum_{k_1,k_2\in\Lambda^{*}} (\psi_{k_1},(t_{\Lambda}+v^{\omega})\psi_{k_2})_{\mathcal{H}} b^{*}_{k_1} b_{k_2}.$$

Note that there are also *two faces* for the second-quantised two-body interaction $u(x-y)$ in $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$:

$$\begin{aligned} U_{\Lambda} &:= \frac{1}{2}\sum_{\substack{j_1,j_2\\ j_3,j_4}} (\phi^{\omega}_{j_1}\otimes\phi^{\omega}_{j_2}, u\ \phi^{\omega}_{j_3}\otimes\phi^{\omega}_{j_4})_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}}\ b^{*}(\phi^{\omega}_{j_1})b^{*}(\phi^{\omega}_{j_2})\ b(\phi^{\omega}_{j_3})b(\phi^{\omega}_{j_4}) \\ &= \frac{1}{2V}\sum_{k_1,k_2,q\in\Lambda^{*}} v\,(q)\, b^{*}_{k_1+q} b^{*}_{k_2-q} b_{k_2} b_{k_1} \end{aligned}$$

Remark 6. Our aim is to elucidate the status and in particularly exactness of the Bogoliubov c-Number Approximation for the random interacting boson gas. For example to answer the questions concerning the (generalised) BEC:
$\sum_{j:E^{\omega}_{j}\leqslant\delta}\langle N_{\Lambda}(\phi^{\omega}_{j})\rangle_{H^{\omega}_{\Lambda}}/V \to c$ **?** or $\sum_{k:\varepsilon_k\leqslant\gamma}\langle N_{\Lambda}(\psi_k)\rangle_{H^{\omega}_{\Lambda}}/V \to c$ **?**

3.2 Random versus kinetic-energy condensation

Proposition 7 [11] Let $H^{\omega}_{\Lambda} := T^{\omega}_{\Lambda} + U_{\Lambda}$ be *many-body* Hamiltonian of interacting bosons in random external potential V^{ω}_{Λ}. If the particle *interaction* U_{Λ} commutes with **any** of number operators $N_{\Lambda}(\phi^{\omega}_{j})$ (*local gauge invariance*), then

$$a.s. - \lim_{\delta\downarrow 0}\lim_{\Lambda}\sum_{j:E^{\omega}_{j}\leqslant\delta}\frac{1}{V}\langle(N_{\Lambda}(\phi^{\omega}_{j})\rangle_{H^{\omega}_{\Lambda}} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a.s. - \lim_{\gamma\downarrow 0}\liminf_{\Lambda}\sum_{k:\varepsilon_k\leqslant\gamma}\frac{1}{V}\langle N_{\Lambda}(\psi_k)\rangle_{H^{\omega}_{\Lambda}} > 0\ ,$$

and: $\lim_{\gamma\downarrow 0}\lim_{\Lambda}\sum_{k:\varepsilon_k>\gamma}\ \langle N_{\Lambda}(\psi_k)\rangle_{H^{\omega}_{\Lambda}}/V = 0$. Here $\langle - \rangle_{H^{\omega}_{\Lambda}}$ is quantum Gibbs expectation with random Hamiltonian H^{ω}_{Λ}.
Remark 7 If a many-body interaction satisfies the *local* gauge invariance:

$$[U_{\Lambda}, N_{\Lambda}(\phi_j)] = 0\ ,$$

then U_{Λ} is a *function* of the *occupation number operators* $\{N_{\Lambda}(\phi_j)\}_{j\geq 1}$. For this reason it is called a "*diagonal interaction*".

Corollary 3 A *random* localized generalised (of a yet unknown type) boson condensation occurs *if and only if* there is a generalised (type II/III) condensation in the extended (*kinetic-energy*) eigenstates. This is *a possible way* to save the Bogoliubov theory in a the case of *non-translation invariant*, but *homogeneous* random external potential.

3.3 Amounts of random and of kinetic-energy condensates

Let for any $A \subset \mathbb{R}_+$ the particle occupation measures m_Λ and $\tilde{m}_\Lambda$ are defined for the perfect Bose-gas by:

$$m_\Lambda(A) := \frac{1}{V} \sum_{j:E_i \in A} \langle N_\Lambda(\phi_i^\omega) \rangle_{T_\Lambda^\omega} \ , \ \tilde{m}_\Lambda(A) := \frac{1}{V} \sum_{k:\varepsilon_k \in A} \langle N_\Lambda(\psi_k) \rangle_{T_\Lambda^\omega} \ .$$

Proposition 8 [11] For the *perfect* Bose-gas amounts of random and kinetic-energy condensates coincide:

$$m(dE) \ = \begin{cases} (\overline{\rho} - \rho_c)\delta_0(dE) \ + \ (e^{\beta E} - 1)^{-1} \mathcal{N}(dE) & \text{if } \overline{\rho} \geqslant \rho_c \ , \\ (e^{\beta(E-\mu_\infty)} - 1)^{-1} \mathcal{N}(dE) & \text{if } \overline{\rho} < \rho_c \ , \end{cases}$$

$$\tilde{m}(d\varepsilon) \ = \begin{cases} (\overline{\rho} - \rho_c)\delta_0(d\varepsilon) \ + \ F(\varepsilon)d\varepsilon & \text{if } \overline{\rho} \geqslant \rho_c, \\ F(\varepsilon)d\varepsilon & \text{if } \overline{\rho} < \rho_c. \end{cases}$$

with *explicitly* defined density $F(\varepsilon)$. For models with *diagonal* interactions: $m_\Lambda(A) \leq \tilde{m}_\Lambda(A)$.

3.4 BEC in one-dimensional random potential. Poisson point-impurities

For $d = 1$ and for repulsive *Poisson point-impurities* with density τ and $a > 0$, the homogeneous ergodic random external potential has the form:

$$\begin{aligned} v^\omega(x) : \ &= \int_{\mathbb{R}^1} \mu_\tau^\omega(dy) a\, \delta(x-y) = \sum_j a\, \delta(x - y_j^\omega) \\ \mathbb{P}\{\omega : \mu_\tau^\omega(\Lambda) = s\} \ &= \frac{|\Lambda|^s}{s!} e^{-\tau|\Lambda|} \ , \ \mathbb{E}(\mu_\tau^\omega(\Lambda)) = \tau|\Lambda| \ , \ \Lambda \subset \mathbb{R}^1 \ . \end{aligned}$$

$$- - \bullet - - \bullet - - - - - - - - \bullet - - - - \bullet - \bullet - - - - - - \bullet - - - \bullet - - - -$$

Proposition 9 [14] Let $a = +\infty$. Then $\sigma(h^{\omega})$ is a.s. nonrandom, dense *pure-point* spectrum such that the closure $\overline{\sigma_{p.p.}(h^{\omega})} = [0, +\infty)$, with the Integrated Density of States

$$\mathcal{N}(E) = \tau \frac{e^{-\pi\tau/\sqrt{2E}}}{1 - e^{-\pi\tau/\sqrt{2E}}} \sim \tau e^{-\pi\tau/\sqrt{2E}}\ ,\ E \downarrow 0, \text{(Lifshitz tail)}.$$

One gets for the *spectrum*:

$$(a.s.) - \sigma(h^{\omega}) = \bigcup_{j} \{\pi^2 s^2/2(L_j^{\omega})^2\}_{s=1}^{\infty}\ ,$$

where intervals $L_j^{\omega} = y_j^{\omega} - y_{j-1}^{\omega}$ are *independent identically distributed random variables* :

$$dP_{\tau, j_1, \ldots, j_k}(L_{j_1}, \ldots, L_{j_k}) = \tau^k \prod_{s=1}^{k} e^{-\tau L_{j_s}} dL_{j_s}$$

The *eigenfunctions:* for a.a. $\omega \in \Omega$ the one-particle *localized* quantum states $\{\phi_j^{\omega}\}_{j \geq 1}$, give a basis in $L^2(\Lambda)$.

4 Generalized c-numbers approximation

4.1 Existence of the approximating pressure

Since randomness implies *fragmented* (or generalized type II/III) condensation, following the Bogoliubov approximation philosophy, we want to replace all creation/annihilation operators in the momentum states ψ_k with kinetic energy *less* than some $\delta > 0$ by c-numbers. Let $I_{\delta} \subset \Lambda^*$ be the set of all *replaceable* modes

$$I_{\delta} := \left\{k \in \Lambda^* : \hbar^2 k^2/2m \leqslant \delta\right\},$$

and we denote $n_{\delta} := \text{card}\{k : k \in I_{\delta}\}$.
Remark 8 The number of quantum states n_{δ} is of the *order* V_l since by definition of the Integrated Density of States: $n_{\delta} = V\ \mathcal{N}_{\Lambda}(\delta)$. To use the *Lieb-Seiringer-Yngvason method* we consider $n_{\delta_{\Lambda}} = O(V^{1-\gamma})$, $0 < \gamma < 1$. Why it is possible ? See Corollary 4, and [25] for details.

4.2 Generalised BEC of type III: one-mode particle occupations

Definition 4 [12] We call eigenfunctions: $\{\phi_j^\omega\}_{j\geq 1}$ *weakly* localised if

$$\lim_{\Lambda} \frac{1}{\sqrt{V}} \int_{\Lambda} dx\ |\phi_j^\omega(x)| = 0 \ \text{ for a.a. } \omega \in \Omega \ .$$

Proposition 10 [12],[13] Let all $\{\phi_j^\omega\}_{j\geq 1}$ be localised. Then for models H_Λ^ω with *diagonal interactions*

$$\lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \left\langle N_\Lambda(\psi_k) \right\rangle_{H_\Lambda^\omega} = 0 \text{ for } \mathbf{all}\ k \in \{\Lambda^*\}$$

This implies that any possible generalised *kinetic-energy* BEC in these models is of *type III*.

Corollary 4 The number of *condensed* kinetic-modes is at most $O(V^{1-\gamma})$, $0 < \gamma < 1$, and in this case one can use the LSY method for the modes:

$$\lim_{\Lambda} \frac{1}{V^\gamma} \left\langle N_\Lambda(\psi_k) \right\rangle_{H_\Lambda^\omega} \neq 0 \ , \ \text{ for k} \in \mathrm{I}_{\delta_\Lambda},\ \gamma = 1 - \epsilon$$

Let $\mathcal{H}^\delta$ be the subspace of $\mathcal{H}$ spanned by the set of ψ_k with $k \in I_\delta$, and P_δ be orthogonal projector onto this subspace. Hence, we have a natural decomposition of the total space $\mathcal{H}$ and the corresponding representation for the associated symmetrised Fock space:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^\delta \oplus \mathcal{H}' \ , \qquad \mathfrak{F} \approx \mathfrak{F}^\delta \otimes \mathfrak{F}'.$$

Then we proceed with the Bogoliubov substitution $b_k \to c_k$ and $b_k^* \to \bar{c}_k$ for all $k \in I_\delta$, which provides an *approximating* (for the initial) Hamiltonian, that we denote by $H_\Lambda^{low}(\mu, \{c_k\})$.

The partition function and the corresponding pressure for this *approximating* Hamiltonian have the form:

$$\Xi_\Lambda^{low}(\mu, \{c_k\}) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}'}\, e^{-\beta H_\Lambda^{low}(\mu,\{c_k\})} \ ,$$

$$p_{\Lambda,\delta}^{low}(\mu, \{c_k\}) = \frac{1}{V} \ln \Xi_\Lambda^{low}(\mu, \{c_k\}) \ .$$

Proposition 10 [13], [25] The c-numbers substitution for all operators in the energy-band I_{δ_Λ}, $\mathrm{card}\{k : k \in I_{\delta_\Lambda}\} = O(V^{1-\gamma})$, does not affect the original pressure in the following sense:

$$\text{a.s.}-\lim_{\Lambda} [p_\Lambda(\beta,\mu) - \{\max_{\{c_k\}} p_{\Lambda,\delta_\Lambda}^{low}(\mu, \{c_k\})\}] = 0$$

Remark 9 Besides the *type III* condensation the last statement covers the one-mode case. For the case of eventual *type II* condensation the arguments are similar, but with a volume-dependent cut-off of the converging sum over modes [25].

References

[1] M. Beau, V.A. Zagrebnov. *The second critical density and anisotropic generalised condensation.* Cond. Matter Phys., **31**, 23003:1-10, (2010).

[2] N.N. Bogoliubov. *About the theory of superfluidity.* Izv. Akad. Nauk USSR, **11**, (1947), 77–90.

[3] N.N. Bogoliubov. *Energy levels of the imperfect Bose-Einstein gas.* Bull. Moscow State Univ., **7**, (1947), 43–56.

[4] N.N. Bogoliubov. *Quasiaverages in the problems of statistical mechanics.* Communications of JINR-Dubna, **D-781**, (1961), 1–123, and in: Selected Papers, vol.3, Kiev: Naukova Dumka, 1971, 174–243 see also in: Collection of Sinetific Works (in twelve volumes): Statistical Mechanics, vol.6, Moscow: Nauka, 2006, 236–360.

[5] N.N. Bogoliubov. *Lectures on Quantum Statistics* (Vol.2): Quasi-Averages. N.Y.: Gordon and Breach, 1970.

[6] N.N. Bogolyubov (jr), J. Brankov, V.A. Zagrebnov, A.M. Kurbatov, N. Tonchev. *Some classes of exactly soluble models of problems in quantum statistical mechanics: The method of approximating Hamiltonian.* Russian Math. Surveys **39**, (1984), 1–50 .

[7] E. Buffet, Ph. de Smedt, J.V. Pulè, *The condensate equation for some Bose systems.* J. Phys. A: Math.Gen., **16**, (1983), 4307–4324.

[8] H.B.G. Casimir. *On Bose-Einstein condensation.* In: Fundamental Problems in Statistical Mechanics III, ed. E.G.D. Cohen. (Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1968), 188–196.

[9] A. Einstein. *Quantentheorie des einatomigen idealen gases.* Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, **I**, (1925), 3–14.

[10] J. Ginibre. *On the asymptotic exactness of the Bogoliubov approximation for many boson systems.* Commun. Math. Phys., **8**, (1968), 26–51.

[11] T. Jaeck, J.V. Pulé, V.A. Zagrebnov. *On the nature of Bose-Einstein condensation in disordered systems.* J. Stat. Phys., **137**, (2009), 19–55.

[12] T. Jaeck, J.V. Pulé, V.A. Zagrebnov. *On the nature of Bose-Einstein condensation enhanced by localization.* J. Math. Phys., **51**, (2010), 103302-1-15.

[13] T. Jaeck, V.A. Zagrebnov. *Exactness of the Bogoliubov approximation in randomexternal potentials.* J. Math. Phys., **51**, (2010), 123306-1-16.

[14] O. Lenoble, V.A. Zagrebnov. *Bose-Einstein condensation in the Luttinger-Sy model.* Markov Process. Rel. Fields, **13**, (2007), 441–468.

[15] E.H. Lieb, R. Seiringer, J. Yngvason. *Justification of c-Number substitutions in bosonic hamiltonians.* Phys. Rev. Lett., **94**, (2005), 0804401–4.

[16] E.H. Lieb, R. Seiringer, J. Yngvason. *Bose-Einstein condensation and spontanious symmetry breaking.* Rept. Math. Phys., **59**, (2007), 389–399.

[17] F. London. *On the Bose-Einstein condensation.* Phys. Rev., **54**, (1938), 947–954.

[18] W.J. Mullin, A.R. Sakhel. *Generalized Bose-Einstein condensation.* J. Low Temp. Phys., **166**, (2012), 125–150.

[19] L.A. Pastur, A. Figotin, *Spectra of Random and Almost-Periodic Operators.* Berlin: Springer-Verlag, 1992.

[20] D.Ya. Petrina, *Mathematical Foundations of Quantum Statistical Mechanics (Continuous Systems).* Dordrecht: Kluwer, 1995.

[21] A. Sütő. *Equivalence of Bose-Einstein condensation and symmetry breaking.* Phys. Rev. Lett., **94**, (2005), 0804402–4.

[22] M. Van den Berg. *On boson condensation into an infinite number of low-lying levels.* J. Math. Phys., **23**, (1982), 1159–1161.

[23] M. Van den Berg, J.T. Lewis. *On generalized condensation in the free boson gas.* Physica, **110A**, (1982), 550–564.

[24] M. Van den Berg, J.T. Lewis, J.V. Pulé. *A general theory of Bose-Einstein condensation.* Helv. Phys. Acta, **59**, (1986), 1271–1288.

[25] V.A. Zagrebnov. *Lectures on the Bose-Einstein condensation theory.* Università degli Studia Roma Tre, 2013.

[26] V.A. Zagrebnov, J.-B. Bru. *The Bogoliubov model of weakly imperfect Bose gas.* Phys. Rept., **350**, (2001), 291–434.

Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 141–152

УДК 517.54

О.К. Бахтін[1], *Г.П. Бахтіна*[2], *В.Є. В'юн*[1]

[1] *Інститут математики НАН України, Київ,*
[2] *Національний технічний університет "Київський політехнічний інститут"*

alexander.bahtin@yandex.ru, bakhtina_galina@mail.ru, vvikev@mail.ru

Про деякі нерівності в теорії неперетинних областей

In the paper we consider the extremal problems in geometric theory of functions of complex variables that are associated with estimates of functionals defined on the systems of non-overlapping domains. In particular, we generalize some known results of this topic.

Робота присвячена дослідженню екстремальних задач геометричної теорії функцій комплексної змінної, пов'язаних з оцінками функціоналів, заданих на системах неперетинних областей. Зокрема, основна увага приділяється посиленню одного відомого результату у даній тематиці.

Задачі про екстремальне розбиття займають важливе місце в геометричній теорії функцій комплексної змінної і мають багату історію (див., наприклад, [1–19]). Вперше екстремальні розбиття розглядались при отриманні оцінок добутку степенів конформних радіусів неперетинних областей. Ця тематика бере початок зі статті М. О. Лаврєнт'єва 1934 року [1] і далі розвивалась в дослідженнях багатьох авторів (див., наприклад, [2–19]). Слід зауважити, що важливим елементом дослідження таких екстремальних задач є глибокі результати теорії квадратичних диференціалів, які описують локальну і глобальну структуру їх траєкторій [3].

© **Institute of Mathematics, 2014**

1. Основні поняття. Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множини натуральних і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ — комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — її одноточкова компактифікація, $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$. Нехай $r(B,a)$ — внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ (див., наприклад, [5, с. 14]; [7, с. 71]; [8, с. 30]).

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Систему точок $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C} : \, k = \overline{1,n}\right\}$ таку, що $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1,n}$ та $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$, будемо називати n-променевою. Позначимо

$$P_k = P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\},$$

$\theta_k := \arg a_k$, $a_{n+1} := a_1$, $\theta_{n+1} := 2\pi$. Величини $\alpha_k := \frac{1}{\pi}\left[\theta_{k+1} - \theta_k\right]$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$, будемо називати кутовими параметрами n-променевої системи точок A_n. Очевидно, що $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$. Дана робота базується на застосуванні кусково-розділяючого перетворення, розвинутого в роботах [4, с. 48–50]; [5, с. 27–30]; [8, с. 120].

Метою даної роботи є отримання точних оцінок зверху для функціонала наступного вигляду:

$$J_n(\gamma) = \left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right), \tag{1}$$

де $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ — n-променева система точок, яка розташована на одиничному колі, B_0, B_∞, $\{B_k\}_{k=1}^n$ — сукупність неперетинних областей, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, $0 \in B_0$, $\infty \in B_\infty$.

При $\gamma = \frac{1}{2}$ і $n \geq 2$ оцінка функціоналу (1) для системи неперетинних областей була отримана В.М. Дубініним [4, с. 59]. Г.В. Кузьміна [6, с. 267], посилила результат роботи [4] і показала, що дана оцінка справедлива при $\gamma \in \left(0, \frac{n^2}{8}\right]$, $n \geq 2$. Зазначимо, що при $n = 2$ оцінка функціоналу (1) роботи [6] в точності співпадає з оцінкою роботи [4]. В роботах О.К. Бахтіна та І.В. Денеги [19], [17], [18] було отримано оцінку функціоналу (1) для $\gamma \in \left(0, \frac{3}{5}\right]$ (при $n = 2$), $\gamma \in \left(0, \frac{6}{5}\right]$ (при $n = 3$) та $\gamma \in (0, 2{,}1]$ (при $n = 4$).

В даній роботі отримано посилену оцінку функціоналу (1) для значень $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.

2. Основні результати.

Теорема 1. *Нехай* $0 < \gamma \leq \gamma_2$, $\gamma_2 = 0{,}65$. *Тоді для довільної* 2*-променевої системи точок* $A_2 = \{a_k\}_{k=1}^2$ *такої, що* $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,2}$, *і довільного набору взаємно неперетинних областей* B_0, B_1, B_2, B_∞ *(*$0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$*), справедлива нерівність*

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma\, r(B_1, a_1)\, r(B_2, a_2) \leqslant$$

$$\leqslant [r(\Lambda_0, 0)\, r(\Lambda_\infty, \infty)]^\gamma\, r(\Lambda_1, \lambda_1)\, r(\Lambda_2, \lambda_2)\,, \qquad (2)$$

де області Λ_0, Λ_∞, Λ_1, Λ_2 *— кругові області, а точки* 0, ∞, λ_1, λ_2 *— полюси квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^4 + (4 - 2\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2 - 1)^2}\, dw^2. \qquad (3)$$

Теорема 2. *Нехай* $0 < \gamma \leq \gamma_3$, $\gamma_3 = 1,22$. *Тоді для довільної* 3-*променевої системи точок* $A_3 = \{a_k\}_{k=1}^3$ *такої, що* $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,3}$, *і довільного набору взаємно неперетинних областей* B_0, B_1, B_2, B_3, B_∞ *(*$0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_3 \in B_3 \subset \overline{\mathbb{C}}$*), справедлива нерівність*

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{3} r(B_k, a_k) \leqslant$$

$$\leqslant [r(\Lambda_0, 0)\, r(\Lambda_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{3} r(\Lambda_k, \lambda_k)\,, \qquad (4)$$

де області Λ_0, Λ_∞, Λ_1, Λ_2, Λ_3 *— кругові області, а точки* 0, ∞, λ_1, λ_2, λ_3 *— полюси квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^6 + (9 - 2\gamma)w^3 + \gamma}{w^2(w^3 - 1)^2}\, dw^2. \qquad (5)$$

Теорема 3. *Нехай* $0 < \gamma \leq \gamma_4$, $\gamma_4 = 2,15$. *Тоді для довільної* 4-*променевої системи точок* $A_4 = \{a_k\}_{k=1}^4$ *такої, що* $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,4}$, *і довільного набору взаємно неперетинних областей* B_0, B_k, B_∞ *(*$0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,4}$*), справедлива нерівність*

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{4} r(B_k, a_k) \leqslant$$

$$\leqslant \left[r\left(\Lambda_0,0\right) r\left(\Lambda_\infty,\infty\right)\right]^\gamma \prod_{k=1}^{4} r\left(\Lambda_k,\lambda_k\right), \tag{6}$$

де області Λ_0, Λ_∞, Λ_1, Λ_2, Λ_3 *і* Λ_4 *— кругові області, а точки* 0, ∞, λ_1, λ_2, λ_3 *і* λ_4 *— полюси квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^8 + (16-2\gamma)w^4 + \gamma}{w^2(w^4-1)^2}\, dw^2. \tag{7}$$

3. Доведення теореми 1. При доведенні теорем 1 — 3 буде зручно скористатися результатом наступної леми.

Нехай $\Phi(\tau) = \tau^{2\tau^2} \cdot |1-\tau|^{-(1-\tau)^2} \cdot (1+\tau)^{-(1+\tau)^2}$, $\tau \geqslant 0$.

Лема. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для будь-якої n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такої, що $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_0, B_k, B_∞ ($a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$), справедлива нерівність

$$\left[r\left(B_0,0\right) r\left(B_\infty,\infty\right)\right]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^n \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \left(\prod_{k=1}^{n} \Phi(\tau_k)\right)^{1/2}, \tag{8}$$

де $\tau_k = \alpha_k\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$. Знак рівності в нерівності (8) досягається тоді, коли області B_0, B_∞, B_k і точки 0, ∞, a_k, $k = \overline{1,n}$, є, відповідно, круговими областями та полюсами квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (n^2-2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

Доведення леми. При доведенні данної леми наші дослідження проводяться із застосуванням розділяючого перетворення (див., наприклад, [4, с. 48]; [5, с. 27–30]; [8, с. 120–124]; [7, с. 87–92]). Аналогічно міркуванням, проведеним в роботі [7, с. 261], розглянемо систему функцій $\zeta = \pi_k(w) = -i\left(e^{-i\theta_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1,n}$. Нехай $\Omega_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$, позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_k \bigcap \overline{P}_k)$, що містить точку $\pi_k(a_k)$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної вісі. В свою чергу, через

$\Omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, позначимо область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_{k+1} \bigcap \overline{P}_k)$, що містить точку $\pi_k(a_{k+1})$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної вісі, $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Крім того, $\Omega_k^{(0)}$ позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_0 \bigcap \overline{P}_k)$, що містить точку $\zeta = 0$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної вісі. Набір областей $\{\Omega_k^{(\infty)}\}_{k=1}^n$ є результатом розділяючого перетворення довільної області B_∞ відносно набору $\{P_k\}_{k=1}^n$ і $\{\pi_k\}_{k=1}^n$ в точці $\zeta = \infty$. Позначимо $\pi_k(a_k) := \omega_k^{(1)}$, $\pi_k(a_{k+1}) := \omega_k^{(2)}$, $k \in \{1,n\}$, $\pi_n(a_{n+1}) := \omega_n^{(2)}$.

Із визначення функцій π_k випливає, що

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(1)}| \sim \frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot |w - a_k|, \quad w \to a_k, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(2)}| \sim \frac{1}{\alpha_k}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot |w - a_{k+1}|, \quad w \to a_{k+1}, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k}.$$

Тоді, використовуючи відповідні результати робіт [4, с. 54]; [5, с. 29], маємо нерівності

$$r(B_k, a_k) \leqslant \left[\frac{r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(\Omega_{k-1}^{(2)}, \omega_{k-1}^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot \frac{1}{\alpha_{k-1}}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{9}$$

$$k = \overline{1,n}, \quad \Omega_0^{(2)} := \Omega_n^{(2)}, \quad \omega_0^{(2)} := \omega_n^{(2)},$$

$$r(B_0, 0) \leqslant \left[\prod_{k=1}^n r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

$$r(B_\infty, \infty) \leqslant \left[\prod_{k=1}^n r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(\infty)}, \infty\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Умови реалізації знаку рівності в нерівностях (9) – (11) повністю описані в теоремі 1.9 [5, с. 29]. На основі цих співвідношень отримуємо нерівність

$$J_n(\gamma) \leqslant \prod_{k=1}^n \left(r\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) r\left(\Omega_k^{(\infty)}, \infty\right)\right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}} \times$$

$$\times\left(\frac{r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha_k}\right)^2\left(|a_k||a_{k+1}|\right)^{\frac{1}{\alpha_k}-1}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далі, враховуючи методи робіт [7, с. 262]; [9, с. 300]; [11, с. 871], із останнього має місце

$$J_n(\gamma)\leqslant 2^n\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)}{\left(|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)^2}\left(r\left(\Omega_k^{(0)},0\right)r\left(\Omega_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\gamma\alpha_k^2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$|\omega_k^{(1)}|=|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $|\omega_k^{(2)}|=|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $|\omega_k^{(1)}-\omega_k^{(2)}|=|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}$. Вираз, що стоїть у фігурних дужках отриманої нерівності, є значенням функціоналу

$$K_\tau=\left[r\left(B_0,0\right)r\left(B_\infty,\infty\right)\right]^{\tau^2}\cdot\frac{r\left(B_1,a_1\right)r\left(B_2,a_2\right)}{|a_1-a_2|^2}\tag{12}$$

на системі неперетинних областей $\{\Omega_k^{(0)},\Omega_k^{(1)},\Omega_k^{(2)},\Omega_k^{(\infty)}\}$, і відповідній системі точок $\{0,\omega_k^{(1)},\omega_k^{(2)},\infty\}$ $(k\in\{1,2\})$.

Оцінка функціоналу (12), у випадку фіксованих полюсів, була знайдена вперше В.М. Дубініним [4], [14], пізніше — Г.В. Кузьміною [12], Є.Г. Ємельяновим [13], А.Л. Таргонським [15].

На основі теореми 4.1.1 [7, с. 167] та інваріантності функціоналу (12) отримуємо оцінку

$$K_\tau\leqslant\Phi(\tau),\quad \tau\geq 0,$$

де $\Phi(\tau)=\tau^{2\tau^2}\cdot|1-\tau|^{-(1-\tau)^2}\cdot(1+\tau)^{-(1+\tau)^2}$. Тоді

$$J_n(\gamma)\leqslant\left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^n\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\left[\prod_{k=1}^{n}\Phi(\tau_k)\right]^{1/2}=\tag{13}$$

$$=\left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^n\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}\left(\tau_k^{2\tau_k^2+2}\cdot|1-\tau_k|^{-(1-\tau_k)^2}\cdot(1+\tau_k)^{-(1+\tau_k)^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

де $\tau_k = \sqrt{\gamma}\cdot\alpha_k$, $k=\overline{1,n}$. Реалізація знаку рівності перевіряється безпосередньо. *Лема доведена.*

Повертаємось до доведення теореми 1. Враховуючи результат леми і умову теореми 1, що $n=2$, із нерівності (13) маємо

$$J_2(\gamma) \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^2 \cdot \left(\prod_{k=1}^{2} \alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\left[\prod_{k=1}^{2}\Phi(\tau_k)\right]^{1/2} \leqslant \tag{14}$$

$$\leqslant \frac{4}{\gamma}\cdot\left[\prod_{k=1}^{2}\left(\tau_k^{2\tau_k^2+2}\cdot|1-\tau_k|^{-(1-\tau_k)^2}\cdot(1+\tau_k)^{-(1+\tau_k)^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

де $\tau_k = \sqrt{\gamma}\cdot\alpha_k$, $k=\overline{1,2}$.

Розглянемо детальніше функцію $\Psi(x) = x^{2x^2+2}\cdot|1-x|^{-(1-x)^2}\cdot(1+x)^{-(1+x)^2}$. $\Psi(x)$ — логарифмічно випукла на проміжку $[0,x_0]$, де $x_0\approx 0,88441$, $\Psi(x_0)=0,07002$. На проміжку $[0,x_1]$ ($x_1\approx 0,58142$ — точка максимуму функції $\Psi(x)$, $\Psi(x_1)\approx 0,08674$) функція зростає від значення $\Psi(0)=0$ до $\Psi(x_1)$, і спадає на проміжку $(x_1,\infty]$. Далі, застосовуючи до функції $\Psi(x)$ ідеї робіт [16],[19], а також деякі додаткові міркування, отримуємо твердження теореми 1.

4. Доведення теореми 2. Доведення теореми 2, в основному, аналогічне доведенню теореми 1, але відмітимо різницю між доведеннями цих теорем.

Враховуючи, що $n=3$, з нерівності (13) отримаємо співвідношення

$$J_3(\gamma) \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^3 \left(\prod_{k=1}^{3} \alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\left(\prod_{k=1}^{3}\Phi(\tau_k)\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{8}{\gamma\sqrt{\gamma}}\left[\prod_{k=1}^{3}\left(\tau_k^{2\tau_k^2+2}\cdot|1-\tau_k|^{-(1-\tau_k)^2}\cdot(1+\tau_k)^{-(1+\tau_k)^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

де $\tau_k = \sqrt{\gamma}\cdot\alpha_k$, $k=\overline{1,3}$.

Розглянемо функцію

$$\Psi(x) = x^{2x^2+2}\cdot|1-x|^{-(1-x)^2}\cdot(1+x)^{-(1+x)^2}.$$

Нехай $\gamma=\gamma_3$. Покажемо, що для довільних τ_1, τ_2, τ_3 таких, що $\tau_1+\tau_2+\tau_3 = 2\sqrt{\gamma_3}$, виконується нерівність

$$\Psi(\tau_1)\Psi(\tau_2)\Psi(\tau_3) \leqslant \Psi^3\left(\frac{2}{3}\sqrt{\gamma_3}\right). \tag{15}$$

Для $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in (0, x_0]$, $x_0 \approx 0,88441$, твердження (15) слідує з логарифмічної опуклості функції $\Psi(x)$.

Нехай $\tau_3 \in (x_0, \infty)$, $\tau_1, \tau_2 \in (0, x_0]$, тоді

$$\prod_{k=1}^{3} \Psi(\tau_k) \leqslant \Psi(x_0)\Psi^2(x_1) \leqslant \Psi^3\left(\frac{2}{3}\sqrt{\gamma_3}\right) \tag{16}$$

(так як $\Psi(x_0)\Psi^2(x_1) \approx 5,268 \cdot 10^{-4}$, а $\Psi^3\left(\frac{2}{3}\sqrt{\gamma_3}\right) \approx 5,289 \cdot 10^{-4}$).

Нехай $\tau_2, \tau_3 \in (x_0, \infty)$, $\tau_1 \in (0,\, x_0]$, тоді

$$\Psi^2(\tau_2)\Psi(\tau_1) \leqslant \Psi^2(x_0)\Psi(x_1) < \Psi^3\left(\frac{2}{3}\sqrt{\gamma_3}\right)$$

(так як $\Psi(x_0)^2 \cdot \Psi(x_1) \approx 4,252 \cdot 10^{-4}$, а $\Psi^3\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma_3}\right) \approx 5,289 \cdot 10^{-4}$).

Звідси маємо, що твердження (15) має місце для всіх τ_1, τ_2, τ_3. Справедливість теореми 2 при $\gamma \in (0; 1,125]$ слідує з роботи [6, с. 267]. Якщо $1,125 < \gamma < \gamma_3$, то в нерівності (16) величина $\Psi^3\left(\frac{2}{3}\sqrt{\gamma_3}\right)$ буде збільшуватися, а добуток $\Psi(x_0)\Psi^2(x_1)$ залишиться незмінним. Таким чином, приходимо до висновку, що нерівність (16), а отже і (15), має місце і для $\gamma \in (0, \gamma_3]$. Реалізація знака рівності перевіряється безпосередньо.

Теорема 2 доведена.

5. Доведення теореми 3. Аналогічно доведенню теорем 1 та 2, враховуючи, що $n = 4$ маємо співвідношення

$$J_4(\gamma) \leqslant \frac{16}{\gamma^2}\left(\prod_{k=1}^{4}\left(\tau_k^{2\tau_k^2+2} \cdot |1-\tau_k|^{-(1-\tau_k)^2} \cdot (1+\tau_k)^{-(1+\tau_k)^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}},$$

де $\tau_k = \sqrt{\gamma} \cdot \alpha_k$, $k = \overline{1,4}$. Нехай

$$\Psi(x) = x^{2x^2+2} \cdot |1-x|^{-(1-x)^2} \cdot (1+x)^{-(1+x)^2}.$$

Розглянемо випадок $\gamma = \gamma_4$. Покажемо, що для довільних τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 таких, що $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = 2\sqrt{\gamma_4}$, виконується нерівність

$$\prod_{k=1}^{4} \Psi(\tau_k) \leqslant \Psi^4\left(\frac{1}{2}\sqrt{\gamma_4}\right). \tag{17}$$

Для $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \in (0, x_0]$, $x_0 \approx 0,88441$, твердження (17) слідує з логарифмічної опуклості функції $\Psi(x)$.

Нехай для простоти $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_3 \leqslant \tau_4$. Нехай $\tau_4 \in [x_0, \infty)$, $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in (0, x_0)$, тоді

$$\prod_{k=1}^{4} \Psi(\tau_k) = \prod_{k=1}^{3} \Psi(\tau_k) \cdot \Psi(\tau_4) \leqslant$$

$$\leqslant \Psi^3(\tau_1) \cdot \Psi(x_0) < \Psi^4 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\gamma_4} \right)$$

(оскільки $\Psi^3(\tau_1) \cdot \Psi(x_0) \approx 4,14751 \cdot 10^{-5}$, а $\Psi^4 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\gamma_4} \right) \approx 4,32133 \cdot 10^{-5}$). Додатково використовуючи деякі проміжні обрахунки приходимо до висновку, що нерівність (17) має місце для всіх $\tau_k \in (0, x_0]$, $k = \overline{1,3}$, $\tau_4 \in (x_0, \infty]$.

Розглянемо випадок $\tau_3, \tau_4 \in (x_0, \infty)$, $\tau_1, \tau_2 \in (0,\, x_0]$. Тоді

$$\prod_{k=1}^{4} \Psi(\tau_k) \leqslant \Psi^2(x_0) \Psi^2(x_1) < \Psi^4 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\gamma_4} \right)$$

(так як $\Psi(x_0)^2 \cdot \Psi^2(x_1) \approx 3,68887 \cdot 10^{-5}$).

Нехай $\tau_2, \tau_3, \tau_4 \in (x_0, \infty)$, $\tau_1 \in (0,\, x_0]$, тоді

$$\prod_{k=1}^{4} \Psi(\tau_k) \leqslant \Psi(x_1) \Psi^3(x_0) < \Psi^4 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\gamma_4} \right)$$

(оскільки $\Psi(x_1) \cdot \Psi^3(x_0) \approx 2,97777 \cdot 10^{-5}$).

Звідси слідує, що твердження (17) має місце для всіх τ_1, τ_2, τ_3, τ_4. Із всього вище сказаного, отримуємо, що для екстремального набору можливий тільки випадок, коли $\tau_k \in (0,\, x_0]$, $k = \overline{1,4}$, і $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$. Справедливість теореми 3 при $\gamma \in (0; 2]$ слідує з роботи [6, с. 267]. Для всіх $\gamma < \gamma_4$ всі попередні міркування зберігаються. Таким чином, (17) має місце і для $\gamma \in (0, \gamma_4]$. Отже, виконується наступне співвідношення

$$J_4(\gamma) \leqslant \frac{16}{\gamma^2} \left(\Psi \left(\frac{1}{2} \sqrt{\gamma} \right) \right)^2, \quad \gamma \in (0, \gamma_4].$$

Реалізація знака рівності перевіряється безпосередньо. Теорема 3 доведена.

6. Наслідки. Наведемо декілька цікавих наслідків, отриманих з основних результатів. Нехай $\mathfrak{L}$ позначає клас всіх однолистих і регулярних в крузі $|z|<1$ функцій $w=f_k(z)$, $k\in\{0,\overline{1,n},\infty\}$, які відображають круг $|z|<1$ на неперетинні області B_0, B_k, B_∞ такі, що містять відповідні точки 0, a_k, ∞, $k=\overline{1,n}$, і причому $f_0(0)=0$, $f_k(0)=a_k$, $f_\infty(0)=\infty$, $k=\overline{1,n}$.

Наслідок 1. *Нехай $0<\gamma\leq\gamma_2$, $\gamma_2=0,65$. Тоді для довільної 2-променевої системи точок $A_2=\{a_k\}_{k=1}^{2}$ такої, що $|a_k|=1$, $k=\overline{1,2}$, і довільного набору взаємно неперетинних однозв'язних областей B_0, B_1, B_2, B_∞ ($0\in B_0$, $\infty\in B_\infty$, $a_1\in B_1$, $a_2\in B_2$), і набору функцій $f_0(z)$, $f_\infty(z)$, $f_1(z)$, $f_2(z)$ класу $\mathfrak{L}$, справедлива нерівність*

$$[|f_0'(0)|\cdot|f_\infty'(0)|]^{\gamma}\prod_{k=1}^{2}|f_k'(0)|\leqslant[r\left(\Lambda_0,0\right)r\left(\Lambda_\infty,\infty\right)]^{\gamma}\prod_{k=1}^{2}r\left(\Lambda_k,\lambda_k\right),$$

де області $\Lambda_0=B_0$, $\Lambda_\infty=B_\infty$, $\Lambda_1=B_1$, $\Lambda_2=B_2$ — кругові області, а точки 0, ∞, $\lambda_1=a_1$, $\lambda_2=a_2$ — полюси квадратичного диференціалу (3).

Наслідок 2. *Нехай $0<\gamma\leq\gamma_3$, $\gamma_3=1,22$. Тоді для довільної 3-променевої системи точок $A_3=\{a_k\}_{k=1}^{3}$ такої, що $|a_k|=1$, $k=\overline{1,3}$, і довільного набору взаємно неперетинних однозв'язних областей B_0, B_k, B_∞ ($0\in B_0$, $\infty\in B_\infty$, $a_k\in B_k$), і набору функцій $f_0(z)$, $f_\infty(z)$, $f_k(z)$ класу $\mathfrak{L}$, $k=\overline{1,3}$, справедлива нерівність*

$$[|f_0'(0)|\cdot|f_\infty'(0)|]^{\gamma}\prod_{k=1}^{3}|f_k'(0)|\leqslant[r\left(\Lambda_0,0\right)r\left(\Lambda_\infty,\infty\right)]^{\gamma}\prod_{k=1}^{3}r\left(\Lambda_k,\lambda_k\right),$$

де області $\Lambda_0=B_0$, $\Lambda_\infty=B_\infty$, $\Lambda_k=B_k$ — кругові області, а точки 0, ∞, $\lambda_k=a_k$, $k=\overline{1,3}$, — полюси квадратичного диференціалу (5).

Наслідок 3. *Нехай $0<\gamma\leq\gamma_4$, $\gamma_4=2,15$. Тоді для довільної 4-променевої системи точок $A_4=\{a_k\}_{k=1}^{4}$ такої, що $|a_k|=1$, $k=\overline{1,4}$, і довільного набору взаємно неперетинних однозв'язних областей B_0, B_k, B_∞ ($0\in B_0$, $\infty\in B_\infty$, $a_k\in B_k$), і набору функцій $f_0(z)$, $f_\infty(z)$, $f_k(z)$ класу $\mathfrak{L}$, $k=\overline{1,4}$, справедлива нерівність*

$$[|f_0'(0)|\cdot|f_\infty'(0)|]^{\gamma}\prod_{k=1}^{4}|f_k'(0)|\leqslant[r\left(\Lambda_0,0\right)r\left(\Lambda_\infty,\infty\right)]^{\gamma}\prod_{k=1}^{4}r\left(\Lambda_k,\lambda_k\right),$$

де області $\Lambda_0=B_0$, $\Lambda_\infty=B_\infty$, $\Lambda_k=B_k$ — кругові області, а точки 0, ∞, $\lambda_k=a_k$, $k=\overline{1,4}$, — полюси квадратичного диференціалу (7).

Література

[1] М.А. Лаврентьев. *К теории конформных отображений.* Тр. физ.-мат. ин-та АН СССР. **5**, (1934), 159–245.

[2] Г.М. Голузин. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М.: Наука, 1966.

[3] Дж.А. Дженкинс. *Однолистные функции и конформные отображения.* М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

[4] В.Н. Дубинин. *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении.* Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. **168**, (1988), 48–66.

[5] В.Н. Дубинин. *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного.* Успехи мат. наук. **49**, № 1(295), (1994), 3–76.

[6] Г.В. Кузьмина. *Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы.* Зап. науч. сем. ПОМИ. **276**, (2001), 253–275.

[7] А.К. Бахтин, Г.П. Бахтина, Ю.Б. Зелинский. *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе.* Праці ін-ту мат-ки НАН України.**73**, (2008).

[8] В.Н. Дубинин. *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* Владивосток: "Дальнаука"ДВО РАН, 2009.

[9] А.К. Бахтин, А.Л. Таргонский. *Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы.* Нелінійні коливання. **8**, (3), (2005), 298–303.

[10] А.К. Бахтин, А.Л. Таргонский. *О произведении внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств.* Доп. НАН України. **5**, (2008), 7–12.

[11] А.К. Бахтин. *Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности.* Укр. мат. журн.**58**, (7), (2006, 867–886.

[12] Г.В. Кузьмина. *Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров.* Зап. науч. сем. ПОМИ. **302**, (2003), 52–67.

[13] Е.Г. Емельянов. *К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей.* Зап. науч. сем. ПОМИ. **286**, (2002), 103–114.

[14] В.Н. Дубинин. *Метод симметризации в геометрической теории функций.* Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Владивосток, 1988.

[15] А.Л. Таргонский. *Екстремальні задачі теорії однолистих функцій.* Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Київ, 2005.

[16] Л.В. Ковалев. *К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности.* Дальневосточный матем. сборник. **2**, (1996), 96–98.

[17] А.К. Бахтин, И.В. Денега. *Некоторые оценки функционалов для N-лучевых систем точек.* Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем., **8**, (1), (2011), 12–21.

[18] И.В. Денега. *Некоторые неравенства для внутренних радиусов частично неналегающих областей.* Доп. НАН України. **5**, (2012), 19–22.

[19] А.К. Бахтин, И.В. Денега. *Некоторые оценки функционалов для N-лучевых систем точек.* Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем., **8**, (1), (2011), 12 – 21.

Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 130–142

УДК 517.9+531.19+530.145

В.А. Болух

(Інститут математики НАН України, Київ)

Розклад Бріджеса–Федербуша для систем з посилено надстійкою взаємодією

The Mayer series expansion in the Bridges–Federbush form for a system of point particles interacting by the nonintegrable interaction potential is constructed.

В роботі побудовано розклад Майєра у формі Бріджеса–Федербуша для системи точкових частинок, які взаємодіють за допомогою неінтегрованого потенціалу взаємодії.

1 Вступ

Одним із методів дослідження статистичних систем є розклад величин, що їх характеризують, за степенями активності z. Такий розклад називають розкладом Майєра. Існують методи, за допомогою яких можна обчислювати коефіцієнти такого розкладу, одним із яких є метод Бріджеса–Федербуша [1]. Особливістю цього методу є нова форма запису коефіцієнтів розкладу, аналітичний вигляд яких описується вкладами від графів-дерев на відміну від майєрівських графів. Аналітичним вкладом кожної лінії, що з'єднує дві вершини $x \in \mathbb{R}^d$ і $y \in \mathbb{R}^d$

© Institute of Mathematics, 2014

такого графа є парний потенціал взаємодії $\phi(|x-y|)$, який повинен бути інтегрованим. В методі Бріджеса–Федербуша значно спрощується доведення збіжності рядів в області малих значень параметра активності.

У роботі розглядається система точкових частинок, які взаємодіють неінтегровним в околі нуля потенціалом. Такі системи можна розглядати в рамках моделі так званого *коміркового газу*, яка була введена О.Л. Ребенком [2] як апроксимація неперервних систем статистичної механіки з посилено надстійкими взаємодіями [3]. Потенціали таких взаємодій не є інтегровними, тому безпосередньо застосувати метод Бріджеса-Федербуша до таких системи не можна. В роботі [1] була запропонована ідея побудови такого розкладу коли потенціал складається з стійкого інтегровного потенціалу і деякого неінтегровного позитивного швидко спадаючого потенціалу, але самі розклади не були побудовані. Посилено надстійкі потенціали, які ми розглядаємо не задовольняють цим вимогам. Тому потрібно застосувати деякі проміжні технічні конструкції, щоб коректно побудувати цей розклад. У цьому короткому повідомленні ми проробляємо цю технічну роботу і приводимо доведення збіжності. Зауважимо, також, що для більш розгорнутого знайомства з проблемами статистичної механіки, яким присв'ячена ця робота, читач може звернутись до монографій [4, 5].

2 Означення системи

В роботі буде розглядатися нескінченна система тотожних точкових частинок у просторі $\mathbb{R}^d$, взаємодію яких будемо описувати парним потенціалом $\phi(|x-y|)$, $x, y \in \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Через $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ми позначимо сім'ю всіх борелівських множин в $\mathbb{R}^d$. Визначимо простір конфігурацій в $\mathbb{R}^d$ як множину локально скінчених підмножин (множину положень частинок у просторі $\mathbb{R}^d$):

$$\Gamma = \Gamma_{\mathbb{R}^d} := \left\{ \gamma \subset \mathbb{R}^d \big| \; |\gamma \cap \Lambda| < \infty, \quad \text{для} \quad \text{всіх} \quad \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d) \right\}, \qquad (1)$$

де $|A| := card\{A\}$ це кількість точок множини A, а через $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ будемо позначати систему всіх обмежених множин з $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Визначимо також простір скінчених конфігурацій Γ_0:

$$\Gamma_0 = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}_0} \Gamma^{(n)}, \quad \Gamma^{(n)} := \{\eta \subset \mathbb{R}^d \mid |\eta| = n, \ n \in \mathbb{N}_0\}, \quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{2}$$

Простір скінчених конфігурацій в обмеженому об'ємі $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ позначимо через Γ_Λ:

$$\Gamma_\Lambda := \left\{ \gamma \in \Gamma_0 | \ \gamma \subset \Lambda, \ \ \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d) \right\}. \tag{3}$$

Позначимо через σ міру Лебега на $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Для довільного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо міру $\sigma^{\otimes n}$ на множині

$$\widetilde{(\mathbb{R}^d)^n} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^d)^n \right| \left. x_k \neq x_l, \text{ якщо } k \neq l \right\}, \tag{4}$$

а отже як міру $\sigma^{(n)}$ на $\Gamma^{(n)}$ через відображення

$$sym_n : \widetilde{(\mathbb{R}^d)^n} \ni (x_1, ..., x_n) \mapsto \{x_1, ..., x_n\} \in \Gamma^{(n)}. \tag{5}$$

За допомогою міри $\sigma^{(n)}$ визначимо міру Лебега–Пуассона (або ненормовану міру Пуассона)λ_σ на σ-алгебрі $\mathcal{B}(\Gamma_0)$ формулою:

$$\lambda_{z\sigma} := \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \sigma^{(n)}. \tag{6}$$

Звуження міри λ_σ на $\mathcal{B}(\Gamma_\Lambda)$ ми також будемо позначати $\lambda_\sigma \equiv \lambda_\sigma^\Lambda$.

(A): Умови на потенціал взаємодії. *Розглянемо потенціали загального вигляду ϕ, які є неперервними функціями на $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, і для яких існують константи*
$r_0 > 0$, $R > r_0$, $\varphi_0 > 0$, $\varphi_1 > 0$, *і* $\varepsilon_0 > 0$ *такі, що:*

$$1)\ \phi(|x|) \equiv -\phi^-(|x|) \geq -\frac{\varphi_1}{|x|^{d+\varepsilon_0}} \quad \text{для} \quad |x| \geq R, ; \tag{7}$$

$$2)\ \phi(|x|) \equiv \phi^+(|x|) \geq \frac{\varphi_0}{|x|^s},\ s \geq d \quad \text{для} \quad |x| \leq r_0, \tag{8}$$

де

$$\phi^{+}(|x|) := \max\{0, \phi(|x|)\},\ \phi^{-}(|x|) := -\min\{0, \phi(|x|)\}, \tag{9}$$

а

$$\phi(|x|)\} \ = \ \phi^{+}(|x|) \ - \ \phi^{-}(|x|). \tag{10}$$

Потенціали такого класу є посилено надстійкими (див., наприклад, [3, 2]), але для побудови розкладу достатньою умовою є умова стійкості взаємодії:

$$U(\gamma) \ := \ U_{\phi}(\gamma) \ = \sum_{\{x,y\}\subset\gamma} \phi(|x-y|) \ \geq \ -B|\gamma| \tag{11}$$

з деякою константою $B \geq 0$.

У молекулярній фізиці має безпосереднє застосування потенціал Ленарда–Джонса

$$\phi(|x|) = \frac{C}{|x|^{12}} - \frac{D}{|x|^{6}}, \tag{12}$$

де $C > 0$, $D > 0$ – деякі константи. В роботі ми будемо розглядати потенціали такого ж типу, які мають поведінку зображену на рис. 1.1.

(13)

Рис. 1.1.

3 Розклад Бріджеса–Федербуша

Велика статистична сума для системи, яка знаходиться в деякому обмеженому об'ємі $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ визначається формулою:

$$Z_{\Lambda} = \int\limits_{\Gamma_{\Lambda}} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{14}$$

Термодинамічний потенціал, який відповідає тиску визначається за формулою:

$$p(z,\beta) \ = \ \frac{1}{\beta} \lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{R}^d} \frac{1}{\sigma(\Lambda)} \log Z_{\Lambda}(z,\beta). \tag{15}$$

Розклад Майєра, який ми зараз побудуємо є ряд

$$\beta p(z,\beta) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\beta) z^n. \tag{16}$$

Представимо велику статистичну суму $Z_\Lambda \;=\; Z_\Lambda(z,\beta)$ у вигляді:

$$Z_\Lambda \;=\; \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_\Lambda(N), \tag{17}$$

де

$$Z_\Lambda(N) \;=\; \int_{\Gamma_\Lambda^{(N)}} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_\sigma(d\gamma) = \frac{1}{N!}\int_{\Lambda^N} (dx)^N e^{-\beta U^{(N)}}, \tag{18}$$

де для $\gamma = \{x_1, ..., x_N\},\ |\gamma| = N$, а

$$U^{(N)} \;:=\; U(\{x_1,...,x_N\}) \;=\; \sum_{1\le i<j\le N} \phi(|x_i - x_j|) := \sum_{1\le i<j\le N} \phi_{ij}. \tag{19}$$

Якщо ми виділимо перші k частинок, то енергія $N-k$ частинок

$$\begin{aligned} U^{(N-k)} \;:=\; & U(\{x_{k+1},...,x_N\}) \;= \\ =\; & \sum_{k+1\le i<j\le N} \phi(|x_i - x_j|) := \sum_{k+1\le i<j\le N} \phi_{ij}. \end{aligned} \tag{20}$$

Перш ніж побудувати розклад Бріджеса–Федербуша, зробимо деяке проміжне розбиття потенціалу ϕ. Нехай v позитивний інтегрований парний потенціал, такий, що

$$w(|x|) \;:=\; \phi^+(|x|) \;-\; v(|x|) \;\ge 0, \text{ для всіх } x \in \mathbb{R}^d, \tag{21}$$

а потенціал

$$\varphi \;=\; v \;-\; \phi^- \tag{22}$$

є стійким, тобто

$$U_\varphi(\gamma) \;=\; \sum_{\{x,y\}\subset\gamma} \varphi(|x-y|) \;\ge\; -B_1|\gamma| \tag{23}$$

з деякою константою $B_1 \geq 0$. Тоді

$$\phi \;=\; w \;+\; \varphi,\; U(\gamma) \;=\; U_\phi(\gamma) \;=\; U_w(\gamma) \;+\; U_\varphi(\gamma). \tag{24}$$

Введемо параметри інтенсивності взаємодії. Нехай s_k $(0 \leq s_k \leq 1)$ характеризує інтенсивність взаємодії перших k частинок з рештою $N-k$ частинками. Підставимо спершу параметр s_1 у вираз для енергії N частинок таким чином, щоб при $s_1 = 0$ взаємодія першої частинки з іншими виключалася, а при $s_1 = 1$ зберігалася повна взаємодія усіх N частинок. Спершу введемо ці параметри в енергію $U_\varphi(\gamma)$. Тоді при $0 < s_1 < 1$ енергію $U_\varphi^{(N)}$ можна записати таким чином:

$$V_1^{(N)}(s_1) \;=\; (1-s_1)V_0^{(N),(1)} \;+\; s_1 V_0^{(N)}, \tag{25}$$

де

$$V_0^{(N),(1)} \;:=\; U_\varphi^{(1)} \;+\; U_\varphi^{(N-1)},\ \text{а}\ V_0^{(N)} \;:=\; U_\varphi^{(N)}. \tag{26}$$

Тепер у цей вираз підставимо параметр s_2, відокремлюючи взаємодію 1-ї і 2-ї частинки від $(N-2)$-х частинок, що залишились. В результаті отримуємо вираз:

$$V_2^{(N)}(s_1, s_2) \;=\; (1-s_2)V_1^{(N),(2)}(s_1) \;+\; s_2 V_1^{(N)}(s_1), \tag{27}$$

де $V_1^{(N),(2)}(s_1) \;:=\; V_1^{(N)}(s_1) \;+\; U_\varphi^{(N-2)}$. Після підстановки параметра s_k маємо:

$$\begin{aligned} V_k^{(N)}(s_1, ..., s_k) \;=\; & (1-s_k)V_{k-1}^{(N),(k)}(s_1, ..., s_{k-1}) \;+ \\ & +\; s_k V_{k-1}^{(N)}(s_1, ..., s_{k-1}), \end{aligned} \tag{28}$$

де $V_{k-1}^{(N),(k)}(s_1, ..., s_{k-1}) \;:=\; V_{k-1}^{(k)}(s_1, ..., s_{k-1}) + U_\varphi^{(N-k)}$,
а при $k = N-1$

$$V_{N-1}^{(N)}(\sigma_{N-1}) \;:=\; V^{(N)}(\sigma_{N-1}) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} s_i s_{i+1} \cdots s_{j-1} \varphi_{ij}, \tag{29}$$

де для скорочення запису введено позначення

$$\sigma_{N-1} \;:=\; (s_1, ..., s_{N-1}) \;:=\; (s)_{N-1}. \tag{30}$$

Відповідну послідовність для потенціалу w означимо наступним чином:

$$W^{(N)}(\sigma_{N-1}) = -\frac{1}{\beta}\sum_{1\le i<j\le N}\ln(1+s_i\dots s_{j-1}u_{ij}), \tag{31}$$

де

$$u_{ij} = e^{-\beta w_{ij}} - 1. \tag{32}$$

При $s_1 = \dots = s_{N-1} = 1$

$$W^{(N)}((1)_{N-1}) \;=\; U_w \;=\; \sum_{1\le i<j\le N} w_{ij}. \tag{33}$$

Вигляд енергії (31) виникає після підстановки параметра s не перед потенціалом w, як ми це робили у виразі для U_φ, а заміною експоненти $\exp[-\beta w_{ij}]$ на вираз $1+su_{ij}$, який при $s=1$ збігається з експонентою $\exp[-\beta w_{ij}]$, а при $s=0$ взаємодія між i-ю і j-ю частинками зникає.

Повну потенціальну енергію N-частинок з введеними параметрами інтенсивності позначимо наступним чином:

$$U^{(N)}(\sigma_{N-1}) \;:=\; V^{(N)}(\sigma_{N-1}) \;+\; W^{(N)}(\sigma_{N-1}) \tag{34}$$

Введемо також додаткові позначення, які надалі будуть використані:

$$\varphi'_{ij} = \varphi_{ij} - \frac{1}{\beta}\frac{u_{ij}}{1+s_i\dots s_{j-1}u_{ij}} \tag{35}$$

$$K_l^\Lambda = \frac{1}{l}\int\limits_{\Lambda^l}(dx)^l J^{(l)}(x)_l, \tag{36}$$

де

$$\begin{aligned} J^{(1)}(x)_1 = J^{(1)}(x_1) \;&=\; 1, \\ J^{(l)}(x)_l = (-\beta)^{l-1}\int\limits_0^1 d\sigma_{l-1}e^{-\beta U(\sigma_{l-1})}&\prod_{j=2}^{l}[s_1\dots s_{j-2}\varphi'_{1j} + \\ &+ s_2\dots s_{j-2}\varphi'_{2j} + \dots + s_{j-2}\varphi'_{(j-2)j} + \varphi'_{(j-1)j}], \end{aligned} \tag{37}$$

де $l \geq 2$, а

$$Z_\Lambda(N-l) = \frac{1}{(N-l)!} \int\limits_{\Lambda^{N-l}} (dx)^{N-l} \prod_{l+1 \leq i<j \leq N} e^{-\beta(w_{ij}+\varphi_{ij})}. \tag{38}$$

В (37) ми також ввели позначення:

$$\int\limits_0^1 d\sigma_{N-1} = \int\limits_0^1 ds_1 \int\limits_0^1 ds_2 \ldots \int\limits_0^1 ds_{N-1}. \tag{39}$$

Перетворимо функціонал $Z_\Lambda(N)$ наступним чином. Для початку відокремимо взаємодію першої частинки від решти, ввівши параметр інтенсивності взаємодії s_1 і використовуючи тотожність:

$$e^{f(1)} \; = \; e^{f(0)} \; + \; \int\limits_0^1 ds_1 f^{'}(s_1) e^{f(s_1)}. \tag{40}$$

Тоді вираз (18) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} Z_\Lambda(N) &= \frac{1}{N!} \int\limits_{\Lambda^N} (dx)^N \prod_{1 \leq i<j \leq N} e^{-\beta(w_{ij}+\varphi_{ij})} = \\ &= \frac{1}{N!} \int\limits_{\Lambda^N} (dx)^N \prod_{2 \leq i<j \leq N} e^{-\beta(w_{ij}+\varphi_{ij})} \prod_{j=2} e^{-\beta(w_{ij}+\varphi_{ij})} = \\ &= \frac{1}{N!} \int\limits_{\Lambda^N} (dx)^N \prod_{2 \leq i<j \leq N} e^{-\beta(w_{ij}+\varphi_{ij})} \times \\ &\times [1 + \int\limits_0^1 ds_1 \frac{d}{ds_1} [\prod_{j=2}^N e^{-\beta s_1 \varphi_{1j}} (1 + s_1 u_{1j})]], \end{aligned} \tag{41}$$

де u_{1j} визначено в (32). В інтегралі за змінною s_1 виконаємо диференціювання:

$$\int_0^1 ds_1 \frac{d}{ds_1}[\prod_{j=2}^{N} e^{-\beta s_1 \varphi_{1j}}(1+s_1 u_{1j})]] = \tag{42}$$
$$= (-\beta)\int_0^1 ds_1 \sum_{j'=2}^{N}\left(\varphi_{1j'} + \frac{u_{1j'}}{1+s_1 u_{1j'}}\right)\prod_{j=2}^{N} e^{-\beta s_1 \varphi_{1j}}(1+s_1 u_{1j}).$$

Підставимо (42) у вираз (41) і скористаємося симетричністю підінтегральної функції відносно перестановки змінних $x_1, \ldots, x_N$. В результаті отримаємо рівність, враховуючи позначення (36), (37) для $l = 1$:

$$Z_\Lambda(N) = \frac{1}{N} K_1^\Lambda Z_\Lambda(N-1) +$$
$$+ \frac{(-\beta)}{(N-2)!N}\int_{\Lambda^N}(dx)^N \prod_{2\le i<j\le N} e^{-\beta(w_{ij}+\varphi_{ij})}\times \tag{43}$$
$$\times \int_0^1 ds_1 \varphi_{12}^{'} \prod_{j=2}^{N} e^{-\beta s_1 \varphi_{1j}}(1+s_1 u_{1j}),$$

де $\varphi_{12}^{'}$ визначено формулою (35).

В множниках добутків правої частини (43) встановимо параметр інтенсивності взаємодії s_2 між першими двома частинками та іншими $(N-2)$-ма, використавши тотожність:

$$\prod_{j=3}^{N} e^{-\beta(w_{2j}+\varphi_{2j})} e^{-\beta s_1 \varphi_{1j}}(1+s_1 u_{1j}) = \tag{44}$$
$$= 1 + \int_0^1 ds_2 \frac{d}{ds_2}\left[\prod_{j=3}^{N} e^{-\beta s_1 s_2 \varphi_{1j}}(1+s_1 s_2 u_{1j}) e^{-\beta s_2 \varphi_{2j}}(1+s_2 u_{2j})\right].$$

Пророблюючи усі операції як і на першому кроці і враховуючи позначення (29),(31), (34), (35), (36), (37) для $l = 2$, отримаємо наступний член розкладу рівності (43):

$$
\begin{aligned}
Z_\Lambda(N) = {} & \frac{1}{N} K_1^\Lambda Z_\Lambda(N-1) + \frac{2}{N} K_2^\Lambda Z_\Lambda(N-2) + \\
& + \frac{(-\beta)^2}{(N-3)!N} \int\limits_{\Lambda^N} (dx)^N \prod_{3 \le i < j \le N} e^{-\beta(w_{ij}+\varphi_{ij})} \times \\
& \times \int\limits_0^1 ds_1 \int\limits_0^1 ds_2 \varphi_{12}^{'} (s_1 \varphi_{13}^{'} + \phi_{23}^{'}) e^{-\beta U^{(2)}(s_1)} \times \\
& \times \prod_{j=3}^N e^{-\beta[s_1 s_2 \varphi_{1j} \,+\, s_2 \varphi_{2j}} (1 + s_1 s_2 u_{1j})(1 + s_2 u_{2j}).
\end{aligned} \tag{45}
$$

Продовжуючи цей процес до тих пір, доки не буде вичерпано усі змінні, отримаємо розклад:

$$
Z_\Lambda(N) = \sum_{l=1}^N \frac{l}{N} K_l^\Lambda Z_\Lambda(N-l). \tag{46}
$$

Підставимо праву частину тотожності (46) у вираз для статистичної суми (17) і продиференціюємо за змінною z, припускаючи, що ряд $\sum_{n\ge1} n z^{n-1} K_n^\Lambda$ рівномірно збігається в деякому околі точки $z = 0$ (це буде доведено нижче). Тоді отримаємо просте рівняння:

$$
\frac{dZ_\Lambda}{dz} = \left(\sum_{n=1}^\infty n z^{n-1} K_n^\Lambda \right) Z_\Lambda. \tag{47}
$$

Остаточно для статистичної суми отримуємо представлення:

$$
Z_\Lambda \;=\; \exp\left(\sum_{n=1}^\infty z^n K_n^\Lambda \right), \tag{48}
$$

а враховуючи означення (15) і (16):

$$
b_n(\beta) \;=\; \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d} \frac{1}{\sigma(\Lambda)} K_n^\Lambda. \tag{49}
$$

4 Доведення збіжності

Збіжність розкладу Майєра виражає наступна теорема.

Теорема 1. Нехай потенціал взаємодії задовольняє умови **(A)** (див. (7)-(9)). Тоді існує границя

$$\lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{R}^d}\frac{1}{\sigma(\Lambda)}\log Z_\Lambda(z,\beta) \ = \ \beta p(z,\beta) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\beta)z^n \tag{50}$$

для достатньо малих значень активності z, які визначаються нерівністю:

$$z\beta e^{\beta B_1+1}(\|\varphi\|_1 \ + \ \|u\|_1) \ < \ 1, \tag{51}$$

де

$$\|f\|_1 \ := \ \int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|dx \ < \infty. \tag{52}$$

Доведення. Представимо тепер добуток сум в $J^{(n)}(x)_n$ (див. формулу (37)) у вигляді суми добутків. Тоді

$$J^{(n)}(x)_n = \sum_{\eta} J^{(n)}_\eta(x)_n, \tag{53}$$

де

$$J^{(n)}_\eta(x)_n = (-\beta)^{n-1}\int_0^1 d\sigma_{n-1}f(\eta,\ \sigma_{n-1})\left(\prod_{i=2}^{n}\varphi^{'}_{\eta(i)i}\right)e^{-\beta U^{(n)}(\sigma_{n-1})}, \tag{54}$$

а η це відображення

$$\eta \ : \ \{2,3,...,n\} \ \mapsto \ \{1,2,...,n-1\}, \ \eta(i) \ < \ i, \tag{55}$$

тобто $\eta(k)$ може приймати значення тільки у множині $\{1,2,...,k-1\}$. Добуток в (54) можна розглядати як внесок графа-дерева з вершинами у точках $\{x_1,...,x_n\}$, а кожній лінії, що з'єднує вершину $x_{\eta(i)}$ і вершину x_i, відповідає фактор $\varphi^{'}_{\eta(i)i}$. З визначення відображення (55) слідує, що кожний граф-дерево побудовано таким чином, що кожна

k-та вершина x_k(починаючи з другої) приєднується до вершини $x_{\eta(k)}$ графа, що складається з $(k-1)$-ї вершини. Зрозуміло, що усіх таких графів у сумі (57) буде $(n-1)!$. Але цей факторіал буде контролюватись інтегралом від функції $f(\eta,\ \sigma_{n-1})$, яка має такий вигляд:

$$f(\eta,\ \sigma_{n-1}) \ := \ \begin{cases} 1, \text{ якщо } n = 2 \\ \prod\limits_{i=2}^{n-1} s_{\eta(i)} \cdots s_{i-1}, \text{ якщо } n > 2, \end{cases} \tag{56}$$

який слідує безпосередньо з побудови розкладу. Легко переконатись (див. [1]), що

$$\sum_{\eta} \int\limits_0^1 d\sigma_{n-1} f(\eta,\ \sigma_{n-1}) \ \leq \ e^{n-1}. \tag{57}$$

Враховуючи цю оцінку легко довести наступну пропозицію.

Пропозиція 4.1. Нехай потенціал взаємодії задовольняє умовам **(A)** (див. (7)-(9)). Тоді

$$|K_n^{\Lambda}| \ \leq \ \beta^{n-1}(\|\varphi\|_1 \ + \ \|u\|_1)^{n-1} e^{n(\beta B_1+1)-1} \sigma(\Lambda). \tag{58}$$

Доведення слідує з того очевидного факту, що

$$0 \ < \ 1 + s_i \ldots s_{j-1} u_{ij} \ < \ 1, \tag{59}$$

внаслідок чого

$$|\varphi'_{\eta(i)i}(1 + s_{\eta(i)} \ldots s_{i-1} u_{\eta(i)i})| \ \leq \ |\varphi_{\eta(i)i}| \ + \ |u_{\eta(i)i}|, \tag{60}$$

трансляційної інваріантності добутку у правій частині (54) за змінними $x_1, \ldots, x_n$, умови (23) та визначень (31)–(37) та (52)–(54).

Оцінка (58) забезпечує існування границі (49) і теореми 1. □

Автор висловлює подяку професору О.Л. Ребенку за критичні зауваження і увагу до роботи.

Література

[1] D. Brydges, P. Federbush. *A new form of the Mayer expansion in classical statistical mechanics.* – J. Math. Phys., 1978, **19**, No.10, p. 2064–2067.

[2] A.L. Rebenko. *Cell gas model of classical statistical systems.* – Reviews in Math. Phys., 2013, **25**, № 4, p. 1330006-1–28.

[3] A.L. Rebenko, M.V. Tertychnyi. *On stability, superstability and strong superstability of classical systems of statistical mechanics* . – Meth. Funct. Anal. and Topology, 2008, **14**, № 3, p. 287–296.

[4] Д. Рюэль. *Статистическая механика. Строгие результаты.* М.: Мир, 1971.

[5] Д.Я. Петрина, В.И. Герасименко, П.В. Малышев. *Математические основы классической статистической механики.* Київ: Наукова думка, 1985.

Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 168–179

УДК 517.9+531.19

Ігор Гап'як

(Київський національний університет ім. Т.Г. Шевченка)

gapjak@ukr.net

Кінетичні рівняння для системи пружних куль з початковими кореляціями

We consider a rigorous formalism for the description of the kinetic evolution of infinitely many hard spheres. We prove that the solution of the Cauchy problem of the generalized Enskog kinetic equation with the initial correlations in the Boltzmann–Grad asymptotics converges to the solution of the Boltzmann equation with the initial correlations. The existence of the Boltzmann–Grad scaling limit for the marginal functionals of the state is established.

Розглянуто основи кінетичного опису еволюції для системи нескінченного числа пружних куль. Доведено, що розв'язок задачі Коші для узагальненого кінетичного рівняння Енскоґа з початковими кореляціями в асимтотичній границі Больцмана–Ґреда збігається до розв'язку рівняння Больцмана з початковими кореляціями. Встановлено існування асимтотики Больцмана–Ґреда для маргінальних функціоналів стану.

1 Вступ

За останні два десятиріччя було досягнуто значного прогресу в розвитку математичної теорії нелінійного кінетичного рівняння Больцмана [1, 2]. Поряд з тим для кінетичного рівняння Енскоґа [3], яке є узагальненням рівняння Больцмана для щільних середовищ, багато проблем залишаються відкритими, що обумовлено головним чином

© Institute of Mathematics, 2014

апріорі сформульованою структурою інтеграла зіткнень цього нелінійного рівняння [4, 5].

В роботі авторів [6] дано строге обґрунтування виводу рівняння Енскоґа з динаміки системи нескінченного числа пружних куль. На основі сформульованих кластерних розкладів кумулянтів груп операторів системи пружних куль для початкових станів, які визначаються одночастинковою функцією розподілу, в просторі послідовностей інтегрованих функцій доведено еквівалентність початкової задачі для ієрархії ББГКІ і початкової задачі для узагальненого кінетичного рівняння Енскоґа та послідовності явно визначених функціоналів (маргінальних функціоналів стану) від розв'язку такого рівняння. В роботі [6] також встановлено зв'язок побудованого узагальненого кінетичного рівняння Енскоґа та марківських кінетичних рівнянь типу рівняння Енскоґа [4], для яких в [1],[7],[8] зокрема було досліджено існування границі Больцмана-Ґреда.

Дана робота присвячена побудові кінетичних рівнянь для системи пружних куль з врахуванням того, що в початковий момент стани системи пружних куль визначаються через одночастинкову функцію розподілу та кореляційні функції, зокрема, побудові кінетичних рівнянь Енскоґа та Больцмана.

2 Узагальнене кінетичне рівняння Енскоґа

Розглянемо систему частинок одиничної маси, які взаємодіють як пружні кулі з діаметром $\sigma > 0$. Кожна частинка системи характеризується фазовими координатами $(q_i, p_i) \equiv x_i \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $i \geq 1$. Для конфігурацій такої системи справедливі такі нерівності: $|q_i - q_j| \geq \epsilon$, $i \neq j \geq 1$, тобто множина $W_n \equiv \big\{(q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^{3n} \big| |q_i - q_j| < \epsilon$ хоча б для однієї пари $(i, j) : i \neq j \in (1, \ldots, n)\big\}$ є множиною заборонених конфігурацій, скейлінґовий параметр $\epsilon > 0$ - відношення діаметра $\sigma > 0$ частинок до значення середньої довжини їх вільного пробігу.

Еволюція системи n пружних куль описується групою ізометричних еволюційних операторів визначених в просторі інтегровних функцій [1]

$$
\begin{aligned}
&S_n(t,1,\ldots,n)f_n(x_1,\ldots,x_n) \doteq \qquad\qquad (1)\\
&\doteq \begin{cases} f_n\big(\mathtt{X}_1(t,x_1,\ldots,x_n),\ldots,\mathtt{X}_n(t,x_1,\ldots,x_n)\big), & \\ & (x_1,\ldots,x_n)\in(\mathbb{R}^{3n}\times(\mathbb{R}^{3n}\setminus W_n))\setminus\mathcal{M}_n^0,\\ 0, & (q_1,\ldots,q_n)\in W_n, \end{cases}
\end{aligned}
$$

де функція $\mathtt{X}_i(t)$ визначена при $t\in\mathbb{R}$ майже скрізь (множина $\mathcal{M}_n^0$ [1] - нульової лебеґової міри) на фазовому просторі $(\mathbb{R}^{3n}\times(\mathbb{R}^{3n}\setminus W_n))$ - фазова траєкторія i-ї частинки, яка побудована в [1].

Нехай початковий стан такої системи цілком визначається одночастинковою функцією розподілу F_1^0,

$$
F_s(t)_{|t=0}=\prod_{i=1}^{s}F_1^0(x_i)g_s(x_1,\ldots,x_s),\quad s\geq 1,
$$

де $g_s(x_1,\ldots,x_s)$ - деяка неперервно диференційована функція з компактним носієм, яка визначає початкову кореляцію системи s пружних куль. Тоді еволюція усіх можливих станів системи пружних куль в просторі інтегрованих функцій описується послідовністю $F(t\mid F_1(t))=(F_1(t,x_1),F_2(t,x_1,x_2\mid F_1(t)),\ldots,F_s(t,x_1,\ldots,x_s\mid F_1(t)),\ldots)$ маргінальних функціоналів стану $F_s(t,x_1,\ldots,x_s\mid F_1(t))$, $s\geq 2$, які явно визначаються через розв'язок $F_1(t,x_1)$ узагальненого кінетичного рівняння Енскоґа [6]. Якщо $s\geq 2$, елементи послідовності $F(t\mid F_1(t))$ зображуються розкладами [6]

$$
\begin{aligned}
&F_s\big(t,x_1,\ldots,x_s\mid F_1(t)\big)\doteq \qquad\qquad (2)\\
&\doteq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}dx_{s+1}\ldots dx_{s+n}\,\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{Y\},X\setminus Y)\prod_{i=1}^{s+n}F_1(t,x_i),
\end{aligned}
$$

де еволюційні оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, $n\geq 0$, визначаються такою формулою

$$\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{Y\},X\setminus Y)=n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{m_1=1}^{n}\ldots \tag{3}$$

$$\ldots\sum_{m_k=1}^{n-m_1-\ldots-m_{k-1}}\frac{1}{(n-m_1-\ldots-m_k)!}\widehat{\mathfrak{A}}_{1+n-m_1-\ldots-m_k}(t,\{Y\},$$

$$s+1,\ldots,s+n-m_1-\ldots-m_k)\prod_{j=1}^{k}\sum_{k_2^j=0}^{m_j}\ldots\sum_{k^j_{n-m_1-\ldots-m_j+s}=0}^{k^j_{n-m_1-\ldots-m_j+s-1}}\times$$

$$\times\prod_{i_j=1}^{s+n-m_1-\ldots-m_j}\frac{1}{(k^j_{n-m_1-\ldots-m_j+s+1-i_j}-k^j_{n-m_1-\ldots-m_j+s+2-i_j})!}\times$$

$$\times\widehat{\mathfrak{A}}_{1+k^j_{n-m_1-\ldots-m_j+s+1-i_j}-k^j_{n-m_1-\ldots-m_j+s+2-i_j}}(t,i_j,s+n-m_1-\ldots$$

$$\ldots-m_j+1+k^j_{s+n-m_1-\ldots-m_j+2-i_j},\ldots,s+n-m_1-\ldots-m_j+$$

$$+k^j_{s+n-m_1-\ldots-m_j+1-i_j}).$$

В останній формулі використано такі позначення: $(\{Y\},X\setminus Y)$ - множина індексів, яка складається із елементів $\{Y\},s+1,\ldots,s+n$ та $\{Y\}$ - множина, яка складається із одного елемента $Y\equiv(1,\ldots,s)$, $k_1^j\equiv m_j$, $k^j_{n-m_1-\ldots-m_j+s+1}\equiv 0$, та введено такі поняття: оператор $\widehat{\mathfrak{A}}_{1+n}(t)$ - кумулянт розсіяння

$$\widehat{\mathfrak{A}}_{1+n}(t,\{Y\},X\setminus Y)\doteq\mathfrak{A}_{1+n}(-t,\{Y\},X\setminus Y)g_s(x_1,\ldots,x_s)\prod_{i=1}^{s+n}\mathfrak{A}_1(t,i) \tag{4}$$

оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(t)$ - кумулянт $(1+n)$-го порядку груп операторів (1)

$$\mathfrak{A}_{1+n}(-t,\{Y\},X\setminus Y)\doteq \tag{5}$$
$$\doteq\sum_{\mathtt{P}:\,(\{Y\},\,X\setminus Y)=\bigcup_i X_i}(-1)^{|\mathtt{P}|-1}(|\mathtt{P}|-1)!\prod_{X_i\subset\mathtt{P}}S_{|X_i|}(-t,X_i),$$

де $\sum_{\mathtt{P}}$ – сума по всіх розбиттях $\mathtt{P}$ множини індексів $(\{Y\},\ X\setminus Y)\equiv(\{Y\},s+1,\ldots,s+n)$ на $|\mathtt{P}|$ непорожніх підмножин $X_i\in(\{Y\},X\setminus Y)$, що взаємно не перетинаються.

Наведемо приклади еволюційних операторів (3):

$$\mathfrak{V}_1(t,\{Y\}) = \widehat{\mathfrak{A}}_1(t,\{Y\}) \doteq S_s(-t,Y)g_s(x_1,\ldots,x_s)\prod_{i=1}^{s} S_1(t,i),$$

$$\mathfrak{V}_2(t,\{Y\},s+1) = \widehat{\mathfrak{A}}_2(t,\{Y\},s+1) - \widehat{\mathfrak{A}}_1(t,\{Y\})\sum_{i_1=1}^{s}\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,i_1,s+1).$$

Функціонали $F_s\big(t \mid F_1(t)\big)$, $s \geq 2$, існують і представляються збіжними по нормі простору інтегрованих функцій рядами за умови [6]:

$$\|F_1(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)} < e^{-(3s+2)}.$$

Перший елемент послідовності $F(t \mid F_1(t))$, тобто одночастинкова маргінальна функція розподілу, визначається задачею Коші для узагальненого кінетичного рівняння Енскоґа (при $t \geq 0$)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}F_1(t,x_1) = -\langle p_1, \frac{\partial}{\partial q_1}\rangle F_1(t,x_1) + \qquad (6)\\
&+\epsilon^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_+} dp_2\,d\eta\int_{\mathbb{R}^{3n}\times\mathbb{R}^{3n}} dx_3\ldots dx_{n+2}\langle\eta,(p_1-p_2)\rangle\times\\
&\times\big(\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{1^*,2^*_-\},3,\ldots,n+2)F_1(t,q_1,p_1^*)F_1(t,q_1-\epsilon\eta,p_2^*)-\\
&-\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{1,2_+\},3,\ldots,n+2)F_1(t,x_1)F_1(t,q_1+\epsilon\eta,p_2)\big)\prod_{i=3}^{n+2}F_1(t,x_i),
\end{aligned}$$

$$F_1(t)_{|t=0} = F_1^0, \qquad (7)$$

де $\langle\eta,(p_i-p_{s+1})\rangle \doteq \sum_{\alpha=1}^{3}\eta^\alpha(p_i^\alpha - p_{s+1}^\alpha)$, значення імпульсів p_i^*, p_{s+1}^* визначаються такими виразами

$$\begin{aligned}
p_i^* &\doteq p_i - \eta\,\langle\eta,(p_i-p_{s+1})\rangle\,,\\
p_{s+1}^* &\doteq p_{s+1} + \eta\,\langle\eta,(p_i-p_{s+1})\rangle\,,
\end{aligned}$$

$\mathbb{S}^2_+ \doteq \{\eta\in\mathbb{R}^3\big|\ |\eta| = 1, \langle\eta,(p_i-p_{s+1})\rangle > 0\}$ та індексами $(1^\sharp, 2^\sharp_\pm)$ позначена дія еволюційного оператора (3) на відповідні фазові точки: $(q_1,p_1^\sharp)$ і $(q_1\pm\epsilon\eta,p_2^\sharp)$. У випадку $t<0$ інтеграл зіткнень узагальненого кінетичного рівняння Енскоґа (6) визначається відповідним виразом [6].

Розв'язок задачі Коші для узагальненого рівняння Енскоґа (6)-(7) в просторі інтегрованих функцій існує для довільного $t \in \mathbb{R}^1$ за умови: $\|F_1^0\|_{L^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)} < e^{-1}$ та зображується таким рядом [6]

$$F_1(t,x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_2 \ldots \ldots dx_{n+1} \mathfrak{A}_{1+n}(-t) \prod_{i=1}^{n+1} F_1^0(x_i) g_{1+n}(x_1,\ldots,x_{1+n}), \tag{8}$$

де $\mathfrak{A}_{1+n}(-t) = \mathfrak{A}_{1+n}(-t,1,\ldots,n+1)$ - кумулянт $(1+n)$-го порядку (5) груп операторів (1).

Стани системи нескінченного числа пружних куль описуються маргінальними функціями розподілу які належать простору обмежених по конфігураційних змінних і експоненціально спадаючих по імпульсних змінних функцій [1]. Якщо початкова маргінальна одночастинкова функція розподілу задовольняє умову

$$|F_1^0(x_1)| \leq Ce^{-\frac{\beta}{2}p_1^2}, \tag{9}$$

де $\beta > 0$ - параметр, $C < \infty$ - константа, тоді кожен член ряду (8) існує, ряд (8) збігається рівномірно по x_1 на кожному компакті при $t \in (-t_0, +t_0)$, де $t_0 \equiv (2^9\pi^{3/2}\max(\beta^{-3/2},\beta^{-1/2})\epsilon^2 C)^{-1}$, і функцією (8) визначається слабкий розв'язок задачі Коші для узагальненого рівняння Енскоґа (6).

Доведення останнього твердження ґрунтується на аналогах рівнянь Дюамеля для кумулянтів груп операторів (1) та оцінок встановлених для ряду ітерацій ієрархії рівнянь ББГКІ системи пружних куль [8].

3 Гранична теорема Больцмана-Ґреда

Сформулюємо основний результат про існування скейлінґової границі Больцмана-Ґреда задачі Коші для узагальненого кінетичного рівняння Енскоґа при $t \geq 0$.

Справедлива така гранична теорема Больцмана-Ґреда.

Теорема 1 *Якщо початкова маргінальна функція розподілу F_1^0 задовольняє умову (9) та для неї існує в сенсі слабкої збіжності така* *границя*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\big(\epsilon^2 F_1^{0,\epsilon}(x)-f_1^0(x)\big)=0, \tag{10}$$

тоді за умови, що $t < t_0 \equiv (2^5\pi^2\beta C)^{-1}$, *існує границя Больцмана-Ґреда в сенсі слабкої збіжності*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\big(\epsilon^2 F_1^{\epsilon}(t,x)-f_1(t,x)\big)=0, \tag{11}$$

де гранична одночастинкова функція розподілу визначаєтьcя таким рівномірно збіжним на кожному компакті рядом

$$\begin{aligned} f_1(t,x_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^t dt_1\dots\int\limits_0^{t_{n-1}}dt_n\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}dx_2\dots \\ \dots dx_{n+1}\,S_1(-t+t_1,1)\mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(1,2)\prod_{j_1=1}^{2}S_1(-t_1+t_2,j_1)\dots \\ \dots\prod_{i_n=1}^{n}S_1(-t_n+t_n,i_n)\sum_{k_n=1}^{n}\mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(k_n,n+1)\prod_{j_n=1}^{n+1}S_1(-t_n,j_n)\times \\ \times g_{n+1}(x_1,\dots,x_{1+n})\prod_{i=1}^{n+1}f_1^0(x_i), \end{aligned} \tag{12}$$

та використано таке позначення

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}dx_{n+1}\mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(i,n+1)f_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1})\equiv \\ &\equiv\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_+}dp_{n+1}d\eta\,\langle\eta,(p_i-p_{n+1})\rangle\big(f_{n+1}(x_1,\dots,q_i,p_i^*,\dots,x_s,q_i,p_{n+1}^*)- \\ &-f_{n+1}(x_1,\dots,x_s,q_i,p_{n+1})\big). \end{aligned} \tag{13}$$

Якщо початкова функція розподілу f_1^0 задовольняє умову (9), при $t\geq 0$ гранична одночастинкова функція розподілу (12) є слабким розв'язком початкової задачі для кінетичного рівняння Больцмана системи пружних куль

$$\frac{\partial}{\partial t}f_1(t,x_1)=-\langle p_1,\frac{\partial}{\partial q_1}\rangle f_1(t,x_1)+ \tag{14}$$
$$+\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_+}dp_2\,d\eta\,\langle\eta,(p_1-p_2)\rangle\big(f_1(t,q_1,p_1^*)f_1(t,q_1,p_2^*)g_2(q_1-tp_1^*,p_1^*,$$
$$q_1-tp_2^*,p_2^*)-f_1(t,x_1)f_1(t,q_1,p_2)g_2(q_1-tp_1,p_1,q_1-tp_2,p_2)\big),$$

$$f_1(t)_{|t=0}=f_1^0, \tag{15}$$

де використано позначення формули (6).

Доведення Теореми 1 ґрунтується на використанні аналогів рівнянь Дюамеля для кумулянтів груп операторів (1)

$$\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}dx_{s+1}\ldots dx_{s+n}\mathfrak{A}_{1+n}(-t,\{Y\},X\setminus Y)f_{s+n}= \tag{16}$$
$$=n!\int\limits_0^t dt_1\ldots\int\limits_0^{t_{n-1}}dt_n\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}dx_{s+1}\ldots dx_{s+n}\prod_{j=1}^{s}S_1(-t+t_1,j)\times$$
$$\times\sum_{i_1=1}^{s}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(i_1,s+1)S_s(-t_1+t_2,1,\ldots,s)S_1(-t_1+t_2,s+1)\ldots$$
$$\ldots S_{s+n-1}(-t_{n-1}+t_n,1,\ldots,s+n-1)S_1(-t_{n-1}+t_n,s+n)\times$$
$$\times\sum_{i_n=1}^{s+n-1}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(i_n,s+n)S_{s+n}(-t_n,1,\ldots,s+n)f_{s+n},\qquad n\geq 1,$$

де f_{s+n} - неперервна обмежена функція та введено позначення

$$\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}dx_{n+1}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(i,n+1)f_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1})\equiv$$
$$\equiv\epsilon^2\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_+}dp_{n+1}d\eta\,\langle\eta,(p_i-p_{n+1})\rangle\big(f_{n+1}(x_1,\ldots,q_i,p_i^*,\ldots$$
$$\ldots,x_s,q_i-\epsilon\eta,p_{n+1}^*)-f_{n+1}(x_1,\ldots,x_s,q_i+\epsilon\eta,p_{n+1})\big),$$

та наступних твердженнях для кумулянтів асимтотично збурених груп операторів (1).

Лема 1 *[8]. Нехай f_s - неперервна обмежена функція, тоді для довільного скінченого інтервалу часу в сенсі слабкої збіжності справедлива рівність*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\big(S_s(-t)f_s - \prod_{j=1}^{s} S_1(-t,j)f_s\big) = 0, \tag{17}$$

Внаслідок справедливості цієї леми для кумулянта розсіяння першого порядку (4) для довільного скінченого інтервалу часу в сенсі слабкої збіжності простору обмежених функцій маємо

$$\lim_{\epsilon\to 0}\big(\widehat{\mathfrak{A}}_1(t,\{Y\})f_s - I g_s(x_1(-t),\ldots,x_s(-t))f_s\big) = 0,$$

де I - одиничний оператор, $x_i(-t) \equiv (q_i - tp_i, p_i)$ – фазова траєкторія i-ої пружної кулі.

Відповідно, для кумулянта $(1+n)$-го порядку (5) асимтотично збурених груп операторів (1) справедливе таке твердження.

Лема 2 *Нехай f_{s+n} - неперервна обмежена функція, тоді для довільного скінченого інтервалу часу в сенсі слабкої збіжності для кумулянта $(1+n)$-го порядку (5) справедлива рівність*

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\big(\frac{1}{\epsilon^{2n}}\frac{1}{n!}\mathfrak{A}_{1+n}(-t,\{Y\},X\setminus Y)f_{s+n} - \\
&-\int_0^t dt_1\ldots\int_0^{t_{n-1}} dt_n \prod_{j=1}^{s} S_1(-t+t_1,j)\sum_{i_1=1}^{s}\mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(i_1,s+1)\times \\
&\times\prod_{j_1=1}^{s+1} S_1(-t_1+t_2,j_1)\ldots\prod_{j_{n-1}=1}^{s+n-1} S_1(-t_{n-1}+t_n,j_{n-1})\times \\
&\times\sum_{i_n=1}^{s+n-1}\mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(i_n,s+n)\prod_{j_n=1}^{s+n} S_1(-t_n,j_n)f_{s+n}\big) = 0,
\end{aligned}$$

де оператори $\mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(i_n,s+n)$, $n\geq 1$, визначаються формулою (13).

Твердження Леми 2 є наслідком справедливості аналогів рівняння Дюамеля (16) для кумулянтів (5) груп операторів (1) та рівності (17).

Враховуючи, що ряд (8) для функції розподілу $F_1(t,x_1)$ збігається рівномірно на кожному компакті, рівність (11) встановлюється при умові (10) згідно сформульованих лем.

Зауважимо, що аналогічне твердження до Леми 2 справедливе також для кумулянтів розсіяння (4).

Твердження про те, що слабкий розв'язок початкової задачі для кінетичного рівняння Больцмана системи пружних куль (14) зображується граничною одночастинковою функцією розподілу (12), доводиться в результаті обчислення похідної граничної функції (12) по змінній часу в сенсі поточкової збіжності простору обмежених функцій

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} f_1(t,x_1) = -\langle p_1, \frac{\partial}{\partial q_1}\rangle f_1(t,x_1) + \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_2\, \mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(1,2) \times \\
&\times g_2(x_1(-t),x_2(-t)) \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^t dt_1 \ldots \int\limits_0^{t_{n-1}} dt_n \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_3 \ldots \\
&\ldots dx_{2+n} \prod_{i_1=1}^{2} S_1(-t+t_1,i_1) \sum_{k_1=1}^{2} \mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(k_1,3) \prod_{j_1=1}^{3} S_1(-t_1+t_2,j_1) \ldots \\
&\ldots \prod_{i_n=1}^{n+1} S_1(-t_{n-1}+t_n,i_n) \sum_{k_n=1}^{n+1} \mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(k_n,2+n) \times \\
&\quad \times \prod_{j_n=1}^{2+n} S_1(-t_n,j_n) \prod_{i=1}^{2+n} f_1^0(x_i),
\end{aligned} \tag{18}$$

та є наслідком того, що ряд в правій частині тотожності (18) визначається добутком граничних одночастинкових функцій розподілу (12), а саме

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^t dt_1 \ldots \int\limits_0^{t_{n-1}} dt_n \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_3 \ldots dx_{2+n} \prod_{i_1=1}^{2} S_1(-t+t_1,i_1) \times \\
&\times \sum_{k_1=1}^{2} \mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(k_1,3) \prod_{j_1=1}^{3} S_1(-t_1+t_2,j_1) \ldots \prod_{i_n=1}^{n+1} S_1(-t_{n-1}+t_n,i_n) \times \\
&\times \sum_{k_n=1}^{n+1} \mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(k_n,2+n) \prod_{j_n=1}^{2+n} S_1(-t_n,j_n) \prod_{i=1}^{2+n} f_1^0(i) = f_1(t,x_1) f_1(t,x_2).
\end{aligned}$$

Таким чином, якщо початкова функція розподілу f_1^0 задовольняє умову (9), враховуючи останню рівність в тотжності (18), встановлюємо, що гранична одночастинкова функція розподілу (12) визначається з кінетичного рівняння Больцмана (14).

4 Граничні маргінальні функціонали стану

Оскільки розв'язок початкової задачі (6)-(7) узагальненого кінетичного рівняння Енскоґа збігається до розв'язку початкової задачі (14)-(15) кінетичного рівняння Больцмана в сенсі формули (11), тоді для маргінальних функціоналів (2) справедлива така теорема.

Теорема 2 *Нехай виконуються умови Теореми 1, тоді для функціоналу (2) в сенсі слабкої збіжності простору обмежених функцій справедлива така рівність*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\big(\epsilon^{2s}F_s\big(t,x_1,\ldots,x_s\mid F_1(t)\big)-\\ -g_s(x_1(-t),\ldots,x_s(-t))\prod_{j=1}^{s}f_1(t,x_j)\big)=0,$$

де граничні функції розподілу $f_1(t)$ визначаються формулою (12), $x_i(-t)\equiv(q_i-tp_i,p_i)$ – фазова траєкторія i-ої пружної кулі.

Таким чином, маргінальні фунціонали стану (2) в границі Больцмана-Ґреда збігаються до добутків одночастинкових функцій розподілу, які є розв'язками кінетичного рівняння Больцмана, тобто має місце так звана властивість поширення хаосу [1].

Справедливість твердження Теореми 2 є наслідком Теореми 1 та відповідних асимптотичних формул для еволюційних операторів (3) асимтотично збурених груп операторів (1). Дійсно, згідно Леми 2, тобто формул для кумулянтів (5) асимтотично збурених груп операторів (1), і означення (3) в сенсі слабкої збіжності простору обмежених функцій виконуються відповідно такі рівності:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\big(\mathfrak{V}_1(t,\{1,\ldots,s\})f_s-Ig_s(x_1(-t),\ldots,x_s(-t))f_s\big)=0,$$
$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{-2n}\mathfrak{V}_{1+n}(t)f_{s+n}=0,\quad n\geq 1.$$

Зауважимо, що існування скейлінґової границі Больцмана-Ґреда для розв'язку задачі Коші ієрархії рівнянь ББГКІ для системи пружних куль побудованого за теорією збурень доведено в [8] (див. також [1]).

References

[1] Cercignani C., Gerasimenko V.I., Petrina D.Ya. Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations. - Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.

[2] Villani C. A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. In Handbook of Mathematical Fluid Dynamics. - Elsevier Sci., 2002.

[3] Enskog D. Kinetiche theorie der wärmeleitung, reibung und selbst-diffusion in gewissen werdichteten gasen und flüßigkeiten // Kungl. Sv. Vetenskapsakademiens Handl. - 1922. - **63**. - P. 3-44.

[4] Bellomo N., Lachowicz M., Polewczak J., Toscani G. Mathematical Topics in Nonlinear Kinetic Theory II: the Enskog Equation. - Singapur: World Sci. Publ. - 1991.

[5] Polewczak J. On some open problems in the revised Enskog equation for dense gases // in Proc. “WASCOM 99”, Eds. V. Ciancio, A. Donato, F. Oliveri, and S. Rionero, - Singapur: World Sci. Publ. - 2001. - P. 382-396.

[6] Gapyak I.V., Gerasimenko V.I. Hard sphere dynamics and the Enskog equation // Kinetic and Related Models. – 2012. – Vol. 5, №3. – P. 459–484.

[7] Гап'як І.В., Герасименко В.И. Асимтотика Больцмана – Ґреда розв'язку узагальненого рівняння Енскоґа // Збірник праць II Всеукраїнського наукового семінару "Українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь: здобутки і перспективи". – 2012. – С. 4–12.

[8] Петрина Д. Я., Герасименко В.И. Математические проблемы статистической механики системы упругих шаров // Успехи мат. наук – 1990. – Т.45, вып.3. – С. 135–182.

Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 143–156

УДК 533.72

В.Д. Гордевський, О.О. Гукалов

(Харківський національний університет імені В.Н.Каразина, Харків)

gordevskyy2006@yandex.ru, gukalex@ukr.net

Бімодальний розподіл з гвинтовими модами для моделі Бріана–Піддака

У роботі отриман явний вигляд бімодального розподілу з максвеловськими модами спеціального типу для моделі шорсткуватих куль. Наведено достатні умови для мінімізації рівномірно-інтегрального відхилення між частинами рівняння Бріана–Піддака.

Explicit form of the bimodal distribution with Maxwellian modes of special type for the model of rough spheres is obtained in the paper. Sufficient conditions to minimization of uniform-integral remainder between the sides of the Bryan–Pidduck equation is done.

1 Вступ

У даній роботі розглядається модель шорсткуватих куль [1], яка вперше була введена у 1894р. Бріаном; методи, що були розвинуті для загальних сферичних молекул, які не обертаються, у 1922р. були розповсюджені на модель Бріана Піддаком. Перевага цієї моделі перед усіма іншими моделями, що припускають зміну стану обертання молекул, полягає у тому, що тут не потрібно ніяких додаткових змінних, які визначають орієнтацію молекули у просторі.

Вказані молекули є абсолютно пружними та абсолютно шорсткуватими, що означає наступне. При зіткненні двох молекул, точки, які

© Institute of Mathematics, 2014

розсіюються, не мають у загальному випадку однакової швидкості. Передбачається, що дві сфери зачіпляють одна одну без ковзання. У початковий момент сфери деформують одна одну, а потім енергія деформації повертається назад у кінетичну енергію поступального та обертального руху без жодних втрат. У результаті відносна швидкість сфер у точці їх зіткнення змінюється при ударі на обернену.

Рівняння Больцмана для моделі шорсткуватих куль(або рівняння Бріана-Піддака) має вигляд [1–4]:

$$D(f) = Q(f, f); \tag{1}$$

$$D(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial f}{\partial x}; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} Q(f,f) \quad \equiv \quad & \frac{d^2}{2}\int_{R^3} dV_1 \int_{R^3} d\omega_1 \int_{\Sigma} d\alpha B(V - V_1, \alpha) \cdot \\ & \cdot \Big[f(t, V_1^*, x, \omega_1^*) f(t, V^*, x, \omega^*) - f(t, V, x, \omega) f(t, V_1, x, \omega_1) \Big]. \end{aligned} \tag{3}$$

Тут d – діаметр молекули, який пов'язаний з моментом інерції I наступним співвідношенням:

$$I = \frac{bd^2}{4}, \tag{4}$$

де b – параметр, $b \in \left(0, \frac{2}{3}\right]$, який характеризує ізотропний розподіл речовини всередині молекули; t – час; $x = (x^1, x^2, x^3) \in R^3$ – просторова координата; $V = (V^1, V^2, V^3)$ та $w = (w^1, w^2, w^3) \in R^3$ – лінійна та кутова швидкості молекули відповідно; $\frac{\partial f}{\partial x}$ — градієнт функції f за змінною x; Σ – одинична сфера у просторі R^3; α — одиничний вектор із R^3, що спрямований вздовж лінії, яка з'єднує центри молекул, які зіштовхуються;

$$B\left(V - V_1, \alpha\right) = \left|(V - V_1, \alpha)\right| - (V - V_1, \alpha) \tag{5}$$

— член зіткнення.

Лінійні (V^*, V_1^*) та кутові (w^*, w_1^*) швидкості молекул після зіткнення виражаються через відповідні швидкості до зіткнення наступним чином:

$$
\begin{aligned}
V^* &= V - \frac{1}{b+1}\left(b(V_1 - V) - \frac{bd}{2}\alpha \times (\omega + \omega_1) + \alpha(\alpha, V_1 - V)\right), \quad (6)\\
V_1^* &= V_1 + \frac{1}{b+1}\left(b(V_1 - V) - \frac{bd}{2}\alpha \times (\omega + \omega_1) + \alpha(\alpha, V_1 - V)\right),\\
\omega^* &= \omega + \frac{2}{d(b+1)}\left\{\alpha \times (V - V_1) + \frac{d}{2}\left[\alpha(\omega + \omega_1, \alpha) - \omega - \omega_1\right]\right\},\\
\omega_1^* &= \omega_1 + \frac{2}{d(b+1)}\left\{\alpha \times (V - V_1) + \frac{d}{2}\left[\alpha(\omega + \omega_1, \alpha) - \omega - \omega_1\right]\right\},
\end{aligned}
$$

де знак $\times$ позначає векторний добуток.

2 Постановка задачі

Загальний вигляд локальних максвеліанів (тобто точні розв'язки системи $D = Q = 0$) для задачі, що розглядається було знайдено у роботі [5]. Задача взаємодії для деяких максвеліанів була розглянута раніше у роботах [6,7]. У роботі [7] було розглянуто питання о взаємодії течій, що описують "прискорення-ущільнення".

Ця стаття присвячена випадку бімодального розподілу з гвинтовими модами, які мають "прискорення-ущільнення"

Приймаючі до уваги те, що здійснюється пошук явних наближених розв'язків, ми будемо використовувати відхилення, що було запропоновано у [4]:

$$
\Delta = \sup_{(t,x)\in R^4} \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \Big| D(f) - Q(f,f) \Big|. \quad (7)
$$

Отже розглянемо бімодальний розподіл:

$$
f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2, \quad (8)
$$

де функції $\varphi_i = \varphi_i(t,x)$, (тут і надалі індекс i приймає тільки значення 1 та 2), а максвеліани M_i відповідають гвинтовому руху з прискоренням-ущільненням [5]:

$$
M_i = \rho_{0i} e^{\beta_i\left(\overline{V}_i^2 + 2\overline{u}_i x\right)} \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^3 I^{3/2} e^{-\beta_i\left(\left(V - \overline{V}_i\right)^2 + I\omega^2\right)}. \quad (9)
$$

Тут ρ_{0i} – довільна додатня константа, а $\overline{V}_i-$ масова швидкість, що має вигляд:

$$\overline{V}_i = \widehat{V}_i + [\overline{\omega}_i \times x] - \overline{u}_i t, \tag{10}$$

де $\overline{\omega}_i-$ кутова швидкість потоку газу у цілому, $\widehat{V}_i-$ довільний постійний вектор, що позначає лінійну швидкість газу вздовж вісі обертання, $\overline{u}_i-$ довільний вектор, паралельний $\overline{\omega}_i$, а $\beta_i = \frac{1}{2T}-$ обернена температура газу.

Задача полягає у наступному. Знайти такі функції $\varphi_i(t,x)$, щоб бімодальний розподіл (8) забезпечував довільну мализну відхилу (7).

Перш ніж перейти до формулювання основних результатів, зробимо деяке перетворення виразу (9). Спочатку ведемо позначення:

$$\rho_i = \overline{\rho}_i e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2}, \tag{11}$$

$$\overline{\rho}_i = \rho_{0i} e^{\beta_i (\overline{V}_i^2 + 2\overline{u}_i x)}, \tag{12}$$

де

$$r_i^2 = \frac{1}{\overline{\omega}_i^2}\left[\overline{\omega}_i \times (x - x_{0i})\right]^2, \quad x_{0i} = \frac{[\overline{\omega}_i \times \widehat{V}_i]}{\overline{\omega}_i^2}, \tag{13}$$

$x_{0i}-$ точка, через яку проходить вісь обертання течії у момент часу $t = 0$.

Тепер використаємо тотожність, що наведена у роботі [8]:

$$\overline{V}_i^2 = \overline{\omega}_i^2 r_i^2 + \left(\frac{\overline{\omega}_i}{\overline{\omega}_i^2}(\overline{\omega}_i, \widehat{V}_i) - \overline{u}_i t\right)^2, \tag{14}$$

дійсність якої випливає із формул (10), (13) та умови коленеарності векторів $\overline{u}_i$ та $\overline{\omega}_i$. Таким чином, використовуючи (14) можна перетворити представлення (12):

$$\overline{\rho}_i = \rho_{0i} e^{\beta_i \left(\frac{\overline{\omega}_i}{\overline{\omega}_i^2}(\overline{\omega}_i, \widehat{V}_i) - \overline{u}_i t\right)^2 + 2\overline{u}_i \beta_i x}. \tag{15}$$

Значить, вираз (9) приймає вигляд:

$$M_i = \overline{\rho}_i e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^3 I^{3/2} e^{-\beta_i \left(\left(V - \overline{V}_i\right)^2 + I\omega^2\right)}. \tag{16}$$

З фізичної точки зору вираз (16) означає наступне. Функція M_i описує обертання газу як цілого з кутовою швидкістю $\overline{\omega}_i$ навколо нерухомої вісі, що проходить через точку x_{0i} (величина r_i^2 є квадрат відстані від точки $x \in R^3$ до цієї висі), а $\overline{\rho}_i$ задає розподіл густини (до того ж $\overline{u}_i x-$ її найменше значення по усім $r \in [0;+\infty)$ при фіксованому t) вздовж висі обертання. Також зазначимо, що функції (10), (12) зростають по t и x, при чому (10) лінійна по t, а (12) лінійна по x саме вздовж висі, що задається вектором $\overline{\omega}_i$ у зв'язку паралельності $\overline{u}_i$ та $\overline{\omega}_i$, що виправдовує термін "прискорення-ущільнення" (вектор $\overline{u}_i-$ грає роль "масового прискорення", а $\overline{V}_i$ масової швидкості вздовж висі при $t=0$).

3 Основні результати

Наведемо декілька теорем, що присвячені поставленому питанню.

Теорема 1 *Нехай розподіл f задається формулами (8), (9), (10), а функції $\varphi_i(t,x)$ мають вигляд:*

$$\varphi_i(t,x) = \frac{D_i}{(1+t^2)^{s_i}} C_i \left(x + \overline{\omega}_i t^2 \frac{\overline{u}_i^2}{2\overline{u}_i \overline{\omega}_i} \right), \tag{17}$$

де $D_i > 0, s_i \geqslant \frac{1}{2}$ – довільні константи, а $C_i \geqslant 0-$ довільні гладкі фінітні функції або швидкоспадаючі функції вказаних векторних аргументів.

Припустимо, що:

$$\overline{\omega}_i = \overline{\omega}_{0i} \beta_i^{-m_i}, \quad \overline{u}_i = \overline{u}_{0i} \beta_i^{-n_i}, \tag{18}$$

$$\widehat{V}_i = 0, \tag{19}$$

де $\overline{\omega}_{0i}, \overline{u}_{0i} \in R^3-$ довільні, фіксовані вектори, а на числа m_i, n_i накладаються умови:

$$m_i \geqslant \frac{1}{2}, \quad n_i \geqslant 1. \tag{20}$$

Тоді існує така величина Δ', що:

$$\Delta \leqslant \Delta', \tag{21}$$

при цьому має місце твердження:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} = \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} D_i K_i(s_i) \sup_{x \in R^3} (C_i(x) \mu_i(x)), \tag{22}$$

де

$$K_i(s_i) = 2s_i \sup_{t\in R^1} \frac{|t|}{(1+t^2)^{s_i+1}}, \tag{23}$$

та функції $\mu_i(x)$ *наступного вигляду*

$$\begin{array}{ll} 1, & m_i > \frac{1}{2}, n_i > 1; \\ e^{2\overline{u}_{0i}x}, & m_i > \frac{1}{2}, n_i = 1; \\ e^{[\overline{\omega}_{0i}\times x]^2}, & m_i = \frac{1}{2}, n_i > 1; \\ e^{[\overline{\omega}_{0i}\times x]^2 + 2\overline{u}_{0i}x}, & m_i = \frac{1}{2}, n_i = 1. \end{array} \tag{24}$$

Д о в е д е н н я. Підставляючі розподіл (8) у (2), (3) отримуємо[6]:

$$D(f) = M_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + V\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right) + M_2\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + V\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right), \tag{25}$$

$$Q(f,f) = \varphi_1\varphi_2\Big[Q\Big(M_1, M_2\Big) + Q\Big(M_2, M_1\Big)\Big]. \tag{26}$$

Інтеграл зіткнень $Q(f,g)$ може бути представлено у наступному вигляді[1,6]:

$$Q(f,g) = G(f,g) - fL(g), \tag{27}$$

де $G(f,g)$ називають прибутковим членом інтеграла зіткнень та він має вигляд:

$$\begin{aligned} G(f,g) \quad = \quad & \frac{d^2}{2}\int_{R^3} dV_1 \int_{R^3} d\omega_1 \int_{\sum} d\alpha B(V - V_1, \alpha) \\ & \times f(t,x,V_1^*,\omega_1^*) g(t,x,V^*,\omega^*), \end{aligned} \tag{28}$$

а $L(g)-$ витратний член:

$$L(g) = \frac{d^2}{2}\int_{R^3} dV_1 \int_{R^3} d\omega_1 \int_{\sum} d\alpha B(V - V_1, \alpha) g(t,x,V_1,\omega_1). \tag{29}$$

Використовуючи доведену у роботі [6] формулу:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega Q(M_i, M_j) = 0, \tag{30}$$

із (27)—(30) отримуємо, що:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega G(M_i, M_j) = \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega M_i L(M_j). \tag{31}$$

Оцінемо модуль різниці лівої та правої частин рівняння (1), використовуючи (25)–(29):

$$\begin{aligned} &\Big|D(f) - Q(f,f)\Big| \leqslant M_1\Big(|D(\varphi_1)| + \varphi_1\varphi_2 L(M_2)\Big) \\ &+M_2\Big(|D(\varphi_2)| + \varphi_1\varphi_2 L(M_1)\Big) + \varphi_1\varphi_2\Big(G(M_1,M_2) + G(M_2,M_1)\Big). \end{aligned} \tag{32}$$

Далі зробимо перехід до шестикратного інтегралу по просторам лінійних та кутових швидкостей, отримаємо наступне:

$$\begin{aligned} &\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \Big|D(f) - Q(f,f)\Big| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(\varphi_i)| M_i + 4\varphi_1\varphi_2 \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega G(M_1, M_2). \end{aligned} \tag{33}$$

Для інтеграла у другому доданку правої частини нерівності (33) використаємо отриману у статті [4] формулу:

$$\begin{aligned} &\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega G(M_1, M_2) \\ &= \frac{d^2 \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|. \end{aligned} \tag{34}$$

Продовжимо оцінку (33), використовуючи формулу(34):

$$\begin{aligned} &\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \Big|D(f) - Q(f,f)\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(\varphi_i)| M_i \\ &+ \frac{4d^2 \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_2 \varphi_1 \varphi_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|, \end{aligned}$$

що, завдяки (2), (9), (11), дає:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \Big| D(f) - Q(f,f) \Big| \tag{35}$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \overline{\rho}_i e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2}$$
$$\times \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^3 I^{3/2} e^{-\beta_i \left(\left(V - \overline{V}_i \right)^2 + I\omega^2 \right)}$$
$$+ \frac{4d^2 \rho_1 \rho_2 \varphi_1 \varphi_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|.$$

Права частина оцінки (35) може бути спрощена, якщо врахувати, що:

$$\int_{R^3} d\omega e^{-\beta_i I \omega^2} = \left(\frac{\pi}{\beta_i I} \right)^{3/2},$$

а також зробити заміну змінних у інтегралі, який входить у перший доданок $p = \sqrt{\beta_i}(V - \overline{V}_i)$, тобто:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \Big| D(f) - Q(f,f) \Big| \tag{36}$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\overline{V}_i + \frac{p}{\sqrt{\beta_i}} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \overline{\rho}_i e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \frac{e^{-p^2}}{\sqrt{\pi^3}}$$
$$+ \frac{4d^2 \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_2 e^{\beta_1 \overline{\omega}_1^2 r_1^2 + \beta_2 \overline{\omega}_2^2 r_2^2} \varphi_1 \varphi_2}{\pi^2}$$
$$\times \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|.$$

Далі робимо перехід до супремума у нерівності (36), обґрунтованість можливості якого випливає із припущень цієї теореми:

$$\Delta = \sup_{(t,x)\in R^4} \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \Big| D(f) - Q(f,f) \Big| \tag{37}$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{2} \sup_{(t,x)\in R^4} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\overline{V}_i + \frac{p}{\sqrt{\beta_i}} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \overline{\rho}_i e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \frac{e^{-p^2}}{\sqrt{\pi^3}}$$
$$+ \frac{4d^2}{\pi^2} \sup_{(t,x)\in R^4} \varphi_1 \varphi_2 e^{\beta_1 \overline{\omega}_1^2 r_1^2 + \beta_2 \overline{\omega}_2^2 r_2^2} \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_2$$
$$\times \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|.$$

У зв'язку з умовою теореми (19) замість (10), (12), (13), (15) будемо мати:

$$\overline{V}_i = [\overline{\omega}_i \times x] - \overline{u}_i t, \quad r_i^2 = \frac{1}{\overline{\omega}_i^2} \left[\overline{\omega}_i \times x\right]^2, \tag{38}$$
$$\overline{\rho}_i = \rho_{0i} e^{\beta_i([\overline{\omega}_i \times x]^2 + \overline{u}_i^2 t^2)}.$$

Тепер, використовуючи вираз (38), вигляд локальних максвеліанів (16), відомі властивості модуля, скалярного добутку, інтегралів и точних верхніх меж, а також нерівність (21) маємо:

$$\Delta' = \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \sup_{(t,x)\in R^4} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right| e^{\beta_i \left([\overline{\omega}_i \times x]^2 + \overline{u}_i^2 t^2 + 2\overline{u}_i x \right)} \tag{39}$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \sup_{(t,x)\in R^4} \int_{R^3} dp \left(\frac{|p|}{\sqrt{\beta_i}} + |[\overline{\omega}_i \times x] - \overline{u}_i t| \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \right) \overline{\rho}_i e^{\beta_i [\overline{\omega}_i \times x]^2} \frac{e^{-p^2}}{\sqrt{\pi^3}}$$
$$+ \frac{4d^2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2}$$
$$\times \sup_{(t,x)\in R^4} \left\{ \varphi_1 \varphi_2 e^{\beta_1 [\overline{\omega}_1 \times x]^2 + \beta_2 [\overline{\omega}_2 \times x]^2} \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_2 \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right| \right\}.$$

Для існування Δ', як випливає з її вигляду (39) достатньо перевірити, що, якщо функції φ_i мають вигляд (17), то добуток функцій

$$\varphi_i, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}, \quad \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right|, \quad \varphi_i \left| [\overline{\omega}_i \times x] - \overline{u}_i t \right|, \quad \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| |[\overline{\omega}_i \times x] - \overline{u}_i t| \tag{40}$$

на множник (11) з врахуванням умов теореми (19) обмежений по $(t, x) \in R^4$ (збіжність усіх інтегралів очевидна у зв'язку з наявністю виразу

$$\left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|$$

та присутністю у інтегралах спадаючих експонент).

Розглянемо перший добуток $\varphi_i \rho_i$, для чого зробимо заміну:

$$y = x + \overline{\omega}_i t^2 \frac{\overline{u}_i^2}{2\overline{u}_i \overline{\omega}_i}, \tag{41}$$

після якої вказаний добуток приймає вигляд:

$$\frac{D_i}{(1+t^2)^{s_i}} C_i(y) \rho_{0i} e^{\beta_i \left(2\overline{u}_i y + [\overline{\omega}_i \times y]^2\right)}. \tag{42}$$

Таким чином, враховуючі властивості функції C_i, які описані в умовах Теореми 1, добуток (42) обмежений по $y \in R^3$, а обмеженість за часом t випливає із умови показника степеню $s_i \geqslant \frac{1}{2}$. З таких же причин обмежений добуток четвертої із перерахованих функцій (40) на густину ρ_i після запропанованої заміни (41), у зв'язку можливості обмеження зверху наступним виразом:

$$\frac{D_i}{(1+t^2)^{s_i}} C_i(y) \rho_{0i} e^{\beta_i \left(2\overline{u}_i y + [\overline{\omega}_i \times y]^2\right)} \left(|[\overline{\omega}_i \times y]| + |t| |\overline{u}_i| \right). \tag{43}$$

Аналогічно перевіряється обмеженість добутків густини ρ_i на функції, що залишилися у (40), після знаходження наступних похідних:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \frac{D_i}{(1+t^2)^{s_i}} C_i' \left(x + \overline{\omega}_i t^2 \frac{\overline{u}_i^2}{2\overline{u}_i \overline{\omega}_i} \right), \tag{44}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \frac{-2ts_i D_i}{(1+t^2)^{s_i+1}} C_i \left(x + \overline{\omega}_i t^2 \frac{\overline{u}_i^2}{2\overline{u}_i \overline{\omega}_i} \right) + \frac{D_i}{(1+t^2)^{s_i}} \left(C_i' \cdot \overline{\omega}_i \right) \frac{t\overline{u}_i^2}{\overline{u}_i \overline{\omega}_i},$$

де $(C_i' \cdot \overline{\omega}_i)$ – скалярний добуток градієнта функції C_i на кутову швидкість $\overline{\omega}_i$.

Отже, враховуючи умови теореми (18), (19) та знайдені похідні функції φ_i (44) величина, яка досліджується, Δ' (39) приймає вигляд:

$$
\begin{aligned}
\Delta' = &\sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} D_i \sup_{(t,y)\in R^4} \left\{ \frac{|t|}{(1+t^2)^{s_i}} e^{2\overline{u}_{0i} y \beta_i^{1-n_i} + \beta_i^{1-2m_i}[\overline{\omega}_{0i}\times y]^2} \right. \\
&\times \left. \left| \frac{2s_i}{1+t^2} C_i(y) + \left(C_i'(y)\cdot \overline{\omega}_i\right) \frac{t\overline{u}_{0i}^2}{\overline{u}_{0i}\overline{\omega}_{0i}} \beta_i^{-n_i} \right| \right\} \\
&+ \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \sup_{(t,y)\in R^4} \left\{ \left(\frac{|p|}{\sqrt{\beta}_i} + \left| \beta_i^{-m_i}[\overline{\omega}_{0i}\times y] - \overline{u}_{0i} t \beta_i^{-n_i} \right| \frac{D_i |C_i'(y)|}{(1+t^2)^{s_i}} \right) \right. \\
&\times \left. \rho_{0i} e^{2\overline{u}_{0i} y \beta_i^{1-n_i} + [\overline{\omega}_{0i}\times y]^2 \beta_i^{1-2m_i}} \right\} \frac{e^{-p^2}}{\pi^{3/2}} \\
&+ \frac{4d^2 \rho_{01}\rho_{02}}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2-q_1^2} \sup_{(t,y)\in R^4} \left\{ \frac{D_1 D_2}{(1+t^2)^{s_1+s_2} C_1(y) C_2(y)} \right. \\
&\times \exp\left\{ \sum_{i=1}^{2} \left(\beta_i^{1-2m_i}[\overline{\omega}_{0i}\times y]^2 + 2y\overline{u}_{0i}\beta_i^{1-n_i} \right) \right\} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} \right. \\
&\left.\left. + [\overline{\omega}_{01}\times y]\beta_1^{-m_1} - [\overline{\omega}_{02}\times y]\beta_2^{-m_2} + t\left(\overline{u}_{02}\beta_2^{-n_2} - \overline{u}_{01}\beta_1^{-n_1}\right) \right| \right\}.
\end{aligned} \tag{45}
$$

Далі залишається зробити перехід до границі при $\beta_i \to +\infty$ у останній рівності (45). Обґрунтованість можливості такого переходу аргументується властивостями функції C_i, а для переходу під знаком супремуму використаємо наведену у роботі [9] лемму 1, перевірка умов якої легко здійснюється виходячи із умов теореми, що розглядається.

Розглянемо тепер чотири випадку можливих значень m_i и n_i, які припускаються умовою (20).

1) Якщо $m_i > \frac{1}{2}, \quad n_i > 1:$

$$
\lim_{\beta_i\to 0} \Delta' = \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} D_i \cdot 2s_i \sup_{t\in R^1} \frac{|t|}{(1+t^2)^{s_i+1}} \sup_{x\in R^3} C_i(x). \tag{46}
$$

2) У випадку $m_i > \frac{1}{2}, \quad n_i = 1:$

$$
\lim_{\beta_i\to 0} \Delta' = \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} D_i \sup_{t\in R^1} \frac{2s_i|t|}{(1+t^2)^{s_i+1}} \sup_{x\in R^3} \left(C_i(x) e^{2\overline{u}_{0i} x}\right). \tag{47}
$$

3) При $m_i = \frac{1}{2}, \quad n_i > 1:$

$$\lim_{\beta_i \to 0} \Delta' = \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} D_i \sup_{t \in R^1} \frac{2s_i|t|}{(1+t^2)^{s_i+1}} \sup_{x \in R^3} \left(C_i(x) e^{[\overline{\omega}_{0i} \times x]^2} \right). \tag{48}$$

4) та в останьому варіанті $m_i = \frac{1}{2}, \quad n_i = 1:$

$$\lim_{\beta_i \to 0} \Delta' = \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} D_i \sup_{(t,x) \in R^4} \left\{ \frac{2s_i|t|}{(1+t^2)^{s_i+1}} C_i(x) e^{2\overline{u}_{0i} x + [\overline{\omega}_{0i} \times x]^2} \right\}. \tag{49}$$

Таким чином знайдені границі величини Δ' при різних значеннях показників степеня m_i та n_i (46)−(49) підтверджують дійсність твердження теореми (22)−(24). Теорема доведена.

Наслідок 1. Нехай виконані усі умови Теореми 1, тоді для будь-якого додатнього числа ε існує таке додатне число δ, що для будь-яких достатньо малих коефіцієнтів D_1, D_2, а β_1, β_2− достатньо великих досягається нескінчена мализну відхилу Δ(7). Тобто:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall D_1, D_2 :\ 0 < D_1, D_2 < \delta,\ \beta_1, \beta_2 > \delta,\ \Delta < \varepsilon. \tag{50}$$

Д о в е д е н н я. Виходячи із вигляду границі Δ', яку можна бачити у формулах (22)−(24) та нерівності (21), легко бачити, що уся сума, завдяки спеціальному підбору констант D_1, D_2 у правій частині (22) починає дорівнювати нулю, що і доводить твердження (50). Наслідок перевірено.

Сформулюємо ще одну теорему для розподілу (8).

Теорема 2 *Нехай коефіцієнтні функції у бімодальному розподілі (8) наступного вигляду:*

$$\varphi_i(t,x) = \psi_i(t,x) \rho_{0i} [\overline{\rho}_i(t,x)]^{-1} e^{-\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2}, \tag{51}$$

де r_i^2 и $\overline{\rho}_i(t,x)$ представлені у (12), (13). Нехай при виконанні умов

$$m_i > \frac{1}{2}, \quad n_i > 1 \tag{52}$$

також залишається вірним припущення (18). Тоді, якщо функції ψ_i у (51) наступні:

$$\psi_i(t,x) = D_i C_i(t) E_i(x), \tag{53}$$

де $C_i(t), E_i(x) \geqslant 0$ − гладкі фінітні або швидкоспадні функції, то твердження (50) залишається у силі.

Д о в е д е н н я. Як і раніше залишається вірною нерівність (37), проте зважаючи на умову (51) необхідно знову обчислити похідні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} &= \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + 2\beta_i\psi_i\overline{u}_i\left(\frac{\overline{\omega}_i}{\overline{\omega}_i^2}\left(\overline{\omega}_i, \widehat{V}_i\right) - \overline{u}_i t\right)\right)\varphi_i\psi_i^{-1}, \qquad (54)\\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} &= \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x} - 2\beta_i\psi_i\left(\overline{u}_i + [[\overline{\omega}_i \times (x - x_{0i})] \times \overline{\omega}_i]\right)\right)\varphi_i\psi_i^{-1}. \end{aligned}$$

Далі, підставимо (54) у оцінку (37) та отримаємо представлення для Δ' :

$$\begin{aligned} &\Delta' \qquad (55)\\ &= \sum_{i=1}^{2}\frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}}\int_{R^3} dp \sup_{(t,x)\in R^4}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + 2\beta_i\psi_i\cdot\frac{(\overline{\omega}_i, \overline{u}_i)}{\overline{\omega}_i^2}\left(\left(\overline{\omega}_i, \widehat{V}_i\right) - \overline{u}_i^2 t\right)\right.\\ &\left.+\left(\overline{V}_i + \frac{p}{\sqrt{\beta}_i}\right)\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x} - 2\beta_i\psi_i\left(\overline{u}_i + [[\overline{\omega}_i \times (x - x_{0i})] \times \overline{\omega}_i]\right)\right)\right| e^{-p^2}\\ &+\frac{4d^2\rho_{01}\rho_{02}}{\pi^2}\int_{R^3} dq\int_{R^3} dq_1 e^{-q^2-q_1^2}\\ &\times \sup_{(t,x)\in R^4}\left(\psi_1\psi_2\left|\frac{q}{\sqrt{\beta}_1} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta}_2} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2\right|\right). \end{aligned}$$

Скінченість отриманої величини Δ' забезпечується тим, що якщо виконано умову (53), то усі функції (40) (с заміною φ_i на ψ_i) обмежені на R^4.

Зробимо перехід до границі, приймаючі до уваги (18) (можливість переходу аргументується аналогічно тому, як це було зроблено при доведенні Теореми 1). Таким чином, маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{\beta_i\to+\infty}\Delta' = &\sum_{i=1}^{2}\frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}}\int_{R^3} dp \sup_{(t,x)\in R^4}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right| e^{-p^2}\\ &+\frac{4d^2\rho_{01}\rho_{02}}{\pi^2}\int_{R^3} dq\int_{R^3} dq_1 e^{-q^2-q_1^2}\sup_{(t,x)\in R^4}\left(\psi_1\psi_2\left|\overline{V}_1 - \overline{V}_2\right|\right), \end{aligned}$$

що у підсумку дорівнює:

$$\begin{aligned} &\lim_{\beta_i\to+\infty}\Delta'\\ &= \sum_{i=1}^{2}\rho_{0i}\sup_{(t,x)\in R^4}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right| + 4\pi d^2\rho_{01}\rho_{02}\left|\overline{V}_1 - \overline{V}_2\right|\sup_{(t,x)\in R^4}(\psi_1\psi_2). \end{aligned}$$

Тепер залишається підставити вигляд функції $\psi_i(t,x)$ (53), що дає наступне:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \Delta' = \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} D_i \sup_{(t,x)\in R^4} \left| E_i(x) C_i'(t) + \widehat{V}_i E_i'(x) C_i(t) \right|$$
$$+4\pi d^2 \rho_{01}\rho_{02} \left| \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right| D_1 D_2 \sup_{t\in R^1} (C_1(t) C_2(t)) \sup_{x\in R^3} (E_1(x) E_2(x)).$$

Враховуючі нескінчену мализну величин D_1, D_2 отримуємо твердження теореми. Теорема доведена.

Таким чином, у даній роботі продемонстровано, що для моделі Бріана–Піддака та розглянутого типу максвелівських мод справедливі результати, аналогічні тим, які раніше були отримані у більш простому випадку моделі твердих куль[8].

Література

[1] С. Чепмен, Т. Каулинг. *Математическая теория неоднородных газов.* М.:Мир, 1960.

[2] C. Cercignani, M. Lampis. *On the kinetic theory of a dense gas of rough spheres.* J. Stat. Phys., (1988), **53**, P. 655–672.

[3] В.Д. Гордевський. *Явні наближені розв'язки рівняння Больцмана для моделі шершавих куль* . Доп. НАН України (2000), **4**, С. 10–13.

[4] V.D. Gordevsky. *Approximate billow solutions of the kinetic Bryan–Pidduck equation* Math. Meth. Appl. Sci., (2000), **23**, P. 1121–1137.

[5] В.Д. Гордевский, А.А. Гукалов. *Максвелловские распределения в модели шероховатых сфер.* УМЖ, (2011), **63**, №5, С. 629–639.

[6] В.Д. Гордевский, А.А. Гукалов. *Взаимодействие смерчевых потоков в модели Бриана-Пиддака.* Вестник ХНУ им. В.Н.Каразина, серия "Математика, прикладная математика и механика (2011), **64**, №.2, С. 27–41.

[7] A.A. Gukalov. *Interaction between "accelerating-packing" flows for the Bryan—Pidduck model.* Журн. матем. физ. анал. геом., (2013), **9**:3, P. 316—331.

[8] В.Д. Гордевский. *Винтовые потоки с ускорением и уплотнением для модели твердых сфер.* ТМФ, (2009), **161**:2, С. 278—286.

[9] В.Д. Гордевский. *Двухпотоковое распределение с винтовыми модами.* ТМФ, (2001), **126**:2, С. 283—300.

Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 197–233

УДК 510.22+517.1+517.983

Я.І. Грушка

(Інститут Математики НАН України, Київ)

grushka@imath.kiev.ua

Мінливі множини та їх застосування для побудови кінематики тахіонів

Присвячено 80$^{\breve{й}}$ річниці від дня народження академіка Д.Я. Петрини

Отримано нові результати з теорії мінливих множин. Запропоновано застосування теорії мінливих множин для побудови математично строгих моделей кінематики на основі узагальнених перетворень Лоренца, яка включає в себе кінематику класичної спеціальної теорії відносності в інерційних системах відліку, але, в той же час, дозволяє надсвітловий рух для інерційних систем відліку.

Отримано нові результати з теорії мінливих множин. Запропоновано застосування теорії мінливих множин для побудови математично строгих моделей кінематики на основі узагальнених перетворень Лоренца, яка включає в себе кінематику класичної спеціальної теорії відносності в інерційних системах відліку, але, в той же час, дозволяє надсвітловий рух для інерційних систем відліку.

1 Вступ

Досягнення сучасної теоретичної фізики широко відомі, але проблема математично строгого обґрунтування її основ, тобто шоста проблема Гільберта, залишається відкритою і по сьогодні [1, 2, 3]. Окремі напрямки формалізації певних фізичних теорій було запропоновано в

© Інститут Математики НАНУ, 2014

роботах [4, 5, 6, 7, 8, 9]. Зауважимо, що в зазначених роботах не було сформульовано єдиного абстрактного підходу. Тому математичний апарат цих робіт виглядає штучним і недостатньо гнучким. Взагалі, головною особливістю існуючих математично строгих моделей теоретичної фізики є їхня складність і громіздкість, в той час, як математично строге визначення і формулювання найбільш елементарних (базових) фізичних понять та постулатів, які і привели до появи цих математичних моделей залишається нерозв'язаною задачею. В роботах [10, 11, 12] висловлюється думка, що загальне розв'язання цієї задачі в рамках існуючих на даний час математичних теорій — неможливе і ставиться проблема побудови теорії "динамічних множин" — нових абстрактних математичних структур, у рамках яких можна було б строго математично моделювати різноманітні процеси в фізичних, біологічних та інших складних системах. В зв'язку з поставленою проблемою, в роботах [13, 14, 15, 16, 17] побудовано теорію *мінливих множин* — сукупностей об'єктів, які, на відміну від елементів звичайних (статичних) множин, можуть перебувати в процесі постійних трансформацій, а також змінювати свої властивості залежно від способу спостереження (тобто, фактично, системи відліку).

Дана робота є продовженням дослідження абстрактних мінливих множин, розпочатого в [13, 14, 15, 16, 17]. В роботі запропоноване нове, більш лаконічне, означення для базових мінливих множин, при цьому доведено еквівалентність старого і нового означень. Також запропоновано застосування теорії мінливих множин для побудови математично сторгогих моделей "тахіонної" кінематики на основі узагальнених перетворень Лоренца. Така кінематика включає в себе кінематику класичної спеціальної теорії відносності в інерційних системах відліку, в якості "підкінематики", але, в той же час, дозволяє надсвітловий рух для інерційних систем відліку. Слід підкреслити, що побудована кінематика не задовольняє принцип відносності на надсвітловому діапазоні швидкостей систем відліку.

2 Базові мінливі множини та їх властивості

Теорія мінливих множин базується на математичних об'єктах "нижчого рівня ієрархії" — базових мінливих множинах. Тому, перш, ніж переходити до загального означення мінливої множини, в цьому (вступному) розділі наводяться основні положення робіт [13, 14, 15], в яких викладена теорія базових мінливих множин.

2.1 Орієнтовані множини

Найпримітивніша (стартова) абстрактна модель сукупності мінливих об'єктів закладена в наступному означенні.

Означення 2.1. *Нехай, M — довільна непорожня множина ($M \neq \emptyset$).*

*Довільне рефлексивне бінарне відношення $\Leftarrow$ на M (тобто таке, що $\forall x \in M \;\; x \Leftarrow x$) будемо називати **орієнтацією**, а пару $\mathcal{M} = (M, \Leftarrow)$ будемо називати **орієнтованою множиною**. При цьому множину M будемо називати **базовою**, або множиною всіх **елементарних станів** орієнтованої множини $\mathcal{M}$ і будемо позначати її через $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, а відношення $\Leftarrow$ будемо називати **напрямним відношенням змін (трансформацій)** $\mathcal{M}$ і будемо позначати його через $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$.*

У випадку, коли відомо, про яку орієнтовану множину $\mathcal{M}$ йде мова, в позначенні $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$ символ $\mathcal{M}$ будемо опускати, вживаючи позначення "$\leftarrow$". Для елементів $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ запис $y \leftarrow x$ слід розуміти, як "елементарний стан y є результатом трансформацій, або "трансформаційним продовженням" елементарного стану x".

Нехай, $\mathcal{M}$ — орієнтована множина.

Означення 2.2. *Непорожня підмножина $N \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ називається **транзитивною** в $\mathcal{M}$, якщо для довільних $x, y, z \in N$ з умов $z \leftarrow y$ і $y \leftarrow x$ випливає $z \leftarrow x$.*

*Транзитивна множина $N \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ називається **максимально транзитивною** в $\mathcal{M}$, якщо не існує транзитивної множини $N_1 \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такої, що $N \subset N_1$ (підкреслимо, що тут знак $\subset$ означає строге включення, тобто $N \neq N_1$).*

*Транзитивна підмножина $L \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ називається **ланцюгом** в $\mathcal{M}$, якщо для довільних $x, y \in L$ має місце хоч одне із співвідношень $y \leftarrow x$ або $x \leftarrow y$. Ланцюг $L \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ називається **максимальним ланцюгом** в $\mathcal{M}$, якщо не існує ланцюга $L_1 \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такого, що $L \subset L_1$.*

Твердження 2.1. *Нехай, $\mathcal{M}$ — орієнтована множина.*

1. Довільна непорожня підмножина $N \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, яка містить не більше, двох елементів є транзитивною.

2. Не більш, ніж двохелементна непорожня підмножина $L = \{x, y\} \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ є ланцюгом тоді і тільки тоді, коли $y \leftarrow x$ або $x \leftarrow y$. Зокрема довільна одноелементна підмножина $L = \{x\} \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ завжди є ланцюгом.

Доведення твердження 2.1 зводиться до тривіальної перевірки.

Твердження 2.2 ([14, 15])**.**

1. *Для довільної транзитивної множини N в орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існує максимально транзитивна множина $N_{\max}$ така, що $N \subseteq N_{\max}$.*

2. *Для довільного ланцюга L в $\mathcal{M}$ існує максимальний ланцюг $L_{\max}$ такий, що $L \subseteq L_{\max}$.*

Зауважимо, що на другий пункт твердження 2.2 можна дивитися, як на узагальнення принципу максимальності Хаусдорфа в рамках даної теорії.

З тверджень 2.2 та 2.1 випливає наступний наслідок.

Наслідок 2.1. *1. Для довільних двох елементів $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ в орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існує максимально-транзитивна множина $N \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ така, що $x, y \in N$.*

2. Для довільних двох елементів $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, таких, що $y \leftarrow x$ в орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існує максимальний ланцюг $L \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такий, що $x, y \in L$.

Поклавши $x = y$ (враховуючи, що, за означенням, множина $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ непорожня) приходимо до висновку, що в довільній орієнтованій множині $\mathcal{M}$ завжди існують максимально-транзитивні множини і максимальні ланцюги.

2.2 Означення часу. Примітивні мінливі множини

В теоретичній фізиці звикли вважати моменти часу дійсними числами. Проте абстрактна математика може мати справу з об'єктами потужності, більшої за континуум. Тому, в даній абстрактній теорії, ми не будемо обмежуватись дійсночисловими моментами часу. В наступному означенні в якості моментів часу можуть служити елементи довільної лінійно упорядкованої множини. Таке розуміння часу близьке до філософського, уявлення про час, як певний "хронологічний порядок", узгоджений з процесами змін.

Означення 2.3. *Нехай, $\mathcal{M}$ — орієнтована множина і $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина (в сенсі [18, с. 12],[19, с. 87, 212]). Відображення $\psi : \mathbf{T} \mapsto 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ називається* ***часом*** *на $\mathcal{M}$, якщо виконуються такі умови:*

1) Для довільного елементарного стану $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ існує елемент $t \in \mathbf{T}$ такий, що $x \in \psi(t)$.

2) Якщо $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \neq x_2$, то існують елементи $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_1 < t_2$ (тобто має місце часова роздільність послідовних неоднакових елементарних станів).

При цьому елементи $t \in \mathbf{T}$ будемо називати ***моментами часу****, пару*

$$\mathcal{H} = (\mathbb{T}, \psi) = ((\mathbf{T}, \leq), \psi)$$

— ***хронологізацією*** *$\mathcal{M}$, а трійку*

$$\mathcal{P} = (\mathcal{M}, \mathbb{T}, \psi) = (\mathcal{M}, (\mathbf{T}, \leq), \psi)$$

— ***примітивною мінливою множиною****.*

Будемо говорити, що орієнтовану множину $\mathcal{M}$ ***можна хронологізувати***, якщо існує хоч одна хронологізація $\mathcal{M}$. Виявляється, що будь-яку орієнтовану множину завжди можна хронологізувати. Найпримітивніший спосіб це зробити — взяти лінійно-упорядковану множину $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$, що містить не менше двох елементів і покласти $\psi(t) := \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}), \quad t \in \mathbf{T}$. Більш нетривіальні способи хронологізації розглянуті в роботах [14, 15]. Зокрема, в [14, 15] доведено теореми про існування часу та існування і єдиність внутрішнього ("найбільш природнього") часу для орієнтованих множин із заданою синхронізацією.

Зауваження 2.1. Надалі примітивні мінливі множини будемо позначати каліграфічними великими буквами.

Нехай $\mathcal{P} = (\mathcal{M}, \mathbb{T}, \phi)$ — примітивна мінлива множина. Де $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \trianglelefteq)$ — лінійно упорядкована множина. Введемо наступні позначення:

$$\mathfrak{Bs}(\mathcal{P}) := \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}); \quad \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow} := \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}; \quad \mathbf{Tm}(\mathcal{P}) := \mathbf{T};$$

$$\leq_{\mathcal{P}} := \trianglelefteq; \quad \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{P}) := (\mathbf{Tm}(\mathcal{P}), \leq_{\mathcal{P}}) = (\mathbf{T}, \trianglelefteq); \quad \psi_{\mathcal{P}} := \phi.$$

Також будемо використовувати позначення $\geq_{\mathcal{P}}$,$<_{\mathcal{P}}$,$>_{\mathcal{P}}$ для позначення оберненого, строгого та строгого оберненого порядку, породженого нестрогим порядком $\leq_{\mathcal{P}}$. Множину $\mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$ будемо називати *базовою множиною*, або множиною *всіх елементарних станів* примітивної мінливої множини $\mathcal{P}$. Елементи множини $\mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$ будемо називати *елементарними станами* $\mathcal{P}$, а відношення $\underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}$ будемо називати *напрямним відношенням змін* $\mathcal{P}$. Множину $\mathbf{Tm}(\mathcal{P})$ будемо називати *множиною моментів часу* $\mathcal{P}$. Відношення $\leq_{\mathcal{P}}$,$<_{\mathcal{P}}$,$\geq_{\mathcal{P}}$,$>_{\mathcal{P}}$ будемо називати відповідно відношеннями нестрогого, строго, нестрогого оберненого і строгого оберненого *часового порядку* на $\mathcal{P}$. Відображення $\psi_{\mathcal{P}} : \mathbf{Tm}(\mathcal{P}) :\mapsto 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{P})}$ будемо називати часом на $\mathcal{P}$. У випадку, коли зрозуміло, про яку примітивну мінливу множину $\mathcal{P}$ йде мова в позначеннях $\underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}$, $\leq_{\mathcal{P}}$, $<_{\mathcal{P}}$, $\geq_{\mathcal{P}}$, $>_{\mathcal{P}}$, $\psi_{\mathcal{P}}$ символ $\mathcal{P}$ будемо опускати, вживаючи замість них позначення $\leftarrow$, $\leq$, $<$, $\geq$, $>$, ψ відповідно.

2.3 База елементарних процесів та базові мінливі множини

Означення 2.4. *Нехай $\mathcal{P}$ — примітивна мінлива множина. Пару (t,x) ($x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P})$) будемо називати* ***елементарно-часовим станом****, якщо $x \in \psi(t)$.*

Множину всіх елементарно-часових станів $\mathcal{P}$ будемо позначати через $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P}) := \{\omega \mid \omega = (t,x)\,,\ \text{де}\ t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P}),\ x \in \psi(t)\}\,.$$

Зауваження 2.2. З означень 2.1 та 2.3 випливає, що $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P}) \neq \emptyset$ для довільної примітивної мінливої множини $\mathcal{P}$.

Для елементарно-часового стану $\omega = (t,x) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ введемо позначення:

$$\mathsf{bs}\,(\omega) := x, \quad \mathsf{tm}\,(\omega) := t. \tag{1}$$

Означення 2.5. *Будемо вважати, що елементарно-часовий стан $\omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$* ***формально послідовний*** *елементарно-часовому стану $\omega_1 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$, вживаючи позначення:*

$$\omega_2 \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow} (\mathrm{f})\, \omega_1,$$

якщо $\omega_1 = \omega_2$ або $\mathsf{bs}\,(\omega_2) \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow} \mathsf{bs}\,(\omega_1)$ і $\mathsf{tm}\,(\omega_1) <_{\mathcal{P}} \mathsf{tm}\,(\omega_2)$.

Коли це не викликає непорозумінь замість позначення $\omega_2 \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}(\mathrm{f})\,\omega_1$ будемо використовувати позначення $\omega_2 \leftarrow(\mathrm{f})\,\omega_1$

Легко бачити, що для довільної примітивної $\mathcal{P}$ пара $(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P}), \leftarrow(\mathrm{f}))$ є орієнтованою множиною, в якій відношення $\leftarrow(\mathrm{f})$ є напрямеим відношенням змін. Відношення $\leftarrow(\mathrm{f})$ показує всі "потенційно можливі" трансформації елементарно-часових станів, які можна "вписати" в примітивну мінливу множину $\mathcal{P}$. Проте, як показано в [17, приклад 2.1], [15, example 7.1] це відношення може генерувати деякі паразитичні "трансформації" елементарно-часових станів, яких реально ніколи не було у модельованій фізичній системі. Для того, щоб адекватно описувати модельовані процеси, в роботах [17, приклад 2.1], [15, example 7.1] пропонується задавати деяке підвідношення відношення $\leftarrow(\mathrm{f})$, яке відображало б лише ті трансформації елементарно-часових станів, які реально мають місце в модельованій частині дійсності.

Сказане вище служить мотивацією для наступного означення.

Означення 2.6. *Нехай, $\mathcal{P}$ — примітивна мінлива множина.*
1. *Відношення $\Lleftarrow$ на $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ будемо називати **базою елементарних процесів** в $\mathcal{P}$, якщо:*

(1) $\forall\,\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})\ \omega \Lleftarrow \omega$.

(2) *Якщо $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ і $\omega_2 \Lleftarrow \omega_1$, то $\omega_2 \leftarrow(\mathrm{f})\,\omega_1$ (тобто $\Lleftarrow\ \subseteq\ \leftarrow(\mathrm{f})$).*

(3) *Для довільних $x_1, x_2 \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ таких, що $x_2 \leftarrow x_1$ існують $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ такі, що $\mathsf{bs}\,(\omega_1) = x_1$, $\mathsf{bs}\,(\omega_2) = x_2$ і $\omega_2 \Lleftarrow \omega_1$.*

2. *Якщо $\mathcal{P}$ — примітивна мінлива множина і $\Lleftarrow$ — база елементарних процесів на $\mathcal{P}$, то пару:*

$$\mathcal{B} = (\mathcal{P}, \Lleftarrow)$$

*будемо називати **базовою мінливою множиною**.*

Зауваження 2.3. Надалі базові мінливі множини будемо позначати великими каліграфічними буквами.

Нехай, $\mathcal{B} = (\mathcal{P}, \Lleftarrow)$ — базова мінлива множина. Введемо наступні позначення:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) := \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P});\ \ \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) := \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P});\ \ \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} := \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow};\ \ \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}(\mathrm{f}) := \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}(\mathrm{f});$$

$$\mathbf{Tm}(\mathcal{B}) := \mathbf{Tm}(\mathcal{P}); \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) := \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{P});$$

$$\leq_{\mathcal{B}} := \leq_{\mathcal{P}}; \;\; <_{\mathcal{B}} := <_{\mathcal{P}}; \;\; \geq_{\mathcal{B}} := \geq_{\mathcal{P}}; \;\; >_{\mathcal{B}} := >_{\mathcal{P}}; \;\; \psi_{\mathcal{B}} := \psi_{\mathcal{P}}.$$

Також, для елементарно-часових станів $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ будемо використовувати позначення $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$ для позначення того факту, що $\omega_2 \Lleftarrow \omega_1$. При цьому, у випадку, коли необхідно чітко відрізняти напрямне відношення змін від бази елементарних процесів, замість позначення $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$, будемо використовувати позначення $\omega_2 \underset{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}{\leftarrow} \omega_1$.

Коли відомо, про яку базову мінливу множину $\mathcal{B}$ йде мова, в позначеннях $\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}$, $\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}(\mathrm{f})$, $\leq_{\mathcal{B}}$, $<_{\mathcal{B}}$, $\geq_{\mathcal{B}}$, $>_{\mathcal{B}}$, $\psi_{\mathcal{B}}$ символ $\mathcal{B}$ будемо опускати, вживаючи замість них позначення $\leftarrow$, $\leftarrow(\mathrm{f})$, $\leq$, $<$, $\geq$, $>$, ψ відповідно.

З означень 2.6 та 2.4-2.5 випливають наступні ***властивості базових мінливих множин*** (у властивостях 1-5 символ $\mathcal{B}$ позначає довільну базову мінливу множину).

Властивості 2.1.

1. *Пара $\mathcal{B}_0 = (\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ є орієнтованою множиною, а відображення $\psi = \psi_{\mathcal{B}}$ є часом на $\mathcal{B}_0$.*

2. *Якщо $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ і $\omega_2 \leftarrow \omega_1$, то $\omega_2 \leftarrow(\mathrm{f})\, \omega_1$, а отже, $\mathsf{bs}\,(\omega_2) \leftarrow \mathsf{bs}\,(\omega_1)$ і $\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2)$. Якщо, додатково, $\omega_1 \neq \omega_2$, то $\mathsf{tm}\,(\omega_1) < \mathsf{tm}\,(\omega_2)$.*

3. *Для довільних $x_1, x_2 \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ умова $x_2 \leftarrow x_1$ має місце тоді і тільки тоді, коли існують елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ такі, що $\mathsf{bs}\,(\omega_1) = x_1$, $\mathsf{bs}\,(\omega_2) = x_2$ і $\omega_2 \leftarrow \omega_1$.*

4. *$\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \{\mathsf{bs}\,(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\}$.*

Приклад 2.1. Нехай, $\mathcal{P}$ — довільна примітивна мінлива множина. Тоді легко перевірити, що відношення $\leftarrow(\mathrm{f}) = \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}(\mathrm{f})$ є базою елементарних процесів на $\mathcal{P}$ (більш детально див. [15, 17]).

Отже, довільну примітивну мінливу множину завжди можна ототожнити з базовою мінливою множиною $\mathcal{P}_{(f)} = (\mathcal{P}, \leftarrow(\mathrm{f}))$, у якій $\leftarrow(\mathrm{f})$ є базою елементарних процесів.

Більш цікавими прикладами базових мінливих множин є базові мінливі множини, породжені системами абстрактних траєкторій.

Означення 2.7. *Нехай M — довільна множина і $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — довільна непорожня ($\mathbf{T} \neq \emptyset$) лінійно упорядкована множина.*

1. *Відображення $r : \mathfrak{D}(r) \mapsto M$ ($\mathfrak{D}(r) \neq \emptyset$) будемо називати* ***абстрактною траєкторією*** *з $\mathbb{T}$ в M, якщо $\mathfrak{D}(r) \subseteq \mathbf{T}$ (де $\mathfrak{D}(r)$ — область визначення траєкторії r).*

2. ***Системою абстрактних траєкторій*** *з $\mathbb{T}$ в M будемо називати довільну множину $\mathcal{R}$, елементами якої є абстрактні абстрактні траєкторії з $\mathbb{T}$ в M таку, що*
$$\bigcup_{r \in \mathcal{R}} \mathfrak{R}(r) = M$$
(де $\mathfrak{R}(r)$ — область значень абстрактної траєкторії r).

Теорема 2.1 ([15, 17])**.** *Для довільної системи абстрактних $\mathcal{R}$ траєкторій з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в M існує, причому єдина, базова мінлива множина $\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})$ така, що:*

1) $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})\right) = \mathbb{T}$*;*

2) $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})) = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} r$*, де довільну абстрактну траєкторію $r \in \mathcal{R}$ слід розуміти як множину (тобто $r = \{(t, r(t)) \mid t \in \mathfrak{D}(r)\}$);*

3) *Для довільних $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R}))$ умова $\omega_2 \underset{\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R})}{\leftarrow} \omega_1$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\mathsf{tm}(\omega_1) \leq \mathsf{tm}(\omega_2)$ і існує траєкторія $r \in \mathcal{R}$ така, що $\omega_1, \omega_2 \in r$.*

Зауваження 2.4. Надалі, коли лінійно упорядкована множина $\mathbb{T}$ є наперед відомою, замість позначення $\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})$ будемо використовувати позначення $\mathcal{A}t\,(\mathcal{R})$.

Нехай T, X — довільні множини. Надалі позначення (1) будемо застосовувати для довільного елемента $\omega = (t, x) \in T \times X$ (де символ $\times$ означає декартовий добуток множин). Отже, для довільного $\omega \in T \times X$ маємо, $\omega = (\mathsf{tm}(\omega), \mathsf{bs}(\omega))$. Зауважимо, що позначення (1) раніше використовувались лише для елементарно-часових станів $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{P}) \times \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ примітивної або базової мінливої множини $\mathcal{P}$ (див. підрозділ 2.3).

Наступна теорема показує інший, більш лаконічний, хоча й більш штучний, шлях для визначення поняття базової мінливої множини.

Теорема 2.2. ***Нехай***, $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ *— довільна лінійно упорядкована множина,* $\mathfrak{X}$ *— довільна множина і* $\Leftarrow$ *— бінарне відношення, визначене на множині* $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{T} \times \mathfrak{X}$*, яке задовольняє такі умови:*

1. *Відношення* $\Leftarrow$ *рефлексивне на* $\mathbf{B}$*;*

2. *Для довільних* $\omega, \omega_2 \in \mathbf{B}$ *з умов* $\omega_2 \Leftarrow \omega_1$ *і* $\omega_1 \neq \omega_2$ *випливає, що* $\mathsf{tm}\,(\omega_1) < \mathsf{tm}\,(\omega_2)$.

Тоді існує єдина базова мінлива множина $\mathcal{B}$*, що задовольняє такі умови:*

$$\textbf{а)}\ \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = \mathbb{T}; \quad \textbf{б)}\ \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \mathbf{B}; \quad \textbf{в)}\ \underset{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}{\leftarrow} = \Leftarrow.$$

Доведення. **1.** Позначимо:

$$\begin{aligned} & r_{\omega_1,\omega_2} := \{\omega_1, \omega_2\}, \quad \omega_1, \omega_2 \in \mathbf{B} \\ & \mathcal{R} := \{ r_{\omega_1,\omega_2} \,|\, \omega_1, \omega_2 \in \mathbf{B},\ \omega_2 \Leftarrow \omega_1 \}. \end{aligned} \tag{2}$$

Доведемо, що всі елементи множини $\mathcal{R}$ є абстрактними траєкторіями з $\mathbb{T}$ в $\mathfrak{X}$. Зафіксуємо довільні $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{B}$ такі, що $\omega_2 \Leftarrow \omega_1$. Оскільки $r_{\omega_1,\omega_2} = \{\omega_1, \omega_2\} \subseteq \mathbf{B} \subseteq \mathbf{T} \times \mathfrak{X}$, то r_{ω_1,ω_2} є бінарним відношенням з $\mathbf{T}$ в $\mathfrak{X}$. Доведемо, що це відношення є функцією. Припустимо супротивне. Тоді існують $(t, x_1), (t, x_2) \in r_{\omega_1,\omega_2}$ такі, що $x_1 \neq x_2$ (а отже $(t, x_1) \neq (t, x_2)$). Отже можливими є лише наступні два випадки: $(t, x_1) = \omega_1$, $(t, x_2) = \omega_2$ або $(t, x_1) = \omega_2$, $(t, x_2) = \omega_1$. Але, оскільки $\omega_2 \Leftarrow \omega_1$, за умовою 2 даної теореми, в обох випадках отримуємо хибну нерівність $t < t$. Тому, відношення r_{ω_1,ω_2} є функцією, а отже, і з $\mathbb{T}$ в $\mathfrak{X}$. Тобто, $\mathcal{R}$ є системою абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}$ в $\bigcup_{r \in \mathcal{R}} \mathfrak{R}(r) \subseteq \mathfrak{X}$. Позначимо:

$$\mathcal{B} := \mathcal{A}t\,(\mathbb{T}, \mathcal{R}).$$

а) За теоремою 2.1 (пункт 1), $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = \mathbb{T}$.

б) За теоремою 2.1 (пункт 2):

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} r = \bigcup_{\substack{\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{B} \\ \omega_2 \Leftarrow \omega_1}} \{\omega_1, \omega_2\} \subseteq \mathbf{B}. \tag{3}$$

З іншого боку, беручи до уваги, що, за умовою 1 даної теореми, відношення $\leftarrowtriangle$ є рефленксивним, отримуємо обернене включення:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \bigcup_{\substack{\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{B} \\ \omega_2 \leftarrowtriangle \omega_1}} \{\omega_1, \omega_2\} \supseteq \bigcup_{\omega \in \mathbf{B}} \{\omega\} = \mathbf{B}. \tag{4}$$

Таким чином, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \mathbf{B}$. Отже, базова мінлива множина $\mathcal{B}$ задовольняє умови а),б) висновку даної теореми.

c) Доведемо, що умова в) для базової мінливої множини $\mathcal{B}$ також виконується. Необхідно довести, що для довільних $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{B} = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ умова $\omega_2 \leftarrowtriangle \omega_1$ еквівалентна умові $\omega_2 \underset{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}{\leftarrow} \omega_1$ (тобто умові $\omega_2 \leftarrow \omega_1$). Оскільки обидва відношення $\leftarrowtriangle$ та $\underset{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}{\leftarrow}$ є рефлексивними на $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \mathbf{B}$, досить довести останнє твердження лише для випадку $\omega_1 \neq \omega_2$. Отже, зафіксуємо довільні $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{B} = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ такі, що $\omega_1 \neq \omega_2$.

c.1) Припустимо, що $\omega_2 \leftarrow \omega_1$. тоді, за теоремою 2.1 (пункт 3),

$$\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2) \tag{5}$$

і існує траєкторія $r_{w_1,w_2} \in \mathcal{R}$ $(w_2 \leftarrowtriangle w_1)$ така, що $\omega_1, \omega_2 \in r_{w_1,w_2} = \{w_1, w_2\}$. Отже, оскільки $w_2 \leftarrowtriangle w_1$ і $\omega_1 \neq \omega_2$, повина виконуватись хоч одна з умов:

$$\omega_2 \leftarrowtriangle \omega_1 \quad \text{або} \quad \omega_1 \leftarrowtriangle \omega_2$$

Проте, випадок $\omega_1 \leftarrowtriangle \omega_2$ є неможливим, оскільки в цьому випадку, за умовою 2 даної теореми отримуємо нерівнвсть $\mathsf{tm}\,(\omega_2) < \mathsf{tm}\,(\omega_1)$, яка суперечить нерівності (5). Отже, $\omega_2 \leftarrowtriangle \omega_1$.

c.2) Навпаки, припустимо, що $\omega_2 \leftarrowtriangle \omega_1$. Тоді, за (2), $r_{\omega_1,\omega_2} \in \mathcal{R}$, отже, за умовою 2 даної теоереми $\mathsf{tm}\,(\omega_1) < \mathsf{tm}\,(\omega_2)$. Отже, за теоремою 2.1 (пункт 3) $\omega_2 \leftarrow \omega_1$.

Рівність $\underset{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}{\leftarrow} = \leftarrowtriangle$ доведена. Таким чином, базова мінлива множина $\mathcal{B}$ задовольняє умови а),б),в).

Необхідно довести, що існує лише єдина базова мінлива множина $\mathcal{B}$, яка задовольняє умови а),б),в). Припустимо, що базова мінлива множина $\mathcal{B}_1$ також задовольняє умови а),б),в). Доведемо, що тоді $\mathcal{B}_1$ мусить задовольняти умови 1),2),3) теореми 2.1 для системи абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$, визначеної в (2).

2.1) За умовою а), $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_1) = \mathbb{T}$.

2.2) Використовуючи умову б) і застосовуючи рівності (3),(4) для $\mathcal{B}_1$, отримуємо:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right) = \mathbf{B} = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \bigcup_{r\in\mathcal{R}} r.$$

2.3) Оскільки обидві базові мінливі множини $\mathcal{B}$ та $\mathcal{B}_1$ задовольняють умову в), то:

$$\underset{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_1)}{\leftarrow} = \leftarrowtriangle = \underset{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}{\leftarrow} = \underset{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R}))}{\leftarrow}.$$

Це означає, що $\mathcal{B}_1$ задовольняє умову 3) теореми 2.1.

Отже, базова мінлива множина $\mathcal{B}_1$ задовольняє всі умови теореми 2.1 для системиабстрактних траєкторій $\mathcal{R}$. Тому, за теоремою 2.1, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R}) = \mathcal{B}$. □

Зауваження 2.5. З властивостей 2.1 і означення 2.4 випливає, що для базової мінливої множини $\mathcal{B}$, що задовольняє умови а),б),в) теореми 2.2 виконуються наступні твердження:

1. $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \mathsf{bs}\left(\mathbf{B}\right) = \{\mathsf{bs}\left(\omega\right) \mid \omega \in \mathbf{B}\}$;

2. $\psi_{\mathcal{B}}(t) = \{\mathsf{bs}\left(\omega\right) \mid \omega \in \mathbf{B},\ \mathsf{tm}\left(\omega\right) = t\}$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$. Зокрема, $\psi_{\mathcal{B}}(t) = \emptyset$ для випадку, коли не існує $\omega \in \mathbf{B}$ такого, що $\mathsf{tm}\left(\omega\right) = t$.

Зауваження 2.6. Нехай $\mathcal{B}$ — довільна базова мінлива множина. Позначимо:

$$\mathbb{T} := \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}); \quad \mathfrak{X} := \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}); \quad \mathbf{B} := \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \quad \leftarrowtriangle := \underset{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}{\leftarrow}.$$

Очевидно, що умови 1,2 теореми 2.2 для $\mathbb{T}, \mathfrak{X}, \mathbf{B}$ і $\leftarrowtriangle$ виконуються. Крім того, $\mathcal{B}$ є (єдиною) базовою мінливою множиною, що задовольняє умови а),б),в) висновку цієї теоереми. Тому, використовуючи теорему 2.2 можна дати інше означення для поняття базової мінливої множини. А саме, базову мінливу множину можна визначити, як математичну сируктуру, що складається з лінійно упорядкованої множини $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$, множини $\mathfrak{X}$, підмножини $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{T} \times \mathfrak{X}$, і бінарного відношення $\leftarrowtriangle$, визначеного на $\mathbf{B}$, що задовольняє умови 1,2 теореми 2.2.

2.4 Лінії долі та елементарні процеси базових мінливих множин

Твердження 2.3 ([15, 17]). *Для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$ пара $\mathcal{Q} = \left(\mathbb{Bs}(\mathcal{B}), \underset{\mathbb{Bs}(\mathcal{B})}{\leftarrow}\right) = (\mathbb{Bs}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ є орієнтованою множиною. При цьому відображення $\tilde{\psi}(t) = \tilde{\psi}_{\mathcal{B}}(t) := \{\omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B}) \mid \mathsf{tm}(\omega) = t\} \in 2^{\mathbb{Bs}(\mathcal{B})}$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ є часом на $\mathcal{Q}$.*

Означення 2.8. *Нехай $\mathcal{B}$ базова мінлива множина.*

*1) Довільний максимальний ланцюг $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ на орієнтованій множині $(\mathbb{Bs}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ елементарно-часових станів $\mathcal{B}$ будемо називати **лінією долі** $\mathcal{B}$. Множину всіх ліній долі $\mathcal{B}$ будемо позначати через $\mathbb{L}d(\mathcal{B})$:*

$$\mathbb{L}d(\mathcal{B}) = \{\mathcal{L} \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B}) \mid \mathcal{L} \text{ є лінією долі } \mathcal{B}\}.$$

*2) Будь-яку лінію долі $L \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$, що містить елементарно-часовий стан $\omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ будемо називати **власною** лінією долі елементарно-часового стану ω (в $\mathcal{B}$).*

Зрозуміло, що в загальному випадку елементарно-часові стани можуть мати не одну власну лінію долі.

Будемо говорити, що елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ ***об'єднані долею***, якщо існує хоч одна лінія долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$, яка є власною лінією долі кожного із станів ω_1, ω_2 одночасно.

Твердження 2.4 ([15, 17]). *1) Довільний елементарно-часовий стан $\omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ має хоч одну власну лінію долі.*

2) Для того, щоб елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ були об'єднані долею необхідно і достатньо, щоб виконувалась хоч одна з умов: $\omega_2 \leftarrow \omega_1$ або $\omega_1 \leftarrow \omega_2$.

Згідно з теоремою 2.1, довільна система абстрактних траєкторій, визначена на деякій лінійно упорядкованій множині $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$, породжує базову мінливу множину $\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})$. Виявляється, що, навпаки, довільна базова мінлива множина $\mathcal{B}$ може бути породжена деякою системою максимальних траєкторій.

Теорема 2.3 ([15, 17]). *Для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$ множина $\mathbb{L}d(\mathcal{B})$ є системою абстрактних траєкторій з $\mathbb{Tm}(\mathcal{B})$ в $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$. При цьому:*

$$\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}),\, \mathbb{L}d(\mathcal{B})\right) = \mathcal{B}.$$

Зауваження 2.7. Підкреслимо, що довільна лінія долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ базової мінливої множини $\mathcal{B}$ є підмножиною множини $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Тому $\mathcal{L}$ є бінарним відношенням з множини $\mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ в монжину $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Отже, теоерма 2.3 показує, що це відношення є функцією, тобто абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$.

Означення 2.9. *Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина.*

1. *Будь-яку підмножину $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ будемо називати **мінливою системою** базової мінливої множини $\mathcal{B}$.*
2. *Довільне відображення $s : \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) :\mapsto 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}$ таке, що $s(t) \subseteq \psi(t)$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ будемо називати **процесом** базової мінливої множини $\mathcal{B}$.*

В механіці елементарні стани можна інтерпритувати, як стани (тобто положення) матеріальних точок в різні моменти часу. Саме тому, на поняття мінливої системи можна дивитись, як на абстрактне узагальнення поняття фізичного тіла, склад якого, взагалі кажучи, не є постійним і може змінюватись довільним чином в процесі трансформацій цього тіла.

Нехай, $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ — довільна мінлива система довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$. Покладемо:

$$S^{\sim}(t) := \{x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \mid (t,x) \in S\}, \quad t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B}). \tag{6}$$

Легко бачити, що $S^{\sim}(t) \subseteq \psi(t)$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$. Отже, за означенням 2.9, $S^{\sim}$ є процесом на базовій мінливій множині $\mathcal{B}$.

Означення 2.10. *Процес $S^{\sim}$ будемо називати **процесом трансформацій** мінливої системи S.*

Твердження 2.5 ([15, 17])**.** *Let $\mathcal{B}$ be a basic changeable set.*

1. Для довільних мінливих систем $S_1, S_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ рівність $S_1^{\sim} = S_2^{\sim}$ має місце тоді і тільки тоді, коли $S_1 = S_2$.

2. Для довільного процесу s базової мінливої множини $\mathcal{B}$ існує, причому єдина, мінлива система $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ така, що $s = S^{\sim}$.

Отже, відображення $(\cdot)^{\sim}$ встановлює взаємно-однозначну відповідність між мінливими системами і процесами базової мінливої множини. Враховуючи зазначений факт, надалі поняття мінливої системи і процесу довільної базової мінливої множини будемо "ототожнювати", а говорячи про процеси на базових мінливих множинах будемо позначати ці процеси великими буквами з хвилькою у верхньому індексі, маючи на увазі, що довільний процес є процесом трансформацій певної мінливої системи.

Будемо говорити, що мінлива система $U \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ базової мінливої множини $\mathcal{B}$ є ***підсистемою*** *мінливої системи $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, якщо $U \subseteq S$.*

Твердження 2.6 ([15, 17])**.** *Мінлива система $U \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ є підсистемою мінливої системи $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ тоді і тільки тоді, коли $\forall\, t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})\ \ U^{\sim}(t) \subseteq S^{\sim}(t)$.*

Будемо говорити, що елементарний стан $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ базової мінливої множини $\mathcal{B}$ ***належить*** *до мінливої системи $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ в момент часу $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$, якщо $x \in S^{\sim}(t)$.* Той факт, що елементарний стан x базової мінливої множини $\mathcal{B}$ належить до мінливої системи S в момент часу t будемо позначати наступним чином:

$$x \in [t, \mathcal{B}]\ S,$$

а, у випадку, коли зрозуміло про яку базову мінливу множину йде мова, будемо використовувати позначення:

$$x \in [t]\ S.$$

З твердження 2.6 випливає, що для мінливих систем $U, S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ співвідношення $U \subseteq S$ має місце тоді і тільки тоді, коли для довільних $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ і $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ з умови $x \in [t]\ U$ випливає співвідношення $x \in [t]\ S$.

Останнє зауваження говорить про те, що на мінливу систему довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$ можна дивитись як на аналог поняття підмножини в класичній теорії множин, а на відношення $\in[\cdot]$ як на аналог відношення належності класичної теорії множин. Проте, з іншої сторони, ні елементарні ні елементарно-часові стани не можуть повністю претендувати на аналог поняття елемента в класичній теорії множин, оскільки знаючи всі елементарні чи елементарно-часові стани базової мінливої множини ми не зможемо відновити ні напрямне відношення змін ні базу елементарних процесів, а отже не зможемо повністю відновити базову мінливу множину за її “елементами”.

Очевидно, що довільна лінія долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ базової мінливої множини $\mathcal{B}$ є її мінливою системою.

Означення 2.11. *Процес $\mathcal{L}^{\sim}$, породжений лінією долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ базової мінливої множини $\mathcal{B}$ будемо називати* ***елементарним процесом*** *$\mathcal{B}$.*

На елементарний процес вже можна дивитись, як на повний аналог елемента звичайної (статичної) множини, оскільки з елементарних процесів, користуючись теоремою 2.3, можна відновити всю базову мінливу множину.

3 Загальні мінливі множини та їхні властивості

3.1 Загальне означення мінливої множини

Базові мінливі множини можна розглядати як абстракцію моделей фізичних та ін. процесів (на рівні макросвіту), коли спостереження за процесом проводиться з одного, фіксованого пункту спостереження (однієї фіксованої системи відліку). Проте, реальний фізичний світ є багатоликим, оскільки у фізиці (зокрема у спеціальній теорії відносності) “картина світу” може істотньо змінюватись в залежності від зміни системи відліку. Тобто, в результаті, ми отримуємо не одну, а багато “базових мінливих множин” (пов’язяних з кожною системою відліку в межах даної фізичної моделі). Кожну з цих “базових мінливих множин” можна вважати окремим ликом (областю сприймання) реального світу. При цьому припускається, що між різними областями сприймання існує природня уніфікація фізчних об’єктів і процесів, тобто існує якесь “правило”, котре визначає яким чином об’єкт з однієї області сприймання “слід бачити” в іншій області сприймання. Тобто ми ототожнюємо певний об’єкт або процес із іншим об’єктом або процесом іншої області сприймання, кажучи, що це той самий об’єкт або процес, але “видимий” в іншій області сприймання. В класичній механіці така “уніфікація сприймання” задається з допомогою групи перетворень Галілея, в спеціальній теорії відносності — з допомогою групи перетворень Лорнца-Пуанкаре. Слід зазначити, що в обох випадках уніфікація сприймання проводиться на рівні елементарно-часових станів (з допомогою взаємно-однозначних відображень, заданих на 4-вимірному просторі часу). Отже, припускається, що довільний елементарно-часовий стан, "видимий" з однієї області сприймання (системи відліку) є завжди "видимим" з іншої області сприймання. На нашу думку, таке припущення є певною фізичною ідеалізацією, і для абстрактної теорії мінливих множин добре було б відмовитись від обов'язкової "наскрізної" видимості. Саме тому в означенні нижче уніфікація сприймання проводиться не на рівні елементарно-часових станів, а на рівні "об'єктів і процесів". Нагадаємо, що в теорії базових мінливих множин абстрактними аналогами фізичних об'єктів або процесів є мінливі системи, тобто підмножини множини $\mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ всіх елементарно-часових станів базової мінливої множини $\mathcal{B}$.

Означення 3.1. *Нехай* $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{A})$ *індексована сім'я базових мінливих множин, де* $\mathcal{A}$ *— деяка множина індексів. Система відображень* $\overleftarrow{\mathfrak{U}} = (\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \,|\, \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ *виду:*

$$\mathfrak{U}_{\beta\alpha} : 2^{\mathbb{Bs}(\mathcal{B}_\alpha)} \longmapsto 2^{\mathbb{Bs}(\mathcal{B}_\beta)} \qquad (\alpha, \beta \in \mathcal{A})$$

називаеться ***уніфікацією сприймання*** *на* $\overleftarrow{\mathcal{B}}$*, якщо:*

1. $\mathfrak{U}_{\alpha\alpha} A \equiv A$ *для довільних* $\alpha \in \mathcal{A}$ *і* $A \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B}_\alpha)$.
   (Тут і надалі де через $\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A$ буде позначатись дія відображення $\mathfrak{U}_{\beta\alpha}$ на множину $A \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B}_\alpha)$, тобто $\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A := \mathfrak{U}_{\beta\alpha}(A)$.)

2. *Будь-яке відображення* $\mathfrak{U}_{\beta\alpha}$ *є монотонним відображенням множин, тобто для довільних* $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ *і* $A, B \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B}_\alpha)$ *з умови* $A \subseteq B$ *випливає, що* $\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A \subseteq \mathfrak{U}_{\beta\alpha} B$.

3. *Для довільних* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ *і* $A \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B}_\alpha)$ *має місце включення: F*

$$\mathfrak{U}_{\gamma\beta} \mathfrak{U}_{\beta\alpha} A \subseteq \mathfrak{U}_{\gamma\alpha} A. \tag{7}$$

При цьому відображення $\mathfrak{U}_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta \in \mathcal{A})$ *будемо називати* ***відображеннями уніфікації****, а трійку виду:*

$$\mathcal{Z} = \left(\mathcal{A}, \overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{\mathfrak{U}}\right)$$

будемо називати ***мінливою множиною****.*

Перша умова означення 3.1 є цілком очевидною. Друга умова продиктована природнім прагненням “бачити” підсистему даної мінливої системи в одній області сприймання підсистемою “цієї ж” мінливої системі в іншій області сприймання. У випадку класичної механіки або спеціальної теорії відносності замість співвідношення (7) у третій умові означення 3.1 варто було б записати рівність:

$$\mathfrak{U}_{\gamma\beta}\mathfrak{U}_{\beta\alpha}A = \mathfrak{U}_{\gamma\alpha}A \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A},\ A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)) \tag{8}$$

Заміна в (7) знаку рівності на включення зумовлена можливістю “спотворення зображення” при переході до іншої області сприймання, коли не всі елементарно-часові стани довільної мінливої системи даної області сприймання є “видимими” з іншої області сприймання. Остання думка більш детально пояснена в роботах [15, 16], (див., також, приклади 4.4, **??**, **??**).

3.2 Зауваження про термінологію і позначення

Нехай $\mathcal{Z} = \left(\mathcal{A}, \overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{\mathfrak{U}}\right)$ — мінлива множина, де $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A})$ індексована сім'я базових мінливих множин і $\overleftarrow{\mathfrak{U}} = (\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ — уніфікація сприймання на $\overleftarrow{\mathcal{B}}$. Надалі будемо вживати наступні терміни і позначення:

1) Множину $\mathcal{A}$ будемо називати ***множиною індексів*** мінливої множини $\mathcal{Z}$ і будемо позначати її через $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z})$.

2) Для довільного індекса $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z})$ пару $(\alpha, \mathcal{B}_\alpha)$ будемо називати ***областю сприймання*** *або* ***системою відліку*** $\mathcal{Z}$.

3) Множину всіх областей сприймання (систем відліку) мінливої множини $\mathcal{Z}$ будемо позначати через $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$:

$$\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}) := \{(\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z})\}\,.$$

Області сприймання мінливих множин будемо, як правило, позначати малими латинськими буквами (l, m, k, p та ін).

4) Нехай $l = (\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$. Введемо наступні позначення:

$$\mathtt{ind}\,(l) := \alpha; \quad l^{\hat{}} := \mathcal{B}_\alpha.$$

Отже, для довільної області сприймання $l \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ математичний об'єкт $l^{\hat{}}$ є базовою мінливою множиною.

Надалі, коли це не викликає непорозумінь, для довільної області сприймання $l \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ в позначеннях $\mathfrak{Bs}\,(l^{\wedge})$, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(l^{\wedge})$, $\mathbf{Tm}\,(l^{\wedge})$, $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(l^{\wedge})$ $\leq_{l^{\wedge}}$, $<_{l^{\wedge}}$, $\geq_{l^{\wedge}}$, $>_{l^{\wedge}}$, $\psi_{l^{\wedge}}$, $\underset{l^{\wedge}}{\leftarrow}$, $\mathbb{L}d\,(l^{\wedge})$ символ "$\,^{\wedge}$" будемо опускати, використовуючи замість них позначення:

$$\mathfrak{Bs}\,(l)\,,\ \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(l)\,,\ \mathbf{Tm}\,(l)\,,\ \mathbb{T}\mathbf{m}\,(l)\,,\ \leq_l,\ <_l,\ \geq_l,\ >_l,\ \psi_l,\ \underset{l}{\leftarrow},\ \mathbb{L}d\,(l)\,.$$

5) Для довільних областей сприймання $l, m \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ відображення уніфікації $\mathfrak{U}_{\mathtt{ind}(m),\mathtt{ind}(l)}$ будемо позначати через $\langle m \leftarrow l, \mathcal{Z}\rangle$, тобто:

$$\langle m \leftarrow l, \mathcal{Z}\rangle = \mathfrak{U}_{\mathtt{ind}(m),\mathtt{ind}(l)}.$$

Якщо відомо про яку мінливу множину $\mathcal{Z}$ йде мова, символ $\mathcal{Z}$ у зазначеному вище позначенні будемо опускати, вживаючи замість нього позначення, $\langle m \leftarrow l\rangle$. Крім того, коли це не викликає непорозумінь, в позначеннях $\leq_l$, $<_l$, $\geq_l$, $>_l$, $\underset{l}{\leftarrow}$ символ l також будемо опускати, застосовуючи замість них позначення $\leq$, $<$, $\geq$, $>$, $\leftarrow$ відповідно.

3.3 Елементарні властивості мінливих множин

Використовуючи означення 3.1, а також позначення, введені у підрозділі 3.2, можна сформулювати наступні **базові властивості мінливих множин**:

Властивості 3.1. *У властивостях 1-5, $\mathcal{Z}$ є довільною мінливою множиною і $l, m, p \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ — довільні області сприймання $\mathcal{Z}$.*

1. $l = (\mathtt{ind}\,(l)\,, l^{\wedge})$;
2. $l^{\wedge} = \left(\left(\left(\mathfrak{Bs}(l), \underset{l}{\leftarrow}\right), (\mathbf{Tm}(l), \leq_l)\,, \psi_l\right), \underset{\mathbb{B}\mathfrak{s}(l)}{\leftarrow}\right)$ *є базовою мінливою множиною.*
3. $\langle l \leftarrow l\rangle\, A = A$, $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(l)$;
4. *Якщо* $A \subseteq B \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(l)$, *то* $\langle m \leftarrow l\rangle\, A \subseteq \langle m \leftarrow l\rangle\, B$;
5. $\langle p \leftarrow m\rangle\, \langle m \leftarrow l\rangle\, A \subseteq \langle p \leftarrow l\rangle\, A$, $(\forall\, A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(l))$.

В майбутньому означення 3.1 безпосередньо застосовуватись не буде а замість нього будуть використовуватись властивості 3.1. Наступні два твердження є безпосередніми наслідками властивостей 3.1. В цих твердженнях символ $\mathcal{Z}$ означає довільну мінливу множину.

Твердження 3.1. *Для довільних $l, m \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ справедлива наступна рівність:*
$$\langle m \leftarrow l\rangle\,\emptyset = \emptyset.$$

Доведення. Позначимо $B := \langle m \leftarrow l\rangle\,\emptyset \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(m)$. Використовуючи властивості 3.1 (5 та 3) отримуємо:

$$\langle l \leftarrow m\rangle\,B = \langle l \leftarrow m\rangle\,\langle m \leftarrow l\rangle\,\emptyset \subseteq \langle l \leftarrow l\rangle\,\emptyset = \emptyset.$$

Отже, $\langle l \leftarrow m\rangle\,B = \emptyset$. Оскільки $\emptyset \subseteq B$, та, за властивістю 3.1(4) ,

$$\langle l \leftarrow m\rangle\,\emptyset \subseteq \langle l \leftarrow m\rangle\,B = \emptyset,$$

тобто $\langle l \leftarrow m\rangle\,\emptyset = \emptyset$. Отже, згідно з властивостями 3.1 (3 та 5), отримуємо:

$$\emptyset = \langle m \leftarrow m\rangle\,\emptyset \supseteq \langle m \leftarrow l\rangle\,\langle l \leftarrow m\rangle\,\emptyset = \langle m \leftarrow l\rangle\,\emptyset = B.$$

□

Твердження 3.2. *Для довільних $l, m \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ і довільної сім'ї мінливих систем $(A_\alpha | \alpha \in \mathcal{A})$ ($A_\alpha \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(l)$, $\alpha \in \mathcal{A}$) справедливі наступні включення:*

1) $\langle m \leftarrow l\rangle \left(\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \right) \subseteq \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle m \leftarrow l\rangle\,A_\alpha$;

2) $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \supseteq \langle l \leftarrow m\rangle \left(\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle m \leftarrow l\rangle\,A_\alpha \right)$;

3) $\langle m \leftarrow l\rangle \left(\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \right) \supseteq \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle m \leftarrow l\rangle\,A_\alpha$.

Підкреслимо, що множина індексів $\mathcal{A}$ в даному твердженні є довільною, і, взагалі кажучи, не співпадає з множиною індексів у означенні 3.1.

Доведення. 1) Покладемо $A := \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$. Враховуючи, що $A \subseteq A_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$ і використовуючи властивість 3.1(4), отримуємо:

$$\langle m \leftarrow l\rangle\,A \subseteq \langle m \leftarrow l\rangle\,A_\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{A}.$$

Отже, $\langle m \leftarrow l\rangle\,A \subseteq \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle m \leftarrow l\rangle\,A_\alpha$.

2) Позначимо: $Q := \bigcap\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} \langle m \leftarrow l \rangle A_\alpha$. Тоді $Q \subseteq \langle m \leftarrow l \rangle A_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Звідси, за властивостями 3.1(4,5 і 3) отримуємо:

$$\langle l \leftarrow m \rangle Q \subseteq \langle l \leftarrow m \rangle \langle m \leftarrow l \rangle A_\alpha \subseteq \langle l \leftarrow l \rangle A_\alpha = A_\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{A}.$$

Отже, $\langle l \leftarrow m \rangle Q \subseteq \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$, що й необхідно було довести.

3) Покладемо: $A := \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$. Враховуючи, що $A_\alpha \subseteq A$, $\alpha \in \mathcal{A}$ і використовуючи властивість 3.1(4), отримуємо:

$$\langle m \leftarrow l \rangle A_\alpha \subseteq \langle m \leftarrow l \rangle A, \quad \alpha \in \mathcal{A}.$$

Тому, $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \langle m \leftarrow l \rangle A_\alpha \subseteq \langle m \leftarrow l \rangle A$. □

4 Приклади мінливих множин

Приклад 4.1. Нехай індексована сім'я базових мінливих множин $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A})$ $(\mathcal{A} \neq \emptyset)$ є такою, що множини елементарно-часових станів $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\alpha)$ і $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\beta)$ є рівнопотужними для довільних $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, тобто $\mathbf{card}(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\alpha)) = \mathbf{card}(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\beta))$, $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ (де $\mathbf{card}(M)$ означає потужність множини M). Розглянемо довільну індексовану сім'ю біекцій (взаємно-однозначних відображень) $\overleftarrow{W} = (W_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ виду $W_{\beta\alpha} : \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\alpha) \mapsto \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\beta)$, що задовольняє наступні умови:

$$\begin{gathered} W_{\alpha\alpha}(\omega) = \omega, \qquad \alpha \in \mathcal{A},\ \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\alpha)\,; \\ W_{\gamma\beta}(W_{\beta\alpha}(\omega)) = W_{\gamma\alpha}(\omega), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A},\ \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\alpha)\,. \end{gathered} \tag{9}$$

Зауваження 4.1. Таку сім'ю взаємно-однозначних відображень легко побудувати наступним чином. Оскільки $\mathbf{card}\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)\right) = \mathbf{card}\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\beta\right)\right), \quad \alpha,\beta \in \mathcal{A}$, то існує множина $\mathbf{B}_0$, яка є рівнопотужною до всіх множин сім'ї $\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right) \mid \alpha \in \mathcal{A}\right)$ (оскільки $\mathcal{A} \neq \emptyset$, можна вибрати, для прикладу довільний (фіксований) індекс $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ і покласти $\mathbf{B}_0 := \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_{\alpha_0}\right)$). Також візьмемо довільну сім'ю бієкцій $\overleftarrow{\mathcal{W}} = \left(\mathcal{W}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\right)$ виду $\mathcal{W}_\alpha : \mathbf{B}_0 \mapsto \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)$ (така сім'я обов'язково існує, оскільки $\mathbf{card}\left(\mathbf{B}_0\right) = \mathbf{card}\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)\right), \quad \alpha \in \mathcal{A}$). Покладемо:

$$W_{\beta\alpha}\left(\omega\right) := \mathcal{W}_\beta \mathcal{W}_\alpha^{[-1]}\left(\omega\right) = \mathcal{W}_\beta\left(\mathcal{W}_\alpha^{[-1]}\left(\omega\right)\right), \qquad \alpha,\beta \in \mathcal{A},\ \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right).$$

де $\mathcal{W}_\alpha^{[-1]}$ — бієкція, обернена до $\mathcal{W}_\alpha$. Легко перевірити, що сім'я бієкцій $\left(W_{\beta\alpha} \mid \alpha,\beta \in \mathcal{A}\right)$ задовольняє умови (9).

Покладемо:

$$\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A := W_{\beta\alpha}(A) = \left\{W_{\beta\alpha}(\omega) \mid \omega \in A\right\}, \quad A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right).$$

Неважко перевірити, що сім'я відображень $\overleftarrow{\mathfrak{U}} = \left(\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \mid \alpha,\beta \in \mathcal{A}\right)$ задовольняє умови означення 3.1, причому третю умову цього означення можна замінити на більш сильну умову (8). Отже, трійка:

$$\mathcal{Z}\mathsf{pv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{W}\right) = \left(\mathcal{A}, \overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{\mathfrak{U}}\right)$$

є мінливою множиною. Мінливу множину $\mathcal{Z}\mathsf{pv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{W}\right)$ будемо називати ***повністю видимою*** мінливою множиною, породженою системою базових мінливих множин $\overleftarrow{\mathcal{B}}$ та системою відображень $\overleftarrow{W}$.

Зауважимо, що для довільних областей сприймання $l,m \in \mathcal{Z}\mathsf{pv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{W}\right)$ мають місце наступні рівності:

$$l^{\hat{}} = \mathcal{B}_{\mathtt{ind}(l)}; \qquad \langle m \leftarrow l\rangle\, A = W_{\mathtt{ind}(m),\mathtt{ind}(l)}(A), \quad A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_{\mathtt{ind}(l)}\right).$$

Для побудови наступного приклада потрібно ввести поняття образу базової мінливої множини при відображенні множини її елементарно-часових станів.

Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина, $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — довільна лінійно упорядкована множина, і X — довільна множина. Розглянемо довільне відображення $U:\mathbf{Tm}(\mathcal{B})\times\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})\mapsto\mathbf{T}\times X$. Відображення такого типу будемо називати ***трансформуючим*** для $\mathcal{B}$,$\mathbb{T}$ та X.

Теорема 4.1. *Нехай $\mathcal{B}$ — будь-яка базова мінлива множина і U — трансформуюче відображення для $\mathcal{B}$,$\mathbb{T}$ та X. Тоді існує, причому єдина базова мінлива множина $U[\mathcal{B}]$, що задовольняє такі умови:*

1. $\mathbb{Bs}(U[\mathcal{B}])=U(\mathbb{Bs}(\mathcal{B}))=\{U(\omega)\mid\omega\in\mathbb{Bs}(\mathcal{B})\}$;
2. $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(U[\mathcal{B}])=\mathbb{T}$;
3. *Якщо* $\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2\in\mathbb{Bs}(U[\mathcal{B}])$ *і* $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1)\neq\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_2)$, *то* w_1 *і* w_2 *об'єднані долею в $U[\mathcal{B}]$ тоді і тільки тоді, коли існують об'єднані долею в $\mathcal{B}$ елементарно-часові стани $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ такі, що* $\mathrm{w}_1=U(\omega_1)$, $\mathrm{w}_2=U(\omega_2)$.

Доведення теореми 4.1. **Доведення існування**.

1. Нехай $U:\mathbf{Tm}(\mathcal{B})\times\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})\mapsto\mathbf{T}\times X$ — трансформуюче відображення для $\mathcal{B}$,$\mathbb{T}$ та X (де $\mathbb{T}=(\mathbf{T},\leq)$). На множині $U(\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}))=\{U(\omega)\mid\omega\in\mathbb{Bs}(\mathcal{B})\}\subseteq\mathbf{T}\times X$ визначимо бінарне відношення $\Leftarrow$, а саме для довільних $\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2\in U(\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}))$ будемо вважати, що $\mathrm{w}_2\Leftarrow\mathrm{w}_1$ тоді і тільки тоді, коли виконується хоч одна з наступних умов:

U[B]1) $\mathrm{w}_1=\mathrm{w}_2$;

U[B]2) $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1)<\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_2)$ і існують об'єднані долею в $\mathcal{B}$ елементарно-часові стани $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ такі, що $\mathrm{w}_i=U(\omega_i)$ $(i=1,2)$.

З умов U[B]1), U[B]2) випливає, що відношення $\Leftarrow$ задовольняє умови 1,2 теореми 2.2. Отже, за теоремою 2.2, існує (і тільки одна) базова мінлива множина $\mathcal{B}_1$, яка задовольняє такі умови:

$$\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_1)=\mathbb{T};\quad \mathbb{Bs}\,(\mathcal{B}_1)=U(\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}));\quad \underset{\mathbb{Bs}(\mathcal{B}_1)}{\leftarrow}=\Leftarrow. \tag{10}$$

Покладемо:

$$U[\mathcal{B}]:=\mathcal{B}_1.$$

З перших двох умов (10) випливає, що базова мінлива множина $U[\mathcal{B}]$ задовольняє умови 1,2 даної теореми. З третьої умови (10), з урахуванням твердження 2.4, випливає, що третя умова даної теореми для базової мінливої множини $U[\mathcal{B}]$ також виконується.

Доведення єдиності.

Нехай, базова мінлива множина $\mathcal{B}_2$ також задовольняє умови 1,2,3 даної теореми, тобто:

1′. $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_2\right)=U(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))$;

2′. $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_2\right)=\mathbb{T}$;

3′. Якщо $\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2\in\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_2\right)$ і $\mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_1\right)\neq\mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_2\right)$, то w_1 і w_2 об'єднані долею в $\mathcal{B}_2$ тоді і тільки тоді, коли існують об'єднані долею в $\mathcal{B}$ елементарно-часові стани $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ такі, що $\mathrm{w}_1=U\left(\omega_1\right)$, $\mathrm{w}_2=U\left(\omega_2\right)$.

Тоді, з умов $1'$,$2'$ випливає, що перші дві умови (10) для базової мінливої множини $\mathcal{B}_2$ виконані (тобто $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_2\right)=\mathbb{T}$, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_2\right)=U(\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))$). З умови $3'$, з урахуванням властивості 2.1(2) і твердження 2.4, випливає, що $\underset{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_2)}{\leftarrow}=\Lleftarrow$. Тобто, базова мінлива множина $\mathcal{B}_2$ задовольняє всі три умови (10). Але, за теоремою 2.2, існує лише одна базова мінлива множина, яка задовольняє умови (10). Отже, $\mathcal{B}_2=\mathcal{B}_1=U[\mathcal{B}]$. $\square$

Означення 4.1. *Базову мінливу множину $U[\mathcal{B}]$, що задовольняє умови 1,2,3 теореми 4.1 будемо називати **образом базової мінливої множини** $\mathcal{B}$ при трансформуючому відображенні $U:\mathbf{Tm}(\mathcal{B})\times\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\mapsto\mathbf{T}\times X$.*

Зауваження 4.2. З умови 3 теореми 4.1 і властивості 2.1(2), випливає, що для довільних елементарно-часових станів $\mathrm{w}_1,\,\mathrm{w}_2\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(U[\mathcal{B}])$ співвідношення $\mathrm{w}_2\underset{U[\mathcal{B}]}{\leftarrow}\mathrm{w}_1$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{w}_1=\mathrm{w}_2$ або $\mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_1\right)<\mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_2\right)$ і існують об'єднані долею в $\mathcal{B}$ елементарно-часові стани $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ такі, що $\mathrm{w}_i=U\left(\omega_i\right)$ $(i=1,2)$.

Приклад 4.2. Нехай, $\mathcal{B}$ — довільна базова мінлива множина, X — довільна множина, що містить $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ ($\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\subseteq X$). І нехай $\mathbb{U}$ — деяка множина бієкцій виду:

$$U:\mathbf{Tm}(\mathcal{B})\times X\longmapsto\mathbf{Tm}(\mathcal{B})\times X\qquad(U\in\mathbb{U}).$$

Таку множину бієкцій $\mathbb{U}$ будемо називати ***трансформуючою множиною бієкцій*** відносно базової мінливої множини $\mathcal{B}$. Введемо позначення:

$$\mathcal{A}:=\mathbb{U};$$
$$U_\alpha:=\alpha,\quad\alpha\in\mathcal{A}.$$

Тоді ми отримаємо індексовану сім'ю відображень $\overleftarrow{U} = (U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A})$ таку, що $U_\alpha \neq U_\beta$, для $\alpha \neq \beta$.

Кожне відображення U_α ($\alpha \in \mathcal{A}$) відображає $\mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ у множину $\mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times X$. Тому отримуємо сім'ю базових мінливих множин:

$$\mathcal{B}_\alpha := U_\alpha[\mathcal{B}], \qquad \alpha \in \mathcal{A};$$
$$\overleftarrow{U}[\mathcal{B}] = (U_\alpha[\mathcal{B}] \mid \alpha \in \mathcal{A}) = (U[\mathcal{B}] \mid U \in \mathbb{U}).$$

За теоремою 4.1:

$$\mathbb{Bs}\left(U_\alpha[\mathcal{B}]\right) = U_\alpha\left(\mathbb{Bs}(\mathcal{B})\right), \quad \alpha \in \mathcal{A},$$

отже, кожне відображення U_α є взаємно-однозначним відображенням з множини $\mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ в множину $\mathbb{Bs}\left(U_\alpha[\mathcal{B}]\right)$. Розглянемо сім'ю відображень:

$$\widetilde{U}_{\beta\alpha} := U_\beta U_\alpha^{[-1]} = U_\beta\left(U_\alpha^{[-1]}\right), \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{A}.$$

Для довільних $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ відображення $\widetilde{U}_{\beta\alpha}$ є бієкцією між множинами $\mathbb{Bs}\left(U_\alpha[\mathcal{B}]\right)$ та $\mathbb{Bs}\left(U_\beta[\mathcal{B}]\right)$. Саме тому надалі кожне відображення $\widetilde{U}_{\beta\alpha}$ будемо вважати звуженим на множину $\mathbb{Bs}\left(U_\alpha[\mathcal{B}]\right)$. Згідно із зауваженням 4.1, сім'я відображень $\overleftarrow{U^\sim} = \left(\widetilde{U}_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A}\right)$ задовольняє умови (9). Отже, за результатами прикладу 4.1, можна побудувати мінливу множину:

$$\mathcal{Z}\mathsf{im}\left(\mathbb{U}, \mathcal{B}\right) = \mathcal{Z}\mathsf{pv}\left(\overleftarrow{U}[\mathcal{B}], \overleftarrow{U^\sim}\right).$$

Мінливу множину $\mathcal{Z}\mathsf{im}\left(\mathbb{U}, \mathcal{B}\right)$ будемо називати ***багатоликим образом*** базової мінливої множини $\mathcal{B}$ відносно трансформуючої множини бієкцій $\mathbb{U}$.

Приклад 4.3. Нехай, $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина така, що

$$\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \leq)$$

(наприклад $\mathcal{B} = \mathcal{A}t\left(\mathcal{R}\right)$, де $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій з $\mathbb{R}$ в M, причому $M \subseteq \mathbb{R}^3$). Використовуючи групу Пуанкаре $\mathbb{U} = P(1,3)$ на 4-мірному просорі часу ($\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$) в якості трансформуючої множини відображень отримуємо мінливу множину $\mathcal{Z}\mathsf{im}\left(P(1,3), \mathcal{B}\right)$, яка може бути застосована до формалізації кінематики спеціальної теорії відносності в інерційних системах відліку. Зауважимо, що дана модель формально не забороняє існування тахіонних трансформацій, оскільки, наприклад, можуть існувати елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ такі, що $\omega_2 \leftarrow \omega_1$ і $\|\mathsf{bs}(\omega_2) - \mathsf{bs}(\omega_1)\|^2 > c^2 (\mathsf{tm}(\omega_2) - \mathsf{tm}(\omega_1))^2$, де $\|\cdot\|$ — евклідова норма в просторі $\mathbb{R}^3$, і c — додатна числова константа, яка має фізичну інтерпретацію швидкості світла у вакуумі.

В прикладах 4.1-4.3 відображення уніфікації $\langle m \leftarrow l \rangle$ $(l, m \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z}))$ задаються з допомогою взаємно-однозначних відображень між множинами елементарно-часових станів $\mathbb{Bs}(l)$ і $\mathbb{Bs}(m)$ (тобто:

$$\langle m \leftarrow l \rangle A = \bigsqcup_{\omega \in A} \langle m \leftarrow l \rangle \{\omega\} \qquad (l, m \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z}), \ A \subseteq \mathbb{Bs}(l)), \tag{11}$$

де знак $\bigsqcup$ означає диз'юнктне об'єднання (тобто $\langle m \leftarrow l \rangle \{\omega\} \cap \langle m \leftarrow l \rangle \{\omega'\} = \emptyset$ при $\omega \neq \omega'$), і третю умову означення 3.1 можна замінити на більш сильну умову (8)). Але, насправді, умови означення 3.1 дуже загальні. І наступний приклад покаже, наскільки далеко в цьому означенні було зроблено відхід від звичного для класичних кінематик в інерційних системах відліку "поточкового" співставлення елементарно-часових станів різних областей сприймання.

Приклад 4.4. Нехай $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A})$ — довільна індексована сім'я базових мінливих множин. Покладемо:

$$\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A := \begin{cases} A, & \alpha = \beta \\ \emptyset, & \alpha \neq \beta \end{cases}, \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{A}, \ A \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B}_\alpha).$$

Легко перевірити, що сім'я відображень $\overleftarrow{\mathfrak{U}} = (\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ задовольняє всі умови означення 3.1. Тому, трійка

$$\mathcal{Z}\mathsf{nv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}\right) = \left(\mathcal{A}, \overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{\mathfrak{U}}\right)$$

є мінливою множиною.

Мінливу множину $\mathcal{Z}\mathsf{nv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}\right)$ будемо називати ***повністю невидимою*** мінливою множиною, породженою системою базових мінливих множин $\overleftarrow{\mathcal{B}}$.

Зауважимо, що будь-яку базову мінливу множину $\mathcal{B}$ можна ототожнити з мінливою множиною виду $\mathcal{Z}\mathsf{nv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}\right)$, де $\mathcal{A} = \{1\}$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ і $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}) = (\mathcal{B}_1)$.

Інші, більш цікаві, приклади мінливих множин $\mathcal{Z}$, що не задовольняють умову (11) можна знайти в роботі [16].

5 Мінливі множини, породжені узагальненими перетвореннями Лоренца

Нехай, $(\mathfrak{H}, \|\cdot\| \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — гільбертовий простір над полем дійсних чисел. Позначимо через $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ простір лінійних неперервних операторів над простором $\mathfrak{H}$.

Нагадаємо [20, стор. 128], [21, стор. 140], що простором Мінковського над (дійсним) гільбертовим простором $\mathfrak{H}$ називається гільбертовий прорстір $\mathcal{M}(\mathfrak{H}) = \mathbb{R}\times\mathfrak{H} = \{(t,x) \mid t\in\mathbb{R},\ x\in\mathfrak{H}\}$, оснащений скалярним добутком та нормою:

$$\langle \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2\rangle_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})} = t_1 t_2 + \langle x_1, x_2\rangle\,; \quad \|\mathrm{w}_1\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})} = t_1^2 + \|x_1\|^2\,,$$

де $\mathrm{w}_i = (t_i, x_i)\,,\ i\in\{1,2\}$. В просторі $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ виділимо наступні підпростори:

$$\mathfrak{H}_0 = \{(t,\mathbf{0}) \mid t\in\mathbb{R}\}\,; \quad \mathfrak{H}_1 = \{(0,x) \mid x\in\mathfrak{H}\}\,,$$

де $\mathbf{0}$ — нульовий вектор. Тоді:

$$\mathcal{M}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1,$$

де $\oplus$ означає ортогональну суму підпросторів простору $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$.

Позначимо через $\mathbf{e}_0$ вектор

$$\mathbf{e}_0 = (1,\mathbf{0}) \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})\,.$$

Введемо наступні ортопроектори на підпростори $\mathfrak{H}_0$ та $\mathfrak{H}_1$:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{T}}\omega &= t\mathbf{e}_0 = (t,\mathbf{0}) \in \mathfrak{H}_0, \quad && \omega = (t,x)\in\mathcal{M}(\mathfrak{H})\,; \\ \mathbf{X}\omega &= (0,x)\in\mathfrak{H}_1, && \omega = (t,x)\in\mathcal{M}(\mathfrak{H}) \end{aligned}$$

(нагадаємо, що оператор $P\in\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ називається ортопроектором, якщо $P^2 = P^* = P$, де P^* — спряжений оператор до оператора P). Також позначимо через $\mathcal{T}$ наступний лінійний оператор

$$\mathcal{T}(\omega) = t, \quad \omega = (t,x)\in\mathcal{M}(\mathfrak{H})$$

з $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ в $\mathbb{R}$. Тоді:

$$\widehat{\mathbf{T}}\omega = \mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{e}_0, \quad \omega\in\mathcal{M}(\mathfrak{H})\,. \tag{12}$$

Довільний вектор $\omega \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ можна єдиним чином подати у вигляді:

$$\omega = t\mathbf{e}_0 + x = \mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{e}_0 + \mathbf{X}\omega, \tag{13}$$

де $x = \mathbf{X}\omega \in \mathfrak{H}_1,\ t = \mathcal{T}(\omega) \in \mathbb{R}$.

Довільний вектор $V \in \mathfrak{H}_1$ породжує наступні підпростори в просторі $\mathfrak{H}_1$.

$$\mathfrak{H}_1[V] = \mathbf{span}\,\{V\};$$
$$\mathfrak{H}_{1\perp}[V] = \mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{H}_1[V] = \{x \in \mathfrak{H}_1 \mid \langle x, V\rangle = 0\},$$

де $\mathbf{span}\,M$ означає лінійну оболонку множини $M \subseteq \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Позначимо через $\mathbf{X}_1[V]$ та $\mathbf{X}_1^{\perp}[V]$ ортопроектори на підпростори (відповідно) $\mathfrak{H}_1[V]$ та $\mathfrak{H}_{1\perp}[V]$:

$$\mathbf{X}_1[V]\,\omega = \begin{cases} \frac{\langle V,\omega\rangle}{\|V\|^2}V, & V \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & V = \mathbf{0} \end{cases}, \quad \omega \in \mathcal{M}(\mathfrak{H});$$
$$\mathbf{X}_1^{\perp}[V] = \mathbf{X} - \mathbf{X}_1[V] \tag{14}$$

Покладемо:

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1) = \{U \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_1) \mid U - \text{унітарний оператор}\}; \tag{15}$$
$$\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1) = \{x \in \mathfrak{H}_1 \mid \|x\| = 1\}; \tag{16}$$

Нагадаємо, що оперптор $U \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_1)$ називається ***унітарним***, якщо $\forall x \in \mathfrak{H}_1\ \|Ux\| = \|x\|$ і $U\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_1$ (де $U\mathfrak{H}_1 = \{Ux \mid x \in \mathfrak{H}_1\}$).

Також нагадаємо [20, page 128, definition 1], що лінійний неперервний оператор $S \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ називається ***оператором перетворення координат*** над $\mathfrak{H}$, якщо існує неперервний обернений оператор $S^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$.

Надалі символом c будемо позначати довільну фіксовану додатну дійсну константу, яка має фізичний зміст швидкості світла в вакуумі.

Позначимо через $\mathsf{M}_c(\cdot)$ псевдо-метрику Лоренца-Мінковського на просторі $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$:

$$\mathsf{M}_c(\omega) = \|\mathbf{X}\omega\|^2 - c^2\mathcal{T}^2(\omega), \qquad \omega \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}). \tag{17}$$

Нехай, $s \in \{-1, 1\}$, $\theta \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$. Для довільного для довільного $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ покладемо:

$$\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J]\,\mathrm{w} := \left(s\varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + $$
$$+ J\left(c\varphi_1(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} - s\varphi_0(\theta)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right), \quad \text{де} \qquad (18)$$

$$\varphi_0(\theta) = \frac{1+\theta\,|\theta|}{2\,|\theta|}; \quad \varphi_1(\theta) = \frac{1-\theta\,|\theta|}{2\,|\theta|}. \qquad (19)$$

Легко первірити, що для довільного $\theta \in [-1,1] \setminus \{0\}$ справедливі наступні рівності:

$$\varphi_0(\theta)\,\varphi_1(\theta) = -\frac{1}{4}\left(\theta^2 - \frac{1}{\theta^2}\right); \quad c\frac{\varphi_1(\theta)}{\varphi_0(\theta)} = \lambda = c\frac{1-\theta\,|\theta|}{1+\theta\,|\theta|};$$
$$\varphi_0(\theta) + \varphi_1(\theta) = \frac{1}{|\theta|}; \quad \varphi_0(\theta) - \varphi_1(\theta) = \theta; \quad \varphi_0(\theta)^2 - \varphi_1(\theta)^2 = \operatorname{sign}\theta; \qquad (20)$$
$$\varphi_0(-\theta) = \varphi_1(\theta); \quad \varphi_1(-\theta) = \varphi_0(\theta).$$

Очевидно, що для довільних $s \in \{-1,1\}$, $\theta \in [-1,1] \setminus \{0\}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ формула (18) визначає лінійний неперервний оператор над простором $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ (тобто, $\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J] \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$). Позначимо через $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$ наступний клас лінійних неперервних операторів над простором $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$:

$$\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c) := \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J] \mid s \in \{-1,1\},\ \theta \in [-1,1] \setminus \{0\},\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)\ \ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\}. \qquad (21)$$

В роботі [20, page 142] клас операторів $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$ визначено по-іншому, але з [20, theorem 3] випливає, що означення цього класу операторів з допомогою формули (21) еквівалентне означенню, даному в [20, page 142].

Введемо наступні підкласи класу операторів $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{OT}_+(\mathfrak{H},c) &= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c) \mid s = 1\} \\
&= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[1,\mathbf{n},J] \mid \theta \in [-1,1] \setminus \{0\},\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)\ \ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\}; \\
\mathfrak{O}(\mathfrak{H},c) &= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c) \mid \theta > 0\} = \\
&= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J] \mid s \in \{-1,1\},\ \theta \in (0,1],\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)\ \ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\}; \\
\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H},c) &= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J] \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H},c) \mid s = 1\} = \\
&= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[1,\mathbf{n},J] \mid \theta \in (0,1],\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)\ \ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\}.
\end{aligned}$$

Зауваження 5.1. В роботі [20, page 131] клас операторів $\mathfrak{O}(\mathfrak{H},c)$ названо загальною групою Лоренца над простором $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ і визначено дещо по-іншому, а саме, як множину операторів перетворень координат $L:\mathcal{M}(\mathfrak{H})\mapsto\mathcal{M}(\mathfrak{H})$, що задовольняють умову:

$$\mathsf{M}_c(L\mathrm{w})=\mathsf{M}_c(\mathrm{w})\quad(\forall\mathrm{w}\in\mathcal{M}(\mathfrak{H}))\,. \tag{22}$$

Доведемо, що обидва означення класу операторів $\mathfrak{O}(\mathfrak{H},c)$ еквівалентні. Справді, якщо $L=\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J]\in\mathfrak{O}(\mathfrak{H},c)$ (де $\theta>0$, $\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$), то для довільного вектора $\mathrm{w}\in\mathcal{M}(\mathfrak{H})$, згідно (18),(14),(20), отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}_c(L\mathrm{w})&=\mathsf{M}_c\Bigg(\left(s\varphi_0(\theta)\mathcal{T}(\mathrm{w})-\varphi_1(\theta)\frac{\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0+\\
&\qquad+J\left(c\varphi_1(\theta)\mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{n}-s\varphi_0(\theta)\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\mathrm{w}+\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\mathrm{w}\right)\Bigg)=\\
&=\left\|J\left(c\varphi_1(\theta)\mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{n}-s\varphi_0(\theta)\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle\mathbf{n}+\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\mathrm{w}\right)\right\|^2-\\
&\qquad-c^2\left(s\varphi_0(\theta)\mathcal{T}(\mathrm{w})-\varphi_1(\theta)\frac{\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\right)^2=\\
&=\left(c\varphi_1(\theta)\mathcal{T}(\mathrm{w})-s\varphi_0(\theta)\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle\right)^2+\left\|\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\mathrm{w}\right\|^2-\\
&\qquad-c^2\left(s\varphi_0(\theta)\mathcal{T}(\mathrm{w})-\varphi_1(\theta)\frac{\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\right)^2=\\
&=c^2\varphi_1^2(\theta)\mathcal{T}^2(\mathrm{w})+\varphi_0^2(\theta)\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle^2+\left\|\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\mathrm{w}\right\|^2-\\
&\qquad-c^2\varphi_0^2(\theta)\mathcal{T}^2(\mathrm{w})-\varphi_1^2(\theta)\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle^2=\\
&=-c^2\mathcal{T}^2(\mathrm{w})+\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle^2+\left\|\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\mathrm{w}\right\|^2=\\
&=\|\mathbf{X}\mathrm{w}\|^2-c^2\mathcal{T}^2(\mathrm{w})=\mathsf{M}_c(\omega)\,.
\end{aligned}$$

Навпаки, нехай $L\in\mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ — оператор перетворння координат, що задовольняє умову (22). Тоді, згідно з [20, формула (20)] та означенням класу операторів $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$, даним в [20, page 142], $L\in\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$. Отже, згідно (21) оператор L можна подати у вигляді $L=\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J]$ (де $s\in\{-1,1\}$, $\theta\in[-1,1]\setminus\{0\}$, $\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$). Нагадаємо ([20, definition 2],[21, означення 2.1]), що оператор перетворення координат $S\in\mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ називається **v-*детермінованим***, якщо $\mathcal{T}\left(S^{-1}\mathbf{e}_0\right)\neq0$, і що швидкістю v-детермінованого оператора перетворення координат

S називається вектор $\mathcal{V}(S) = \frac{\mathbf{X}S^{-1}\mathbf{e}_0}{\mathcal{T}(S^{-1}\mathbf{e}_0)} \in \mathfrak{H}_1$. Оскільки оператор перетворення координат L задовольняє умову (22), то, згідно [20, формула (12)], L є v-детермінім, причому $\|\mathcal{V}(L)\| < c$. З іншої сторони, згідно з [20, theorem 3], $\mathcal{V}(L) = \mathcal{V}(\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J]) = cs\frac{1-\theta|\theta|}{1+\theta|\theta|}\mathbf{n}$. Отже,

$$\|\mathcal{V}(L)\| = \left\| cs\frac{1-\theta\,|\theta|}{1+\theta\,|\theta|}\mathbf{n} \right\| = c\frac{1-\theta\,|\theta|}{1+\theta\,|\theta|} < c.$$

Звідси, $\frac{1-\theta|\theta|}{1+\theta|\theta|} < 1$, тобто $\theta > 0$. Отже $L = \mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J]$, де $s \in \{-1,1\}$, $\theta \in (0,1]$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, що й необхідно було довести.

Що торкається класу $\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H},c)$, можна довести [20], що цей клас операторів у випадку $\mathfrak{H} = \mathbb{R}^3$ являє собою повну групу Лоренца, визначену в [22]. Нижче буде доведено більш загальний результат, а саме буде показано, що в загальному випадку, коли $\mathfrak{H}$ — довільний дійсний гільбертовий простір, $\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H},c)$ є групою операторів в просторі $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$, яка залишає інваріантним клас додатних часоподібних векторів простору $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$.

Означення 5.1. *Вектор* $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ *будемо називати:*

- ***додатним**, якщо* $\mathcal{T}(\mathrm{w}) > 0$*;*
- c-***часоподібним**, якщо* $\mathsf{M}_c(\mathrm{w}) < 0$

Позначимо через $\mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$ клас додатних c-часоподібних векторів простору $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$:

$$\mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H}) := \{\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}) \mid \mathcal{T}(\mathrm{w}) > 0,\ \mathsf{M}_c(\mathrm{w}) < 0\}$$

Лема 5.1. *Має місце наступна рівність:*

$$\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H},c) = \{L \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H},c) \mid L\mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})\ (\forall \mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H}))\}.$$

Доведення. **1.** Нехай $L \in \mathfrak{O}_+(\mathfrak{H},c)$. Розглянемо довільний вектор $\mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$. Оскільки, враховуючи зауваження 5.1, оператор L задовольняє умову (22) і вектор $\mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$ є c-часоподібним, то:

$$\mathsf{M}_c(L\omega) = \mathsf{M}_c(\omega) < 0. \tag{23}$$

Оскільки $L \in \mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$, то оператор L можна подати у вигляді $L = \mathbf{U}_{\theta,c}[1, \mathbf{n}, J]$, де $\theta \in (0,1]$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$. Отже, враховуючи, що для вектора $\mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$ справедливі нерівності $\mathcal{T}(\mathrm{w}) > 0$, $\mathsf{M}_c(\omega) < 0$, враховуючи (18), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(L\mathrm{w}) = \mathcal{T}(\mathbf{U}_{\theta,c}[1,\mathbf{n},J]\,\mathrm{w}) = \varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{c} = \\ = \varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle \mathbf{X}\mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{c} = \\ = \varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{X}\mathrm{w}\rangle}{c} \geq \\ \geq \varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta)\,\frac{\|\mathbf{X}\mathrm{w}\|}{c} = \\ = \theta\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \frac{\varphi_1(\theta)}{c}\left(\|\mathbf{X}\mathrm{w}\| - c\mathcal{T}(\mathrm{w})\right) = \\ = \theta\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \frac{1-\theta^2}{2\theta\cdot c}\,\frac{\mathsf{M}_c(\mathrm{w})}{\|\mathbf{X}\mathrm{w}\| + c\mathcal{T}(\mathrm{w})} > 0.\end{aligned} \tag{24}$$

З нерівностей (23) і (24) випливає, що $L\mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$ (для довільного вектора $\mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$.

2. Навпаки, нехай тепер оператор $L \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ задовольняє умову

$$\forall \mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})\ \left(L\mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})\right). \tag{25}$$

Оскільки $L \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$, то оператор L можна подати у вигляді $L = \mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J]$, де $s \in \{-1, 1\}$, $\theta \in (0,1]$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$. Легко бачити, що вектор $\mathbf{e}_0$ належить до класу $\mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$. Отже, за умовою (25), $L\mathbf{e}_0 \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$. Тому, за означенням класу векторів $\mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$, $\mathcal{T}(L\mathbf{e}_0) > 0$. Згідно з (18),

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(L\mathbf{e}_0) = \mathcal{T}(\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J]\,\mathbf{e}_0) = s\varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\mathbf{e}_0) - \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{e}_0\rangle}{c} = \\ = s\frac{1+\theta^2}{2\theta}.\end{aligned}$$

Отже, $s\frac{1+\theta^2}{2\theta} > 0$. Звідси, $s > 0$, тобто $s = 1$. Таким чином, $L = \mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J] \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$, де $s = 1$. Тому $L \in \mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$. □

Приклад 5.1. Нехай, $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина така, що $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{H}$, $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \leq)$, де $\leq$ — стандартний порядок на полі дійсних чисел $\mathbb{R}$. Зафіксуємо довільну додатну дійсну константу c. Нехай $\mathbb{U}$ —

один з класів операторів $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$, $\mathfrak{OT}_+(\mathfrak{H},c)$, $\mathfrak{O}(\mathfrak{H},c)$, $\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H},c)$. Тоді довільний оператор $L\in\mathbb{U}$ буде відображенням типу:

$$L:\mathbf{Tm}(\mathcal{B})\times\mathfrak{H}\longleftrightarrow\mathbf{Tm}(\mathcal{B})\times\mathfrak{H}.$$

Отже, $\mathbb{U}$ — трансформуюча множина бвєкцій відносно $\mathcal{B}$ на $\mathfrak{H}$. Тому можна визначити наступні мінливі множини:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\mathfrak{L}\mathcal{T}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)&=\mathcal{Z}\mathsf{im}\left(\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c),\mathcal{B}\right);\\ \mathcal{Z}\mathfrak{L}\mathcal{T}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)&=\mathcal{Z}\mathsf{im}\left(\mathfrak{OT}_+(\mathfrak{H},c),\mathcal{B}\right);\\ \mathcal{Z}\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)&=\mathcal{Z}\mathsf{im}\left(\mathfrak{O}(\mathfrak{H},c),\mathcal{B}\right);\\ \mathcal{Z}\mathfrak{L}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)&=\mathcal{Z}\mathsf{im}\left(\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H},c),\mathcal{B}\right).\end{aligned}$$

У випадку $\dim(\mathfrak{H})=3$ мінлива множина $\mathcal{Z}\mathfrak{L}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ являє собою найпростішу математично строгу модель кінематики спеціальної теорії відносності в інерційних системах відліку, які “стартували” в заданий “нульовий” момент часу зі спільного початку відліку. Мінлива множина $\mathcal{Z}\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ побудована на основі загальної групи Лоренца, і містить крім звичайних систем відліку “з додатним напрямком часу”, які мають зрозумілу фізичну інтерпритацію, також системи відліку з “від’ємним напрямком часу”, породженими операторами перетворення координат, що належать до класу $\mathfrak{O}_-(\mathfrak{H},c)=\{\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J]\in\mathfrak{O}(\mathfrak{H},c)\mid s=-1\}$.

Мінливі множини $\mathcal{Z}\mathfrak{L}\mathcal{T}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ і $\mathcal{Z}\mathfrak{L}\mathcal{T}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ містять крім стандартних (“тардіонних”) систем відліку, породжених класичними перетвореннями Лоренца також і “тахіонні” системи відліку, породжені узагальненими перетвореннями Лоренца (тобто операторами перетворення координат, що належать до класу $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)\setminus\mathfrak{O}(\mathfrak{H},c)$), і які рухаються відносно “тардіонних” систем відліку зі швидкістю більшою за швидкість світла c. Зауважимо, що узагальнені “тахіонні” перетворення Лоренца на фізичному рівні строгості було введено в роботах [23, 24, 25] у випадку, коли простір “геометричних координат” є трьохвимірним. На математичному рівні строгості ці перетворення координат досліджувались в роботах [20, 21] у випадку, коли простір “геометричних координат” має довільну (в тому числі і нескінченну) розмірність.

Підкреслимо, що всі мінливі множини, розглянуті в попередньому прикладі ($\mathcal{Z}\mathfrak{L}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathcal{Z}\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathcal{Z}\mathfrak{L}\mathcal{T}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathcal{Z}\mathfrak{L}\mathcal{T}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$)

містять лише "однорідні" інерційні системи відліку, тобто системи відліку, які стартували в заданий "нульовий" момент часу зі спільного початку. В наступному прикладі "однорідні" системи відліку доповнено неоднорідними, тобто інерційними системами відліку, які в нульовий момент часу можуть знаходитись в довільному положенні.

Приклад 5.2. Нехай, $s \in \{-1,1\}$, $\theta \in [-1,1] \setminus \{0\}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ і $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Для довільного для довільного $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ покладемо

$$\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J,\mathbf{a}]\,\mathrm{w} := \mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J]\,\mathrm{w} + \mathbf{a}.$$

Позначимо через $\mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c)$ наступний клас лінійних неперервних операторів над простором $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$:

$$\mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c) := \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J,\mathbf{a}] \mid s \in \{-1,1\},\ \theta \in [-1,1] \setminus \{0\}, \\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1),\ \mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})\}. \tag{26}$$

В роботі [20, page 142] клас операторів $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$ визначено по-іншому, але з [20, theorem 3] випливає, що означення цього класу операторів з допомогою формули (26) еквівалентне означенню, даному в [20, page 142].

По аналогії з попереднім прикладом введемо наступні підкласи класу операторів $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$:

$$\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H},c) = \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J,\mathbf{a}] \in \mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c) \mid s=1\};$$
$$\mathfrak{P}(\mathfrak{H},c) = \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J,\mathbf{a}] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c) \mid \theta>0\};$$
$$\mathfrak{P}_+(\mathfrak{H},c) = \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J,\mathbf{a}] \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H},c) \mid s=1\}.$$

Нехай, $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина така, що $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{H}$, $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R},\leq)$, де $\leq$ — стандартний порядок на полі дійсних чисел $\mathbb{R}$. Зафіксуємо довільну додатну дійсну константу c. Нехай $\mathbb{U}$ — один з класів операторів $\mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c)$, $\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H},c)$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{H},c)$, $\mathfrak{P}_+(\mathfrak{H},c)$. Тоді $\mathbb{U}$ буде трансформуючою множиною бієкцій відносно $\mathcal{B}$ на $\mathfrak{H}$. Отже можна визначити наступні мінливі множини:

$$\mathcal{Z}\mathfrak{P}\mathcal{T}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c) = \mathcal{Z}\mathsf{im}(\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c),\mathcal{B});$$
$$\mathcal{Z}\mathfrak{P}\mathcal{T}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c) = \mathcal{Z}\mathsf{im}(\mathfrak{OT}_+(\mathfrak{H},c),\mathcal{B});$$
$$\mathcal{Z}\mathfrak{P}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c) = \mathcal{Z}\mathsf{im}(\mathfrak{O}(\mathfrak{H},c),\mathcal{B});$$
$$\mathcal{Z}\mathfrak{P}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c) = \mathcal{Z}\mathsf{im}(\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H},c),\mathcal{B}).$$

Мінливі множини $\mathcal{Z}\mathfrak{P}\mathcal{T}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathcal{Z}\mathfrak{P}\mathcal{T}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathcal{Z}\mathfrak{P}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathcal{Z}\mathfrak{P}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ аналогічні відповідним мінливим множинам $\mathcal{Z}\mathfrak{L}\mathcal{T}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathcal{Z}\mathfrak{L}\mathcal{T}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathcal{Z}\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ та $\mathcal{Z}\mathfrak{L}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ з попереднього приклада, але крім "однорідних" систем відліку які стартували в заданий "нульовий" момент часу зі спільного початку, ці мінливі множини містять також всі інерційні системи відліку, які в нульовий момент часу знаходяться в довільному положенні.

Література

[1] *Проблемы Гильберта.* – Сборник под ред. П.С. Александрова. – Москва: "Наука", 1969. – 240 с.

[2] Гладун А.Д. *Шестая проблема Гильберта.* // Потенциал. – 2006, N 3 (http://potential.org.ru/Home/ProblemGilbert).

[3] Yu. I. Petunin; D. A. Klyushin. *A structural approach to solving the 6th Hilbert problem* // Theory of Probability and Mathematical Statistics. – 2005, N 71. – P. 165-179.

[4] McKinsey, J. C. C., A. C. Sugar, and P. Suppes. *Axiomatic foundations of classical particle mechanics* // Journal of Rational Mechanics and Analysis. – 1953. – No. 2. – P. 253-272.

[5] Schutz, John W. *Foundations of special relativity: kinematic axioms for Minkowski space-time.* – Lecture Notes in Mathematics. – Vol. 361. – Springer-Verlag, Berlin-New York. – 1973. – 314 p.

[6] da Costa, N. C. A. and F. A. Doria. *Suppes predicates for classical physics* // The Space of Mathematics. – De-Gruyter/Berlin/New York, 1992. – Proceedings of the International Symposium on Structures in Mathematical Theories. San Sebastian, Spain 1990. – P. 168-191.

[7] Adonai S. Sant'Anna. *The definability of physical concepts* // Bol. Soc. Parana. Mat. (3s.). – 2005. – V 23, no. 1-2. – P. 163–175.

[8] Пименов Р.И. *Математические темпоральные конструкции.* // Сборник: "Конструкции времени в естествознании: На пути к пониманию феномена времени". Часть I. – М.: Изд. Моск. ун-та. – 1996. – С. 153-199.

[9] Пименов Р.И. *Основы теории темпорального универсума.* Москва: ЛЕНАНД. – 2006. – 200 с.

[10] Левич А.П. *Методологические трудности на пути к пониманию феномена времени.* // http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/levich_trudnosti.pdf. – размещено на сайте 05.04.2009. – 10 с.

[11] Левич А.П. *Почему скромны успехи в изучении времени.* // Сборник: "На пути к пониманию феномена времени: конструкции времени в естествознании". Часть 3. (под ред. Левич А.П.). – Москва: Прогресс-Традиция. – 2009. – С. 15-29.

[12] Levich A.P. *Time as variability of natural systems: ways of quantitative description of changes and creation of changes by substantial flows* // Collection "On the way to understanding the time phenomenon: the constructions of time in natural science". – Part 1. – Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific. – 1995. – P. 149-192. – http://www.chronos.msu.ru/Public/levich_time_as_variab.html.

[13] Грушка Я.І. *Мінливі множини та їх властивості.* // Доповіді Національної академії наук України. – 2012, N 5. – С. 12-18.

[14] Грушка Я.І. *Примітивні мінливі множини та їх властивості.* // Математичний Вісник НТШ. – 2012, Т. 9.

[15] Grushka Ya.I. *Abstract concept of changeable set.* // Preprint: arXiv:1207.3751v1 (http://arxiv.org/abs/1207.3751v1). – 2012. – 54 p.

[16] Грушка Я.І. *Видимість у мінливих множинах.* // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – Т. 9. – N 2. – 2012. – С. 122-145.

[17] Грушка Я.І. *Базові мінливі множини та математичне моделювання еволюції систем.* // Укр. матем. журн. – Т. 65. – N 9. – 2013. – С. 1198-1218.

[18] Г. Биркгоф. *Теория Решёток.* – Москва: "Наука", 1984. – 567 с.

[19] *К. Куратовский, А. Мостовский.* Теория множеств. – Москва: "Мир", 1970. – 417 с.

[20] Grushka Ya.I. *Tachyon Generalization for Lorentz Transforms* // Methods of Functional Analysis and Topology. – Vol. 20. – no. 2. – 2013. – P. 127-145.

[21] Грушка Я.І. *Алгебраїчні властивості тахіонних перетворень Лоренца* // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – том 10, N 2. – 2013. – Ст. 138-169.

[22] М. А. Наймарк. *Линейные представления группы Лоренца.* // УМН. – Том IX. – Вып. 4 (62). – 1954. – С. 19-93.

[23] E. Recami. *Classical Tachyons and Possible Applications.* // Riv. Nuovo Cim. Vol. 9. – s. 3. – no. 6. – 1986. – pp. 1-178.

[24] James M. Hill and Barry J. Cox. *Einstein's special relativity beyond the speed of light.* // Proceedings of the Royal Society (A: Mathematical, Physical and Engineering Science). – Published on-line, 3 October 2012 in advance of the print journal (doi:10.1098/rspa.2012.0340).

[25] Ricardo S. Vieira. *An Introduction to the Theory of Tachyons.* – Preprint: arXiv:1112.4187v2. – 2012. (http://arxiv.org/abs/1112.4187v2).

Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 234–248

УДК 517.9+530.145

A.G. Zagorodny

(Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, Київ)

azagorodny@bitp.kiev.ua

Броунівський рух в системі з кольоровим шумом

Dedicated to the 80 th anniversary of Prof. D.Ya. Petrina

The modern state of the consistent kinetic theory of dusty plasmas is discussed. The derivation of equations for microscopic phase densities of plasma particles and grains is presented. Using such equations it is possible to generalize the Bogolyubov–Born–Green–Kirkwood–Yvon hierarchy to the case of dusty plasmas and to derive the kinetic equations, taking into account both elastic and inelastic particle collisions. Kinetic description of effective grain-grain potentials is also presented.

Обговорюється сучасний стан кінетичної теорії запорошеної плазми. Наведено рівняння для мікроскопічних фазових густин для плазмових частинок і порошинок. Показано, що, використовуючи такі рівняння, можна узагальнити ланцюжок рівнянь Боголюбова–Борна–Гріна–Кірквуда–Івона на випадок запорошеної плазми з урахуванням пружних і непружних зіткнень частинок та поглинання електронів та іонів порошинками. Розглянуто кінетичний опис ефективних потенціалів порошинок у плазмі.

© Institute of Mathematics, 2014

1 Introduction.

The interpretation of recent dusty plasma experiments requires more and more sophisticated description of dusty plasmas in terms of microscopic models. This concerns both analytical studies and numerical simulations.

In particular, the consistent kinetic theory of a dusty plasma gives a typical example of theoretical studies that should be done starting from the microscopic treatment of the problem. Only this approach makes it possible to formulate the basic points of the rigorous kinetic theory with due regard of grain charging and particle collisions (both elastic and inelastic). Though kinetic descriptions of dusty plasmas have been given in many papers, no such theory has been formulated as yet. Many theoretical studies in this field have been performed using phenomenological generalization of the results known from the kinetic theory of ordinary plasmas. In particular, this concerns the calculations of the collision integrals describing grain-plasma particle collisions in terms of absorption cross-sections for electrons and ions colliding with grains. Such treatment provides a possibility to describe the charge and momentum transfer from plasma particles to grains due to inelastic collisions, or the momentum exchange between the grains in course of grain-grain contact collisions. However, the influence of collective plasma effects (for example, dynamical particle screening) on charging processes and mutual influence of contact and elastic Coulomb collisions are disregarded.

Consistent treatment of these and other effects could be performed in terms of the kinetic theory formulated on the basis of the microscopic description of contact collisions and plasma particle absorption by grains [1, 2].

In some cases, for the sake of simplicity, it is reasonable to describe the collective behavior of grain subsystem using the effective grain-grain interaction potentials. Obviously, such potentials should be calculated taking into account plasma particle absorption by the grain, as well as the effects of nonlinear screening. Usually such potentials are calculated on the basis of numerical solution of the appropriate boundary-value problems, or by means of numerical simulations. However, the description of some interesting phenomena observed in dusty plasma experiments, such as dusty crystal formation, dust acoustic wave propagation, generation of nonlinear dust structure in a plasma requires analytical relations for effective potentials. Such relations can be obtained on the basis of kinetic equations with the effective point sinks [3] which follow from the rigorous equations discussed above.

The purpose of the present paper is to apply the microscopic model of a dusty plasma in order to formulate the basic principles of the kinetic theory and to find explicit relations for the effective grain potentials with regard to plasma particle collisions and the influence of external force fields, if present.

In Sec. 2 we reproduce rigorous equations for the microscopic phase densities (Klimontovich equations) with regard for the electron and ion absorption by grains and contact grain-grain collisions. Then we formulate an appropriate Bogolyubov–Born–Green–Kirkwood–Yvon (BBGKY) hierarchy for equations for dusty plasmas and consider the possibility of applying the hierarchy thus obtained to the derivation of kinetic equations (Sec. 3). In particular cases the results previously obtained by other authors are recovered. Application of the equations derived to the calculation of the effective grain potentials is given in Sec. 4. Some analysis of the stationary screening is presented in Sec. 5. The influence of plasma particle collisions on the effective grain-grain potential is studied and the problem of grain screening in the presence of external magnetic field is discussed.

2 Microscopic equations for dusty plasmas with regard for electron and ion absorption by grains.

In the case of a dusty plasma consisting of electrons, ions, and monodispersed grains under the assumption that each grain absorbs all encountered electrons and ions the microscopic phase density of plasma particles is given by

$$\mathcal{F}_\alpha(X,t) = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \mathcal{F}_{i\alpha}(X,t) = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \delta\left(X - X_\alpha(t)\right) \theta(t_{i\alpha} - t), \quad (X \equiv \mathbf{r}\mathbf{v}), \tag{1}$$

where $t_{i\alpha}$ is the time of ith plasma particle collision with any grain (i.e., the time of ith particle absorption by a grain), $\theta(x)$ is the Heaviside step function, the subscript α labels the plasma particle species.

Combining the derivatives of $\mathcal{F}_\alpha(X,t)$ over t, $\mathbf{r}$, and $\mathbf{v}$, $\mathcal{F}_\alpha(X,t)$ can be shown to satisfy the equation (see Ref. [2])

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}+\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\right\}\mathcal{F}_\alpha(X,t)=-\int d\mathfrak{X}|\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v}-\mathbf{v}')|\times \\ \times\,\delta\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|-a\right)\mathcal{F}_g(\mathfrak{X}',t)\mathcal{F}_\alpha(X,t). \tag{2}$$

Here $\mathbf{e}_\mathbf{r}=\mathbf{r}/r$ and $\mathcal{F}_g(\mathfrak{X},t)$ is the grain phase density

$$\mathcal{F}_g(\mathfrak{X},t)=\sum_{i=1}^{N_g}\sum_n\delta\left(\mathfrak{X}-\mathfrak{X}_i^{(n)}(t)\right)\theta\left(t_{ig}^{(n+1)}-t\right)\theta\left(t-t_{ig}^{(n)}\right), \tag{3}$$

$\mathfrak{X}\equiv(\mathbf{r},\mathbf{v},q)$, $t_{ig}^{(n)}$ is the time of the nth collision of the ith grain with any other particle, $\mathfrak{X}_j^{(n)}(t)$ is the grain trajectory before the $(n+1)$th and after the nth collision, a is the grain radius.

Eq. (3) describes the microscopic state of the grain subsystem which is determined by the microscopic value of the grain charge q along with the grain coordinate and velocity with regard for the sharp changes of the grain charge and velocity.

As it was shown in Ref. [2] the equation for $\mathcal{F}_g(\mathfrak{X},t)$ has the form

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}+\frac{q}{m_g}\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right\}=\\ &-\sum_{\alpha=e,i}\int d\mathfrak{X}'\delta(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|-a)\left\{|\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v}-\mathbf{v}')|\mathcal{F}_g(\mathfrak{X},t)-\right.\\ &-\left.|\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v}-\mathbf{v}'-\delta\mathbf{v}_\alpha)\mathcal{F}_g(\mathbf{r},\mathbf{v}-\delta\mathbf{v}_\alpha q-e_\alpha t)\right\}\mathcal{F}_\alpha(X',t)-\\ &-\int d\mathfrak{X}'\delta(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|-2a)|\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v}-\mathbf{v}')|\left\{\mathcal{F}_g(\mathfrak{X},t)\mathcal{F}_g(\mathfrak{X}',t)-\right.\\ &-\left.\mathcal{F}_g(\mathbf{r},\mathbf{v}-\delta\mathbf{v}_g,q-\delta q;t)\mathcal{F}_g(\mathbf{r}',\mathbf{v}+\delta\mathbf{v}_g,q';t)\right\},\end{aligned} \tag{4}$$

where

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{v}_\alpha&\equiv\delta\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{v},\mathbf{v}')=-\frac{m_\alpha}{m_g}(\mathbf{v}-\mathbf{v}');\\ \delta\mathbf{v}_g&\equiv\delta\mathbf{v}_g(\mathbf{v},\mathbf{v}')=\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}\left(\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v}-\mathbf{v}')\right);\\ \delta q&\equiv\delta q(q,q')=q'-q.\end{aligned} \tag{5}$$

Notice that the integration over X' and $\mathfrak{X}'$ in Eqs. (2), (4) is performed within the domain $\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v}-\mathbf{v}')<0$, or $\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v}-\mathbf{v}'-\delta\mathbf{v}_\alpha)<0$, respectively. Eqs. (2), (4) generalize traditional microscopic equation for the case of electron and ion absorption by grains and contact collisions between the grains.

3 Bogolyubov–Born–Green–Kirkwood–Yvon hierarchy for dusty plasmas.

In terms of notation

$$\mathcal{F}(\xi,t) \equiv \mathcal{F}_\alpha(\mathfrak{X},t) = \begin{cases} \mathcal{F}_\alpha(X,t)\delta(q-e_\alpha), & \alpha = e,i \\ \mathcal{F}_g(\mathfrak{X},t), & \alpha = g \end{cases} \tag{6}$$

$\xi \equiv (\mathfrak{X},\alpha) = (\mathbf{r},\mathbf{v},q,\alpha)$, Eqs. (2), (4) can be written in the unified form

$$\begin{aligned} &\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}(\xi)\right\}\mathcal{F}(\xi,t) = \\ &= \int d\xi' \left\{\left[W^{(1)}(\xi,\xi') - \hat{V}(\xi,\xi')\right]\mathcal{F}(\xi,t)\mathcal{F}(\xi',t) - \right. \\ &\left. - W^{(2)}(\xi - \Delta_{\xi\xi'}, \xi' + \Delta'_{\xi\xi'})\mathcal{F}(\xi - \Delta_{\xi\xi'},t)\mathcal{F}(\xi + \Delta'_{\xi\xi'},t)\right\}, \end{aligned} \tag{7}$$

where

$$\begin{aligned} &\hat{L}(\xi) \equiv \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{m_\alpha}\mathbf{F}_\alpha\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}; \\ &W^{(1),(2)}(\xi,\xi') \equiv W^{(1),(2)}_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\mathbf{v}-\mathbf{v}'); \\ &W^{(1)}_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r},\mathbf{v}) = -\mathbf{e_r}\mathbf{v}\delta(r-a_{\alpha\alpha'})(\delta_{\alpha g} + \delta_{\alpha'\alpha} - \delta_{\alpha g}\delta_{\alpha' g})\theta(\vartheta - \frac{\pi}{2}); \\ &W^{(2)}_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r},\mathbf{v}) = -\mathbf{e_r}\mathbf{v}\delta(r-a_{\alpha\alpha'})\delta_{\alpha g}\theta(\vartheta - \frac{\pi}{2}); \quad \theta = (\widehat{\mathbf{r}\mathbf{v}}); \\ &\hat{V}(\xi,\xi') = \frac{qq'}{m_\alpha}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}; \\ &\Delta_{\xi\xi'} = (0,\delta\mathbf{v}_{\alpha\alpha'},\delta q_{\alpha\alpha'},0); \quad \Delta'_{\xi\xi'} = (0,\delta\mathbf{v}'_{\alpha\alpha'},0,0); \\ &\delta q_{\alpha\alpha'} \equiv \delta q_{\alpha\alpha'}(q,q') = \delta_{\alpha g}\begin{cases} e_\alpha, & \alpha' = e,i; \\ q'-q, & \alpha' = g; \end{cases} \\ &\delta v_{\alpha\alpha'} \equiv \delta v_{\alpha\alpha'}(\mathbf{v}-\mathbf{v}') = \delta_{\alpha g}\begin{cases} -\frac{m_{\alpha'}}{m_g}(\mathbf{v}-\mathbf{v}'), & \alpha' = e,i; \\ \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{e}-\mathbf{r}-\mathbf{r}'(\mathbf{v}-\mathbf{v}')), & \alpha' = g; \end{cases} \\ &\delta v'_{\alpha\alpha'} = \delta_{\alpha g}\delta_{\alpha' g}\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v}-\mathbf{v}')), \end{aligned} \tag{8}$$

$\mathbf{F}_\alpha$ is the external force field, if present.

Representation (6) is the most convenient for the derivation of a generalized BBGKY hierarchy for dusty plasmas. Averaging Eq. (7) and its combinations yields

$$
\begin{aligned}
&\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N}\hat{L}(\xi_i)-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i=1}^{N}\hat{V}(\xi_i,\xi_j)\right\}f_s(\xi_1\dots\xi_s;t)+\\
&+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j\neq i=1}^{s}\Big[W^{(1)}(\xi_i,\xi_j)f_s(\xi_1\dots\xi_s;t)-\\
&-W^{(2)}(\xi_i-\Delta_{ij},\xi_j+\Delta'_{ij})f_s(\xi_1\dots\xi_i-\Delta_{ij}\dots\xi_j+\Delta'_{ij}\dots\xi_s;t)\Big]=\\
&=\sum_{i=1}^{s}\int d\xi_{s+1}\Big\{\hat{V}(\xi_i,\xi_{s+1})f_{s+1}(\xi_1\dots\xi_{s+1;t}-\\
&-\big[W^{(1)}(\xi_i,\xi_{s+1})f_{s+1}(\xi_1\dots\xi_{s+1};t)-\\
&-W^{(2)}(\xi_1-\Delta_{is+1},\xi_j+\Delta'_{is+1})f_{s+1}(\xi_1\dots\xi_i-\\
&-\Delta_{is+1}\dots\xi_j+\Delta'_{is+1}\dots\xi_{s+1};t)\big]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

For the system with pure Coulomb interaction ($W^{(1)}=W^{(2)}=0$), hierarchy (9) reduces to the hierarchy for ordinary plasmas. In the case of neutral grains as $a\to 0$ (the Boltzmann—Grad limit), the stochastic hierarchy for the hard-sphere gas [4] is recovered.

The hierarchy thus obtained makes it possible to introduce the kinetic equations. In particular, in the approximation of the dominant influence of contact collisions the asymptotics of the binary distribution functions can be written as

$$
\begin{aligned}
&\underset{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\gg a}{f^{(0)}_{\alpha g}}(\mathfrak{X},\mathfrak{X}',t)=f_\alpha(\mathfrak{X},t)f_g(\mathfrak{X}',t)\theta(\vartheta-\vartheta^{\alpha g}_{\min}),\quad \alpha=e,i\\
&\underset{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\gg a}{f^{(0)}_{gg}}(\mathfrak{X},\mathfrak{X}',t)=f_g(\mathfrak{X})f_g(\mathfrak{X}',t)\left\{\theta(\vartheta-\vartheta^{g}_{\min})+\theta(\vartheta^{gg}_{\min}-\vartheta)\right\},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

where $\vartheta^{\alpha}_{\min}$ is given by

$$
\sin^2\vartheta^{\alpha g}_{\min}=\frac{a^2_{\alpha g}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\left(1-\frac{2e_\alpha q}{a_{\alpha g}m_\alpha(\mathbf{v}-\mathbf{v}')^2}\right).
$$

$a_{\alpha g} = a$, $\alpha = e, i$ and $a_{gg} = 2a$.

Using these relations for estimates of the main contributions to binary collision terms we can write the kinetic equations as

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\langle \mathbf{E}_\alpha^{\text{eff}}\rangle \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right\} f_\alpha(X,t) = \\ &= - \int d\mathbf{v}' \int dq' \sigma_{\alpha g}(q', \mathbf{v}-\mathbf{v}')|\mathbf{v}-\mathbf{v}'| \times \\ &\times\, f_\alpha(X,t) f_g(\mathbf{r}, \mathbf{v}', q', t) + I_\alpha,\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q}{m_g}\langle \mathbf{E}_g^{\text{eff}}\rangle \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right\} f_g(\mathfrak{X},t) = \\ &= - \sum_{\alpha=e,i} \int d\mathbf{v}' \left[\sigma_{\alpha' g}(q, \mathbf{v}-\mathbf{v}')|\mathbf{v}-\mathbf{v}'| f_g(\mathfrak{X},t) - \right.\\ &- \sigma_{\alpha' g}(q-e_\alpha, \mathbf{v}-\mathbf{v}'-\delta\mathbf{v}_{\alpha'})|\mathbf{v}-\mathbf{v}'-\delta\mathbf{v}_{\alpha'}| \times \\ &\times\, \left. f_g(\mathbf{r}, \mathbf{v}-\delta\mathbf{v}_{\alpha'}, q-e_{\alpha'}, t)\right] f_{\alpha'}(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) - \\ &- \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int d\mathbf{v}' \int dq' |\mathbf{n}(\mathbf{v}-\mathbf{v}')| \times \\ &\times \left[\sigma_{gg}(q, q', \mathbf{v}-\mathbf{v}') f_g(\mathfrak{X},t) f_g(\mathbf{r}, \mathbf{v}', q', t) - \right.\\ &- \sigma_{\alpha g}(q-\delta q_g, q'; \mathbf{v}-\mathbf{v}') f_g(\mathbf{r}, \mathbf{v}-\delta\mathbf{v}_g, q-\delta q_g, t) \times \\ &\times\, \left. f_g(\mathbf{r}, \mathbf{v}'+\delta\mathbf{v}_g, q', t)\right] + I_g,\end{aligned} \tag{12}$$

where I_α and I_g are the Coulomb collision terms which can be calculated in terms of the correlation functions of particle density fluctuations (similarly to the case of ordinary plasmas), $\sigma_{\alpha\beta}(q, \mathbf{v})$ is the charging cross-section. In the case of collisionless plasma with no external fields

$$\sigma_{\alpha g}(q, v) = \pi a_{\alpha g}^2 \left(1 - \frac{2e_\alpha q}{m_\alpha v^2 a_{\alpha g}}\right).$$

Applications of Eqs. (11), (12) to the calculation of stationary grain distributions are given in [2].

Thus, rigorous evolution equations for microscopic distributions of dusty plasma are formulated. These equations differ from the conventional Klimontovich equations by the presence of "microscopic" collision term generated by the electron and ion absorption by grain. The appropriate generalization of the BBGKY hierarchy is also presented.

4. Effective potential of charged grains (general relations). Now let us apply the obtained equation to the calculations of the effective grain potentials. In the case of single immovable grain $f_g(\mathbf{r}', \mathbf{v}', q') = \delta(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{v}')\delta(q' - q)$ Eq. (11) reduces to

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \frac{1}{m_\alpha}\mathbf{F}_\alpha(X, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right\} f_\alpha(X, t) = \\ = I_\alpha - v\sigma_{\alpha q}(q, v) f_\alpha(X, t)\delta(\mathbf{r}), \tag{13}$$

where $\mathbf{F}_\alpha(X, t)$ is the external force field, if present. In what follows, for the sake of simplicity, instead of the collision term calculated in terms of correlation functions of microscopic fluctuations we shall use the simple version of the model collision integral (simple Bhatnagar–Gross–Krook model) proposed in Ref. [5], namely

$$I_\alpha = -\nu_\alpha \left\{ f_\alpha(X, t) - \Phi_\alpha(\mathbf{v}) \int d\mathbf{v} f_\alpha(X, t) \right\}. \tag{14}$$

Here ν_α is the collision frequency, $\Phi_\alpha(\mathbf{v})$ is the distribution function generated in course of plasma particle collisions.

In view of the fact that plasma particle absorption considerably suppress the influence of nonlinearity we can suggest that the presence of sinks causes small perturbation of the effective electric field and thus to use the linearized version of Eq. (14).

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{m_\alpha}\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right\}\delta f_\alpha(X, t) - \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\nabla\Phi(\mathbf{r}, t)\frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = \\ = -\, v\sigma_\alpha(q(t), v) f_{0\alpha}(\mathbf{v}) - \nu_\alpha\left\{\delta f_\alpha(X, t) - \Phi_\alpha(\mathbf{v})\int d\mathbf{v}\delta f_\alpha(X, t)\right\}. \tag{15}$$

The potential $\Phi(\mathbf{r}, t)$ is governed by the Poisson equation

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}, t) = -4\pi q(t)\delta(\mathbf{r}) - 4\pi\sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \int d\mathbf{v}\delta f_\alpha(X, t). \tag{16}$$

The solution of Eq. (15) can be written as

$$\begin{aligned}\delta f_\alpha(X,t) = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int dX' W_\alpha(X,X';t-t')\times \\ \times \frac{\partial \delta\Phi(\mathbf{r}',t')}{\partial \mathbf{r}'}\ \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} - \\ -\int\limits_{\infty}^{t} dt' \int dX' W_\alpha(X,X';t-t') S_\alpha^{(0)}(\mathbf{v}',t'),\end{aligned} \tag{17}$$

where $W_\alpha(X,X';t-t')$ satisfies the equation

$$\begin{aligned}\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{m_\alpha}\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right\} W_\alpha(X,X';\tau) = \\ = -\nu_\alpha\left\{W_\alpha(X,X';\tau) - \Phi_\alpha(\mathbf{v})\int d\mathbf{v} W_\alpha(X,X';\tau)\right\}\end{aligned} \tag{18}$$

with the initial condition

$$W_\alpha(X,X';0) = \delta(X-X'). \tag{19}$$

Substituting Eq. (17) into the Poisson equation (16) one obtains

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathbf{k}\omega} = \frac{4\pi q_\omega}{k^2\varepsilon(\mathbf{k},\omega)} - \\ -\frac{4\pi}{k^2\varepsilon(\mathbf{k},\omega)}\sum_\alpha e_\alpha n_{0\sigma}\int d\mathbf{v}\int d\mathbf{v}' W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}') S_{\alpha\omega}^{(0)}(\mathbf{v}'),\end{aligned} \tag{20}$$

where $\varepsilon(\mathbf{k}\omega)$ is the dielectric response function

$$\begin{aligned}\varepsilon(\mathbf{k}\omega) = 1 - i\sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2 n_{0\sigma}}{k^2}\int d\mathbf{v}\int d\mathbf{v}' W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}')\mathbf{k}\frac{\partial f_{0\sigma}(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'}; \\ W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}') = \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}}\int\limits_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau} W_\alpha(X,X',\tau), \\ \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'.\end{aligned} \tag{21}$$

In the stationary case $q(t) = q$, and Eq. (20) reduces to

$$\Phi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi q}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k},0)} - \\ - \frac{4\pi}{k^2\varepsilon(\mathbf{k},0)} \sum_\alpha e_\alpha n_{0\sigma} \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' W_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{v},\mathbf{v}') S_\alpha^{(0)}(\mathbf{v}'). \tag{22}$$

Here,

$$W_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{v},\mathbf{v}') = W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}')\Big|_{\omega=0}, \quad \varepsilon(\mathbf{k},0) = 1 + \frac{k_D^2}{k^2}, \\ k_D^2 = \sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2 n_{0\sigma}}{T_\alpha}. \tag{23}$$

4 Influence of plasma properties on the effective grain potentials.

Let us consider in more details the influence of plasma properties on the specific features of the effective potential of grain which charge is maintained by plasma currents. We start from the case of isotropic plasma with no external field. In this case

$$W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}') = \frac{i\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}')}{\omega - \mathbf{kv} + i\nu_\alpha} - \\ - \frac{i\nu_\alpha \Phi_\alpha(\mathbf{v})}{(\omega - \mathbf{kv} + i\nu_\alpha)(\omega - \mathbf{kv}' + i\nu_\alpha)} \left[1 - i\nu_\alpha \int d\mathbf{v} \frac{\Phi_\alpha(\mathbf{v})}{\omega - \mathbf{kv} + i\nu_\alpha}\right]^{-1}. \tag{24}$$

That leads to the following stationary grain potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q e^{-k_D r}}{r} + \\ + i \sum_\alpha 4\pi e_\alpha n_\alpha \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{kr}}}{k^2 + k_D^2} \frac{\int d\mathbf{v} \dfrac{v\sigma_\alpha(q,v) f_{0\sigma}(v)}{\mathbf{kv} - i\nu_\alpha}}{1 + i\nu_\alpha \int d\mathbf{v} \dfrac{\Phi_\alpha(\mathbf{v})}{\mathbf{kv} - i\nu_\alpha}}. \tag{25}$$

In the collisionless limit ($\nu_\alpha \to 0$) this relation is especially simplified

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{qe^{-k_D r}}{r} + \\ + i\sum_\alpha 4\pi e_\alpha n_{0\sigma} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{kr}}}{k^2+k_D^2} \int d\mathbf{v} \frac{v\sigma_\alpha(q,v) f_{0\sigma}(v)}{\mathbf{kv} - i0} \tag{26}$$

that gives

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{qe^{-k_D r}}{r} - \frac{\widetilde{Q}}{r} g(k_D r), \tag{27}$$

where

$$g(X) = e^{-X} Ei(X) - e^{X} Ei(-X), \\ \widetilde{Q} = \frac{2\pi}{k_D} \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \int_0^\infty dv\, v\sigma_\alpha(q,v) f_{0\sigma}(v). \tag{28}$$

At $k_D r \gg 1$ Eq. (25) gives the well-known result

$$\Phi(r) \simeq -\frac{2Q}{k_D r^2}.$$

In strongly collisional limit ($\nu_\alpha \gg k s_\alpha$, $s_\alpha = (T_\alpha/m_\alpha)$) Eq. (25) reduces to

$$\Phi(\mathbf{r}) = (q + \widetilde{S}) \frac{e^{-k_D r}}{r} - \frac{\widetilde{S}}{r}, \tag{29}$$

where

$$\widetilde{S} = \sum_\alpha \frac{e_\alpha S_\alpha}{D_\alpha}; \qquad S_\alpha = n_\alpha \int d\mathbf{v}'\, v\sigma_\alpha(q,v) f_{0\alpha}(\mathbf{v}); \qquad D_\alpha = \frac{T_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha},$$

that is in agreement with the results obtained on the basis of the description in the drift-diffusion approximation [6, 7]. Deriving (29) we put $\Phi_\alpha(\mathbf{v}) = f_{0\sigma}(\mathbf{v})$.

If collisions are present, but $\nu_\alpha \ll k s_\alpha$

$$\Phi_k = \frac{4\pi q}{k^2 + k_D^2} - \\ - \sum_\alpha \frac{8\pi^3 e_\alpha n_\alpha}{(k^2+k_D^2)} \frac{1}{k} \int_0^\infty dv\, v^2 \sigma_\alpha(q,v) f_{0\alpha}(v) \left[1 + \frac{\nu_\alpha}{k s_\alpha} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\right]. \tag{30}$$

In the coordinate representation one has

$$\Phi(r) = (q+Q)\frac{e^{-k_D r}}{r} - \frac{\widetilde{Q}}{r} g(k_D r) - \frac{Q}{r},$$
$$Q = \frac{2\pi^2}{k_D} \sum_{\alpha} \frac{e_\alpha n_\alpha \nu_\alpha}{s_\alpha} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \int\limits_0^\infty dv v^2 \sigma_\alpha(q,v) f_{0\alpha}(v). \tag{31}$$

Thus, we can conclude that plasma particle collisions generate the Coulomb-like behaviour of the effective potentials at large distances ($r > \lambda_D$).

If the external magnetic field $\mathbf{B}_0 = \mathbf{e}_z B_0$ is present the transition probability is

$$W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}') = \widetilde{W}_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}') +$$
$$+ \frac{\nu_\alpha \int d\mathbf{v}' \widetilde{W}_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}') \Phi_\alpha(\mathbf{v}') \int d\mathbf{v} \Phi_\alpha(\mathbf{v}) \widetilde{W}_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}')}{1 - \nu_\alpha \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' \widetilde{W}_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}') \Phi_\alpha(\mathbf{v}')}, \tag{32}$$

where

$$\widetilde{W}_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}') = W^{(0)}_{\alpha\mathbf{k}\omega+i\nu_\alpha}(\mathbf{v},\mathbf{v}'), \tag{33}$$

and $W^{(0)}_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}')$ is the Fourier representation of the transition probability for the collisionless plasma in external magnetic field. With regard to the symmetry properties of the charging cross-sections and unperturbed velocity distributions the quantity

$$W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}') = \int d\mathbf{v} W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}') \tag{34}$$

in terms of which $\Phi_{\mathbf{k}\omega}$ and $\varepsilon(\mathbf{k}\omega)$ are presented, can be written as

$$W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2\left(\frac{k_\perp v'_\perp}{\Omega_\alpha}\right) \frac{i}{\omega - n\Omega_\alpha - k_z v_z t i\nu_\alpha}, \tag{35}$$

where $\Omega_\alpha = e_\alpha B_0 / m_\alpha c$, $J_n(x)$ is the Bessel function.

Substituting Eq. (35) into Eq. (22) one obtains

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\mathbf{k}} = {} & \frac{4\pi q}{k^2 k_D^2} + \frac{4\pi i}{k^2 + k_D^2} \times \\
& \times \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d\mathbf{v} J_n^2 \left(\frac{\mathbf{k}_\perp \mathbf{v}_\perp}{\Omega_\alpha} \right) \frac{v \sigma_\alpha(q,v) f_{0\alpha}(v)}{k_z v_z + n\Omega_\alpha - i\nu_\alpha} \times \\
& \times \frac{1}{1 + i\nu_\alpha \sum_n \int d\mathbf{v} J_n^2 \left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha} \right) \frac{f_{0\alpha}(\mathbf{v})}{k_z v_z + n\Omega_\alpha - i\nu_\alpha}} \, .
\end{aligned}
\tag{36}
$$

This relation describes the grain potentials in collisional magnetoactive plasma provided that the cross-section $\sigma_\alpha(q,v)$ is known.

In the case of collisionless plasma Eq. (36) is simplified to

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\mathbf{k}} = {} & \frac{4\pi q}{k^2 + k_D^2} - \frac{4\pi^2}{k^2 + k_D^2} \times \\
& \times \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d\mathbf{v} J_n^2 \left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha} \right) v \sigma_\alpha(q,v) \delta\left(k_z v_z + n\Omega_\alpha \right) .
\end{aligned}
\tag{37}
$$

In the case of strongly magnetized plasma ($B_0 \to \infty$) we can put

$$
f_{0\sigma}(\mathbf{v}) = \delta(\mathbf{v}_\perp) \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_\alpha v_z^2}{2T_\alpha} \right)
\tag{38}
$$

and thus

$$
\Phi(r) = \frac{q e^{-k_D r}}{r} - \Phi_0 K_0(k_D r).
\tag{39}
$$

Here, $K_0(k_D r)$ is the modified Bessel function,

$$
\begin{aligned}
\Phi_0 = {} & \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \pi a^2 \int dv_z \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha} \right)^{1/2} \times \\
& \times \exp\left(-\frac{m_\alpha v_z^2}{2T_\alpha} \right) \theta\left(v_z^2 - \frac{2 e_\alpha q}{m_\alpha a} \right) .
\end{aligned}
\tag{40}
$$

The stationary value of q in this case satisfies the equation

$$\sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_z |v_z| \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_\alpha v_z^2}{2T_\alpha}\right) \times \\ \times \theta\left(v_z^2 - \frac{2e_\alpha q}{m_\alpha a}\right) = 0. \tag{41}$$

Thus, in the case of strongly magnetized collisionless plasma the effective potential is generated by the charged string which appears due to one-dimensional charging currents. Eq. (35) also shows that in the case $|z| \gg s_\alpha/\nu_\alpha$, $R_\perp > s_\alpha/|\Omega_\alpha|$ the relation of the type of Eq. (30) exists, but the effective charge $\widetilde{S}$ is dependent on the angle between $\mathbf{r}$ and $\mathbf{B}_0$.

6. Summary and Conclusions. Microscopic equations with regard to electron and ion absorption by grains are formulated and the BBGKY hierarchy for dusty plasma is presented.

Kinetic description of the effective grain potentials on the basis of the derived equation with regard to plasma particle collisions in terms of BGK-collision integral makes it possible to recover the results known from the numerical solutions of the drift-diffusion and collisionless kinetic equations.

With the appropriate choice of the grain charge and sink intensity, the obtained relations reproduce with good accuracy the numerical solutions of the nonlinear boundary-value problems.

Obtained general relations can be effectively used for the description of the effective grain potentials in the presence of external magnetic field.

References

[1] Schram P., Sitenko O., Trigger S., Zagorodny A. Kinetic description of dusty olasmas and problems of grain dynamics // Contrib. Plasma Phys. – 2001. – **41**, № 2-3. – P. 211–214.

[2] Schram P., Sitenko O., Trigger S., Zagorodny A. Statistical theory of dusty plasmas: Microscopic equations and Bogolyubov–Born–Green-Kirkwood–Yvon hierarchy // Phys. Rev. E. – 2001. – **63**, № 1. – 016403(1–17).

[3] Zagorodny A.G., Filippov A.V., Pal' A.F., Starostin A.N., and Momot A.I. Kinetic Description of Effective Grain Potentials in a Plasma // Dusty Plasmas in Applications. 2-nd Intern. Conf. on the Physics of Dusty and Burning Plasmas (Odessa, August 20-30, 2007), Odessa. – 2007. – 176 p.

[4] Petrina D.Ya., Petrina E.D. Stochastic dynamics and Boltzmann hierarchy, I // Ukr. Math. J. – 1998. – **50**, № 2. – P. 195–211.

[5] Bhatnagar P.L., Gross P.E., Krook M.A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems // Phys. Rev. – 1954. – **94**. – P. 511–515.

[6] Zagorodny A.G., Filippov A.V., Pal' A.F., Starostin A.N., Momot A.I. // Problems of Atomic Science and Technology (Plasma Physics Series). – 2006. – № 12. – 99 p.

[7] Filippov A.V., Zagorodny A.G., Momot A.I., Pal' A.F., Starostin A.N. Charge screening in a plasma with an external ionization source // JETP. – 2007. – **104**, № 1. – P. 147–161.

Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 249–261

УДК 517.9+531.19

***Т.М. Засадко*[†], *А.Г. Нікітін*[††]**

([†] Національний університет ім. Т.Г. Шевченка
[††]Інститут математики НАН України)
nikitin@imath.kiev.ua

Групова класифікація рівнянь Шродінгера зі змінною масою

Group classification of Schrödinger equations with position dependent mass is carried out. Twenty classes of such equations with non-equivalent symmetries are specified. Among them are equations invariant with respect to the Lie algebra of Lorentz group

Проведено групову класифікацію рівнянь Шродінгера зі змінною масою. Доведено, що існує двадцять класів таких рівнянь, кожен з яких характеризується нееквівалентною групою симетрії. Серед них є рівняння, інваріантне відносно алгебри Лі групи Лоренца

1 Вступ

Дослідження симетрії рівняння Шредінгера має довгу і цікаву історію. Інваріантність цього рівняння відносно групи Галілея завжди вважалась очевидною. Але тільки у 1972 році була встановлена його повна неперервна група симетрії, яка виявилась ширшою за групу Галілея і включає додаткову інваріантність відносно масштабних та спеціальних конформних перетворень [1], [2]. У роботах [3] - [5] зроблено групову класифікацію рівняння Шродінгера з довільним потенціалом.

Важливою гілкою науки про симетрію рівняння Шродінгера складають дослідження його вищих симетрій. Вивчення операторів симетрії вищих порядків є необхідною складовою частиною опису систем координат, у яких існують розв'язки з розділеними змінними [6]. Оператори симетрії вищих порядків для нестаціонарного рівняння Шродінгера досліджувались у роботах [7] [8]. Нагадаємо, що потужний метод

© Institute of Mathematics, 2014

оберненої задачі також тісно пов'язаний з вищими симетріями рівняння Шредінгера.

Дослідження симетрії цього рівняння активно продовжується і в сучасну добу, а саме досліджуються суперінтегровні та суперсиметричні системи квантової механіки, дивись [9], [10] та цітовану там літературу. При цьому майже не дослідженими залишаються симетрії квантовомеханічних моделей, заснованих на рівняннях Шродінгера зі змінною масою, які мають наступний вигляд:

$$\hat{H}\psi = E\psi, \tag{1}$$

де

$$\hat{H} = -\frac{\partial}{\partial x_a}\frac{1}{m(\mathbf{x})}\frac{\partial}{\partial x_a} + V(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \tag{2}$$

і по індексах, що повторюються, проводиться сумування за значеннями $a = 1, 2, 3$.

Такі рівняння є невід'ємною складовою частиною фізики конденсованих станів. Вони також природньо виникають при квантуванні та редукції класичних моделей у багатовимірному зкривленому просторі. Слід відмітити, що назва "рівняння Шродінгера зі змінною масою"не є цілком адекватною для (1), але ми будеме притримуватись цієї дуже поширеної термінології.

Дана робота присвячена дослідженню симетрії рівняння (1) відносно груп неперервних перетворень. Ми проведемо групову класифікацію цих рівнянь, які включають два довільні елементи - потенціал $V(\mathbf{x})$ та змінну масу $m(\mathbf{x})$. Ця задача еквівалентна знаходженню усіх інтегралів руху для гамільтоніана (2), які належать до класу диференціальних операторів першого порядку. Буде показано, що існує 20 класів таких рівнянь з різними групами симетрії. Два зі знайдених рівнянь мають широку і досить екзотичну симетрію. Одне з них має шість інтегралів руху, що утворюють алгебру Лі групи обертань у чотивимірному евклідовому просторі, а друге є інваріантним відносно алгебри Лі групи Лоренца. Повний список рівнянь з нееквівалентними групами симетрії наведено нище у таблиці 2.

2 Визначальні рівняння

Ми будем використовувати наступне представлення для гамільтоніана (2):

$$\hat{H} = \frac{\partial}{\partial x_a} f \frac{\partial}{\partial x_a} + V, \tag{3}$$

де $V = V(\mathbf{x})$ та $f = f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{m(\mathbf{x})}$.

Наша задача - знайти усі гамільтоніани (3), які допускають інтеграли руху, що належать до диференціальних операторів першого порядку. Не зменьшуючи загальності, такі інтеграли руху можно представити у наступному вигляді:

$$Q = \xi^i \partial_i + \eta, \quad i = \overline{1,3}, \tag{4}$$

де ξ^i та η - невідомі функції від $\mathbf{x}$.

Згідно з визначенням, диференціальні вирази (3) та (4) повинні комутувати:

$$[\hat{H}, Q] \equiv \hat{H}Q - Q\hat{H} = 0 \tag{5}$$

причому співвідношення (5) треба розуміти як операторне рівняння, яке повинно виконуватись при дії операторів у лівій частині на довільну двічи диференційовну функцію. Обраховуючи коммутатор і прирівнюючи нулю коефіцієнти при різних похідних, дістаємо наступну систему визначальних рівнянь:

$$\xi^c f_c \delta_{ab} - f(\xi^b_a + \xi^a_b) = 0, \tag{6}$$

$$-\xi^i f_{ai} + f_i \xi^a_i + f \xi^a_{cc} + 2f\eta_a = 0, \tag{7}$$

$$f_a b_a + f\eta_{aa} - \xi^i V_i = 0, \tag{8}$$

де δ_{ab}– символ Кронекера, і нижні індекси позначають похідні по відповідним змінним. Наприклад, $\xi^a_c = \frac{\partial \xi^a}{\partial x_c}$, і т.п. Як і всюди у тексті, за індексами, що повторюються, розуміємо сумовування по значенням 1, 2 і 3.

Система (6)-(8) є перевизначеною, але досить складною. Вона включає десять рівнянь для шести функцій f, V, ξ^i та η, кожна з яких залежить від трьох змінних x_1, x_2, x_3.

Рівняння (6) може бути розщеплено на дві наступні підсистеми:

$$\xi_a^b + \xi_b^a - \frac{2}{3}\delta_{ab}\xi_i^i = 0 \tag{9}$$

$$3\xi^i f_i = 2f\xi_i^i. \tag{10}$$

Формула (9) визначає рівняння для конформного вектора Кіллінга. Загальний розв'язок цього рівняння має наступний вигляд (дивись, наприклад, [11])

$$\xi^a = \lambda^a x^n x^n - 2x^a\lambda^n x^n + \mu^c\varepsilon^{abc}x^b + \omega x^a + \nu^a \tag{11}$$

де грецькими литерами позначено константи інтегрування.

Згідно з (4), (11), загальний вигляд інтеграла руху першого порядку для гамільтоніана (3) задається наступною формулою:

$$Q = \lambda^i K^i + \mu^i J^i + \omega D + \nu^i P^i + b \tag{12}$$

де

$$\begin{aligned} &P^i = p^i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad J^i = \varepsilon^{ijk}x^j p^k, \\ &D = x^n p^n + 1, \quad K^i = x^n x^n p^i - 2x^i D \end{aligned} \tag{13}$$

а b - невідома функція від $\mathbf{x}$. Оператори (13) задовольняють наступним комутаційним співввідношенням

$$\begin{aligned} &[P^a, P^b] = 0, \quad [P^a, J^b] = -\varepsilon_{abc}P^c, \\ &[J^a, J^b] = -\varepsilon_{abc}J^c, \quad [D, J_a] = 0, \\ &[D, P^a] = -P^a, \quad [D, K^a] = K^a, \\ &[K^a, J^b] = -\varepsilon_{abc}K^c, \quad [K^a, K^b] = 0, \\ &[K^a, P^b] = 2(\varepsilon_{abc}J^c - \delta^{ab}D) \end{aligned} \tag{14}$$

які характеризують алгебру Лі конформної групи у тривимірному евклідовому просторі. Іншими словами, с точністю до останнього доданку, пропорційного одиничному оператору, шуканий інтеграл руху є лінійною комбінацією генераторів конформної групи у тривимірному евклідовому просторі $C(3)$, яка виявляється максимально можливою групою симетрії досліджуваних рівнянь.

3 Алгоритм інтегрування визначальних рівнянь

Для знаходження розв'язків системи визначальних рівнянь (8), (7) і (10) треба перебрати усі нееквівалентні набори довільних параметрів λ^a, μ^c, ν^a та ω, що визначають функції ξ^a згідно з формулою (11). З точністю до групи внутрішніх автоморфізмів групи $C(3)$, такі набори визначаються оптимальною системою підалгебр алгебри (3), базисні елементи якої задані формулами (13). Для знаходження цих підалгебр скористаємось наступним твердженням.

Твердження 1 *Алгебра $c(3)$ ізоморфна алгебрі Лі псевдоортогональної групи $SO(1,3)$.*

Зформульований вище автоморфізм може бути заданий явно за допомогою наступних співвідношень:

$$J^{ab} = \varepsilon^{abc} J^c,\ K^a = J^{4a} + J^{0a},\ P^a = J^{0a} - J^{4a},\ D = J^{40} \qquad (15)$$

де P^a, J^a, K^a та D - оператори (13). Використовуючи рівняння (14), легко переконатися, що нові базисні елементи (15) задовольняють наступним комутаційним співвідношенням:

$$[J^{\mu\nu}, J^{\lambda\sigma}] = -(g^{\mu\sigma} J^{\nu\lambda} + g^{\nu\lambda} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\lambda} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\lambda}) \qquad (16)$$

де індекси $\mu, \nu, \lambda, \sigma$ пробігають значення 0, 1, 2, 3, 4, $g^{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$. А ці співвідношення визначають алгебру $so(1,3)$.

Згідно з наведеним твердженням, оптимальна система підалгебр алгебри (3) співпадає з оптимальною системою підалгебр алгебри $so(1,3)$. Остання була знайдена у роботі [12], результатами якої ми і скористуємось. Ці результати можуть бути представлені у вигляді наступного твердження.

Твердження 2 *Нееквівалентні підалгебри алгебри $so(1,3)$ визначаються наступними наборами базисних елементів.*

Одновимірні підалгебри:
$< A+H >,\ \ < H >,\ \ < A+\alpha H >, 0<\alpha<1,\ \ < E+J >,\ \ < G >,$
$< H\cos c + G\sin c >, 0 < c < \frac{\pi}{2},\ \ < A-G >,\ \ < A-G+H >;$
двовимірні підалгебри:
$< A, H >, < G, H >, < E+J, F+K >, < E+J, G >,\ < H, A-G >,$
$< A-G, D+\alpha H >;$

тривимірні підалгебри:
<A+H, B-F, C+E>, <E, F, H>, < $H \cos c + G \sin c$, E+J, F+K>,
<H, E+J, F+K>,<G,E+J, F+K >,<H,J,K>, <A-G, B-J, C-K>,
<H+A-G, B-J, C-K>,<D, H, A-G>;
чотиривимірні підалгебри:
<A+H, B-F, C+E, A-H>,<D,E,F,H>,<H,G,E+J,F+K>,
<H, A-G, B-J, C-K>, <D, A-G, B-J, C-K>,<A,K,J,H>;
п'ятивимірна підалгебра:
<D, H, A-G, B-J, C-K>;
шестивимірні підалгебри:
<E, F, H, A-G, B-J, C-K>, <E, F, G, H, J,K>, <A, B, C, E, F, H>;
семивимірна підалгебра:
<D, E, F, H, A-G, B-J, C-K>;
десятивимірна алгебра:
<A, B, C, D, E, F, G, H, J, K>

де

$$
\begin{aligned}
&A = \frac{1}{2}(P_3 - K_3), \quad B = \frac{1}{2}(P_2 - K_2), \quad C = \frac{1}{2}(P_1 - K_1),\\
&G = -\frac{1}{2}(P_3 + K_3), \quad J = -\frac{1}{2}(P_2 + K_2), \quad K = -\frac{1}{2}(P_1 + K_1),\\
&E = J_{32}, \quad F = J_{31}, \quad H = J_{21}.
\end{aligned}
$$

Таким чином, задача групової класифікації рівняння (1) зводиться до пошуку нееквівалентних розв'язків рівнянь (8), (7), (10), де ξ^a - функції, задані рівнянням (11). При цьому досить обмежитись такими наборами значень числових параметрів λ^i, μ^i, ν^i та ω, що відповідають підалгебрам, перерахованим вище. Для знаходження цих значень досить порівняти загалиний вигляд оператора симетрії (12) з конкретними операторами, що входять у оптимальні підалгебри.

Можна показати, що функція η у визначальних рівняннях (8) та (7) повинна мати вигляд $\eta = -2\lambda^a x^a + c$, де λ^a - константи, що входять у загальний вираз (12) для операторів симетрії, а c - довільна константа, яка є несуттєвою і може бути опущена. Для інших функцій η оператори (12) не будуть утворювати алгебру Лі, що протирічить основним теоремам групового аналізу.

Явний вигляд допустимих функцій ξ^a і η наведено у наступній таблиці.

Таблиця 1. Функції ξ^a і b, що відповідають базисним елементам нееквівалентних підалгебр алгебри $c(3)$.

Базисні елементи алгебри	ξ^1	ξ^2	ξ^3	b
A	x_1x_3	x_2x_3	$\frac{s_3+1}{2}$	x_3
B	x_1x_2	$\frac{s_2+1}{2}$	x_2x_3	x_2
C	$\frac{s_1+1}{2}$	x_1x_2	x_1x_3	x_1
D	x_1	x_2	x_3	0
E	0	x_3	x_2	0
F	x_3	0	x_1	0
G	x_1x_3	x_2x_3	$\frac{s_3-1}{2}$	x_3
H	x_2	x_1	0	0
J	x_1x_2	$\frac{s_2-1}{2}$	x_2x_3	x_2
K	$\frac{s_1-1}{2}$	x_1x_2	x_1x_3	x_1
$A+H$	$x_1x_3+x_2$	$x_2x_3-x_1$	$\frac{s_3+1}{2}$	x_3
$H\cos c$ $+G\sin c$	$\sin(c)x_1x_3$ $+\cos(c)x_2$	$\sin(c)x_2x_3$ $-\cos(c)x_1$	$\frac{\sin(c)(s_3+1)}{2}$	$x_3\sin c$
$E+J$	x_1x_2	$\frac{s_2+2x_3-1}{2}$	$(x_3-1)x_2$	x_2
$A-G+H$	x_2	$-x_1$	1	0
$F+K$	$\frac{s_1-2x_3-1}{2}$	x_1x_2	$(x_3+1)x_1$	x_1
$A-G$	0	0	1	0
$D+\alpha H$	$x_1+\alpha x_2$	$x_2-\alpha x_1$	x_3	0
$B-J$	0	1	0	0
$C-K$	1	0	0	0
$B-F$	$x_1x_2+x_3$	$\frac{s_2+1}{2}$	$x_2x_3-x_1$	x_2
$C+E$	$\frac{s_1+1}{2}$	$x_1x_2+x_3$	$x_1x_3-x_2$	x_1
$A-H$	$x_1x_3-x_2$	$x_2x_3+x_1$	$\frac{s_3+1}{2}$	x_3

де $s_a=2x_a^2-r^2,\ a=1,2,3.$

4 Результати групової класифікації

Для завершення групової класифікації рівнянь залишилося проінтегрувати визначальні рівняння (8), (7) та (10) для випадків, що відповідають підалгебрам, перерахованим у твердженні 2. Відповідні функції ξ^a і b наведено у таблиці 1.

Розглянемо випадок, коли оптимальна підалгебра одновимірна і включає єдиний базисний елемент $G = -\frac{1}{2}(P_3 + K_3)$. Згідно з таблицею 1, з точністю до загального знаку відповідні функції ξ^1, ξ^2 та ξ^3 мають наступний вигляд:

$$\xi^1 = x_1 x_3, \quad \xi^2 = x_2 x_3, \quad \xi^3 = x_3^2 - \frac{1}{2}(r^2 + 1)$$

де $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Підставивши ці функції у (10), отримуємо рівняння для невідомої функції f:

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 - \frac{r^2 + 1}{2x_3} f_3 = 2f,$$

загальний розв'язок якого має вигляд:

$$f(x) = r_{12}^2 F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{r^2 - 1}{r_{12}}\right) \tag{17}$$

де $r_{12}^2 = r_1^2 + r_2^2$, і $F(.,.)$ є довільною функцією своїх двох аргументів.

Пряма перевірка показує, що функції (17) тотожньо задовольняють також рівняння (7).

Залишилось розв'язати останнє визначальне рівняння (8), яке набуває наступного вигляду:

$$2x_3(x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3 V_3) - (r^2 + 1)V_3 = f_3. \tag{18}$$

Це лінійне неоднорідне рівняння, загальний розв'язок якого має наступний вигляд:

$$V(x) = r_{12} D_2 F + \tilde{F}\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{r^2 - 1}{r_{12}}\right) \tag{19}$$

де $\tilde{F}(.,.)$ - ще одна довільна функція, і символ $D_2 F$ означає похідну по другому аргументу функції F.

Ми бачимо, що умові інваріантності відносно оператора G задовольняє досить широкий клас рівнянь (3). А саме, такі рівняння визначені з точністю до двох довільних функцій $F(\frac{x_2}{x_1}, \frac{r^2-1}{r_{12}})$ та $\tilde{F}(\frac{x_2}{x_1}, \frac{r^2-1}{r_{12}})$.

Розглянемо рівняння, що допускають симетрію відносно більш широких алгебр, які включають G і інші базисні елементи. Згідно з твердженням 2, достатньо розглянути дві двовимірні алгебри: $< G, H >$ та

$< G, E + J >$. При цьому виникають додаткові умови інваріантності відносно дії операторів H та $E + J$ відповідно.

Розглянемо підалгебру $< G, H >$. Підставивши з Таблиці 1 відповідні значення функції ξ^a в рівняння (6), отримуємо додаткову систему визначальних рівнянь для f і V:

$$x_2 f_1 - x_1 f_2 = 0, \quad x_2 V_1 - x_1 V_2 = 0.$$

Ці умови забороняють залежність функцій $F(\frac{x_2}{x_1}, \frac{r^2-1}{r_{12}})$ та $\tilde{F}(\frac{x_2}{x_1}, \frac{r^2-1}{r_{12}})$ від першого аргументу, і допустимі функції f і V набувають вигляду:

$$f(x) = r_{12}^2 F\left(\frac{r^2-1}{r_{12}}\right), \quad V(x) = r_{12} F' + \tilde{F}\left(\frac{r^2-1}{r_{12}}\right). \tag{20}$$

де F' означає похідну від функції $F\left(\frac{r^2-1}{r_{12}}\right)$ по її аргументу $\frac{r^2-1}{r_{12}}$.

Для рівнянь, інваріантних відносно підалгебри $< G, E+J >$, функції (17) та (19) повинні задовольняти наступні додаткові умови:

$$x_2(x_1 f_1 + x_2 f_2 + (x_3 - 1) f_3) - \frac{1}{2}(r^2 - 1 - 2x_3) f_2 = 2x_2 f,$$
$$2x_2(x_1 V_1 + x_2 V_2 + (x_3 - 1) V_3) - (r^2 - 1 - 2x_3) V_2 = f_2$$

які отримуються при підстановці у (7) та (10) відповідних виразів для ξ^a та η з таблиці 1. Ці умови сумісні з (17) та (19) тільки тоді, коли

$$f(x) = x_1^2 F\left(\frac{r^2-1}{x_1}\right), \quad V = x_1 F' + \tilde{F}\left(\frac{r^2-1}{x_1}\right). \tag{21}$$

Наступна за розмірністю оптимальна підалгебра, що включає G, є лінійною оболонкою базисних елементів $< G, H, E+J >$. Симетрія відносно цієї алгебри вимагає сумісності формул (21) та (20), що можливо тільки у випадку, коли

$$f(x) = \mu(r^2 - 1)^2, \quad V = 4\mu r^2 + \nu \tag{22}$$

де μ та ν - довільні константи. Ці ж формули виявляються справедливими і для усіх інших розширень алгебр $< G, H >$ та $< G, E + J >$, присутніх у переліку з твердження 2.

Аналогічно, стартуючи з інших одновимірних алгебр, наведених у згаданому твердженні, і послідовно розв'язуючи відповідні визначальні рівняння, знаходимо усі інші рівняння Шродінгера та їх алгебри симетрії. Ця процедура є алгоритмічною для усіх розв'язних оптимальних підалгебр. У нашому випадку нерозв'язними є тільки такі алгебри, що включають підалгебру $so(3)$. Для таких алгебр обрахунки аналогічні, але доводиться починати відразу з трьох систем визначальних рівнянь, що відповідають цій підалгебрі. Результати щодо розв'язків визначальних рівнянь наведено у наступній таблиці.

Таблиця 2. Алгебри інваріантності рівнянь (3) та відповідні функції f та V, що визначають ці рівняння

Підалгебра	f	V
G	$r_{12}^2F(\frac{x_2}{x_1}, \frac{r^2-1}{r_{12}})$	$2r_{12}D_2F + \tilde{F}(\frac{x_2}{x_1}, \frac{r^2-1}{x_1})$
H	$F(r_{12}^2, x_3)$	$V(r_{12}^2, x_3)$
$A+G$	$r_{12}^2F(\frac{x_2}{x_1}, \frac{r^2}{r_{12}})$	$r_{12}2D_2F + \tilde{F}(\frac{x_2}{x_1}, \frac{r^2}{r_{12}})$
$A+H$	$r_{12}^2F(\frac{r^2+1}{r_{12}}, \omega_1)$	$2r_{12}D_1F + \frac{4r_{12}^2x_3}{l_-}D_2F$ $+\tilde{F}(\frac{r^2+1}{r_{12}}, \omega_1)$
$A+\alpha H$	$r_{12}^2F(\frac{r^2+1}{r_{12}}, \omega_2)$	$2r_{12}D_1F + \frac{4\alpha r_{12}^2x_3}{l_-}D_2F$ $+\tilde{F}(\frac{r^2+1}{r_{12}}, \omega_2)$
$H\cos c + G\sin c$	$r_{12}^2F(\frac{r^2-1}{r_{12}}, \omega_3)$	$2r_{12}D_1F + \frac{4\cot(c)r_{12}^2x_3}{l_+}D_2F$ $+\tilde{F}(\frac{r^2-1}{r_{12}}, \omega_3)$
$A-G+H$	$F(r_{12}^2, x_3-\varphi)$	$V(r_{12}^2, x_3-\varphi)$
A, H	$r_{12}^2F(\frac{r^2+1}{r_{12}})$	$2r_{12}F' + \tilde{F}(\frac{r^2+1}{r_{12}})$
G, H	$r_{12}^2F(\frac{r^2-1}{r_{12}})$	$2r_{12}F' + \tilde{F}(\frac{r^2-1}{r_{12}})$
$H, A-G$	$F(r_{12})$	$V(r_{12})$
$A-G, D+\alpha H$	$r_{12}^2F(\ln r_{12}^\alpha + \varphi)$	$\tilde{F}(\ln r_{12}^\alpha + \varphi)$
H, J, K	$x_3^2F(\frac{r^2-1}{x3})$	$2x_3F' + \tilde{F}(\frac{r^2-1}{x3})$
B, C, H	$x_3^2F(\frac{r^2+1}{x3})$	$2x_3F' + \tilde{F}(\frac{r^2+1}{x3})$
E, F, H	$F(r^2)$	$\tilde{F}(r^2)$
$D, H, A-G$	μr_{12}^2	ν
A, K, J, H	$\mu((r^2+1)^2+4x_3^2)$	$4\mu r^2+\nu$
E, F, H, D	μr^2	ν
A, B, C, E, F, H	$\mu(r^2+1)^2$	$4\mu r^2+\nu$
E, F, G, H, J, K	$\mu(r^2-1)^2$	$4\mu r^2+\nu$

Тут μ та ν - довільні константи,

$$l_{\pm} = (r^2 - 1)^2 \pm 4r_{12}^2(r^2 - 1)^2, \quad \omega_1 = \arctan\frac{r^2+1}{2x_3} + \varphi,$$
$$\omega_2 = \alpha \arctan\frac{r^2+1}{2x_3} + \varphi, \quad \omega_3 = -\cot c \arctan\frac{r^2-1}{2x_3} + \varphi,$$
$$\varphi = \arctan\frac{x_2}{x_1}.$$

Таблиця 2 не включає постійних функцій f та V, що відповідають очевидній симетрії рівняння (2) відносно групи Евкліда. Наведені розв'язки для f і V можуть бути розмножені з використанням групи еквівалентності цього рівняння, генератори якої задані формулами (13).

5 Висновки

У даній роботі проведено групову класифікацію рівнянь Шродінгера зі змінною масою. Як видно з таблиці 2, множина рівнянь з нетривіальною симетрією виявилась досить широкою. При цьому розмірність алгебр інваріантності може бути від одиниці до шести.

Встановлено, що існує три нееквівалентних рівняння, які допускають максимально широкі (шестипараметричні) групи Лі. З точністю до нормування власних значень такі рівняння можуть бути записані у наступному вигляді (див. три останні строчки таблиці 2):

$$\left(-\frac{\Delta}{2m} + C\right)\psi = E\psi, \tag{23}$$
$$\big((-\nabla_a(r^2+1)^2\nabla_a - 4r^2\big))\psi = E\psi, \tag{24}$$
$$\big(-\nabla_a(r^2-1)^2\nabla_a - 4r^2\big))\psi = E\psi \tag{25}$$

де m - константа.

Рівняння Шродінгера для вільної частинки, що задається формулою (23), має очевидну симетрію відносно групи Евкліда $E(3)$. Більш несподівані симетрії мають рівняння (25) і (24). А саме, симетрія рівняння (24) визначається алгеброю $so(4)$, тобто алгеброю Лі групи обертань у чотиривимірному просторі. А рівняння (25) виявляється інваріантним відносно алгебри Лі групи Лоренца.

Ще два рівняння з незвичайною симетрією задається наступними формулами:

$$\left(-\nabla_a x_3^2 F\left(\frac{r^2+1}{x_3}\right)\nabla_a - 2x_3F' - \tilde{F}\left(\frac{r^2+1}{x_3}\right)\right)\psi = E\psi \qquad (26)$$

та

$$\left(-\nabla_a x_3^2 F\left(\frac{r^2-1}{x_3}\right)\nabla_a - 2x_3F' - \tilde{F}\left(\frac{r^2-1}{x_3}\right)\right)\psi = E\psi \qquad (27)$$

де $F(\cdot)$ та $\tilde{F}(\cdot)$ - довільні функції вказаних аргументів.

Алгебра інваріантності рівняння (26) є лінійною оболонкою операторів B, C та H, які утворюють нестандартне представлення алгебри Лі групи обертань у тривимірному просторі. Алгебра симетрії рівняння (27) включає оператори H, J і K, що утворюють предстівлення алгебри Лі групи Лоренца у (1+2)-вимірному просторі-часі.

Знайдені симетрії створюють теоретико-групове підгрунтя для побудови моделей зі змінною масою. Вони також можуть бути використані для ефективного інтегрування таких моделей. Зокрема, усі отримані рівняння, що мають більше ніж два інтеграла руху (наприклад, рівняння (26) та (27)) є суперінтегровними, а рівняння (25) та (24) належать до максимально суперінтегровних рівнянь, бо допускають чотири алгебраїчно незалежних інтеграла руху, а це є максимально можлива кількість для гамільтонової системи з трьома степенями вільності.

Література

[1] C.R. Hagen. *Scale and conformal transformations in Galilean-invariant conformal field theory.* Phys. Rev. D **5**, (1972), 377–388.

[2] U. Niederer. *The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equations.* Helv. Phys. Acta, **45**, (1972), 802–810.

[3] U. Niederer. *The maximal kinematical invariance group of the harmonic oscillator.* Helv. Phys. Acta, **46**, (1973), 191–200.

[4] R.L. Anderson, S. Kumei, C.E. Wulfman. *Invariants of the equations of wave mechanics. I* . Rev. Mex. Fis., **21**, (1972), 1–33.

[5] C.P. Boyer. *The maximal kinematical invariance group for an arbitrary potential* Helv. Phys. Acta, **47**, (1974), 450–605.

[6] У. Миллер. *Симметрия и разделение переменных*. М.: Мир, 1981.

[7] J. Beckers, N. Debergh, A.G. Nikitin. *More on symmetries of the Schrodinger equation.* J. Phys. A: Math.Gen., **24**, (1991), L1269–L1275.

[8] W.I. Fushchich, A.G. Nikitin. *Higher symmetries and exact solutions of linear and nonlinear Schrödinger equation.* Journal of Mathematical Physics, **38**, (1997), 5944–5959.

[9] W. Miller, Jr, S. Post, P. Winternitz. *Classical and Quantum Superintegrability with Applications* J. Phys. A: Math. Theor. **46**, (2013), 423001.

[10] A.G. Nikitin. *Integrability and supersymmetry of Schrodinger-Pauli equations for neutral particles*. J. Math. Phys., **53**, (2012), 122103.

[11] А.Г. Нікітін. *Узагальнені тензори Кілінга довільного рангу та порядку*. УМЖ, **43**, (1991), 786–795; A.G. Nikitin. *Generalized Killing tensors of arbitrary valence and order*. Ukrainian Math. J., **43**, (1991), 734–743.

[12] J. Patera, P. Winternitz. *Quantum numbers for particles in de Sitter space.* J. Math. Phys., **17**, (1976), 717–728.

Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, N 1, ??–??

УДК 517.5

В.М. Коваленко

(НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ)

vmkovalenko@ukr.net

Скінченні та нескінченні арифметичні суми множин комплексних чисел

In this paper we consider topological and metric properties of infinite arithmetic sum of an infinite sequence of finite sets of the complex numbers.

У даній роботі розглядаються тополого-метричні властивості множин, які представляють собою нескінченні арифметичні суми послідовностей скінченних множин комплексних чисел.

1 Вступ

У працях Мінковського була введена бінарна операція над множинами A і B лінійного простору V, визначена рівністю

$$A \oplus B = \{c = a + b : \ a \in A, \ b \in B\}. \tag{1}$$

Її називають арифметичною [14, 15] або векторною [6] сумою множин A і B. Арифметична сума $A \oplus B$ має просту геометричну інтерпретацію, виражену наступною рівністю:

$$A \oplus B = \bigcup_{a \in A} t_a(B) = \bigcup_{b \in B} t_b(A), \quad \text{де} \quad t_c(x) = x + c. \tag{2}$$

Крім арифметичної суми множин використовується операція множення множини лінійного простору на скаляр: $\lambda A = \{\lambda a : \ a \in A\}$. Сам Мінковський використовував ці операції при дослідженні властивостей

© Institute of Mathematics, 2014

лінійних комбінацій многогранників [5]. Взагалі кажучи, арифметична сума не успадковує ні топологічних, ні метричних властивостей множин-доданків. Одним з яскравих прикладів цьому є арифметична сума двох класичних множин Кантора $C = \{x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} : \ a_k \in \{0, 1\}\}$. Як відомо [3], $C \oplus C = [0, 2]$, тобто в цьому випадку арифметична сума двох ніде не щільних множин нульової міри Лебега є зв'язною множиною додатної міри Лебега. У роботах [14, 15] досліджувались топологічні та метричні властивості арифметичних сум множин канторівського типу. Крім самостійного інтересу ці результати є корисними при дослідженні структури згортки двох сингулярних розподілів випадкових величин канторівського типу. Нетривіальний інтерес викликають нескінченні лінійні комбінації множин, зокрема при дослідженні нескінченних згорток Бернуллі (симетричних та несиметричних). Як відомо [7], спектр нескінченної згортки Бернуллі може бути відрізком, об'єднанням відрізків, досконалою, ніде не щільною множиною нульової або додатної міри Лебега. А по суті, він є арифметичною сумою зліченного числа двоелементних множин – спектрів розподілів випадкових величин - доданків. Множина неповних сум абсолютно збіжного ряду [2, 13] також є арифметичною сумою зліченного числа двоелементних множин. Аналогічна ситуація спостерігається при аналізі випадкових величин типу Джессена-Вінтнера [10]. Ключовим моментом в наведених прикладах є те, що арифметична сума зліченного числа скінченних множин є континуальною множиною, яка також може мати додатну міру Лебега. У роботах, присвячених дослідженню властивостей згаданих множин, не приділяли достатньо уваги можливості їх представлення нескінченними арифметичними сумами більш простих (скінченних) множин. Проте в деяких випадках такий підхід є зручним при дослідженні властивостей суми нескінченного числа множин в термінах величин, що характеризують множини-доданки. У даній роботі ми розглядаємо поняття нескінченної арифметичної суми множин, досліджуємо властивості множин, які є нескінченними арифметичними сумами скінченних підмножин комплексної площини, в залежності від властивостей множин-доданків.

2 Нескінченні арифметичні суми множин комплексних чисел, Σ-множини

Нехай $\mathbb{C}$ – нормований простір комплексних чисел $z = x + iy$ з нормою $\|z\| = |z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Арифметичною сумою n числових множин $A_1, \dots, A_n$ (симв.: $\bigoplus\limits_{k=1}^{n} A_k$) називається множина елементів виду $e = a_1 + \dots + a_n$, де $a_k \in A_k$ $(k = 1, \dots, n)$, тобто $\bigoplus\limits_{k=1}^{n} A_k = \{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k : \ a_k \in A_k, \ k = 1, \dots, n\}$.

Означення 1. Нескінченною арифметичною сумою послідовності числових множин $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ (симв.: $\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} A_k$) називатимемо топологічну границю (якщо вона існує) послідовності множин $S_k = \bigoplus\limits_{m=1}^{k} A_m$ при $k \to \infty$, тобто $\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} A_k := \operatorname*{lt}\limits_{k\to\infty} \bigoplus\limits_{m=1}^{k} A_m$.

Як відомо [8], топологічна границя послідовності множин є замкненою множиною, отже, $\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ – замкнена.

Арифметична сума скінченного числа скінченних множин є множиною скінченною, більш цікавою з геометричної точки зору, навіть для скінченних множин-доданків, є сума зліченного їх числа.

Означення 2. Будемо казати, що множина S є Σ-множиною, якщо $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$, де Z_k $(k \in \mathbb{N})$ – скінченні підмножини комплексної площини $\mathbb{C}$, для яких виконуються наступні умови:

1)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k = M < \infty, \quad \text{де} \quad \mu_k = \max\{|z| : \ z \in Z_k\} \tag{3}$$

2) серед множин Z_k існує нескінченна кількість множин, що містять не менше двох елементів.

Очевидно, що елементи множини $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ визначаються сумами абсолютно збіжних рядів виду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$, де $z_k \in Z_k$. Таким чином, якщо

$Z_k = \{z_{1k}, z_{2k}, \ldots, z_{m_k k}\}$ $(m_k, k \in \mathbb{N})$, то

$$S = \bigoplus_{k=1}^{\infty} Z_k = \{\sum_{k=1}^{\infty} z_{i_k k} : \ z_{i_k k} \in Z_k\}. \tag{4}$$

Позначимо $I_k := \{1, \ldots, m_k\}$, $I := \{(i_1, \ldots, i_k, \ldots) : i_k \in I_k, \ k \in \mathbb{N}\}$. Між множинами I та S можна встановити відповідність σ наступним чином:

$$\sigma : \quad (i_1, \ldots, i_k, \ldots) \to \sum_{k=1}^{\infty} z_{i_k k} \tag{5}$$

Довільній послідовності $i = (i_1, \ldots, i_k, \ldots) \in I$ відповідає єдине комплексне число, що є сумою ряду $\sigma(i) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{i_k k} \in S$, тобто відповідність σ є відображенням. Оскільки кожний елемент множини S ставиться у відповідність деякому елементу (послідовності) i з множини I і при цьому різним послідовностям $i, j \in I$ можуть (в загальному випадку) відповідати комплексні числа, які визначаються рядами з рівними сумами, то відповідність σ є сюр'єктивним відображенням (ін'єктивність має місце лише в окремих випадках).

Лема 1. *Довільна Σ-множина є компактною.*

Доведення. Оскільки S є підмножиною скінченновимірного евклідового простору, нам достатньо показати, що вона є замкненою та обмеженою. Замкненість S випливає з її означення як топологічної границі послідовності множин. Покажемо, що S обмежена. Нехай z – довільна точка множини S. Тоді існують $z_k \in Z_k$ такі, що $z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$. Враховуючи нерівність (3), маємо $\|z\| = |\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k = M < \infty$. Звідси випливає, що множина S міститься в замкненому крузі скінченного радіуса M з центром в початку координат і, значить, є обмеженою. Лему доведено.

При дослідженні властивостей Σ-множини $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ зручно використовувати так звані циліндри (циліндричні множини), в сенсі наступного означення.

Означення 3. Нехай $(c_1, \dots, c_k)$ – фіксований упорядкований набір, де $c_j \in I_j$ $(j = \overline{1, k})$. Циліндром рангу k з основою $c_1 \dots c_k$ називається множина

$$S_{c_1 \dots c_k} = \{x = \sum_{m=1}^{\infty} z_{i_m m} : \ i_m = c_m \ (m = 1, \dots, k), \ z_{i_m m} \in Z_m\}. \quad (6)$$

Циліндри є компактними, а також володіють наступними властивостями: 1) $S_{c_1 \dots c_k c_{k+1}} \subset S_{c_1 \dots c_k}$; 2) $S = \bigcup\limits_{(c_1, \dots, c_k)} S_{c_1 \dots c_k}$; 3) циліндри одного рангу є конгруентними; 4) $d(S_{c_1 \dots c_k}) \leq \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m)$; 5) циліндр k-го рангу повністю міститься в замкненому крузі радіуса $R_k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m)$ (якщо циліндри є центрально-симетричними, то $R_k = \frac{1}{2} \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m)$); 6) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_{c_1 \dots c_k} = \{\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{c_k k}\}$.

Доведемо, наприклад, четверту властивість. Нехай $S_{c_1 \dots c_k}$ – довільний циліндр k-го рангу. Оскільки $S_{c_1 \dots c_k}$ компактна множина, то існують точки $z', z'' \in S_{c_1 \dots c_k}$ такі, що $d(S_{c_1 \dots c_k}) = |z'' - z'|$. З належності точок z', z'' множині $S_{c_1 \dots c_k}$ випливає існування таких послідовностей $(i_1, \dots, i_m, \dots)$ та $(j_1, \dots, j_m, \dots)$, $i_m, j_m \in I_m$, $i_1 = j_1 = c_1, \dots, i_k = j_k = c_k$, що $z' = \sum\limits_{m=1}^{\infty} z_{i_m m}$, $z'' = \sum\limits_{m=1}^{\infty} z_{j_m m}$. Тоді $d(S_{c_1 \dots c_k}) = |z'' - z'| = |\sum\limits_{m=k+1}^{\infty} (z_{j_m m} - z_{i_m m})| \leq \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m)$. Що і треба було довести.

Позначимо $l(Z_k) := \min\limits_{\substack{u, v \in Z_k \\ u \neq v}} |u - v|$.

Лема 2. *Якщо для всіх натуральних k виконується нерівність*

$$l(Z_k) > \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m) \quad (7)$$

(або $l(Z_k) > \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m)$ у випадку, коли всі циліндри є центрально-симетричними), то циліндри (6) *одного рангу попарно не перетинаються.*

Доведення. Нехай r–довільне фіксоване натуральне число, $S_{p_1\dots p_r}$ і $S_{q_1\dots q_r}$ – довільні циліндри r-го рангу. Оскільки $(p_1,\dots,p_r) \neq (q_1,\dots,q_r)$, то існує такий номер $s \in \{1,\dots,r\}$, що $p_j = q_j$ $(j = 1,\dots,s-1)$ і $p_s \neq q_s$. Розглянемо циліндри $S_{p_1\dots p_s}$ і $S_{q_1\dots q_s}$. За властивістю 5 циліндрів множина $S_{p_1\dots p_s}$ може бути покрита замкненим кругом радіуса $R = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum\limits_{m=s+1}^{\infty} d(Z_m)$. Позначимо цей круг ω_1. Множина $S_{q_1\dots q_s}$ є образом множини $S_{p_1\dots p_s}$ при паралельному перенесенні $t(z) = z + \sum\limits_{m=1}^{s}(z_{q_m m} - z_{p_m m}) = z + z_{q_s s} - z_{p_s s}$ (властивість 3 циліндрів). При цьому круг $\omega_2 = t(\omega_1)$ покриває множину $S_{q_1\dots q_s}$. Відстань L між центрами кругів ω_1, ω_2 дорівнює $|z_{q_s s} - z_{p_s s}|$. Позначимо $\rho(U,V)$ відстань між множинами $U,V \subset \mathbb{C}$, в тому сенсі, що $\rho(U,V) = \inf\limits_{u\in U, v\in V}|u-v|$. Очевидно, що $\rho(\omega_1,\omega_2) = \max\{0, L-2R\}$. Якщо $\delta = L - 2R > 0$, то $\rho(\omega_1,\omega_2) = \delta > 0$ і $\omega_1 \bigcap \omega_2 = \varnothing$. Враховуючи умову теореми та значення величин L та R, маємо: $\delta = |z_{q_s s} - z_{p_s s}| - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} \sum\limits_{m=s+1}^{\infty} d(Z_m) \geq l(Z_s) - \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{m=s+1}^{\infty} d(Z_m) > 0$. Таким чином, замкнені круги ω_1, ω_2 не мають спільних точок і знаходяться на відстані $\delta > 0$ один від одного. Оскільки $S_{p_1\dots p_r} \subset S_{p_1\dots p_s} \subset \omega_1$, $S_{q_1\dots q_r} \subset S_{q_1\dots q_s} \subset \omega_2$, то $\rho(S_{p_1\dots p_r}, S_{q_1\dots q_r}) \geq \rho(\omega_1,\omega_2) = \delta > 0$. Звідси випливає, що $S_{p_1\dots p_r} \bigcap S_{q_1\dots q_r} = \varnothing$. У свою чергу, з довільності вибору $r \in \mathbb{N}$ та наборів $(p_1,\dots,p_r)$ і $(q_1,\dots,q_r)$ випливає, що при виконанні умов теореми циліндри одного рангу попарно не перетинаються. Так само доводиться випадок, коли всі циліндри є центрально-симетричними. Лему доведено.

Теорема 1. *Якщо для всіх натуральних k виконується нерівність* (7)*, то множина S є: 1) цілком незв'язною; 2) континуальною.*

Доведення. 1. Нагадаємо, що множина називається цілком незв'язною, якщо компонента кожної її точки складається з однієї цієї точки [1]. Нехай z – довільна точка множини S. Позначимо C_z компоненту точки z, тобто найбільшу зв'язну підмножину множини S, що містить точку z. Оскільки $z \in S$, то існує така послідовність $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, що $z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_{a_n n}$. Тоді $z \in S_{a_1\dots a_k}$ для кожного натурального k. Нехай $I^k := \prod\limits_{m=1}^{k} I_m$, $I_a^k := I^k \setminus \{(a_1,\dots,a_k)\}$. За властивістю

2 циліндрів $S = \bigcup\limits_{(i_1,\ldots,i_k)\in I^k} S_{i_1\ldots i_k}$. Оскільки циліндри одного рангу попарно не перетинаються, то $S \setminus S_{a_1\ldots a_k} = \bigcup\limits_{(i_1,\ldots,i_k)\in I^k_a} S_{i_1\ldots i_k}$ і, значить, множина $S \setminus S_{a_1\ldots a_k}$ є замкненою як об'єднання скінченного числа замкнених множин. Крім того $S_{a_1\ldots a_k} \bigcap (S \setminus S_{a_1\ldots_k}) = \varnothing$ і $S_{a_1\ldots a_k} \bigcup (S \setminus S_{a_1\ldots_k}) = S$. Таким чином, непорожня зв'язна множина C_z міститься в об'єднанні замкнених диз'юнктних множин $S_{a_1\ldots a_k}$ і $S \setminus S_{a_1\ldots a_k}$. Як відомо [1], з цього випливає, що вона міститься лише в одній з цих множин. Враховуючи, що $z \in S_{a_1\ldots a_k} \bigcap C_z$, робимо висновок, що $C_z \subset S_{a_1\ldots a_k}$. Останнє включення має місце для довільного натурального k, тому $C_z \subset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_{a_1\ldots a_k}$. За властивістю 6 циліндрів $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_{a_1\ldots a_k} = \{\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{a_k k}\} = \{z\}$, тобто $C_z \subset \{z\}$. З іншого боку, $\{z\} \subset C_z$, тому $C_z = \{z\}$, що і треба було довести.

2. Відповідність σ (5) є сюр'єктивним відображенням множини I на множину S. Покажемо, що якщо виконується нерівність (7), то відображення σ буде також і ін'єктивним, тобто для довільних $i, j \in I$ якщо $i \neq j$, то $\sigma(i) \neq \sigma(j)$. Дійсно, якщо $i = (i_1, \ldots, i_k, \ldots)$, $j = (j_1, \ldots, j_k, \ldots)$, то нерівність $i \neq j$ означає, що існує такий номер p, що $i_p \neq j_p$. Тоді $\sigma(i) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{i_k k}$ та $\sigma(j) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{j_k k}$ належать різним циліндрам p-го рангу – $S_{i_1\ldots i_p}$ та $S_{j_1\ldots j_p}$ відповідно. З умови теореми та твердження леми 2 випливає, що $S_{i_1\ldots i_p} \cap S_{j_1\ldots j_p} = \varnothing$ і, значить, $\sigma(i) \neq \sigma(j)$. Таким чином, при виконанні умови теореми відображення σ є бієктивним. Значить, множини I та S мають однакову потужність. Покажемо, що множина I континуальна. Для цього спочатку відмітимо, що з умови теореми випливає виконання для всіх натуральних k нерівності $d(Z_k) \geq l(Z_k) > \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m)$. Тобто $d(Z_k) > 0$ для всіх натуральних k. Звідки маємо, що кожна з множин Z_k містить принаймні два різних елемента. Тоді для множин індексів I_k маємо включення $\{1, 2\} \subset I_k \subset \mathbb{N}$, з якого, у свою чергу, випливає наступне:

$$\{1, 2\}^{\mathbb{N}} \subset \prod_{k=1}^{\infty} I_k \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}. \tag{8}$$

Множина $\{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ складається з усіх можливих послідовностей чисел 1 і 2, а множина $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ – з усіх можливих послідовностей натуральних чисел. Множини $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ і $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ є континуальними, оскільки, як відомо [4], вони рівнопотужні з множиною Кантора та з множиною всіх ірраціональних чисел інтервала $(0,1)$ відповідно, які, у свою чергу, є відомими прикладами множин потужності континууму. Тоді, враховуючи включення (8), з континуальності множин $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ і $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ випливає континуальність множини $I = \prod\limits_{k=1}^{\infty} I_k$, а з нею і множини S. У випадку, коли циліндри є центрально-симетричними доведення аналогічне. Теорему доведено.

З означення Σ-множин та властивостей абсолютно збіжних рядів випливає, що для довільної Σ-множини $S = \bigoplus\limits_{j=1}^{\infty} Z_j$ має місце формула:

$$\bigoplus_{j=1}^{\infty} Z_j = \bigoplus_{\alpha \in A} \left(\bigoplus_{j \in J_\alpha} Z_j \right), \tag{9}$$

де $\{J_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – довільне розбиття множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ на непорожні диз'юнктні підмножини, тобто $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{\alpha \in A} J_\alpha, \quad J_\alpha \bigcap J_\beta = \varnothing$ для $\alpha \neq \beta$. (Множина A скінченна або зліченна і кожна множина J_α зліченна або скінченна).

Теорема 2. *Кожна Σ-множина $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ є досконалою множиною потужності континууму.*

Доведення. Спочатку доведемо, що S є континуальною. Оскільки множина S є образом множини $I = \prod\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ при сюр'єктивному відображенні σ, що задається відповідністю (5), то потужність множини S не перевищує потужність множини I. Як було показано в ході доведення другої частини теореми 1, множина I є континуальною, тому потужність множини S не перевищує потужність континууму.

Покажемо тепер, що потужність множини S не менше ніж потужність континууму. Оскільки $0 \le d(Z_k) \le 2\mu_k$ і за означенням Σ-множини ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k$ збігається, то збіжним буде і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} d(Z_k). \tag{10}$$

Згідно з означенням Σ-множини існує така нескінченна множина $A \subset \mathbb{N}$, що при $a \in A$ множина Z_a містить принаймні два елемента. Разом зі скінченністю множин Z_k це означає, що $l(Z_a) > 0$ при $a \in A$. Занумеруємо елементи множини A у порядку їх зростання: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Оскільки додатний ряд (10) збіжний, то $r_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$, де $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} d(Z_k)$ – n-й залишок ряду (10). Тому існує таке натуральне число n_1, що $l(Z_{a_1}) > \frac{2}{\sqrt{3}} r_{n_1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=n_1+1}^{\infty} d(Z_k)$. У свою чергу, оскільки A є нескінченною підмножиною множини натуральних чисел, то існує таке натуральне число k_1, що $n_1 \leq a_{k_1}$. Очевидно, що $l(Z_{a_1}) > \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=a_{k_1}+1}^{\infty} d(Z_k)$. Так само існує натуральне число n_2 таке, що $l(Z_{a_{k_1}}) > \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=n_2+1}^{\infty} d(Z_k)$ і, відповідно, натуральне число k_2 таке, що $n_2 \leq a_{k_2}$. При цьому $l(Z_{a_{k_1}}) > \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=a_{k_2}+1}^{\infty} d(Z_k)$. Продовжуючи цей процес, отримаємо нескінченну, строго зростаючу послідовність натуральних чисел: $a_1, a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_m}, \ldots$ Покладемо для зручності $k_0 = 1$ і розглянемо множину $A_1 = \{a_{k_0}, a_{k_1}, \ldots, a_{k_m}, \ldots\}$. Враховуючи правило, за яким відбирались елементи множини A_1, для множин Z_k при $k \in A_1$ маємо $l(Z_{a_{k_m}}) > \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=a_{k_m}+1}^{\infty} d(Z_k) \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=a_{k_{m+1}}}^{\infty} d(Z_k) \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{j=m+1}^{\infty} d(Z_{a_{k_j}})$, де $m = 0, 1, 2, \ldots$ Таким чином, для послідовності множин $\{Z_k\}_{k \in A_1}$ виконуються умови теореми 1 і, значить, множина $S_{A_1} := \bigoplus\limits_{k \in A_1} Z_k = \bigoplus\limits_{m=0}^{\infty} Z_{a_{k_m}}$ є континуальною. Якщо $A_1 = \mathbb{N}$, то $S_{A_1} = S$ і, значить, множина S є континуальною. Розглянемо тепер випадок, коли $A_1 \subset \mathbb{N}$, причому $A_1 \neq \mathbb{N}$. Позначимо $A_2 = \mathbb{N} \setminus A_1$ і, відповідно, $S_{A_2} := \bigoplus\limits_{k \in A_2} Z_k$ (сумування здійснюється за непорожньою множиною індексів A_2), тоді, згідно (9), маємо $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k = \bigoplus\limits_{k \in \mathbb{N}} Z_k = \bigoplus\limits_{k \in \bigcup\limits_{t=1}^{2} A_t} Z_k = \bigoplus\limits_{t=1}^{2} \left(\bigoplus\limits_{k \in A_t} Z_k \right) = S_{A_1} \oplus S_{A_2}$. Звідси, враховуючи рівність (2), маємо $S = S_{A_1} \oplus S_{A_2} = \bigcup\limits_{c \in A_2} t_c(S_{A_1})$, де $t_c(S_{A_1})$

– образ множини S_{A_1} при паралельному перенесенні $t_c(z) = z + c$. Множини $t_c(S_{A_1})$ та S_{A_1} рівнопотужні і, значить, і в цьому випадку множина S є континуальною як об'єднання непорожньої сукупності континуальних множин. Відмітимо також, що аналогічними міркуваннями можна довести континуальність кожного циліндра довільного рангу.

Тепер доведемо, що множина S досконала. Оскільки вона замкнена (теорема 1), то нам треба показати, що вона не містить ізольованих точок. Розглянемо довільну точку $p \in S$. Згідно з означенням множини S, існує така послідовність $(i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots) \in I$, що точка p має представлення виду $p = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{i_k k}$, де $z_{i_k k} \in Z_k$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і покажемо, що в ε-околі U точки p (тобто у відкритому крузі радіуса ε з центром в точці p) міститься принаймні одна точка множини S, відмінна від p. Точка p належить циліндру $S_{i_1 \ldots i_k}$ при довільному натуральному k. Згідно з властивістю 5 циліндрів, множина $S_{i_1 \ldots i_k}$ повністю міститься в замкненому крузі радіуса $R_k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m)$. Оскільки при виконанні умови теореми ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d(Z_n)$ є збіжним, то існує такий номер M, що $R_M = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum\limits_{m=M+1}^{\infty} d(Z_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді для циліндра $S_{i_1 \ldots i_M}$ буде мати місце включення $S_{i_1 \ldots i_M} \subset U$. Оскільки $S_{i_1 \ldots i_M}$ є континуальною підмножиною множини S, то існує принаймні одна точка $p' \in S_{i_1 \ldots i_M} \subset S$, яка відмінна від p і належить U (зрозуміло, що таких точок буде навіть континуальна множина). Тобто p не є ізольованою точкою множини S. З довільності вибору точки p випливає, що множина S не містить ізольованих точок. Теорему доведено.

3 Метричні властивості Σ-множин

Спочатку доведемо теорему, яка дає альтернативний спосіб подання Σ-множини S виду (4). При доведенні нами буде використана метрика Хаусдорфа, тому нагадаємо її означення та основні властивості [5, 12].

Нехай X, Y – дві непорожні замкнені та обмежені підмножини метричного простору (M, ρ). Тоді відстань за Хаусдорфом, $h(X, Y)$, між X і Y, що індукована метрикою ρ, визначається рівністю $h(X,Y) := \inf\{\varepsilon \geq 0 : \ X \subseteq Y_\varepsilon, \ Y \subseteq X_\varepsilon\}$, де $X_\varepsilon := \{y : y \in M, \ \rho(y, X) \leq \varepsilon\}$,

$Y_\varepsilon := \{x : x \in M,\ \rho(x, Y) \le \varepsilon\}$.

Якщо простір M повний і 2^M – множина всіх компактних підмножин M, то хаусдорфова відстань між підмножинами є метрикою в 2^M. Властивості метрики Хаусдорфа: 1) $h(\bigcup\limits_{i\in I} A_i, \bigcup\limits_{i\in I} B_i) \le \sup\limits_{i\in I} h(A_i, B_i)$, 2) якщо $A \subset B$, то $h(A, B) \le d(B)$, де $d(B)$ – діаметр множини B, 3) якщо $X \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, то $h(X, \bigcup\limits_{i\in I} A_i) \le \sup\limits_{i\in I} d(A_i)$.

Теорема 3. *Нехай задано сім'ю компактних множин* $\{B_{i_1\ldots i_k}\}$ $(i_k \in I_k,\ k \in \mathbb{N})$, *які володіють властивостями: 1)* $B_{i_1\ldots i_k} \supset S_{i_1\ldots i_k}$, *2)* $B_{i_1\ldots i_k i_{k+1}} \subset B_{i_1\ldots i_k}$, *3)* $\lim\limits_{k\to\infty} d(B_{i_1\ldots i_k}) = 0$. *Тоді множина* S *може бути подана наступним чином:*

$$S = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{(i_1,\ldots,i_k)} B_{i_1\ldots i_k}. \qquad (11)$$

Доведення. Множини $B^k := \bigcup\limits_{(i_1,\ldots,i_k)} B_{i_1\ldots i_k}$, як це випливає з властивості 2 множин $B_{i_1\ldots i_k}$, утворюють монотонно спадну послідовність: $B^1 \supset B^2 \supset \ldots \supset B^k \supset \ldots$ Тому існує границя послідовності $\{B^k\}$, причому $\operatorname*{lt}\limits_{k\to\infty} B^k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B^k$. Покажемо, що ця границя співпадає з множиною S. Відмітимо спочатку, що множини B^k $(k \in \mathbb{N})$ є компактними як скінченні об'єднання компактних множин. Згідно з теоремою (1) множина S також є компактною. У просторі всіх компактних підмножин комплексної площини топологічна збіжність послідовності $\{B^k\}$ до границі S рівносильна збіжності в метриці Хаусдорфа. Оскільки

$$h(B^k, S) = h(\bigcup_{(i_1,\ldots,i_k)} B_{i_1\ldots i_k}, \bigcup_{(i_1,\ldots,i_k)} S_{i_1\ldots i_k}) \le \sup_{(i_1,\ldots,i_k)} h(B_{i_1\ldots i_k}, S_{i_1\ldots i_k}) \le$$
$$\le \sup_{(i_1,\ldots,i_k)} d(B_{i_1\ldots i_k}) \to 0 \quad (k \to \infty),$$

то маємо $S = \operatorname*{lt}\limits_{k\to\infty} B^k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B^k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{(i_1,\ldots,i_k)} B_{i_1\ldots i_k}$. Теорему доведено.

Зауваження 1. У самій теоремі ми не доводили існування для Σ-множини S сім'ї множин $\{B_{i_1\ldots i_k}\}$ з відповідними властивостями. Очевидно, що такими, наприклад, є опуклі оболонки циліндрів $S_{i_1\ldots i_k}$.

Теорема 4. *Для двовимірної міри Лебега λ Σ-множини S виконується рівність*

$$\lambda(S) = \lim_{k\to\infty} \lambda(B^k) = \lim_{k\to\infty} \lambda(\bigcup_{(i_1,\dots,i_k)} B_{i_1\dots i_k}), \qquad (12)$$

де множини $B_{i_1\dots i_k}$ задовольняють умови попередньої теореми.

Доведення. Множина S, циліндри $S_{i_1\dots i_k}$ та множини $B_{i_1\dots i_k}$ є вимірними за Лебегом як компактні множини. Так само, вимірними є і множини $B^k = \bigcup\limits_{(i_1,\dots,i_k)} B_{i_1\dots i_k}$ $(k \in \mathbb{N})$. Крім того, множини B^k утворюють спадну послідовність: $B^1 \supset B^2 \supset \dots \supset B^k \supset \dots$, причому, згідно теореми 3, виконується рівність $S = \operatorname*{lt}\limits_{k\to\infty} B^k$. З даної рівності, вимірності множин B^k та неперервності міри Лебега і випливає рівність (12).

Наслідок 1. *Якщо для Σ-множини $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ виконується рівність $\lim\limits_{k\to\infty} \prod\limits_{j=1}^{k} m_j \left(\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} d(Z_n)\right)^2 = 0$, де m_j – кількість елементів множини Z_j, $d(Z_n)$ – діаметр множини Z_n $(j, n = 1, 2, \dots)$, то множина S має нульову двовимірну міру Лебега.*

Лема 3. *Нехай Σ-множина $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ задовольняє наступним умовам: а) всі множини Z_k лежать на одній прямій $l \subset \mathbb{C}$, яка проходить через початок координат; б) для всіх натуральних k виконується нерівність*

$$d(Z_k) \leq \sum_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m). \qquad (13)$$

Тоді множина S є відрізком (на прямій l).

Доведення. Без втрати загальності можна вважати, що l є дійсною віссю комплексної площини. Для зручності занумеруємо елементи z_{ik} множин Z_k за першим індексом у порядку зростання: $z_{ik} < z_{i+1,k}$ $(i = 1, \dots, m_k - 1)$. Як випливає з теореми 3 та зауваження 1, множину S

можна подати у вигляді $S=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{(i_1,\dots,i_k)}\mathrm{conv}S_{i_1\dots i_k}$. Покажемо, що множина $H_k:=\bigcup\limits_{(i_1,\dots,i_k)}\mathrm{conv}S_{i_1\dots i_k}$ при виконанні нерівності (13) є відрізком, причому одним і тим же для всіх k. Зафіксуємо довільний впорядкований набір $(j_1,\dots,j_{k-1})\in\prod\limits_{p=1}^{k-1}I_p$ (нагадаємо, що $I_p=\{1,\dots,m_p\}$ – множина перших індексів елементів множини Z_p) і розглянемо сукупність опуклих оболонок циліндрів $S_{j_1\dots j_{k-1}1},\dots,S_{j_1\dots j_{k-1}m_k}$. Оскільки в даному випадку циліндри є компактними підмножинами дійсної осі, то $\mathrm{conv}S_{i_1\dots i_k}$ є відрізком $[\min S_{i_1\dots i_k},\max S_{i_1\dots i_k}]$. З означення та властивостей циліндрів, а також нашої домовленості про нумерацію елементів множин Z_k випливають рівності

$$\min S_{i_1\dots i_k}=\sum_{p=1}^{k}z_{i_pp}+\sum_{p=k+1}^{\infty}z_{1p},\quad \max S_{i_1\dots i_k}=\sum_{p=1}^{k}z_{i_pp}+\sum_{p=k+1}^{\infty}z_{m_pp}. \tag{14}$$

Зафіксуємо довільні $s,t\in I_k$ та розглянемо відрізки $\mathrm{conv}S_{j_1\dots j_{k-1}s}$ і $\mathrm{conv}S_{j_1\dots j_{k-1}t}$. Якщо виконується нерівність (13), то, враховуючи (14), одержимо: $\max S_{j_1\dots j_{k-1}s}-\min S_{j_1\dots j_{k-1}t}\ge -d(Z_k)+\sum\limits_{p=k+1}^{\infty}d(Z_p)\ge 0$.

З останньої нерівності випливає, що $\mathrm{conv}S_{j_1\dots j_{k-1}s}\bigcap\mathrm{conv}S_{j_1\dots j_{k-1}t}\neq\varnothing$. Тоді, у свою чергу, множина $Q_{j_1\dots j_{k-1}}:=\bigcup\limits_{j_k=1}^{m_k}\mathrm{conv}S_{j_1\dots j_{k-1}j_k}$ також буде відрізком (як об'єднання скінченного числа відрізків, кожні два з яких мають непорожній переріз). Очевидно, що $\min Q_{j_1\dots j_{k-1}}=\min S_{j_1\dots j_{k-1}}$, $\max Q_{j_1\dots j_{k-1}}=\max S_{j_1\dots j_{k-1}}$. Тоді $Q_{j_1\dots j_{k-1}}=\mathrm{conv}S_{j_1\dots j_{k-1}}$.

Отже, при виконанні умов леми виконується рівність $\bigcup\limits_{j_k=1}^{m_k}\mathrm{conv}S_{j_1\dots j_{k-1}j_k}=\mathrm{conv}S_{j_1\dots j_{k-1}}$. Використовуючи дану рівність, отримаємо $H_k=\mathrm{conv}S$ $(\forall k\in\mathbb{N})$, звідки випливає, що $S=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}H_k=\mathrm{conv}S$. Оскільки S є компактною підмножиною числової прямої, то $\mathrm{conv}S$ є відрізком. Лему доведено.

Розглянемо довільну Σ-множину $S=\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty}Z_k$. Нехай також задано дві нескінченні диз'юнктні підмножини множини натуральних чисел $\mathbb{N}$: $A_1=\{a_{11},a_{12},\dots,a_{1k},\dots\}$, $A_2=\{a_{21},a_{22},\dots,a_{2k},\dots\}$.

Теорема 5. *Якщо множини $Z_{a_{ik}}$ задовольняють умови:*

1) $Z_{a_{ik}} \subset l_i$, де $l_i \subset \mathbb{C}$ $(i = 1, 2)$ – прямі, які мають рівно одну спільну точку – початок координат;

2) для всіх $k \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $d(Z_{a_{ik}}) \le \sum\limits_{p=k+1}^{\infty} d(Z_{a_{ip}})$ $(i = 1, 2)$;

то множина S має додатну міру Лебега.

Доведення. Нехай $A_3 := \mathbb{N} \setminus (A_1 \cup A_2)$. Тоді, оскільки $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{j=1}^{3} A_j$ і $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, згідно (9), маємо рівність

$$S = \bigoplus_{j=1}^{3} \left(\bigoplus_{k \in A_j} Z_k \right). \tag{15}$$

З умов теореми та леми 3 випливає, що множини $S_{A_j} := \bigoplus\limits_{k \in A_j} Z_k$ при $j = 1, 2$ є відрізками (розташованими на відповідних прямих l_j $(j = 1, 2)$). Оскільки прямі l_1 і l_2 непаралельні та не співпадають, то арифметична сума $S_{A_1} \oplus S_{A_2}$ є невиродженим паралелограмом. З (15) та геометричної інтерпретації векторної суми множин випливає рівність $S = \bigoplus\limits_{j=1}^{3} S_{A_j} = (S_{A_1} \oplus S_{A_2}) \oplus S_{A_3} = \bigcup\limits_{v \in S_{A_3}} t_v(P)$, де $P = S_{A_1} \oplus S_{A_2}$, $t_v(z) = z + v$ $(z \in \mathbb{C})$ – трансляція (паралельне перенесення) на вектор v.

Таким чином, множина S є або невиродженим паралелограмом (при $A_3 = \varnothing$), або об'єднанням конгруентних невироджених паралелограмів (при $A_3 \neq \varnothing$). Звідки випливає, що S має внутрішні точки і, відповідно, додатну двовимірну міру Лебега. Теорему доведено.

Приклад. Розглянемо ряд з комплексними членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\lambda^k$, де $\lambda = \alpha + i\beta$, $|\lambda| < 1$. Позначимо S_λ множину його неповних сум [2], тобто $S_\lambda := \{z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k k\lambda^k : \ \varepsilon_k \in \{0, 1\}\}$. Множина S_λ є Σ-множиною, оскільки може бути подана у вигляді нескінченної арифметичної суми двоелементних множин: $S_\lambda = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} \Lambda_k$, де $\Lambda_k = \{0, k\lambda^k\}$. У цьому випадку $l(\Lambda_k) = d(\Lambda_k) = k|\lambda|^k$. Нехай $r_k = \sum\limits_{j=k+1}^{\infty} k|\lambda|^k$. Можна показати, що $r_k = -\frac{|\lambda|^{k+1}(k(|\lambda|-1)-1)}{(|\lambda|-1)^2}$. Множини Λ_k є центрально-симетричними, тому такими будуть і всі циліндри. Різниця $l(\Lambda_k) - \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(\Lambda_m) = \frac{|\lambda|^k}{(|\lambda|-1)^2}((k-1)(|\lambda|-1)(2|\lambda|-1) - |\lambda|)$ є додатною при $|\lambda| < \frac{1}{2}$ та $k > 1 + \frac{|\lambda|}{(|\lambda|-1)(2|\lambda|-1)}$. Позначимо $k_0 = [1 + \frac{|\lambda|}{(|\lambda|-1)(2|\lambda|-1)}]$, де $[x]$ – ціла частина числа x. Тоді, згідно теореми 1, множина $\bigoplus\limits_{k=k_0+1}^{\infty} \Lambda_k$ є цілком незв'язною при $|\lambda| < \frac{1}{2}$. Відповідно, множина $S_\lambda = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} \Lambda_k$ є об'єднанням скінченного числа конгруентних цілком незв'язних множин.

2. Нехай $\lambda = \rho e^{\frac{2\pi i}{s}}$, де $0 < \rho < 1$, $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 3$. Згідно (9) множину S_λ можна подати у вигляді наступної арифметичної суми: $S_\lambda = S_{A_1} \oplus S_{A_2} \oplus \cdots \oplus S_{A_s}$, де $S_{A_t} = \bigoplus\limits_{k \in A_t} \Lambda_k$, $A_t = \{n \in \mathbb{N} : \ n \equiv t(\mathrm{mod} s)\}$, $t = \overline{1, s}$. Тоді $S_{A_t} = e^{\frac{2\pi t i}{s}} R_t$, де $R_t = \{\sum\limits_{k \in A_t} \varepsilon_k k \rho^k : \ \varepsilon_k \in \{0, 1\}\}$, $t = \overline{1, s}$. Множина R_t є множиною неповних сум знакододатного ряду $\sum\limits_{j=0}^{\infty}(t + js)\rho^{t+js}$. Як відомо [11] вона буде відрізком, якщо для всіх $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ виконується нерівність $(t + ns)\rho^{t+ns} \leq \sum\limits_{j=n+1}^{\infty}(t + js)\rho^{t+js}$, яка, в свою чергу, виконується при $\frac{1}{2} \leq \rho^s < 1$. Тоді, при $\sqrt[s]{\frac{1}{2}} \leq \rho < 1$ відрізком буде кожна з множин $S_{A_t}(t = \overline{1, s})$. При цьому, при $s \geq 3$ серед відрізків $S_{A_t}(t = \overline{1, s})$ буде принаймні два непаралельних, тому арифметична сума $\bigoplus\limits_{t=1}^{s} S_{A_t}$ є многокутником. Отже, при $\sqrt[s]{\frac{1}{2}} \leq |\lambda| < 1$ та $\arg(\lambda) = \frac{2\pi}{s}$, де $s \geq 3$ – фіксоване натуральне число, множина S_λ є многокутником.

Література

[1] *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. – М. : Наука, 1977. – 368 с.

[2] *Гончаренко Я.В., Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Топологометричні і фрактальні властивості множини неповних сум знакододатного ряду та розподілів на ній // Науковий часопис НПУ

імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2005. – № 6. – С. 210-224.

[3] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М. : Наука, 1972. – 496 с.

[4] *Куратовский К.* Топология. – М. : Мир, 1966. – т.1. – 594 с.

[5] *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества: Пер. с нем. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 336 с.

[6] *Лукач Е.* Характеристические функции. – М. : Наука, 1979. – 424 с.

[7] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, Київ. – 1998. – 296 с.

[8] *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. – М. : ОНТИ, 1937. – 305 с.

[9] *Шварц Л.* Анализ. – М. : Мир, 1972. – т.1. – 838 с.

[10] *Школьний О.В., Працьовитий М.В.* Один клас сингулярних комплекснозначних випадкових величин типу Джессена-Вінтнера // Укр.мат.журнал, 1997.— **49**, *№* 12.— С.1653-1660.

[11] *Guthrie J. A., Nymann J. E.* The topological structure of the set of subsums of an infinite series // Colloq. Math. – 1988. – **55**. – P. 323–327.

[12] *Hutchinson J.E.*(1981) Fractals and self-similarity, Indiana Univ. Math. J., 30, 713-747.

[13] *Kakeya S.* On the partial sums of an infinite series // Science Reports Tôhoku Imp. Univ. – 1914. – **1**, № 3. – P. 159-163.

[14] *Mendes P., Oliveira F.* On the topological structure of the arithmetic sum of two Cantor sets, Nonlinearity 7 (1994), P. 329-343.

[15] *Solomyak B.* On the measure of arithmetic sums of Cantor sets, Indagationes Math., N.S. 8 (1997), P. 133-141.

Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 278–336

УДК 517.9+531.19+530.145

О.Л. Ребенко, В.А. Болух

(Інститут математики НАН України, Київ)

rebenko@imath.kiev.ua

Нескінченновимірний аналіз і статистична механіка

Присв'ячується 80-річчю з дня народження академіка Д.Я. Петрини

This paper discusses the mathematical aspects of the description of infinite systems of statistical mechanics and their relation to the infinite-dimensional analysis on phase spaces of such systems.

В роботі розглядаються математичні аспекти опису нескінченних систем статистичної механіки та їх зв'язок з нескінченновимірним аналізом на фазових просторах таких систем.

1 Вступ

Статистична механіка виникла в кінці XIX – на початку XX століття в роботах Больцмана, Гіббса, Максвелла. Мета цієї, на той час нової, науки було створення математичного апарату для дослідження систем, що складаються з надзвичайно великої кількості елементів. Такі фізичні системи моделюють гази, рідини, кристали, а також можуть описувати взаємодії у великих біологічних, екологічних, економічних системах тощо.

© **Institute of Mathematics, 2014**

Звичайно, на перший погляд, усі відомі системи, які ми намагаємося вивчити, є скінченними. Наприклад, газ у колбі має скінченне число атомів чи молекул. Але з елементарної фізики відомо, що в одному *молі* будь якої речовини міститься приблизно $6 \cdot 10^{23}$ молекул (закон Авогадро). Отже, навіть в невеликому об'ємі $1cm^3$ міститься 10^{23} – 10^{25} молекул. Тому здоровий глузд нам підкаже, що слідкувати за такою кількістю частинок це те саме, що слідкувати за нескінченною кількістю частинок.

Отже, нескінченні системи є деякою математичною ідеалізацією великих скінченних систем, яку зручно застосувати при вивченні реальних великих систем.

Реальна фізична чи біологічна система у кожний момент часу t займає якусь конфігурацію $\widetilde{\gamma}(t)$ фазового простору $\widetilde{\Gamma}$. Під впливом внутрішніх або ще й зовнішніх взаємодій така система перебуває у постійному русі, тобто кожна частинка описує якусь неперервну траєкторію, а мікроскопічний стан усієї системи визначається усіма такими траєкторіями. Але для дослідження системи необхідно знати не мікроскопічну поведінку, а макроскопічні наслідки такої поведінки, тобто деякі макроскопічні характеристики: тиск, енергія, теплоємність тощо. Такі фізичні характеристики називають *спостережуваними величинами*. Спостережувані величини описують вимірними функціями на фазовому просторі, тобто для нескінченних систем це функції від нескінченної кількості змінних. Про те, яким чином будувати такі функції, ми будемо говорити пізніше. Нехай $F(\widetilde{\gamma}(t))$ є такою функцією, яка описує деяку спостережувану величину. Тоді макроскопічна характеристика, яка їй відповідає, і яку ми можемо спостерігати на експерименті, є середнє значення цієї величини. Воно обраховується за відомою формулою:

$$\overline{F} := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(\widetilde{\gamma}(t))dt. \tag{1}$$

Обрахувати такий інтеграл для реальної системи неможливо.

На початку XX століття американський фізик-теоретик Джозайя

Віллард Гіббс запропонував замість однієї системи ввести ансамбль тотожних систем, які кожної миті з якоюсь ймовірністю займають ту чи іншу конфігурацію. Такі однакові екземпляри систем отримали назву *ансамблів Гіббса.*

Основним постулатом Гіббса є існування деякої імовірнісної міри μ на фазовому просторі $\widetilde{\Gamma}$:

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} \mu(d\widetilde{\gamma}) \ = \ 1, \tag{2}$$

такої, що

$$\overline{F} =< F(\cdot) >_{\mu} = \int_{\widetilde{\Gamma}} F(\widetilde{\gamma})\mu(d\widetilde{\gamma}). \tag{3}$$

Таким чином, замість детерміністичного опису однієї системи ми розглядаємо статистичний опис поведінки ансамблю ідентичних систем.

Фізичне обґрунтування вигляду такої міри в обмеженому об'ємі було запропоновано Гіббсом ще у 1902 році [1].

Перша половина XX століття була епохою народження квантової механіки. Дослідження із статистичної механіки були досить спонтанними і в більшій мірі відносились до практичних застосувань. Серед результатів, які можна віднести саме до розвитку фундаментальних досліджень статистичної механіки, варто відзначити появу у 1929 році монографії [2] та вивід BBGKY- ієрархії [3, 4, 5, 6]. Математичні обґрунтування існуючих на той час досліджень із статистичної механіки були висвітлені в монографії А. Я. Хінчіна [7].

Надзвичайно важливими для теорії гратчастих моделей були роботи Е. Ізінга [8], Р. Е. Пайерлса [9] та Л. Онзагера [10], які на декілька десятиліть наперед визначили напрямки досліджень у цій області і сприяли появі моделі *гратчастого газу* [11].

В 1946 р. в монографії М. М. Боголюбова [4] були намічені шляхи математичного обґрунтування термодинамічного граничного переходу в рамках формалізму канонічного ансамблю Гіббса, а також розроблений загальний метод знаходження граничних m-частинкових функцій розподілу (*кореляційних функцій*) у вигляді формальних рядів за степенями густини частинок у системі. Строге обґрунтування збіжності таких рядів для випадку позитивного парного потенціалу взаємодії було опубліковане в роботі [12] (див. детальне доведення в [13]). Узагальнення цих результатів на випадок парних стійких потенціалів взаємодії були зроблені в роботі М. М. Боголюбова, Д. Я. Петрини і Б. І. Хацета [14]. В 1963 р. Д. Рюель [66] знову запропонував подібний метод, який спирався на дослідженні рівнянь Кірквуда-Зальцбурга для кореляційних функцій великого канонічного ансамблю. Треба також згадати роботу [16], в якій проблема термодинамічної границі була вирішена для термодинамічних потенціалів і яка, фактично, узагальнювала дослідження Ван-Хова [17] і Янга-Лі [18] на випадок більш загальних потенціалів взаємодії. Ці роботи були значним поштовхом для математичних досліджень нескінченних розріджених систем статистичної механіки. Вони були детально викладені в монографії [19], де також можна знайти значну бібліографію робіт інших авторів (див. також лекції Мінлоса [20] та монографію [21] і посилання, що містяться в них).

Але побудова стану в розумінні ідеї Гіббса для нескінченної системи ще залишалась відкритою проблемою. Вперше цю проблему розглянули у 1967 році незалежно Р. А. Мінлос [22, 23] і Д. Рюель [24]. Якщо у Рюеля це був алгебраїчний підхід, що опирався на модні на той час ідеї Сігала, Хаага, Кастлера і тому був більш абстрактним, то Мінлос побудував сімейство гіббсових мір на циліндричних множинах нескінченновимірного конфігураційного простору і визначив гіббсовий стан (гіббсову міру) як граничну міру. Ця міра будувалась як продовження цього сімейства на всю σ-алгебру нескінченновимірного простору конфігурацій.

В серії робіт Добрушина [25, 26, 27, 28, 29, 30] було приведене більш загальне визначення гіббсової міри за допомогою умовних розподілів. Практично в той же час майже аналогічний підхід був також запропонований Ленфордом і Рюелем [31]. Критерієм гіббсовості міри на просторі нескінченних конфігурацій є умова, що вона задовольняє рівняння Добрушина-Ленфорда-Рюеля (ДЛР). Ключовою у цьому підході була робота Рюеля [32], в якій була визначена система з надстійкою взаємодією і встановлено, що граничні кореляційні функції такої системи задовольняють нерівності:

$$\rho_m(x_1, ..., x_m) \ \leq \xi^m \tag{4}$$

при довільних значеннях густини частинок в системі і довільній температурі. Це дає змогу довести, що нескінченна послідовність кореляційних функцій $\rho = (\rho_m)_{m \geq 1}$ задовольняє систему рівнянь Кірквуда-Зальцбурга при довільних значеннях густини частинок в системі і довільній температурі, а відповідна міра Гіббса задовольняє рівняння ДЛР. Для розріджених систем (тобто при малих значеннях густини частинок в системі) рівняння Кірквуда-Зальцбурга мають єдиний розв'язок, якому відповідає єдиний гіббсовий стан. Взагалі, умова (4) не є необхідною. В роботі [33] А. Ленард показав, що для існування відповідної міри достатньо виконання більш слабкої умови:

$$\rho_m(x_1, ..., x_m) \ \leq \xi^m m^{2m}. \tag{5}$$

В роботах [34, 35] Ленард детально проаналізував зв'язки довільної міри μ на просторі нескінченних конфігурацій з її кореляційною мірою ρ, яка визначається на просторі скінченних конфігурацій. Деякі аспекти цього аналізу та його узагальнення були продовжені в роботі [36].

Основна мета цього короткого огляду продемонструвати глибокий зв'язок математичного опису нескінченних систем статистичної механіки і методів нескінченновимірного аналізу на фазових просторах таких систем. Мабуть, вперше аналіз конфігураційних просторів та квазінваріантних мір (такими є міра Пуассона та міра Гіббса) на них розглянули А. М. Вершик, І. М. Гельфанд і М. І. Граєв [37] та Р. С. Ісмагілов [38]. В більш пізніх роботах С. Албаверіо, Ю. Г. Кондратьєва і М. Рьокнера [39, 40] був зроблений детальний теоретико-множинний аналіз цих просторів та введені структури диференціальної геометрії. Там же читач може знайти детальну бібліографію робіт за цією тематикою та її застосування в математичній фізиці.

Важливим кроком вперед була поява нових технічних інструментів для побудови кластерних та полімерних розкладів в статистичній механіці. Так, в роботі [41] було помічено, що використання властивості нескінченноподільності міри Пуассона в побудові кластерних розкладів для кореляційних функцій значно спрощує саму побудову і оцінки коефіцієнтів розкладу. Ця властивість була використана в роботах [42, 43, 44, 45, 46, 47]. В роботі [48] були запропоновані нові розклади за щільністю конфігурацій. Якщо розбити простір $\mathbb{R}^d$ на маленькі гіперкуби, то для кожної конфігурації весь простір розіб'ється на області, в яких у кожному кубику міститься дві і більше точок конфігурації (*щільні конфігурації*) і області, в яких є тільки одна точка в кожному кубику, або їх зовсім немає(*розріджені конфігурації*). Звичайно, це досить умовне розбиття, бо якщо розміри кубиків є досить маленькі, то навіть області з розрідженими конфігураціями будуть мати щільну множину точок. Тепер, якщо потенціал взаємодії має сильну позитивну сингулярність в нулі, то ймовірність щільних конфігурацій є малою. Цей елементарний факт був використаний для побудови розкладів. За допомогою таких розкладів вдалося значно спростити доведення суперстійкої оцінки Рюеля (4) і навіть трохи її покращити (див. роботи [48, 49, 50, 51]). Виявилося також, що для розрахунків основних термодинамічних потенціалів та кореляційних функцій нескінченних систем достатньо розглядати ці функції тільки на розріджених конфігураціях (див. [52, 53, 54]), розглядаючи їх як апроксимацію відповідних функцій неперервних нескінченних систем класичної статистичної механіки з посилено надстійкою взаємодією [55]. Це, в свою чергу, дає можливість розглядати нескінченну систему частинок, конфігураційний простір якої складається з розріджених конфігурацій, як самостійну модель *коміркового газу* [56]. Ця модель є проміжною між моделями *гратчастих газів* і неперервними системами статистичної механіки.

2 Простори конфігурацій систем статистичної механіки

В роботі буде розглядатися нескінченна система тотожних точкових частинок у просторі $\mathbb{R}^d$, взаємодію яких будемо описувати парним потенціалом $V_2(x, y) = \phi(|x - y|)$, $x, y \in \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Ми не будемо детально розглядати теоретико-множинну та топологічну структуру просторів конфігурації, відсилаючи читача до вже згаданих робіт [20, 34, 35, 36, 37, 39, 40], а лише наведемо необхідні визначення та деякі основні властивості цих просторів.

2.1 Простори нескінченних конфігурацій

Нехай σ – це міра Лебега в $\mathbb{R}^d$. Позначимо через $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, борелівську σ-алгебру відкритих множин в $\mathbb{R}^d$, а через $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ усі підмножини, що мають компактне замикання. *Конфігураційний простір* $\Gamma := \Gamma_{\mathbb{R}^d}$ буде складатися з усіх локально скінченних підмножин простору $\mathbb{R}^d$, тобто

$$\Gamma = \Gamma_{\mathbb{R}^d} := \left\{ \gamma \subset \mathbb{R}^d \middle| \, |\gamma \cap \Lambda| < \infty, \text{ для всіх } \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d) \right\}, \tag{6}$$

де $|A|$ є число, що означає кількість точок в A. Це досить природне визначення з точки зору застосувань, оскільки в обмеженому об'ємі не може знаходитися нескінченна кількість частинок. З визначення (6) видно, що Γ не є лінійним простором. Але Γ можна зробити топологічним нелінійним простором: кожний елемент $\gamma \in \Gamma$ можна ототожнити з невід'ємною мірою Радона:

$$\Gamma \ni \gamma \mapsto \sum_{x \in \gamma} \delta_x \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d), \tag{7}$$

де δ_x–міра Дірака:

$$\delta_x(f) = f(x), \quad f \in C_0(\mathbb{R}^d), \tag{8}$$

де $C_0(\mathbb{R}^d)$–простір неперервних функцій з компактним носієм, а $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$–простір невід'ємних мір Радона на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Відповідна диференціальна міра

$$\gamma(d\sigma) \ = \ \sum_{x\in\gamma}\delta_x d\sigma, \ \ d\sigma = \sigma(dx) = dx. \tag{9}$$

Простір Γ можна наділити топологією, яка індукована грубою (*vague*) топологією в $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$, що визначається як найслабша топологія, по відношенню до якої відображення

$$\Gamma \ \ni \ \gamma \mapsto < \gamma, f > = \ \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\gamma(d\sigma) \ = \ \sum_{x\in\gamma} f(x) \tag{10}$$

є неперервним для кожної $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Нехай $\mathcal{B}(\Gamma)$ відповідна борелівська σ-алгебра на Γ.

Можна навести еквівалентний (може більш прозорий) опис цієї топології на мові збіжності послідовності конфігурацій $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ до конфігурації $\gamma \in \Gamma$.

Означення 2.1. Послідовність γ_n збігається до $\gamma \in \Gamma$ тоді і тільки тоді, коли для будь якого $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, такої, що $\gamma \cap \partial\Lambda = \emptyset$ ($\partial\Lambda$ – це межа Λ) має місце

$$\lim_{n\to\infty} |\gamma_n \cap \Lambda| \ = \ |\gamma \cap \Lambda|. \tag{11}$$

Передбазою в цій топології є множини вигляду:

$$\{\gamma \in \Gamma \ | \ \ |\gamma_\Lambda| = N, \ \gamma_{\partial\Lambda} = \emptyset, \ \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d), \ N \in \mathbb{N}_0\}. \tag{12}$$

$\mathcal{B}(\Gamma)$ є найменша σ-алгебра на Γ, по відношенню до якої усі відображення

$$N_\Lambda \ : \ \Gamma \mapsto \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} \ ; \ \gamma \mapsto |\gamma \cap \Lambda| \tag{13}$$

є вимірними для будь якого $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, тобто

$$\mathcal{B}(\Gamma) \ = \ \sigma\left(\{N_\Lambda \ : \ \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)\}\right) \tag{14}$$

Для довільної підмножини $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, але $Y \notin \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, визначимо простір нескінченних конфігурацій Γ_Y:

$$\Gamma_Y \ = \ \{\gamma \in \Gamma \ \ | \ \ \gamma \cap Y^c = \varnothing, \ Y^c := \mathbb{R}^d \setminus Y. \tag{15}$$

На завершення цього підрозділу зауважимо, що якщо частинки системи не мають інших характеристик (крім координат, в яких вони зосереджені), то *фазовий простір* системи збігається з конфігураційним простором Γ. Якщо ж кожна частинка системи має ще інші характеристики, такі як імпульс, спін, заряд, тощо, тоді фазовим простором є так званий *маркований конфігураційний простір* $\widetilde{\Gamma}$ (див., наприклад, [57, 58, 59]). Ми розглянемо найбільш простий фазовий простір класичного точкового газу, кожна частинка якого в довільній точці $x \in \gamma \subset \mathbb{R}^d$ має імпульс $p_x = mv_x \in \mathbb{R}^d$. Кожна точка $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}$ – це нескінченна множина пар (x, p_x), в яких $x \in \gamma \in \Gamma$, а $p_x \in \mathbb{R}^d$:

$$\widetilde{\Gamma} := \left\{ \widetilde{\gamma} = \{(x, p_x)\} \mid x \in \gamma, \; p_x \in \mathbb{R}^d \right\}. \tag{16}$$

2.2 Простори скінченних конфігурацій

Позначимо множину усіх скінченних конфігурацій простору Γ через Γ_0. Насправді Γ_0 є підмножиною Γ, але вона буде розглядатися як самостійний конфігураційний простір, в якому незалежним чином можна ввести свою топологію. Визначимо спершу конфігураційний простір з фіксованою кількістю точок:

$$\Gamma^{(n)} := \{\gamma \in \Gamma \mid |\gamma| = n, \; n \in \mathbb{N}\}, \;\; \Gamma^{(0)} := \varnothing. \tag{17}$$

Якщо усі такі конфігурації знаходяться в деякій обмеженій множині $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, то відповідний простір буде:

$$\Gamma_\Lambda^{(n)} := \left\{ \gamma \in \Gamma^{(n)} \mid \gamma \subset \Lambda \right\}. \tag{18}$$

Тоді простори скінченних конфігурацій в $\mathbb{R}^d$ і в $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ можна представити у вигляді диз'юнктивних об'єднань:

$$\Gamma_0 := \coprod_{n=0}^{\infty} \Gamma^{(n)}, \text{ і } \Gamma_\Lambda := \coprod_{n=0}^{\infty} \Gamma_\Lambda^{(n)}. \tag{19}$$

Топологічну структуру в просторах $\Gamma_X^{(n)} (X \in \{\mathbb{R}^d, \Lambda\})$ можна ввести за допомогою відображення множин

$$\widetilde{X}^n := \{(x_1, ..., x_n) \in X^n \mid x_i \in X, \; x_i \neq x_j, \text{ якщо } i \neq j\} \tag{20}$$

в простори $\Gamma_X^{(n)}$:

$$\begin{aligned} sym_X^n :\ \widetilde{X}^n\ &\to\ \Gamma_X^{(n)}\ \ (n\in\mathbb{N}),\\ (x_1,...,x_n)\ &\mapsto\ \{x_1,...,x_n\}. \end{aligned} \tag{21}$$

σ-алгебру $\mathcal{B}(\Gamma_\Lambda)$ можна ввести аналогічно (14):

$$\mathcal{B}(\Gamma_\Lambda)\ =\ \sigma\left(\{N_{\Lambda'}\restriction\Gamma_\Lambda\ :\ \Lambda'\in\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)\}\right). \tag{22}$$

Ця σ-алгебра ізоморфна σ-алгебрі $\mathcal{B}_\Lambda(\Gamma)$, яка визначається формулою:

$$\mathcal{B}_\Lambda(\Gamma)\ =\ \sigma\left(\{N_{\Lambda'}\ :\ \Lambda'\in\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d),\ \Lambda'\subset\Lambda\}\right). \tag{23}$$

Щоб зрозуміти ізоморфізм σ-алгебр $\mathcal{B}(\Gamma_\Lambda)$ і $\mathcal{B}_\Lambda(\Gamma)$, визначимо проектор:

$$p_\Lambda\ :\ \Gamma\mapsto\Gamma_\Lambda\ ;\ \gamma\mapsto\gamma\cap\Lambda:=\gamma_\Lambda. \tag{24}$$

Отже, кожному $\gamma_\Lambda\in\mathcal{B}(\Gamma_\Lambda)$ співставляється цілий клас $\widetilde{\gamma}:=\{\gamma\in\Gamma\mid\gamma\cap\Lambda=\gamma_\Lambda\}$.

Відповідні простори $\widetilde{\Gamma}_0$ і $\widetilde{\Gamma}_\Lambda$ визначаються аналогічно (16), але кількість точок конфігурації γ є скінченна і у випадку $\widetilde{x}\in\widetilde{\gamma}\in\widetilde{\Gamma}_0$ – координатна складова $x\in\mathbb{R}^d$, а у випаду $\widetilde{x}\in\widetilde{\gamma}\in\widetilde{\Gamma}_\Lambda$ – координатна складова $x\in\Lambda\in\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$.

2.3 Простори щільних та розріджених конфігурацій

В дослідженні багатьох термодинамічних характеристик нескінченних систем важливе значення має розбиття простору $\mathbb{R}^d$ на елементарні гіперкубики з довжиною ребер $a>0$, і центри яких розташовані в точках $r\in a\mathbb{Z}^d\subset\mathbb{R}^d$:

$$\Delta_a(r):=\{x\in\mathbb{R}^d\mid(r^i-a/2)\le x^i<(r^i+a/2),\ i=1,...,d\}. \tag{25}$$

Будемо писати Δ замість $\Delta_a(r)$, якщо не має потреби вказувати, де знаходиться центр гіперкубика. Позначимо таке розбиття через $\overline{\Delta}_a$.

Для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ і довільного розбиття $\overline{\Delta}_a$ позначимо через $\overline{\Delta}_{a,\Lambda} := \{\Delta \in \overline{\Delta}_a \mid \Delta \cap \Lambda \neq \emptyset\}$ мінімальне покриття Λ гіперкубиками $\Delta \in \overline{\Delta}_a$ таким чином, що

$$\Lambda \subseteq \Lambda_a \quad \text{і} \quad \lim_{a\to 0} \Lambda_a \;=\; \Lambda. \tag{26}$$

Розбиття (25) було застосовано Рюелем [32] для доведення нерівності (4). У цьому огляді ми приведемо ідею більш прозорого і простішого доведення нерівності (4) за допомогою кластерних розкладів, які були запропоновані в роботі [48]. Для побудови таких кластерних розкладів введемо два типи конфігурацій. Для довільного розбиття $\overline{\Delta}_a$ введемо простір *розріджених* конфігурацій:

$$\Gamma^{(dil)} = \Gamma^{(dil)}(\Delta) := \left\{ \gamma \in \Gamma |\ |\gamma_\Delta| = 0 \vee 1, \text{для всіх } \Delta \in \overline{\Delta} \ \right\} \tag{27}$$

і простір *щільних* конфігурацій:

$$\Gamma^{(den)} = \Gamma^{(den)}(\Delta) := \left\{ \gamma \in \Gamma |\ |\gamma_\Delta| \geq 2, \text{для всіх } \Delta \in \overline{\Delta} \ \right\}. \tag{28}$$

Для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ простори $\Gamma_\Lambda^{(dil)}$ і $\Gamma_\Lambda^{(den)}$ визначаються аналогічно згідно формул (18), (19) та (27), (28).

Зрозуміло, що для довільного $\Delta \in \overline{\Delta}_a$ простір $\Gamma_\Delta \;=\; \Gamma_\Delta^{(dil)} \cup \Gamma_\Delta^{(den)}$, але $\Gamma_\Lambda \;\neq\; \Gamma_\Lambda^{(dil)} \cup \Gamma_\Lambda^{(den)}$ для $\Lambda \neq \Delta$.

Щоб не складалося враження, що розріджені конфігурації описують фізичні системи розріджених газів, наведемо наступне зауваження.

Зауваження 2.1. Однією з найважливіших характеристик фізичного стану системи взаємодіючих частинок є густина, тобто кількість частинок в одиниці об'єму. Скільки завгодно велике значення цієї характеристики можна отримати і в рамках опису системи у просторі розріджених конфігурацій, вибираючи розмір a ребер гіперкубиків достатньо малим.

3 Міри на просторах конфігурацій неперервних систем

Згідно з ідеями Гіббса фізичний стан системи описується ймовірнісною мірою, яка будується спершу в деякому обмеженому об'ємі простору $\mathbb{R}^d$ в залежності від ансамблю (мікроканонічного, канонічного або великого канонічного), який розглядається для конкретної задачі і подальшому граничному термодинамічному переході. Ми будемо розглядати системи статистичної механіки в рамках великого канонічного ансамблю і почнемо цей розгляд з системи невзаємодіючих точкових частинок (*ідеальний газ*).

3.1 Міра Пуассона

Стан ідеального газу в рівноважній статистичній механіці описується мірою *Пуассона* $\pi_{z\sigma}$ на конфігураційному просторі Γ, де $z > 0$ – це активність (фізичний параметр, який пов'язаний з густиною частинок в системі). Міру $\pi_{z\sigma}$ з мірою інтенсивності $z\sigma$ ми визначимо трохи нижче. Для цього спершу введемо так звану міру *Лебега-Пуассона* (див., наприклад, [39]) $\lambda_{z\sigma} = \lambda_{z\sigma}^{\Lambda}$ на просторі скінченних конфігурацій $\Gamma_\Lambda,\ \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ (або Γ_0) за формулою:

$$\int_{\Gamma_\Lambda} F(\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_\Lambda \cdots \int_\Lambda F(\{x_1, ..., x_n\})\sigma(dx_1)\cdots\sigma(dx_n) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_\Lambda \cdots \int_\Lambda F_n(x_1, ..., x_n)dx_1 \cdots dx_n, \tag{29}$$

для всіх вимірних функцій $F = \{F_n\}_{n\geq 0},\ F_n \in L^\infty(\Lambda^n)$ (або $F_n \in L^1(\mathbb{R}^{dn})$). За допомогою міри $\lambda_{z\sigma}$ побудуємо сім'ю ймовірнісних мір

$$\pi_{z\sigma}^{\Lambda} := e^{-z\sigma(\Lambda)}\lambda_{z\sigma}^{\Lambda},\ \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d). \tag{30}$$

Легко переконатись, використовуючи визначення (29), що сім'я (30) є попарно узгоджена і за теоремою Колмогорова (див., наприклад,

[60]) існує єдина ймовірнісна міра $\pi_{z\sigma}$ на конфігураційному просторі Γ.

Важливою характеристикою міри $\pi_{z\sigma}$ є її перетворення Лапласа. Нехай функція $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ є такою, що існує $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ таке, що $\operatorname{supp} f \subset \Lambda$. Тоді

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad <\gamma, f> = <p_\Lambda \gamma, f> . \tag{31}$$

За означенням перетворення Лапласа міри π_σ визначається інтегралом:

$$\begin{aligned} l_{\pi_\sigma}(f) :&= \int_\Gamma e^{<\gamma,f>} \pi_\sigma(d\gamma) = \int_\Gamma e^{<p_\Lambda \gamma,f>} \pi_\sigma(d\gamma) = \int_{\Gamma_\Lambda} e^{<\gamma,f>} \pi_\sigma^\Lambda(d\gamma) = \\ &= e^{-\sigma(\Lambda)} \int_{\Gamma_\Lambda} e^{<\gamma,f>} \lambda_\sigma^\Lambda(d\gamma) = e^{-\sigma(\Lambda)} e^{\int_\Lambda e^{f(x)} \sigma(dx)} = \\ &= e^{\int_{\mathbb{R}^d} (e^{f(x)} - 1) \sigma(dx)}. \end{aligned} \tag{32}$$

Іншою важливою властивістю міри Пуассона є так звана тотожність Мекке:

$$\int_\Gamma \sum_{x \in \gamma} H(x;\gamma) \pi_\sigma(d\gamma) \ = \ \int_\Gamma \int_{\mathbb{R}^d} H(x; \gamma \cup \{x\}) \sigma(dx) \pi_\sigma(d\gamma) \tag{33}$$

для довільної $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\Gamma)$-вимірної функції H. Цю формулу встановив Н. Р. Кемпбелл [61, 62], а Дж. Мекке [63] показав, що тотожність (33) є необхідною і достатньою умовою того, що π_σ є пуассонівською мірою з мірою інтенсивності σ. Формулу (33) легко довести для функції H вигляду:

$$H(x;\gamma) \ = \ h(x) e^{<\gamma, (\alpha h + \beta g)>}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad h, g \in C_0(\mathbb{R}^d). \tag{34}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \sum_{x \in \gamma} h(x) e^{<\gamma,(\alpha h + \beta g)>} \pi_\sigma(d\gamma) \ &= \ \int_\Gamma <\gamma, h> e^{<\gamma,(\alpha h + \beta g)>} \pi_\sigma(d\gamma) = \\ &= \frac{d}{d\alpha} \int_\Gamma e^{<\gamma,(\alpha h + \beta g)>} \pi_\sigma(d\gamma) = \frac{d}{d\alpha} e^{\int_{\mathbb{R}^d} (e^{\alpha h(x) + \beta g(x)} - 1) \sigma(dx)} = \end{aligned}$$

$$\int_\Gamma e^{<\gamma,(\alpha h+\beta g)>}\pi_\sigma(d\gamma)\int_{\mathbb{R}^d} h(x)e^{\alpha h(x)+\beta g(x)}\sigma(dx) \; =$$
$$= \int_\Gamma\int_{\mathbb{R}^d} h(x)e^{<\gamma\cup\{x\},(\alpha h+\beta g)>}\sigma(dx)\pi_\sigma(d\gamma).$$

Лінійна оболонка множини експоненціальних векторів $\{e^{i<\gamma,f>} \mid f \in C_0(\mathbb{R}^d)\}$ є всюди щільною в $L^2(\Gamma,\pi_\sigma)$ ([64], теорема 3), тому формулу (33) можна розширити на всі $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\otimes\mathcal{B}(\Gamma)$-вимірні функції H.

Найбільш важливою характеристикою мір $\pi_{z\sigma}$ та $\lambda_{z\sigma}$, яку ми інтенсивно використовуємо, є властивість нескінченно-подільності (див., наприклад, [65], Розділ 4.4). На мові інтегралів за мірою $\lambda_{z\sigma}$ цю властивість можна сформулювати у вигляді наступної леми.

Лема 3.1. Нехай $X_1\in\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, $X_2\in\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ і $X_1\cap X_2=\emptyset$, $X_1\cup X_2=\Lambda$. Функції $F_i,\ (i=1,2)$ є $\mathcal{B}(\Gamma_{X_i})$-вимірні. Тоді

$$\int_{\Gamma_\Lambda} F_1(\gamma)F_2(\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma) \; = \int_{\Gamma_{X_1}} F_1(\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma)\int_{\Gamma_{X_2}} F_2(\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma). \quad (35)$$

Доведення. За означенням (29)

$$\int_{\Gamma_\Lambda} F_1(\gamma)F_2(\gamma)\lambda_\sigma(d\gamma) \; =$$
$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\left(\int_\Lambda \sigma(dx)\right)^n F_1(\{x\}_1^n\cap X_1)F_2(\{x\}_1^n\cap X_2) =$$
$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\left(\int_{X_1}\sigma(dx)+\int_{X_2}\sigma(dx)\right)^n F_1(\{x\}_1^n\cap X_1)F_2(\{x\}_1^n\cap X_2) =$$
$$= \sum_{n=0}^\infty\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!}\left(\int_{X_1}\sigma(dx)\right)^k\left(\int_{X_2}\sigma(dx')\right)^{n-k} F_1(\{x\}_1^k)F_2(\{x'\}_1^{n-k}) =$$
$$= \int_{\Gamma_{X_1}} F_1(\gamma)\lambda_\sigma^{X_1}(d\gamma)\int_{\Gamma_{X_2}} F_2(\gamma)\lambda_\sigma^{X_2}(d\gamma).$$

Для скорочення запису ми використали дещо нестандартне позначення для кратних інтегралів. ■

Наведемо ще одну важливу технічну лему, яка буде використана нижче.

Лема 3.2. Для всіх позитивних вимірних функцій $G : \Gamma_0 \mapsto \mathbb{R}$ і $H : \Gamma_0 \times \Gamma_0 \mapsto \mathbb{R}$ на просторі Γ_X, де $\Gamma_X \in \{\Gamma_0, \Gamma_\Lambda\}$(відповідно $X \in \{\mathbb{R}^d, \Lambda\}$), справедлива наступна рівність:

$$\int_{\Gamma_X} G(\gamma) \sum_{\eta \subseteq \gamma} H(\eta, \gamma \setminus \eta) \lambda_\sigma(d\gamma) = \int_{\Gamma_X} \int_{\Gamma_X} G(\eta \cup \gamma) H(\eta, \gamma) \lambda_\sigma(d\gamma) \lambda_\sigma(d\eta). \tag{36}$$

Доведення. Нехай $\eta \upharpoonright \Gamma_X^{(k)} = \{x_1, ..., x_k\} := \{x\}_1^k$, $\gamma \upharpoonright \Gamma_X^{(m)} = \{x_{k+1}, ..., x_{k+m}\} := \{x\}_{k+1}^{k+m}$. Тоді

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_X} \int_{\Gamma_X} G(\eta \cup \gamma) H(\eta, \gamma) \lambda_\sigma(d\gamma) \lambda_\sigma(d\eta) = \\
&= \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{1}{k!m!} \int_{X^k} \int_{X^m} G(\{x\}_1^{k+m}) H(\{x\}_1^k, \{x\}_{k+1}^{k+m}) \sigma(dx)^{k+m} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \int_{X^n} G(\{x\}_1^n) H(\{x\}_1^k, \{x\}_{k+1}^n) \sigma(dx)^n = \\
&= \int_{\Gamma_X} G(\gamma) \sum_{\eta \subseteq \gamma} H(\eta, \gamma \setminus \eta) \lambda_\sigma(d\gamma).
\end{aligned}$$

■

3.2 Міра Гіббса

Визначення міри Гіббса для системи взаємодіючих частинок потребує введення необхідних та достатніх умов на енергію взаємодії між частинками. Наведемо спершу приклади взаємодій, про які піде мова у наступних розділах. У випадку двочастинкового потенціалу взаємодії $V_2(x, y) = \phi(|x - y|)$, де $|x - y|$ – евклідова відстань між частинками $x, y \in \mathbb{R}^d$, а потенціальна енергія взаємодії:

$$U(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \le i < j \le n} \phi(|x_i - y_j|). \tag{37}$$

3.2.1 Основні класи взаємодій

Основними фундаментальними характеристиками системи взаємодіючих частинок є властивості стійкої, надстійкої та посилено надстійкої взаємодії. Умова стійкості є необхідною для коректного термодинамічного опису статистичних систем з нескінченною кількістю частинок, існування граничних кореляційних функцій. Така умова може бути сформульована з допомогою системи нескінченного числа нерівностей, кожна з яких відповідає певній скінченній підсистемі, що складається з N частинок, які розташовані у точках $x_1, ..., x_N$ простору $\mathbb{R}^d$ (див. також [19])наступним чином:

Означення 3.1. Взаємодія називається стійкою, якщо для будь-якої підсистеми з кількістю частинок $N \geq 2$ та набором координат $\{x_1, ..., x_N\} \in \mathbb{R}^d$ існує константа $B \geq 0$ така, що

$$U(x_1, ..., x_N) \geq -B\, N. \tag{38}$$

Однією з найважливіших умов, що накладається на потенціал взаємодії між частинками, є умова інтегровності на нескінченності. Це означає, що для будь-яких $R > 0$

$$\int_{|x| \geq R} \phi(|x|)\, dx < +\infty. \tag{39}$$

Умови (38), (39) є достатніми для побудови міри Гіббса системи нескінченного числа частинок в області малих значень параметрів $\beta = (k_B T)^{-1}$ та z, де T — температура системи, z — активність, яка безпосередньо пов'язана з густиною системи частинок (див. [19], глава 4), k_B — константа Больцмана, що забезпечує перехід від температурної до енергетичної шкали.

Але для того, щоб побудувати міру Гіббса у випадку системи нескінченного числа частинок для будь-яких додатних значень параметрів β та z, необхідно накласти додаткові обмеження на взаємодію між частинками. Такою умовою є умова надстійкості, яку ввів Руель в роботі [32].

Означення 3.2. ([32]) Взаємодія називається надстійкою, якщо для будь-якого розбиття на куби $\overline{\Delta_a}$ та будь-якої конфігурації $\gamma = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \Gamma_0$ існують такі константи $A > 0$, $B \geq 0$, що виконується умова:

$$U(\gamma) \geq \sum_{\Delta \in \overline{\Delta}_a} \left[A|\gamma_\Delta|^2 - B|\gamma_\Delta| \right]. \tag{40}$$

У цьому огляді ми будемо використовувати так звану *посилено надстійку* взаємодію.

Означення 3.3. Взаємодія називається посилено надстійкою, якщо існує розбиття $\overline{\Delta}_{a_0}$ і константи $A(a) > 0$, $B(a) \geq 0$, $m \geq 2$ такі, що для довільних $0 < a \leq a_0$ і $\gamma \in \Gamma_0$ виконується наступна умова:

$$U(\gamma) \geq A(a) \sum_{\Delta \in \overline{\Delta}_a : |\gamma_\Delta| \geq 2} |\gamma_\Delta|^m - B(a)|\gamma|. \tag{41}$$

Зауваження 3.1. Надстійкі взаємодії були введені Д. Рюелем (див. [66] або [19], Гл.3, § 3.2.9 і [32]). Я. М. Парк (див. [67]) вперше використав умову посиленої надстійкості з $m > 2$, щоб довести обмеженість експоненти від оператора локальної кількості частинок для квантової системи взаємодіючого Бозе газу. Означення 3.3 було вперше запропоновано в [56]. На відміну від означення Парка в нерівність (41) включає випадок $m = 2$, але з константами, які залежать від параметра a. Посилено надстійкі взаємодії включають потенціали, які не є інтегровні в нулі $0 \in \mathbb{R}^d$.

Умови стійкості, надстійкості та посиленої надстійкості, сформульовані в (38), (40) і (41), накладають загальні умови на характер енергії взаємодії. В рамках наближення таких взаємодій двохчастинковими (парними) потенціалами треба знайти найбільш оптимальні достатні умови їх виконання. Такі умови досліджувалися багатьма авторами. Ми радимо читачу звернутись до найбільш пізнього огляду [55], в якому детально обговорені попередні результати цієї проблеми та отримані деякі нові результати.

3.2.2 Умови на потенціал взаємодії

Умови, які забезпечують посилену надстійкість, можна сформулювати таким чином.

(A): Умови на потенціал взаємодії. *Нехай* ϕ *є неперервним на* $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$*, для якого існують константи* $r_0 > 0$, $R > r_0, \varphi_0 > 0$, $\varphi_1 > 0$, *and* $\varepsilon_0 > 0$ *такі, що:*

$$1)\, \phi(|x|) \equiv -\phi^-(|x|) \geq -\frac{\varphi_1}{|x|^{d+\varepsilon_0}} \quad \text{для} \quad |x| \geq R,; \tag{42}$$

$$2)\, \phi(|x|) \equiv \phi^+(|x|) \geq \frac{\varphi_0}{|x|^s},\, s \geq d \quad \text{для} \quad |x| \leq r_0, \tag{43}$$

де

$$\phi^+(|x|) := \max\{0, \phi(|x|)\},\, \phi^-(|x|) := -\min\{0, \phi(|x|)\}. \tag{44}$$

З умови (42) слідує, що для $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\upsilon_\varepsilon = \upsilon_\varepsilon(a) \;:=\; \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sum_{\Delta \in \overline{\Delta}_a} \sup_{y \in \Delta} \phi^-(|x-y|)|x-y|^\varepsilon \;<\infty. \tag{45}$$

Справедлива наступна лема.

Лема 3.3. Нехай потенціал взаємодії задовольняє **(A)**. Тоді для довільних $\gamma \in \Gamma_0$ і $a < r_0$ нерівність (41) виконується з

$$A(a) \;=\; C_{s,d} - \frac{\upsilon_0}{2^{s/d}},\; B(a) \;=\; \frac{\upsilon_0}{2},\; m \;=\; 1 + \frac{s}{d},\; C_{s,d} = \frac{1}{2^{2s+1}} \left(\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{d\,\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \right)^{\frac{s}{d}} \frac{\varphi_0}{a^s}. \tag{46}$$

Доведення. Доведення в [55], але нами далі буде використовуватись лише випадок, коли

$$A(a) \;=\; \frac{\varphi_0}{4(\sqrt{d}a)^s} - \frac{\upsilon_0}{2},\; B(a) \;=\; \frac{\upsilon_0}{2},\; m \;=\; 2. \tag{47}$$

У цьому випадку доведення значно спрощується. Для довільного $\gamma \in \Gamma_0$ та довільного розбиття $\overline{\Delta}_a$:

$$U(\gamma)=\sum_{\{x,y\}\subset\gamma}\phi(|x-y|)=\sum_{\Delta\in\overline{\Delta}_\lambda:|\gamma_\Delta|\geq 2}U(\gamma_\Delta)+\sum_{\{\Delta,\Delta'\}\subset\overline{\Delta}_\lambda}\sum_{\substack{x\in\gamma_\Delta\\ y\in\gamma_{\Delta'}}}\phi(|x-y|). \tag{48}$$

Враховуючи умови **(A)** на потенціал взаємодії, визначення (4) і нерівність $|\gamma_\Delta|\,|\gamma_{\Delta'}|\leq\frac{1}{2}\left(|\gamma_\Delta|^2+|\gamma_{\Delta'}|^2\right)$, отримаємо:

$$U(\gamma)\geq\sum_{\Delta\in\overline{\Delta_\lambda}:|\gamma_\Delta|\geq 2}\left[\frac{\varphi_0}{4(\sqrt{d}a)^s}-\frac{\upsilon_0}{2}\right]|\gamma_\Delta|^2-\frac{\upsilon_0}{2}|\gamma|. \tag{49}$$

Зауваження 3.2. З означення (4) і нерівності (42) зрозуміло, що $\upsilon_0\sim\frac{c}{a^d}$. Тоді, для достатньо малих a константа $A(a)>0$ для $s>d$ і для достатньо великих φ_0 у випадку $s=d$.

□

3.2.3 Визначення міри Гіббса нескінченних систем

В рамках великого канонічного ансамблю система, що знаходиться в обмеженому об'ємі Λ, характеризується фіксованою температурою T і параметром μ, який називається *хімічним потенціалом.* Параметр μ відповідає за розподіл кількості частинок N в Λ (див., наприклад, [68]). Міра Гіббса μ_Λ є абсолютно неперервна відносно міри Лебега в $(\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^d)^N$. Вираз для щільності буде мати вигляд:

$$D_\Lambda(\widetilde{\gamma},N)=\frac{1}{Z_\Lambda}\frac{1}{N!}e^{\beta\mu N-\beta E(\widetilde{\gamma})},\quad N=|\widetilde{\gamma}|, \tag{50}$$

де постійна нормування Z_Λ має назву *великої статистичної суми* і виражається формулою:

$$Z_\Lambda=\sum_{N\geq 0}\frac{1}{N!}\int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda^{(N)}}d\widetilde{\gamma}e^{\beta\mu N-\beta E(\widetilde{\gamma})},\ d\widetilde{\gamma}\ :=\ (d\widetilde{\sigma})^N\ :=\ (d\sigma\otimes dp)^N. \tag{51}$$

Для рівноважних систем усі спостережувані величини є функціями координат. Тому у виразах для середніх та у виразі для великої статистичної суми можна виконати інтегрування за імпульсними змінними

$p_i \in \mathbb{R}^d,\ i = \overline{1,N}$ і переписати вираз для міри Гіббса для великого канонічного ансамблю на просторі конфігурацій Γ_Λ у такому вигляді:

$$\mu_\Lambda(d\gamma) = \frac{1}{Z_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \tag{52}$$

$$Z_\Lambda = \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \tag{53}$$

де ми скористалися визначенням міри Лебега-Пуассона (29), (29), а постійна

$$z \ = \ \frac{e^{\beta\mu}}{h^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{p^2}{2m}} dp \ = \ e^{\beta\mu} \left(\frac{2\pi m}{\beta h^2} \right)^{d/2} \tag{54}$$

і називається *активністю* системи.

У випадку нескінченної системи в $\mathbb{R}^d$ у підході Добрушина-Ленфорда-Рюеля (див. [25],[31]) міра Гіббса μ визначається на Γ за допомогою сім'ї умовних ймовірнісних розподілів, щільність яких визначається похідною Радона-Нікодима

$$\frac{d\mu_\Lambda}{d\lambda_{z\sigma}}(\eta|\ \bar{\gamma}_{\Lambda^c}) \ = \ \frac{\exp\{-\beta U(\eta|\ \bar{\gamma}_{\Lambda^c})\}}{Z_\Lambda(\bar{\gamma}_{\Lambda^c})}, \tag{55}$$

де

$$\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d),\ \Lambda^c = \mathbb{R}^d \setminus \Lambda,\ \eta \in \Gamma_\Lambda,\ \bar{\gamma} \in \Gamma.$$

Відповідні ймовірності визначаються за формулою:

$$\Pi_\Lambda(A, \bar{\gamma}_{\Lambda^c}) = \int_{\Gamma_\Lambda} 1\!\!1_A(\bar{\gamma}_{\Lambda^c} \cup \eta) \mu_\Lambda(d\eta|\bar{\gamma}_{\Lambda^c}),\ A \in \mathcal{B}(\Gamma), \tag{56}$$

де

$$U(\eta|\bar{\gamma}_{\Lambda^c}) := U(\eta) + W(\eta; \bar{\gamma}_{\Lambda^c}),\ W(\eta;\gamma) \ := \sum_{\substack{x\in\eta,\\ y\in\gamma}} \phi(|x-y|). \tag{57}$$

$U(\eta)$ – це енергія взаємодії усіх частинок конфігурації $\eta \subset \Lambda$, а $W(\eta; \bar{\gamma}_{\Lambda^c})$ – це енергія взаємодії між частинками конфігурації η і частинками конфігурації $\bar{\gamma}_{\Lambda^c}$, а

$$Z_\Lambda(\bar{\gamma}_{\Lambda^c}) = \int_{\Gamma_\Lambda} \exp\{-U(\eta|\ \bar{\gamma}_{\Lambda^c})\} \lambda_{z\sigma}(d\eta). \tag{58}$$

Тоді μ будемо називати мірою Гіббса, якщо

$$\mu(\Pi_\Lambda(A,\cdot)) \;=\; \int_\Gamma \Pi_\Lambda(A \mid \gamma)\mu(d\gamma) \;=\; \mu(A) \tag{59}$$

для довільного $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$ і $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$. Множину усіх мір Гіббса, які відповідають потенціалу ϕ, активності z і оберненій температурі β позначимо через $\mathcal{G}(\phi, z, \beta)$. Формулу (59) називають рівнянням Добрушина-Ленарда-Рюеля (ДЛР). Якщо міра μ задовольняє рівняння ДЛР, тоді це є необхідною і достатньою умовою того, що μ є мірою Гіббса.

Більш прозорим з аналітичної точки зору є рівняння, яке запропонував Рюель (РРЮ) в роботі [32]. Для будь-якої позитивної $\mathcal{B}(\Gamma)$-вимірної функції F і $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ має місце рівність:

$$\int_\Gamma F(\gamma)\mu(d\gamma) \;=\; \int_{\Gamma_\Lambda} \left[\int_{\Gamma_{\Lambda^c}} F(\eta \cup \gamma) e^{-\beta U(\eta|\gamma)} \mu(d\gamma) \right] \lambda_{z\sigma}(d\eta). \tag{60}$$

Необхідно також навести ще одне рівняння, яке було запропоноване в роботах [69, 70], це рівняння Георгіі-Нгуєна-Цессіна (ГНЦ). Для довільної позитивної $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\Gamma)$-вимірної функції H справедлива формула:

$$\int_\Gamma \sum_{x\in\gamma} H(x;\gamma)\mu(d\gamma) \;=\; z \int_\Gamma \int_{\mathbb{R}^d} H(x; \gamma \cup \{x\}) e^{-\beta W(\{x\};\gamma)} \sigma(dx)\mu(d\gamma). \tag{61}$$

На завершення цього розділу наведемо теорему, яка підсумовує результати вищенаведених робіт.

Теорема 1. Нехай $\mu \in \mathcal{G}_V$. Тоді рівняння ДЛР (59), рівняння РРЮ (60) і рівняння ГНЦ (61) є еквівалентними.

Більш ґрунтовний опис мір Гіббса, як для великого канонічного ансамблю, так і для канонічного ансамблю, можна знайти, наприклад, в монографіях [71, 69, 72].

4 Кореляційні функції мір Гіббса

З точки зору фізичних міркувань кореляційні функції були вперше введені ще на початку XX століття Орштейном і Церніке при дослідженні критичних флуктуацій. Математичні дослідження кореляційних функцій, мабуть, почалися з роботи Івона [3] і незалежних досліджень Боголюбова [4], Кірквуда [5] та Борна-Гріна [6]. З точки зору теорії міри кореляційні функції є в певному сенсі аналогом моментів міри. Розглянемо аналог моментів на просторі конфігурацій Г.

4.1 Кореляційні міри та кореляційні функції

Перш за все треба зауважити, що кожну конфігурацію γ можна ототожнити з узагальненою функцією (див. (7), (8), (10)). Але у просторі узагальнених функцій операція множення (зведення у степінь)не є визначеною. У гауссівському аналізі (тобто на просторах функцій, які інтегровні за мірою Гаусса) вводять так звану віківську регуляризацію. Так само можна зробити і у випадку пуассонівського аналізу. Більш детально ми обговоримо це питання у наступному підрозділі з точки зору узагальнених пуассонівських функціоналів [73, 64, 74]. Наведені нижче конструкції можна знайти, наприклад, в більш детальному описі в роботі [75].

Перша степінь визначається звичайним чином за визначенням узагальненої функції. Нехай G є функцією на просторі конфігурацій Γ_0 ($G : \Gamma_0 \to \mathbb{R}$), такою, що

$$G \restriction \Gamma_0^{(n)} \;=\; G^{(n)}(\{x_1, ..., x_n\}) \;:=\; G_n(x_1, ..., x_n), \;\; G_n \in C_0(\mathbb{R}^{dn}). \quad (62)$$

Тоді

$$< G^{(1)}, \gamma > := \sum_{x_1 \in \gamma} < G^{(1)}, \varepsilon_{x_1} > = \sum_{x_1 \in \gamma} G_1(x_1). \quad (63)$$

n-у ступінь визначимо формулою

$$< G^{(n)}, : \gamma^{\otimes n} :> := \sum_{\{x_1, ..., x_n\} \subset \gamma} G_n(x_1, ..., x_n). \quad (64)$$

Тоді аналогом формули моментів є формула

$$\int_{\Gamma} < G^{(n)}, : \gamma^{\otimes n} :> \mu(d\gamma) \ := \ \int_{\mathbb{R}^{dn}} G_n(x_1, ..., x_n) \rho^{(n)} \left((\sigma(dx_1), ..., \sigma(dx_n) \right). \tag{65}$$

Функцію $\rho^{(n)}$ будемо називати кореляційною мірою міри μ на $\Gamma^{(n)}$. Якщо кореляційна міра $\rho^{(n)}$ є абсолютно неперервною відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^{dn}$, тоді її щільність визначає відповідну кореляційну функцію:

$$\begin{aligned} \rho^{(n)} \left((\sigma(dx_1), ..., \sigma(dx_n) \right) \ &:= \ \frac{1}{n!} \rho_n(x_1, ..., x_n) \sigma(dx_1) \cdots \sigma(dx_n), \\ \rho_n(x_1, ..., x_n) \ &:= \ \rho(\eta) \restriction \Gamma^{(n)}, \ \eta \ = \ \{x_1, ..., x_n\}. \end{aligned} \tag{66}$$

З урахуванням (64) формулу (65) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} \sum_{\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \gamma} G_n(x_1, ..., x_n) \mu(d\gamma) = \qquad (67) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{dn}} G_n(x_1, ..., x_n) \rho^{(n)} \left((\sigma(dx_1), ..., \sigma(dx_n) \right). \end{aligned}$$

Кореляційну міру тепер можна визначити на просторі усіх скінченних конфігурацій Γ_0, просумувавши рівність (67) за всіма $n \geq 0$. Тоді з (67) отримуємо формулу:

$$\int_{\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \gamma} G_n(x_1, ..., x_n) \mu(d\gamma) := \int_{\Gamma} \sum_{\eta \Subset \gamma} G(\eta) \mu(d\gamma) = \int_{\Gamma_0} G(\eta) \rho(d\eta), \tag{68}$$

а у випадку (66)

$$\int_{\Gamma} \sum_{\eta \Subset \gamma} G(\eta) \mu(d\gamma) = \int_{\Gamma_0} G(\eta) \rho(\eta) \lambda_{\sigma}(d\eta), \tag{69}$$

де значок $\eta \Subset \gamma$ означає сумування за усіми скінченними підмножинами η нескінченної конфігурації γ. Підставимо в (68) $G = 1\!\!1_A, \ \ A \in \mathcal{B}(\Gamma_0)$, тоді отримуємо означення кореляційної міри на $\mathcal{B}(\Gamma_0)$:

$$\rho_{\mu}(A) = \rho(A) \ = \ \int_{\Gamma} \sum_{\eta \Subset \gamma} 1\!\!1_A(\eta) \mu(d\gamma), \tag{70}$$

або, використовуючи праву частину (69) та визначення міри λ_σ, отримуємо:

$$\rho(A) \;=\; \int_{\Gamma_0} 1\!\!1_A(\eta)\rho(\eta)\lambda_\sigma(d\eta) = \int_{\Gamma_0} 1\!\!1_A(\eta) z^{-|\eta|}\rho(\eta)\lambda_{z\sigma}(d\eta). \tag{71}$$

Означення 4.1. Міра μ називається локально абсолютно-неперервна відносно міри $\lambda_{z\sigma}$, якщо для будь-якого $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ міра $\mu^\Lambda = \mu \circ p_\Lambda^{-1}$ є абсолютно-неперервна відносно міри $\lambda_{z\sigma}^\Lambda$, тобто існує похідна Радона-Нікодима:

$$\frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda_{z\sigma}^\Lambda}(\gamma). \tag{72}$$

Наступна лема дає можливість визначити цю похідну для $\mu \in \mathcal{G}_V$:

Лема 4.1. Нехай $\mu \in \mathcal{G}_V$. Тоді вона є локально абсолютно-неперервна відносно $\lambda_{z\sigma}$, і

$$\frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda_{z\sigma}^\Lambda}(\eta) \;=\; \int_{\Gamma_{\Lambda^c}} e^{-\beta U(\eta) - \beta W(\eta;\gamma)}\mu(d\gamma). \tag{73}$$

Доведення. Нехай F є позитивною $\mathcal{B}_\Lambda(\Gamma)$-вимірною функцією. Тоді існує $\mathcal{B}(\Gamma_\Lambda)$-вимірна функція f така, що $F = f \circ p_\Lambda$ $(F(\gamma) = f(\gamma_\Lambda))$. Тоді за означенням проекції міри:

$$\int_\Gamma F(\gamma)\mu(d\gamma) \;=\; \int_{\Gamma_\Lambda} f(\eta)\mu^\Lambda(d\eta). \tag{74}$$

Скористаємося тим, що міра μ є гіббсовою і задовольняє рівняння Рюеля (60). Тоді

$$\begin{aligned} \int_\Gamma F(\gamma)\mu(d\gamma) &= \int_{\Gamma_\Lambda} \left[\int_{\Gamma_{\Lambda^c}} F(\eta \cup \gamma) e^{-\beta U(\eta|\gamma)}\mu(d\gamma)\right] \lambda_{z\sigma}(d\eta) = \\ &= \int_{\Gamma_\Lambda} f(\eta) \left[\int_{\Gamma_{\Lambda^c}} e^{-\beta U(\eta) - \beta W(\eta;\gamma)}\mu(d\gamma)\right] \lambda_{z\sigma}(d\eta). \end{aligned} \tag{75}$$

Враховуючи, що за визначенням похідної Радона-Нікодима

$$\int_{\Gamma_\Lambda} f(\eta)\mu^\Lambda(d\eta) \;=\; \int_{\Gamma_\Lambda} f(\eta)\frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda_{z\sigma}^\Lambda}(\eta)\lambda_{z\sigma}(d\eta), \tag{76}$$

і порівнюючи (76) з (75) отримуємо (73).

■

Лема 4.2. Нехай $\mu \in \mathcal{G}_V$ і для будь якого $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ існує постійна $C_\Lambda > 0$ така, що

$$\frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda^\Lambda_{z\sigma}}(\eta) \ = \leq C_\Lambda^{|\eta|}. \tag{77}$$

Тоді кореляційна міра (70) є абсолютно неперервною відносно міри $\lambda_{z\sigma}$, а її щільність виражається кореляційним функціоналом, який має такий вигляд:

$$\rho(\eta) \ = \ z^{|\eta|} \int_\Gamma e^{-\beta U(\eta) - \beta W(\eta;\gamma)} \mu(d\gamma). \tag{78}$$

Доведення. Перш за все зауважимо, що для будь-якого $A \in \mathcal{B}_c(\Gamma_0)$ існує $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ таке, що функція $\sum_{\eta \subset \gamma} 1\!\!1_A(\eta)$ є $\mathcal{B}_\Lambda(\Gamma_0)$-вимірною, а

$$\rho(A) = \int_{\Gamma_\Lambda} \sum_{\eta \subset \gamma} 1\!\!1_A(\eta) \mu^\Lambda(d\gamma) = \int_{\Gamma_\Lambda} \sum_{\eta \subset \gamma} 1\!\!1_A(\eta) \frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda^\Lambda_{z\sigma}}(\gamma) \lambda^\Lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{79}$$

Застосуємо до правої частини (79) Лему 3.2 (рівність (36)) з

$$G(\gamma) = \frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda^\Lambda_{z\sigma}}(\gamma), \ H(\eta, \gamma \setminus \eta)) = 1\!\!1_A(\eta) 1\!\!1_{\Gamma_\Lambda}(\gamma \setminus \eta). \tag{80}$$

Отримуємо, що

$$\rho(A) = \int_{\Gamma_\Lambda} \int_{\Gamma_\Lambda} 1\!\!1_A(\eta) \frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda^\Lambda_{z\sigma}}(\eta \cup \gamma) \lambda^\Lambda_{z\sigma}(d\gamma) \lambda_{z\sigma}(d\eta). \tag{81}$$

Тоді, порівнюючи з (71), отримаємо:

$$\rho(\eta) = z^{|\eta|} \int_{\Gamma_\Lambda} \frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda^\Lambda_{z\sigma}}(\eta \cup \gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{82}$$

Підставимо в (82) вираз (73). Тоді маємо

$$\begin{aligned} \rho(\eta) &= z^{|\eta|} \int_{\Gamma_\Lambda} \int_{\Gamma_{\Lambda^c}} e^{-\beta U(\eta \cup \gamma) - \beta W(\eta \cup \gamma;\xi)} \mu(d\xi) \lambda_{z\sigma}(d\gamma) = \\ &= z^{|\eta|} \int_{\Gamma_\Lambda} \int_{\Gamma_{\Lambda^c}} e^{-\beta U(\eta) - \beta W(\eta;\gamma \cup \xi)} e^{-\beta U(\gamma) - \beta W(\gamma;\xi)} \mu(d\xi) \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \end{aligned} \tag{83}$$

Застосовуючи в останньому виразі (83) рівняння Рюеля (60), отримуємо (78). ■

На завершення цього підрозділу наведемо вираз для кореляційних функцій, що відповідають умовному розподілу Гіббса в обмеженому об'ємі Λ і при фіксованих граничних конфігураціях $\bar{\gamma} \in \Gamma_{\Lambda^c}$:

$$\rho_\Lambda(\eta \mid \bar{\gamma}) \ = \ \frac{z^{|\eta|}}{Z_\Lambda(\bar{\gamma})} \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta \cup \gamma | \bar{\gamma})} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \ \rho_\Lambda(\eta) = \rho_\Lambda(\eta \mid \{\emptyset\}). \quad (84)$$

4.2 Пуассонівські поля та їх регуляризація

В теорії евклідових квантованих полів (див., наприклад, [76], розд. 29.2) поля визначаються операторно-значними узагальненими функціями на просторі Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. Вільне евклідове скалярне поле можна також визначити як узагальнений гауссівський процес, індексований функціями $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ [77]. Віківську регуляризацію розглядають як процедуру ортогоналізації мономів вільного евклідового (або гауссівського) поля [78] (див. також [79]).

За аналогією з гауссівським полем можна ввести поняття *пуассонівського* поля як лінійного неперервного функціоналу на просторі $C_0(\mathbb{R}^d)$. Запишемо відображення (7) у вигляді:

$$\gamma \ = \ \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} \ \mapsto \ \gamma(x) \ = \ \sum_{i=1}^{\infty} \delta(x - x_i). \quad (85)$$

Тоді формула (10) має вигляд:

$$< \gamma, f > := \ \gamma(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\gamma(x)dx \ = \ \sum_{x \in \gamma} f(x) \quad (86)$$

Відповідно роботі [73] введемо перетворення функцій $F \in L^2(\Gamma, \pi_\sigma)$ за формулою:

$$\left(UF(\cdot)\right)(f) \ := \ l_{\pi_\sigma}(f)^{-1} \int_\Gamma e^{i<\gamma, f>} F(\gamma) \pi_\sigma(d\gamma), \ f \in C_0(\mathbb{R}^d), \quad (87)$$

де $l_{\pi_\sigma}(f)$ визначено формулою (32), а точка означає місце аргумента функції F, по якому у правій частині виконується інтегрування за мірою π_σ. Наприклад, для функції $F(\gamma) = \exp[<\gamma, \log(1+g)>]$, яка визначена для довільних функцій $g \in C_0(\mathbb{R}^d)$ з $|g| < 1$ функцію UF легко порахувати, використовуючи формулу (32):

$$(U \exp[<\cdot, \log(1+g)>])(f) = \exp\left[\int_{\mathbb{R}^d} e^{if(x)} g(x)dx\right]. \tag{88}$$

Внаслідок щільності лінійної оболонки експоненціальних векторів $\{e^{i<\gamma,f>} \mid f \in C_0(\mathbb{R}^d)\}$ в $L^2(\Gamma, \pi_\sigma)$ ([64], теорема 3) з рівності $UF = 0$ виходить, що $U \equiv 0$, тобто існування оберненого перетворення U^{-1}, яке на функціоналах вигляду $G[f] = \exp[\int_{\mathbb{R}^d} e^{if(x)} g(x)dx]$, де $f, g \in C_0(\mathbb{R}^d)$, а $|g| < 1$ задається формулою:

$$\left(U^{-1}G[\cdot]\right)(\gamma) = \exp[<\gamma, \log(1+g)>]. \tag{89}$$

Якщо тепер визначити функцію F таким чином, що $G[f] = F(e^f)$, тоді віківську регуляризацію визначають [73] за формулою:

$$: F(\gamma) : := \left(U^{-1}F(e^{i\cdot}\right)(\gamma). \tag{90}$$

З формул (89) і (90) та визначень функцій G і F виходить, що

$$: e^{<\gamma,g>} : = \exp[<\gamma, \log(1+g)>]. \tag{91}$$

З цієї формули можна отримати вираз для віківських мономів. Виберемо для цього функцію g у вигляді $g = \sum_{j=1}^k \alpha_j g_j$ і $g_j \in C_0(\mathbb{R}^d)$ та достатньо малими α_j, $j = 1, \ldots, k$ для того, щоб $|g| < 1$. Тоді:

$$: \prod_{j=1}^k <\gamma, g_j> : = \frac{\partial^k}{\partial\alpha_1 \cdots \partial\alpha_k} \exp[<\gamma, \log(1 + \sum_{j=1}^k \alpha_j g_j)>]|_{\alpha_1=\ldots=\alpha_k=0}. \tag{92}$$

Легко перевірити, що таке визначення віківських мономів збігається з визначенням формулою (64), в якій треба вибрати функцію G у вигляді:

$$G_n(x_1, ..., x_n) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} g_1(x_{\pi(1)}) \cdots g_n(x_{\pi(n)}). \tag{93}$$

Формулу Мекке (33) для функцій $F,\ G \in L^2(\Gamma, \pi_\sigma)$ можна записати у такому вигляді:

$$\int_\Gamma :<\gamma, \varphi> G(\gamma) : F(\gamma) \pi_\sigma(d\gamma) \ = \tag{94}$$
$$= \int_\Gamma \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) :G(\gamma) : F(\gamma \cup \{x\}) \sigma(dx) \pi_\sigma(d\gamma),\ \varphi \in C_0(\mathbb{R}^d).$$

Доведення для функцій вигляду $F(\gamma) = e^{i<\gamma, f>}, f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ і $G(\gamma) = e^{i<\gamma, g>}, g \in C_0(\mathbb{R}^d)$ виконується аналогічно, використовуючи формули (91), (32). Скористаємося формулою (94), зробивши заміни: $\pi_\sigma \to \lambda_{z\sigma}$, $\Gamma \to \Gamma_\Lambda$, $:<\gamma, \varphi> G(\gamma) : F(\gamma) \to: \prod_{j=1}^m <\gamma, g_j>: Z_\Lambda^{-1} \exp[-\beta U(\gamma)]$. Тоді кореляційну функцію $\rho_\Lambda(\eta) = \rho_\Lambda(\{x_1, \ldots, x_m\}) := \rho_m^\Lambda(x_1, \ldots, x_m)$ (див. (84)) можна записати у вигляді віківських моментів пуассонівських полів (85):

$$\rho_m^\Lambda(x_1, \ldots, x_m) \ = \ \frac{1}{Z_\Lambda} \int_{\Gamma_\Lambda} : \gamma(x_1) \cdots \gamma(x_m) : e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{95}$$

4.3 Локальні спостережувані та кореляційні функції

Спостережувані величини є функціями конфігураційних змінних. Природно, що ця залежність повинна бути тільки від деякої локальної кількості змінних, бо ми можемо спостерігати тільки обмежену область системи. Тому математично визначити локальну спостережувану величину можна наступним чином.

Означення 4.2. Будь-яка вимірна функція F_B, визначена на конфігураційному просторі Γ, називається локальною спостережуваною, якщо вона залежить тільки від частини конфігурації частинок, що міститься у області $B \Subset \mathbb{R}^d$, тобто

$$F_B(\gamma) = f(\gamma \cap B) = f(\gamma_B) \tag{96}$$

є циліндричною функцією.

Її середнє значення визначається з допомогою ймовірнісного розподілу μ за формулою

$$< F_B >_\mu = \int\limits_\Gamma F_B(\gamma) d\mu(\gamma). \tag{97}$$

З усіх фізичних величин (тобто функцій, що введені на множині конфігурацій Γ фізичної системи) частіше всього зустрічаються так звані *суматорні величини*.

Означення 4.3. Величина $F(\cdot)$ називається суматорною величиною k-го порядку, якщо її можна подати у вигляді

$$F_B(\gamma) = \sum_{\{x_1,\dots,x_k\}\subset\gamma} f_{B;k}(x_1,\dots,x_k), \tag{98}$$

де $f_{B;k}(x_1,\dots,x_k)$ — деяка симетрична функція своїх змінних.

В загальному випадку локальну спостережувану величину можна записати у вигляді:

$$F_B(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\{x_1,\dots,x_k\}\subset\gamma} f_{B;k}(x_1,\dots,x_k) \;=\; \sum_{\eta\Subset\gamma} f_B(\eta). \tag{99}$$

Тоді, враховуючи формули (68), (69), вираз (97) для середніх від функцій (99) можна записати у вигляді:

$$< F_B >_\mu = \int_\Gamma F_B(\gamma)\mu(d\gamma) = \int_{\Gamma_0} f_B(\eta)\rho(\eta)\lambda_\sigma(d\eta). \tag{100}$$

Отже, знаючи вираз для кореляційної функції, можна обчислити середні спостережуваних величин, обраховуючи інтеграли за мірою Лебега-Пуассона.

Зауваження 4.1. Визначення кореляційних функцій, яке приведене вище формулами (65), (66), належить Ленарду [33, 34, 35]. Таке визначення в значній мірі мотивоване виглядом спостережуваних величин

(99). Ленард також визначив оператор S як відображення функцій G (див. (62)) на Γ_0 у функції SG на Γ:

$$(SG)(\gamma) \ = \ \sum_{\eta \Subset \gamma} G(\eta). \tag{101}$$

Таке відображення дало поштовх до створення гармонійного аналізу на просторах локально скінченних конфігурацій [36] (див. також [75]) за аналогією співвідношення гільбертового простору квадратично інтегровних функцій на $\mathbb{R}^1$ та простору l_2 квадратично сумовних послідовностей, який можна розглядати як відповідний простір коефіцієнтів Фур'є.

4.4 Рівняння Кірквуда-Зальцбурга для кореляційних функцій

Запишемо вираз для кореляційних функцій ρ_Λ, які відповідають системі, що знаходиться в обмеженому об'ємі $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$. Покладаючи у виразі (84) $\bar{\gamma} = \emptyset$, отримаємо вираз:

$$\rho_\Lambda(\eta) \ = \ \frac{z^{|\eta|}}{Z_\Lambda} \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{102}$$

Достатньою умовою існування кореляційних функцій на Γ_Λ є умова стійкості (див. ф-лу (38)). Ця умова дозволяє отримати оцінки:

$$1 \ \leq \ Z_\Lambda \ \leq \ e^{ze^{\beta B}\sigma(\Lambda)} \tag{103}$$

та

$$0 \ \leq \ \rho_\Lambda(\eta) \ \leq \ Z_\Lambda^{-1} e^{ze^{\beta B}\sigma(\Lambda)}. \tag{104}$$

Ці оцінки є наслідком умови (38) і визначення інтегралу за мірою Лебега-Пуассона (29). Але оцінка (104) не дає підстав зробити висновок, що послідовність функцій $\rho_\Lambda(\eta)$ має термодинамічну границю при $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d$.

Одним із методів побудови кореляційних функцій при нескінченному об'ємі є метод рівнянь. Треба отримати рівняння для функцій ρ

і знайти їх розв'язок. Отримаємо спершу такі рівняння для функцій ρ_Λ, тобто у скінченному об'ємі. Виділимо для цього в конфігурації η деяку точку $x \in \eta$ і введемо позначення $\eta^{(\hat{x})} := \eta \setminus \{x\}$. Тоді вираз (102) можна переписати у вигляді:

$$\rho_\Lambda(\eta) \ = \ z^{|\eta|} \frac{e^{-\beta W(x;\eta^{(\hat{x})})}}{Z_\Lambda} \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta W(x;\gamma)} e^{-\beta U(\eta^{(\hat{x})} \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{105}$$

Скористаємося тим, що у випадку парного потенціалу взаємодії енергія взаємодії двох конфігурацій задається формулою (57). Тоді експоненту в (105) можна записати у вигляді:

$$e^{-\beta W(x;\gamma)} = \prod_{y \in \gamma} \left[(e^{-\beta \phi(|x-y|)} - 1) + 1 \right]. \tag{106}$$

Далі для довільної неперервної функції $\varphi \in C(\mathbb{R}^d)$ і довільного $\gamma \in \Gamma_\Lambda$ справедлива проста комбінаторна формула:

$$\prod_{y \in \gamma} [1 + \varphi(y)] = \sum_{\xi \subseteq \gamma} \prod_{y \in \xi} \varphi(y). \tag{107}$$

Введемо наступне позначення:

$$K(x;\xi) \ := \ \begin{cases} \prod_{y \in \xi} (e^{-\beta \phi(|x-y|)} - 1), |\xi| \geq 1, \\ 1, \ \xi = \emptyset. \end{cases} \tag{108}$$

Тоді вираз (105) можна переписати у вигляді:

$$\rho_\Lambda(\eta) \ = \ z^{|\eta|} \frac{e^{-\beta W(x;\eta^{(\hat{x})})}}{Z_\Lambda} \int_{\Gamma_\Lambda} \sum_{\xi \subseteq \gamma} K(x;\xi) e^{-\beta U(\eta^{(\hat{x})} \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{109}$$

Застосуємо до правої частини (109) Лему 3.2 (рівність (36)) з Γ_Λ замість Γ_0 і

$$G(\gamma) = e^{-\beta U(\eta^{(\hat{x})} \cup \gamma)}, \tag{110}$$
$$H(\xi, \gamma \setminus \xi)) = K(x;\xi) \equiv K(x;\xi) 1\!\!1_{\Gamma_\Lambda}(\gamma \setminus \xi).$$

Тоді

$$\rho_\Lambda(\eta) \ = \ z^{|\eta|}\frac{e^{-\beta W(x;\eta^{(\hat{x})})}}{Z_\Lambda}\int_{\Gamma_\Lambda}\int_{\Gamma_\Lambda} K(x;\xi)e^{-\beta U(\eta^{(\hat{x})}\cup\xi\cup\gamma)}\lambda_{z\sigma}(d\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\xi). \tag{111}$$

Використовуючи означення кореляційного функціоналу (102), отримаємо остаточне співвідношення:

$$\rho_\Lambda(\eta) \ = \ ze^{-\beta W(x;\eta^{(\hat{x})})}\int_{\Gamma_\Lambda} K(x;\xi)\rho_\Lambda(\eta^{(\hat{x})}\cup\xi)\lambda_\sigma(d\xi). \tag{112}$$

В останньому інтегралі була використана рівність:

$$\int_{\Gamma_\Lambda} z^{-|\xi|}f(\xi)\lambda_{z\sigma}(d\xi) = \int_{\Gamma_\Lambda} f(\xi)\lambda_\sigma(d\xi), \tag{113}$$

яка випливає з означення інтеграла за мірою Лебега-Пуассона.

Формально таке саме рівняння можна записати і для нескінченної системи в усьому просторі $\mathbb{R}^d$:

$$\rho(\eta) \ = \ ze^{-\beta W(x;\eta^{(\hat{x})})}\int_{\Gamma_0} K(x;\xi)\rho(\eta^{(\hat{x})}\cup\xi)\lambda_\sigma(d\xi), \ \eta\in\Gamma_0. \tag{114}$$

Якщо існують розв'язки обох рівнянь (112), (114), і розв'язок рівняння (112) в деякому сенсі прямує до розв'язку рівняння (114) при $\Lambda\uparrow\mathbb{R}^d$, то він відповідає сім'ї кореляційних функцій міри Гіббса. Якщо такий розв'язок є єдиним при певних значеннях термодинамічних параметрів z,β, то відповідна міра Гіббса буде відповідати єдиному гіббсівському стану. Якщо ж є декілька розв'язків при певних значеннях термодинамічних параметрів z,β, тоді ці розв'язки будуть відповідати різним гіббсівським станам і тоді кажуть, що в системі в околі цих термодинамічних параметрів відбувається *фазовий перехід*.

Значення параметрів z,β, при яких існує єдиний гіббсівський стан, називають *регулярними*. Дослідження рівнянь Кірквуда-Зальцбурга в області регулярних значень параметрів z,β добре висвітлене в літературі і читач може знайти їх, наприклад, в монографіях [19, 21] та відповідних в них посиланнях. Аналогічні дослідження при довільних

z, β пов'язані з вивченням спектру оператора Кірквуда-Зальцбурга, який визначається у деякому банаховому просторі правою частиною рівняння (112)(або рівняння (114) для необмеженої системи). Л. А. Пастур [19, 21] (див., також, [81, 82, 83]) вперше розглянув оператор Кірквуда-Зальцбурга для обмеженої системи і показав, що його спектр збігається з нулями великої статистичної суми. В роботі [84] була встановлена структура спектру оператора Кірквуда-Зальцбурга для обмеженої системи та його фредгольмів характер.

Зауваження 4.2. Крім рівнянь Кірквуда-Зальцбурга існують інші рівняння, яким задовольняє кореляційний функціонал $\rho(\eta)$, $\eta \in \Gamma_0$ рівноважних систем статистичної механіки. Це рівняння Майєра-Монтролла (див. [19], розд. 4.2.5) та рівняння Боголюбова, на якому ми зупинимося в наступному підрозділі. Нестандартний підхід запропонував М. С. Гончар. В роботі [85] (див., також, [86]) виведені рівняння, права частина яких задається оператором, що зберігає інваріантним конус позитивних функцій. Для позитивних парних потенціалів взаємодії побудовані розв'язки у вигляді розкладів, які збігаються при довільних значеннях параметрів z, β.

4.5 Рівняння BBGKY

Для того, щоб записати рівняння для кореляційних функцій нерівноважної системи взаємодіючих частинок, треба розглянути їх в конфігураційному просторі маркованих конфігурацій $\widetilde{\Gamma}$, визначеному в (16). Для довільної конфігурації $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}$ з $\gamma \in \Gamma_0$ гамільтоніан складається з кінетичної енергії частинок конфігурації і потенціальної енергії їх взаємодії:

$$H(\widetilde{\gamma}) = E_k(\widetilde{\gamma}) + U(\gamma), \ \ E_k(\widetilde{\gamma}) = \sum_{x \in \gamma} \frac{p_x^2}{2m}. \tag{115}$$

Розглянемо спершу систему в деякій обмеженій області $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$. Важливою характеристикою системи є поведінка частинок поблизу границі $\partial\Lambda$ посудини Λ. Задамо такі граничні умови за допомогою деякого зовнішнього поля $u^{\Lambda}(x),\ x \in \Lambda$:

$$u^{\Lambda}(x) := \begin{cases} +\infty, \text{ якщо, } x \in \partial\Lambda, \\ 0, \text{ якщо, } x \in \Lambda_{\delta}, \end{cases} \tag{116}$$

де область Λ_{δ} містить точки $x \in \Lambda$, які знаходяться на відстані $d \geq \delta > 0$ від $\partial\Lambda$. В області $\Lambda \setminus \Lambda_{\delta}$ функція $u^{\Lambda}(x)$ є гладкою позитивною функцією. Гамільтоніан такої системи має вигляд:

$$H^{\Lambda}(\widetilde{\gamma}) = E_k(\widetilde{\gamma}) + U^{\Lambda}(\gamma),\ U^{\Lambda}(\gamma) := U(\gamma) + \sum_{x\in\gamma} u^{\Lambda}(x),\ \gamma \in \Gamma_{\Lambda}. \tag{117}$$

4.5.1 Вивід рівнянь BBGKY

Еволюція щільності міри Гіббса (див. (50), (51)) описується рівнянням Ліувіля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} D_{\Lambda}(t;\widetilde{\gamma}) &= \left\{H^{\Lambda}\widetilde{\gamma}, D(t;\widetilde{\gamma})\right\}_P = \\ &= \sum_{x\in\gamma} \left[\nabla_x H^{\Lambda}(\widetilde{\gamma}) \cdot \nabla_{p_x} D_{\Lambda}(t;\widetilde{\gamma}) - \nabla_{p_x} H^{\Lambda}(\widetilde{\gamma}) \cdot \nabla_x D_{\Lambda}(t;\widetilde{\gamma})\right], \end{aligned} \tag{118}$$

де $\{\cdot,\cdot\}_P$ – це дужки Пуассона, які визначаються другою стрічкою рівняння (118), а ∇_x (∇_{p_x}) – градієнт за змінною x (p_x). Треба також задати початковий розподіл:

$$D_{\Lambda}(t;\widetilde{\gamma})|_{t=0} = D^0_{\Lambda}(\widetilde{\gamma}). \tag{119}$$

Виходячи з вигляду гамільтоніану (див. (115)-(117)), граничні умови для функцій $D_{\Lambda}(t;\widetilde{\gamma})$ можна записати у такому вигляді:

$$D_{\Lambda}(t;\widetilde{\gamma})|_{\forall x\in\gamma, x\in\partial\Lambda} = D_{\Lambda}(t;\widetilde{\gamma})|_{\forall x\in\gamma, p_x^{(\alpha)}=\pm\infty, \alpha=\overline{1,d}} = 0. \tag{120}$$

Еволюція початкової функції розподілу $D^0_{\Lambda}(\widetilde{\gamma})$ описується рівнянням Ліувіля (118) і визначається еволюцією початкової конфігурації $\gamma = \{\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_N\},\ N = |\gamma|$, або на мові пуассонівських полів:

$$\widetilde{\gamma}(\widetilde{x}) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\widetilde{x} - \widetilde{x}_i) = \delta(x - x_i)\delta(p_x - p_{x_i}). \tag{121}$$

Стан системи частинок в момент часу t буде визначатись конфігурацією

$$\widetilde{\gamma}_t = \{x_1(t), \ldots, x_N(t)\}, \ \widetilde{\gamma}_t(\widetilde{x}) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\widetilde{x} - \widetilde{x}_i(t), \ \widetilde{x}_i(t) = \widetilde{x}_i(t, \widetilde{\gamma}), \tag{122}$$

де точки конфігурації $\widetilde{x}_i(t)$ задовольняють систему рівнянь Гамільтона:

$$\frac{dp_{x_i}(t)}{dt} = -\frac{\partial H^{\Lambda}(\widetilde{\gamma}_t)}{\partial x_i(t)}, \ \frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{\partial H^{\Lambda}(\widetilde{\gamma}_t)}{\partial p_{x_i}(t)}. \tag{123}$$

Позначимо через T_t оператор зсуву вздовж траєкторій частинок. Тоді

$$T_t \widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}_t. \tag{124}$$

Пропозиція 4.1. Нехай $\widetilde{\Gamma}_{\Lambda}$ з $\Lambda \in \mathcal{B}_c$ є фазовим простором системи частинок, еволюція фазових точок $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}_{\Lambda}$ яких описує система рівнянь Гамільтона (123) з Гамільтоніаном (117). Тоді міра

$$\mu^t_{D_{\Lambda}}(d\widetilde{\gamma}) := D_{\Lambda}(t; \widetilde{\gamma}) \lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}), \ \ t \geq 0 \tag{125}$$

є інваріантною відносно зсувів T_t у сенсі (див. [87]):

$$\int_{\widetilde{\Gamma}_{\Lambda}} F(\widetilde{\gamma}) \mu^t_{D_{\Lambda}}(d\widetilde{\gamma}) = \int_{\widetilde{\Gamma}_{\Lambda}} F(T_t \widetilde{\gamma}) \mu^0_{D_{\Lambda}}(d\widetilde{\gamma}) \tag{126}$$

для функцій F, для яких інтеграли в (126) приймають скінченне значення.

Доведення є наслідком відомої теореми Ліувіля (див., наприклад, [21]) та визначення міри $\lambda_{\widetilde{\sigma}}$.

Кореляційні функції, які відповідають нерівноважній динаміці, визначаються аналогічно рівноважному випадку (84):

$$\rho_{\Lambda}(t; \widetilde{\eta}) = \int_{\widetilde{\Gamma}_{\Lambda}} D_{\Lambda}(t; \widetilde{\eta} \cup \widetilde{\gamma}) \lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}), \tag{127}$$

де $\widetilde{\sigma}$ – міра Лебега в $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$, тобто $d\widetilde{\sigma} = dxdp_x$. Продиференціюємо рівняння (127). Враховуючи рівняння Ліувіля та співвідношення:

$$\nabla_x H^\Lambda(\widetilde{\gamma}) := \begin{cases} \nabla_x U^\Lambda(\eta) + \nabla_x W(\eta;\gamma), \text{ якщо, } x \in \eta, \\ \nabla_x U^\Lambda(\gamma) + \nabla_x W(\eta;\gamma),, \text{ якщо, } x \in \gamma, \end{cases} \tag{128}$$

$$\nabla_{p_x} H^\Lambda(\widetilde{\gamma}) = \frac{1}{m}\mathbf{p}_x, \; x \in \eta \cup \gamma, \tag{129}$$

отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho_\Lambda(t;\widetilde{\eta}) &= \sum_{x\in\eta}\left[\nabla_x U^\Lambda(\eta)\cdot\nabla_{p_x}\rho_\Lambda(t;\widetilde{\eta}) - \frac{1}{m}\mathbf{p}_x\cdot\nabla_x\rho_\Lambda(t;\widetilde{\eta})\right] + \\ &+ \sum_{x\in\eta}\int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda}\sum_{y\in\gamma}\nabla_x\phi(|x-y|)\cdot\nabla_{p_x}D_\Lambda(t;\widetilde{\eta}\cup\widetilde{\gamma})\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}) + \\ &+ \int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda}\sum_{x\in\gamma}\nabla_x H^\Lambda(\widetilde{\eta}\cup\widetilde{\gamma})\cdot\nabla_{p_x}D_\Lambda(t;\widetilde{\eta}\cup\widetilde{\gamma})\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}) - \\ &- \int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda}\sum_{x\in\gamma}\nabla_{p_x} H^\Lambda(\widetilde{\eta}\cup\widetilde{\gamma})\cdot\nabla_x D_\Lambda(t;\widetilde{\eta}\cup\widetilde{\gamma})\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}). \end{aligned} \tag{130}$$

Застосуємо до 2-го, 3-го і 4-го доданків рівняння (130) формулу Мекке (33), яка має місце також на просторі $\widetilde{\Gamma}_\Lambda$ для міри $\lambda_{\widetilde{\sigma}}$. Враховуючи означення (127) та граничні умови (120), отримуємо рівняння Боголюбова-Борна-Гріна-Кірквуда-Івона:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho_\Lambda(t;\widetilde{\eta}) &= \sum_{x\in\eta}\left[\nabla_x U^\Lambda(\eta)\cdot\nabla_{p_x}\rho_\Lambda(t;\widetilde{\eta}) - \frac{1}{m}\mathbf{p}_x\cdot\nabla_x\rho_\Lambda(t;\widetilde{\eta})\right] + \\ &+ \sum_{x\in\eta}\int_\Lambda\int_{\mathbb{R}^d}\nabla_x\phi(|x-y|)\cdot\nabla_{p_x}\rho_\Lambda(t;\widetilde{\eta}\cup\{(y,p_y)\})dydp_y. \end{aligned} \tag{131}$$

4.5.2 Представлення розв'язку рівнянь BBGKY

Щоб отримати формулу, подібну до формули (102), запишемо спершу твірний функціонал для послідовності функцій $\rho_n^\Lambda(t;\widetilde{x}_1,\ldots,\widetilde{x}_n)$:

$$\begin{aligned} F_\Lambda(t;j) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{\Lambda^n}\int_{\mathbb{R}^{dn}}(d\widetilde{x})^n\rho_n^\Lambda(t;\widetilde{x}_1,\ldots,\widetilde{x}_n)j(\widetilde{x}_1)\cdots j(\widetilde{x}_n) = \\ &= \int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda}\rho_\Lambda(t;\widetilde{\eta})\prod_{\widetilde{x}\in\widetilde{\eta}}j(\widetilde{x})\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\eta}). \end{aligned} \tag{132}$$

Підставимо у цю формулу визначення (127) і застосуємо рівність (36), яка справедлива і для міри $\lambda_{\widetilde{\sigma}}$ на просторі $\widetilde{\Gamma}_\Lambda$ маркованих конфігурацій $\widetilde{\gamma}$ з $X=\Lambda\otimes\mathbb{R}^d$, $G(\widetilde{\eta}\cup\widetilde{\gamma})=D_\Lambda(t,\widetilde{\eta}\cup\widetilde{\gamma})$ і $H(\widetilde{\eta},\widetilde{\gamma})=(\prod_{\widetilde{x}\in\widetilde{\eta}}j(\widetilde{x}))1\!\!1_\Lambda(\gamma)$. В результаті отримуємо:

$$\begin{aligned} F_\Lambda(t;j) &= \int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda}D_\Lambda(t;\widetilde{\gamma})\sum_{\widetilde{\eta}\subseteq\widetilde{\gamma}}\prod_{\widetilde{x}\in\widetilde{\eta}}j(\widetilde{x})\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}) = \\ &= \int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda}D_\Lambda(t;\widetilde{\gamma})e^{<\widetilde{\gamma},\log(1+j)>}\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}) = \\ &= \int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda}D_\Lambda(t;\widetilde{\gamma}):e^{<\widetilde{\gamma},j>}:\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}), \end{aligned} \tag{133}$$

де ми скористалися формулою (91). Скористаємося формулою (126). Тоді остаточно отримуємо наступне представлення для твірного функціоналу:

$$\begin{aligned} F_\Lambda(t;j) &= \int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda}:e^{<\widetilde{\gamma}_t,j>}:D_\Lambda(0;\widetilde{\gamma})\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}) = \qquad (134)\\ &= \int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda}\exp[<\gamma_t,\log(1+j)>]D_\Lambda(0;\widetilde{\gamma})\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}) \end{aligned}$$

і автоматично для кореляційних функцій:

$$\rho_\Lambda(t;\widetilde{\eta}) = \int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda}:\prod_{\widetilde{x}\in\widetilde{\eta}}\widetilde{\gamma}_t(\widetilde{x}):D_\Lambda(0;\widetilde{\gamma})\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}), \tag{135}$$

де віківський добуток треба обраховувати за допомогою формули (92). Залишається з'ясувати, яким чином визначити еволюцію пуассонівського поля, тобто функцію $\widetilde{\gamma}_t$ (див. (122)).

Для цього виконаємо диференціювання по змінній t функціоналу $F_\Lambda(t;j)$ у формулі (133), вставляючи праву частину рівняння Ліувіля (118). Застосуємо знову формулу Мекке (33) і скористаємося формулами (128), (129), (57):

$$\frac{\partial F_\Lambda(t;j)}{\partial t} =$$
$$= \int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda} \int_\Lambda \int_{\mathbb{R}^d} \left[\nabla_x W_x^\Lambda(\gamma) \cdot \nabla_{p_x} D_\Lambda(t; \widetilde{\gamma} \cup \{x\})\right] : e^{<\widetilde{\gamma}\cup\{x\},j>} : d\widetilde{x}\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}) -$$
$$- \int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda} \int_\Lambda \int_{\mathbb{R}^d} \left[\frac{1}{m}\mathbf{p}_x \cdot \nabla_x D_\Lambda(t; \widetilde{\gamma} \cup \{x\})\right] : e^{<\widetilde{\gamma}\cup\{x\},j>} : d\widetilde{x}\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}), \quad (136)$$

де $W_x^\Lambda(\gamma) := W(x;\gamma) + u^\Lambda(x)$. Враховуючи граничні умови (120), виконаємо інтегрування за частинами по змінній p_x у першому доданку і по змінній x – у другому доданку, діючи відповідними операторами ∇_{p_x} і ∇_x на фактор : $\exp[< \widetilde{\gamma} \cup \{x\}, j >]$:. Далі знову застосуємо формулу (33), повертаючись до сумування по точках конфігурації $\widetilde{\gamma}$ і заміняючи це сумування введенням інтегралу від пуассонівського поля $\widetilde{\gamma}(\widetilde{x})$ подібно до формул (85), (86). Після цього виконаємо ще раз інтегрування за частинами в цих інтегралах в сенсі узагальнених функцій, тобто перекидаючи оператори ∇_{p_x} і ∇_x на пуассонівські поля. Тоді остаточно отримаємо таке представлення:

$$\frac{\partial F_\Lambda(t;j)}{\partial t} = -\int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda} \lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma}) D_\Lambda(t;\widetilde{\gamma}) \int_\Lambda \int_{\mathbb{R}^d} d\widetilde{x} \Big(\frac{1}{m}\mathbf{p}_x \cdot \nabla_x \widetilde{\gamma}(\widetilde{x}) -$$
$$- : \nabla_{p_x}\widetilde{\gamma}(\widetilde{x}) \int_\Lambda \int_{\mathbb{R}^d} d\widetilde{x'} \widetilde{\gamma}(\widetilde{x'}) : \cdot (\nabla_x \phi(|x-x'|) + \nabla_x u^\Lambda(x))\Big) \frac{\delta}{\widetilde{\gamma}(x)} : e^{<\widetilde{\gamma},j>} :, \quad (137)$$

де

$$: \widetilde{\gamma}(\widetilde{x})\widetilde{\gamma}(\widetilde{x'}) : = \ \widetilde{\gamma}(\widetilde{x})\widetilde{\gamma}(\widetilde{x'}) \ - \ \delta(\widetilde{x} - \widetilde{x'}),$$

що усуває доданок $\nabla_x \phi(|x - x'|)$ при $x - x' = 0$. Аналогічно, диференціюючи $F_\Lambda(t;j)$ у формулі (136), отримаємо вираз, який після застосування рівності (126) буде збігатись з правою частиною (137), якщо функція $\widetilde{\gamma}_t(\widetilde{x})$, буде задовольняти рівняння Власова

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widetilde{\gamma}_t(\widetilde{x})}{\partial t} &= -\frac{1}{m}\mathbf{p}_x\cdot\nabla_x\widetilde{\gamma}_t(\widetilde{x})+ \\ &+:\nabla_{p_x}\widetilde{\gamma}_t(\widetilde{x})\int_\Lambda\int_{\mathbb{R}^d}d\widetilde{x'}\widetilde{\gamma}_t(\widetilde{x'}):\cdot(\nabla_x\phi(|x-x'|)+\nabla_x u^\Lambda(x))\end{aligned}\tag{138}$$

у сенсі узагальнених функцій. Використовуючи це рівняння, легко перевірити безпосередньо, що вираз (135) задовольняє рівняння (131) (див., також, [88]).

Зауважимо, що питання, які були розглянуті у цьому підрозділі, з дещо інших позицій висвітлені у роботі [89].

4.6 Проблеми термодинамічного граничного переходу

У розділі 4. 4 ми вже обговорили питання термодинамічного граничного переходу для кореляційних функцій в області регулярних значень параметрів z, β, для яких існує єдина міра Гіббса $\mu \in \mathcal{G}_V$. Для довільних значень z, β вирішальною є оцінка (4), яка була отримана в роботі [32]. Доведення цієї рівності у роботі [32] є досить громіздким (див. детальніше [21]). У роботі [48] було запропоновано інше, більш прозоре, доведення, яке спирається на використанні властивостей інтегралів за мірою Пуассона. Це доведення дуже співзвучне темі цієї статті і тому ми в скороченому вигляді наведемо це доведення. Воно спирається на розкладі кореляційних функцій $\rho_\Lambda(\eta)$, які визначаються інтегралом (84), в ряд, кожний член якого також представляється подібними інтегралами, але інтегрування в них виконується окремо по щільних конфігураціях (28) і окремо по розріджених конфігураціях (27).

4.6.1 Розклад кореляційних функцій за щільностями конфігурацій

Нехай $X \subseteq \Lambda$ є об'єднання кубиків Δ, в яких знаходиться дві або більше частинок. Внесок щільності міри Гіббса $\exp\{-\beta U(\gamma)\}$ з $\gamma \in \Gamma_X^{(den)}$

грає роль малого параметру, бо $\exp\{-\beta\phi(|x-y|)\} \simeq \exp\{-\beta\frac{c}{a^s}\}, c > 0, s \geq d$, якщо $x, y \in \Delta \subset X$ і достатньо малих a. Основна ідея полягає в тому, щоб відокремити інтегрування по щільних конфігураціях від інтегрувань по розріджених конфігураціях. Щоб це зробити, введемо функцію-індикатор для розріджених та щільних конфігурацій. Для розріджених конфігурацій таку функцію визначимо формулою:

$$\chi_-^\Delta(\gamma) \;=\begin{cases} 1, & \text{якщо } |\gamma_\Delta| = 0 \vee 1, \\ 0, & \text{в іншому випадку}, \end{cases} \tag{139}$$

а для *щільних* конфігурацій формулою:

$$\chi_+^\Delta(\gamma) \;=\; 1 - \chi_-^\Delta(\gamma). \tag{140}$$

Щоб побудувати такий розклад, запишемо наступний розклад одиниці для $\gamma \in \Gamma_\Lambda$:

$$\begin{aligned} 1 \;=\; \prod_{\Delta\in\overline{\Delta}_{a,\Lambda}} \left[\chi_-^\Delta(\gamma) + \chi_+^\Delta(\gamma)\right] \;&=\; \sum_{n=0}^{N_\Lambda} \sum_{\overline{X}_n\subseteq\overline{\Delta}_{a,\Lambda}} \prod_{\Delta\in\overline{X}_n} \chi_+^\Delta(\gamma) \prod_{\Delta\in\overline{\Delta}_{a,\Lambda}\setminus\overline{X}_n} \chi_-^\Delta(\gamma) \\ &:= \sum_{\emptyset\subseteq\overline{X}\subseteq\overline{\Delta}_{a,\Lambda}} \widetilde{\chi}_+^{\overline{X}}(\gamma)\widetilde{\chi}_-^{\overline{\Delta}_{a,\Lambda}\setminus\overline{X}}(\gamma), \end{aligned} \tag{141}$$

де N_Λ – це кількість кубів Δ у покритті Λ_a (див. (26)), $\overline{X}_n := \{\Delta_1, ..., \Delta_n\}$ і

$$\widetilde{\chi}_\pm^{\overline{X}}(\gamma) \;=\; \prod_{\Delta\in\overline{X}} \chi_\pm^\Delta(\gamma).$$

Підставляючи (141) в (84) при $\overline{\gamma} = \emptyset$, отримаємо:

$$\rho_\Lambda(\eta) \;=\; \frac{z^{|\eta|}}{Z_\Lambda} \sum_{\emptyset\subseteq\overline{X}\subseteq\overline{\Delta}_{a,\Lambda}} \int_{\Gamma_\Lambda} \widetilde{\chi}_+^{\overline{X}}(\gamma)\widetilde{\chi}_-^{\overline{\Delta}_{a,\Lambda}\setminus\overline{X}}(\gamma) e^{-\beta U(\eta\cup\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{142}$$

Визначимо потенціал "твердих"кубиків:

$$\chi^{cor}(\Delta_1, ..., \Delta_n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset \text{ для всіх } i \neq j \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \tag{143}$$

Тоді (142) можна записати у вигляді:

$$\rho_\Lambda(\eta) = \frac{z^{|\eta|}}{Z_\Lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{(\Delta_1, ..., \Delta_n) \subset \overline{\Delta}_{a,\Lambda}} \chi^{cor}(\Delta_1, ..., \Delta_n) \times$$

$$\times \int_{\Gamma_\Lambda} \widetilde{\chi}_+^{\overline{X}}(\gamma) \widetilde{\chi}_-^{\overline{\Delta}_{a,\Lambda} \setminus \overline{X}}(\gamma) e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \tag{144}$$

де $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$ це послідовність кубиків на відміну від множини кубиків у формулі (142). Сумування по кожному Δ_i в (144) виконується незалежно по кожному кубику.

Наступним кроком є представлення експоненти в (144):

$$e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} = e^{-\beta U(\eta)} \prod_{i=1}^{n} e^{-\beta U(\gamma_{\Delta_i}) - \beta W(\eta; \gamma_{\Delta_i})} \prod_{1 \leq i < j \leq n} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta_i}; \gamma_{\Delta_j})} \times$$

$$\times e^{-\beta W(\eta; \gamma_{\Lambda_a \setminus X_n})} e^{-\beta U(\gamma_{\Lambda_a \setminus X_n})} \prod_{i=1}^{n} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta_i}; \gamma_{\Lambda_a \setminus X_n})}, \tag{145}$$

де $X_n := \cup_{i=1}^{n} \Delta_i$, а Λ_a визначене в (26). Тоді, використовуючи розклад (145) і властивість (35), отримуємо:

$$\rho_\Lambda(\eta) = \frac{z^{|\eta|}}{Z_\Lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \widetilde{\rho}_n^{\Lambda}(\eta), \tag{146}$$

де

$$\widetilde{\rho}_n^{\Lambda}(\eta) = \sum_{(\Delta_1, ..., \Delta_n) \subset \overline{\Delta}_{a,\Lambda}} \chi^{cor}(\Delta_1, ..., \Delta_n) e^{-\beta U(\eta)} \times \tag{147}$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\Gamma_{\Delta_i}^{(den)}} \lambda_\sigma(d\gamma_{\Delta_i}) e^{-\beta U(\gamma_{\Delta_i} | \eta)} \right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta_i} | \gamma_{\Delta_j})} \times$$

$$\times \int_{\Gamma_{\Lambda_a \setminus X_n}^{(dil)}} \lambda_\sigma(d\gamma_{\Lambda_a \setminus X_n}) e^{-\beta U(\gamma_{\Lambda_a \setminus X_n} | \eta)} \prod_{i=1}^{n} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta_i} | \gamma_{\Lambda_a \setminus X_n})},$$

де $U(\gamma|\eta)$ визначено в (57). Розіб'ємо простір конфігурацій $\Gamma_{\Delta}^{(den)}$ на два підпростори $\Gamma_{\Delta}^{(>)} = \Gamma_{\Delta}^{(>)}(\eta)$ і $\Gamma_{\Delta}^{(<)} = \Gamma_{\Delta}^{(<)}(\eta)$, які визначаються формулами:

$$\Gamma_{\Delta}^{(>)}(\eta) = \Gamma_{\Delta}^{(>)} := \left\{ \gamma \in \Gamma_{\Delta}^{den} \middle| \ |\gamma| > d_{\eta}^{\varepsilon}(\Delta), \ \ |\gamma| \geq 2 \right\} \qquad (148)$$

і

$$\Gamma_{\Delta}^{(<)}(\eta) = \Gamma_{\Delta}^{(<)} := \left\{ \gamma \in \Gamma_{\Delta}^{den} \middle| \ |\gamma| \leq d_{\eta}^{\varepsilon}(\Delta), \ \ |\gamma| \geq 2 \right\}, \qquad (149)$$

де $\Delta \in \overline{\Delta}_a$, $0 < \varepsilon \leq 1$ і $d_{\eta}^{\varepsilon}(\Delta) = (dist(\eta, \Delta))^{\varepsilon}$.

Очевидно, що $\Gamma_{\Delta}^{(den)} = \Gamma_{\Delta}^{(>)} \cup \Gamma_{\Delta}^{(<)}$. Для довільних $X_a = \cup_{\Delta \in \overline{\Delta}_{a,X}} \Delta$, де $\overline{\Delta}_{a,X} = \{\Delta \in \overline{\Delta}_a \mid \Delta \cap X \neq \emptyset\}$, $X, X_a \subset \mathbb{R}^d$ позначимо

$$\Gamma_{X_a}^{(sign)} := \bigsqcup_{\Delta \in \overline{\Delta}_{a,X}} \Gamma_{\Delta}^{(sign)}, \ \ sign \in \{dil, >, <\}. \qquad (150)$$

Тоді кожний інтеграл у першому добутку формули (147) можна розбити на два інтеграли

$$\int_{\Gamma_{\Delta_i}^{(den)}} \lambda_{\sigma}(d\gamma_{\Delta_i})(...) \ = \ \int_{\Gamma_{\Delta_i}^{(>)}} \lambda_{\sigma}(d\gamma_{\Delta_i})(...) + \int_{\Gamma_{\Delta_i}^{(<)}} \lambda_{\sigma}(d\gamma_{\Delta_i})(...). \qquad (151)$$

З формули (151) випливає, що суму по всіх можливих положеннях $(\Delta_1, ..., \Delta_n) \subset \overline{\Delta}_{a,\Lambda}$ можна розбити на 2^n члени, у кожному з яких сума по $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$ розбивається на суму по $(\Delta_1, ..., \Delta_k) \subset \overline{\Delta}_{a,\Lambda}$, де інтегрування виконується по конфігураціях $\gamma_{\Delta_i} \in \Gamma_{\Delta_i}^{(<)}$, і суму по $(\Delta_1^{'}, ..., \Delta_{n-k}^{'}) \subset \overline{\Delta}_{a,\Lambda}$, де інтегрування виконується по конфігураціях $\gamma_{\Delta_i^{'}} \in \Gamma_{\Delta_i^{'}}^{(>)}$, а k змінюється від $k = 0$ до $k = n$.

Тоді вираз (146) можна записати у вигляді:

$$\rho_{\Lambda}(\eta) \ = \ \frac{z^{|\eta|}}{Z_{\Lambda}} \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k! \, (n-k)!} \, \widetilde{\rho}_{n;k}^{\Lambda}(\eta), \qquad (152)$$

де

$$\widetilde{\rho}_{n;k}^{\Lambda}(\eta) \ = \sum_{(\Delta_1, ..., \Delta_k) \subset \overline{\Delta}_{a,\Lambda}} \ \sum_{(\Delta_1^{'}, ..., \Delta_{n-k}^{'}) \subset \overline{\Delta}_{a,\Lambda}} \chi^{cor}(\Delta_1, ..., \Delta_k, \Delta_1^{'}, ..., \Delta_{n-k}^{'}) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{k}\left(\int_{\Gamma^{(<)}_{\Delta_i}} \lambda_\sigma(d\gamma_{\Delta_i}) e^{-\beta U(\gamma_{\Delta_i}|\eta)}\right) \prod_{1\le i<j\le k} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta_i}|\gamma_{\Delta_j})}\times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n-k}\left(\int_{\Gamma^{(>)}_{\Delta_i'}} \lambda_\sigma(d\gamma_{\Delta_i'}) e^{-\beta U(\gamma_{\Delta_i'}|\eta)}\right) e^{-\beta U(\eta)} \prod_{1\le i<j\le n-k} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta_i'}|\gamma_{\Delta_j'})}\times$$

$$\times \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n-k} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta_i}|\gamma_{\Delta_j'})} \int_{\Gamma^{(dil)}_{\Lambda_a\setminus X_n}} \lambda_\sigma(d\gamma_{\Lambda_a\setminus X_n}) e^{-\beta W(\eta|\gamma_{\Lambda_a\setminus X_n})}\times$$

$$\times \left(\prod_{j=1}^{n-k} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta_j'}|\gamma_{\Lambda_a\setminus X_n})}\right)\left(\prod_{i=1}^{k} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta_i}|\gamma_{\Lambda_a\setminus X_n})}\right) e^{-\beta U(\gamma_{\Lambda_a\setminus X_n})} \tag{153}$$

а $X_n = (\bigcup_{i=1}^{k}\Delta_i)\cup(\bigcup_{j=1}^{n-k}\Delta_j^{'})$.

Зауваження 4.3. В тих кубиках, які перетинають межу області Λ (i.e.$\Delta\cap\Lambda\neq\Delta$ але $\Delta\cap\Lambda\neq\emptyset$), інтегрування в (153) виконується по конфігураціях $\Gamma^{(sign)}_{\Delta\cap\Lambda}$, $sign\in\{dil,>,<\}$.

4.6.2 Існування станів Гіббса

Теорема 2. Нехай потенціал взаємодії ϕ задовольняє умовам **A**(див. (42)-(44)). Тоді для довільного $\Lambda\in\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ і довільних $\beta,z\geq 0$ існує константа $\xi=\xi(\beta,z)$ (що не залежить від Λ) така, що кореляційні функції $\rho^\Lambda(\eta)=\rho^\Lambda(\eta\mid\emptyset)$ задовольняють наступну нерівність:

$$\rho_\Lambda(\eta) \;\le\; \xi^{|\eta|} e^{-\delta\beta U_{\phi^+}(\eta)} \tag{154}$$

для довільного $0<\delta<1$.

Доведення. Щоб довести теорему використаємо розклад (153). Це дозволяє інтеграл (84) по усіх можливих конфігураціях Γ_Λ представити у вигляді розкладу, кожний член якого містить інтеграли, у яких інтегрування виконується в окремих кубиках в одному з просторів $\Gamma^{(<)}_\Delta$,

$\Gamma_{\Delta}^{(>)}$ або $\Gamma_{\Delta}^{(dil)}$. Враховуючи визначення (45), отримуємо оцінку:

$$-\beta \sum_{i=1}^{k} W(\eta|\gamma_{\Delta_i}) \;\leq\; \beta\,|\eta| \sup_{x\in\eta} \sum_{i=1}^{k} \sup_{y\in\gamma_{\Delta_i}} \phi^{-}(|x-y|)|\gamma_{\Delta_i}| \;\leq\; \beta\,|\eta|\,\upsilon_{\varepsilon}. \tag{155}$$

Остання нерівність справедлива тому, що $\gamma_{\Delta_i} \in \Gamma_{\Delta_i}^{(<)}$; таким чином

$$|\gamma_{\Delta_i}| \;\leq\; d_{\eta}^{\varepsilon}(\Delta_i) \;\leq\; |x-y|^{\varepsilon}, \tag{156}$$

де ми вибираємо $\varepsilon < \varepsilon_0$. Враховуючи (45) і (156), легко отримати:

$$-\beta \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n-k} W_{\phi^{-}}(\gamma_{\Delta'_j}|\gamma_{\Delta_i}) \;\leq\; \beta \sum_{j=1}^{n-k} |\gamma_{\Delta'_j}|(\upsilon_{\varepsilon} + (|\gamma_{\Delta'_j}|+1)\upsilon_0). \tag{157}$$

Деталі доведення в [49] (Лема 3.1).

Враховуючи, що $\gamma_{\Delta} \in \Gamma_{\Delta}^{(dil)}$, $|\gamma_{\Delta_i}| \leq 1,\ \forall\, \Delta \in \Lambda_a \setminus X_n$, отримаємо оцінки:

$$-\beta W(\eta\,|\,\gamma_{\Lambda_a\setminus X_n}) \leq \beta\,|\eta|\,\upsilon_0 \tag{158}$$

і

$$-\beta W(\gamma_{\Delta'_j}\,|\,\gamma_{\Lambda_a\setminus X_n}) \leq \beta|\gamma_{\Delta'_j}|\upsilon_0. \tag{159}$$

Умови **A**(див. (42)-(44)) дозволяють розбити потенціал ϕ на дві частини:

$$\phi \;=\; \delta\phi^{+} + \phi_{\delta}^{st},\;\; \phi_{\delta}^{st} := (1-\delta)\phi^{+} + \phi^{-}, \tag{160}$$

і так само, як ми отримали оцінку (48) за допомогою (49), маємо

$$U_{\phi_{\delta}^{st}}(\gamma) \geq \sum_{\Delta\in\overline{\Delta}_{\lambda}:|\gamma_{\Delta}|\geq 2} \left[\frac{(1-\delta)\varphi_0}{4(\sqrt{d}a)^s} - \frac{\upsilon_0}{2}\right] |\gamma_{\Delta}|^2 - \frac{\upsilon_0}{2}|\gamma|. \tag{161}$$

Для того, щоб мати позитивне значення виразу у квадратних дужках, треба вибрати достатньо мале значення параметра a. Виберемо деяке максимальне значення $a = a_{*}(\delta)$, для якого зберігається умова стійкості:

$$U_{\phi_\delta^{st}}(\gamma) \ \geq \ -B_\delta|\gamma|, \ B_\delta = \frac{\upsilon_0(a_*)}{2}. \tag{162}$$

Ця нерівність дозволяє записати наступну оцінку:

$$\sum_{i=1}^{n-k}\Big(U_{\phi_\delta^{st}}(\gamma_{\Delta_i^{'}}) + W_{\phi_\delta^{st}}(\eta|\gamma_{\Delta_i^{'}})\Big) + U_{\phi_\delta^{st}}(\eta) + \tag{163}$$
$$\sum_{1\leq i<j\leq n-k} W_{\phi_\delta^{st}}(\gamma_{\Delta_i^{'}}|\gamma_{\Delta_j^{'}}) \ \geq \ -B_\delta\,(\,|\eta| + \sum_{i=1}^{n-k}|\gamma_{\Delta_j^{'}}|).$$

Для того, щоб проконтролювати збіжність інтегралів по просторах $\Gamma_{\Delta_i^{'}}^{(>)}, i = 1, ..., n-k$ і сум по кубиках $(\Delta_1^{'}, ..., \Delta_{n-k}^{'}) \subset \overline{\Delta}_{a,\Lambda}$, розіб'ємо енергію $U_{\delta\phi^+}(\gamma_{\Delta_i^{'}}) = \delta U_{\phi^+}(\gamma_{\Delta_i^{'}})$ на дві частини, вибравши $\delta \ = \ \delta^{'} \ + \ \delta^{''}$ з деякими позитивними малими константами $\delta^{'}, \delta^{''}$. Використовуючи умову (43) і те, що для $\gamma_{\Delta'} \in \Gamma_{\Delta'}^{(>)}$ кількість точок $|\gamma_{\Delta'}| > d_\eta^\varepsilon(\Delta')$ (див. (148)), можна записати наступну нерівність:

$$U_{\delta\phi^+}(\gamma_{\Delta_i^{'}}) \geq \frac{1}{2}\delta' \frac{\varphi_0}{(\sqrt{d}a)^s}\,|\gamma_{\Delta_i^{'}}|\,(|\gamma_{\Delta_i^{'}}| \,-\, 1) \,+\, \delta'' \frac{\varphi_0}{(\sqrt{d}a)^s}\, d_\eta^\varepsilon(\Delta_i^{'}). \tag{164}$$

Ця оцінка забезпечує збіжність інтегралу

$$\int_{\Gamma_\Delta^{(>)}} \lambda_{z\sigma}(d\gamma_\Delta)\, e^{-\frac{1}{2}\beta\delta' \frac{\varphi_0}{(\sqrt{d}a)^s}\,|\gamma_{\Delta_i^{'}}|\,(|\gamma_{\Delta_i^{'}}|\,-\,1) + \beta\,(B_\delta + \upsilon_0\,(2+|\gamma_\Delta|) + \upsilon_\varepsilon)|\gamma_\Delta|} =$$
$$= \ K_1(a, z, \beta, \phi) \tag{165}$$

для достатньо малого a і це допомагає оцінити наступні суми:

$$\sum_{(\Delta_1^{'}, ..., \Delta_{n-k}^{'}) \subset \overline{\Delta}_{a,\Lambda}} \ \prod_{\Delta' \in \overline{\Delta}_{a,\Lambda}} e^{-\delta'' \frac{\varphi_0}{(\sqrt{d}a)^s} d_\eta^\varepsilon(\Delta_i^{'})} \leq \big(|\eta| K_2(a, \beta, \varepsilon)\big)^{n-k}. \tag{166}$$

Деталі доведення в [49] (Лема 3.3). Позначимо через $X_{n-k}^{(max)}$ об'єднання усіх кубів $\Delta_1^{'} \cup ... \cup \Delta_{n-k}^{'} = X_{n-k}^{'}$, в яких інтеграл (153) по конфігураціях в $\Lambda_a \setminus X_n$ приймає максимальне значення. Тоді, враховуючи елементарну оцінку $\chi^{cor}(\Delta_1, ..., \Delta_k, \Delta_1^{'}, ..., \Delta_{n-k}^{'}) \ \leq \ \chi^{cor}(\Delta_1, ..., \Delta_k)$ (див.

(143)) і в такій самій формі як (146), (147) для $\eta = \emptyset$ розклад для $Z_{\Lambda\setminus X_l^{(max)}}$, отримаємо наступну оцінку

$$\rho_\Lambda(\eta) \le \frac{1}{Z_\Lambda}\, e^{-\delta\beta U_{\phi^+}(\eta)}\, \bar{\xi}^{|\eta|} \sum_{n=0}^{N_\Lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{(|\eta|K)^{n-k}}{k!(n-k)!}\, \widetilde{\rho}_k^{\Lambda_a\setminus X_{n-k}^{(max)}}(\emptyset) =$$
$$= \frac{1}{Z_\Lambda}\, e^{-\delta\beta U_{\phi^+}(\eta)}\, \bar{\xi}^{|\eta|} \sum_{l=0}^{N_\Lambda} \frac{(|\eta|K)^l}{l!} \sum_{k=0}^{N_\Lambda - l} \frac{1}{k!} \widetilde{\rho}_k^{\Lambda_a\setminus X_l^{(max)}}(\emptyset) =$$
$$= e^{-\delta\beta U_{\phi^+}(\eta)}\, \bar{\xi}^{|\eta|} \sum_{l=0}^{N_\Lambda} \frac{(|\eta|K)^l}{l!} \frac{Z_{\Lambda\setminus X_l^{(max)}}}{Z_\Lambda}, \tag{167}$$

де $K = K_1\, K_2$ (див. (165), (166)), $\bar{\xi} := ze^{\beta(B_\delta + \upsilon_0 + \upsilon_\varepsilon)}$, і $\widetilde{\rho}_k^{\Lambda\setminus X_l^{(max)}}(\emptyset)$ і визначається формулою (147). З того факту, що $Z_{\Lambda_1} \le Z_{\Lambda_2}$ для $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, слідує нерівність (154) з $\xi = \bar{\xi} e^K$.

Зауваження 4.4. В нерівностях (162)-(166) константи $\upsilon_\varepsilon, \upsilon_0, B_\delta, K_1, K_2$ залежать від параметра a, тому ξ залежить від a, який є фіксованим. Але $\Delta \in \overline{\Delta}_a$ повинні бути такими, щоб взаємодія двох частинок в одному кубику була позитивною, тобто $a < r_0$ (див. (43)). Це забезпечує виконання нерівності (161).

□

З нерівностей (4) і (154) слідує, що для довільної конфігурації $\eta \in \Gamma_0$ і довільної послідовності $(\Lambda_n)_{n\ge 1}$ $(\Lambda_n \subset \Lambda_{n+1})$, яка прямує до $\mathbb{R}^d$ у сенсі Фішера (див. [19], Гл.2, § 2.1), такої, що $\eta \subset \Lambda_1$, існує підпослідовність (Λ_{n_k}) послідовності (Λ_n) така, що

$$\lim_{k\to\infty} \rho_{\Lambda_{n_k}}(\eta) = \rho(\eta) < \infty \tag{168}$$

для довільних позитивних z, β.

Як наслідок послідовностей (4) і (154) справедливою є наступна теорема.

Теорема 3. Нехай потенціал взаємодії ϕ задовольняє умовам **(A)**. Тоді для довільних $z \geq 0$ і $\beta \geq 0$

$$\mathcal{G}(\phi, z, \beta) \neq \emptyset.$$

Доведення слідує з роботи [32] (див. також інші аргументи в роботі [50], яка базується на (154) і Теоремі Прохорова).

Проблема граничного термодинамічного переходу для нерівноважних систем є значно складнішою і до цього часу повністю не вирішеною. Дослідження у цьому напрямку почалися, мабуть, ще з робіт Ленфорда [90, 91] (див. також інший підхід [92]). Надзвичайно важливим і плідним виявився операторно-функціональний підхід, запропонований Петриною [93], який розвивався в його власних роботах і в його учнів (див. детальніше [21, 94, 95]).

В підході, який розвивається в даній роботі, треба виконати граничний перехід у виразі (135). Безпосередньо міру початкового розподілу, яка в обмеженому об'ємі є $\mu^0_{D_\Lambda}(d\widetilde{\gamma}) = D_\Lambda(0;\widetilde{\gamma})\lambda_{\widetilde{\sigma}}(d\widetilde{\gamma})$, можна побудувати для взаємодій типу (42)-(43), як це було зроблено у випадку рівноважних розподілів. Але для повного вирішення цієї проблеми потрібно знайти слабкі розв'язки рівняння (138) і дослідити питання їх інтегрування за мірою μ^0, яка є граничною мірою міри $\mu^0_{D_\Lambda}$. Це питання є досить нетривіальним. Коротке обговорення питання існування таких розв'язків і деякі посилання на роботи, де приведені класи початкових умов, що забезпечують їх існування, приводиться в роботі [89].

5 Модель коміркового газу

Оцінки щільності міри Гіббса для обмеженої системи $e^{-\beta U(\gamma)}$ для конфігурацій $\gamma \in \Gamma_X^{(den)}$ вказують на те, що для посилено надстійких взаємодій роль щільних конфігурацій (28) є дуже малою, не дивлячись на ту обставину, що з точки зору міри Пуассона на повному просторі нескінченних конфігурацій Γ простір $\Gamma^{(dil)}$ є множиною міри нуль (див. [56], пропозиція 3.1). Тому виникає природна ідея описати фізичні властивості нескінченної неперервної системи з посилено надстійкою взаємодією модельною системою, у якої конфігураційний простір є $\Gamma^{(dil)}$. Таку модель ми будемо називати *комірковим газом.*

5.1 Конфігураційний простір

Означення 5.1. Для заданого розбиття $\overline{\Delta}_a$ простору $\mathbb{R}^d$ система *коміркового газу* (КГ) визначається наступним конфігураційним простором

$$\widetilde{\Gamma}^{(a)} = \widetilde{\Gamma}_{\overline{\Delta}_a} := \left\{ \gamma \in \Gamma | \, |\gamma_\Delta| = 0 \vee 1 \text{ для всіх } \Delta \in \overline{\Delta}_a \right\}, \tag{169}$$

Для того, щоб описати множини простору $\widetilde{\Gamma}^{(a)}$, перевизначимо простір $\widetilde{\Gamma}^{(a)}$ як простір *маркованих конфігурацій*:

$$\widetilde{\Gamma}^{(a)} := \{\widetilde{\gamma} = \{(\Delta_1, x_1), ..., (\Delta_n, x_n), ...\} | \, \Delta_i \neq \Delta_j, \; i \neq j\}, \tag{170}$$

де $x_i \in \Delta_i \subset \mathbb{R}^d, \; \Delta_i \in \overline{\Delta}_a$. Тобто, $\widetilde{\Gamma}^{(a)}$ можна представити як дискретну множину обмежених неперервних "спінів"(див., наприклад, [57], [58]).

Так само, як і в підрозділі 2.2, позначимо через $\widetilde{\Gamma}_0^{(a)}$ множину скінченних конфігурацій $\widetilde{\Gamma}^{(a)}$:

$$\widetilde{\Gamma}_0^{(a)} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}_0} \widetilde{\Gamma}^{(a;n)}, \tag{171}$$

де $\widetilde{\Gamma}^{(a;n)}$ – це простір конфігурацій в $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}_0^{(a)}$, який складається з n кубів $\{\Delta_1, ..., \Delta_n\} \subset \overline{\Delta}_a$ і відповідних положень $\{x_1 \in \Delta_1, ..., x_n \in \Delta_n\}$.

Позначимо через $\overline{X}_n$ множину кубів $\Delta_j \in \overline{\Delta}_a$, а через $X_n \subset \mathbb{R}^d$ об'єднання цих кубів. Нехай також $\mathfrak{X}_{\Delta_j}$ борелівські множини в $\mathcal{B}(\Delta_j) := \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \restriction \Delta_j, \; \Delta_j \in \overline{\Delta}_a$. Тоді циліндричну множину $\widetilde{X}_N^{(n)} = \widetilde{X}_N^{(n)}(\overline{\Lambda}_N, \overline{\mathfrak{X}}_N)$ в $\widetilde{\Gamma}^{(a;n)}$ і в $\widetilde{\Gamma}_0^{(a)}$ можна визначити за допомогою фіксованої множини Λ_N і послідовності множин $\mathfrak{X}_{\Delta_j} \in \mathcal{B}(\Delta_j), \; j = \overline{1, N}$ наступним чином

$(n \leq N)$:

$$\widetilde{X}_N^{(n)} = \Big\{ \{(\Delta_1, x_1), ..., (\Delta_n, x_n)\} \in \widetilde{\Gamma}^{(a;n)} \ \mid \ \overline{\Lambda}_n \subseteqq \overline{\Lambda}_N, \ \ x_j \in \mathfrak{X}_{\Delta_j}, \ j = \overline{1, n} \Big\} \tag{172}$$

і

$$\widetilde{X} := \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \ \bigcup_{\overline{\Lambda}_N \subset \overline{\Delta}_a} \ \bigcup_{\overline{\mathfrak{X}}_N} \ \bigsqcup_{n=0}^{N} \widetilde{X}_N^{(n)}(\overline{\Lambda}_N, \overline{\mathfrak{X}}_N) \in \mathcal{B}(\widetilde{\Gamma}_0^{(a)}), \tag{173}$$

де $\overline{\mathfrak{X}}_N = \{\mathfrak{X}_{\Delta_1}, ..., \mathfrak{X}_{\Delta_N}\}$.

5.2 Міри на конфігураційному просторі системи КГ

Визначимо аналог міри *Лебега-Пуассона* на $\widetilde{\Gamma}_0^{(a)}$. Визначимо спершу міру $\widetilde{\sigma}^{(n)}$ на множині (172):

$$\sigma^{(n)}(\widetilde{X}_N^{(n)}(\overline{\Lambda}_N, \overline{\mathfrak{X}}_N)) \ = \begin{cases} 1, & \text{for } n = 0, \\ \sum\limits_{\overline{\Lambda}_n \subseteqq \overline{\Lambda}_N} \sigma(\mathfrak{X}_{\Delta_1}) \cdots \sigma(\mathfrak{X}_{\Delta_n}) & \text{for } 1 \leq n \leq N, \\ 0, & \text{for } n \ > \ N. \end{cases} \tag{174}$$

Легко побачити, що використовуючи функцію χ_-^{Δ} в (139), можна підрахувати, що для $1 \leq n \leq N$

$$\sigma^{(n)}(\widetilde{X}_N^{(n)}(\overline{\Lambda}_N, \overline{\mathfrak{X}}_N)) \ = \ \frac{1}{n!} \int_{\mathfrak{X}_N} dx_1 \cdots \int_{\mathfrak{X}_N} dx_n \prod_{i=1}^{N} \chi_-^{\Delta_i}(\{x_1, ..., x_n\}), \tag{175}$$

де $\mathfrak{X}_N \ := \ \cup_{i=1}^N \mathfrak{X}_{\Delta_i}$ і $dx_i = \sigma(dx_i)$. Тоді міру Лебега-Пуассона на $\widetilde{\Gamma}_0^{(a)}$ і $\widetilde{\Gamma}_{\overline{\Lambda}_N}^{(a)}$ можна визначити наступною формулою:

$$\lambda_\sigma^{(a)} \ := \ \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^{(n)}. \tag{176}$$

Враховуючи (175), легко побачити, що для довільної $F \in L^1(\Gamma_0, \lambda_\sigma)$

$$\int_{\widetilde{\Gamma}_0^{(a)}} F(\widetilde{\gamma}) \lambda_\sigma^{(a)}(d\widetilde{\gamma}) \ = \ \int_{\Gamma_0} F(\gamma) \prod_{\Delta \in \overline{\Delta}_a} \chi_-^{\Delta}(\gamma) \lambda_\sigma(d\gamma). \tag{177}$$

5.3 Кореляційні функції та тиск системи КГ

Сім'я кореляційних функцій КГ визначається аналогічно (84):

$$\rho_\Lambda^{(a)}(\widetilde{\eta}) = \frac{z^{|\widetilde{\eta}|}}{Z_\Lambda^{(a)}} \int_{\widetilde{\Gamma}_{\overline{\Lambda}}^{(a)}} e^{-\beta U(\widetilde{\eta}\cup\widetilde{\gamma})} \lambda_{z\sigma}^{(a)}(d\widetilde{\gamma}), \quad \widetilde{\eta} \in \widetilde{\Gamma}_{\overline{\Lambda}},\ \overline{\Lambda} \in \mathcal{B}_c(\overline{\Delta}_a), \tag{178}$$

$$Z_\Lambda^{(a)} = \int_{\widetilde{\Gamma}_{\overline{\Lambda}}^{(a)}} e^{-\beta U(\widetilde{\gamma})} \lambda_{z\sigma}^{(a)}(d\widetilde{\gamma}). \tag{179}$$

Використовуючи (177), праву частину (178) можна переписати за допомогою інтегралу за мірою $\lambda_{z\sigma}$ на Γ_Λ:

$$\rho_\Lambda^{(a)}(\widetilde{\eta}) = \rho_\Lambda^{(a)}(\eta) = \frac{z^{|\eta|}}{Z_\Lambda^{(a)}} \int_{\Gamma_{\Lambda\setminus\Lambda_\eta}} e^{-\beta U(\eta\cup\gamma)} \prod_{\Delta\in\overline{\Delta}_a} \chi_-^\Delta(\gamma_\Delta)\lambda_{z\sigma}(d\gamma), \tag{180}$$

де $\Lambda_\eta := \bigcup_{\Delta:\Delta\cap\eta\neq\emptyset} \Delta$ і $\eta \in \Gamma_0^{(dil)}$.

Оцінка типу нерівності (154) та існування границі (168) може бути отримана аналогічно (див. деталі в [54]). Але основним результатом є те, що ці граничні функції як завгодно точно апроксимують граничні кореляційні функції $\rho(\eta)$ неперервної нескінченної системи взаємодіючих частинок при прямуванні параметра a до нуля. Такий самий результат був доведений і для тиску. На завершення цього розділу ми наводимо дві теореми, доведення яких можна знайти в роботах [52, 53, 54].

Теорема 4. Нехай потенціал взаємодії ϕ задовольняє умовам **(A)**. Тоді існують граничні значення термодинамічного потенціалу тиску

$$p(z,\beta) = \frac{1}{\beta}\lim_{l\to\infty}\frac{1}{|\Lambda_l|}\log Z_{\Lambda_l}(z,\beta), \tag{181}$$

і

$$p^{(a)}(z,\beta) = \frac{1}{\beta}\lim_{l\to\infty}\frac{1}{|\Lambda_l|}\log Z_{\Lambda_l}^{(a)}(z,\beta) \tag{182}$$

і для довільного $\varepsilon > 0$ існує $a_1 = a_1(z,\beta,\varepsilon) > 0$ таке, що:

$$|p(z,\beta) - p^{(a)}(z,\beta)| < \varepsilon \tag{183}$$

для всіх позитивних значень z, β і $a \in (0, a_1(z,\beta,\varepsilon))$.

Теорема 5. Нехай потенціал взаємодії ϕ задовольняє умовам **(A)**. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$, довільних значень активності і температури $z,\ \beta$ і довільної конфігурації $\eta \in \Gamma_0$ існує $a = a(z, \beta, \varepsilon) > 0$ така, що:

$$|\rho(\eta; z, \beta) - \rho^{(a)}(\eta; z, \beta)| < \varepsilon, \tag{184}$$

де $\rho(\eta; z, \beta)$ і $\rho^{(a)}(\eta; z, \beta)$ це граничні значення $\rho_{\Lambda_{n'_k}}(\eta; z, \beta)$ і $\rho^{(a)}_{\Lambda_{n'_k}}(\eta; z, \beta)$ відповідно з тими самими підпослідовностями послідовності (Λ_n) (див. (168)).

6 Висновки і перспективи

Підсумовуючи вищеприведений опис фундаментальних результатів, підкреслимо, що методи нескінченновимірного аналізу були базовим інструментом математичного обґрунтування статистичної механіки. Ми тут не торкалися проблем квантової статистичної механіки і пропонуємо читачу звернутись до монографій [96, 79, 97, 98]. З точки зору підходу, який був висвітлений у цій роботі при дослідженні конфігураційних просторів, мір Лебега-Пуассона, Пуассона, Гіббса та побудови кластерних розкладів, звертаємо увагу на роботи [42, 46, 47], в яких були запропоновані елементи такого аналізу і конструкції кластерних розкладів.

Ще один дуже важливий напрямок фундаментальних досліджень, який не обговорювався у цьому огляді, стосується критичної поведінки нескінченних систем при великих значеннях параметрів z, β. Критична поведінка добре досліджена для гратчастих систем, які моделюють спінові системи магнетиків та ангармонічних кристалів. Математично строге обґрунтування фазових переходів для неперервних систем, взаємодія яких описується потенціалами типу Ленарда-Джонсона, є відкритою математичною проблемою. У цьому відношенні автори покладають велику надію на модель коміркового газу, описану у 4-му розділі.

Література

[1] W. Gibbs. *Elementary principles in statistical mechanics.* Yale Univ. Press, 1902.

[2] R.H. Fowler. *Statistical mechanics. The theory of the properties of matter in equilibrium.* Cambridge: Univ. Press, 1929.

[3] J. Yvon. *La theorie, statistique des fluids et l'equation d'etat.* Paris: Hermann, 1935. – 270p.

[4] Н.Н. Боголюбов. *Проблемы динамической теории в статистической физике.* М.: Гостехиздат, 1946.

[5] J.G. Kirkwood *The statistical mechanical theory of transport processes.* – J. Chem. Phys, 1946, **14**, p. 180; 1947, **15**, p. 72.

[6] M. Born, H.S. Green. *A general kinetic theory of liquids.* – Proc. Roy. Soc. London A, 1947, **188**, p. 168–201.

[7] А.Я. Хинчин. *Математические основания статистической механики.* М.–Л.: Гостехиздат, 1943.

[8] E. Ising. *Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus.* – Zs. Phys., 1925, **31**, p. 253.

[9] R.E. Peierls. *On model Ising's ferromagnetic.* – Proc. Camb. Phil., 1936, **32**, p. 477.

[10] L. Onsager. *Cristal statistical, I. A two-dimensional model with an order-disorder transition.* – Phys. Rev., 1944, **65**, p. 117.

[11] T.D. Lee, C.N. Yang. *Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. II. Lattice Gas and Ising Model.* – Phys. Rev., 1952, **87**, p. 410.

[12] Н.Н. Боголюбов, Б.И. Хацет. *О некоторых математических вопросах теории статистического равновесия.* – ДАН СССР, 1949, **66**, №3, с. 321–324.

[13] Б.И. Хацет. *Асимптотичні розклади за степенями густини функції розподілу систем в стані статистичної рівноваги.* – Наукові записки Житомирського педагогічного інституту, фіз.-мат. серія, 1956, **3**, с. 113–139.

[14] Н.Н. Боголюбов, Д.Я. Петрина, Б.И. Хацет. *Математическое описание равновесного состояния классических систем на основе формализма канонического ансамбля.* – Теорет. и мат. физика, 1969, **1**, №2, с. 251–274.

[15] D. Ruelle. *Correlation functions of classical gases.*– Ann. Phys., 1963, **25**, №1, p. 109–120.

[16] D. Ruelle. *Classical statistical mechanics of a system of particles.* – Helv. Phys. Acta, 1963. **36**, №2, p. 183–197.

[17] L. van Hove. *Quelques proprietes generales de l'integrale de configuration d'un systeme de particules avec interaction* . – Physica, 1949, **15**, №5, p. 951–961.

[18] T.D. Lee, C.N. Yang. *Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions, I, Theory of Condensation.* – Phys. Rev., 1952, **87**, p. 404.

[19] Д. Рюэль. *Статистическая механика. Строгие результаты.* М.: Мир, 1971.– 368 с.

[20] Р.А. Минлос. *Лекции по статистической физике* . – Успехи математических наук, 1968, **23**, №1, с. 133–190.

[21] Д.Я. Петрина, В.И. Герасименко, П.В. Малышев. *Математические основы классической статистической механики.* – Наукова думка, Київ, 1985. (Переклад: Petrina, D., Gerasimenko, V., Malyshev, P. *Mathematical foundations of classical statistical mechanics.* N.Y.: Gordon and Breach, 1995.

[22] Р.А. Минлос. *Предельное распределение Гиббса* . – Функциональный анализ и приложения, 1967, **1**, вып. 2., с. 60–73.

[23] Р.А. Минлос. *Регулярность предельного распределения Гиббса* . – Функциональный анализ и приложения, 1967, **1**, вып. 3., с. 40–53.

[24] D. Ruelle. *States of classsical statistical mechanics.* – J. Math. Phys., 1967. **8**, № 6, p. 1657–1668.

[25] Р.Л. Добрушин. *Гиббсовские поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием* . – Функ. анал. и приложения, 1968, **2**, вып. 4. с. 31–43.

[26] Р.Л. Добрушин. *Задачи единственности гиббсовского случайного поля и проблема фазовых переходов.* – Функ. анал. и приложения, 1968, **2**, вып. 4, с. 44–57.

[27] Р.Л. Добрушин. *Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности.* – Теор. вер. и её применения, 1968, **13**, вып. 2, с. 201–229.

[28] Р.Л. Добрушин. *Гиббсовские поля. Общий случай* . – Функ. анал. и приложения, 1969, **3**, вып. 1, с. 27–35.

[29] Р.Л. Добрушин. *Задание системы случайных величин при помощи условных распределений.* – Теор. вер. и её применения, 1970, **15**, вып. 3, с. 469–497.

[30] Р.Л. Добрушин. *Гиббсовские случайные поля для частиц без твердой сердцевины.* – Теор. и мат. физ., 1970, **4**, № 1, с. 101–118.

[31] O.E. Lanford, D. Ruelle. *Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics* – Commun. in Math. Phys., 1969, **13**, № 3, p. 194–215.

[32] D. Ruelle. *Superstable interactions in classical statistical mechanics.* – Commun. Math. Phys., 1970, **18**, № 2, p. 127–159.

[33] A. Lenard. *Correlation Functions and the Uniqueness of the State in Classical Statistical Mechanics.* – Commun. math. Phys., 1973, **30**, p. 35–44.

[34] A. Lenard. *States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles. I* . – Arch. Rational Mech. Anal., 1975, **59**, p. 219–239.

[35] A. Lenard. *States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles. II* . – Arch. Rational Mech. Anal., 1975, **59**, p. 241–256.

[36] Yu.G. Kondratiev, T. Kuna. *Harmonic analysis on configuration spaces. I. General theory.* – Infin. Dimens. Anal. Quantum. Probal. Relat. Top., 2002, **5**, № 2, p. 201–233.

[37] А.М. Вершик, И.М. Гельфанд, М.И. Граев. *Представления группы диффеоморфизмов.* – Успехи Матем. наук, 1975, **30**, вып. 6(186), с. 3–50.

[38] Р.С. Исмагилов. *Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов пространства* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. – Матем. сборник, 1975, **98**, вып. 1, с. 55–71.

[39] S. Albeverio, Yu.G. Kondratiev, M. Röckner. *Analysis and geometry on configuration spaces.* – J. Funct. Anal., 1998, **154**, № 2, p. 444–500.

[40] S. Albeverio, Yu.G. Kondratiev, M. Röckner. *Analysis and geometry on configuration spaces: The Gibbsian case* . – J. Funct. Anal., 1998, **157**, № 1, p. 242–291.

[41] A.L. Rebenko. *Poisson Measure Representations and Cluster Expansion in Classical Statistical Mechanics.* – Commun. Math. Phys., 1993, **151**, p. 427–435.

[42] R. Gielerak, A.L. Rebenko. *Poisson Field Representation in the Statistical Mechanics of Continuous Systems.* – Jour. Operator Theory: Advances and Applications, 1994, **70**, p. 219–226.

[43] R. Gielerak, A.L. Rebenko. *Poisson Integrals Representation in the Classical Statistical Mechanics of Continuous Systems.* – J. Math. Phys., 1996, **37**, № 7, p. 3354–3374.

[44] A.L. Rebenko, G.V. Shchepan'uk. *The Convergence of Cluster Expansions for Continuous Systems with Many-Body Interactions.* – J. Stat. Phys., 1997, **88**, No.3/4, p. 665–689.

[45] A.L. Rebenko. *Polymer expansions for continuous classical systems with many-body interaction.* – Methods of Functional Analysys and Topology, 2005, **11**, No.1, p. 73–87.

[46] Yu.G. Kondratiev, E.W. Lytvynov, A.L. Rebenko, M. Röckner and G.V. Shchepan'uk. *Euclidean Gibbs states for quantum continuous systems with Boltzmann statistics via cluster expansion.*– Methods of Functional Analysys and Topology, 1997, **3**, No.1, p. 62–81.

[47] A.L. Rebenko. *Euclidean Gibbs states for quantum continuous systems via cluster expansion. II. Bose and Fermi statistics.* – Methods of Functional Analysys and Topology, 1999, **5**, No.2, p. 86–100.

[48] A.L. Rebenko. *New Proof of Ruelle's Superstability Bounds.* – J. Stat. Phys., 1998, **91**, № 3/4, p. 815–826.

[49] S.N. Petrenko, A.L. Rebenko. *Superstable criterion and superstable bounds for infinite range interaction I: two-body potentials.* – Meth. Funct. Anal. and Topology, 2007, **13**, №1, p. 50–61.

[50] O.V. Kutoviy, A.L. Rebenko. *Existence of Gibbs state for continuous gas with many-body interection* . – J. Math. Phys., 2004, **45**, No.4, p. 1593–1605.

[51] S.N. Petrenko, A.L. Rebenko. *Superstable criterion and superstable bounds for infinite range interaction II: many-body potentials* . – Збірник праць Інституту математики НАН України, 2009, **6**, №1, p. 191–208.

[52] A.L. Rebenko, M.V. Tertychnyi. *Quasi-continuous approximation of statistical systems with strong superstable interactions* . – Збірник праць Інституту математики НАН України, 2007, **4**, №3, p. 172–182.

[53] A.L. Rebenko, M.V. Tertychnyi, *Quasi-lattice approximation of statistical systems with strong superstable interactions. Correlation functions.* – Jour. Math. Phys., 2009, **50**, №3, p.1–16.

[54] С.М. Петренко, О.Л. Ребенко, М.В. Тертичний. *Про квазінеперервну апроксимацію в класичній статистичній механіці.*- - Укр. мат. журн., 2011, **63**, № 3, с. 369–384.

[55] A.L. Rebenko, M.V. Tertychnyi. *On stability, superstability and strong superstability of classical systems of Statistical Mechanics* . – Meth. Funct. Anal. and Topology, 2008, **14**, № 3, p. 287–296.

[56] A.L. Rebenko. *Cell gas model of classical statistical systems.* – Reviews in Math. Phys., 2013, **25**, № 4, p. 1330006-1–28.

[57] H-O. Georgii, H. Zessin. *Large deviations and the maximum entropy principle for marked point Random fields.* – Probab. Theor. Relat. Fields, 1993, **96**, 177–204.

[58] H-O. Georgii, V.A. Zagrebnov. *On the interplay of magnetic and molecular forces in Curie-Weiss ferrofluid models.* – J. Stat. Phys., 1998., **93**, № 1/2, p. 79–107.

[59] Ch. Gruber, H. Tamura, V.A. Zagrebnov. *Berezinskii–Kosterlitz-Thouless Order in Two-Dimensional O(2)-Ferrofluid.* – J. Stat. Phys., 2002, **106**, № 5/6, p. 875–893

[60] K.R. Parthasarathy. *Probability Measure on Metric Spaces. Probability and Mathematical Statistics.* – Academic Press, New York and London, 1967.

[61] N.R. Campbell. *The study of discontinuous problem.* – Proc. Cambridge Phil. Soc., 1909, **15**, p. 117–136.

[62] N.R. Campbell. *Discontinuities in light emission.* – Proc. Cambridge Phil. Soc., 1909, **15**, p. 310–328.

[63] J. Mecke. *Eine charakteristische Eigenschaft der doppelt stochastischen Poissonschen Prozesse.* – Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1968, **11**, p. 74–81.

[64] Y. Ito. *Generalized Poisson functionals.* – Probab. Theor. and Related Fields, 1988, **77**, p. 1–28.

[65] И.М. Гельфанд, Н.Я. Виленкин. *Обобщённые функции. Вып. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы прстранства.* – Физматгиз, М., 1961. – 471 с.

[66] D. Ruelle. *Classical statistical mechanics of a system of particles.* – Helv. Phys. Acta., 1963, **36**, №2, p. 183–197.

[67] Y.M. Park. *Bounds on Exponentials of Local Number Operators in Quantum Statistical Mechanics.* – Commun. Math. Phys., 1984, **94**, №1, p. 1–33.

[68] Дж. Майер, М. Гепперт-Майер. *Статистическая механика.* – Издательство "Мир Москва, 1980.

[69] H.O. Georgii. *Canonical and grand canonical Gibbs states for continuum systems.* – Commun. Math. Phys., 1976, **48**, p. 31–51.

[70] X.X. Nguyen and H. Zessin. *Integral and differential characterization of the Gibbs process.* – Math. Nachr., 1979, **88**, p. 105–115.

[71] К. Престон. *Гиббсовские состояния на счетных можествах* . – М.:Мир, 1977, 126с.

[72] H.O. Georgii. *Canonical Gibbs measure.* – Lecture Notes in Math. Phys., 1979, **760**, Springer Verlag, 190p.

[73] Y. Ito. *On a generalization of non-linear Poisson functionals.* – Math. Rep. Toyoma Univ., 1980, **3**, p. 111–122.

[74] Y. Ito, I. Kubo. *Calculus on Gaussian and Poisson white noise.* – Nagoya Math. Journ., 1988, **111**, p. 41–84.

[75] T. Kuna. *Studies in configuration space analysis and applications.* – PhD thesis, Bonner Mathematische Schriften Nr. 324, University of Bonn, 1999.

[76] О.Л. Ребенко. *Основи сучасної теорії взаємодіючих квантованих полів* . – Київ: Наукова думка, 2007, 539с.

[77] E. Nelson. *Construction of quantum fields from Markoff fields.* – Jour. Funct. Anal., 1973, **12**(1), p. 97–112.

[78] E. Nelson. *Probability Theory and Euclidean field theory.* – In: Constructive Quantum Field Theory, 25, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[79] Ю.М. Березанский, Ю.Г. Кондратьев. *Спектральные методы в бесконечномерном анализе.* – Київ: Наукова думка, 1988, 680с.

[80] Л.А. Пастур. *Спектральная теория уравнений Кирквуда–Зальцбурга в конечном объёме.* – Теорет. и мат. физика, 1974, **18**, №2, с. 233–242.

[81] W. Klein. *Spectrum of the Kirkwood-Salsburg operator and phase transition.* – J. Math. Phys., 1975, **16**, No.7, p. 1482–1487.

[82] H. Moraal. *Derivation and spectrum of generalized Kirkwood-Salsburg operator.* – Physica A, 1975, **81**, No.3, p. 469–474.

[83] H. Moraal. *Spectral properties of Kirkwood-Salsburg operator.* – Physica A, 1977, **87**, No.2, p. 331–343.

[84] V.A. Zagrebnov. *Spectral properties of Kirkwood-Salsburg and Kirkwood-Ruelle operators.* – J. Stat. Phys., 1982, **27**, No.3, p. 577–591.

[85] Н.С. Гончар. *Об уравнениях для приведенных функций распределения Н.Н. Боголюбова и их решении при произвольных значениях плотности частиц.* – Теорет. и мат. физика, 1983, **57**, №1, с. 85–96.

[86] N.S. Gonchar. *Correlation Functions of Some Contonuous Model Systems and Description of Phase Transitions.* – Phys. Reports, 1989, **172**, No.5, p. 175–337.

[87] H. Spohn. *On the Vlasov Hierarchy.* – Math. Meth. in Appl. Sci., 1981, **3**, p. 445–454.

[88] A.L. Rebenko. *Poisson Analysys and Statistical Mechanics.* – Condensed Matter Physics, 1996, №8, p. 119–127.

[89] В.П. Маслов, А.М. Чебатарев. *О случайних полях, отвечающих цепочкам Боголюбова, Власова, Больцмана.* – Теор. и мат. физ., 1983, **54**, №1, с. 78–88.

[90] O.E. Lanford III. *The classical mechanics of one-dimensional systems of infinitely many particles. I. Existance theorem.* – Commun. Math. Phys., 1968, **9**, p. 169–180.

[91] O.E. Lanford III. *Time evolution of large classical systems.* – Lect. Notes Phys., 1975, **38**, p. 1–111.

[92] Я.Г. Синай. *Построение динамики в одномерных системах статистической механики.* – Теор. и мат. физ., 1972, **11**, №2, с. 248–258.

[93] D.Ya. Petrina. *Mathematical description of the evolution of infinite systems of classical statistical physics.* – K., 1978 (Preprint ITP, № 37E).

[94] D.Ya. Petrina, V.I. Gerasimenko. *Mathematical problems of the statistical mechanics of a hard-sphere system.* – Russ. Math. Surv. (Uspekhi Mat. Nauk), **45**, (3), (1990), 135–182.

[95] C. Cercignani, V.I. Gerasimenko, D.Ya. Petrina. *Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations.* – Kluwer Acad. Publ., 1997.

[96] У. Брателли, Д. Робинсон. *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика.* – М.: Мир, 1976, 424с.

[97] Д.Я. Петрина. *Математические основы квантовой статистической механикию Непрерывные системы.* – Киев: Институт математики, 1995. Изд.2-е, М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ 2013.

[98] V.I. Gerasimenko. *Hierarchies of quantum evolution equations and dynamics of many-particle correlations.* – In: Statistical Mechanics and Random Walks: Principles, Processes and Applications, N.Y.: Nova Science Publ., Inc., 2012, p. 233–288.

Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 372–381

УДК 517.9

Юлія Самойленко

(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)
yusam@univ.kiev.ua

Існування в просторі швидко спадних функцій та властивості розв'язку рівняння з частинними похідними першого порядку з квадратичною нелінійністю

The paper deals with the problem of existing solution to the first order partial differential equation with quadratic nonlinearity. There are found conditions on existing solutions to Cauchy problem for the equation mentioned above in the space of quickly decreasing functions.

У даній статті розглядається задача про існування розв'язку диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку з квадратичною нелінійністю. Отримано умови, при яких існує розв'язок задачі Коші для даного рівняння в просторі швидко спадних функцій.

1 Вступ

При побудові [1] асимптотичних багатофазових солітоноподібних розв'язків задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами виникає допоміжна задача, що пов'язана з вивченням розв'язків рівняння першого порядку зі змінними коефіцієнтами. Це рівняння визначає головний член регулярної частини асимптотики і має вигляд

$$a(x,t)u_t + uu_x + a(x,t)b(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{b(x,t)}\right)u + b(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{b(x,t)}\right)u^2 = 0. \tag{1}$$

© Institute of Mathematics, 2014

Аналогічну задачу, що пов'язана з визначенням головного члена регулярної частини асимптотики однофазового солітоноподібного розв'язку сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами, розглянуто в [2, 3]. Зауважимо, що у цьому випадку головний член регулярної частини частини асимптотики визначався з рівняння Хопфа.

У даній статті вивчається питання про існування розв'язку задачі Коші для рівняння (1) у просторі швидко спадних функцій.

2 Основні позначення

У подальшому використовується простір швидко спадних функцій $S(\mathbf{R})$, тобто простір таких нескінченно диференційовних на множині $\mathbf{R}$ функцій, що для довільних цілих чисел $m, n \geq 0$ виконується умова [6]

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left| x^m \frac{d^n}{dx^n} u(x) \right| < +\infty.$$

Через $C^\infty(0, T; S)$ позначимо простір нескінченно диференційовних на множині $\mathbf{R} \times [0;T]$ функцій $u(x,t)$, для яких при довільних цілих k, $m > 0$ виконується умова

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(D_x^m D_t^k u\right)^2 dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + x^2\right)^m \left(D_t^k u\right)^2 dx < \infty.$$

3 Існування розв'язку рівняння (1)

Для отримання умов існування розв'язку рівняння (1) в просторі швидко спадних функцій скористаємося методом характеристик. У подальшому розглядаються випадки, коли $a(x,t) = a_1(x)a_2(t)$, $b(x,t) = b(x)$ та $a(x,t) = a_1(x)a_2(t)$, $b(x,t) = b(t)$, $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T]$.

У першому випадку система характеристик для рівняння (1) записується у вигляді

$$\frac{dt}{a_1(x)a_2(t)} = \frac{dx}{u} = \frac{b(x)du}{b'(x)\,u^2},$$

і має два перших інтеграли

$$\varphi(x,u)=c_1, \quad \psi(x,t,u)=c_2, \tag{2}$$

де

$$\varphi(x,u)=\frac{u}{b(x)}, \tag{3}$$

$$\psi(x,t,u)=\frac{u}{b(x)}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\eta}{a_2(\eta)}-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{a_1(\xi)}{b(\xi)}\,d\xi. \tag{4}$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (1) можна записати у неявному вигляді таким чином

$$\Phi\left(\varphi(x,u),\psi(x,t,u)\right)=0. \tag{5}$$

Тут $\Phi(\varphi,\psi)\in C^\infty(\Xi;\mathbf{R})$ – така функція, що повна похідна за змінною u від функції в лівій частині (5) не дорівнює нулеві для всіх (x,t,u) з множини G значень змінних (x,t,u), при яких визначено відображення $(x,t,u)\to(\varphi,\psi)$, де $\varphi=\varphi(x,u)$, $\psi=\psi(x,t,u)$, і припускається, що існує хоча б одна точка $(\varphi_0,\psi_0)\in\Xi$, для якої $\Phi(\varphi_0,\psi_0)=0$.

Має місце твердження.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*
1^0. *коефіцієнти рівняння (1) є нескінченно диференційовними і задовольняють умову $a(x,t)=a_1(x)a_2(t)$, $b(x,t)=b(x)$, $(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]$, причому функція $a_1(x)$ обмежена для всіх $x\in\mathbf{R}$, а для функції $b(x)$ виконується нерівність $b(x)\geq c_1$ для деякого $c_1>0$;*
2^0. *існують такі сталі K_n, $M_n>0$, $n\in\mathbf{N}$, що для всіх $x\in\mathbf{R}$ виконуються нерівності*

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\,b(x)\right|\leq K_n, \quad \left|\frac{d^n}{dx^n}a_1(x)\right|\leq M_n;$$

3^0. *існують такі сталі $c_2>0$, $c_3\geq 0$, що для всіх $x\in\mathbf{R}$ виконується нерівність*

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x}\frac{a_1(\eta)}{b(\eta)}\,d\eta\right|\geq\left|c_2x+c_3\right|,$$

4^0. *функція $\Phi(\xi,\eta)$ в (5) належить простору $C^\infty(Pr_{O\xi}\Xi;S)$, де $Pr_{O\xi}\Xi$*

– проекція множини $\Xi \subset \mathbf{R}^2$ на вісь $O\xi$;
5^0. *рівняння (5) має обмежений розв'язок $u(x,t) \in C^{(1)}(\mathbf{R} \times [0;T])$;*
6^0. *існує така стала $C > 0$, що повна похідна від функції в лівій частині (5) за змінною u задовольняє для всіх $(x,t,u) \in \mathbf{R} \times [0;T] \times \mathcal{U}$ нерівність*

$$\left| \frac{d}{du}\, \Phi \left(\frac{u}{b(x)}, \frac{u}{b(x)} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\eta}{a_2(\eta)} - \int\limits_{x_0}^{x} \frac{a_1(\eta)}{b(\eta)}\, d\eta \right) \right| \geq C,$$

де множина $\mathcal{U} = \{u \in \mathbf{R} : u = u(x,t), (x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T]\}$.
Тоді похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ належать простору $C^\infty(0,T;S)$.

Доведення. Продиференціювавши співвідношення (5) за змінними x, t, отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{b'(x)u}{b(x)} + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \left(a_1(x) + \frac{b'(x)u}{b(x)} \int\limits_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)} \right)}{\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \int\limits_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)}}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \frac{u}{a_2(t)}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \int\limits_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)}}. \tag{7}$$

З умов теореми 1, з (6), (7) випливає, що при кожному $t \in [0;T]$ похідні $u_x(t,x)$, $u_t(x,t)$ належать простору швидко спадних за змінною x функцій.

Аналогічно безпосередніми обчисленнями похідних старшого порядку можна показати, що старші похідні за змінними x, t від функції $u(x,t)$ при кожному $t \in [0;T]$ належать простору швидко спадних за змінною x функцій. Це означає, що похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ належать простору $C^\infty(0,T;S)$.

Теорему 1 доведено.

Розглянемо тепер випадок, коли $b(x,t) = b(t)$, $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T]$. Тоді загальний розв'язок рівняння (1) можна записати у неявному вигляді таким чином

$$\Phi\left(\varphi(t,u), \psi(x,t,u)\right) = 0, \tag{8}$$

де

$$\varphi(t,u) = \frac{u}{b(t)}, \tag{9}$$

$$\psi(x,t,u) = \frac{u}{b(t)} \int\limits_0^t \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)} d\eta - \int\limits_{x_0}^x a_1(\eta)\, d\eta, \tag{10}$$

функція $\Phi(\varphi,\psi) \in C^\infty(\Xi;\mathbf{R})$ – така, що повна похідна за змінною u від функції в лівій частині (8) не дорівнює нулеві для всіх (x,t,u) з множини G значень змінних (x,t,u), при яких визначено відображення $(x,t,u) \to (\varphi,\psi)$, де $\varphi = \varphi(t,u)$, $\psi = \psi(x,t,u)$, і припускається, що існує хоча б одна точка $(\varphi_0,\psi_0) \in \Xi$, для якої $\Phi(\varphi_0,\psi_0) = 0$.

Має місце твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*
1^0. *коефіцієнти рівняння (1) є нескінченно диференційовними і задовольняють умову $a(x,t) = a_1(x)a_2(t)$, $b(x,t) = b(t)$, $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T]$, причому $b(t) \neq 0$, $t \in [0;T]$;*
2^0. *функція $a_1(x)$ обмежена для всіх $x \in \mathbf{R}$, задовольняє умову 2^0 теореми 1 та існують такі сталі $c_1 > 0$, $c_2 \geq 0$, що для всіх $x \in \mathbf{R}$ виконується нерівність*

$$\left| \int\limits_{x_0}^x a_1(\eta)\, d\eta \right| \geq |c_1 x + c_2|\, ;$$

3^0. *виконується умова 4^0 теореми 1;*
4^0. *існує така стала $C > 0$, що повна похідна від функції в лівій частині (8) за змінною u задовольняє для всіх $(x,t,u) \in \mathbf{R} \times [0;T] \times \mathcal{U}$ нерівність*

$$\left| \frac{d}{du}\, \Phi\left(\frac{u}{b(t)}, \frac{u}{b(t)} \int\limits_0^t \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}\, d\eta - \int\limits_{x_0}^x a_1(\eta)\, d\eta \right) \right| \geq C,$$

де множина $\mathcal{U} = \{u \in \mathbf{R} : u = u(x,t), (x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T]\}$.
Тоді похідні $u_t(x,t)$, $u_x(x,t)$ належать простору $C^\infty(0,T;S)$.

Доведення. Продиференціювавши співвідношення (8) за змінними x, t отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{b'(t)u\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \left(b'(t)u \int\limits_{t_0}^t \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)} d\eta - \frac{b^2(t)}{a_2(t)} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \psi}}{b(t) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \int\limits_{t_0}^t \frac{b(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi \right)}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a_1(x)b(t)\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi}\int\limits_0^t \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}\,d\eta}, \tag{12}$$

звідки, враховуючи умови теореми 2, з (12) отримаємо, що при кожному $t \in [0;T]$ похідні $u_x(t,x)$, $u_t(x,t)$ належать простору швидко спадних за змінною x функцій.

Аналогічно показується, що старші похідні за змінними x, t функції $u(x,t)$ при кожному $t \in [0;T]$ належать простору швидко спадних за змінною x функцій, тобто $u_x(x,t)$, $u_t(x,t) \in C^\infty(0,T;S)$.

4 Існування розв'язку задачі Коші для рівняння (1)

Розглянемо задачу Коші для рівняння (1) у випадку $b(x,t) = b(x)$ з початковою умовою

$$u(x,0) = g_0(x), \quad x \in \mathbf{R}, \tag{13}$$

де припускається, що функція $g_0(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$. Розв'язок задачі Коші (1), (13) неявним чином визначається із співвідношення

$$u = b(x)\,G\left(f\left(\frac{u}{b(x)}\int\limits_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)} - \int\limits_{x_0}^x \frac{a_1(\eta)}{b(\eta)}\,d\eta\right)\right), \tag{14}$$

де $G(\xi) = g_0(\xi)/b(\xi)$, а $f = f(y)$– функція, яка є оберненою до функції

$$y = y(x) = -\int\limits_{x_0}^x \frac{a_1(\eta)}{b(\eta)}\,d\eta. \tag{15}$$

Має місце твердження.

Теорема 3. *Нехай виконуються припущення:*
1^0. *мають місце умови* 1^0 – 3^0 *теореми 1;*
2^0. *функції* $b'(x), g_0(x)$ *належить простору* $S(\mathbf{R})$*;*
3^0. *функція* $f = f(y)$*, яка є оберненою до функції* $y = y(x)$*, що визначена формулою (15), для деяких дійсних сталих* c_1*,* c_2*, де* $c_1 \neq 0$*,*

задовольняє нерівність $|f(y)| \geq |c_1 y + c_2|$*;*
4^0. *функція* $f = f(y)$, *є нескінченно диференційовною і її похідні при кожному* $y \in \mathbf{R}$ *задовольняють нерівності*

$$\left|f^{(k)}(y)\right| \leq (M_k|y| + N_k)^{l_k},$$

де M_k, N_k *– деякі дійсні додатні сталі,* l_k *– натуральні числа,* $k \in \mathbf{N}$*;*
5^0. *існує така стала* $C > 0$, *що для всіх* $(x, t, u) \in \mathbf{R} \times [0; T] \times \mathcal{U}$ *має місце нерівність*

$$\left|1 - \frac{d}{dy} G(f(y)) \int\limits_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)}\right| \geq C,$$

де множина $\mathcal{U} = \{u \in \mathbf{R} : u = u(x,t), (x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T]\}$,

$$y = \frac{u}{b(x)} \int\limits_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)} - \int\limits_{x_0}^x \frac{a_1(\eta)}{b(\eta)} d\eta. \tag{16}$$

Тоді похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ *належать простору* $C^\infty(0, T; S)$.
Доведення. Продиференціювавши співвідношення (14) за змінними x, t, знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a_1(x)\frac{d}{dy}\left(G(f(y))\right) - b'(x)G(f(y)) + \frac{ub'(x)}{b(x)} \int\limits_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)}}{1 - \frac{d}{dy} G(f(y)) \int\limits_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)}}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u\frac{d}{dy}\left(G(f(y))\right)}{b(x)a_2(t)(1 - \frac{d}{dy} G(f(y)) \int\limits_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)})}, \tag{18}$$

де $y = y(x)$ визначено формулою (16).

Враховуючи умови теореми 3, зокрема, властивості функцій $g_0(x)$, $f(y)$, з (17), (18) отримуємо, що похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ при кожному $t \in [0; T]$ належать простору швидко спадних щодо змінної x функцій.

Аналогічно, записавши вирази для похідних вищих порядків, отримуємо, що функції $\partial^{n+m} u_0 / (\partial^n x \, \partial t^m)$, де n, m – такі довільні цілі невід'ємні числа, що $n+m>0$, при кожному $t\in[0;T]$ належать простору швидко спадних щодо змінної x функцій.

Теорему 3 доведено.

Розглянемо задачу Коші для рівняння (1) у випадку $b(x,t)=b(t)$ з початковою умовою з початковою умовою (13. Відповідно до методу характеристик розв'язок задачі Коші (1), (13) визначається неявним чином із співвідношення

$$u=G\left(f\left(\frac{u}{b(t)}\int\limits_0^t\frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}\,d\eta-\int\limits_{x_0}^x a_1(\eta)\,d\eta\right),t\right), \tag{19}$$

де $G(\xi,t)=\frac{g_0(\xi)}{b(t)}$, а $f=f(y)$ – функція, яка є оберненою до функції

$$y=y(x)=-\int\limits_{x_0}^x a_1(\eta)d\eta. \tag{20}$$

Має місце твердження.

Теорема 4. *Нехай виконуються такі припущення:*
1^0. *мають місце умови* 1^0 – 4^0 *теореми 2;*
2^0. *функція* $g_0(x)$ *належить простору* $S(\mathbf{R})$*;*
3^0. *функція* $f=f(y)$*, яка є оберненою до функції* $y=y(x)$*, що визначена формулою (20), для деяких дійсних сталих* c_1*,* c_2*, де* $c_1\neq 0$*, задовольняє нерівність* $|f(y)|\geq|c_1y+c_2|$*;*
4^0. *функція* $f=f(y)$*, є нескінченно диференційовною і її похідні при кожному* $y\in\mathbf{R}$ *задовольняють нерівності*

$$\left|f^{(k)}(y)\right|\leq(M_k|y|+N_k)^{l_k},$$

де M_k*,* N_k *– деякі дійсні додатні сталі,* l_k *– натуральні числа,* $k\in\mathbf{N}$*;*
5^0. *існує така стала* $C>0$*, що для всіх* $(x,t,u)\in\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathcal{U}$ *має місце нерівність*

$$\left|1-\frac{1}{b(t)}\frac{d}{dy}\,G(f(y))\int\limits_0^t\frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}\,d\eta\right|\geq C,$$

де множина $\mathcal{U}=\{u\in\mathbf{R}:u=u(x,t),(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]\}$,

$$y=\frac{u}{b(t)}\int\limits_0^t\frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}d\eta-\int\limits_{x_0}^x a_1(\eta)d\eta. \tag{21}$$

Тоді похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ *належать простору* $C^\infty(0,T;S)$.

Доведення. Продиференціювавши співвідношення (19) за змінними x, t, знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-a_1(x)\frac{\partial}{\partial y}G(f(y),t)}{1 - \frac{1}{b(t)}\left(\frac{\partial}{\partial y}G(f(y),t)\right)\int\limits_0^t \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}\,d\eta}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\left(\frac{u}{a_2(t)} - \frac{b'(t)}{b^2(t)}\right)u\left(\frac{\partial}{\partial y}G(f(y),t)\right)}{1 - \frac{1}{b(t)}\left(\frac{\partial}{\partial y}G(f(y),t)\right)\int\limits_0^t \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}\,d\eta}, \tag{23}$$

де $y = y(x)$ визначено формулою (21).

Враховуючи умови теореми 4, зокрема, властивості функцій $g_0(x)$, $f(y)$, з (22), (23) отримуємо, що похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ при кожному $t \in [0;T]$ належать простору швидко спадних щодо змінної x функцій.

Аналогічно, записавши вирази для похідних вищих порядків, отримуємо, що функції $\partial^{n+m}u/(\partial^n x\,\partial t^m)$, де n, m – такі довільні цілі невід'ємні числа, що $n+m>0$, при кожному $t \in [0;T]$ належать простору швидко спадних щодо змінної x функцій.

Теорему 4 доведено.

5 Висновки

У даній роботі отримано умови існування в просторі швидко спадних функцій розв'язку рівняння з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами та квадратичною нелінійністю.

Література

[1] В.Г. Самойленко, Ю.І. Самойленко. *Асимптотичні m-фазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами.І.* Укр. мат. журн., **64**, (2012), 970 – 987.

[2] Ю.І. Самойленко. *Асимптотичні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами (загальний випадок).* Математичний вісник НТШ, **7**, (2010), 227 – 242.

[3] Ю.І. Самойленко. *Існування розв'зку задачі Коші для рівняння Хопфа зі змінними коефіцієнтами у просторі швидко спадних функцій.* Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **9**, (2012), 293 – 300.

[4] В.Г. Самойленко, Ю.І. Самойленко. *Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами.* Укр. мат. журн., **57**, (2005), 111 – 124.

[5] В.Г. Самойленко, Ю.І. Самойленко. *Асимптотичні розв'язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами.* Укр. мат. журн., **59**, (2007), 122 – 132.

[6] М.А. Шубин. *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория.* М.: Наука, 1978. – 280 с.

[7] Ю.Д. Головатий, В.М. Кирилич, С.П. Лавренюк. *Диференціальні рівняння.* Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2011. – 470 с.

Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, N 1, 227–242

УДК 517.54

А.Л. Таргонський

(Житомирський Державний університет ім. І. Франка, Житомир)

Одна екстремальна задача на $(2n, 2m)$-променевій системі точок

targonsk@zu.edu.ua

Знайдено максимум функціоналу, що складається із добутків внутрішніх радіусів для довільних степенів внутрішніх радіусів областей.

Maximum the find for functional, which the consist with product inner radius for arbitrary degrees of inner radius domains.

Вступ.

У геометричний теорії функцій комплексного змінного екстремальні задачі для функціоналів складених із добутків внутрішніх радіусів областей представляють добре відомий класичний напрям. Виникнення цього напряму пов'язано з роботою академика М.А. Лаврентьєва [1], де вперше поставлена та розв'язана задача про добуток конформних радіусів двох неперетинних однозв'язних областей. У подальшому цю задачу узагальнювали та посилювали у багатьох роботах (див. напр. [2 – 13]).

Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множини натуральних та дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ – площина комплексних чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ – її одноточкова компактифікація або сфера Рімана, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.

Нехай $n, m \in \mathbb{N}$. Систему точок

$$A_{2n,2m} = \{a_{k,p} \in \mathbb{C} : k = \overline{1, 2n},\ p = \overline{1, 2m}\},$$

назвемо $(2n, 2m)$-променевою системою точок, якщо при всіх $k = \overline{1, 2n}$ виконуються співвідношення:

$$\begin{array}{l} 0 < |a_{k,1}| < \ldots < |a_{k,2m}| < \infty; \\ \arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \ldots = \arg a_{k,2m} =: \theta_k; \\ 0 = \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < \theta_{n+1} := 2\pi. \end{array} \tag{1}$$

© Institute of Mathematics, 2014

Для таких систем точок введемо у розгляд наступні величини:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\left[\theta_{k+1} - \theta_k\right],\ k = \overline{1,2n},\ \alpha_{n+1} := \alpha_1,\ \alpha_0 := \alpha_n, \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k = 2.$$

При виконанні умов $\alpha_k = \frac{1}{n}$, $k = \overline{1,2n}$ систему точок $A_{2n,2m}$ будемо називати рівнокутовою.

Розглянемо систему кутових областей:

$$P_k = \{w \in \mathbb{C} : \theta_k < \arg w < \theta_{k+1}\}, \quad k = \overline{1,2n}.$$

Для довільної $(2n,2m)$-променевої системи точок розглянемо наступні "керуючи" функціонали

$$M\left(A^{(1)}_{2n,2m}\right) = \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|a_{2k-1,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\cdot\chi\left(\left|a_{2k-1,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-2}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\cdot|a_{2k-1,2p-1}|,$$

$$M\left(A^{(2)}_{2n,2m}\right) = \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|a_{2k-1,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\cdot\chi\left(\left|a_{2k-1,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-2}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\cdot|a_{2k-1,2p}|,$$

$$M\left(A^{(3)}_{2n,2m}\right) = \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|a_{2k,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k}}}\right)\cdot\chi\left(\left|a_{2k,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\cdot|a_{2k,2p}|,$$

$$M\left(A^{(4)}_{2n,2m}\right) = \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|a_{2k,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k}}}\right)\cdot\chi\left(\left|a_{2k,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\cdot|a_{2k,2p-1}|,$$

де $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Нехай D, $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ – довільна відкрита множина та $w = a \in D$, тоді через $D(a)$ позначимо зв'язну компоненту D, яка містить точку a. Для довільної $(2n,2m)$-променевої системи $A_{2n,2m} = \{a_{k,p} \in \mathbb{C} : k = \overline{1,2n},\ p = \overline{1,2m}\}$ та відкритої множини D, $A_{2n,2m} \subset D$ позначимо через $D_k\left(a_{s,p}\right)$ зв'язну компоненту множини $D\left(a_{s,p}\right)\bigcap\overline{P_k}$, яка містить точку $a_{s,p}$, $k = \overline{1,2n}$, $s = k, k+1$, $p = \overline{1,2m}$, $a_{n+1,p} := a_{1,p}$.

Будемо вважати, що відкрита множина D, $A_{2n,2m} \subset D$ задовольняє умові неналягання відносно $(2n,2m)$-променевої системи точок $A_{2n,2m}$, якщо виконується умова

$$D_k(a_{k,s})\bigcap D_k(a_{k+1,p}) = \varnothing, \tag{2}$$

$k = \overline{1, 2n}$, $p, s = \overline{1, 2m}$ по всім кутам $\overline{P_k}$.

Позначимо через $r(B; a)$ – внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ (див. [4 – 6, 14]).

Предметом вивчення нашої роботи є наступні задачі.

Задача 1. Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $m \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Визначити максимум величини

$$J = \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r^{\alpha} \left(B_{2k-1,2p-1}, a_{2k-1,2p-1} \right) r \left(B_{2k-1,2p}, a_{2k-1,2p} \right) \times$$

$$\times r^{\alpha} \left(B_{2k,2p}, a_{2k,2p} \right) r \left(B_{2k,2p-1}, a_{2k,2p-1} \right),$$

де $A_{2n,2m}$ – довільна $(2n, 2m)$-променева система точок вида (1), а $\{B_{k,p}\}$ – довільний набір попарно неперетинних областей, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, та описати екстремалі ($k = \overline{1, 2n}$, $p = \overline{1, 2m}$).

Задача 2. Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $m \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Визначити максимум величини

$$I = \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r^{\alpha} \left(D, a_{2k-1,2p-1} \right) r \left(B_{D,2p}, a_{2k-1,2p} \right) r^{\alpha} \left(D, a_{2k,2p} \right) r \left(D, a_{2k,2p-1} \right),$$

де $A_{2n,2m}$ – довільна $(2n, 2m)$-променева система точок вида (1), а D – довільна відкрита множина, яка задовольняє умові неналягання (2), $a_{k,p} \in D \subset \overline{\mathbb{C}}$, та описати екстремалі ($k = \overline{1, 2n}$, $p = \overline{1, 2m}$).

Теорема 1. *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Тоді для довільної $(2n, 2m)$-променевої системи точок $A_{2n,2m}$, та довільного набору попарно неперетинних областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, 2n}$, $p = \overline{1, 2m}$ справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r^{\alpha} \left(B_{2k-1,2p-1}, a_{2k-1,2p-1} \right) r \left(B_{2k-1,2p}, a_{2k-1,2p} \right) r^{\alpha} \left(B_{2k,2p}, a_{2k,2p} \right) \times$$

$$\times r \left(B_{2k,2p-1}, a_{2k,2p-1} \right) \leq \left(\frac{2}{mn} \right)^{2nm(\alpha+1)} \cdot \left(M \left(A^{(1)}_{2n,2m} \right) \cdot M \left(A^{(3)}_{2n,2m} \right) \right)^{\alpha} \times$$

$$\times M \left(A^{(2)}_{2n,2m} \right) \cdot M \left(A^{(4)}_{2n,2m} \right) \cdot \left(\frac{\alpha^{\alpha}}{|\sqrt{\alpha} - 1|^{|\sqrt{\alpha}-1|^2} |\sqrt{\alpha} + 1|^{|\sqrt{\alpha}+1|^2}} \right)^{nm}.$$

Знак рівності досягається, коли точки $a_{k,p}$ та області $B_{k,p}$ є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціалу

$$Q(w)dw^2 = w^{2n-2}\left(1+w^{2n}\right)^{2m-2} \times$$

$$\times \frac{i(\alpha-1)\left(\left(w^n+i\right)^{4m}-\left(w^n-i\right)^{4m}\right)-2(1+\alpha)\left(w^{2n}+1\right)^{2m}}{\left(\left(w^n+i\right)^{4m}+\left(w^n-i\right)^{4m}\right)^2}dw^2. \quad (3)$$

.

Теорема 2. *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Тоді для довільної $(2n, 2m)$-променевої системи точок $A_{2n,2m}$, та довільної відкритої множини D, яка задовольняє умові неналягання (2), $a_{k,p} \in D \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, 2n}$, $p = \overline{1, 2m}$ справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r^{\alpha}\left(D, a_{2k-1,2p-1}\right) r\left(D, a_{2k-1,2p}\right) r^{\alpha}\left(D, a_{2k,2p}\right) r\left(D, a_{2k,2p-1}\right) \leq$$

$$\leq \left(\frac{2}{mn}\right)^{2nm(\alpha+1)} \cdot \left(M\left(A_{2n,2m}^{(1)}\right)\cdot M\left(A_{2n,2m}^{(3)}\right)\right)^{\alpha} \cdot M\left(A_{2n,2m}^{(2)}\right) \cdot M\left(A_{2n,2m}^{(4)}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{\alpha^{\alpha}}{|\sqrt{\alpha}-1|^{|\sqrt{\alpha}-1|^2}|\sqrt{\alpha}+1|^{|\sqrt{\alpha}+1|^2}}\right)^{nm}.$$

Знак рівності досягається, коли

$$D = \bigcup_{k,p} B_{k,p},$$

а точки $a_{k,p}$ та області $B_{k,p}$ є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціалу (3).

Доведення теореми 1. Доведення теореми спирається на метод кусково-поділяючого перетворення (див. [4 – 6]).

Розглянемо однозначну гілку багатозначної аналітичної функції

$$z_k(w) = -i\left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} \quad (4)$$

яка, при кожному $k = \overline{1, 2n}$, реалізує однолисте та конформне відображення області P_k на праву півплощину $\mathrm{Re} z > 0$, при цьому промінь $\arg w = \frac{1}{2}\left(\theta_k + \theta_{k+1}\right)$ перетворюється у додатну дійсну вісь.

Тоді функція

$$\zeta_k(w) := \frac{1 - z_k(w)}{1 + z_k(w)} \qquad (5)$$

однолисто та конформно відображає область P_k на одиничний круг $U = \{z : |z| \leq 1\}$, $k = \overline{1, 2n}$.

Позначимо $\omega_{k,p}^{(1)} := \zeta_k(a_{k,p})$, $\omega_{k-1,p}^{(2)} := \zeta_{k-1}(a_{k,p})$, $a_{n+1,p} := a_{1,p}$, $\omega_{0,p}^{(2)} := \omega_{n,p}^{(2)}$, $\zeta_0 := \zeta_n$ ($k = \overline{1, 2n}$, $p = \overline{1, 2m}$).

Сімейство функцій $\{\zeta_k(w)\}_{k=1}^{2n}$, заданих рівністю (5), є допустимим для кусково-поділяючого перетворення (див. напр., [6, 8, 9]) областей $\left\{B_{k,p} : k = \overline{1, 2n}, \quad p = \overline{1, 2m}\right\}$ відносно системи кутів $\{P_k\}_{k=1}^{2n}$. Для довільної множини $\Delta \in \mathbb{C}$ позначимо $(\Delta)^* := \left\{w \in \overline{\mathbb{C}} : \frac{1}{\overline{w}} \in \Delta\right\}$. Нехай $\Omega_{k,p}^{(1)}$ позначає зв'язну компоненту множини $\zeta_k\left(B_{k,p} \bigcap \overline{P}_k\right) \bigcup \left(\zeta_k\left(B_{k,p} \bigcap \overline{P}_k\right)\right)^*$, яка містить точку $\omega_{k,p}^{(1)}$, а $\Omega_{k-1,p}^{(2)}$ – зв'язну компоненту множини $\zeta_{k-1}\left(B_{k,p} \bigcap \overline{P}_{k-1}\right) \bigcup \left(\zeta_{k-1}\left(B_{k,p} \bigcap \overline{P}_{k-1}\right)\right)^*$, яка містить точку $\omega_{k-1,p}^{(2)}$, $k = \overline{1, 2n}$, $p = \overline{1, 2m}$, $\overline{P}_0 := \overline{P}_n$, $\Omega_{0,p}^{(2)} := \Omega_{n,p}^{(2)}$. Зрозуміло, що $\Omega_{k,p}^{(s)}$ є, взагалі кажучи, багатозв'язними областями, $k = \overline{1, 2n}$, $p = \overline{1, 2m}$, $s = 1, 2$. Пара областей $\Omega_{k-1,p}^{(2)}$ та $\Omega_{k,p}^{(1)}$ є результатом поділяючого перетворення області $B_{k,p}$ відносно сімейств $\{P_{k-1}, P_k\}$, $\{\zeta_{k-1}, \zeta_k\}$ в точці $a_{k,p}$, $k = \overline{1, 2n}$, $p = \overline{1, 2m}$.

З формули (5) отримаємо наступні вирази

$$\left|\zeta_k(w) - \zeta_k(a_{k,p})\right| \sim \left[\alpha_k \cdot \chi\left(\left|a_{k,p}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)|a_{k,p}|\right]^{-1} \cdot |w - a_{k,p}|, \quad w \to a_{k,p}, \quad w \in \overline{P}_k.$$

$$\left|\zeta_{k-1}(w) - \zeta_{k-1}(a_{k,p})\right| \sim \left[\alpha_{k-1} \cdot \chi\left(\left|a_{k,p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)|a_{k,p}|\right]^{-1} \cdot |w - a_{k,p}|,$$

$$w \to a_{k,p}, \quad w \in \overline{P}_{k-1}, \quad k = \overline{1, 2n}, p = \overline{1, 2m}. \qquad (6)$$

З теореми 1.9 [6] (див. також [4, 5]) та формул (6) отримаємо нерівності

$$r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant \left\{r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}, \omega_{k,p}^{(1)}\right) \cdot r\left(\Omega_{k-1,p}^{(2)}, \omega_{k-1,p}^{(2)}\right) \cdot \left[\alpha_k \cdot \chi\left(\left|a_{k,p}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)|a_{k,p}|\right] \times\right.$$

$$\left.\times \left[\alpha_{k-1} \cdot \chi\left(\left|a_{k,p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)|a_{k,p}|\right]\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad k = \overline{1, 2n}, p = \overline{1, 2m}. \qquad (7)$$

На основі співвідношень (7), отримаємо:

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r^{\alpha}\left(B_{2k-1,2p-1},a_{2k-1,2p-1}\right) r\left(B_{2k-1,2p},a_{2k-1,2p}\right) r^{\alpha}\left(B_{2k,2p},a_{2k,2p}\right)\times$$

$$\times r\left(B_{2k,2p-1},a_{2k,2p-1}\right)\leq \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\alpha_{2k-1}^{\alpha+1}\cdot\alpha_{2k-2}^{\alpha+1}\cdot\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right)^{\alpha}\times\right.$$

$$\times\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-2}}}\right)\right)^{\alpha}\cdot\left|a_{2k-1,2p-1}\right|^{2\alpha}\cdot\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right)\times$$

$$\times\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-2}}}\right)\right)\cdot\left|a_{2k-1,2p}\right|^{2}\cdot\alpha_{2k}^{\alpha+1}\cdot\alpha_{2k-1}^{\alpha+1}\cdot\left(\chi\left(\left|a_{2k,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k}}}\right)\right)^{\alpha}\times$$

$$\times\left(\chi\left(\left|a_{2k,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right)^{\alpha}\cdot\chi\left(\left|a_{2k,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k}}}\right)\cdot\chi\left(\left|a_{2k,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\cdot\left|a_{2k,2p}\right|^{2\alpha}\times$$

$$\left.\times\left|a_{2k,2p-1}\right|^{2}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[r^{\alpha}\left(\Omega_{2k-1,2p-1}^{(1)},\omega_{2k-1,2p-1}^{(1)}\right)\cdot r^{\alpha}\left(\Omega_{2k-2,2p-1}^{(2)},\omega_{2k-2,2p-1}^{(2)}\right)\times\right.$$

$$\times r\left(\Omega_{2k-1,2p}^{(1)},\omega_{2k-1,2p}^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_{2k-2,2p}^{(2)},\omega_{2k-2,2p}^{(2)}\right)\cdot r^{\alpha}\left(\Omega_{2k,2p}^{(1)},\omega_{2k,2p}^{(1)}\right)\times$$

$$\left.\times\, r^{\alpha}\left(\Omega_{2k-1,2p}^{(2)},\omega_{2k-1,2p}^{(2)}\right)\cdot r\left(\Omega_{2k,2p-1}^{(1)},\omega_{2k,2p-1}^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_{2k-1,2p-1}^{(2)},\omega_{2k-1,2p-1}^{(2)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Відмітимо, що

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[r^{\alpha}\left(\Omega_{2k-1,2p-1}^{(1)},\omega_{2k-1,2p-1}^{(1)}\right)\cdot r^{\alpha}\left(\Omega_{2k-2,2p-1}^{(2)},\omega_{2k-2,2p-1}^{(2)}\right)\times\right.$$

$$\times r\left(\Omega_{2k-1,2p}^{(1)},\omega_{2k-1,2p}^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_{2k-2,2p}^{(2)},\omega_{2k-2,2p}^{(2)}\right)\cdot r^{\alpha}\left(\Omega_{2k,2p}^{(1)},\omega_{2k,2p}^{(1)}\right)\times$$

$$\left.\times\, r^{\alpha}\left(\Omega_{2k-1,2p}^{(2)},\omega_{2k-1,2p}^{(2)}\right)\cdot r\left(\Omega_{2k,2p-1}^{(1)},\omega_{2k,2p-1}^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_{2k-1,2p-1}^{(2)},\omega_{2k-1,2p-1}^{(2)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left[\prod_{p=1}^{m} r^{\alpha}\left(\Omega_{2k-1,2p-1}^{(1)},\omega_{2k-1,2p-1}^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_{2k-1,2p}^{(1)},\omega_{2k-1,2p}^{(1)}\right)\times\right.$$

$$\times r^{\alpha}\left(\Omega_{2k-1,2p}^{(2)},\omega_{2k-1,2p}^{(2)}\right)\cdot r\left(\Omega_{2k-1,2p-1}^{(2)},\omega_{2k-1,2p-1}^{(2)}\right)\cdot\prod_{p=1}^{m} r^{\alpha}\left(\Omega_{2k,2p}^{(1)},\omega_{2k,2p}^{(1)}\right)\times$$

$$\times r\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p-1},\omega^{(1)}_{2k,2p-1}\right)\cdot r\left(\Omega^{(2)}_{2k,2p},\omega^{(2)}_{2k,2p}\right)\cdot r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k,2p-1},\omega^{(2)}_{2k,2p-1}\right)\Big]^{\frac{1}{2}}, \tag{9}$$

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left(\alpha^{\alpha+1}_{2k-1}\cdot\alpha^{\alpha+1}_{2k-2}\cdot\alpha^{\alpha+1}_{2k}\cdot\alpha^{\alpha+1}_{2k-1}\right)^{\frac{1}{2}}=\prod_{k=1}^{2n}\alpha_k^{m(\alpha+1)}, \tag{10}$$

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right)^{\alpha}\cdot\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-2}}}\right)\right)^{\alpha}\times\right.$$

$$\times\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right)\cdot\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-2}}}\right)\right)\cdot\left|a_{2k-1,2p-1}\right|^{2\alpha}\times$$

$$\times\left(\chi\left(\left|a_{2k,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k}}}\right)\right)^{\alpha}\cdot\left|a_{2k-1,2p}\right|^{2}\cdot\left(\chi\left(\left|a_{2k,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right)^{\alpha}\times$$

$$\left.\times\,\chi\left(\left|a_{2k,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k}}}\right)\cdot\left|a_{2k,2p}\right|^{2\alpha}\cdot\left|a_{2k,2p-1}\right|^{2}\cdot\chi\left(\left|a_{2k,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(M\left(A^{(1)}_{2n,2m}\right)\cdot M\left(A^{(3)}_{2n,2m}\right)\right)^{\alpha}\cdot M\left(A^{(2)}_{2n,2m}\right)\cdot M\left(A^{(4)}_{2n,2m}\right). \tag{11}$$

Із (8) враховуючи (9), (10), (11), отримаємо наступні співвідношення

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r^{\alpha}\left(B_{2k-1,2p-1},a_{2k-1,2p-1}\right)r\left(B_{2k-1,2p},a_{2k-1,2p}\right)\times$$

$$\times r^{\alpha}\left(B_{2k,2p},a_{2k,2p}\right)r\left(B_{2k,2p-1},a_{2k,2p-1}\right)\leq$$

$$\leq\prod_{k=1}^{2n}\alpha_k^{m(\alpha+1)}\cdot\left(M\left(A^{(1)}_{2n,2m}\right)\cdot M\left(A^{(3)}_{2n,2m}\right)\right)^{\alpha}\cdot M\left(A^{(2)}_{2n,2m}\right)\cdot M\left(A^{(4)}_{2n,2m}\right)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left[\prod_{p=1}^{m}r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(1)}_{2k-1,2p-1}\right)\cdot r\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p},\omega^{(1)}_{2k-1,2p}\right)\times\right.$$

$$\times r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p},\omega^{(2)}_{2k-1,2p}\right)\cdot r\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(2)}_{2k-1,2p-1}\right)\cdot\prod_{p=1}^{m}r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p},\omega^{(1)}_{2k,2p}\right)\times$$

$$\left.\times r\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p-1},\omega^{(1)}_{2k,2p-1}\right)\cdot r\left(\Omega^{(2)}_{2k,2p},\omega^{(2)}_{2k,2p}\right)\cdot r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k,2p-1},\omega^{(2)}_{2k,2p-1}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Враховуючи, що
$$\prod_{k=1}^{2n}\alpha_k\leq\left(\frac{1}{n}\right)^{2n},$$
з попереднього співвідношення, маємо
$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r^{\alpha}\left(B_{2k-1,2p-1},a_{2k-1,2p-1}\right)r\left(B_{2k-1,2p},a_{2k-1,2p}\right)\times$$
$$\times r^{\alpha}\left(B_{2k,2p},a_{2k,2p}\right)r\left(B_{2k,2p-1},a_{2k,2p-1}\right)\leq$$
$$\leq\left(\frac{1}{n}\right)^{2nm(\alpha+1)}\cdot\left(M\left(A^{(1)}_{2n,2m}\right)\cdot M\left(A^{(3)}_{2n,2m}\right)\right)^{\alpha}\cdot M\left(A^{(2)}_{2n,2m}\right)\cdot M\left(A^{(4)}_{2n,2m}\right)\times$$
$$\times\prod_{k=1}^{n}\left[\prod_{p=1}^{m}r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(1)}_{2k-1,2p-1}\right)\cdot r\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p},\omega^{(1)}_{2k-1,2p}\right)\times\right.$$
$$\times r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p},\omega^{(2)}_{2k-1,2p}\right)\cdot r\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(2)}_{2k-1,2p-1}\right)\cdot\prod_{p=1}^{m}r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p},\omega^{(1)}_{2k,2p}\right)\times$$
$$\left.\times r\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p-1},\omega^{(1)}_{2k,2p-1}\right)\cdot r\left(\Omega^{(2)}_{2k,2p},\omega^{(2)}_{2k,2p}\right)\cdot r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k,2p-1},\omega^{(2)}_{2k,2p-1}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

З теоремы 4.2.2 [7] отримаємо нерівності
$$\prod_{p=1}^{m}r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(1)}_{2k-1,2p-1}\right)\cdot r\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p},\omega^{(1)}_{2k-1,2p}\right)\cdot r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p},\omega^{(2)}_{2k-1,2p}\right)\times$$
$$\times r\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(2)}_{2k-1,2p-1}\right)\leq\prod_{p=1}^{2m}r^{\alpha}\left(G^{(1)}_{2p-1},g^{(1)}_{2p-1}\right)\cdot r\left(G^{(1)}_{2p},g^{(1)}_{2p}\right),$$
$$\prod_{p=1}^{m}r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p},\omega^{(1)}_{2k,2p}\right)\cdot r\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p-1},\omega^{(1)}_{2k,2p-1}\right)\cdot r\left(\Omega^{(2)}_{2k,2p},\omega^{(2)}_{2k,2p}\right)\times$$
$$\times r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k,2p-1},\omega^{(2)}_{2k,2p-1}\right)\leq\prod_{p=1}^{2m}r\left(G^{(2)}_{2p-1},g^{(2)}_{2p-1}\right)\cdot r^{\alpha}\left(G^{(2)}_{2p},g^{(2)}_{2p}\right), \tag{14}$$

де $G^{(1)}_{2p-1}$, $G^{(1)}_{2p}$, $G^{(2)}_{2p-1}$, $G^{(2)}_{2p}$ – кругові області, а $g^{(1)}_{2p-1}$, $g^{(1)}_{2p}$, $g^{(2)}_{2p-1}$, $g^{(2)}_{2p}$ – полюси квадратичного диференціалу

$$Q\left(\zeta_k\right)d\zeta_k^2=\zeta_k^{2m-2}\cdot\frac{i(1-\alpha)\zeta_k^{4m}+2(1+\alpha)\zeta_k^{2m}+i(\alpha-1)}{\left(\zeta_k^{4m}+1\right)^2}\cdot d\zeta_k^2,\quad k=\overline{1,2n} \tag{15}$$

Користуючись нерівностями (14) з (13) отримаємо

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r^{\alpha}\left(B_{2k-1,2p-1},a_{2k-1,2p-1}\right)r\left(B_{2k-1,2p},a_{2k-1,2p}\right)\times$$

$$\times r^{\alpha}\left(B_{2k,2p},a_{2k,2p}\right)r\left(B_{2k,2p-1},a_{2k,2p-1}\right)\leq\left(\frac{1}{n}\right)^{2nm(\alpha+1)}\times$$

$$\times\left(M\left(A^{(1)}_{2n,2m}\right)\cdot M\left(A^{(3)}_{2n,2m}\right)\right)^{\alpha}\cdot M\left(A^{(2)}_{2n,2m}\right)\cdot M\left(A^{(4)}_{2n,2m}\right)\times$$

$$\times\left(\prod_{p=1}^{2m}r\left(G_{2p-1},g_{2p-1}\right)\cdot r^{\alpha}\left(G_{2p},g_{2p}\right)\right)^{n}, \tag{16}$$

де G_{2p-1}, G_{2p} – кругові області, а g_{2p-1}, g_{2p} – полюси квадратичного диференціалу (15).

Із останнього співвідношення, використовуючи теорему 4.1.2 [7], отримаємо твердження теореми. **Теорема 1 доведена**.

Доведення теореми 2. Зразу відмітимо, що з умови неналягання випливає, що cap $\overline{\mathbb{C}}\backslash D>0$ та множина D має узагальнену функцію Гріна $g_D(z,a)$, де $g_D(z,a)=\begin{cases}g_{D(a)}(z,a),\ z\in D(a),\\ 0,\ z\in\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{D(a)},\\ \lim\limits_{\zeta\to z}g_{D(a)}(\zeta,a),\ \zeta\in D(a),z\in\partial D(a)\end{cases}$ – узагальнена функція Гріна відкритої множини D відносно точки $a\in D$, а $g_{D(a)}(z,a)$ – функція Гріна області $D(a)$ відносно точки $a\in D(a)$.

У подальшому будемо користуватися методами робіт [6, 7]. Розглянемо множини $E_0=\overline{\mathbb{C}}\backslash D$; $E(a_{k,p},t)=\{w\in\mathbb{C}:|w-a_{k,p}|\leqslant t\}$, $k=\overline{1,2n}$, $p=\overline{1,2m}$, $n\geqslant 2$, $n,m\in\mathbb{N}$, $t\in\mathbb{R}_+$. Для достатньо малих $t>0$ введемо у розгляд конденсатор

$$C\left(t,\,D,\,A_{2n,2m}\right)=\left\{E_0,\,E_1,\,E_2\right\},$$

де $E_1 = \bigcup\limits_{k=1}^{n}\bigcup\limits_{p=1}^{m}\left(E(a_{2k-1,2p-1},t)\cup E(a_{2k,2p},t)\right)$, $E_2 = \bigcup\limits_{k=1}^{n}\bigcup\limits_{p=1}^{m}\left(E(a_{2k,2p-1},t)\cup E(a_{2k-1,2p},t)\right)$. Ємністю конденсатора $C\,(t,\,D,\,A_{2n,2m})$ називається величина (див. [5])

$$\mathrm{cap}C\,(t,\,D,\,A_{2n,2m}) = \inf\int\int\left[(G'_x)^2+(G'_y)^2\right]\,dxdy,$$

де нижня грань береться по всім дійсним, неперервним та ліпшицевим в $\overline{\mathbb{C}}$ функціям $G=G(z)$, таким, що $G\Big|_{E_0}=0$, $G\Big|_{E_1}=\sqrt{\alpha}$, $G\Big|_{E_2}=1$

Величина, обернена ємності конденсатора C, називається модулем цього конденсатора

$$|C|=\left[\mathrm{cap}C\right]^{-1}$$

З теореми 1 [6] отримаємо

$$|C\,(t,D,A_{2n,2m})\,| = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2nm\,(\alpha+1)}\cdot\log\frac{1}{t}+M(D,A_{2n,2m})+o(1),\qquad t\to 0, \tag{17}$$

де

$$M(D,A_{2n,2m}) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{4n^2m^2\cdot(\alpha+1)^2}\times$$

$$\times\Big[\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\left(\log r(D,a_{2k,2p})+\log r(D,a_{2k-1,2p-1})\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\left(\log r(D,a_{2k,2p-1})+\log r(D,a_{2k-1,2p})\right)+$$

$$+\alpha\sum_{(k,p)\neq(q,s)}\left(g_D(a_{2k,2p},a_{2q,2s})+g_D(a_{2k-1,2p-1},a_{2q-1,2s-1})\right)+$$

$$+2\sqrt{\alpha}\sum_{(k,p)\neq(q,s)}\left(g_D(a_{2k,2p},a_{2q-1,2s})+g_D(a_{2k,2p},a_{2q,2s-1})+\right.$$

$$\left.+g_D(a_{2k-1,2p-1},a_{2q-1,2s})+g_D(a_{2k-1,2p-1},a_{2q,2s-1})\right)+$$

$$+2\alpha\sum_{(k,p)\neq(q,s)}g_D(a_{2k,2p},a_{2q-1,2s-1})+\sum_{(k,p)\neq(q,s)}\left(g_D(a_{2k-1,2p},a_{2q-1,2s})+\right.$$

$$+g_D(a_{2k,2p-1}, a_{2q,2s-1})) + 2 \sum_{(k,p)\neq(q,s)} g_D(a_{2k-1,2p}, a_{2q,2s-1})\Big]. \qquad (18)$$

Надалі, будемо використовувати функцію (5) та позначення $\omega^{(1)}_{k,p}$, $\omega^{(2)}_{k-1,p}$, $a_{n+1,p}$, $\omega^{(2)}_{0,p}$, ζ_0, Δ, $(\Delta)^*$, введені нами при доведенні теореми 1. Нехай, також, $\mathbf{\Omega}^{(1)}_{k,p}$ позначає зв'язну компоненту множини $\zeta_k\left(D\bigcap \overline{P}_k\right)\bigcup\left(\zeta_k\left(D\bigcap \overline{P}_k\right)\right)^*$, яка містить точку $\omega^{(1)}_{k,p}$, а $\mathbf{\Omega}^{(2)}_{k-1,p}$ – зв'язну компоненту множини $\zeta_{k-1}\left(D\bigcap \overline{P}_{k-1}\right)\bigcup\left(\zeta_{k-1}\left(D\bigcap \overline{P}_{k-1}\right)\right)^*$, яка містить точку $\omega^{(2)}_{k-1,p}$, $k=\overline{1,2n}$, $p=\overline{1,2m}$, $\overline{P}_0 := \overline{P}_{2n}$, $\mathbf{\Omega}^{(2)}_{0,p} := \mathbf{\Omega}^{(2)}_{n,p}$. Ясно, що $\mathbf{\Omega}^{(s)}_{k,p}$ є, взагалі кажучи, багатозв'язними областями, $k=\overline{1,2n}$, $p=\overline{1,2m}$, $s=1,2$. Пара областей $\mathbf{\Omega}^{(2)}_{k-1,p}$ и $\mathbf{\Omega}^{(1)}_{k,p}$ є результатом поділяючого перетворення відкритої множини D відносно сімейств $\{P_{k-1}, P_k\}$, $\{\zeta_{k-1}, \zeta_k\}$ в точці $a_{k,p}$, $k=\overline{1,2n}$, $p=\overline{1,2m}$.

Розглянемо конденсатори

$$C_k\left(t,\, D,\, A_{2n,2m}\right) = \left(E^{(k)}_0,\, E^{(k)}_1,\, E^{(k)}_2\right),$$

де

$$E^{(k)}_s = \zeta_k\left(E_s\bigcap \overline{P}_k\right)\bigcup\left[\zeta_k\left(E_s\bigcap \overline{P}_k\right)\right]^*,$$

$k=\overline{1,2n}$, $s=0,1,2$, $\{P_k\}_{k=1}^{2n}$ – система кутів, яка відповідає системі точок $A_{2n,2m}$, операція $[A]^*$ ставить у відповідність будь-якій множині $A\subset\overline{\mathbb{C}}$ множину, симетричну множині A відносно кола $|w|=1$. Звідси випливає, що конденсатору $C\left(t,\, D,\, A_{2n,2m}\right)$, при поділяючому перетворенні відносно $\{P_k\}_{k=1}^{2n}$ та $\{\zeta_k\}_{k=1}^{2n}$, відповідає набір конденсаторів $\{C_k\left(t,\, D,\, A_{2n,2m}\right)\}_{k=1}^{2n}$, симетричних відносно $\{z:\ |z|=1\}$. У відповідності з роботами [6, 7] отримаємо

$$\mathrm{cap}C\left(t, D, A_{2n,2m}\right) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}\mathrm{cap}C_k\left(t, D, A_{2n,2m}\right). \qquad (19)$$

Звідси випливає

$$|C\left(t, D, A_{2n,2m}\right)| \leqslant 2\left(\sum_{k=1}^{2n}|C_k\left(t, D, A_{2n,2m}\right)|^{-1}\right)^{-1}. \qquad (20)$$

Формула (17) дає асимптотику модуля $C\left(t,\, D,\, A_{2n,2m}\right)$ при $t\to 0$, а величина $M\left(D, A_{2n,2m}\right)$ є зведений модуль множини D відносно

$A_{2n,2m}$. Використовуючи формули (6) та той факт, що D задовольняє умові неналягання відносно системи $A_{2n,2m}$, отримаємо аналогічні представлення для конденсаторів $C_k\left(t, D, A_{2n,2m}\right)$, $k=\overline{1,2n}$

$$\left|C_k\left(t, D, A_{2n,2m}\right)\right| = \frac{1}{4\pi m\left(\alpha+1\right)}\log\frac{1}{t} + M_k\left(D, A_{2n,2m}\right) + o(1), \quad t\to 0, \tag{21}$$

де

$$M_{2k-1}\left(D, A_{2n,2m}\right) = \frac{1}{8\pi m^2\left(\alpha+1\right)^2}\times$$

$$\times\left[\alpha\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(1)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(1)}_{2k-1,2p-1}\right)}{\left[\alpha_{2k-1}\cdot\chi\left(\left|a_{2k-1,2p-1}\right|^{\alpha_{2k-1}}\right)\left|a_{2k-1,2p-1}\right|\right]^{-1}}+\right.$$

$$+\alpha\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(2)}_{2k-1,2p},\omega^{(2)}_{2k-1,2p}\right)}{\left[\alpha_{2k-1}\cdot\chi\left(\left|a_{2k,2p}\right|^{\alpha_{2k-1}}\right)\left|a_{2k,2p}\right|\right]^{-1}}+$$

$$+\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(2)}_{2k-1,2t-1},\omega^{(2)}_{2k-1,2t-1}\right)}{\left[\alpha_{2k-1}\cdot\chi\left(\left|a_{2k,2t-1}\right|^{\alpha_{2k-1}}\right)\left|a_{2k,2t-1}\right|\right]^{-1}}+$$

$$\left.+\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(1)}_{2k-1,2t},\omega^{(1)}_{2k-1,2t}\right)}{\left[\alpha_{2k-1}\cdot\chi\left(\left|a_{2k-1,2t}\right|^{\alpha_{2k-1}}\right)\left|a_{2k-1,2t}\right|\right]^{-1}}\right],$$

$$M_{2k}\left(D, A_{2n,2m}\right) = \frac{1}{8\pi m^2\left(\alpha+1\right)^2}\cdot\left[\alpha\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(1)}_{2k,2p},\omega^{(1)}_{2k,2p}\right)}{\left[\alpha_{2k}\cdot\chi\left(\left|a_{2k,2p}\right|^{\alpha_{2k}}\right)\left|a_{2k,2p}\right|\right]^{-1}}+\right.$$

$$+\alpha\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(2)}_{2k,2p-1},\omega^{(2)}_{2k,2p-1}\right)}{\left[\alpha_{2k}\cdot\chi\left(\left|a_{2k+1,2p-1}\right|^{\alpha_{2k}}\right)\left|a_{2k+1,2p-1}\right|\right]^{-1}}+$$

$$+\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(2)}_{2k,2t},\omega^{(2)}_{2k,2t}\right)}{\left[\alpha_{2k}\cdot\chi\left(\left|a_{2k+1,2t}\right|^{\alpha_{2k}}\right)\left|a_{2k+1,2t}\right|\right]^{-1}}+$$

$$\left.+\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(1)}_{2k,2t-1},\omega^{(1)}_{2k,2t-1}\right)}{\left[\alpha_{2k}\cdot\chi\left(\left|a_{2k,2t-1}\right|^{\alpha_{2k}}\right)\left|a_{2k,2t-1}\right|\right]^{-1}}\right], \qquad k=\overline{1,n}.$$

З допомогою (21) отримаємо

$$|C_k(t,D,A_{2n,2m})|^{-1} = \frac{4\pi m(\alpha+1)}{\log\frac{1}{t}}\cdot\left(1+\frac{4\pi m(\alpha+1)}{\log\frac{1}{t}}M_k(D,A_{2n,2m})+\right.$$

$$\left.+o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right)^{-1} = \frac{4\pi m(\alpha+1)}{\log\frac{1}{t}}-$$

$$-\left(\frac{4\pi m(\alpha+1)}{\log\frac{1}{t}}\right)^2 M_k(D,A_{2n,2m})+o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)^2\right),\qquad t\to 0. \qquad (22)$$

Далі, з (22) випливає, що

$$\sum_{k=1}^{2n}|C_k(t,D,A_{2n,2m})|^{-1} = \frac{8\pi mn(\alpha+1)}{\log\frac{1}{t}}-$$

$$-\left(\frac{4\pi m(\alpha+1)}{\log\frac{1}{t}}\right)^2\cdot\sum_{k=1}^{2n}M_k(D,A_{2n,2m})+o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)^2\right),\qquad t\to 0. \qquad (23)$$

У свою чергу, (23) дозволяє отримати таке співвідношення

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}|C_k(t,D,A_{2n,2m})|^{-1}\right)^{-1} = \frac{\log\frac{1}{t}}{8\pi mn(\alpha+1)}\times$$

$$\times\left(1-\frac{2\pi m(\alpha+1)}{n\log\frac{1}{t}}\cdot\sum_{k=1}^{2n}M_k(D,A_{2n,2m})+o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right)^{-1} =$$

$$=\frac{\log\frac{1}{t}}{8\pi mn(\alpha+1)}+\frac{1}{4n^2}\cdot\sum_{k=1}^{2n}M_k(D,A_{2n,2m})+o(1),\qquad t\to 0. \qquad (24)$$

Нерівності (19) та (20), враховуючи (17) та (24), дозволяють помітити, що

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2nm(\alpha+1)}\cdot\log\frac{1}{t}+M(D,A_{2n,2m})+o(1)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\log\frac{1}{t}}{4\pi mn(\alpha+1)}+\frac{1}{2n^2}\cdot\sum_{k=1}^{2n}M_k(D,A_{2n,2m})+o(1). \qquad (25)$$

З (25) при $t \to 0$ отримаємо, що

$$M(D, A_{2n,2m}) \leqslant \frac{1}{2n^2} \cdot \sum_{k=1}^{2n} M_k\left(D, A_{2n,2m}\right). \tag{26}$$

Формули (18), (21) та (26) приводять до наступного виразу

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{4n^2m^2 \cdot (\alpha+1)^2} \cdot \Big[\alpha \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} \left(\log r(D, a_{2k,2p}) + \log r(D, a_{2k-1,2p-1})\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} \left(\log r(D, a_{2k,2p-1}) + \log r(D, a_{2k-1,2p})\right) +$$

$$+\alpha \sum_{(k,p)\neq(q,s)} \left(g_D(a_{2k,2p}, a_{2q,2s}) + g_D(a_{2k-1,2p-1}, a_{2q-1,2s-1})\right) +$$

$$+2\sqrt{\alpha} \sum_{(k,p)\neq(q,s)} \left(g_D(a_{2k,2p}, a_{2q-1,2s}) + g_D(a_{2k,2p}, a_{2q,2s-1}) + \right.$$

$$\left. + g_D(a_{2k-1,2p-1}, a_{2q-1,2s}) + g_D(a_{2k-1,2p-1}, a_{2q,2s-1})\right) +$$

$$+2\alpha \sum_{(k,p)\neq(q,s)} g_D(a_{2k,2p}, a_{2q-1,2s-1}) + \sum_{(k,p)\neq(q,s)} \left(g_D(a_{2k-1,2p}, a_{2q-1,2s}) + \right.$$

$$\left. + g_D(a_{2k,2p-1}, a_{2q,2s-1})\right) + 2 \sum_{(k,p)\neq(q,s)} g_D(a_{2k-1,2p}, a_{2q,2s-1})\Big] \leq$$

$$\leq \frac{1}{16\pi n^2 m^2 \left(\alpha+1\right)^2} \times$$

$$\times \left[\alpha \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} \log \frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(1)}_{2k-1,2p-1}, \omega^{(1)}_{2k-1,2p-1}\right)}{\left[\alpha_{2k-1} \cdot \chi\left(|a_{2k-1,2p-1}|^{\alpha_{2k-1}}\right) |a_{2k-1,2p-1}|\right]^{-1}} + \right.$$

$$+\alpha \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} \log \frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(2)}_{2k-1,2p}, \omega^{(2)}_{2k-1,2p}\right)}{\left[\alpha_{2k-1} \cdot \chi\left(|a_{2k,2p}|^{\alpha_{2k-1}}\right) |a_{2k,2p}|\right]^{-1}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{m} \log \frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(2)}_{2k-1,2t-1}, \omega^{(2)}_{2k-1,2t-1}\right)}{\left[\alpha_{2k-1} \cdot \chi\left(|a_{2k,2t-1}|^{\alpha_{2k-1}}\right) |a_{2k,2t-1}|\right]^{-1}} +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_{2k-1,2t}^{(1)},\omega_{2k-1,2t}^{(1)}\right)}{\left[\alpha_{2k-1}\cdot\chi\left(\left|a_{2k-1,2t}\right|^{\alpha_{2k-1}}\right)\left|a_{2k-1,2t}\right|\right]^{-1}}+$$

$$+\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_{2k,2p}^{(1)},\omega_{2k,2p}^{(1)}\right)}{\left[\alpha_{2k}\cdot\chi\left(\left|a_{2k,2p}\right|^{\alpha_{2k}}\right)\left|a_{2k,2p}\right|\right]^{-1}}+$$

$$+\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_{2k,2p-1}^{(2)},\omega_{2k,2p-1}^{(2)}\right)}{\left[\alpha_{2k}\cdot\chi\left(\left|a_{2k+1,2p-1}\right|^{\alpha_{2k}}\right)\left|a_{2k+1,2p-1}\right|\right]^{-1}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_{2k,2t}^{(2)},\omega_{2k,2t}^{(2)}\right)}{\left[\alpha_{2k}\cdot\chi\left(\left|a_{2k+1,2t}\right|^{\alpha_{2k}}\right)\left|a_{2k+1,2t}\right|\right]^{-1}}+$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_{2k,2t-1}^{(1)},\omega_{2k,2t-1}^{(1)}\right)}{\left[\alpha_{2k}\cdot\chi\left(\left|a_{2k,2t-1}\right|^{\alpha_{2k}}\right)\left|a_{2k,2t-1}\right|\right]^{-1}}\right].$$

З останнього, отримаємо співвідношення (12). Закінчення доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 1. **Теорема 2 доведена**.

Під кінець, хочу виразити подяку Бахтіну Олександру Костянтиновичу за постановку задачі та ряд цінних вказівок.

Література

[1] Лаврентьев М. А. *К теории конформных отображений*// Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934.– 5.– С. 159 – 245.

[2] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – М: Наука, 1966. – 628 с.

[3] Бахтина Г. П. *Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях*: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.

[4] Дубинин В. Н. *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении* // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – 168. – С. 48 – 66.

[5] Дубинин В. Н. *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменною* // Успехи мат. наук. – 1994. – 49, № 1(295). – С. 3 – 76.

[6] Дубинин В. Н. *Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения* // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 1997. – 237. – С. 56 – 73.

[7] Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б. *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе.* // Праці ін-ту мат-ки НАН Укр. – 2008. – Т. 73. – 308 с.

[8] Бахтін О. К. *Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин* //Укр. мат. журн. – 2009. – 61, № 5. – С. 596 – 610.

[9] Дубинин В. Н. *О квадратичных формах, порожденных функциями Грина и Робена* // Мат. сборник. – 2009. – 200, № 10. – С. 25 – 38.

[10] Бахтин А. К., Таргонский А. Л. *Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы* //Нелінійні коливання. – 2005. – 8, № 3. – С. 298 – 303.

[11] Таргонский А. Л. *Экстремальные задачи о частично неналегающих областях на римановой сфере* //Доп. НАН Украини. – 2008. – № 9. – С. 31 – 36.

[12] Кузьмина Г. В. *Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы* // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2001. – 276. – С. 253 – 275.

[13] Емельянов Е. Г. *К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей* // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2002. – 286. – С.103 – 114.

[14] Хейман В К. *Многолистные функции.* - М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.

[15] Дженкинс Дж. А. *Однолистные функции и конформные отображения.* – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.

Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 364–374

УДК 517.9+531.19

Ю.Ю. Федчун

(Київський національний університет імені Т.Г. Шевченка)
fedchun_yu@ukr.net

Скейлінґові властивості нерівноважних станів активної м'якої речовини

We consider the mean field limit of solutions of hierarchy of evolution equations and non-Markovian kinetic equation. Corresponding evolution equations are found.

Розглянуто асимптотичну поведінку в границі самоузгодженого поля розв'язків ієрархії еволюційних рівнянь та немарківського кінетичного рівняння. Також встановлено граничні еволюційні рівняння.

1 Вступ

Відкритою проблемою сучасної математичноъ фізики є проблема математичного опису еволюції активної м'якої конденсованої речовини на мікроскопічному рівні, зокрема таких систем як популяції клітин, бактерій; розчини клітин, наприклад, кров і т.п. Деякі з підходів до розв'язання данного питання розглянуті в роботах [1] - [4].

В роботі [5] для моделювання колективної поведінки таких систем запропонована динамічна система багатьох взаємодіючих стохастичних процесів марківського типу. Така мікроскопічна модель динаміки дає можливість описати характерні властивості активної м'якої речовини, які відрізняються від статистичної поведінки звичайної речовини, що складається із взаємодіючих частинок, які рухаються за інерцією. Варто зазначити, що еволюцію активної м'якої конденсованої речовини на мікроскопічному рівні природно описувати в термінах еволюції маргінальних спостережуваних[6].

© Institute of Mathematics, 2014

Також окремим актуальним питанням є строге обґрунтування нелінійних кінетичних рівнянь для активної м'якої конденсованої речовини. В сучасних працях з теорії таких систем в основу опису покладено апріорі сформульовані еволюційні рівняння типу рівнянь суцільного середовища [1] або кінетичні рівняння [2], [3].

В даній роботі побудовано границю самоузгодженого поля [7], [8] розв'язку ієрахії еволюційних рівнянь та встановлено граничну ієрархію. Для активної м'кої речовини властивими є ефекти пам'яті. В зв'язку з цим в роботі розглянуто немарківське кінетичне рівняння та асимптотична поведінка його розв'язку.

2 Динаміка систем активних частинок

Розглянемо систему не фіксованої, але скінченої середньої кількості частинок (складових) N різних субпопуляцій з яких складається активна речовина. Кожна i-та частинка характеризується змінними $\mathbf{u}_i = (j_i, u_i) \in \mathcal{J} \times \mathcal{U}$, де $j_i \in \mathcal{J} \equiv (1, \dots, N)$ – номер субпопуляції частинки і $u_i \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ – величини, якими описуються її мікроскопічний стан [5].

Динаміка частинок з яких складається активна речовина описується півгрупою $e^{t\Lambda^*} = \oplus_{n=0}^{\infty} e^{t\Lambda_n^*}$ марківських стрибкоподібних процесів визначеною на просторі $L_\alpha^1 = \oplus_{n=0}^{\infty} \alpha^n L_n^1$ послідовностей $f = (f_0, f_1, \dots, f_n, \dots)$ інтегровних функцій $f_n(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ визначених на $(\mathcal{J} \times \mathcal{U})^n$ з нормою:

$$\|f\|_{L_\alpha^1} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \|f_n\|_{L_n^1} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sum_{j_1, \dots, j_n} \int_{\mathcal{U}^n} du_1 \dots du_n \big| f_n(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \big|,$$

де $\alpha > 1$ параметр.

Інфінітезимальний генератор Λ_n^* півгрупи $e^{t\Lambda_n^*}$ визначено на підпросторі $L_n^1 \subset L_\alpha^1$

$$(\Lambda_n^* f_n)(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \doteq \sum_{m=1}^{M} \varepsilon^{m-1} \Lambda_n^{*[m]} f_n \doteq \sum_{m=1}^{M} \varepsilon^{m-1} \times \tag{1}$$

$$\sum_{i_1 \neq \dots \neq i_m = 1}^{n} \Big(\int_{\mathcal{J} \times \mathcal{U}} A^{[m]}(\mathbf{u}_{i_1}; \mathbf{v}, \mathbf{u}_{i_2}, \dots, \mathbf{u}_{i_m}) a^{[m]}(\mathbf{v}, \mathbf{u}_{i_2}, \dots, \mathbf{u}_{i_m})$$

$$f_n(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i_1-1}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_{i_1+1}, \dots \mathbf{u}_n) d\mathbf{v} - a^{[m]}(\mathbf{u}_{i_1}, \dots, \mathbf{u}_{i_m}) f_n(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \Big),$$

де $\varepsilon > 0$ – скейлінговий параметр та $\int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n} d\mathbf{u}_1\dots d\mathbf{u}_n \equiv \sum_{j_1\in\mathcal{J}}\dots\sum_{j_n\in\mathcal{J}}\int_{\mathcal{U}^n} du_1\dots du_n$. Функції $a^{[k]}(\mathbf{u}_{i_1},\dots,\mathbf{u}_{i_k})$, $k \geq 1$, характеризують взаємодію між активними частинками, зокрема, у випадку $k=1$ – взаємодію частинок з оточенням, і є вимірними позитивними обмеженими функціями визначеними на $(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n$ такими, що $0 \leq a^{[k]}(\mathbf{u}_{i_1},\dots,\mathbf{u}_{i_k}) \leq a_*^{[k]}$, де $a_*^{[k]}$ – деяка стала. Вимірні інтегровані позитивні функції $A^{[k]}(\mathbf{v};\mathbf{u}_{i_1},\dots,\mathbf{u}_{i_k})$, $k\geq 1$, описують імовірність переходу i_1-ої активної частинки з мікроскопічного стану u_{i_1} в стан v в результаті взаємодії з активними частинками, які знаходяться в станах $u_{i_2},\dots,u_{i_k}$. Функції $A^{[k]}(\mathbf{v};\mathbf{u}_{i_1},\dots,\mathbf{u}_{i_k})$, $k\geq 1$, задовольняють таким умовам: $\int_{\mathcal{J}\times\mathcal{U}} A^{[k]}(\mathbf{v};\mathbf{u}_{i_1},\dots,\mathbf{u}_{i_k})d\mathbf{v} = 1$, $k \geq 1$. В роботі [5] наведено приклади функцій $a^{[k]}$ і $A^{[k]}$, які мають відповідну інтерпретацію для систем математичної біології. У випадку $k=1$ генератор (1) має таку структуру: $\sum_{i_1=1}^{n}\Lambda_n^{[1]}(i_1)$, і він описує еволюцію невзаємодіючих складових (стохастичних процесів) системи. Випадок $k\geq 2$ відповідає системі стохастичних процесів з k-арною взаємодією. Такий тип взаємодії є характерним для біологічних систем в порівнянні з системами багатьох частинок кінетичної теорії, наприклад, газів атомів з парним потенціалом взаємодії.

В просторі L_n^1 однопараметрична сім'я відображень $e^{t\Lambda_n^*}$ є сильно неперервною півгрупою операторів.

Один зі способів опису динаміки багаточастинкової системи: в термінах маргінальних функцій розподілу $F(t) = (1, F_1(t,\mathbf{u}_1),\dots,F_s(t,\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_s),\dots)$. Еволюція маргінальних функцій розподілу визначається задачею Коші для ієрархії еволюційних рівнянь ББГКІ (ієрархії рівнянь Боголюбова – Борна – Ґріна – Кірквуда – Івона) [5]

$$\frac{\partial}{\partial t}F_s(t\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_s) = \Lambda_s^* F_s(t,\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_s) + \tag{2}$$
$$\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{k!}\sum_{i_1\neq\dots\neq i_k=1}^{s}\sum_{n=1}^{M-k}\frac{\varepsilon^{k+n-1}}{n!}\int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n} d\mathbf{u}_{s+1}\dots d\mathbf{u}_{s+n}\Lambda^{*[k+n]}(i_1,\dots,$$
$$i_k, s+1,\dots,s+n)F_{s+n}(t,\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_{s+n}), \quad s\geq 1.$$

Якщо послідовність початкових маргінальних функцій розподілу $F(0) = (F_0, F_1^{0,\varepsilon},\dots,F_s^{0,\varepsilon},\dots) \in L_0^1 \subset \oplus_{n=0}^{\infty}\alpha^n L^1((\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n)$ та $\alpha > 2$, то $\forall t \geq 0$ існує і єдиний розв'язок задачі Коші для ієрархії рівнянь (2), що визначається такими розкладами [9]:

$$F_s(t, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s) = \tag{3}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n} d\mathbf{u}_{s+1} \ldots d\mathbf{u}_{s+n} \mathfrak{A}^*_{1+n}(t, \{Y\}, X \setminus Y) F^{0,\varepsilon}_{s+n}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{s+n}),$$

Твірний оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(t)$ розкладу (3) є кумулянтом $(1+n)$-го порядку півгруп операторів $\{e^{t\Lambda^*_k}\}_{t\geq 0}$, $k \geq 1$, який визначається формулою

$$\mathfrak{A}^*_{1+n}(t, \{Y\}, X \setminus Y) = \tag{4}$$
$$\sum_{\mathrm{P}:\, (\{Y\},\, X\setminus Y) = \bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)! \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} e^{t\Lambda^*_{|\theta(X_i)|}},$$

де множини індексів позначено відповідними символами: $Y \equiv (1, \ldots, s)$, $Z \equiv (j_1, \ldots, j_n) \subset Y$; множина $\{Y \setminus Z\}$ складається з одного елементу $Y \setminus Z = (1, \ldots, j_1 - 1, j_1 + 1, \ldots, j_n - 1, j_n + 1, \ldots, s)$; символ $\sum_{\mathrm{P}}$ – сума за всіма можливими розбиттям P множини $(\{Y \setminus Z\}, Z)$ на $|\mathrm{P}|$ непорожніх підмножин $Z_i \in (\{Y \setminus Z\}, Z)$, які взаємно не перетинаються, та відображення $\theta(\cdot)$ є оператором декластерізації елементів множини: $\theta(\{Y \setminus Z\}, Z) = Y$.

3 Асимптотика розв'язку ієрархії рівнянь ББГКІ для маргінальних функцій розподілу

В даному розділі дослідимо асимптотику розв'язку ієрархії рівнянь ББГКІ в границі самоузгодженого поля.

Для спрощення викладок будемо розглядати випадок двох субпопуляцій в системі, тобто $M = 2$.

Нехай послідовність функцій розподілу $f^0 \in L^1(\mathcal{J} \times \mathcal{U})$ – є граничною для початкових даних $F(0)$, тобто існує така границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\| \varepsilon^s F^{0,\varepsilon}_s - f^0_s \right\|_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})} = 0.$$

Тоді на скінченому проміжку часу $t \in (0, t_0)$, в такому ж сенсі існує границя розв'язку (3) задачі Коші для їєрархії рівняннь (2)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\| \varepsilon^s F_s(t) - f_s(t) \right\|_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})} = 0, \tag{5}$$

яка зображується розкладом в такий ряд:

$$f_s(t,\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_s) = \tag{6}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n} d\mathbf{u}_{s+1}\dots d\mathbf{u}_{s+n}\int\limits_0^t dt_1\dots\int\limits_0^{t_{n-1}} dt_n e^{(t-t_1)\Lambda^{*[1]}_{s+n}(1,\dots,s+n)}\times$$
$$\sum_{i=0}^{s}\Lambda^{*[2]}(i,s+1)e^{(t_1-t_2)\Lambda^{*[1]}_{s+n}(1,\dots,s+n)}\dots e^{(t_{n-1}-t_n)\Lambda^{*[1]}_{s+n}(1,\dots,s+n)}$$
$$\sum_{i_n=1}^{s+n-1}\Lambda^{*[2]}(i_n,s+n)e^{t_n\Lambda^{*[1]}_{s+n}(1,\dots,s+n)}f^0_{s+n}.$$

Для доведення спочатку встановимо кілька допоміжних тверджень.

Твердження 1 *Для довільної* $f_s(t,\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_s)\in L^1_s$ *справедливе таке співвідношення*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\| e^{t\Lambda^*_s(1,\dots,s)}f_s(t) - e^{t\Lambda^{*[1]}_s(1,\dots,s)}f_s(t)\right\|_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})} = 0.$$

Застосуємо формулу Дюамеля [10]:

$$e^{t\Lambda^*_s(1,\dots,s)}f_s(t) - e^{t\Lambda^{*[1]}_s(1,\dots,s)}f_s(t) = \int\limits_0^t dt_1 e^{(t-t_1)\Lambda^*_s(1,\dots,s)}\times$$
$$\varepsilon\Lambda^{*[2]}_s(1,\dots,s)e^{t_1\Lambda^{*[1]}_s(1,\dots,s)}f_s(t)$$

Використаємо оцінки на групи: $\left\| e^{t\Lambda^*_s(1,\dots,s)}\right\| \le e^{2st(a^{[1]}_*+\varepsilon(s-1)a^{[2]}_*)}$ та $\left\| e^{t\Lambda^{*[1]}_s(1,\dots,s)}\right\| \le e^{2sta^{[1]}_*}$

Отже отримуємо

$$\left\| e^{t\Lambda_s^*(1,\ldots,s)} f_s(t) - e^{t\Lambda_s^{*[1]}(1,\ldots,s)} f_s(t) \right\|_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})} \leq$$

$$\Big| \int_0^t dt_1 e^{2s(t-t_1)(a_*^{[1]}+\varepsilon(s-1)a_*^{[2]})} \varepsilon 2s(s-1)a_*^{[2]} e^{2st_1 a_*^{[1]}} \Big| \left\| f_s(t) \right\|$$

$$e^{2st(a_*^{[1]}+\varepsilon(s-1)a_*^{[2]})} \varepsilon 2s(s-1)a_*^{[2]} \left\| f_s(t) \right\| \Big| \int_0^t dt_1 e^{-2st_1\varepsilon(s-1)a_*^{[2]}} \Big| =$$

$$e^{2st(a_*^{[1]}+\varepsilon(s-1)a_*^{[2]})} \left\| f_s(t) \right\| (1 - e^{2st\varepsilon(s-1)a_*^{[2]}})$$

При $\varepsilon \to 0$ останній вираз обертається в 0.

Твердження 2 *Справедливе таке рекурентне співвідношення для кумулянтів (4) при* $\forall f_s(t, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_s) \in L_s^1$*:*

$$\mathfrak{A}_s(t,1,\ldots,s) f_s(t) = \tag{7}$$

$$= \varepsilon \int_0^t dt_1 e^{(t-t_1)\Lambda_s^{*[1]}(1,\ldots,s)} \sum_{i<j\in(1,\ldots,s)} \Lambda_2^{*[2]}(i,j) \mathfrak{A}_{s-1}(t_1,\mathcal{I}) f_s(t), \quad n \geq 2,$$

де $\mathcal{I} \equiv (\{i,j\}, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, s)$

Перейдемо до доведення основного результату цього розділу. Оскільки ряд (3) є збіжним, то в ньому можна почленно перейти до границі. Розглянемо член ряду при $n = 0$.

$$\varepsilon^s \mathfrak{A}_{1+0}^*(t,\{Y\}) F_s^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s) = e^{t\Lambda_s^*(1,\ldots,s)} \varepsilon^s F_s^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)$$

При $\varepsilon \to 0$, враховуючи твердження (1), отримуємо 0-вий член ряду (6): $e^{t\Lambda_s^{*[1]}(1,\ldots,s)} f_s^0$

Розглянемо 1-ий член ряду (3) та застосуємо твердження (2):

$$\varepsilon^s \int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})} d\mathbf{u}_{s+1} \mathfrak{A}_{1+1}^*(t,\{Y\},\, s+1 \setminus Y) F_{s+1}^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{s+1}) =$$

$$\varepsilon^s \int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n} d\mathbf{u}_{s+1} \varepsilon \int_0^t dt_1 e^{(t-t_1)\Lambda_{s+1}^{*[1]}(1,\ldots,s+1)} \sum_{i=1}^s \Lambda_2^{*[2]}(i,s+1)$$

$$\mathfrak{A}_{1+0}(t_1,\{1,\ldots s+1\}) F_{s+1}^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{s+1})$$

При $\varepsilon \to 0$ отримуємо:

$$\int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n} d\mathbf{u}_{s+1} \int\limits_0^t dt_1 e^{(t-t_1)\Lambda^{*[1]}_{s+1}(1,\ldots,s+1)} \sum_{i=1}^{s} \Lambda^{*[2]}_2(i,s+1)$$
$$e^{t_1\Lambda^{*[1]}_{s+1}(1,\ldots,s+1)} f^0_{s+1}.$$

Таким чином, враховуючи вигляд $(n-1)$-го члену граничного ряду та рекурентні формули для кумулянтів (7) встановлюємо вигляд n-го члену ряду (6), $\forall n$.

Ряд (6) є розв'язком відповідної задачі Коші для граничної ієрархії рівнянь:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s) = \Lambda^{*[1]}_s f_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s) + \tag{8}$$
$$+\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{k!}\sum_{i_1\neq\ldots\neq i_k=1}^{s}\sum_{n=1}^{M-k}\frac{1}{n!}\int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n} d\mathbf{u}_{s+1}\ldots d\mathbf{u}_{s+n}\Lambda^{*[k+n]}(i_1,\ldots,i_k,$$
$$s+1,\ldots,s+n) f_{s+n}(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{s+n}), \quad s\geq 1,$$

4 Асимптотика розв'язку немарківського кінетичного рівняння м'якої активної речовини

Розглянемо стани системи статистично незалежних багатьох марківських процесів, тобто стани, які в початковий момент часу описуються послідовністю маргінальних функцій розподілу, що задовольняють умову хаосу [7]: $F^{(c)} = (1, F_1^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_1),\ldots,\prod_{i=1}^{s} F_1^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_i),\ldots)$, де $F_1^{0,\varepsilon} \in L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})$.

Тоді послідовність маргінальних функцій розподілу в будь-який момент часу може бути визначена за допомогою одночастинкової функції розподілу $F(t \mid F_1(t)) = (1, F_1(t), F_2(t \mid F_1(t)),\ldots,F_s(t \mid F_1(t)),\ldots)$, де

$$F_1(t,\mathbf{u}_1) = \tag{9}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n} d\mathbf{u}_2\ldots d\mathbf{u}_{n+1}\mathfrak{A}^*_{1+n}(t,1,\ldots,n+1)\prod_{i=1}^{n+1}F_1^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_i).$$

Інші елементи послідовності $F(t \mid F_1(t))$ визначаються розкладами в такі ряди:

$$F_s\big(t, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s \mid F_1(t)\big) \doteq \tag{10}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n} d\mathbf{u}_{s+1} \ldots d\mathbf{u}_{s+n}\, \mathfrak{V}_{1+n}(t, \{Y\}, X \setminus Y) \prod_{i=1}^{s+n} F_1(t, \mathbf{u}_i),$$

де твірні еволюційні оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, $n \geq 0$, визначаються такими розкладами:

$$\mathfrak{V}_1(t, \{Y\}) = \widehat{\mathfrak{A}}_1(t, \{Y\}) \doteq e^{t\Lambda_s^*} \prod_{i=1}^{s} e^{-t\Lambda^{*[1]}(i)},$$

$$\mathfrak{V}_2(t, \{Y\}, s+1) = \widehat{\mathfrak{A}}_2(t, \{Y\}, s+1) - \widehat{\mathfrak{A}}_1(t, \{Y\}) \sum_{i_1=1}^{s} \widehat{\mathfrak{A}}_2(t, i_1, s+1),$$

$$\mathfrak{V}_3(t, \{Y\}, s+1, s+2) = \widehat{\mathfrak{A}}_3(t, \{Y\}, s+1, s+2) -$$
$$2!\widehat{\mathfrak{A}}_2(t, \{Y\}, s+1) \sum_{i_1=1}^{s+1} \widehat{\mathfrak{A}}_2(t, i_1, s+2) - \widehat{\mathfrak{A}}_1(t, \{Y\})$$
$$\big(\sum_{i_1=1}^{s} \widehat{\mathfrak{A}}_3(t, i_1, s+1, s+2) - 2! \sum_{i_1=1}^{s} \sum_{i_2=1}^{s+1} \widehat{\mathfrak{A}}_2(t, i_1, s+1) \widehat{\mathfrak{A}}_2(t, i_2, s+2) +$$
$$2! \sum_{1=i_1<i_2}^{s} \widehat{\mathfrak{A}}_2(t, i_1, s+1) \widehat{\mathfrak{A}}_2(t, i_2, s+2)\big),$$

де оператори $\widehat{\mathfrak{A}}_n(t)$, $n \geq 1$, з наведених розкладів є кумулянтами відповідного порядку півгруп операторів розсіяння $\{e^{t\Lambda_k^*} \prod_{i=1}^{k} e^{-t\Lambda^{*[1]}(i)}\}_{t\geq 0}$, $k \geq 1$. Довільного порядку твірні еволюційні оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, $n \geq 0$, визначаються розкладами подібними до аналогічних твірних еволюційних операторів у випадку систем багатьох квантових частинок [**?**]. За умови $\|F_1(t)\|_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})} < e^{-(3s+2)}$, для довільного $t \geq 0$ ряд (10) є збіжним за нормою простору $L^1((\mathcal{J}\times\mathcal{U})^s)$.

В просторі $L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})$ одночастинкова маргінальна функція розподілу (9) задовольняє таку задачу Коші для немарківського кінетичного рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial t}F_1(t,\mathbf{u}_1)=\Lambda^{*[1]}(1)F_1(t,\mathbf{u}_1)+\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\varepsilon^k}{k!}\int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^k}d\mathbf{u}_2\dots d\mathbf{u}_{k+1} \tag{11}$$

$$\sum_{\substack{j_1\neq\ldots\neq j_{k+1}\in\\ \in(1,\ldots,k+1)}}\Lambda^{*[k+1]}(j_1,\ldots,j_{k+1})F_{k+1}\big(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{k+1}\mid F_1(t)\big),$$

$$F_1(t,\mathbf{u}_1)|_{t=0}=F_1^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_1), \tag{12}$$

де функціонали $F_{k+1}\big(t\mid F_1(t)\big)$, $k\geq 1$, визначаються розкладами в ряд (10). В просторі $L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})$ для абстрактної задачі Коші (11),(12) справедливе наступне твердження.

Якщо $F_1^{0,\varepsilon}\in L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})$, тоді за умови, що $\|F_1^{0,\varepsilon}\|_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})}<C<+\infty$, існує єдиний глобальний сильний розв'язок задачі Коші для немарківського кінетичного рівняння (11),(12), який визначається розкладом в ряд (9).

Таким чином, якщо стан системи взаємодіючих стохастичних процесів, якими моделюється еволюція активної м'якої конденсованої речовини, в початковий момент часу визначається одночастинковою маргінальною функцією розподілу, тоді всі можливі стани системи в довільний момент часу можуть бути описані в термінах одночастинкової маргінальної функції розподілу, яка є роз'язком задачі Коші для немарківського кінетичного рівняння (11),(12).

За допомогою немарківського кінетичного рівняння (11) в скейлінгових границях можна обґрунтувати марківського типу кінетичні рівняння для активної м'якої речовини. Розглянемо асимптотичну поведінку розв'язку (9) задачі Коші для немарківського кінетичного рівняння (11),(12) в границі самоузгодженого поля для системи, яка складається з двох субпопуляцій, тобто випадок $M=2$.

Нехай функція розподілу $f_1^0\in L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})$ – границя самоузгодженого поля початкових даних (12), тобто існує така границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big\|\varepsilon\,F_1^{\varepsilon,0}-f_1^0\big\|_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})}=0.$$

Тоді на скінченому проміжку часу $t\in(0,t_0)$, в такому ж сенсі існує границя самоузгодженого поля розв'язку (9) задачі Коші для немарківського кінетичного рівняння (11),(12)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big\|\varepsilon\,F_1(t)-f_1(t)\big\|_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})}=0, \tag{13}$$

яка зображується розкладом в такий ряд

$$f_1(t,\mathbf{u}_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^t dt_1\ldots\int\limits_0^{t_{n-1}}dt_n\int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n}d\mathbf{u}_2\ldots d\mathbf{u}_{n+1}\,e^{(t-t_1)\Lambda^{*[1]}(1)}\times \tag{14}$$

$$\Lambda^{*[2]}(1,2)\prod_{j_1=1}^{2}e^{(t_1-t_2)\Lambda^{*[1]}(j_1)}\ldots\prod_{j_{n-1}=1}^{n}e^{(t_{n-1}-t_n)\Lambda^{*[1]}(j_{n-1})}\times$$

$$\sum_{i_n=1}^{n}\Lambda^{*[2]}(i_n,1+n)\prod_{j_n=1}^{1+n}e^{t_n\Lambda^{*[1]}(j_n)}\prod_{i=1}^{1+n}f_1^0(\mathbf{u}_i).$$

Якщо $f_1^0\in L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})$, тоді гранична функція розподілу (14) є сильним розв'язком задачі Коші для кінетичного рівняння самоузгодженого поля [6]:

$$\frac{\partial}{\partial t}f_1(t,\mathbf{u}_1)=\Lambda^{*[1]}(1)f_1(t,\mathbf{u}_1)+\int_{\mathcal{J}\times\mathcal{U}}d\mathbf{u}_2\Lambda^{*[2]}(1,2)f_1(t,\mathbf{u}_1)f_1(t,\mathbf{u}_2), \tag{15}$$

$$f_1(t,\mathbf{u}_1)|_{t=0}=f_1^0(\mathbf{u}_1). \tag{16}$$

5 Висновки

У даній роботі досліджено асимптотику розв'язку (3) задачі Коші для ієрархії еволюційних рівнянь (2) в границі самоузгодженого поля. Для побудови границі використано формули Дюамеля та рекурентні співвідношення кумулянтів (4) груп операторів $e^{t\Lambda_n^*}$. Встановлено граничну ієрархію (8), для якої граничний ряд (6) є розв'язком.

Також у роботі розглянуто немарківське кінетичне рівняння для активної м'якої речовини (11) та досліджена асимптотичну поведінку розв'язку відповідної задачі Коші.

Література

[1] M.C. Marchetti, J.F. Joanny, S. Ramaswamy, T.B. Liverpool, J. Prost, M. Rao, S.R. Aditi. *Hydrodynamics of soft active matter.* Rev. Mod. Phys. **85**, (2013), 1143 – 1195.

[2] M. Lachowicz. *Links between microscopic and macroscopic descriptions.* In: Multiscale Problems in the Life Sciences. From Microscopic to Macroscopic. Lect. Notes in Math. **1940**, (2008), 201 – 215.

[3] A. Bellouquid, M. Delitala. *Mathematical Modeling of Complex Biological Systems: A Kinetic Theory Approach.* Boston: Birkhäuser, 2006.

[4] N. Bellomo, B. Carbonaro. *Toward a mathematical theory of living systems focusing on developmental biology and evolution: a review and perspectives.* Phys. Life Rev. **8**, (2011), 1.

[5] M. Lachowicz. *Individually-based Markov processes modeling nonlinear systems in mathematical biology.* Nonlinear Analysis: Real World Applications **12**, (2011), 2396.

[6] Yu.Yu. Fedchun, V.I. Gerasimenko *On kinetic models for the evolution of many-entity systems in mathematical biology.* J. Coupled Syst. Multiscale Dyn. **1**, No.2, (2013), 273 – 279.

[7] C. Cercignani, V.I. Gerasimenko, D.Ya. Petrina. *Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations.* Kluwer Acad. Publ., 1997.

[8] H. Spohn. *Kinetic equations from Hamiltonian dynamics: Markovian limits.* Rev. Modern Phys. **53**, (1980), 600–640.

[9] Yu.Yu. Fedchun, V.I. Gerasimenko *Nonperturbative solution expansions of hierarchies of evolution equations in functional derivatives.* Зб. праць ІМ НАН України, **9**, (2012), 347 – 375.

[10] J. Banasiak, L. Arlotti. *Perturbations of Positive Semigroups with Applications.* Springer, 2006.